УДК 519.856; 519.854; 519.85

СТАТИСТИЧЕСКИЙ ПОИСК СТРУКТУР ИНФОРМАЦИОННО-ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СЕТИ

В.В. Малыгин

Исследованы свойства сходимости функции оценки структуры информационно вычислительной сети. На основании полученных результатов предложен статистический метод вероятностного поиска наилучших вариантов построения сети, исследована его эффективность, получены необходимые расчетные таблицы.

Комбинаторный характер задачи оптимизации, возникающей в процессе синтеза структур распределенных информационно-вычислительных сетей, приводит к фактическому отказу от использования детерминированных методов решения по причине чрезмерной длительности неизбежно присутствующих в них переборных процедур. В данных обстоятельствах хорошей альтернативой детерминированным методам становятся различные статистические приемы [1].

Например, перед распределенной вычислительной системой, состоящей из N-узловой вычислительной сети, поставлена общая задача, которая в силу сложности не может быть решена ни на одной из ее отдельных узловых машин[2]. Решение общей задачи предполагается провести после декомпозиции ее на m менее сложных частных задач (ЧЗ) путем распределения их по N узлам вычислительной сети, которое минимизировало бы удельную стоимость передаваемой в системе информации, при условии, что в каждом из узлов может решаться от одной до К =<округлено сверху до целого>=(m/N) частных задач. При этом вычислительная задача представлена информационным графом $\mathbf{\Gamma_F}(\boldsymbol{F},\boldsymbol{T})$, где $\boldsymbol{F}$ – множество частных задач, а $\boldsymbol{T}$ – множество информационных отношений между ними (при допущении $t\in\boldsymbol{T}$ – целое и t=0…T), записанное матрицей информационных потоков (МИП), совпадающей с матрицей инцидентности графа, метка связи в которой описывает количество передаваемой между ЧЗ информации. Вычислительная сеть представлена графом сети $\mathbf{\Gamma_N}(\boldsymbol{N}, \mathbf{D})$, где $\boldsymbol{N}$ – множество сетевых вычислителей числом N, а $\boldsymbol{D}$ – удельная стоимость множества сетевых соединений «точка-точка» между N узлами вычислительной сети (при допущении $d\in\boldsymbol{D}$ - целое и d=0/1), записанным матрицей вычислительной сети (МВС), совпадающей с матрицей инцидентности графа, метка связи в которой описывает удельную стоимость информации, передаваемой между инцидентными вершинами. Качество искомой структуры системы, под которой понимается распределение ЧЗ по узлам сети R, оценивается структурной функцией (СФ) через сумму удельной стоимости всех информационных потоков в сети, объем которых определяется графом задачи, а стоимость – графом сети, а множество взаиморазличных распределений R и формирует комбинаторное пространство Z допустимых решений. Под результатом оптимизации понимается такое подпространство $z \subseteq Z$, все точки которого приводят СФ в экстремум-минимум.

Дискретность пространства определения СФ и ее сложный операторный характер оставляют полный перебор КП единственным методом, гарантирующим получение ее глобального экстремума (ГЭ), однако экспоненциально быстрый рост мощности КП делает его непригодным для решения задач реальной трудоемкости [3]. В этих условиях практически единственными доступными приемами исследования и поиска экстремумов СФ становятся методы, основанные на принципах проб и ошибок и локальной оптимизации. Построение на их основе процедур глобальной оптимизации требует применения или предварительного исследования дополнительных свойств СФ, или (что практически эквивалентно) использования самообучающихся поисковых процедур.

Предлагаемый ниже метод глобальной оптимизации основывается на предположении, что с точки зрения человека, производящего решения каждой индивидуальной задачи, содержание ее начального задания раз от раза меняется *независимым* образом. Это позволяет рассматривать значения характеристик СФ как *случайные* величины и, применив к их исследованию методы теории вероятности и матстатистики, получить необходимую для отыскания ГЭ информацию.

В качестве такой *характеристики* СФ, после исследования (с применением полного перебора их КП) большого числа задач малой размерности, были выбраны статистические характеристики величины относительного размера области КП – S (очевидно, что $0 \le S \le 1$), процедура локального поиска (использовался наискорейший спуск) из любой точки которой приводила бы в глобальный экстремум, а априорное знание значения S позволило бы находить ГЭ за $N_{min} = \log_{(1-S)}(1-P)$ итераций случайного поиска, где P – требуемая вероятность нахождения глобального экстремума.

Исследование статистических свойств величины S проводилось следующим образом. Множество оптимизационных задач разделялось по размерности задачи, в качестве которой была выбрана пара m и N. Оптимизационные задачи, соответствующие этому критерию, объединялись в *метапространство* (МП) оптимизационной задачи G , каждая точка которого является отдельной оптимизационной задачей определяемой парой графов задачи Γ_F и сети Γ_N, что позволяет рассматривать метапространство как прямое произведение элементов множеств всевозможных графов задачи - $\{\Gamma_F\}$ и всевозможных графов задачи $\{\Gamma_N\}$: $G=\{\Gamma_F\}\times\{\Gamma_N\}$.

На основе статистического ряда значений величины S, полученных при исследовании задач, выбираемых из G случайным образом, и применения полного перебора их комбинаторных пространств, строилась функция распределения накопленной частоты или статистическая функция распределения. Известно, что статистическая функция распределения (экспериментальная) сходится к теоретической функции распределения (истинной), если она построена на репрезентативном множестве (выборке) экспериментов. При этом, опираясь на закон больших чисел, уместный в силу чрезвычайно большой мощности метапространства (при $m=5$, $N=3$, $T=10$, формирующих 90-точечные КП, $|G|=5.4T+37$ [3]), можно утверждать, что выборка будет репрезентативной, если она осуществлена случайно и все объекты генеральной совокупности (метапространства) имеют одинаковую вероятность попасть в выборку, и если ее размер достаточно велик для погашения влияния случайности выбора при отклонении статистических законов от глобальных тенденций, задаваемых теоретическими законами.

Определение «достаточности» размера выборки точек метапространства, позволяющего судить о ее репрезентативности, проводилось с использованием критерия согласия Колмогорова. С 95-и процентной вероятностью было установлено, что статистическая функция вероятности перестает заметно изменяться, т.е. сходится к теоретической функции распределения (или просто - функции распределения) S при достижении выборки 150-200 точек метапространства, - оптимизационных задач выбранной размерности. Это дало основания установить условие репрезентативности выборки в данном эксперименте на уровне 300 точек метапространства.

Проведенные исследования позволили установить характерное влияние, оказываемое на функцию распределения S типом используемого в точках МП графа сети Γ_N и определить среди его топологий минимизирующую (топология – кольцо) и максимизирующую (топология - звезда) функцию распределения S, см. рисунок 1. Это дало возможность использовать функцию распределения S, построенную на выборке точек МП с минимизирующей топологией, как нижнюю границу функции распределения S, определяющую максимальную трудоемкость решения задачи заданной размерности.

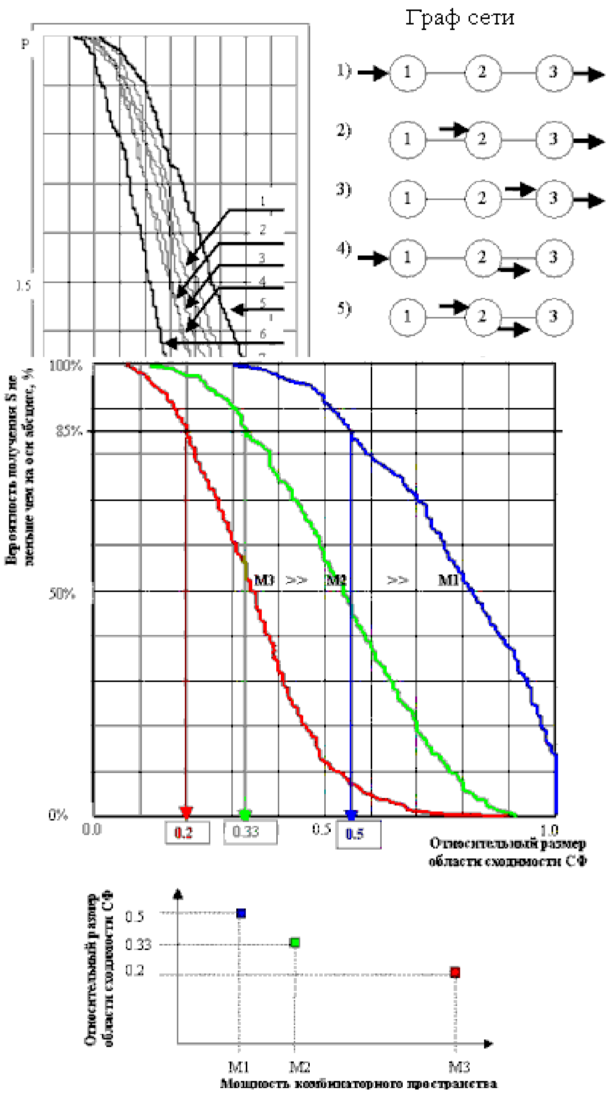

Рисунок 2. Процесс построения функции $S_P(|m|)$

Исследования изменения функции распределения S с ростом размерности оптимизационной задачи позволили свести полученные результаты к форме зависимости значения нижней границы S от мощности КП |m| - $S_P(|m|)$ при выбранном уровне достоверности P определения S, процесс чего поясняется на рисунке 2. В принципе, поскольку функция распределения зависит и от размера графа сети, каждому значению N соответствует своя функция $S_P(|m|)$.

Расширение проведенных выше исследований на задачи больших размерностей в первую очередь столкнулось с невозможностью продолжения определения S исследуемой задачи путем полного перебора из-за чрезмерного возрастания мощности КП. Выходом из этой ситуации стало использование расчета S методом статистического испытания типа Монте-Карло. Вместо перебора КП и определения локального экстремума вблизи каждой точки КП здесь аналогичный поиск производился вблизи каждой случайно выбираемой точки КП, при условии значительного превышения числа этих случайно выбираемых точек над числом локальных экстремумов в КП и их равномерном распределении в нем (в КП). Главной проблемой в реализации этого метода стала практическая неизвестность факта попадания в область сходимости глобального экстремума СФ на КП. Обычным выходом в подобных ситуациях становится использование различных *эвристических* соображений, выглядящих вполне разумно в конкретных условиях, но не имеющих четкого математического обоснования. В данном случае за критерий останова было выбрано *значительное* превышение числа случайных точек КП над количеством найденных локальных экстремумов СФ. Выбранный критерий останова определял меру значительности превышения числа X случайных точек КП над количеством найденных локальных экстремумов СФ Y и выражался функцией – $Y=\xi(X)$. Обобщение данных большого числа исследований областей сходимости СФ на основе процедуры полного перебора КП позволило выбрать линейный характер ξ- функции, представив ее в виде $Y=10\times X$, т.е. десятикратного превышения числа исследованных точек КП над числом найденных локальных экстремумов СФ на нем.

Основанием данному выбору послужили несколько наблюдений. Во-первых, было отмечено, что, несмотря на сложную структуру и КП, и структурной функции, область КП, локальная оптимизация в которой приводит в глобальный экстремум, если и не имеет наибольший размер среди прочих, то является относительно «заметной» в КП. Во-вторых, полный перебор КП размером до 10^7 – 10^8 точек обнаружил практически линейную зависимость числа локальных экстремумов СФ от мощности КП, на котором она построена, смотри таблицу 1.

Таблица 1

Мощность КП, $\log_{10}\lvert m\rvert$	3	4	4.3	5.3	7
Максимальное число ЛЭ	5	7	8	10	13

Естественно, что конечный выбор как линейного характера, так и коэффициента «10» в ξ-функции был достаточно произвольным. Однако выборочное исследование СФ на КП больших точек мощностей (расчеты проводились на КП 10^9-10^{10} точек, при этом машинное время на PC Intel Pentium, 233МГц достигало нескольких суток) показало корректность выбора данного критерия останова.

Аппроксимация экспериментально полученных значений величины S позволила получить аналитическую форму зависимости S от N и |m|, см. таблицу 2.

Таблица 2.(|m|=M)

Количество узлов в вычислительной сети	Нижний предел относительного размера области «сходимости» глобального экстремума, $S^N_{P=95\%}(M)$

3	$1 \times M^{-0.4} + 0.5 \times M^{-0.15}$
4	$1.3 \times M^{-0.35} + 0.15 \times M^{-0.1}$
5	$0.7 \times M^{-0.4} + 0.02 \times M^{-0.05}$

Несмотря на то, что экспоненциально быстрое уменьшение S говорит о столь же быстром росте сложности (длительности) статистического поиска, сам статистический поиск является хорошей альтернативой полному перебору КП, отодвигая границу допустимой сложности (граница которого условно выбиралась как 24 часа машинного времени PC Intel Pentium, 233 МГц) решаемых оптимизационных задач от 10E+8 до 10E+50 точек, что наглядно показано на рис. 3.

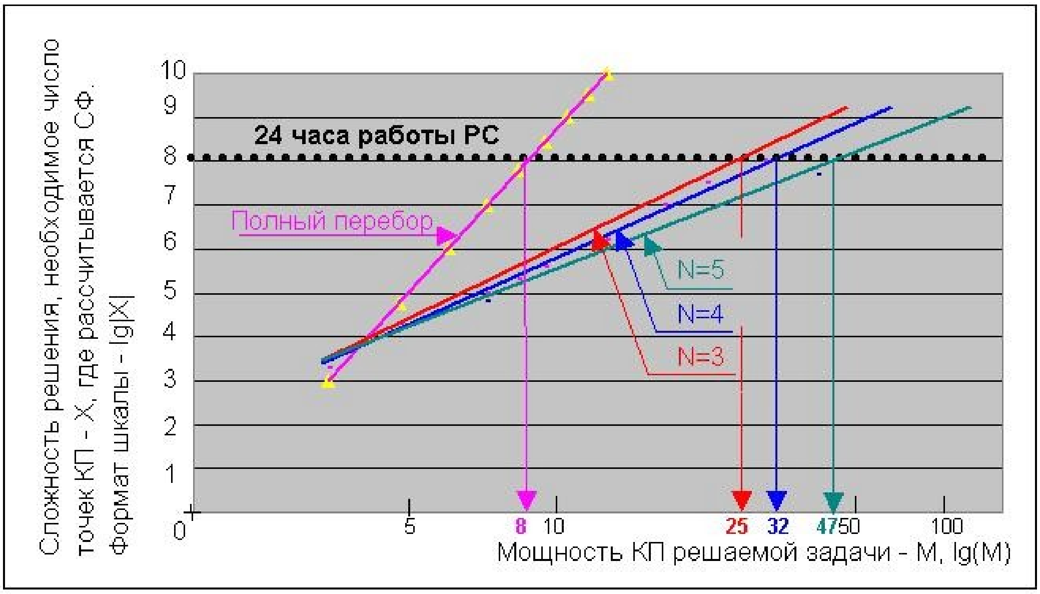

Рисунок 3. Сравнение вычислительной сложности методов гарантированного (полный перебор) и вероятностного (статистический поиск, P=95%) обнаружения глобального экстремума с уровнем допустимой сложности, который условно рассчитан как объем вычислений, производимых PC (Intel Pentium, 233Мгц) за 24 машинного времени.

Таким образом, проведенное исследование статистических свойств комбинаторного пространства и размера области S сходимости СФ к глобальному экстремуму позволило установить влияние, оказываемое на статистические свойства S таких характеристик, как топология графа сети и плотность МИП графа задачи, а также рассчитать изменение S с ростом размерности оптимизационной задачи и предложить в качестве решения задач средней размерности статистический метод, позволяющий с 95% достоверностью находить глобальный экстремум СФ, т.е. наилучшее распределение ЧЗ в вычислительной сети.

Список литературы

1. Растригин Л.А. Статистические методы поиска. - М.: Наука, 1968. - 376 с.

2. Малыгин В.В. Силин В.Б. Проектирование САПР как распределенной информационно вычислительной системы. // Электронный журнал «Труды МАИ». - 2003, №11. - http://www.mai.ru.

3. Малыгин В.В. Основные свойства пространства допустимых распределений задач в вычислительной сети. // Электронный журнал «Труды МАИ». - 2003, №11. - http://www.mai.ru.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Малыгин Владимир Вячеславович, аспирант кафедры радиоэлектроники Московского авиационного института (государственного технического университета),

e-mail:v_malygin@hotmail.com