

Научная статья
УДК 621.391:519.218.82
DOI: [10.34759/trd-2022-126-16](https://doi.org/10.34759/trd-2022-126-16)

ОПТИМАЛЬНАЯ ДИСКРЕТНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ОТСЧЁТОВ НЕПРЕРЫВНОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА НА ФОНЕ КОРРЕЛИРОВАННОГО МАРКОВСКОГО ШУМА

Александр Николаевич Детков

Государственный научно-исследовательский институт авиационных систем,
Москва, Россия

detkov@gosniias.ru

Аннотация. На основе статистически эквивалентного дискретного представления непрерывных моделей векторов состояния и наблюдения решена задача оптимальной линейной фильтрации отсчётов непрерывного векторного марковского случайного процесса с учётом известных статистических характеристик аддитивного марковского коррелированного шума. При синтезе алгоритма фильтрации использован метод разностных измерений. Представлена структура аналого-цифрового преобразования и цифрового фильтра. Влияние ширины полосы спектральной плотности окрашенного шума измерений на точность дискретной и аналоговой фильтрации непрерывного гауссовского марковского случайного процесса обсуждается на простом примере.

Ключевые слова: непрерывный случайный процесс, оптимальная дискретная фильтрация, коррелированный шум, метод разностных измерений

Для цитирования: Детков А.Н. Оптимальная дискретная фильтрация отсчётов непрерывного случайного процесса на фоне коррелированного марковского шума // Труды МАИ. 2022. № 126. DOI: [10.34759/trd-2022-126-16](https://doi.org/10.34759/trd-2022-126-16)

Original article

OPTIMAL DISCRETE FILTERING OF SAMPLES OF A CONTINUOUS RANDOM PROCESS AGAINST THE BACKGROUND OF CORRELATED MARKOV NOISE

Alexandr N. Detkov

State Research Institute of Aviation Systems,

Moscow, Russia

detkov@gosniias.ru

Abstract. In modern onboard information-measuring systems (IMS) of UAV, algorithms for optimal or quasi-optimal processing of random processes are practically implemented using digital signal processing tools. Therefore, these algorithms must be synthesized in a discrete form in the form of recurrent relations that are convenient for such an implementation. However, in most cases, the mathematical models of the processes evaluated and observed in the IMS have a continuous form of recording, which is due to the physical nature of the phenomena occurring with the signals. In this regard, the problem of synthesizing optimal algorithms for discrete filtering of counts of continuous

random processes arises. At the same time, the modern element base makes it possible to use a high sampling rate in on-board IMS, which leads to autocorrelation of measurement readings. Therefore, in the statistical synthesis of filters, it is necessary to take into account the correlation of measurement noise, which significantly affects the generated filtering estimates. In this paper, proposes a new discrete Kalman filter (KF) based on a statistically equivalent discrete representation of continuous state and observation vector models to solve the problem of optimal linear filtering of samples of a continuous vector Markov random process, taking into account the known statistical characteristics of additive vector Markov correlated noise. The problem of filtering a state-space linear model with colored measurement noise and precise noise covariance matrices is converted to a problem of estimating a state-space linear model with white Gaussian measurement noise and precise noise covariance matrices using the measurement difference method and without state vector augmentation. The structure of analog-to-digital conversion and discrete KF is presented. The main feature of this algorithm is the accumulation (integration) of continuous observation on the time intervals between adjacent samples of the estimated state vector. To illustrate the potential characteristics of the accuracy and noise immunity of the synthesized algorithm, a simple example of filtering a continuous Gaussian Markov random process against the background of Markov random noise is considered. From the graphs presented, one can quantify how much analog and discrete algorithms for optimal filtering of a continuous random process depend on the ratio of the width of the spectral density of the measurement noise to the width of the spectral density of the random process and the signal-to-noise ratio. The presented discrete filtering algorithm allows us to quantify the deterioration of the potential characteristics of accuracy and noise

immunity in the case of optimal estimation of continuous random processes due to the coloration of measurement and sampling noise. The use of the method of difference measurements does not increase the computational costs in the discrete KF, since the dimension of the state vector remains unchanged, as in the case of filtering continuous random processes against the background of white Gaussian noise. At the same time, the analog part of the analog-to-digital converter is significantly simplified in comparison with similar algorithms, since a one-cycle delay is implemented in a discrete KF after the ADC. It should also be noted that there is no operation of analog differentiation inherent in classical algorithms for filtering continuous random processes in continuous time using the method of difference measurements.

Keywords: continuous random process, optimal discrete filtering, correlated noise, difference measurement method

For citation: Detkov A.N. Optimal discrete filtering of samples of a continuous random process against the background of correlated Markov noise. *Trudy MAI*, 2022, no. 126.

DOI: [10.34759/trd-2022-126-16](https://doi.org/10.34759/trd-2022-126-16)

Введение

В современных бортовых информационно-измерительных системах (ИИС) [1 - 3] алгоритмы оптимальной или квазиоптимальной обработки случайных процессов практически реализуются с помощью средств цифровой обработки сигналов [4, 5]. Поэтому указанные алгоритмы необходимо синтезировать в дискретной форме в виде рекуррентных соотношений, удобных для такой реализации. Однако в большинстве случаев математические модели оцениваемых и наблюдаемых в ИИС процессов имеют непрерывную форму записи, что обусловлено физической

сущностью происходящих с сигналами явлений. В связи с этим возникает проблема синтеза оптимальных алгоритмов дискретной фильтрации отсчётов непрерывных случайных процессов [6].

В то же время современная элементная база позволяет использовать в бортовых ИИС высокую частоту дискретизации, что приводит к автокорреляции измерительных отсчётов [7, 8]. Поэтому при статистическом синтезе цифровых фильтров (ЦФ) необходимо учитывать коррелированность шумов измерений, которые существенно влияют на формируемые оценки фильтрации [9 – 13].

В случае окрашенных шумов измерений традиционный подход к разработке алгоритмов фильтрации заключается в преобразовании уравнений состояния и измерения к требуемой канонической форме либо методом расширения пространства состояний, либо «декорреляцией» случайного процесса за счёт разностных измерений [9]. Наиболее просто задача решается методом расширения пространства состояний, который используется, например, при статистическом синтезе ЦФ [5]. Однако из-за необходимости фильтрации коррелированного шума наряду с информационным сообщением требуются дополнительные вычислительные затраты, вызванные увеличением размерности $(n + m)$ -мерного расширенного вектора состояния, что особенно критично для многопозиционных ИИС [14]. Метод разностных измерений не требует увеличения размерности вектора состояния, однако для моделей вектора состояния и измерения в дискретном времени оценка вектора состояния формируется с запаздыванием на один шаг, а для моделей вектора состояния и измерения в непрерывном времени требуется некорректная с точки зрения помехоустойчивости операция аналогового

дифференцирования измеренного случайного процесса [9]. Тем не менее, этот метод представляет наибольший практический интерес и используется далее в работе.

Эффективным средством синтеза оптимальных ЦФ является марковская теория оценивания [15, 16], на основе которой в [17, 18] решена задача синтеза алгоритмов оптимальной линейной фильтрации отсчётов непрерывного векторного марковского случайного процесса с учётом известных статистических характеристик аддитивного марковского коррелированного шума и метода разностных измерений. Однако эти алгоритмы практически тяжело реализовать, т.к. требуют сложной аналого-цифровой обработки, в частности, необходимости задержки входного аналогового измеренного случайного процесса на один интервал дискретизации.

Цель статьи: синтез алгоритма оптимальной линейной фильтрации отсчётов непрерывного векторного марковского случайного процесса на фоне коррелированного марковского шума с простой реализацией аналого-цифрового преобразования измеренного входного процесса и перенос обработки этого процесса по методу разностных измерений в цифровую часть оптимального фильтра.

Статистически эквивалентное дискретное представление уравнений состояния и наблюдения, заданных в непрерывном времени

При синтезе оптимальных алгоритмов дискретной обработки непрерывных случайных процессов центральным является вопрос об эквивалентном дискретном представлении уравнений состояния и наблюдения, заданных в непрерывном

времени и описываемых векторным стохастическим дифференциальным уравнением (уравнение состояния) или алгебраическим равенством (уравнение наблюдения), определяющим зависимость наблюдаемых процессов от компонент вектора состояния и помех. Начиная с ранних работ по оптимальному оцениванию (см., например, [19]), при формулировке эквивалентной задачи с дискретным временем традиционно используют подход, при котором дискретные модели записываются непосредственно для этих уравнений. Такие модели обычно применяются для вывода аналоговых алгоритмов оптимального линейного оценивания гауссовских процессов с помощью предельного перехода от алгоритмов, полученных для дискретных процессов, при уменьшении интервала дискретизации [19, 20]. Этот подход позволяет получить правильные алгоритмы оптимального оценивания в непрерывном времени, однако он не применим для синтеза оптимальных алгоритмов дискретной обработки непрерывных случайных процессов. Указанный факт связан, прежде всего, с тем, что мгновенные отсчёты наблюдения при наличии белых гауссовских шумов (БГШ) не имеют смысла, поскольку отсчёты этих шумов имеют бесконечную дисперсию [6, 16].

Корректное эквивалентное дискретное представление аналоговой задачи фильтрации получено в [6, 16] методами теории условных марковских процессов, разработанной Р.Л. Стратоновичем [21]. В рамках этой теории на основании уравнений состояния и наблюдения строится совместный марковский процесс, часть компонент которого является наблюдаемой. Для совместного процесса обычными методами [4, 22] записывается (точно или приближенно) дискретный аналог, для которого и решается соответствующая задача оценивания.

При этом существенным является не вывод дискретных алгоритмов фильтрации, а описание указанной процедуры сведения непрерывной задачи оценивания к дискретной.

Предположим, что на вход m -канального устройства, осуществляющего дискретизацию (аналого-цифровой преобразователь (АЦП) с большим числом уровней квантования) в интервале (t, t_0) поступает совокупность скалярных измерений, объединённых в вектор измерений $\mathbf{y}(t) = [y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)]^T$, представляющий аддитивную смесь

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{H}_y \mathbf{x}(t) + \mathbf{w}(t), \quad (1)$$

оцениваемого непрерывного n -мерного случайного процесса $\mathbf{x}(t)$, который описывается стохастическим дифференциальным уравнением (СДУ),

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}_x \mathbf{x}(t) + \mathbf{G}_x \xi_x(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (2)$$

и коррелированного m -мерного марковского шума $\mathbf{w}(t)$, отождествляемого с вектором состояния дополнительной линейной системы:

$$\frac{d\mathbf{w}(t)}{dt} = \mathbf{A}_w \mathbf{w}(t) + \mathbf{G}_w \xi_w(t), \quad \mathbf{w}(t_0) = \mathbf{w}_0, \quad (3)$$

где \mathbf{H}_y , \mathbf{A}_x , \mathbf{G}_x , \mathbf{A}_w , \mathbf{G}_w – матрицы известных коэффициентов размером $(m \times n)$, $(n \times n)$, $(m \times m)$ соответственно; \mathbf{x}_0 , \mathbf{w}_0 – гауссовские векторы; ξ_x , ξ_w – векторы БГШ размерами $(n \times 1)$ и $(m \times 1)$ соответственно с независимыми значениями и известными статистическими характеристиками $\mathbf{M}\{\xi_x\} = \mathbf{0}$, $\mathbf{M}\{\xi_w\} = \mathbf{0}$, $\mathbf{M}\{\xi_x(t)\xi_x^T(t+\tau)\} = \mathbf{I}\delta(\tau)$, $\mathbf{M}\{\xi_w(t)\xi_w^T(t+\tau)\} = \mathbf{I}\delta(\tau)$, $\mathbf{0}$, \mathbf{I} – нулевая и единичная

матрицы соответствующих размерностей, $\mathbf{M}\{\cdot\}$ – операция усреднения по множеству реализаций, \mathbf{T} – знак транспонирования, $\delta(\tau)$ – δ -функция Дирака.

В соответствии с методом разностных измерений в непрерывном времени эквивалентное уравнение измерений имеет канонический вид [9]

$$\mathbf{y}_3(t) = \frac{d\mathbf{y}(t)}{dt} - \mathbf{A}_w \mathbf{y}(t) = \mathbf{F}_y \mathbf{x}(t) + \mathbf{n}_3(t), \quad (4)$$

где $\mathbf{F}_y = \mathbf{H}_y \mathbf{A}_x - \mathbf{A}_w \mathbf{H}_y$; $\mathbf{n}_3(t) = \mathbf{H}_y \mathbf{G}_x \xi_x(t) + \mathbf{G}_w \xi_w(t)$ – вектор БГШ со статистическими характеристиками

$$\mathbf{M}\{\mathbf{n}_3\} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M}\{\mathbf{n}_3(t) \mathbf{n}_3^T(t + \tau)\} = (\mathbf{H}_y \mathbf{G}_x \mathbf{G}_x^T \mathbf{H}_y^T + \mathbf{G}_w \mathbf{G}_w^T) \delta(\tau).$$

Из (4) видно, что эквивалентное измерение вектора случайного процесса $\mathbf{x}(t)$ происходит на фоне вектора БГШ \mathbf{n}_3 за счёт компенсации корреляционных связей процесса $\mathbf{w}(t)$, характеризуемых матрицей \mathbf{A}_w .

Однако дискретизация в АЦП процесса $\mathbf{y}_3(t)$ наиболее часто осуществляется выборочными мгновенными значениями, для которых весовая функция выбора представляет собой δ -функцию [6]. Такой подход является некорректным при синтезе алгоритмов цифровой фильтрации непрерывных случайных сообщений, так как мгновенные отсчёты при наличии в измерениях БГШ не имеют смысла, поскольку имеют бесконечную дисперсию [4]. В этом случае требуется эквивалентное разностное представление математических моделей оцениваемых и измеряемых процессов, имеющих непрерывную форму записи. Для этого перепишем (4) так, чтобы статистическая динамика векторного процесса $\mathbf{y}(t)$ описывалась СДУ

$$\frac{y(t)}{dt} = \mathbf{A}_w y(t) + \mathbf{F}_y x(t) + \mathbf{H}_y \mathbf{G}_x \xi_x(t) + \mathbf{G}_w \xi_w(t), \quad y(t_0) = y_0. \quad (5)$$

Воспользуемся далее методами теории условных марковских процессов [21], в соответствии с которыми модели (2), (5) описываются в виде совместного марковского процесса $\mathbf{z}(t) = [\mathbf{x}^T, \mathbf{y}^T]^T$, СДУ

$$\frac{d\mathbf{z}(t)}{dt} = \mathbf{F}_z \mathbf{z}(t) + \mathbf{G}_z \xi_z(t), \quad \mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0, \quad (6)$$

где

$$\mathbf{F}_z = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_x & \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_y & \mathbf{A}_w \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_z = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_x & \mathbf{0} \\ \mathbf{H}_y \mathbf{G}_x & \mathbf{G}_w \end{bmatrix}, \quad \xi_z = \begin{bmatrix} \xi_x \\ \xi_w \end{bmatrix}.$$

Решение уравнения (6) имеет вид [22]

$$\mathbf{z}(t) = \Phi_{zz}(t, t_0) \mathbf{z}_0 + \int_{t_0}^t \Phi_{zz}(t, \tau) \mathbf{G}_z \xi_z(\tau) d\tau, \quad \mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0, \quad (7)$$

где фундаментальная матрица решений Φ_{zz} удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi_{zz} = \mathbf{F}_z(t) \Phi_{zz}(t, t_0), \quad \Phi_{zz}(t, t_0) = \mathbf{I}_{n+m}. \quad (8)$$

Интеграл в правой части равенства (7) представляет собой векторный гауссовский процесс с нулевым математическим ожиданием и матрицей центральных моментов второго порядка:

$$\mathbf{B}_{zz}(t, t_0) = \int_{t_0}^t \Phi_{zz}(t, \tau) \mathbf{G}_z \mathbf{G}_z^T \Phi_{zz}^T(t, \tau) d\tau, \quad \mathbf{B}_{zz}(t_0, t_0) = \mathbf{0}. \quad (9)$$

С учётом (8), (9), СДУ (6) может быть представлено в статистически эквивалентной форме в виде разностного уравнения с шагом дискретизации $\Delta = t_k - t_{k-1}$, ($k = 1, 2, 3, \dots$ – дискретное время)

$$\mathbf{z}(k) = \Phi_{zz}(k, k-1)\mathbf{z}(k-1) + \Gamma_{zz}(k, k-1)\mathbf{n}_z(k-1), \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0, \quad (10)$$

в котором используются обозначения

$$\Phi_{zz} = \begin{bmatrix} \Phi_{xx} & \mathbf{0} \\ \Phi_{yx} & \Phi_{yy} \end{bmatrix}, \quad \Gamma_{zz} = \begin{bmatrix} \Gamma_{xx} & \mathbf{0} \\ \Gamma_{yx} & \Gamma_{yy} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{n}_z = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_x \\ \mathbf{n}_y \end{bmatrix}.$$

В рассматриваемом случае \mathbf{n}_x и \mathbf{n}_y – векторы размером $(n \times 1)$ и $(m \times 1)$ соответственно независимых гауссовских случайных величин с нулевыми математическими ожиданиями и единичными дисперсиями.

Элементы блочной матрицы $\mathbf{B}_{zz} = \Gamma_{zz}\Gamma_{zz}^T$ имеют вид:

$$\mathbf{B}_{zz} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{xx} & \mathbf{B}_{xy} \\ \mathbf{B}_{yx} & \mathbf{B}_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_{xx}\Gamma_{xx}^T & \Gamma_{xx}\Gamma_{yx}^T \\ \Gamma_{yx}\Gamma_{xx}^T & \Gamma_{yx}\Gamma_{yx}^T + \Gamma_{yy}\Gamma_{yy}^T \end{bmatrix},$$

где Γ_{zz} , Γ_{xx} , Γ_{yx} , Γ_{yy} – нижние треугольные матрицы, формируемые из соответствующих элементов блочной матрицы \mathbf{B}_{zz} , например, с помощью алгоритма Холецкого [23].

Таким образом, для неперекрывающихся интервалов времени уравнения состояния (2) и наблюдения (5) могут быть представлены из (10) в статистически эквивалентной форме:

$$\mathbf{x}(k) = \Phi_{xx}(k, k-1)\mathbf{x}(k-1) + \Gamma_{xx}(k, k-1)\mathbf{n}_x(k-1), \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0, \quad (11)$$

$$\mathbf{y}(k) = \Phi_{yx}(k, k-1)\mathbf{x}(k-1) + \Phi_{yy}(k, k-1)\mathbf{y}(k-1) +$$

$$+ \Gamma_{yx}(k, k-1)\mathbf{n}_x(k-1) + \Gamma_{yy}(k, k-1)\mathbf{n}_w(k-1), \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0. \quad (12)$$

Эквивалентное дискретное представление (11), (12) непрерывных моделей векторов сообщения (2) и измерения (5) является абсолютно точным в том смысле, что для любых $t_k - t_{k-1} > 0$ оно позволяет получить случайные процессы с теми же статистическими характеристиками, как и решение системы СДУ (2), (5), без погрешностей аппроксимации [6].

Алгоритм оптимальной дискретной фильтрация отсчётов непрерывного случайного процесса на фоне коррелированного марковского шума на основе метода разностных измерений

Применительно к моделям векторов наблюдения и состояния (2), (5) эквивалентное дискретное представление (8), (9) позволяет получить оптимальный дискретный алгоритм фильтрации. В частности, для любой допустимой функции потерь оптимальная в среднеквадратичном смысле оценка $\mathbf{x}^*(k)$ отсчётов вектора $\mathbf{x}(t_k)$ непрерывного сообщения (2) и ковариационная матрица ошибок дискретной фильтрации $\mathbf{R}_{xx}(k)$ определяются рекуррентными соотношениями

$$\mathbf{x}^*(k) = \Phi_{xx}(k, k-1)\mathbf{x}^*(k-1) + \mathbf{K}(k)\left(\mathbf{y}(k) - \Phi_{yy}(k, k-1)\mathbf{y}(k) - \Phi_{yx}(k, k-1)\mathbf{x}^*(k-1)\right),$$

$$\mathbf{X}^*(0) = \mathbf{M}\{\mathbf{X}_0\}, \quad (10)$$

$$\mathbf{R}_{xx}(k) = \mathbf{K}_{xx}(k | k-1) - \mathbf{K}_{xy}(k | k-1)\mathbf{K}_{yy}^{-1}(k | k-1)\mathbf{K}_{xy}^T(k | k-1), \quad (11)$$

$$\mathbf{K}(k) = \mathbf{K}_{xy}(k | k-1)\mathbf{K}_{yy}^{-1}(k | k-1), \quad (12)$$

где

$$\mathbf{K}_{xx}(k | k-1) = \Phi_{xx}(k, k-1)\mathbf{R}_{xx}(k-1)\Phi_{xx}^T(k, k-1) + \mathbf{B}_{xx}(k, k-1);$$

$$\mathbf{K}_{xy}(k | k-1) = \Phi_{xx}(k, k-1)\mathbf{R}_{xx}(k-1)\Phi_{yx}^T(k, k-1) + \mathbf{B}_{xy}(k, k-1),$$

$$\mathbf{K}_{yy}(k | k-1) = \Phi_{yx}(k, k-1)\mathbf{R}_{xx}(k-1)\Phi_{yx}^T(k, k-1) + \mathbf{B}_{yy}(k, k-1),$$

$$\mathbf{R}_{xx}(0) = \mathbf{M}\left\{ \left[\mathbf{X}_0 - \mathbf{X}^*(0) \right] \left[\mathbf{X}_0 - \mathbf{X}^*(0) \right]^T \right\}.$$

С учётом (5), (7) выражение (10) можно представить в виде

$$\mathbf{x}^*(k) = \Phi_{xx}(k, k-1)\mathbf{x}^*(k-1) + \mathbf{K}(k) \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathbf{y}(\tau) d\tau - \Phi_{yy}(k, k-1)\mathbf{y}(k-1) - \Phi_{yx}(k, k-1)\mathbf{x}^*(k-1) \right),$$

$$\mathbf{X}^*(0) = \mathbf{M}\{\mathbf{X}_0\}. \quad (13)$$

Рекуррентное соотношение (13) совместно с (11), (12) полностью определяет алгоритмы дискретной обработки непрерывного наблюдаемого процесса (1) для получения оптимальной текущей оценки $\mathbf{x}^*(k) \equiv \mathbf{x}^*(t_k)$ отсчётов вектора состояния (2). Основной особенностью этого алгоритма является накопление (интегрирование) непрерывного наблюдения (1) на интервалах времени между соседними отсчётами оцениваемого вектора состояния. При этом, как обычно, соотношения (11) и (12) позволяют заранее рассчитать оптимальные коэффициенты передачи дискретного фильтра и статистические характеристики погрешностей фильтрации [6, 16].

Для иллюстрации потенциальных характеристик точности и помехоустойчивости синтезированного алгоритма рассмотрим простой пример.

Пример

Пусть на входе АЦП действует гауссовский марковский непрерывный случайный процесс

$$y(t) = hx(t) + w(t). \quad (14)$$

Требуется по наблюдаемым дискретным отсчётам $y(k)$ получить оптимальную оценку $x^*(k) \equiv x^*(t_k)$ отсчётов непрерывного случайного процесса $x(t)$, описываемого СДУ:

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha_x x(t) + \sqrt{2\alpha_x} \xi_x(t) \quad (15)$$

на фоне гауссовских марковских шумов измерений $w(t)$

$$\frac{dw}{dt} = -\alpha_w w(t) + \sqrt{\frac{2\alpha_w}{q}} \xi_w(t). \quad (16)$$

Здесь α_x , α_w – коэффициенты, характеризующие ширину спектральной плотности непрерывного оцениваемого случайного процесса и коррелированного шума измерений соответственно; h – известный коэффициент; $q = \sigma_x^2 / \sigma_w^2$ – отношение дисперсии процесса $x(t)$ к дисперсии шума; $\xi_x(t)$ и $\xi_w(t)$ – стандартные БГШ с нулевыми математическими ожиданиями и единичными интенсивностями.

Согласно (13), оптимальные оценки отсчётов непрерывного сообщения по наблюдаемым дискретным отсчётам вычисляются из уравнения

$$x^*(k) = \Phi_{xx}(\Delta)x^*(k-1) + K(k) \left(\int_0^{\Delta} y(\tau) d\tau - \Phi_{yy}(\Delta)y(k-1) - \Phi_{xx}(\Delta)x^*(k-1) \right), \quad (17)$$

а оптимальный коэффициент усиления $K(k)$ рассчитывается по формуле (12) при следующих априорных значениях:

$$\Phi_{xx}(\Delta) = \exp\{-\alpha_x\Delta\}, \quad \Phi_{yx}(\Delta) = h(\exp\{-\alpha_x\Delta\} - \exp\{-\alpha_w\Delta\});$$

$$\Phi_{yy}(\Delta) = \exp\{-\alpha_w\Delta\}; \quad B_{xx}(\Delta) = 1 - \exp\{-2\alpha_x\Delta\},$$

где $\alpha_x\Delta$, $\alpha_w\Delta$ – безразмерные коэффициенты, Δ – интервал дискретизации.

Значения $B_{yx}(\Delta)$, $B_{yy}(\Delta)$ даже для моделей первого порядка (15), (16) имеют громоздкие аналитические выражения, поэтому здесь не приводятся и рассчитывались численным методом из выражения (9).

Уравнения (11), (12), (17) определяют структуру АЦП и ЦФ, который по критерию минимума среднего квадрата ошибки оптимальным образом оценивает отсчёты непрерывного гауссовского марковского случайного процесса (15) на фоне гауссовского марковского шума (16). Структурная схема АЦП и ЦФ представлена на рис. 1.

Из (17) следует, что значения $y(k)$ формируются из предварительно проинтегрированного аналоговым образом непрерывного процесса $y(t)$ за время одного такта, обнуляя интегратор в конце каждого такта.

Для того чтобы оценить влияние ширины полосы спектральной плотности окрашенного шума измерения на точность фильтрации отсчётов непрерывного гауссовского марковского случайного процесса (15) с учётом коррелированности шумов измерений, из (11) определялись стационарные значения относительных дисперсий погрешностей оптимальной дискретной фильтрации

$$\delta = R_{xx}(k) \equiv R_{xx}(k-1).$$

На рис. 2 представлены графики зависимостей амплитуды отсчётов A_m гауссовского марковского случайного процесса, измерений и оценок от дискретного

времени k при $h = 1$, $q = 10$ и различных значениях коэффициента $\gamma = \alpha_w / \alpha_x$: $\gamma = 10$ (рис. 2,а); $\gamma = 2$ (рис. 2,б). На рис. 3 представлены графики зависимостей относительной дисперсии погрешности оптимальной дискретной фильтрации δ от коэффициента γ при $h = 1$ и разных отношения сигнал/шум q . На этом же рисунке для сравнения показаны зависимости стационарных значений дисперсий погрешностей оптимальной аналоговой фильтрации ($\Delta = 0$) [4]:

$$\delta_0 = \frac{2\gamma(1+1/q)}{(1-\gamma)^2} \left\{ \sqrt{1 + \frac{(1-\gamma)^2/q}{\gamma(1+1/q)^2}} - 1 \right\}.$$

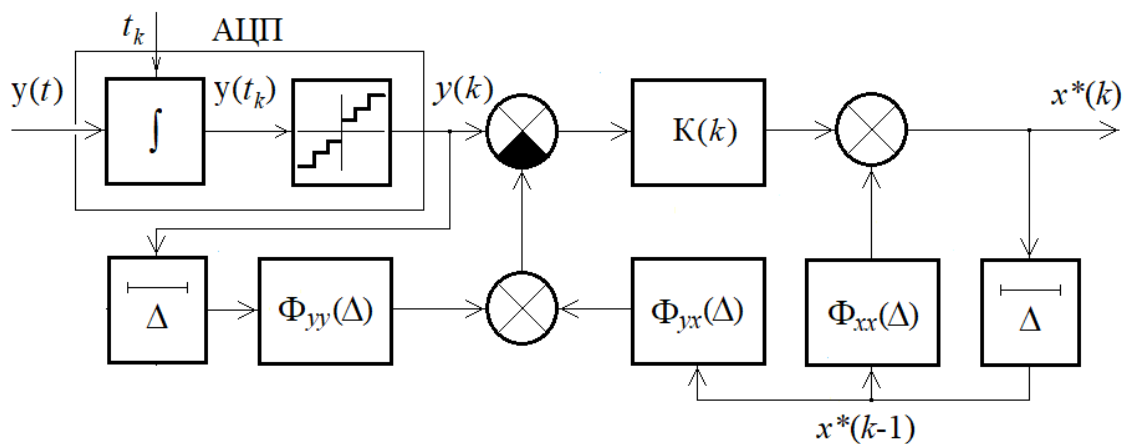


Рис. 1. Структурная схема АЦП и рекуррентного цифрового фильтра

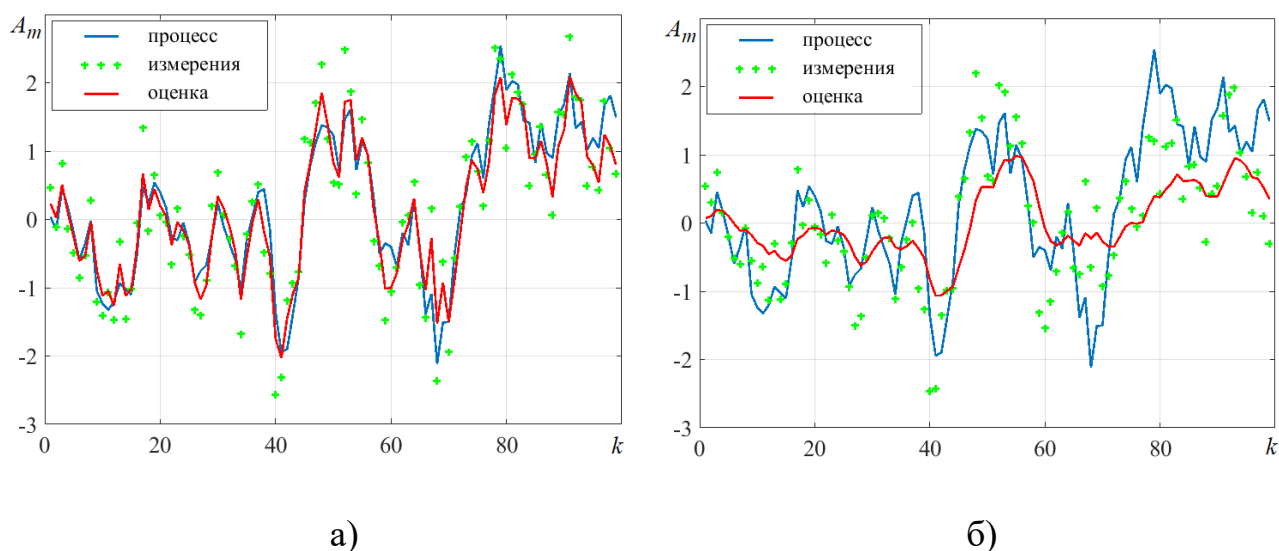


Рис. 2. Реализации случайных процессов, измерений на фоне окрашенных шумов и оценок: (а) $\gamma = 10$; (б) $\gamma = 2$

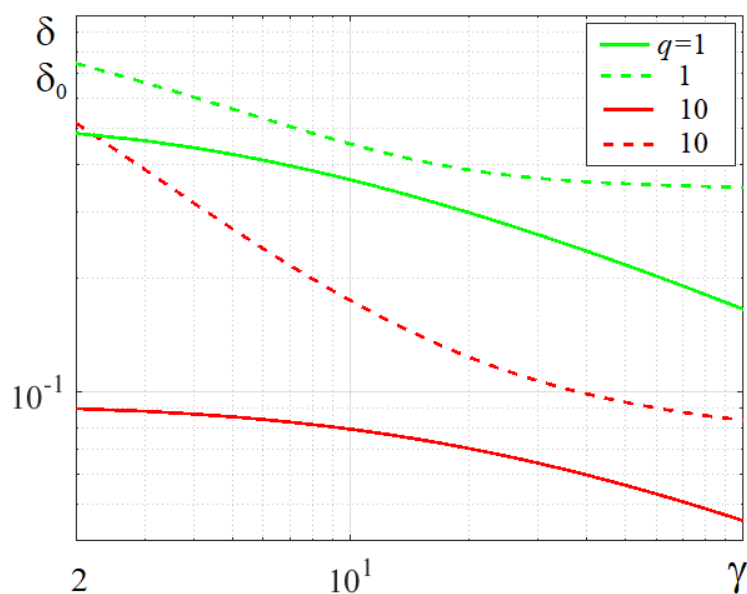


Рис. 3. Зависимости относительных дисперсий погрешностей: оптимальной дискретной фильтрации δ (пунктир) и оптимальной аналоговой фильтрации δ_0 (сплошная) от коэффициента $\gamma = \alpha_w / \alpha_x$ при разных отношениях сигнал/шум q

Из графиков можно количественно оценить, насколько аналоговые и дискретные алгоритмы оптимальной фильтрации непрерывного случайного процесса зависят от отношения ширины спектральной плотности шума измерения к ширине спектральной плотности случайного процесса γ и отношения сигнал/шум q . К общим закономерностям следует отнести большую зависимость точности оценивания от отношения сигнал/шум, чем от параметра γ .

Заключение

Приведённый алгоритм дискретной фильтрации позволяют количественно оценить ухудшение потенциальных характеристик точности и помехоустойчивости при оптимальном оценивании непрерывных случайных процессов из-за окрашенности шумов измерений и дискретизации. При этом влияние квантования по уровням может учитываться согласно методике [4, 17].

Применение метода разностных измерений не увеличивает вычислительные затраты в цифровом фильтре, так как размерность вектора состояния остается неизменной как и при фильтрации непрерывных случайных процессов на фоне БГШ. В тоже время существенно упрощается аналоговая часть АЦП по сравнению с аналогичными алгоритмами [17, 18], т.к. задержка на один такт реализуется в ЦФ после АЦП, а также следует отметить отсутствие операции аналогового дифференцирования присущей классическим алгоритмам фильтрации непрерывных случайных процессов в непрерывном времени по методу разностных измерений [9].

Список источников

1. Бухалёв В.А., Болдинов В.А. Фильтрация сигналов при низкочастотных помехах в измерительно-информационных системах беспилотных летательных аппаратов // Труды МАИ. 2017. № 97. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=87283>
2. Грошев А.В. Стратегия алгоритмического повышения точностных характеристик и информационной надежности инерциально-спутниковых навигационных систем в составе беспилотных летательных аппаратов // Труды МАИ. 2019. № 104. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=102217>
3. Чернодаров А.В., Патрикеев А.П., Коврегин В.Н., Коврегина Г.М., Меркулова И.И. Лётная отработка распределённой системы инерциально-спутниковой микронавигации для радиолокатора с синтезированной апертурой // Научный Вестник МГТУ ГА. 2017. Т. 20. № 1. С. 222-231.
4. Тихонов В.И., Харисов В.Н. Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем. – М.: Радио и связь, 1991. – 624 с.
5. Величкин А.И. Статистический синтез цифровых фильтров // Радиотехника и электроника. 1990. Т. 35. № 7. С. 1471-1480.
6. Миронов М.А. Оптимальная дискретная обработка непрерывных процессов // Радиотехника и электроника. 1993. Т. 38. № 1. С. 141-149.
7. Чернодаров А.В., Иванов С.А. Идентификация моделей и адаптивная фильтрация шумов инерциальных измерителей // Труды МАИ. 2018. № 99. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=91962>

8. Xu Y., Shmaliy Y.S., Shen T., Chen D., Sun M. INS/UWB-Based Quadrotor Localization Under Colored Measurement Noise // IEEE Sensors Journal, 2021, vol. 21, no. 5, pp. 6384-6392. DOI: [10.1109/JSEN.2020.3038242](https://doi.org/10.1109/JSEN.2020.3038242)
9. Sage A.P., Melsa J.L. Estimation Theory With Applications to Communication and Control, New York, McGraw-Hill, 1971, 529 p.
10. Jain B. Bounding estimators for systems with colored noise // IEEE Transactions on Automatic Control, 1975, vol. 20, no. 3, pp. 365–368. DOI: [10.1109/TAC.1975.1100979](https://doi.org/10.1109/TAC.1975.1100979)
11. Stavrou P.A., Skoglund M. New Formulation and Computation of NRDF for Time-Varying Multivariate Gaussian Processes With Correlated Noise // IEEE Control Systems Letters, 2022, vol. 6, pp. 331–336. DOI: [10.1109/LCSYS.2021.3074455](https://doi.org/10.1109/LCSYS.2021.3074455)
12. Косачев И.М., Чугай К.Н., Рыбаков К.А. Методология высокоточной нелинейной фильтрации случайных процессов в стохастических динамических системах с фиксированной структурой. Часть 1 // Труды МАИ. 2019. № 105. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=104262>
13. Косачев И.М., Чугай К.Н., Рыбаков К.А. Методология высокоточной нелинейной фильтрации случайных процессов в стохастических динамических системах с фиксированной структурой. Часть 2 // Труды МАИ. 2019. № 106. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=104262>
14. Luo Y., Zhou J., Yang W. Distributed State Estimation With Colored Noises // IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs, 2022, vol. 69, no 6, pp. 2807–2811. DOI: [10.1109/TCSII.2021.3136184](https://doi.org/10.1109/TCSII.2021.3136184)
15. Ярлыков М.С., Миронов М.А. Марковская теория оценивания случайных процессов. – М.: Радио и связь, 1993. – 460 с.

16. Миронов М.А. Марковская теория оптимального оценивания случайных процессов. - М.: Изд-во ФГУП «ГосНИИАС», 2013. – 193 с.
17. Детков А.Н. Линейная фильтрация отсчётов непрерывного векторного сообщения на фоне коррелированного марковского шума по наблюдаемым цифровым сигналам // Радиотехника и электроника. 1995. Т. 40. № 9. С. 1406-1413.
18. Детков А.Н. Статистическая цифровая фильтрация непрерывных случайных процессов при окрашенных шумах измерений // Известия АН. Теория и системы управления. 1997. № 1. С. 59-64.
19. Ярлыков М.С. Применение марковской теории нелинейной фильтрации в радиотехнике. – М.: Советское радио, 1980. – 358 с.
20. Медич Дж. Статистически оптимальные линейные оценки и управление / Пер. с англ. под ред. А.С. Шаталова. – М.: Энергия, 1973. – 440 с.
21. Стратонович Р.Л. Условные марковские процессы и их применение к теории оптимального управления. – М.: Изд-во МГУ, 1966. – 319 с.
22. Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские процессы. – М.: Советское радио, 1977. – 488 с.
23. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Физматлит, 2010. – 559 с.

References

1. Bukhalev V.A., Boldinov V.A. *Trudy MAI*, 2017, no. 97. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=87283>
2. Groshev A.V. *Trudy MAI*, 2019, no. 104. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=102217>

3. Chernodarov A.V., Patrikeev A.P., Kovregin V.N., Kovregina G.M., Merkulova I.I. *Nauchnyi Vestnik MGTU GA*, 2017, vol. 20, no. 1, pp. 222-231.
4. Tikhonov V.I., Kharisov V.N. *Statisticheskii analiz i sintez radiotekhnicheskikh ustroystv i system* (Statistical analysis and synthesis of radio engineering devices and systems), Moscow, Radio i svyaz', 1991, 624 p.
5. Velichkin A.I. *Radiotekhnika i elektronika*, 1990, vol. 35, no. 7, pp. 1471-1480.
6. Mironov M.A. *Radiotekhnika i elektronika*, 1993, vol. 38, no. 1, pp. 141-149.
7. Chernodarov A.V., Ivanov S.A. *Trudy MAI*, 2018, no. 99. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=91962>
8. Xu Y., Shmaliy Y.S., Shen T., Chen D., Sun M. INS/UWB-Based Quadrotor Localization Under Colored Measurement Noise, *IEEE Sensors Journal*, 2021, vol. 21, no. 5, pp. 6384-6392. DOI: [10.1109/JSEN.2020.3038242](https://doi.org/10.1109/JSEN.2020.3038242)
9. Sage A.P., Melsa J.L. *Estimation Theory With Applications to Communication and Control*, New York, McGraw-Hill, 1971, 529 p.
10. Jain B. Bounding estimators for systems with colored noise, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1975, vol. 20, no. 3, pp. 365–368. DOI: [10.1109/TAC.1975.1100979](https://doi.org/10.1109/TAC.1975.1100979)
11. Stavrou P.A., Skoglund M. New Formulation and Computation of NRDF for Time-Varying Multivariate Gaussian Processes With Correlated Noise, *IEEE Control Systems Letters*, 2022, vol. 6, pp. 331–336. DOI: [10.1109/LCSYS.2021.3074455](https://doi.org/10.1109/LCSYS.2021.3074455)
12. Kosachev I.M., Chugai K.N., Rybakov K.A. *Trudy MAI*, 2019, no. 105. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=104262>
13. Kosachev I.M., Chugai K.N., Rybakov K.A. *Trudy MAI*, 2019, no. 106. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=104262>

14. Luo Y., Zhou J., Yang W. Distributed State Estimation With Colored Noises, *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2022, vol. 69, no 6, pp. 2807–2811. DOI: [10.1109/TCSII.2021.3136184](https://doi.org/10.1109/TCSII.2021.3136184)
15. Yarlykov M.S., Mironov M.A. *Markovskaya teoriya otsenivaniya sluchainykh protsessov* (Markov theory of estimation of random processes), Moscow, Radio i svyaz', 1993, 460 p.
16. Mironov M.A. *Markovskaya teoriya optimal'nogo otsenivaniya sluchainykh protsessov* (Markov theory of optimal estimation of random processes), Moscow, Izd-vo FGUP «GosNIIAS», 2013, 193 p.
17. Detkov A.N. *Radiotekhnika i elektronika*, 1995, vol. 40, no. 9, pp. 1406-1413.
18. Detkov A.N. *Izvestiya AN. Teoriya i sistemy upravleniya*, 1997, no. 1, pp. 59-64.
19. Yarlykov M.S. *Primenenie markovskoi teorii nelineinoi fil'tratsii v radiotekhnike* (Application of the Markov theory of nonlinear filtering in radio engineering), Moscow, Sovetskoe radio, 1980, 35 p.
20. Meditch J.S. *Stochastic Optimal Linear Estimation and Control*, New York, McGrawHill, 1969, 384 p.
21. Stratonovich R.L. *Uslovnye markovskie protsessy i ikh primeneniye k teorii optimal'nogo upravleniya* (Educational Markov processes and their application to the theory of national control), Moscow, Izd-vo MGU, 1966, 319 p.
22. Tikhonov V.I., Mironov M.A. *Markovskie protsessy* (Markovian Processes), Moscow, Sovetskoe radio, 1977, 488 p.
23. Gantmakher F.R. *Teoriya matrits* (Matrix theory), Moscow, Fizmatlit, 2010, 559 p.

Статья поступила в редакцию 05.09.2022

Статья после доработки 07.09.2022

Одобрена после рецензирования 08.09.2022

Принята к публикации 12.10.2022

The article was submitted on 05.09.2022; approved after reviewing on 08.09.2022;
accepted for publication on 12.10.2022