

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
**Московский авиационный институт**  
**(национальный исследовательский университет)**

На правах рукописи



**РЫБКИНА НАТАЛИЯ МИХАЙЛОВНА**

**АЭРОДИНАМИЧЕСКИЕ И АЭРОУПРУГИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ  
КРЫЛА БОЛЬШОГО УДЛИНЕНИЯ С УПРАВЛЯЕМЫМИ  
ДЕФОРМАЦИЯМИ ПРОФИЛЕЙ**

01.02.06. «Динамика, прочность машин, приборов и аппаратуры»

Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук

Научный руководитель:  
Гришанина Т.В., д.ф.-м.н., профессор

Москва – 2020

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	4
Глава 1. Расчет аэроупругих колебаний гибкого профиля крыла по методу Ритца.....	17
1.1. Потенциальная энергия деформации профиля.....	18
1.2. Определение аэродинамической нагрузки на деформируемый профиль крыла.....	20
1.3. Уравнения аэроупругих колебаний профиля крыла.....	22
1.4. Пример расчета.....	24
Глава 2. Конечно-элементная модель управляемого деформирования профиля крыла в потоке .....	35
2.1. Потенциальная энергия деформации профиля.....	38
2.2. Определение аэродинамической нагрузки на деформируемый профиль крыла.....	42
2.3. Уравнения аэроупругих колебаний профиля крыла.....	46
2.4. Пример расчета.....	49
2.4.1. Сравнение результатов расчета по МКЭ и методу Ритца.....	50
2.4.2. Анализ влияния геометрической нелинейности при расчете аэродинамических коэффициентов.....	53
2.4.3 Расчетная модель профиля по типу «рыбий хвост».....	68
Глава 3. Влияние нестационарности несжимаемого потока на изгибно-крутильные аэроупругие колебания крыла большого удлинения.....	75
3.1. Аэродинамические нагрузки, действующие на крыло при изгибно-крутильных колебаниях.....	75
3.2. Уравнения аэроупругих колебаний крыла.....	78
3.3. Анализ влияния нестационарности несжимаемого потока на изгибно-крутильные аэроупругие колебания крыла при гармоническом воздействии.....	82
3.4. Условия неустойчивости.....	88
3.4.1. Определение границ дивергенции и флаттера для	

двухступенной модели.....	90
3.4.2. Определение границ неустойчивости для многостепенной модели.....	94
Заключение.....	105
Литература.....	106

## ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время в авиации весьма актуальной является проблема создания управляемых беспилотных летательных аппаратов (БПЛА) различных размеров (начиная от микроаппаратов), форм и назначений, как для военного, так и для гражданского использования. Их тонкие крылья являются достаточно гибкими конструкциями, и действующие на них аэродинамические нагрузки сильно зависят от их деформаций и колебаний. Управляя деформациями, можно изменять аэродинамические и аэроупругие характеристики крыльев. Подобные задачи в различных формулировках широко рассмотрены в работах [20, 33, 34, 78], а классические задачи аэроупругости в линейной и линеаризованной постановках подробно изучены в работах [38, 40, 45, 50, 57, 60]. Примеры влияния упругости конструкции на аэродинамические характеристики и нагружение летательных аппаратов приводятся в работах [1, 3-4, 51].

По принципу полёта БПЛА можно разделить: на БПЛА с жёстким крылом (самолётного типа); с гибким, мембранным или упругим крылом; с вращающимся крылом (вертолётного типа); с машущим крылом, а также на различные гибридные подклассы аппаратов, которые трудно однозначно отнести к какой-либо из перечисленных групп.

С учетом тематики работы, подробнее будут рассмотрены гибкое, упругое и мембранное крылья.

Беспилотные неманевренные самолеты специального назначения, например, предназначенные для длительного полета на больших высотах с целью мониторинга местности, имеют облегченную и, как следствие, весьма гибкую конструкцию с прямыми морфными крыльями большого удлинения без поворотных органов управления. Крыло такого типа может состоять из передней тонкостенной балки (лонжерона) с замкнутым контуром поперечного сечения, работающей на изгиб и кручение, с присоединенной к ней задней частью в виде сужающейся трехслойной пластины с сотовым наполнителем или в виде тонких пластин и мембран, профилированных

пенопластом. В полете возникают поперечные перемещения и углы поворота профилей крыла за счет изгиба и кручения лонжерона, управляемые перемещения хвостиков, а так же – дополнительные перемещения хвостиков за счет их деформации под действием аэродинамической нагрузки. Решение задач статической и динамической аэроупругости крыльев большого удлинения в строгой трехмерной постановке с учетом связанных упругих деформаций в направлениях размаха и хорды представляет большие трудности и раскрывается в [12, 14, 15, 28, 35, 68].

БПЛА с гибким крылом – это экономичные летательные аппараты аэродинамического типа, в которых в качестве несущего крыла используется не жесткая, а гибкая (мягкая) конструкция, выполненная из ткани, эластичного полимерного материала или упругого композитного материала, обладающего свойством обратимой деформации.

В этом классе БПЛА можно выделить беспилотные моторизованные парапланы, дельтапланы и БПЛА с упруго деформируемым крылом.

- Беспилотный моторизованный параплан – аппарат на основе управляемого парашюта-крыла, снабжённый мототележкой с воздушным винтом для автономного разбега и самостоятельного полёта. Крыло обычно имеет форму прямоугольника или эллипса. Крыло может быть мягким, иметь жесткий или надувной каркас. Пример – разработки американской фирмы Atair Aerospace, которая предложила серию беспилотных парапланов под общим названием LEAPP (Long Endurance Autonomous Powered Paraglider). Их основное достоинство – экономичность. Они снабжены двигателями внутреннего сгорания и способны длительное время медленно барражировать над объектом, производя, например, видеосъемку. Для запуска требуется площадка длиной 2-3 м для короткого разбега. Недостатком беспилотных моторизованных парапланов является трудность управления ими, так как навигационные датчики не имеют жесткой связи с крылом. Ограничение на их применение оказывает также очевидная зависимость от погодных условий.

- Беспилотный моторизованный дельтаплан – это аппарат на основе мягкого крыла дельтавидной формы. Такое крыло представляет собой три жесткие направляющие, соединённые между собой в передней точке и образующие в горизонтальной плоскости веер, с углом между трубами 90-140 градусов. Между трубами натянута прочная ткань. Две боковые направляющие и задняя кромка ткани образуют при виде сверху почти треугольник. Крыло крепится на тележку, на которой смонтированы двигатель с винтом (тянущим или толкающим) и аппаратура. Управление полётом осуществляется обычно с помощью дополнительных аэродинамических элементов, небольшой деформации крыла или с помощью перемещаемого центра тяжести.

Скорость современных дельтапланов составляет от 25 км/ч до 100-130 км/ч, высота полётов достигает 6 км и более. По сравнению с беспилотными мотопарапланами мотодельтапланы значительно проще и стабильнее в управлении благодаря наличию жестких связей крыла с остальной конструкцией.

- В БПЛА с упруго деформируемым крылом крыло выполняется из композитного материала с большой степенью упругости. Это позволяет сворачивать крыло без опасения потерять его форму.

Оно также хорошо противостоит соударениям с землей и препятствиями. Примером может служить БПЛА Maverick – компактный и очень легкий электрический летательный аппарат, разработанный американской компанией Prioria Robotics. Гибкое упругое крыло позволяет размещать Maverick в небольшом тубусе диаметром 15 см. Кроме того, по заявлению авторов, такое крыло способно частично компенсировать порывы ветра и улучшать стабильность полета. Запуск БПЛА может производиться как "с руки", так и с помощью специальной пневматической катапульты. После вылета из катапульты аппарат разворачивает крылья. Гибкое крыло не имеет элеронов, поэтому управление осуществляется с помощью небольших аэродинамических рулей в хвостовой части. БПЛА Maverick имеет массу 1,16

кг, радиус действия до 5 км и способен находиться в воздухе от 45 до 90 минут, совершая полет со скоростью от 40 до 100 км/ч.

Конструкция мембранных крыльев наиболее близко напоминает крылья летучих мышей. В действительности это полимерные мембраны с электрическим приводом, изготовленные для работы по принципу искусственных мышц. Крылья самостоятельно меняют форму при изменении условий полета, используют разные уровни напряжения для оптимизации аэродинамических характеристик в полете. Они застывают и расслабляются в соответствии с изменяющимися аэродинамическими условиями, не имея механических частей.

Сегодня мембранные БПЛА разрабатываются в различных формах и размерах, некоторые всего 15 сантиметров в длину. Исследования показывают, что у таких беспилотников широкий спектр гражданского и военного применений. Например, для видеосъемки отдаленных районов или для видеонаблюдения за операциями по ликвидации аварий.

За рубежом основные разработки в данной области ведутся Университетом Саутгемптона и Лондонским Имперским колледжем, при дополнительном финансировании от Исследовательского совета по инженерным и физическим наукам (EPSRC) и от ВВС США.

Помимо перечисленных классов крыльев с соответствующими конструкциями, различные их конфигурации рассматривались и исследовались в следующих работах: в [55] гибридное крыло представлялось в виде несущей поверхности, состоящей из жесткой носовой части и надувной хвостовой части, способной легко уменьшать свои габариты в сложенном состоянии, в [41] рассмотренное гибкое крыло смоделировано шарнирно-упругим сочленением нескольких недеформируемых звеньев, а в [44] предлагалось моделировать гибкость профиля крыла за счет выполнения такого крыла из композиционных материалов, что позволит реализовать движение гибкого крыла переменной геометрии с конечными амплитудами путем задания закона изменения

профиля крыла во время движения, в [71] крыло является морфным за счет расширяющихся лонжеронов и телескопических нервюр.

Общепризнанной в авиации является система классификации разделения БЛА на классы. Выделяют классы БПЛА:

Класс 1. БПЛА самолетного типа взлетной массой до 10 кг с электрическим двигателем. Они могут быть использованы в качестве средства оперативного наблюдения в составе стационарных постов охраны или мобильных групп.

Класс 2. БПЛА самолетного типа взлетной массой до 100 кг с двигателем внутреннего сгорания. Они могут быть использованы в качестве средства оперативного наблюдения.

Класс 3. БПЛА самолетного типа взлетной массой до 1000 кг могут привлекаться как для химической обработки больших площадей, так и для оперативной транспортировки грузов.

Класс 4. БПЛА вертолетного типа. Они представляют интерес для мониторинга объектов.

По приведенной классификации БПЛА рассматриваемое в работе крыло может быть использовано на БПЛА 1 класса.

В работе проводится исследование аэродинамических и аэроупругих характеристик гибкого крыла большого удлинения в целом и в частности его профилей различной конфигурации, также разрабатываются методы пассивного и активного управления характеристиками упругих крыльев как составных тонкостенных конструкций.

Вопросы изучения аэродинамики и управления гибкими или морфными крыльями в различных постановках рассматривались в работах [32, 72], например, в [79-80] подробнее изучались задачи статической аэроупругости самолетов с гибкими крыльями с учетом геометрической нелинейности. Также характеристики статической аэроупругости и устойчивости объекта с гибким крылом большого удлинения подробно рассмотрены в [83].



В работах [70, 74-75] рассматриваются задачи нелинейного взаимодействия между кручением и изгибом в плоскости под действием аэродинамических нагрузок, а также отмечается зависимость неустойчивости от статических перемещений конструкции с гибким крылом.

Для построения расчетных моделей использовались два приближенных метода: метод Ритца и метод конечных элементов.

По методу Ритца поперечные перемещения упругого крыла или деформируемого профиля представляются в виде разложения по заданным функциям с неизвестными множителями в обобщенных координатах, которые при решении динамической задачи являются функциями времени, что в различных формах продемонстрировано в работах [16, 43, 61]. Численный подход к решению задач, связанных с расчетом аэродинамики и аэроупругости крыльев большого удлинения, может быть реализован в многодисциплинарном комплексе АРГОН [9, 39] или в среде MathCAD [28-29].

В работах [1, 2] разработаны математические модели и программные комплексы для решения практических задач аэроупругости тонких пластинчатых конструкций самолетов на основе метода Ритца (метода многочленов). В практике расчетов аэроупругости тонкостенных конструкций летательных аппаратов сложной формы используются известные программные комплексы, например MSC NASTRAN, ANSYS, основанные на применении МКЭ для моделирования упругих конструкций и метода панелей для определения аэродинамических нагрузок [60, 67, 78]

При использовании метода конечных элементов в качестве обобщенных координат рассматриваются поперечные перемещения и углы поворота поперечных сечений конечных элементов [42]. Подобный подход для расчета гибких крыльев большого удлинения был изложен в [77].

Так как и метод Ритца, и метод конечных элементов являются приближенными методами решения, то результаты для задач аэроупругих

колебаний, полученные при использовании данных методов, могут быть сопоставлены, что продемонстрировано в [13, 61].

Для прямых крыльев большого удлинения, геометрические и жесткостные параметры которых изменяются по длине достаточно медленно, обычно используется гипотеза плоского обтекания профилей поперечных сечений, на которой также основывается балочная расчетная модель [19, 46, 49, 52-53].

Аэродинамическую нагрузку, действующую на колеблющийся тонкий профиль в несжимаемом потоке идеального газа, можно определить на основании точного решения в комплексном виде по нестационарной теории для малых гармонических колебаний с заданной частотой или по приближенной квазистационарной теории. Последняя основана на гипотезе стационарности – аэродинамическая задача для профиля с учетом создаваемых его колебаниями поперечных скоростей скоса потока решается в стационарной постановке для фиксированного момента времени. Это достаточно простое решение справедливо для произвольных колебаний профиля крыла большого удлинения и с помощью поправочного множителя может учитывать сжимаемость дозвукового потока. Такой подход часто используется на практике при решении задач динамической аэроупругости крыльев большого удлинения, особенно на этапе рационального проектирования [37]. К настоящему времени еще недостаточно полно исследован вопрос точности решения, основанного на гипотезе стационарности, в зависимости от приведенной частоты колебаний (числа Струхалея). Нестационарная теория в предельном случае, когда приведенная частота стремится к нулю, дает уточненное квазистационарное решение – в нем по сравнению с решением по обычной квазистационарной теории, основанной на гипотезе стационарности, появляется дополнительное аэродинамическое демпфирование [12]. Количественная оценка этого уточнения также представляет интерес.

Нестационарная теория для определения аэродинамических нагрузок, действующих на колеблющиеся тонкие несущие поверхности в дозвуковом потоке, изложена достаточно полно в книгах [10-12, 18, 54, 62-63] и в учебном пособии [68]. В работах [10-11] развита асимптотическая нестационарная теория обтекания тонких колеблющихся крыльев произвольной формы в плане дозвуковым сжимаемым потоком при частоте колебаний, стремящейся к нулю; эту теорию по существу можно считать уточненной квазистационарной теорией. В статье [36] рассмотрена задача определения неустановившихся аэродинамических нагрузок при произвольных колебаниях деформируемого профиля в дозвуковом потоке, а также допустимость использования квазистационарной теории.

Согласно квазистационарной теории, для определения нагрузок на колеблющийся профиль используют гипотезу стационарности. В соответствии с этой теорией время, соответствующее рассматриваемому моменту  $t$ , как бы «замораживается» и далее рассматривается как параметр. Следовательно, не учитывается во времени изменение, например, углов атаки.

При использовании нестационарной теории обтекания, характеристики колебательного процесса изменяются во времени, и выражение для перепада давлений будет определяться через функцию Теодорсена.

Также при расчете крыльев большого удлинения встает вопрос определения границы флаттера, что широко изучено в работах [8, 48, 56, 58, 66, 79] для различных типов конструкций. Обычно при решении задачи флаттера крыло большого удлинения рассматривается как тонкая балка (пластина), совершающая изгибно-крутильные колебания [17, 28-29, 61]. Решение аэродинамической задачи для гармонических колебаний профиля при приведенной частоте, стремящейся к нулю, принимает простую действительную форму, отличающуюся от обычного квазистационарного решения только некоторыми коэффициентами [10-12]. Такое асимптотическое решение для достаточно медленных колебаний крыла

можно называть уточненным квазистационарным решением. Примеры определения границы флаттера представлены в [30]. Статья [81] посвящена определению границы флаттера гибкого крыла при постоянной скорости полета с использованием данных о границе флаттера для обыкновенных неморфных крыльев, также в статье [76] исследуется динамика мембранного крыла и определяются характеристики при флаттере.

Также в диссертационной работе определяется не только граница флаттера, но и граница дивергенции, что представлено в работе [29]. Исследование критической скорости дивергенции подробно рассмотрено в [4].

Помимо конструкторских и расчетных работ также существует большое количество работ, посвященных экспериментальным исследованиям гибких крыльев большого удлинения и других гибких упругих конструкций, как численным [5-7, 49], так и натурным [2, 47]. Например, в [69] описано исследование аэродинамических характеристик мембранных морфных крыльев пяти различных конфигураций в аэродинамической трубе, с учетом изменения геометрии (удлинения и стреловидности). Работа [64] посвящена экспериментальным исследованиям флаттера гибкого крыла в дозвуковой аэродинамической трубе при различных скоростях воздушного потока в целях уточнения условий возникновения процессов и поиска оптимальных механизмов для их подавления.

Предлагаемые исследования являются новыми и оригинальными и имеют научный и практический интерес. Они отражают развиваемую в мире современную концепцию создания так называемых «конформных» авиационных конструкций с бесшарнирными деформируемыми несущими и рулевыми поверхностями с приложениями, в первую очередь, к беспилотным легким самолетам различных форм и размеров, предназначенных для длительных полетов при минимальном потреблении энергии.

**Целью диссертационной работы** является:

Разработка математических моделей и решение задачи аэродинамического нагружения и аэроупругих колебаний в дозвуковом потоке тонкого упругого профиля крыла большого удлинения.

**Структура и объем диссертации.** Результаты исследований изложены на 115 страницах машинописного текста, иллюстрированного 60 рисунками и 13 таблицами. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка публикаций и литературы. В заключении сформулированы основные результаты работы.

В первой главе рассмотрена линейная задача деформирования и аэродинамического нагружения тонкого профиля прямого крыла большого удлинения. Профиль крыла состоит из недеформируемой носовой части и упругого хвостика. Поперечное перемещение упругого хвостика представляется по методу Ритца в виде разложения по заданным функциям с неизвестными коэффициентами, принимаемыми за обобщенные координаты. Получены выражения для подъёмной силы и момента тангажа профиля в зависимости от угла атаки и угловой скорости его жесткой передней части с квазистационарными аэродинамическими коэффициентами, учитывающими упругие деформации хвостика.

Выполнены расчеты для двух вариантов силовых схем упругого хвостика профиля: 1) в виде тонкой пластины, профилированной пенопластом; 2) в виде сужающейся трехслойной пластины с мембранными внешними слоями и сотовым наполнителем. Получены значения квазистационарных аэродинамических коэффициентов.

Проведен анализ влияния упругости хвостиков на квазистационарные аэродинамические коэффициенты подъёмной силы и момента тангажа профиля, а также на распределения аэродинамической нагрузки по хорде профиля.

Во второй главе разработана математическая модель деформирования и аэродинамического нагружения тонкого профиля прямого крыла большого удлинения с использованием метода конечных элементов. Конечно-элементная модель построена на основе геометрически нелинейной теории деформирования. Разработаны несколько вариантов расчетных математических моделей аэроупругих колебаний крыла: 1) расчетная модель профиля представлена только центральной балкой, работающей на изгиб, сдвиг и растяжение-сжатие, а работа обшивки не учитывается; 2) расчетная модель профиля состоит из центральной балки и обшивки, прикрепленной к двум стойкам в первом и последнем сечениях, при этом натяжение обшивки регулируется изменением её длины; 3) с управлением аэродинамическими характеристиками при изгибе хвостовых частей профилей крыла по аналогии с работой рыбьего хвоста.

Получены численные решения задачи в линейной и нелинейной постановках, а также произведено сравнение полученных результатов с результатами по методу Ритца, представленными в первой главе.

Третья глава посвящена исследованию вынужденных изгибно-крутильных колебаний прямого крыла большого удлинения в несжимаемом потоке идеального газа. Аэродинамическая нагрузка, действующая на колеблющийся тонкий профиль в несжимаемом потоке идеального газа при малых гармонических колебаниях крыла определяется на основании точного решения по нестационарной линейной теории, а также по обычной и уточненной квазистационарной теориям.

Проводится сравнительный анализ расчетов по определению динамической (флаттер) и статической неустойчивости (дивергенция) при использовании нестационарной и квазистационарной аэродинамической теорий обтекания профилей. Расчеты выполнены при различных числах аппроксимирующих функций.

В заключении сформулированы основные результаты работы.

Работы по теме диссертации выполнялись при финансовой поддержке РФФИ (коды проектов: 15-08-04786-а, 18-08-00937-а).

**Научная новизна диссертационной работы** заключается в том, что впервые разработаны линейная и геометрически нелинейная математические модели аэроупругого деформирования профиля крыла в потоке при управляемом натяжении верхней и нижней обшивок по типу «рыбьего хвоста» с целью использования при создании адаптивных крыльев.

Выполнены оценки влияния нелинейностей продольно-поперечного изгиба профиля на аэродинамические и аэроупругие характеристики крыла.

**Достоверность полученных результатов** основывается на корректности математических моделей и строгости математических решений, а также на сравнении численных расчетов, полученных по методу Рунге и методу конечных элементов.

**Практическая ценность работы** состоит в том, что результаты исследований позволят обеспечить научное сопровождение проектирования сверхлегкого составного деформируемого крыла при безотрывном обтекании нестационарным дозвуковым потоком.

**Апробация работы:** основные результаты диссертационной работы доложены на международных научных конференциях, семинарах и симпозиумах, в том числе:

- Международном симпозиуме «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» имени А. Г. Горшкова (Вятчи, 2016, 2017, 2018, 2020 гг.),

- Международной конференции «Авиация и космонавтика» (Москва, МАИ, 2016, 2018, 2019 гг.)

- 7-й всероссийской научной конференции с международным участием им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского «Механика композиционных

материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред» (Москва, Ленинградский проспект, 2017г.)

- Первой Общероссийской научно-практической конференции «Вопросы инновационного развития аэрокосмического комплекса России» (Москва, 2018г.)

- XLVI Международной молодёжной научной конференция «Гагаринские чтения – 2020», (Москва, МАИ, 2020г.)

**Публикации:** список научных трудов по диссертационной работе составляет 13 публикаций, в том числе 3 публикации в рецензируемых научных издания и журналах.



# Глава 1. Расчет аэроупругих колебаний гибкого профиля крыла по методу Ритца

Будем считать, что для крыльев большого удлинения, геометрические и упругие характеристики, а также формы их деформирования и изгибно-крутильных колебаний изменяются в направлении размаха достаточно медленно, задачу аэроупругости профилей крыла в каждом поперечном сечении можно рассматривать как плоскую.

Рассмотрим линейную задачу деформирования и аэродинамического нагружения тонкого профиля прямого крыла большого удлинения. Профиль крыла состоит из недеформируемой носовой части и упругого хвостика, рис. 1.1.

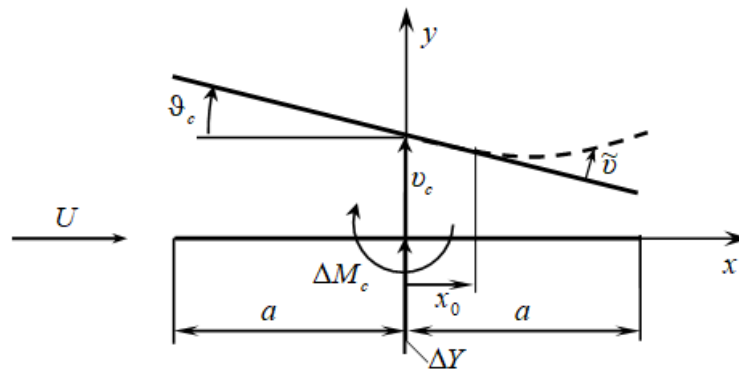


Рис. 1.1. Модель профиля крыла.

Положение деформированного профиля в стационарном потоке в системе координат  $Oxy$ , связанной с его исходным недеформированным состоянием (рис. 1.1), характеризуется заданными значениями поперечного перемещения  $v_c$  и малого угла поворота  $\vartheta_c$  его центра  $x = 0$ , а также неизвестным поперечным перемещением  $\tilde{v}(x, t)$  упругого хвостика  $x_0 \leq x \leq a$ .

Поперечное перемещение сечения упругого профиля будет

$$v = v_c - \vartheta_c x + \tilde{v}(x, t), \tag{1.1}$$

где  $v_c(t)$ ,  $\vartheta_c(t)$  – заданные, достаточно медленно изменяющиеся функции.

Малое относительное перемещение упругого хвостика представим по методу Ритца в виде

$$\tilde{v}(\xi, t) = a \sum_{i=1}^s q_i(t) \eta_i(\xi); \quad \xi = x/a; \quad \xi_0 \leq \xi \leq 1; \quad \xi_0 = x_0/a, \quad (1.2)$$

где  $q_i(t)$  – безразмерные обобщенные координаты;  $\eta_i(\xi)$  – безразмерные функции, представляющие в общем случае изгиб и поперечный сдвиг хвостика, как консольной балки-полоски. Хвостик профиля будем считать легким и влиянием его массы при колебаниях профиля будем пренебрегать.

Аэродинамическое давление на деформируемый профиль (полоску единичной ширины) определяется в зависимости от местного угла атаки  $\alpha(x)$  при безотрывном обтекании квазистационарным дозвуковым потоком. Уравнения аэроупругих колебаний деформируемого профиля с учетом (1.2) для независимых переменных  $q_1, q_2, \dots, q_s$  получаются на основании принципа возможных перемещений

$$\delta\Pi - \delta A_a - \delta A_{ин} = 0, \quad (1.3)$$

где  $\Pi$  – потенциальная энергия деформации упругого хвостика;  $\delta A_a$  – вариация работы аэродинамического давления, действующего на профиль;  $\delta A_{ин}$  – вариация работы инерционных сил.

### 1.1. Потенциальная энергия деформации профиля

Потенциальную энергию изгиба-сдвига упругой части профиля запишем как для балки-полоски единичной ширины

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{x_0}^a [EI \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)^2 + GF_c \left[\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} - \vartheta\right]^2] dx, \quad (1.4)$$

где  $EI(x)$ ,  $GF_c(x)$  – жесткости профиля как полоски единичной ширины на изгиб и на сдвиг, соответственно.

Из дифференциального уравнения равновесия моментов для неоднородной балки с учетом поперечных сдвигов получим

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} - \vartheta = -\frac{1}{GF_c} \frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right). \quad (1.5)$$

Тогда (1.4) с учетом (1.5) и замены  $x = a\xi$  будет

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{\xi_0}^1 \left[ EI (\vartheta')^2 + \frac{((EI\vartheta')')^2}{a^2 GF_c} \right] d\xi. \quad (1.6)$$

Если пренебречь поперечными сдвигами, считая, что при изгибе поперечные сечения остаются перпендикулярными изогнутой оси балки, то  $GF_c \rightarrow \infty$ ,  $\vartheta = \partial \tilde{v} / \partial x$ , а  $GF_c (\partial \tilde{v} / \partial x - \vartheta)^2 = 0$ .

Угол поворота поперечного сечения по методу Ритца представим в виде

$$\vartheta(\xi, t) = \sum_{i=1}^s q_i(t) \psi_i(\xi), \quad (1.7)$$

где  $q_i(t)$  – обобщенные координаты, введенные в разложении (1.2);  $\psi_i(\xi)$  – заданные линейно-независимые безразмерные функции, представляющие возможные углы поворота поперечных сечений балки и удовлетворяющие кинематическим граничным условиям  $\psi_i(\xi_0) = 0$ .

Соответствующие (1.7) аппроксимирующие функции для прогиба  $\eta_i(\xi)$  можно определить из соотношения (1.5) с учетом граничного условия  $\eta_i(\xi_0) = 0$ :

$$\eta_i(\xi) = \int_{\xi_0}^{\xi} \left[ \psi_i - \frac{(EI\psi_i')'}{a^2 GF_c} \right] d\xi. \quad (1.8)$$

Подставляя (1.7) в выражение для потенциальной энергии (1.6), запишем её в виде

$$\Pi = \frac{1}{2} \frac{EI_0}{a} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s k_{ij} q_i q_j; \quad (1.9)$$

$$k_{ij} = \int_{\xi_0}^1 \left\{ \frac{EI}{EI_0} \psi_i' \psi_j' + \frac{EI_0}{GF_c a^2} \left[ \left( \frac{EI}{EI_0} \psi_i' \right)' \right] \left[ \left( \frac{EI}{EI_0} \psi_j' \right)' \right] \right\} d\xi,$$

где  $EI_0 = EI(\xi_0)$ .

## 1.2. Определение аэродинамической нагрузки на деформируемый профиль крыла

Местный угол атаки  $\alpha(x, t)$  деформируемого колеблющегося профиля при безотрывном обтекании будет

$$\alpha = -\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{U} \frac{\partial v}{\partial t}\right). \quad (1.10)$$

Перепад аэродинамического давления между нижней и верхней поверхностями тонкого профиля крыла при установившемся дозвуковом обтекании его сжимаемым потоком записывается в зависимости от местного угла атаки  $\alpha(x)$ , [67]:

$$\Delta p = -\frac{2\rho U^2}{\pi\beta} \int_{-a}^a \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} \sqrt{\frac{a+\xi}{a-\xi}} \frac{\alpha(\xi)}{x-\xi} d\xi,$$

где  $\rho, U$  – плотность и скорость набегающего потока,  $\beta = \sqrt{|1-M^2|}$ ,  $M$  – число Маха,  $M < 1$ .

Введем новую переменную  $\varphi$  как  $x = a \cos \varphi$  или  $\xi = a \cos \varphi$  и представим  $\alpha(\varphi, t)$  в виде ряда

$$\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cos n\varphi; \quad (1.11)$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \alpha d\varphi; \quad \alpha_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \alpha \cos n\varphi d\varphi.$$

Тогда перепад давления на основании квазистационарной теории с учетом (1.11) запишется в виде [12, 33, 35]

$$\Delta p = \frac{\rho U^2}{2} \frac{4}{\beta} \left[ \alpha_0 \frac{1 - \cos \varphi}{\sin \varphi} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin n\varphi \right], \quad (1.12)$$

С учетом (1.10), (1.1) и (1.2) коэффициенты (1.11) выражаются через обобщенные координаты как

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= (\vartheta_c - \frac{\dot{v}_c}{U}) - \sum_{j=1}^s [q_j c_{0,j} + \frac{a}{U} \dot{q}_j g_{0,j}]; \\
\alpha_n &= \frac{\dot{\vartheta}_c a}{U} \delta_{1n} - \sum_{j=1}^s [q_j c_{n,j} + \frac{a}{U} \dot{q}_j g_{n,j}]; \quad \delta_{11} = 1; \quad \delta_{1n} = 0 \text{ при } n \neq 1; \\
c_{0,j} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\varphi_0} \eta'_j(\xi) d\varphi; \quad g_{0,j} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\varphi_0} \eta_j(\xi) d\varphi; \\
c_{n,j} &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\varphi_0} \eta'_j(\xi) \cos n\varphi d\varphi; \quad g_{n,j} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\varphi_0} \eta_j(\xi) \cos n\varphi d\varphi.
\end{aligned} \tag{1.13}$$

Здесь и далее верхней точкой обозначаются производные по  $t$ , а штрихом – по  $\xi$ .

Вариация работы аэродинамического давления на перемещениях профиля

$$\delta A_a = \int_{x_0}^a \Delta p \delta \tilde{v} dx$$

с учетом (1.2), (1.10), (1.12), (1.13) при  $\delta v_c = \delta \vartheta_c = 0$  записывается в виде:

$$\begin{aligned}
\delta A_a &= \frac{2\rho U^2 a^2}{\beta} \sum_{i=1}^s \delta q_i \cdot [\beta_{0,i} (\vartheta_c - \frac{\dot{v}_c}{U}) + \beta_{1,i} \frac{\dot{\vartheta}_c a}{U} - \\
&- \sum_{j=1}^s b_{ij} q_j - \sum_{j=1}^s \frac{a}{U} d_{ij} \dot{q}_j],
\end{aligned} \tag{1.14}$$

где

$$\begin{aligned}
b_{ij} &= \beta_{0,i} c_{0,j} + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_{n,i} c_{n,j}; \quad d_{ij} = \beta_{0,i} g_{0,j} + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_{n,i} g_{n,j}; \\
\beta_{0,i} &= \int_0^{\varphi_0} \eta_i(\xi) (1 - \cos \varphi) d\varphi; \quad \beta_{n,i} = \int_0^{\varphi_0} \eta_i(\xi) \sin n\varphi \sin \varphi d\varphi.
\end{aligned}$$

Подъемная сила и аэродинамический момент относительно центра профиля с учетом (1.11), (1.12) вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}
\Delta Y &= \int_{-a}^a \Delta p dx = \frac{\rho U^2 a}{\beta} \pi (2\alpha_0 + \alpha_1); \\
\Delta M_c &= - \int_{-a}^a \Delta p x dx = \frac{\rho U^2 a^2}{2\beta} \pi (2\alpha_0 - \alpha_2).
\end{aligned} \tag{1.15}$$

### 1.3. Уравнения аэроупругих колебаний профиля крыла

Вариация работы инерционных сил для профиля прямого крыла большого удлинения запишется как для отсека в виде прямоугольной пластины шириной 1 м:

$$\delta A_{ин} = - \int_{x_0}^a m(x) \ddot{v} \delta \tilde{v} dx$$

с учетом (1.2) записывается в виде [12]:

$$\delta A_{ин} = -m_0 a^2 \sum_{i=1}^s \delta q_i \left[ m_{v,i} \frac{\ddot{v}_c}{a} + m_{\vartheta,i} \ddot{\vartheta} + \sum_{j=1}^s m_{ij} \ddot{q}_j \right]; \quad (1.16)$$

Здесь  $m_0$  – погонная масса крыла в сечении  $\xi_0$

$$m_{v,i} = \frac{1}{m_0 a^2} \int_{x_0}^a m \eta_i dx, \quad m_{\vartheta,i} = \frac{1}{m_0 a^2} \int_{x_0}^a m x \eta_i dx, \quad m_{ij} = \frac{1}{m_0 a^2} \int_{x_0}^a m \eta_i \eta_j dx.$$

На основании принципа возможных перемещений (1.3) с учетом (1.9), (1.14) и (1.16) уравнения аэроупругих колебания профиля записываются в виде

$$\begin{aligned} m_0 a^2 \sum_{j=1}^s m_{ij} \ddot{q}_j + \frac{EI_0}{a} \sum_{j=1}^s k_{ij} q_j + \frac{2\rho U^2 a^2}{\beta} \sum_{j=1}^s [b_{ij} q_j + \frac{a}{U} d_{ij} \dot{q}_j] = \\ = - \frac{2\rho U^2 a^2}{\beta} [\beta_{0,i} (\vartheta_c - \frac{\dot{v}_c}{U}) + \beta_{1,i} \frac{\dot{\vartheta}_c a}{U}] + m_0 a^2 [m_{v,i} \ddot{v}_c + m_{\vartheta,i} \ddot{\vartheta}]; \end{aligned} \quad (1.17)$$

( $i = 1, 2, \dots, s$ ).

Эта система уравнений после деления на  $EI_0/a$  записывается в матричном виде:

$$\begin{aligned} \frac{m_0 a^3}{EI_0} \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C} \mathbf{q} + \lambda \frac{a}{U} \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}} = -\lambda [\boldsymbol{\beta}_0 (\vartheta - \frac{\dot{v}_c}{U}) + \boldsymbol{\beta}_1 \frac{\dot{\vartheta} a}{U}] + \\ + \frac{m_0 a^3}{EI_0} [\mathbf{M}_v \ddot{v}_c + \mathbf{M}_\vartheta \ddot{\vartheta}]; \end{aligned} \quad (1.18)$$

$$\lambda = \frac{2\rho U^2 a^3}{\beta EI_0};$$

$$\mathbf{q} = \{q_j\}; \boldsymbol{\beta}_0 = \{\beta_{0,i}\}; \boldsymbol{\beta}_1 = \{\beta_{1,i}\}; \mathbf{K} = [k_{ij}]; \mathbf{B} = [b_{ij}]; \mathbf{D} = [d_{ij}]; \mathbf{M}_v = \{m_{v,i}\};$$

$$\mathbf{M}_g = \{m_{g,i}\}; \mathbf{M} = [m_{ij}]; \mathbf{C} = \mathbf{K} + \lambda \mathbf{B}.$$

Для достаточно медленных движений профиля можно пренебречь инерционными силами легкого деформируемого хвостика и аэродинамическим демпфированием по координатам  $q_j$ , полагая  $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} \approx 0$  и  $\mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} \approx 0$  [67]. Тогда

$$\mathbf{q} = -\lambda \mathbf{C}^{-1} [\boldsymbol{\beta}_0 (\vartheta_c - \frac{\dot{v}_c}{U}) + \boldsymbol{\beta}_1 \frac{\dot{\vartheta}_c a}{U}]. \quad (1.19)$$

Коэффициенты  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$  (1.13), входящие в выражения  $\Delta Y$  и  $\Delta M_c$  (1.15), в данном случае (при  $\dot{q}_j \approx 0$ ), линейно зависят от параметров движения профиля  $\vartheta_c - \dot{v}_c/U$  и  $\dot{\vartheta}_c/U$ , а также от обобщенных координат  $q_j$ , ( $j = 1, 2, \dots, s$ ), которые также линейно зависят от этих параметров согласно (1.19). В этом случае выражения  $\Delta Y$  и  $\Delta M_c$  можно записать в общепринятом для профиля крыла виде через квазистационарные аэродинамические коэффициенты [12, 67]:

$$\Delta Y = \frac{\rho U^2}{2} b [c_y^\alpha \alpha_c + c_y^{\bar{\omega}_z} \bar{\omega}_z]; \quad (1.20)$$

$$\Delta M_c = \frac{\rho U^2}{2} b^2 [m_z^\alpha \alpha_c + m_z^{\bar{\omega}_z} \bar{\omega}_z];$$

$$\alpha_c = \vartheta_c - \frac{\dot{v}_c}{U}; \quad \bar{\omega}_z = \frac{b \dot{\vartheta}_c}{U}; \quad b = 2a.$$

В данном случае безразмерные аэродинамические коэффициенты рассматриваемого профиля крыла  $c_y^\alpha, c_y^{\bar{\omega}_z}, m_z^\alpha, m_z^{\bar{\omega}_z}$  зависят от его упругих деформаций, характеризуемых обобщенными координатами  $q_j$ , ( $j = 1, 2, \dots, s$ ). В случае недеформируемого тонкого профиля крыла (при  $q_j = 0$ ), совершающего достаточно медленные поступательно-вращательные движения в дозвуковом потоке идеального сжимаемого газа:  $c_y^\alpha = 2\pi/\beta$ ;  $c_y^{\bar{\omega}_z} = m_z^\alpha = \pi/2\beta$ ;  $m_z^{\bar{\omega}_z} = 0$ ;  $\beta = \sqrt{1-M^2}$ ;  $M < 1$ .

## 1.4. Пример расчета

В качестве примера рассмотрим симметричный профиль крыла, представленный в двух вариантах конструктивного исполнения. В первом варианте (рис. 1.2, а) хвостик образован тонкой упругой пластиной постоянной толщины, аэродинамическая форма которого получается с помощью накладного профилированного пенопласта. Заполнитель в этом случае не работает на изгиб и сдвиг и расчеты проводятся для профиля с постоянными характеристиками по длине без учета сдвига. Аппроксимирующие функции для угла поворота (1.7) и поперечного перемещения (1.2), удовлетворяющие соотношению (1.8) при  $GF_c \rightarrow \infty$ , берутся в виде

$$\psi_i = (\xi - \xi_0)^i; \quad \eta_i = \frac{(\xi - \xi_0)^{i+1}}{i+1}.$$

Во втором варианте (рис. 1.2, б) упругая часть профиля состоит из сотового заполнителя, работающего на сдвиг, и тонкой обшивки постоянной толщины  $h_0$ , работающей на растяжение-сжатие. В этом случае считается, что толщина упругого хвостика при  $\xi_0 \leq \xi \leq 1$  меняется по линейному закону как  $c = c_0(1 - \xi_0)^{-1}(1 - \xi)$ ,  $c_0$  – толщина профиля в сечении  $\xi = \xi_0$ ).

Жесткости хвостика на изгиб и на сдвиг:  $EI_0 = \frac{1}{2}Eh_0c^2$ ;  $GF_c = Gc$ .

Аппроксимирующие функции для этого случая, удовлетворяющие соотношению (1.8) берутся в виде:

$$\begin{aligned} \psi_i &= (\xi - \xi_0)^i; \\ \eta_1 &= \frac{(\xi - \xi_0)^2}{2} + \frac{E h_0 c_0}{G a^2} \frac{\xi - \xi_0}{1 - \xi_0}; \\ \eta_i &= \frac{(\xi - \xi_0)^{i+1}}{i+1} - \frac{E h_0 c_0}{G 2a^2} \left\{ i - (i+1) \frac{\xi - \xi_0}{1 - \xi_0} \right\} (\xi - \xi_0)^{i-1}; \quad i = 2, 3, \dots, s. \end{aligned}$$



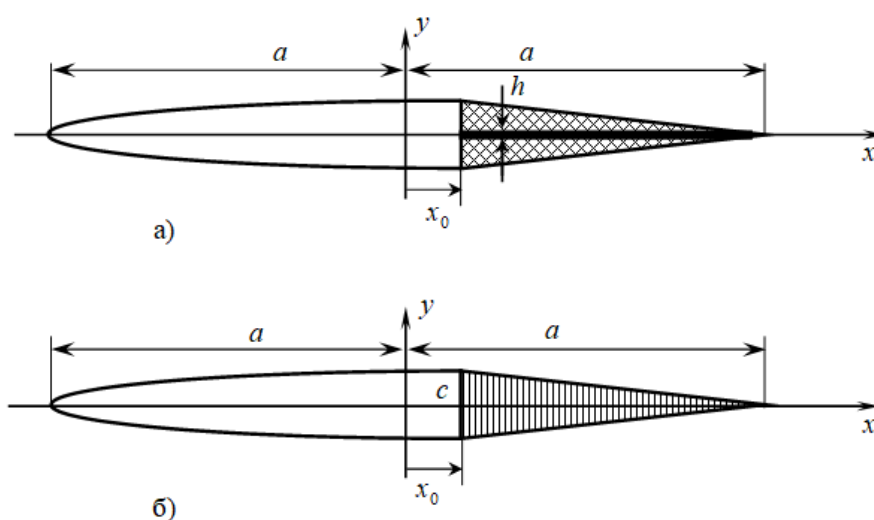


Рис. 1.2. Варианты конструктивного исполнения профиля.

Расчеты выполнены при следующих исходных данных:  $a = 0.5$  м,  
 $x_0 = 0.05$ ,  $\frac{Ec_0 h_0}{Ga^2} = 1$ ,  $M = 0$  ( $\beta = 1$ ).

Значения аэродинамических коэффициентов для упругих профилей, полученные по методу Ритца при различном числе  $s$  аппроксимирующих функций, приведены в табл. 1.1 для 1-го варианта профиля (рис. 1.2, а) и в табл. 1.2 – для 2-го варианта (рис. 1.2, б) [23, 24, 28]

Коэф-ты	Абс. жесткий	Деформируемый профиль, вар. 1; $\lambda = 10$		
		$s = 2$	$s = 4$	$s = 8$
$c_y^\alpha$	6.2832	5.1719	5.1697	5.1697
$m_z^\alpha$	1.5708	1.4499	1.4454	1.4454
$c_y^{\bar{\omega}_z}$	1.5708	0.3789	0.3660	0.3660
$m_z^{\bar{\omega}_z}$	0	-0.1184	-0.1231	-0.1231

Таблица 1.1

Коэф-ты	Абс. жесткий	Деформируемый профиль, вар. 2; $\lambda = 10$		
		$s = 2$	$s = 4$	$s = 8$
$c_y^\alpha$	6.2832	3.5147	3.5920	3.5704
$m_z^\alpha$	1.5708	1.1951	1.2219	1.2158
$c_y^{\bar{\omega}_z}$	1.5708	-1.2141	-1.0715	-1.1040
$m_z^{\bar{\omega}_z}$	0	-0.2986	-0.2648	-0.2713

Таблица 1.2

На рис. 1.3, 1.4, 1.5 и 1.6 приведены графики изменения аэродинамических коэффициентов профиля  $\Delta c_y^\alpha$ ,  $\Delta m_z^\alpha$ ,  $\Delta c_y^{\bar{\omega}_z}$ ,  $\Delta m_z^{\bar{\omega}_z}$  за счет упругости его хвостика по сравнению с их значениями для абсолютно жесткого профиля  $c_y^\alpha = 2\pi$ ,  $m_z^\alpha = c_y^{\bar{\omega}_z} = \pi/2$ ,  $m_z^{\bar{\omega}_z} = 0$  в зависимости от безразмерного параметра  $\lambda$  для вариантов 1 и 2. Сплошными линиями показаны результаты, полученные при использовании  $s = 8$  аппроксимирующих функций, пунктирными линиями –  $s = 2$ .

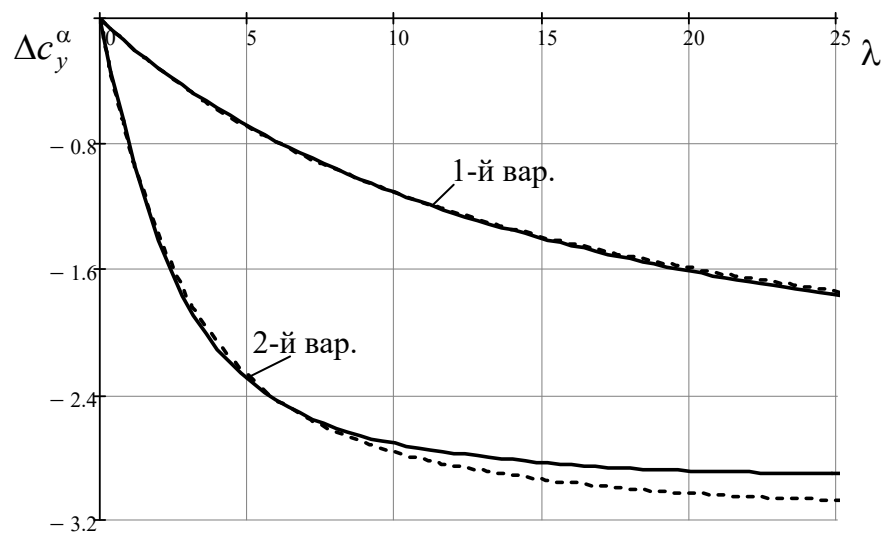


Рис. 1.3. Графики изменения  $\Delta c_y^\alpha$ .

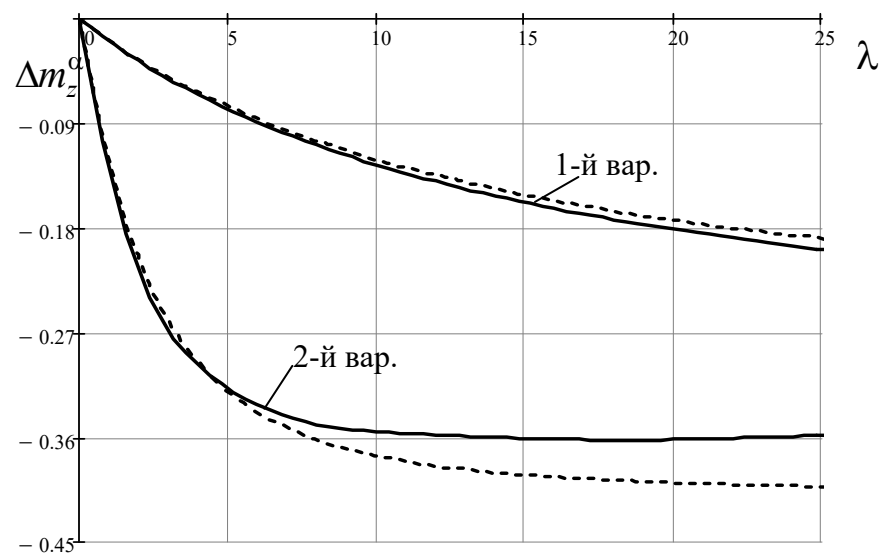


Рис. 1.4. Графики изменения  $\Delta m_z^\alpha$ .

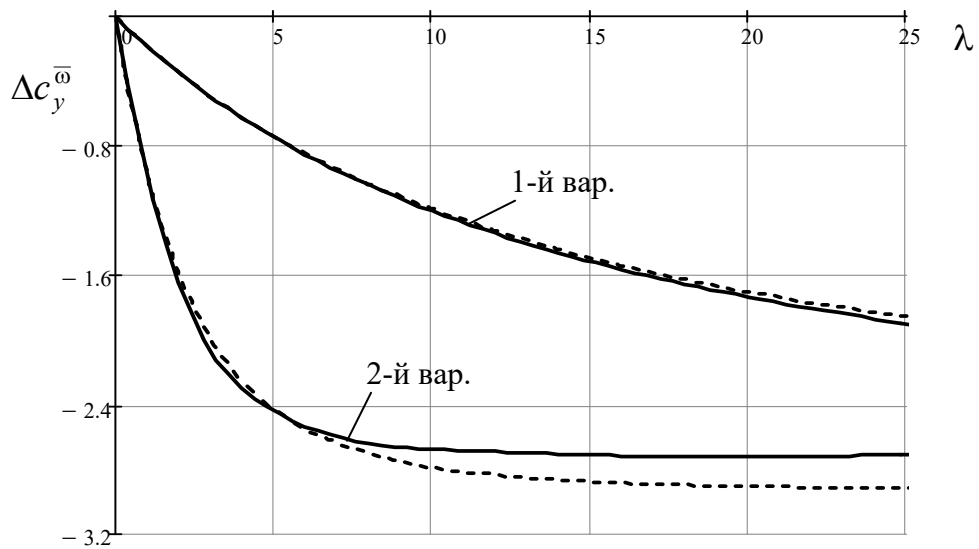


Рис. 1.5. Графики изменения  $\Delta c_y^{\omega_z}$ .

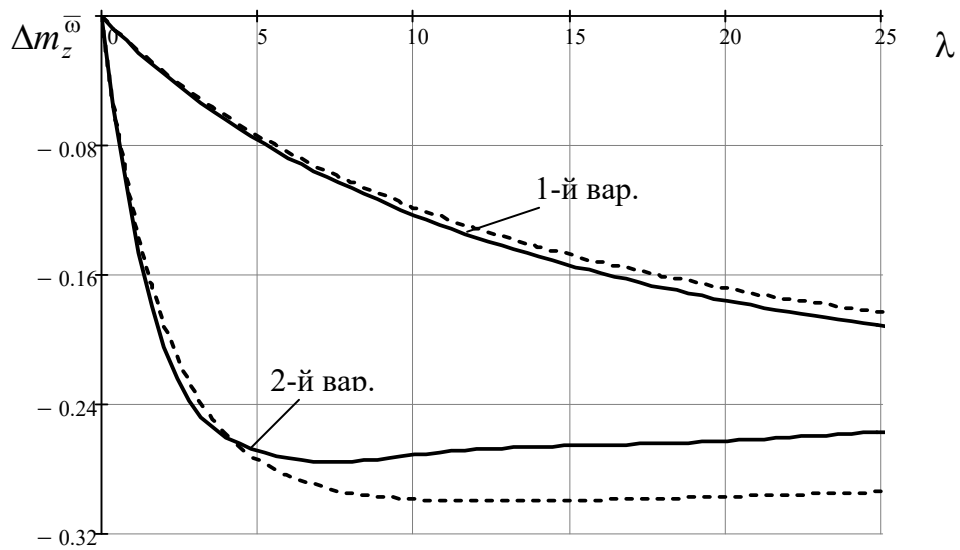


Рис. 1.6. Графики изменения  $\Delta m_z^{\omega_z}$ .

На рис. 1.7 приведен график аэродинамического давления по длине профиля, отнесенного к скоростному напору  $\Delta \bar{p} = 2\Delta p / (\rho U^2)$ , при  $\vartheta_c = 1$  рад: сплошной линией – для абсолютно жесткого профиля;

пунктирной линией – для 1-го варианта профиля при  $\lambda = 10$ ,  $s = 8$ ;  
 штрихпунктирной линией – для 2-го варианта профиля при  $\lambda = 10$ ,  $s = 8$ .

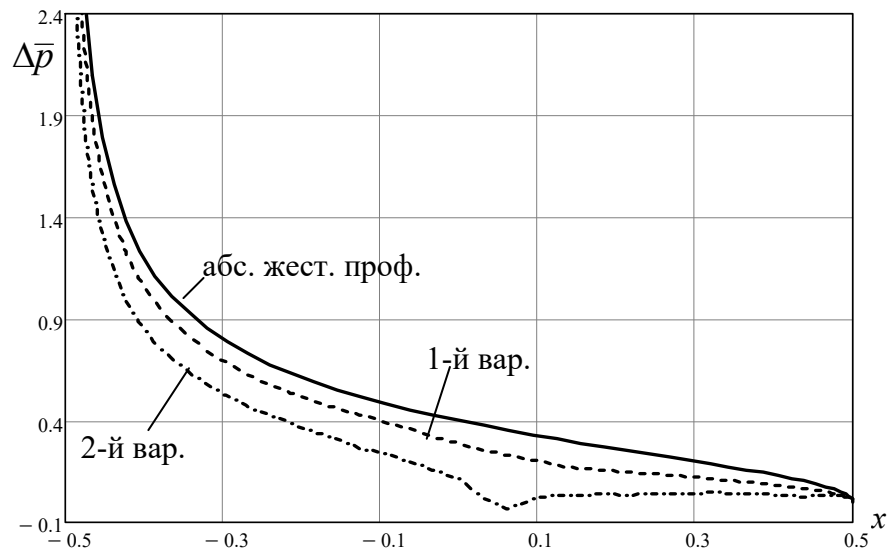


Рис. 1.7. Графики изменения перепада аэродинамического давления.

На рис. 1.8 на примере 2-го варианта профиля показано, что при  $\lambda = 10$  график аэродинамического давления по длине профиля, отнесенного к скоростному напору  $\Delta\bar{p} = 2\Delta p / (\rho U^2)$ , при  $\vartheta_c = 1$  рад мало меняется при выборе различного числа аппроксимирующих функций: сплошной линией – для  $s = 8$ ; пунктирной линией – для  $s = 4$ ; штрихпунктирной линией – для  $s = 2$ .

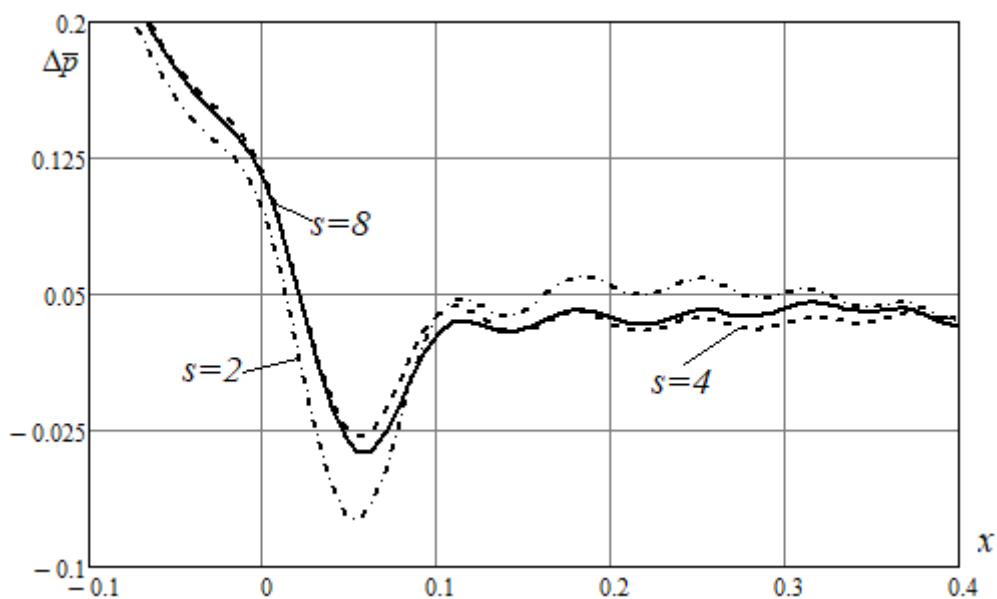


Рис. 1.8. Графики изменения перепада аэродинамического давления при различном числе аппроксимирующих функций.

На рис. 1.9 на примере 2-го варианта профиля показано, что форма графика аэродинамического давления по длине профиля, отнесенного к скоростному напору  $\Delta \bar{p} = 2\Delta p / (\rho U^2)$ , зависит от числа членов ряда в разложении угла атаки  $nr$ . При постоянном числе аппроксимирующих функций  $s = 8$ ,  $\lambda = 10$ ,  $\vartheta_c = 1$  рад имеем: сплошной линией – для  $nr = 40$ ; пунктирной линией – для  $nr = 100$ ; штрихпунктирной линией – для  $nr = 10$ .

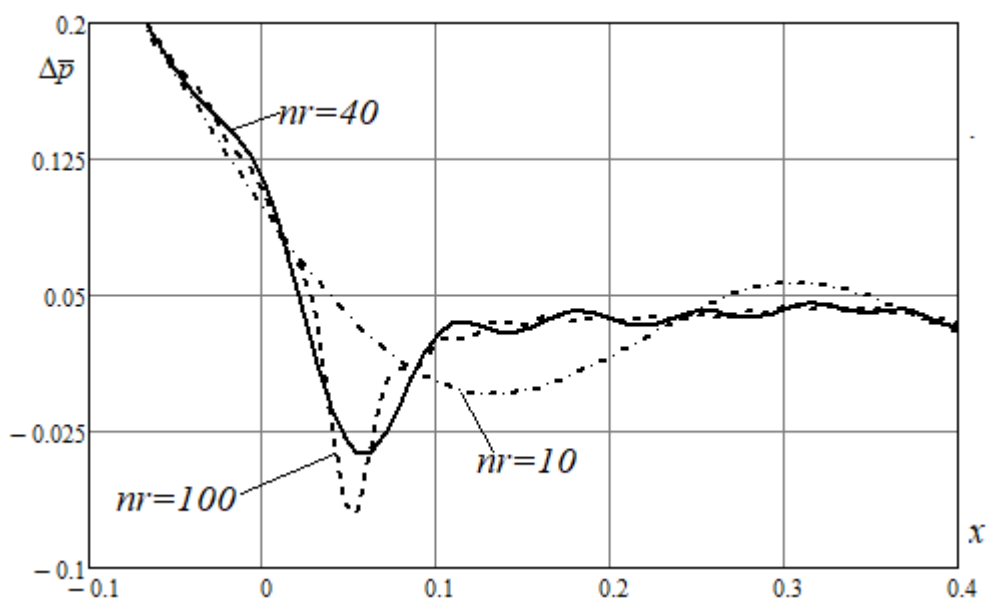


Рис. 1.9. Графики изменения перепада аэродинамического давления при различном числе членов ряда в разложении угла атаки.

На рис. 1.10 изображены графики поперечного перемещения упругого хвостика профиля при  $\vartheta_c = 1$  рад,  $\lambda = 10$ ,  $s = 8$ : пунктирной линией – для 1-го варианта профиля; штрихпунктирной линией – для 2-го варианта профиля.

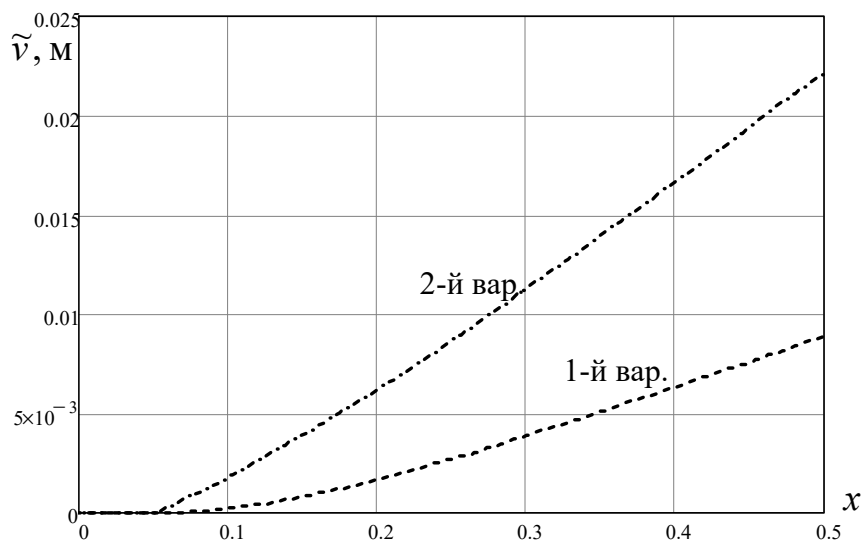


Рис. 1.10. Графики поперечного перемещения упругого хвостика профиля.

На рис. 1.11 на примере 2-го варианта профиля показано, что при  $\vartheta_c = 1$  рад,  $\lambda = 10$  графики поперечного перемещения упругого хвостика профиля мало меняются при выборе различного числа аппроксимирующих функций: сплошной линией – для  $s = 8$ ; пунктирной линией – для  $s = 4$ ; штрихпунктирной линией – для  $s = 2$ .

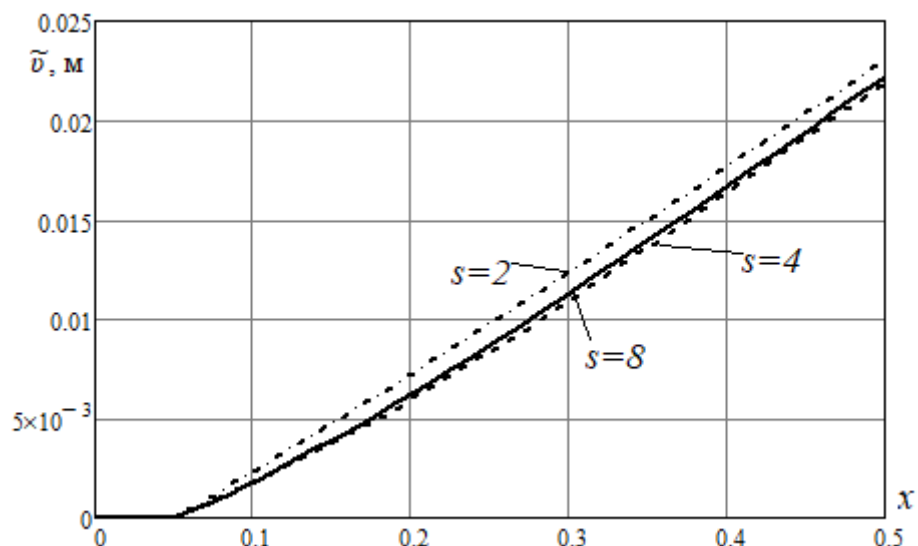


Рис. 1.11. Графики поперечного перемещения упругого хвостика профиля при различном числе аппроксимирующих функций.

На рис. 1.12 и 1.13 приведены графики изменения аэродинамических коэффициентов  $\Delta c_y^\alpha$  и  $\Delta m_z^\alpha$  за счет упругости хвостика по сравнению с абсолютно жестким профилем  $c_y^\alpha = 2\pi$  и  $\Delta m_z^\alpha = \frac{\pi}{2}$  соответственно в зависимости от безразмерного параметра  $\lambda$ : пунктирной линией – для 1-го варианта профиля при  $s = 8$ , а штрихпунктирной линией – для 2-го варианта профиля при  $Ec_0 h_0 / Ga^2 = 0.01, s = 8$ .

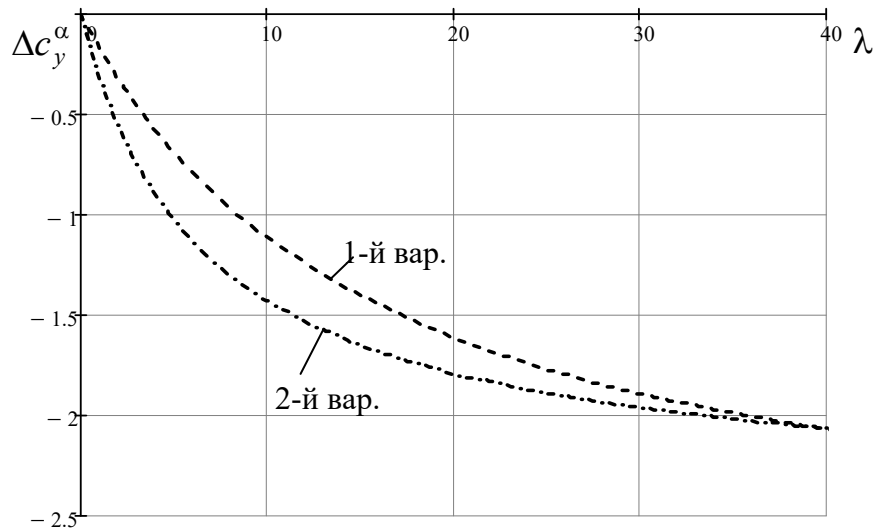


Рис. 1.12. Графики изменения  $\Delta c_y^\alpha$  за счет упругости хвостика по сравнению с абсолютно жестким профилем.

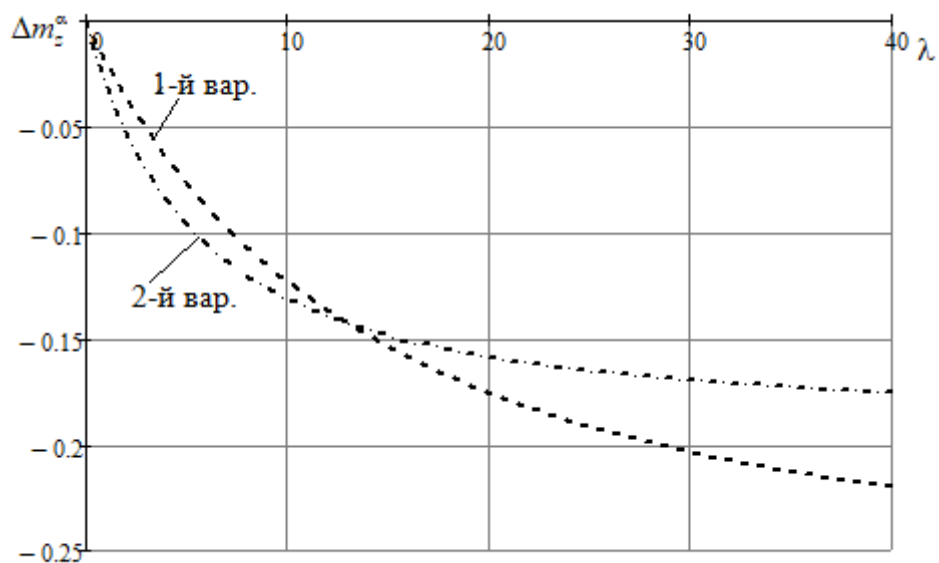


Рис. 1.13. Графики изменения  $\Delta m_z^\alpha$  за счет упругости хвостика по сравнению с абсолютно жестким профилем.

На рис. 1.14 приведены графики аэродинамического давления по длине профиля, отнесенного к скоростному напору, при  $\vartheta_c = 1$  рад и  $\lambda = 10$ : сплошной линией – для абсолютно жесткого профиля; пунктирной линией – для 1-го варианта профиля; штрихпунктирной линией – для 2-го варианта профиля при  $Ec_0 h_0 / Ga^2 = 0.01$ .



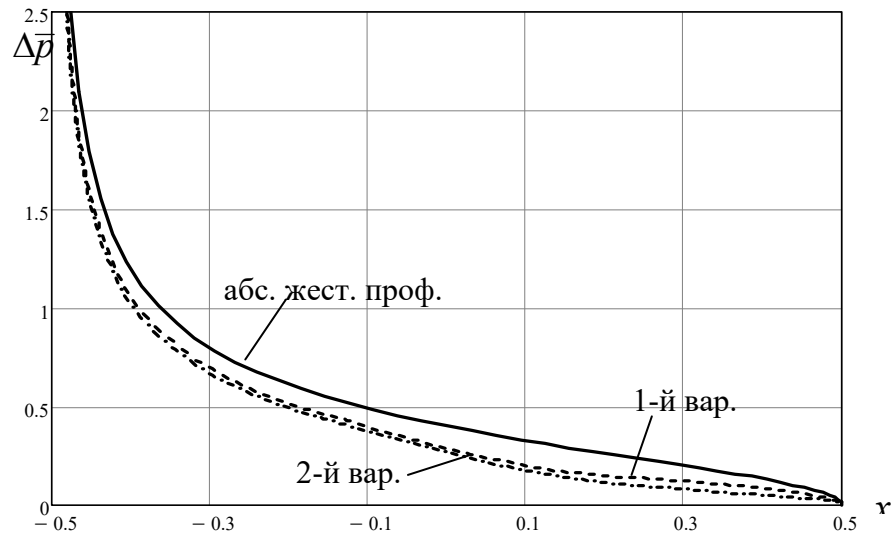


Рис. 1.14. Графики изменения перепада аэродинамического давления, отнесенного к скоростному напору.

На рис. 1.15 изображены перемещения упругого хвостика профиля при  $\vartheta_c = 1$  рад и  $\lambda = 10$ : пунктирной линией – для 1-го варианта профиля, а сплошной линией – для 2-го варианта профиля при  $Ec_0 h_0 / Ga^2 = 0.01$ .

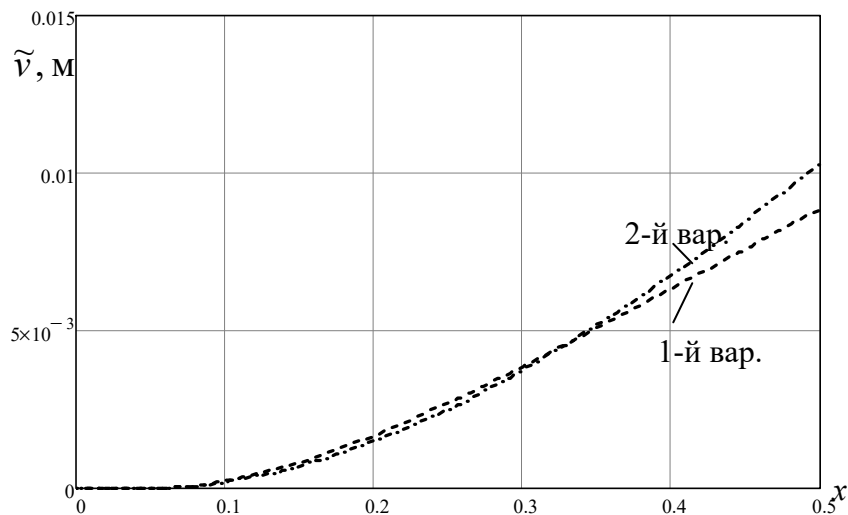


Рис. 1.15. Перемещения упругого хвостика профиля.

В главе 1 сформулирована и решена задача аэродинамического нагружения и аэроупругих колебаний в дозвуковом квазистационарном потоке тонкого упругого профиля, жестко соединенного в передней части с лонжероном крыла большого удлинения, совершающего изгибно-крутильные колебания. Поперечное перемещение упругого хвостика представлялось по методу Ритца в виде разложения по заданным функциям с неизвестными коэффициентами, которые принимались за обобщенные координаты.

В предположении, что упругий хвостик профиля является достаточно легким (влияние его инерционных сил не учитывается), обобщенные координаты, характеризующие его деформации исключаются как квазистатические. Получены выражения для подъемной силы и момента тангажа профиля в зависимости от угла атаки и угловой скорости его жесткой передней части с квазистационарными аэродинамическими коэффициентами, учитывающими упругие деформации хвостика.

Выполнены расчеты для деформируемых хвостиков двух типов: 1) в виде тонкой пластины, профилированной пенопластом; 2) в виде сужающейся трехслойной пластины с мембранными внешними слоями и сотовым наполнителем.

Получены оценки влияния упругости хвостиков на квазистационарные аэродинамические коэффициенты подъемной силы и момента тангажа профиля.

## Глава 2. Конечно-элементная модель управляемого деформирования профиля крыла в потоке

В данной главе разработаны линейная и геометрически нелинейная модели управляемого деформирования профиля крыла (тонкой поперечной полоски единичной ширины), обтекаемой несжимаемым потоком с малыми углами скоса  $\alpha(x,t)$ . Впервые используется концепция «рыбьего плавника» или «рыбьего хвоста» – гибкого хребта с мышцами по бокам, за счет одностороннего натяжения которых происходит изгиб тела, вызывающего изменение гидродинамических нагрузок и движения тела. Полученные уравнения аэроупругих колебаний в дальнейшем при присоединении к ним системы активного управления могут составить основу для создания адаптивных профилей крыла и летательных аппаратов в целом, управляемого движение которых осуществляется за счет изгиба срединной поверхности.

Рассматривается симметричный профиль крыла, состоящий из недеформируемой носовой и упругой хвостовой частей, рис. 2.1. Упругая часть профиля состоит из: центральной упругой пластины (балки-полоски), работающей на растяжение-сжатие, изгиб и поперечный сдвиг; упругих поперечных ребер, жестко соединенных с центральной балкой; верхней и нижней обшивки, соединенной с ребрами, работающей на растяжение; абсолютно жесткого кончика хвостика профиля. За счет упругости ребер регулируется натяжение обшивки между носовой частью и кончиком хвостика. В исходном состоянии верхняя и нижняя обшивки могут быть предварительно натянуты за счет  $\hat{\delta}_0 = \check{\delta}_0 = \delta_0 < 0$ .

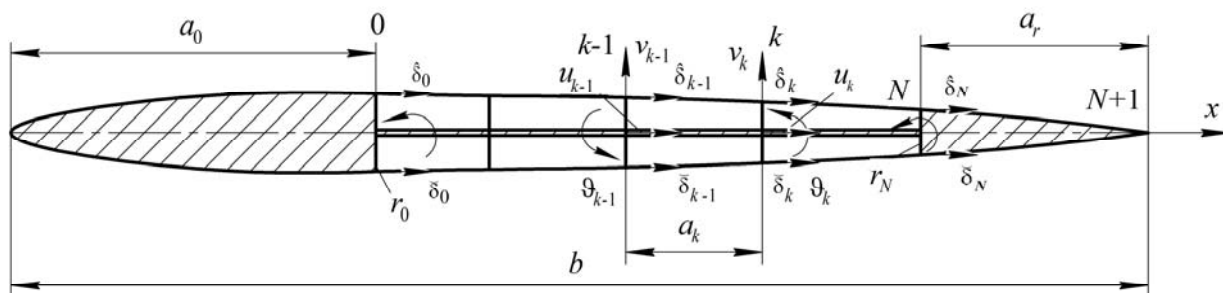


Рис. 2.1. Профиль крыла.

На конце носовой части в сечении «0» имеется двухсторонний поворотный рычаг, поворачивающийся на задаваемый управляющий угол  $\vartheta_c$ .

Расчетная модель деформируемого профиля показана на рис. 2.1. Ее носовая часть длиной  $a_0$  и задняя часть хвостика длиной  $a_r$  считаются абсолютно жесткими. Они в срединной плоскости профиля жестко соединены упругой пластиной, к которой на верхней и нижней сторонах жестко присоединены в отдельных сечениях  $k$  поперечные упругие на изгиб ребра высотой  $r_k$ . Эти ребра на концах соединены с верхней («^») и нижней («~») мембранными обшивками, а пространства между пластиной, ребрами и обшивками заполнены легким пенопластом.

Деформации изгиба профиля создаются за счет управляемого поворота двухстороннего рычага в сечении  $k=0$  на относительный (по отношению к носовой части) угол  $\vartheta_c$ . При этом верхняя обшивка в этом сечении получает перемещение  $\hat{\delta}_0 = -\vartheta_c r_0$ , и в ней возникают растягивающие силы, разные на всех участках, которые с помощью ребер передаются на пластину в виде изгибающих моментов в сечениях  $k=1,2,\dots,N$ . Нижняя обшивка при этом получит перемещение  $\tilde{\delta}_0 = \vartheta_c r_0$ , подвергнется сжатию и работать не будет.

При действии поперечной аэродинамической нагрузки появится дополнительный изгиб профиля, который повлияет на деформации

обшивок; в нижней обшивке могут появиться положительные деформации, и она включится в работу.

Таким образом, в общей постановке задача аэроупругости такого профиля с управляемой деформацией, когда мембранная обшивка может работать только на растяжение, является нелинейной. Кроме того, при умеренно больших углах поворота элементов ( $\sin \vartheta \approx \vartheta$ ,  $\cos \vartheta \approx 1 - 0.5\vartheta^2$ ) задачу деформирования профиля надо рассматривать в геометрически нелинейной постановке. При этом, для общности следует учитывать предварительное натяжение обшивок, принимая управляющие перемещения в виде  $\widehat{\delta}_0 = \delta_0 - \vartheta_c r_0$ ,  $\check{\delta}_0 = \delta_0 + \vartheta_c r_0$ . При предварительном натяжении обшивки за счет  $\delta_0 < 0$  при достаточно малых углах поворота элементов профиля ( $\sin \vartheta \approx \vartheta$ ,  $\cos \vartheta \approx 1$ ) задачу можно рассматривать в линейной (линеаризованной) постановке при условии, что деформации удлинения обшивки будут положительными.

Для построения расчетной модели гибкого профиля будем использовать метод конечных элементов. Перемещения и углы поворота  $u_k$ ,  $v_k$ ,  $\vartheta_k$  будем отсчитывать от осей  $x, y$ , связанных с подвижной носовой частью профиля.

В пределах длины каждого конечного элемента (КЭ) его геометрические, жесткостные и инерционные характеристики считаются постоянными.

В качестве обобщенных координат в  $k$ -ом сечении рассматриваются  $v_k$ ,  $u_k$ ,  $\vartheta_k$ ,  $\widehat{\delta}_k$ ,  $\check{\delta}_k$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ), представляющие поперечное и продольное перемещения, углы поворота, а также относительные перемещения верхней  $\widehat{\delta}_k$  и нижней  $\check{\delta}_k$  обшивок, которые происходят за счет изгиба ребер.

В сечении  $k = 0$  на стыке жесткой и упругой частей выполняются следующие условия:  $v_0 = 0, u_0 = 0, \vartheta_0 = 0$ ,  $\widehat{\delta}_0 = \delta_0 - \vartheta_c r_0$ ,  $\check{\delta}_0 = \delta_0 + \vartheta_c r_0$ , где

$\delta_0, \vartheta_c$  – заданы, а для абсолютно жесткого хвостика длиной  $a_r$ :  $\widehat{\delta}_N = \check{\delta}_N = 0$  (рис.2.1).

Вектор обобщенных координат  $k$ -ого КЭ длиной  $a_k$  обозначим:

$$\mathbf{q}_k = [v_{k-1} \ u_{k-1} \ \vartheta_{k-1} \ \widehat{\delta}_{k-1} \ \check{\delta}_{k-1} \ v_k \ u_k \ \vartheta_k \ \widehat{\delta}_k \ \check{\delta}_k]^T.$$

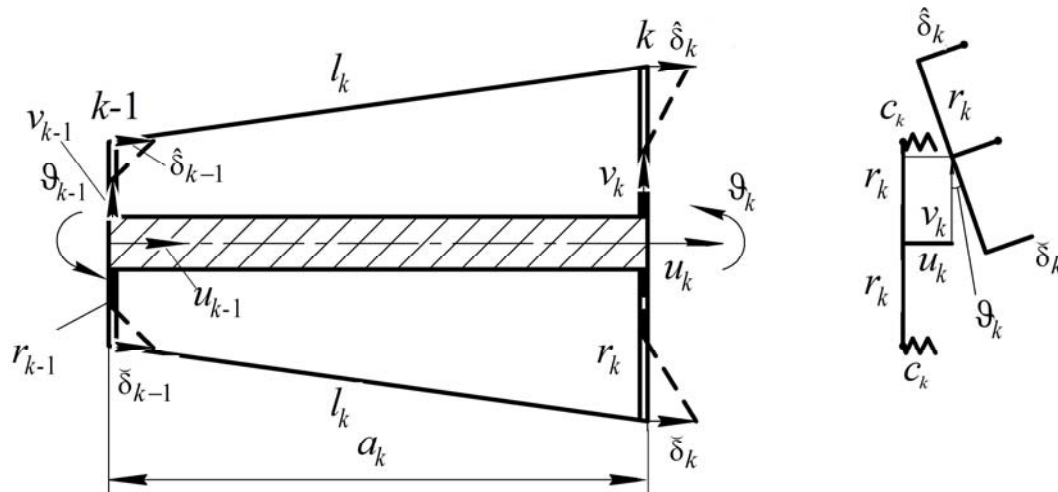


Рис.2.2. Модель составного конечного элемента.

## 2.1. Потенциальная энергия деформации профиля

Деформации центральной балки-полоски и обшивок будем определять по геометрически нелинейной теории в квадратичном приближении.

Потенциальная энергия деформации упругой части профиля записывается в следующем виде:

$$\Pi = \sum_{k=1}^n [\Pi_k^0 + \check{\Pi}_k + \widehat{\Pi}_k + \frac{1}{2} C_k \widehat{\delta}_k^2 + \frac{1}{2} C_k \check{\delta}_k^2], \quad (2.1)$$

где  $\Pi_k^0, \widehat{\Pi}_k, \check{\Pi}_k$  – потенциальные энергии  $k$ -ых КЭ центральной балки, верхней и нижней обшивок,  $C_k$  – коэффициенты жесткости пружин, моделирующих упругость поперечных ребер.

Потенциальная энергия  $k$ -го конечного элемента центральной балки при изгибе, поперечном сдвиге и растяжении при геометрически нелинейном деформировании определяется по формуле [35]:

$$\begin{aligned}
\Pi_k^0 = & \frac{1}{2} \frac{12EI_0\kappa_k}{a_k^3} [(v_k - v_{k-1})^2 - a_k(v_k - v_{k-1})(\vartheta_k + \vartheta_{k-1}) + \\
& + \frac{1+3\kappa_k}{12\kappa_k} a_k^2 (\vartheta_k - \vartheta_{k-1})^2 + a_k^2 \vartheta_{k-1} \vartheta_k] + \frac{1}{2} \frac{a_k}{EF_0} N_k^2,
\end{aligned} \tag{2.2}$$

где

$$\begin{aligned}
N_k = & \frac{EF_0}{a_k} [u_k - u_{k-1} + \frac{1}{2a_k} (1 + \frac{\kappa_k^2}{5})(v_k - v_{k-1})^2 - \\
& - \frac{\kappa_k^2}{10} (v_k - v_{k-1})(\vartheta_k + \vartheta_{k-1}) + \frac{a_k}{24} (1 + \frac{3\kappa_k^2}{5})(\vartheta_k - \vartheta_{k-1})^2 + \frac{\kappa_k^2}{10} a_k \vartheta_{k-1} \vartheta_k];
\end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\kappa_k = (1 + \frac{12}{a_k^2} \frac{EI_0}{GF_c})^{-1},$$

Здесь  $EI_0$ ,  $GF_c$ ,  $EF_0$  – жесткости центральной балки на изгиб, сдвиг и растяжение. Если пренебречь поперечным сдвигом, то следует положить  $GF_c \rightarrow \infty$  и  $\kappa_k = 0$ .

Потенциальная энергия  $k$ -го конечного элемента верхней обшивки определяется по формуле:

$$\widehat{\Pi}_k = \frac{1}{2} Eh_{обш} \cdot l_k \cdot \widehat{\varepsilon}_k^2, \tag{2.4}$$

где  $Eh_{обш}$  – жесткость обшивки единичной ширины на растяжение.

Деформация растяжения  $k$ -го конечного элемента верхней обшивки вычисляется по формуле:

$$\widehat{\varepsilon}_k = \frac{\widehat{l}_k}{l_k} - 1 = \sqrt{1 + \widehat{\Delta}_k} - 1, \quad \widehat{\Delta}_k = \frac{\widehat{l}_k^2 - l_k^2}{l_k^2}. \tag{2.5}$$

Здесь  $l_k$ ,  $\widehat{l}_k$  – длины недеформированного и деформированного  $k$ -го КЭ верхнего участка обшивки с учетом его наклона к оси  $x$ , их квадраты вычисляются по формулам:

$$\widehat{l}_k^2 = (x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2, \quad l_k^2 = a_k^2 + (r_k - r_{k-1})^2, \tag{2.6}$$

где

$$\begin{aligned}
x_{k-1} &= x_{k-1}^0 + u_{k-1} - r_{k-1} \sin \vartheta_{k-1} + \widehat{\delta}_{k-1} \cos \vartheta_{k-1}, \\
x_k &= x_k^0 + u_k - r_k \sin \vartheta_k + \widehat{\delta}_k \cos \vartheta_k, \\
y_{k-1} &= v_{k-1} + r_{k-1} \cos \vartheta_{k-1} + \widehat{\delta}_{k-1} \sin \vartheta_{k-1}, \\
y_k &= v_k + r_k \cos \vartheta_k + \widehat{\delta}_k \sin \vartheta_k, \\
x_{k-1} - x_k &= a_k + (u_k - u_{k-1}) - (r_k \sin \vartheta_k - r_{k-1} \sin \vartheta_{k-1}) + (\widehat{\delta}_k \cos \vartheta_k - \widehat{\delta}_{k-1} \cos \vartheta_{k-1}), \\
y_{k-1} - y_k &= (v_k - v_{k-1}) + (r_k \cos \vartheta_k - r_{k-1} \cos \vartheta_{k-1}) + (\widehat{\delta}_k \sin \vartheta_k - \widehat{\delta}_{k-1} \sin \vartheta_{k-1}).
\end{aligned}$$

В квадратичном приближении по перемещениям и углам поворота ( $\sin \vartheta \approx \vartheta$ ,  $\cos \vartheta \approx 1 - 0.5\vartheta^2$ ) будем иметь:

$$\begin{aligned}
l_k^2 \widehat{\Delta}_k &\approx l_k^2 \widehat{\Delta}_{k,лин} + l_k^2 \widehat{\Delta}_{k,кв}; \\
l_k^2 \widehat{\Delta}_{k,лин} &\approx l_k^2 \widehat{\Delta}_{k,лин} = 2a_k [(u_k - u_{k-1}) - (r_k \vartheta_k - r_{k-1} \vartheta_{k-1}) + (\widehat{\delta}_k - \widehat{\delta}_{k-1})] + \\
&\quad + 2(r_k - r_{k-1})(v_k - v_{k-1}), \\
l_k^2 \widehat{\Delta}_{k,кв} &= (u_k - u_{k-1})^2 + (v_k - v_{k-1})^2 + r_k r_{k-1} (\vartheta_k - \vartheta_{k-1})^2 + (\widehat{\delta}_k - \widehat{\delta}_{k-1})^2 - \\
&\quad - 2(u_k - u_{k-1})[(r_k \vartheta_k - r_{k-1} \vartheta_{k-1}) - (\widehat{\delta}_k - \widehat{\delta}_{k-1})] + 2(\vartheta_k - \vartheta_{k-1})(r_k \widehat{\delta}_{k-1} + r_{k-1} \widehat{\delta}_k).
\end{aligned}$$

Тогда деформация растяжения  $k$ -го КЭ верхней обшивки запишется в виде:

$$\widehat{\varepsilon}_k = \frac{1}{2} (\widehat{\Delta}_{k,лин} + \widehat{\Delta}_{k,кв}) - \frac{1}{8} \widehat{\Delta}_{k,лин}^2. \quad (2.7)$$

Для вычисления потенциальной энергии нижней обшивки можно использовать формулы для верхней обшивки, сделав следующую замену:

$$r_k \rightarrow -r_k \text{ и } \widehat{\delta}_k \rightarrow \widetilde{\delta}_k \quad (k = 1, 2, \dots, N).$$

В линейном приближении по перемещениям и углам поворота ( $\sin \vartheta \approx \vartheta$ ,  $\cos \vartheta \approx 1$ ) при вычислении деформации обшивки можно принять:

$$\widehat{\varepsilon}_k = \frac{1}{2} \widehat{\Delta}_{k,лин}. \quad (2.8)$$

Учитывая, что аэродинамическая нагрузка зависит только от части обобщенных координат, то вектор обобщенных координат можно представить в виде



$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_I \\ \mathbf{q}_{II} \end{bmatrix},$$

где  $\mathbf{q}_I$  – вектор обобщенных координат, от которых зависит аэродинамическая нагрузка, действующая на профиль;  $\mathbf{q}_{II}$  – вектор обобщенных координат, от которых аэродинамическая нагрузка не зависит.

При линейной постановке задачи потенциальная энергия деформирования профиля в матричном виде с учетом разделения обобщенных координат может быть записана следующим образом:

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_I^T & \mathbf{q}_{II}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_I \\ \mathbf{q}_{II} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \mathbf{q}_I^T \mathbf{K}_{11} \mathbf{q}_I + \mathbf{q}_I^T \mathbf{K}_{12} \mathbf{q}_{II} + \frac{1}{2} \mathbf{q}_{II}^T \mathbf{K}_{22} \mathbf{q}_{II},$$

где  $\mathbf{K}_{21}^T = \mathbf{K}_{12}$ .

Через  $\mathbf{R}_I$  и  $\mathbf{R}_{II}$  обозначим векторы, содержащие нелинейные составляющие, полученные при вычислении производных от потенциальной энергии по обобщенным координатам соответствующим векторам  $\mathbf{q}_I$ ,  $\mathbf{q}_{II}$ .

Полагая, что зависимостью инерционных сил от  $\mathbf{q}_{II}$  можно пренебречь и учитывая, что аэродинамическая нагрузка зависит только от  $\mathbf{q}_I$ , получим:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{q}_{II}} = \mathbf{K}_{21} \mathbf{q}_I + \mathbf{K}_{22} \mathbf{q}_{II} + \mathbf{R}_{II} = \mathbf{0}.$$

Тогда  $\mathbf{q}_{II} = -\mathbf{K}_{22}^{-1} \mathbf{K}_{21} \mathbf{q}_I$  и производная потенциальной энергии по  $\mathbf{q}_I$  запишется в виде:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{q}_I} = (\mathbf{K}_{11} - \mathbf{K}_{12} \mathbf{K}_{22}^{-1} \mathbf{K}_{21}) \mathbf{q}_I + \mathbf{R}_I - \mathbf{K}_{12} \mathbf{K}_{22}^{-1} \mathbf{R}_{II} = \mathbf{K}_I \mathbf{q}_I + \tilde{\mathbf{R}}_I,$$

где  $\mathbf{K}_I = \mathbf{K}_{11} - \mathbf{K}_{12} \mathbf{K}_{22}^{-1} \mathbf{K}_{21}$  – приведенная матрица жесткости.

## 2.2. Определение аэродинамической нагрузки на деформируемый профиль крыла

Поперечное перемещение сечения упругого профиля определяет по формуле (1.1). При определении аэродинамической нагрузки будем считать, что относительное перемещение упругого хвостика  $\tilde{v}$  в пределах  $k$ -ого КЭ изменяется по линейному закону:

$$\tilde{v}(x,t) = v_{k-1} \frac{x_k - x}{a_k} + v_k \frac{x - x_{k-1}}{a_k} \text{ при } x_{k-1} \leq x \leq x_k, \quad (2.9)$$

а для жесткого кончика хвостика  $v_{N+1} = v_N + \vartheta_N(x - x_N)$  (рис. 2.1, б).

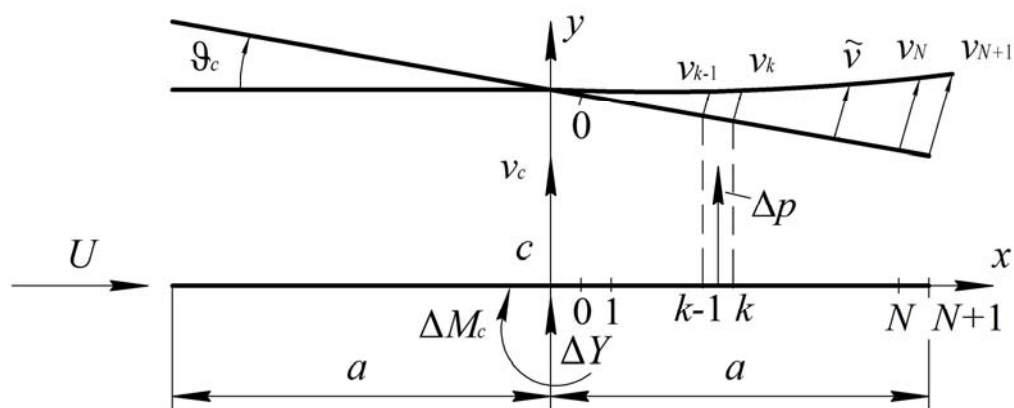


Рис. 2.3. Перемещение профиля

Тогда местный угол атаки  $\alpha(x,t)$  деформируемого колеблющегося профиля при безотрывном обтекании на участке  $x_{k-1} \leq x \leq x_k$  будет:

$$\alpha(x,t) = (\vartheta_c - \frac{\dot{v}_c}{U}) + \frac{1}{U} \dot{\vartheta}_c x - \frac{1}{U} (\dot{v}_{k-1} \frac{x_k - x}{a_k} + \dot{v}_k \frac{x - x_{k-1}}{a_k}). \quad (2.10)$$

Представляя  $\alpha(\varphi,t)$  в виде ряда (1.11) и используя замену переменных ( $x = a \cos \varphi$ ,  $dx = -a \sin \varphi d\varphi$ ,  $x_k = a \cos \varphi_k$ ,  $x = -a \rightarrow \varphi = \pi$ ,  $x = a \rightarrow \varphi = 0$ ), запишем перепад давления между нижней и верхней поверхностями тонкого профиля при дозвуковом обтекании его сжимаемым потоком на основании квазистационарной теории в виде:

$$\Delta p = \frac{2\rho U^2}{\beta} [\alpha_0 \frac{1 - \cos \varphi}{\sin \varphi} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin n\varphi], \quad (2.11)$$

где  $\rho$ ,  $U$  – плотность и скорость набегающего потока;  $\beta = \sqrt{1 - M^2}$   $M < 1$  – число Маха.

Коэффициенты  $\alpha_0$ ,  $\alpha_n$ , ( $n = 1, 2, \dots$ ) выражаются через обобщенные координаты:

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= \left( \vartheta_c - \frac{\dot{v}_c}{U} \right) + \sum_{l=1}^N [(c_{0,l} - c_{0,l+1}) \frac{v_l}{a} + \frac{1}{U} (e_{0,l} + f_{0,l+1}) \dot{v}_l], \\ \alpha_n &= \frac{\dot{\vartheta}_c a}{U} \delta_{1n} + \sum_{l=1}^N [(c_{n,l} - c_{n,l+1}) \frac{v_l}{a} + \frac{1}{U} (e_{n,l} + f_{n,l+1}) \dot{v}_l]; \\ \delta_{1n} &= \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 0 & n \neq 1 \end{cases}\end{aligned}\quad (2.12)$$

При этом:  $v_0 = 0$ ,  $c_{0,N+1} = 0$ ,  $c_{n,N+1} = 0$ ,  $f_{0,N+1} = 0$ ,  $f_{n,N+1} = 0$ .

Здесь:

$$\begin{aligned}c_{0,l} &= \frac{1}{\pi} \frac{a}{a_l} \int_{\varphi_{l-1}}^{\varphi_l} d\varphi, \quad f_{0,l} = \frac{1}{\pi} \frac{a}{a_l} (\cos \varphi_l \int_{\varphi_{l-1}}^{\varphi_l} d\varphi - \int_{\varphi_{l-1}}^{\varphi_l} \cos \varphi d\varphi), \\ e_{0,l} &= \frac{1}{\pi} \frac{a}{a_l} (\int_{\varphi_{l-1}}^{\varphi_l} \cos \varphi d\varphi - \cos \varphi_{l-1} \int_{\varphi_{l-1}}^{\varphi_l} d\varphi), \quad c_{n,l} = \frac{2}{\pi} \frac{a}{a_l} \int_{\varphi_{l-1}}^{\varphi_l} \cos n\varphi d\varphi, \\ f_{n,l} &= \frac{2}{\pi} \frac{a}{a_l} (\cos \varphi_l \int_{\varphi_{l-1}}^{\varphi_l} \cos n\varphi d\varphi - \int_{\varphi_{l-1}}^{\varphi_l} \cos \varphi \cos n\varphi d\varphi), \\ e_{n,l} &= \frac{2}{\pi} \frac{a}{a_l} (\int_{\varphi_{l-1}}^{\varphi_l} \cos \varphi \cos n\varphi d\varphi - \cos \varphi_{l-1} \int_{\varphi_{l-1}}^{\varphi_l} \cos n\varphi d\varphi), \\ f_{0,l} + e_{0,l} &= (\cos \varphi_l - \cos \varphi_{l-1}) c_{0,l}, \quad f_{n,l} + e_{n,l} = (\cos \varphi_l - \cos \varphi_{l-1}) c_{n,l}.\end{aligned}$$

Вариация работы аэродинамического давления на относительных (упругих) перемещениях профиля ( $\delta v_c = 0$ ,  $\delta \vartheta_c = 0$ ):

$$\delta A_a = \int_{x_0}^{x_N} \Delta p \delta v dx. \quad (2.13)$$

С учетом замены переменной и (2.9) получим:

$$\delta A_a = -a \sum_{k=1}^N \int_{\varphi_{k-1}}^{\varphi_k} \Delta p \delta v \sin \varphi d\varphi,$$

$$\delta v(x, t) = \frac{a}{a_k} [\delta v_{k-1} (\cos \varphi_k - \cos \varphi) + \delta v_k (\cos \varphi - \cos \varphi_{k-1})] \quad \text{при} \quad \varphi_k \leq \varphi \leq \varphi_{k-1}$$

$$\delta v(x, t) = \delta v_N + a \delta \vartheta_N (\cos \varphi - \cos \varphi_N) \quad \text{при} \quad 0 \leq \varphi \leq \varphi_N$$

Тогда после преобразования окончательное выражение для вариации работы аэродинамического давления будет:

$$\delta A_a = -\frac{2\rho U^2 a}{\beta} \sum_{k=1}^N [\alpha_0 (\beta_{0,k} \delta v_{k-1} + \gamma_{0,k} \delta v_k) + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (\beta_{n,k} \delta v_{k-1} + \gamma_{n,k} \delta v_k)], \quad (2.14)$$

где

$$\beta_{0,k} = \frac{a}{a_k} \int_{\varphi_{k-1}}^{\varphi_k} (1 - \cos \varphi) (\cos \varphi_k - \cos \varphi) d\varphi,$$

$$\gamma_{0,k} = \frac{a}{a_k} \int_{\varphi_{k-1}}^{\varphi_k} (1 - \cos \varphi) (\cos \varphi - \cos \varphi_{k-1}) d\varphi,$$

$$\beta_{n,k} = \frac{a}{a_k} \int_{\varphi_{k-1}}^{\varphi_k} \sin n\varphi \sin \varphi (\cos \varphi_k - \cos \varphi) d\varphi,$$

$$\gamma_{n,k} = \frac{a}{a_k} \int_{\varphi_{k-1}}^{\varphi_k} \sin n\varphi \sin \varphi (\cos \varphi - \cos \varphi_{k-1}) d\varphi,$$

$$\beta_{0,k} + \gamma_{0,k} = \frac{a}{a_k} (\cos \varphi_k - \cos \varphi_{k-1}) \int_{\varphi_{k-1}}^{\varphi_k} (1 - \cos \varphi) d\varphi,$$

$$\beta_{n,k} + \gamma_{n,k} = \frac{a}{a_k} (\cos \varphi_k - \cos \varphi_{k-1}) \int_{\varphi_{k-1}}^{\varphi_k} \sin n\varphi \sin \varphi d\varphi,$$

$$\delta_{v,0} = \int_{\varphi_N}^0 (1 - \cos \varphi) d\varphi, \quad \delta_{\vartheta,0} = a \int_{\varphi_N}^0 (1 - \cos \varphi) (\cos \varphi - \cos \varphi_N) d\varphi,$$

$$\delta_{v,n} = \int_{\varphi_N}^0 \sin n\varphi \sin \varphi d\varphi, \quad \delta_{\vartheta,n} = a \int_{\varphi_N}^0 \sin n\varphi \sin \varphi (\cos \varphi - \cos \varphi_N) d\varphi,$$

$$\beta_{0,N+1} = \delta_{v,0}, \quad \beta_{n,N+1} = \delta_{v,n}.$$

Введем также следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
c_{0,k} - c_{0,k+1} &= b_{0,k}, \quad c_{n,k} - c_{n,k+1} = b_{n,k}; \\
e_{0,k} + f_{0,k+1} &= d_{0,k}, \quad e_{n,k} + f_{n,k+1} = d_{n,k}; \\
\beta_{0,k+1} + \gamma_{0,k} &= \mu_{0,k}, \quad \beta_{n,k+1} + \gamma_{n,k} = \mu_{n,k}; \\
b_{0,N+1} &= -\frac{\varphi_N}{\pi}, \quad b_{n,N+1} = -\frac{2 \sin n\varphi_N}{\pi n}; \\
\mu_{0,N+1} &= \delta_{\vartheta,0}, \quad \mu_{n,N+1} = \delta_{\vartheta,n}.
\end{aligned}$$

Тогда получим:

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= (\vartheta_c - \frac{\dot{v}_c}{U}) + \sum_{l=1}^N [b_{0,l} \frac{v_l}{a} + \frac{a}{U} d_{0,l} \frac{\dot{v}_l}{a}] - \vartheta_N \frac{\varphi_N}{\pi}, \\
\alpha_n &= \frac{\dot{\vartheta}_c a}{U} \delta_{1n} + \sum_{l=1}^N [b_{n,l} \frac{v_l}{a} + \frac{a}{U} d_{n,l} \frac{\dot{v}_l}{a}] - \vartheta_N \frac{2 \sin n\varphi_N}{\pi n}, \\
\delta A_a &= -\frac{2\rho U^2 a}{\beta} \sum_{k=1}^N [\alpha_0 \mu_{0,k} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \mu_{n,k}] \delta v_k
\end{aligned} \tag{2.15}$$

В результате подстановки вариация работы аэродинамической нагрузки запишется в виде:

$$\begin{aligned}
\delta A_a &= -\frac{2\rho U^2 a}{\beta} \sum_{k=1}^N [(\vartheta_c - \frac{a \dot{v}_c}{U}) \mu_{0,k} + \frac{\dot{\vartheta}_c a}{U} \mu_{1,k}] + \sum_{l=1}^N (\mu_{0,k} b_{0,l} + \sum_{n=1}^{\infty} \mu_{n,k} b_{n,l}) \frac{v_l}{a} + \\
&+ \frac{a}{U} \sum_{l=1}^N (\mu_{0,k} d_{0,l} + \sum_{n=1}^{\infty} \mu_{n,k} d_{n,l}) \frac{\dot{v}_l}{a} \delta v_k
\end{aligned}$$

Запишем  $\delta A_a$  в матричном виде для вектора  $\delta \mathbf{q}_I = [v_1 \quad v_2 \dots v_N \quad \vartheta_N]^T$ :

$$\delta A_a = -\delta \mathbf{q}_I^T \left[ \frac{2\rho U^2}{\beta} \left[ (\vartheta_c a - \frac{a}{U} \dot{v}_c) \boldsymbol{\mu}_0 + \frac{a}{U} \dot{\vartheta}_c a \boldsymbol{\mu}_1 \right] + \frac{2\rho U^2}{\beta} \mathbf{B} \mathbf{q}_I + \frac{2\rho U a}{\beta} \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}}_I \right], \tag{2.16}$$

$$\boldsymbol{\mu}_0 = [\mu_{0,1} \quad \mu_{0,2} \quad \dots \quad \mu_{0,N+1}]^T, \quad \boldsymbol{\mu}_1 = [\mu_{1,1} \quad \mu_{1,2} \quad \dots \quad \mu_{1,N+1}]^T,$$

$\mathbf{B}$  – матрица аэродинамической жесткости,  $\mathbf{D}$  – матрица аэродинамического демпфирования.

### 2.3. Уравнения аэроупругих колебаний профиля крыла

Вариация работы инерционных сил для профиля прямого крыла большого удлинения (как для отсека в виде прямоугольной пластины шириной 1 м) будет иметь вид:

$$\delta A_{ин} = -\delta \mathbf{q}_I^T [\dot{v}_c \mathbf{M}_{v_c} + \ddot{\vartheta}_c \mathbf{M}_\vartheta + \mathbf{M}_I \ddot{\mathbf{q}}_I], \quad (2.17)$$

где  $\mathbf{M}_{v_c}$ ,  $\mathbf{M}_\vartheta$  – столбцы,  $\mathbf{M}_I$  – матрица соответствующая вектору

$$\mathbf{q}_I = [v_1 \quad v_2 \dots v_N \quad \vartheta_N]^T.$$

На основании принципа возможных перемещений (1.3) уравнения аэроупругих колебания профиля записываются в виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_I \ddot{\mathbf{q}}_I + \frac{2\rho U a}{\beta} \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}}_I + (\mathbf{K}_I + \frac{2\rho U^2}{\beta} \mathbf{B}) \mathbf{q}_I + \tilde{\mathbf{R}}_I = -\dot{v}_c \mathbf{M}_{v_c} - \ddot{\vartheta}_c \mathbf{M}_\vartheta - \\ - \frac{2\rho U^2}{\beta} (\vartheta_c a - \frac{a}{U} \dot{v}_c) \boldsymbol{\mu}_0 - \frac{2\rho U}{\beta} a^2 \dot{\vartheta}_c \boldsymbol{\mu}_1. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Для достаточно медленных движений профиля можно пренебречь инерционными силами легкого деформируемого хвостика и аэродинамическим демпфированием по координатам  $q_j$ , полагая  $\mathbf{M}_I \ddot{\mathbf{q}}_I \approx \mathbf{0}$  и  $\mathbf{D} \dot{\mathbf{q}}_I \approx \mathbf{0}$  [67]. Тогда в квазистатическом приближении уравнение (2.18) запишется в виде:

$$(\mathbf{K}_I + \frac{2\rho U^2}{\beta} \mathbf{B}) \mathbf{q}_I + \tilde{\mathbf{R}}_I = -\frac{2\rho U^2}{\beta} (\vartheta_c a - \frac{a}{U} \dot{v}_c) \boldsymbol{\mu}_0 - \frac{2\rho U}{\beta} a^2 \dot{\vartheta}_c \boldsymbol{\mu}_1. \quad (2.19)$$

Из уравнения (2.19) можно определить вектор обобщенных координат  $\mathbf{q}_I$ . Вводя обозначение  $\mathbf{C} = \mathbf{K}_I + \tilde{\mathbf{R}}_I + \frac{2\rho U^2}{\beta} \mathbf{B}$ , получим:

$$\mathbf{q}_I = -\mathbf{C}^{-1} \left( \frac{2\rho U^2}{\beta} (\vartheta_c a - \frac{a}{U} \dot{v}_c) \boldsymbol{\mu}_0 + \frac{2\rho U}{\beta} a^2 \dot{\vartheta}_c \boldsymbol{\mu}_1 \right) \quad (2.20)$$

Если  $\dot{v}_c = 0$  и  $\dot{\vartheta}_c = \ddot{\vartheta}_c = 0$ , тогда  $\mathbf{q}_I = -\frac{2\rho U^2 a}{\beta} \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\mu}_0 \vartheta_c$ .

Подъемная сила и аэродинамический момент относительно центра (точки С) профиля  $\Delta Y = \int_{-a}^a \Delta p dx$ ,  $\Delta M_c = - \int_{-a}^a \Delta p x dx$  с учетом (2.11) и (2.15)

записываются в виде:

$$\begin{aligned}\Delta Y &= -\frac{2\rho U^2 a \pi}{\beta} \frac{\pi}{2} [2\alpha_0 + \alpha_1], \\ \Delta M_c &= -\frac{2\rho U^2 a^2 \pi}{\beta} \frac{\pi}{2} [\alpha_0 - \frac{1}{2}\alpha_2].\end{aligned}\tag{2.21}$$

Используя формулы для  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  (2.12), выражения для  $\Delta Y$  и  $\Delta M_c$  можем записать:

$$\begin{aligned}\Delta Y &= -\frac{2\rho U^2 \pi}{\beta} \frac{\pi}{2} [2(\vartheta_c a - \frac{a}{U} \dot{v}_c) + \frac{\vartheta_c a^2}{U} + \sum_{l=1}^N \{(2b_{0,l} + b_{1,l})v_l + \frac{a}{U}(2d_{0,l} + d_{1,l})\dot{v}_l\}], \\ \Delta M_c &= -\frac{2\rho U^2 a \pi}{\beta} \frac{\pi}{2} [(\vartheta_c a - \frac{a}{U} \dot{v}_c) + \sum_{l=1}^N \{(b_{0,l} - b_{2,l})v_l + \frac{a}{U}(d_{0,l} - d_{2,l})\dot{v}_l\}].\end{aligned}$$

Введем обозначения:

$$\mathbf{B}_1 = \{2b_{0,l} + b_{1,l}\}, \mathbf{B}_2 = \{b_{0,l} - \frac{1}{2}b_{2,l}\}, \mathbf{D}_1 = \{2d_{0,l} + d_{1,l}\}, \mathbf{D}_2 = \{d_{0,l} - \frac{1}{2}d_{2,l}\}.$$

Тогда окончательно будем иметь:

$$\begin{aligned}\Delta Y &= \frac{2\rho U^2 \pi}{\beta} \frac{\pi}{2} [2(\vartheta_c a - \frac{a}{U} \dot{v}_c) + \frac{\vartheta_c a^2}{U}] + \frac{2\rho U^2 \pi}{\beta} \frac{\pi}{2} \mathbf{B}_1^T \mathbf{q}_l + \frac{2\rho U a \pi}{\beta} \frac{\pi}{2} \mathbf{D}_1^T \dot{\mathbf{q}}_l, \\ \Delta M_c &= \frac{2\rho U^2 a \pi}{\beta} \frac{\pi}{2} (\vartheta_c a - \frac{a}{U} \dot{v}_c) + \frac{2\rho U^2 a \pi}{\beta} \frac{\pi}{2} \mathbf{B}_2^T \mathbf{q}_l + \frac{2\rho U a^2 \pi}{\beta} \frac{\pi}{2} \mathbf{D}_2^T \dot{\mathbf{q}}_l.\end{aligned}\tag{2.22}$$

Для абсолютно жесткого профиля, совершающего достаточно медленные поступательно-вращательные движения в дозвуковом потоке идеального сжимаемого газа, когда  $\tilde{v} = 0$ , подъемная сила и момент тангажа определяются по формулам:

$$\begin{aligned}\Delta Y^0 &= \frac{\rho U^2}{2\beta} b [c_y^\alpha \alpha + c_y^{\bar{\omega}_z} \bar{\omega}_z], \\ \Delta M_c^0 &= \frac{\rho U^2}{2\beta} b^2 [m_z^\alpha \alpha + m_z^{\bar{\omega}_z} \bar{\omega}_z],\end{aligned}\tag{2.23}$$

где  $c_y^\alpha = 2\pi$ ,  $c_y^{\bar{\omega}_z} = \frac{\pi}{2}$ ,  $m_z^\alpha = \frac{\pi}{2}$ ,  $m_z^{\bar{\omega}_z} = 0$  – аэродинамические коэффициенты недеформируемого профиля в несжимаемом потоке ( $M = 0$ );

$$b = 2a, \quad \alpha_c = \vartheta_c - \frac{\dot{v}_c}{U}, \quad \bar{\omega}_z = \dot{\vartheta}_c \frac{b}{U},$$

тогда

$$\begin{aligned} \Delta Y^0 &= \frac{\rho U^2}{2\beta} b [c_y^\alpha (\vartheta_c - \frac{\dot{v}_c}{U}) + c_y^{\bar{\omega}_z} \dot{\vartheta}_c \frac{2a}{U}], \\ \Delta M_c^0 &= \frac{\rho U^2}{2\beta} b^2 [m_z^\alpha (\vartheta_c - \frac{\dot{v}_c}{U}) + m_z^{\bar{\omega}_z} \dot{\vartheta}_c \frac{2a}{U}]. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Определим приращение подъемной силы  $\Delta \tilde{Y}$  и момента тангажа  $\Delta \tilde{M}$  за счет упругости как  $\Delta Y = \Delta Y^0 + \Delta \tilde{Y}$  и  $\Delta M_c = \Delta M_c^0 + \Delta \tilde{M}_c$ . Подставляя  $\mathbf{q}_I$  в форме (2.20) в выражения (2.22), (2.24), получим:

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{Y} &= -\frac{2\rho U^2}{\beta} \frac{\pi}{2} \mathbf{B}_1^T \mathbf{C}^{-1} \left[ \frac{2\rho U^2}{\beta} \boldsymbol{\mu}_0 (\vartheta_c - \frac{\dot{v}_c}{U}) + \frac{2\rho U}{\beta} a^2 \boldsymbol{\mu}_1 \dot{\vartheta}_c \right] - \\ &\quad - \frac{2\rho U a}{\beta} \frac{\pi}{2} \mathbf{D}_1^T \mathbf{C}^{-1} \frac{2\rho U^2}{\beta} \boldsymbol{\mu}_0 \dot{\vartheta}_c a, \\ \Delta \tilde{M}_c &= -\frac{2\rho U^2 a}{\beta} \frac{\pi}{2} \mathbf{B}_2^T \mathbf{C}^{-1} \left[ \frac{2\rho U^2}{\beta} \boldsymbol{\mu}_0 (\vartheta_c a - \frac{a}{U} \dot{v}_c) + \frac{2\rho U}{\beta} a^2 \boldsymbol{\mu}_1 \dot{\vartheta}_c \right] - \\ &\quad - \frac{2\rho U a^2}{\beta} \frac{\pi}{2} \mathbf{D}_2^T \mathbf{C}^{-1} \frac{2\rho U^2}{\beta} \boldsymbol{\mu}_0 \dot{\vartheta}_c a. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Приращения подъемной силы и момента тангажа относительно центра (точки С) упругого профиля при стационарном обтекании несжимаемым газом ( $\beta = 1$ ) определяются по формулам:

$$\Delta \tilde{Y} = -\frac{\rho U^2}{2\beta} b \Delta c_y, \quad \Delta \tilde{M}_c = -\frac{\rho U^2}{2\beta} b^2 \Delta m_{z,c},$$

где  $\Delta c_y$ ,  $\Delta m_{z,c}$  зависят от упругости профиля и, в случае управляемого натяжения верхней или нижней обшивки при повороте на угол  $\vartheta_c$  с помощью двухстороннего рычага:

$$\hat{\delta}_0 = -\vartheta_c r_0, \quad \check{\delta}_0 = \vartheta_c r_0.$$



Тогда в линейном приближении

$$\Delta c_y = \Delta \tilde{c}_y + c_y^{\vartheta_c} \vartheta_c, \quad \Delta m_{z,c} = \Delta \tilde{m}_{z,c} + m_{z,c}^{\vartheta_c} \vartheta_c,$$

где  $\Delta \tilde{c}_y$ ,  $\Delta \tilde{m}_{z,c}$ ,  $c_y^{\vartheta_c}$ ,  $m_{z,c}^{\vartheta_c}$  – аэродинамические коэффициенты, зависящие от деформации профиля, то есть от обобщенных координат  $v_1, \dots, v_N, u_1, \dots, u_N, \vartheta_1, \dots, \vartheta_N, \hat{\delta}_1, \dots, \hat{\delta}_N, \check{\delta}_1, \dots, \check{\delta}_N$ .

## 2.4. Пример расчета

В качестве первого примера с целью сравнения результатов расчета по методу Ритца и МКЭ рассмотрим деформируемый профиль крыла в виде абсолютно жесткой носовой части, к которой жестко присоединен упругий хвостик в виде упругой пластины (балки-полоски единичной ширины), который профилирован легким пенопластом, рис. 1.2а [21].

Для расчетов примем:  $a = 0.5$  м, изгибная жесткость центральной балки-полоски  $EI_0 = 1.2 \cdot 10^4$  Н·м<sup>2</sup>, сдвиговая жесткость центральной балки  $GF_c = 7 \cdot 10^7$  Н, длина упругой части профиля  $a_u = 0.35$  м, координата начала упругой части  $x_0 = 0.05$  м, координата конца упругой части  $x_N = 0.4$  м.

При расчете число КЭ варьируется; также варьируется число членов ряда в разложении угла атаки. В табл. 2.1 приведены результаты расчетов при фиксированной скорости ( $M = 0.709$ ) для различных вариантов выбора числа КЭ и числа членов тригонометрического ряда в разложении углов атаки. Как видно из приведенных результатов значения приращений аэродинамических коэффициентов мало изменяются и в дальнейших расчетах можно использовать фиксированные значения числа конечных элементов и членов ряда.

Число конечных элементов $N$	Число членов ряда в разложении угла атаки $n$	Величина приращения коэффициента подъемной силы $\Delta c_y$	Величина приращения коэффициента момента тангажа $\Delta m_z$
4	12	0.1389033	0.5044209
8	12	0.1391086	0.5058285
12	12	0.1391465	0.5060917
4	10	0.1389034	0.5044211
4	15	0.1389033	0.5044206
4	20	0.1389025	0.5044170

Табл. 2.1. Зависимость приращений коэффициентов  $c_y$  и  $m_z$  от числа конечных элементов и числа членов ряда в разложении угла атаки

#### 2.4.1. Сравнение результатов расчета по МКЭ и методу Ритца

Сравним результаты, полученные по методу конечных элементов, с результатами, полученными по методу Ритца в главе 1. При расчете по методу Ритца будем рассматривать первый вариант профиля (рис. 1.2, а) с постоянными по длине характеристиками без учета сдвига. При расчетах по методу конечных элементов рассмотрим профиль, упругий хвостик которого образован только центральной балкой, работающей на изгиб с использованием только двух обобщенных координат в  $k$ -ом сечении – поперечного перемещения балки  $v_k$  и угла поворота  $\vartheta_k$  (рис.2.4).

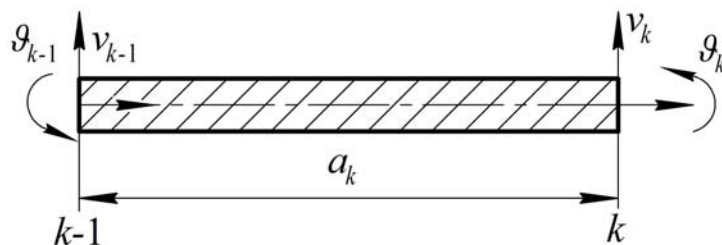


Рис. 2.4

Расчеты выполнены при следующих исходных данных:  $q_0 = \begin{bmatrix} \vartheta_c = 1 \\ v_c = 0 \end{bmatrix}$ ,

длина половины хорды профиля  $a = 0.5$  м, безразмерная линейная координата начала упругой части  $x_0 = 0.05$  м, длина упругой части профиля  $a_u = 0.35$  м, изгибная жесткость центральной балки в методе конечных элементов равна цилиндрической жесткости пластины в методе Ритца  $EI_0 = 1.2 \cdot 10^4$  Н·м<sup>2</sup>, безразмерный коэффициент  $\lambda = \frac{2\rho U^2 a^3}{\beta EI_0}$  в уравнениях статической аэроупругости.

На рис. 2.5 и 2.6 показано изменение приращений аэродинамических коэффициентов  $c_y$  и  $m_z$  за счет упругости в зависимости от коэффициента  $\lambda$  при расчете по методу Ритца и МКЭ.

Из графиков видно, что аэродинамические коэффициенты, вычисленные по методу Ритца и методу конечных элементов, близки между собой.

На рис. 2.7 и 2.8 аналогичные сравнения представлены для формы изгиба профиля и изменения перепада аэродинамического давления при  $\lambda = 10$ .

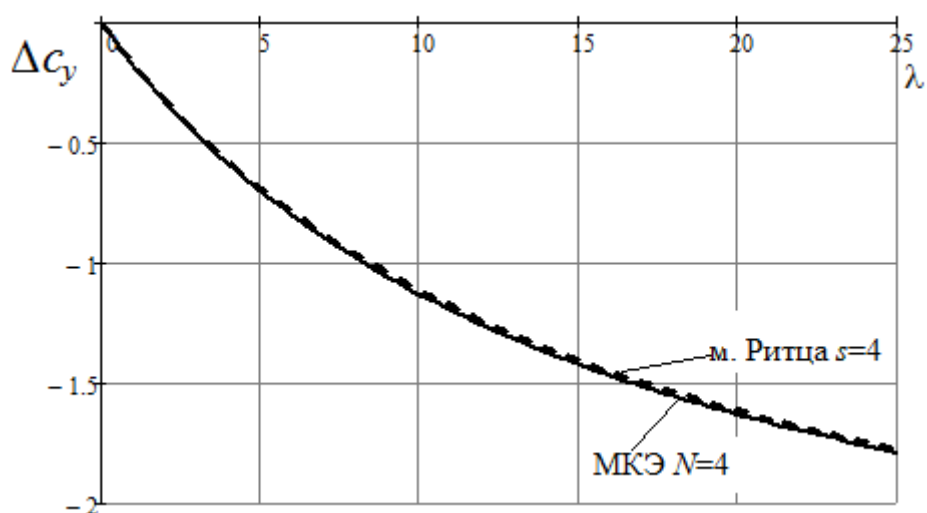


Рис. 2.5. Графики изменения  $\Delta c_y$ .

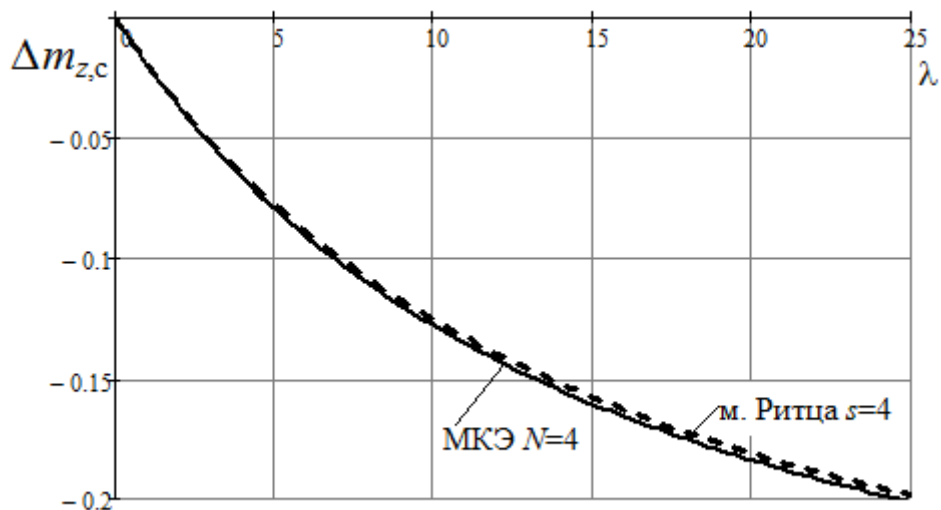


Рис. 2.6. Графики изменения  $\Delta m_{z,c}$ .

Из графиков на рис. 2.7 видно, что форма изгиба профиля близка при использовании обоих методов. Из рис. 2.8 видно, что также достаточно близки результаты вычислений по методу Ритца и методу конечных элементов перепада аэродинамического давления.

Необходимо отметить, что при использовании метода Ритца рассматривался профиль, хвостовая часть которого имеет постоянную изгибную жесткость, тогда как при использовании метода конечных элементов кончик хвостовой части профиля длиной  $a_r = 0.1$  м считается абсолютно жесткой.

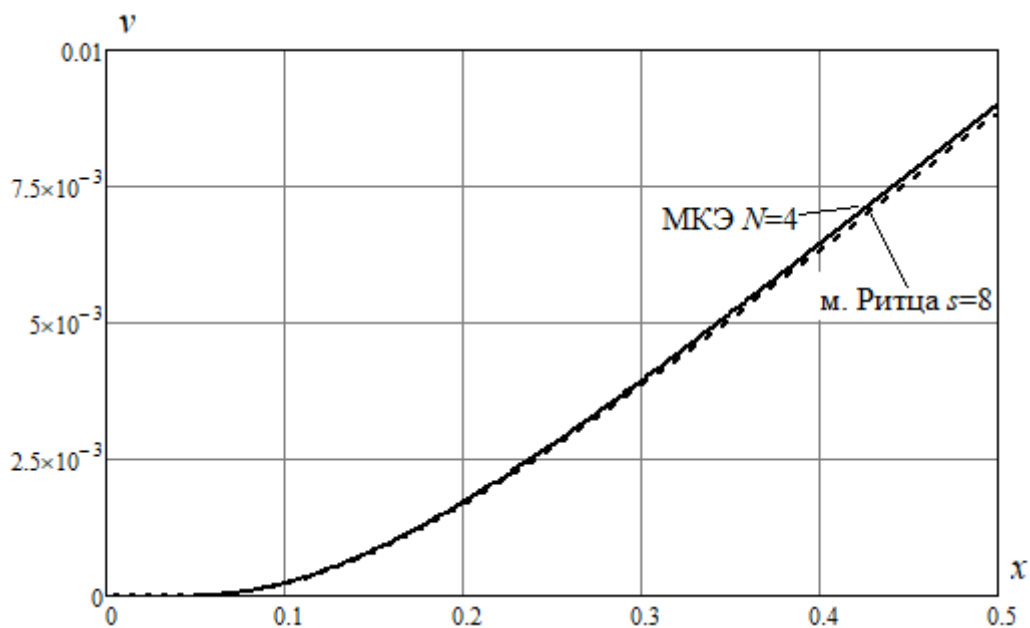


Рис. 2.7. Форма изгиба хвостика профиля

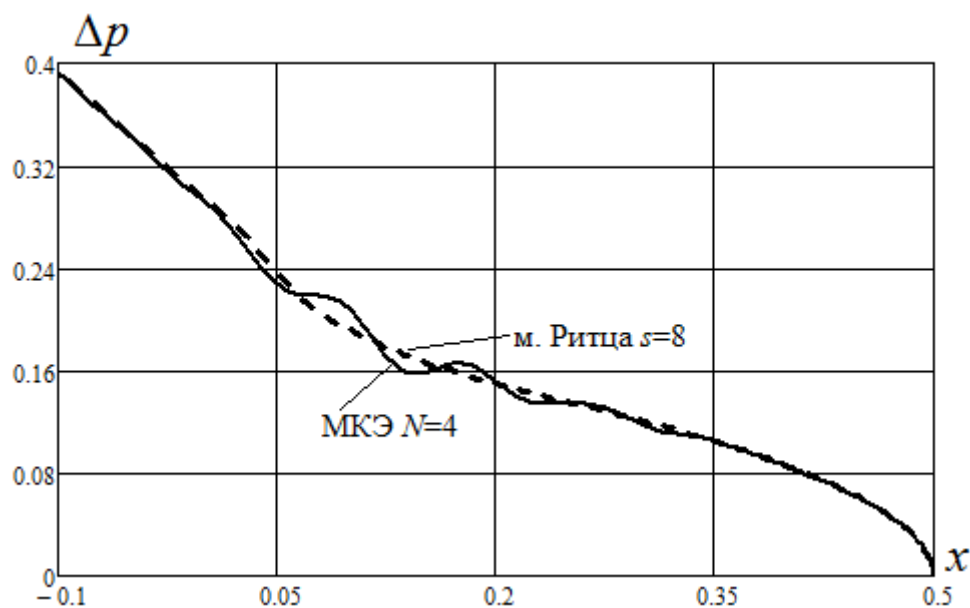


Рис. 2.8. Изменение перепада аэродинамического давления

#### 2.4.2. Анализ влияния геометрической нелинейности при расчете аэродинамических коэффициентов

Рассмотрим два варианта расчетной модели упругого профиля. В первой расчетной модели упругая хвостовая часть профиля представлена только центральной балкой-полоской, работающей на изгиб, сдвиг и растяжение-сжатие, а работа обшивки в данной расчетной модели не учитывается. При этом в узлах конечно-элементной модели учитываются три обобщенные координаты: поперечные перемещения балки  $v_k$ , углы поворота  $\vartheta_k$  и продольные перемещения  $u_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$  (рис.2.9). Тогда вектор обобщенных координат разделим на два вектора:  $\mathbf{q}_I = [v_1 \dots v_N \ \vartheta_N]^T$  – вектор обобщенных координат, от которых зависит аэродинамическая нагрузка,  $\mathbf{q}_{II} = [\vartheta_1 \dots \vartheta_{N-1} \ u_1 \dots u_N]^T$  – вектор обобщенных координат, которые не влияют на аэродинамическую нагрузку.

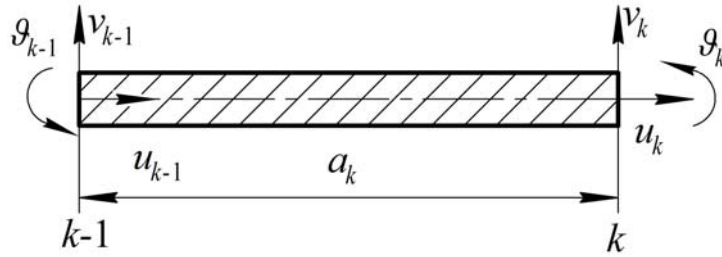


Рис. 2.9.

Вторую расчетную модель профиля будем рассматривать в виде центральной балки и верхней обшивки, прикрепленной к носовой и хвостовой частям в двух сечениях  $k=0$  и  $k=N$ , рис. 2.10; то есть верхняя. Обшивка рассматривается как один элемент, удлинение которой  $\delta_0 = -\vartheta_c r_0$  задается [22].

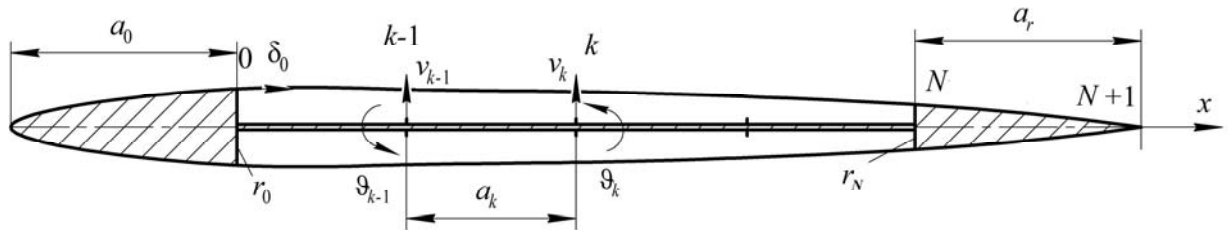


Рис. 2.10.

В качестве основных обобщенных координат в обоих случаях рассматриваются  $v_1, \dots, v_N, \vartheta_N$ , от которых зависит аэродинамическая нагрузка.

В первом случае геометрическая нелинейность учитывается только в формуле для потенциальной энергии конечных элементов центральной балки (2.2). Во втором варианте геометрическая нелинейность учитывается только в потенциальной энергии обшивки, а вектор  $\mathbf{q}_{II} = [\vartheta_1 \dots \vartheta_{N-1}]^T$ , т.е. не учитывается работа центральной балки на растяжение-сжатие.

В первой расчетной модели в линейной постановке потенциальная энергия  $k$ -го КЭ центральной балки записывается в виде:

$$\begin{aligned} \Pi_k^{лин} = & \frac{1}{2} \frac{12EI_0 \kappa_k}{a_k^3} [\{(v_k - v_{k-1})^2 - a_k(v_k - v_{k-1})(\vartheta_k + \vartheta_{k-1}) + \\ & + \frac{1+3\kappa_k}{12\kappa_k} a_k^2 (\vartheta_k - \vartheta_{k-1})^2 + a_k^2 \vartheta_{k-1} \vartheta_k\} + \frac{1}{2} \frac{a_k}{EF_0} N_k^2], \end{aligned} \quad (2.26)$$

где

$$N_k = \frac{EF_0}{a_k} [u_k - u_{k-1}].$$

Потенциальную энергию этого же КЭ с учетом нелинейности (2.2), запишем в виде

$$П_k = [П_k^{лин} + \frac{1}{2} \frac{a}{EF_0} \frac{a_k}{a} N_k^2],$$

где

$$N_k = \frac{EF_0 a}{a_k} \left[ \frac{a}{2a_k} \left(1 + \frac{\kappa_k^2}{5}\right) (\bar{v}_k - \bar{v}_{k-1})^2 - \frac{\kappa_k^2}{10} (v_k - v_{k-1})(\vartheta_k + \vartheta_{k-1}) + \right. \\ \left. + \frac{a_k}{24a} \left(1 + \frac{3\kappa_k^2}{5}\right) (\vartheta_k - \vartheta_{k-1})^2 + \frac{\kappa_k^2}{10} a_k \vartheta_{k-1} \vartheta_k \right],$$

$$\bar{v}_k = \frac{v_k}{a}$$

Далее запишем векторы  $\mathbf{R}_I$ ,  $\mathbf{R}_{II}$ , содержащие нелинейные составляющие, полученные при вычислении производных от потенциальной энергии по обобщенным координатам соответствующим векторам  $\mathbf{q}_I$ ,  $\mathbf{q}_{II}$ , В результате чего будем иметь:

$$\mathbf{R}_I = \left( \frac{1}{EF_0} \right)^2 \left\{ \begin{array}{l} \frac{a_1}{a} N_1 \frac{\partial N_1}{\partial v_1} + \frac{a_2}{a} N_2 \frac{\partial N_2}{\partial v_1} \\ \vdots \\ \frac{a_k}{a} N_k \frac{\partial N_k}{\partial v_k} + \frac{a_{k+1}}{a} N_{k+1} \frac{\partial N_{k+1}}{\partial v_k} \\ \vdots \\ \frac{a_r}{a} N_N \frac{\partial N_N}{\partial v_N} \\ \frac{a_r}{a} N_N \frac{\partial N_N}{\partial \vartheta_N} \end{array} \right\}; \quad (2.27)$$

$$\mathbf{R}_{II} = \left( \frac{1}{EF_0} \right)^2 \left\{ \begin{array}{c} \frac{a_1}{a} N_1 \frac{\partial N_1}{\partial \vartheta_1} + \frac{a_2}{a} N_2 \frac{\partial N_2}{\partial \vartheta_1} \\ \vdots \\ \frac{a_k}{a} N_k \frac{\partial N_k}{\partial \vartheta_k} + \frac{a_{k+1}}{a} N_{k+1} \frac{\partial N_{k+1}}{\partial \vartheta_k} \\ \vdots \\ \frac{a_{N-2}}{a} N_{N-2} \frac{\partial N_{N-2}}{\partial \vartheta_{N-2}} + \frac{a_{N-1}}{a} N_{N-1} \frac{\partial N_{N-1}}{\partial \vartheta_{N-2}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right\}.$$

Здесь

$$\frac{\partial N_k}{\partial \bar{v}_k} = \frac{EF_0 a}{a_k} \left[ \frac{a}{a_k} \left( 1 - \frac{\kappa_k^2}{5} \right) (\bar{v}_k - \bar{v}_{k-1}) - \frac{\kappa_k^2}{10} (\vartheta_k + \vartheta_{k-1}) \right],$$

$$\frac{\partial N_{k+1}}{\partial \bar{v}_k} = \frac{EF_0 a}{a_k} \left[ -\frac{a}{a_{k+1}} \left( 1 - \frac{\kappa_{k+1}^2}{5} \right) (\bar{v}_{k+1} - \bar{v}_k) - \frac{\kappa_{k+1}^2}{10} (\vartheta_{k+1} + \vartheta_k) \right],$$

$$\frac{\partial N_k}{\partial \vartheta_k} = \frac{EF_0 a}{a_k} \left[ -\frac{\kappa_k^2}{10} (\bar{v}_k - \bar{v}_{k-1}) + \frac{1}{12} \frac{a_k}{a} \left( 1 + \frac{3}{5} \kappa_k^2 \right) (\vartheta_k - \vartheta_{k-1}) + \frac{\kappa_k^2}{10} \frac{a_k}{a} \vartheta_{k-1} \right],$$

$$\frac{\partial N_{k+1}}{\partial \vartheta_k} = \frac{EF_0 a}{a_k} \left[ -\frac{\kappa_{k+1}^2}{10} (\bar{v}_{k+1} - \bar{v}_k) - \frac{1}{12} \frac{a_{k+1}}{a} \left( 1 + \frac{3}{5} \kappa_{k+1}^2 \right) (\vartheta_{k+1} - \vartheta_k) + \frac{\kappa_{k+1}^2}{10} \frac{a_{k+1}}{a} \vartheta_{k+1} \right].$$

Матрица жесткости представляется в виде  $\mathbf{K} = \frac{EI_0}{a} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix}$ .

Тогда уравнение статической аэроупругости примет вид

$$\frac{EI_0}{a} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_I \\ \mathbf{q}_{II} \end{bmatrix} + EF_0 a \begin{bmatrix} \mathbf{R}_I \\ \mathbf{R}_{II} \end{bmatrix} + \frac{2\rho U^2 a}{\beta} \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_I \\ \mathbf{q}_{II} \end{bmatrix} = -\frac{2\rho U^2 a}{\beta} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_0 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \vartheta_c. \quad (2.28)$$

Используя обозначения  $\lambda = \frac{2\rho U^2 a^2}{\beta \cdot EI_0}$  и  $\beta_1 = \frac{EF_0 a^2}{EI_0}$ , запишем (2.28) в

виде двух матричных уравнений:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{11} \mathbf{q}_I + \mathbf{K}_{12} \mathbf{q}_{II} + \beta_1 \mathbf{R}_I + \lambda \mathbf{B} \mathbf{q}_I &= -\lambda \boldsymbol{\mu}_0 \vartheta_c, \\ \mathbf{K}_{21} \mathbf{q}_I + \mathbf{K}_{22} \mathbf{q}_{II} + \beta_1 \mathbf{R}_{II} &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (2.29)$$



В линейной постановке задачи, полагая в (2.28)  $\mathbf{R}_I = \mathbf{0}$  и  $\mathbf{R}_{II} = \mathbf{0}$  и используя обозначение  $\mathbf{C} = \mathbf{K}_{11} - \mathbf{K}_{12}\mathbf{K}_{22}\mathbf{K}_{12}^T + \lambda \cdot \mathbf{B}$ , получим:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{II} &= -\mathbf{K}_{22}^{-1}\mathbf{K}_{21}\mathbf{q}_I, \\ \mathbf{q}_I &= -\lambda\mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\mu}_0\vartheta_c. \end{aligned} \quad (2.30)$$

При учете нелинейности из уравнения (2.29) получим:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{II} &= -\mathbf{K}_{22}^{-1}\mathbf{K}_{21}\mathbf{q}_I - \beta_1\mathbf{K}_{22}^{-1}\mathbf{R}_{II} \\ \mathbf{q}_I &= -\lambda\mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\mu}_0\vartheta_c - \beta_1\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{R}_I - \mathbf{K}_{12}\mathbf{K}_{22}^{-1}\mathbf{R}_{II}). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Для определения обобщенных координат из уравнений (2.31) строится итерационный процесс, где в качестве первого приближения берутся значения обобщенных координат, полученные для линейной задачи (2.30). Когда разница между значениями обобщенных координат, полученные на  $i$ -ом и на  $(i-1)$ -ом шагах итерации составляет  $\varepsilon = 10^{-2}$ , итерационный процесс прекращается. Полученные на последнем шаге вычислений векторы  $\mathbf{q}_I$ ,  $\mathbf{q}_{II}$  считаем окончательным решением задачи.

Для расчетов было принято, что  $\vartheta_c = 0.1$ ,  $a = 0.5$  м, изгибная жесткость центральной балки  $EI_0 = 1.2 \cdot 10^4$  Н·м<sup>2</sup>, сдвиговая жесткость центральной балки  $GF_c = 7 \cdot 10^7$  Н, жесткость на растяжение  $EF_0 = 14 \cdot 10^8$  Н, длина упругой части профиля  $a_u = 0.35$  м, координата начала упругой части  $x_0 = 0.05$  м, координата конца упругой части  $x_N = 0.4$  м, число КЭ  $N = 4$ , число членов тригонометрического ряда в разложении функции углов атаки  $n = 50$ .

Далее приведены результаты для оценки влияния нелинейности на аэродинамические характеристики профиля для первой расчетной модели.

На рис. 2.11, 2.12 показаны графики изменения приращений коэффициентов  $c_y$  и  $m_z$  за счет упругости по сравнению с абсолютно жестким профилем в зависимости от коэффициента  $\lambda$  при расчете в линейной постановке задачи и с учетом нелинейности.

На рис. 2.13, 2.14 приведены графики перемещения и угла поворота хвостика для фиксированного значения  $\lambda = 10$  при расчете в линейной и нелинейности постановке задачи.

Из графиков видно, что учет нелинейности при выбранных значениях жесткостей оказывает небольшое влияние на характеристики для первой расчетной модели профиля. Что подтверждают расчеты, приведенные в табл. 2.2 для фиксированного значения параметра  $\lambda = 10$ .

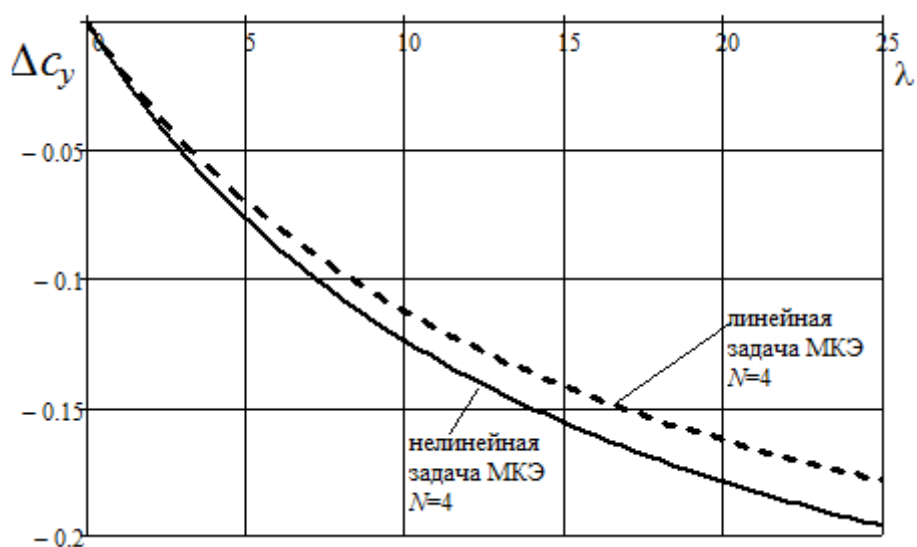


Рис. 2.11. Приращение коэффициента подъемной силы

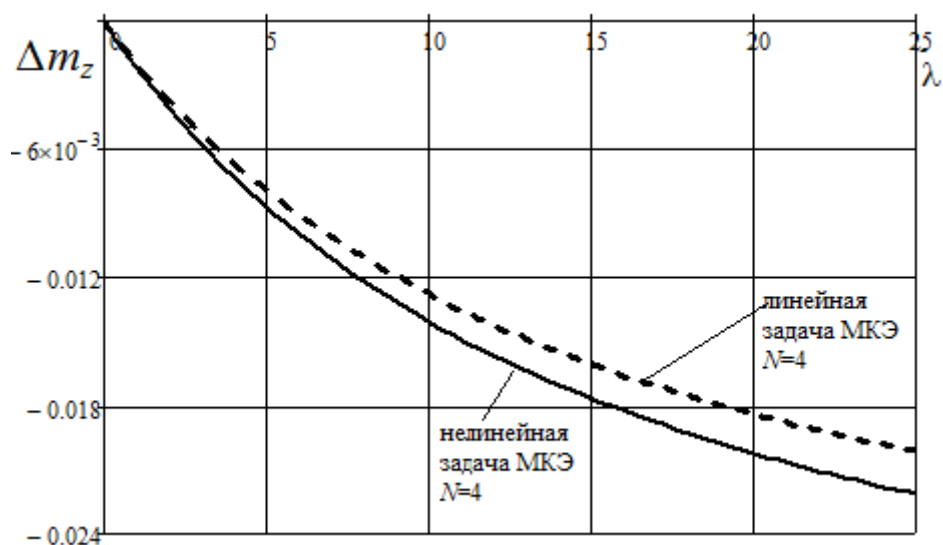


Рис. 2.12. Приращение коэффициента момента тангажа

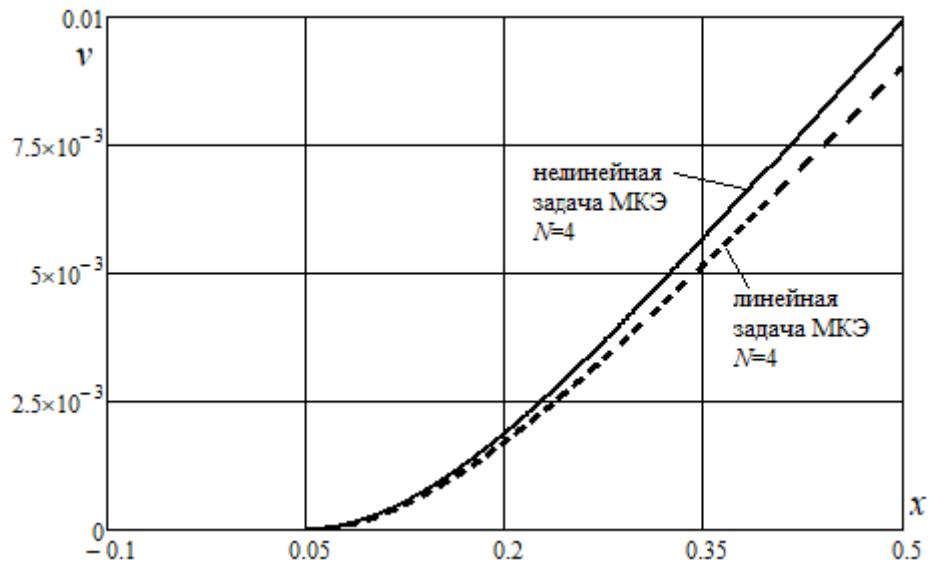


Рис. 2.13. Форма изгиба профиля

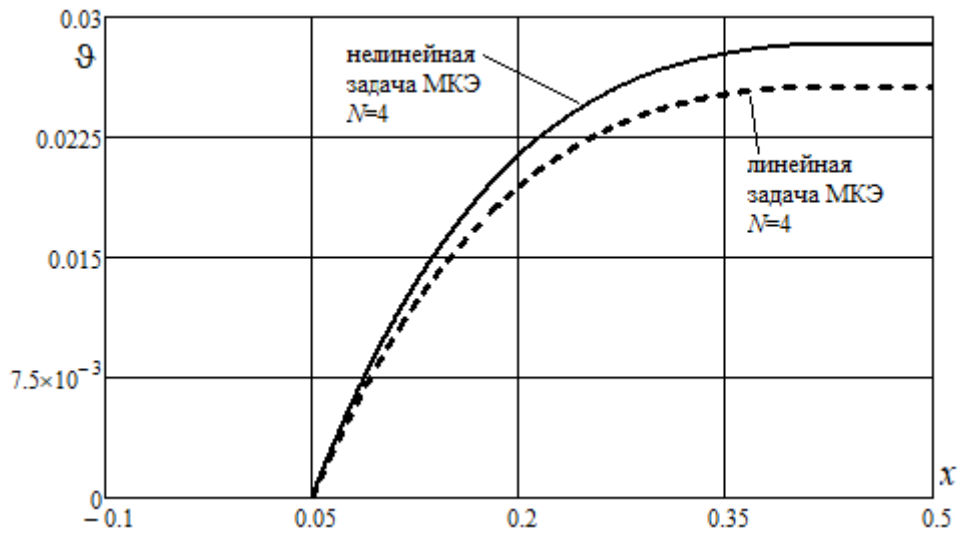


Рис. 2.14. Угол поворота хвостика профиля

	Линейная задача	Нелинейная задача
Величина приращения коэффициента подъемной силы $\Delta c_y$	-0.112783	-0.124062
Величина приращения коэффициента момента тангажа $\Delta m_z$	-0.011324	-0.0127811

Табл.2.2. Значения аэродинамических коэффициентов  $c_y$  и  $m_z$  при  $\lambda = 10$

В табл. 2.3 приведены значения изменения перепада давления  $\Delta p$  для трех вариантов расчетных моделей: 1) без учета растяжения-сжатия центральной балки, 2) с учетом растяжения-сжатия центральной балки в линейной постановке задачи и 3) решение задачи в нелинейной постановке. Число конечных элементов  $N = 4$ , число членов ряда в разложении функции углов атаки  $n = 50$  и коэффициент  $\lambda = 10$ .

Координата по длине профиля	$\Delta p$		
	1	2	3
$x = -0.1$	0.4688	0.39385	0.43324
$x = 0$	0.38283	0.29252	0.32177
$x = 0.1$	0.30575	0.20635	0.22698
$x = 0.25$	0.2175	0.13475	0.14789

Табл. 2.3. Значения перепада аэродинамического давления  $\Delta p$  при  $\lambda = 10$

Из таблицы видно, что значения изменения перепада аэродинамического давления по длине профиля в различных точках при линейной постановке задачи с учетом растяжения-сжатия и без его учета, а также значения для нелинейной постановки задачи отличаются. Что продемонстрировано на рис. 2.15.

Из представленных результатов можно сделать вывод, что учет нелинейности деформирования профиля при выбранных значениях жесткостей оказывает слабое влияние на аэродинамические характеристики профиля.

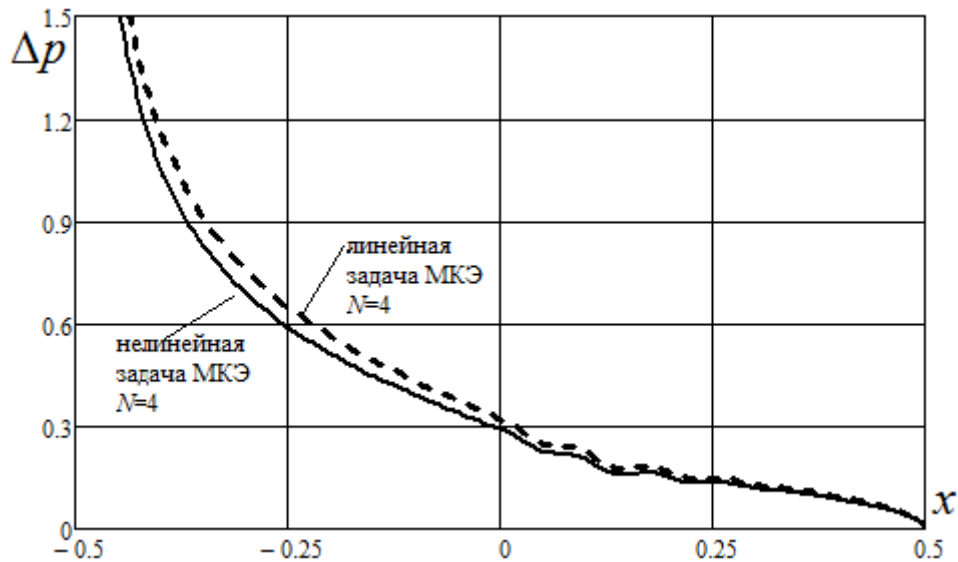


Рис. 2.15. Изменение перепада аэродинамического давления

Во второй расчетной модели профиля (рис.2.10) нелинейность учитывается при вычислении деформации обшивки, а центральная балка работает на изгиб и сдвиг. Обшивка крепится к жестким частям профиля (носовой части и кончику хвостика), в 0-м сечении:  $r_0 = 0.05$  м,  $v_0 = 0$ ,  $\vartheta_0 = 0$ ,  $u_0 = 0$ , в сечении  $N$ :  $r_N = 0.01$  м,  $v_N$ ,  $\vartheta_N$ ,  $\delta_N = 0$ .

Потенциальная энергия КЭ центральной балки записывается в виде

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \frac{12EI_0\kappa_k}{a_k^3} [(v_k - v_{k-1})^2 - a_k(v_k - v_{k-1})(\vartheta_k + \vartheta_{k-1}) + \\ & + \frac{1+3\kappa_k}{12\kappa_k} a_k(\vartheta_k - \vartheta_{k-1})^2 + a_k^2\vartheta_{k-1}\vartheta_k]. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Потенциальная энергия верхней обшивки единичной ширины:

$$\widehat{\Pi}_{обш} = \frac{1}{2} Eh_{обш} \cdot l_0 \cdot \widehat{\varepsilon}_{обш}^2,$$

где  $l_0 = \sqrt{a_u^2 + (r_N - r_0)^2}$  – длина обшивки в недеформированном состоянии,  $a_u$  – длина упругой части профиля. Для вычисления потенциальной энергии нижней обшивки используется формула для верхней обшивки, с учетом следующих замен:  $r_k \rightarrow -r_k$  и  $\widehat{\delta}_k \rightarrow \check{\delta}_k$  ( $k = 0, N$ ).

Деформация обшивки в линейном приближении равна

$$\hat{\varepsilon}_{обш.} = \frac{1}{2} \hat{\Delta}_{обш.,лин}, \text{ следовательно:}$$

$$\hat{\Pi}_{обш} = \frac{1}{8} E h_{обш} \cdot l_0 \cdot \hat{\Delta}_{обш.,лин}^2,$$

$$\text{где } \hat{\Delta}_{обш.,лин} = \frac{2a^2}{l_0^2} \left[ -\frac{a_u}{a} \left( \frac{r_N}{a} \vartheta_N + \frac{\delta_0}{a} \right) + \left( \frac{r_N}{a} - \frac{r_0}{a} \right) \frac{v_N}{a} \right]; \quad (2.33)$$

С учетом (2.33) потенциальные энергии верхней и нижней обшивок примут вид:

$$\hat{\Pi}_{обш} = \frac{1}{8} E h_{обш} \cdot l_0 \cdot \frac{4a^4}{l_0^4} \left[ -\frac{a_u}{a} \left( \frac{r_N}{a} \vartheta_N + \frac{\delta_0}{a} \right) + \left( \frac{r_N}{a} - \frac{r_0}{a} \right) \frac{v_N}{a} \right]^2, \quad (2.34)$$

$$\check{\Pi}_{обш} = \frac{1}{8} E h_{обш} \cdot l_0 \cdot \frac{4a^4}{l_0^4} \left[ \frac{a_u}{a} \left( \frac{r_N}{a} \vartheta_N - \frac{\delta_0}{a} \right) + \left( \frac{r_0}{a} - \frac{r_N}{a} \right) \frac{v_N}{a} \right]^2.$$

Если предварительное натяжение обшивки отсутствует, т.е. её удлинение  $\delta_0 = 0$ , то тогда потенциальные энергии верхней и нижней обшивок в линейном приближении будут иметь в вид:

$$\hat{\Pi}_{обш} = \frac{1}{2} \frac{E h_{обш} a^4}{l_0^3} \left[ \left( \frac{r_N}{a} - \frac{r_0}{a} \right) \frac{v_N}{a} - \frac{a_u}{a} \frac{r_N}{a} \vartheta_N \right]^2, \quad (2.35)$$

$$\check{\Pi}_{обш} = \frac{1}{2} \frac{E h_{обш} a^4}{l_0^3} \left[ \left( \frac{r_0}{a} - \frac{r_N}{a} \right) \frac{v_N}{a} + \frac{a_u}{a} \frac{r_N}{a} \vartheta_N \right]^2$$

С учетом формул (2.34) матрица жесткости  $\mathbf{K}_{11}$  изменится. К ее элементам добавятся следующие слагаемые, которые учитывают верхнюю и нижнюю обшивки:

$$\text{к элементу } (N, N): f \left( \frac{r_N}{a} - \frac{r_0}{a} \right)^2$$

$$\text{к элементу } (N, N+1): 0$$

$$\text{к элементу } (N+1, N): -f \frac{r_N}{a} \frac{a_u}{a}$$

$$\text{к элементу } (N+1, N+1): f \frac{r_N^2}{a^2} \frac{a_u^2}{a^2}$$

Здесь  $f = \frac{Eh_{обш} \cdot a^5}{EI_0 \cdot l_0^3}$ .

Используя формулу (2.6) для верхней и нижней обшивок, запишем их длины в деформированном состоянии:

$$\begin{aligned}\widehat{l}_0 &= \sqrt{(a_u - r_N \sin \vartheta_N)^2 + (v_N + r_N \cos \vartheta_N - r_0)^2}, \\ \widetilde{l}_0 &= \sqrt{(a_u + r_N \sin \vartheta_N)^2 + (v_N - r_N \cos \vartheta_N + r_0)^2}.\end{aligned}\quad (2.36)$$

При учете предварительного натяжения обшивки ( $\delta_0 \neq 0$ ) длины верхней и нижней обшивок определяются по формулам:

$$\begin{aligned}\widehat{l}_k &= \sqrt{(a_u - r_N \sin \vartheta_N - \delta_0)^2 + (v_N + r_N \cos \vartheta_N - r_0)^2}, \\ \widetilde{l}_k &= \sqrt{(a_u + r_N \sin \vartheta_N - \delta_0)^2 + (v_N - r_N \cos \vartheta_N + r_0)^2}.\end{aligned}\quad (2.37)$$

Потенциальная энергия верхней и нижней обшивок с учетом деформаций обшивок в квадратичном приближении ( $\sin \vartheta \approx \vartheta$ ,  $\cos \vartheta \approx 1 - 0.5\vartheta^2$ ) определяются по формулам:

$$\begin{aligned}\widehat{\Pi}_{обш} &= \frac{1}{2} Eh_{обш} \cdot l_0 \cdot \widehat{\varepsilon}_{обш}^2, \\ \widetilde{\Pi}_{обш} &= \frac{1}{2} Eh_{обш} \cdot l_0 \cdot \widetilde{\varepsilon}_{обш}^2,\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\widehat{\varepsilon}_k &= \frac{1}{2} (\widehat{\Delta}_{обш,лин} + \widehat{\Delta}_{обш,кв}) - \frac{1}{8} \widehat{\Delta}_{обш,лин}^2, \\ \widetilde{\varepsilon}_k &= \frac{1}{2} (\widetilde{\Delta}_{обш,лин} + \widetilde{\Delta}_{обш,кв}) - \frac{1}{8} \widetilde{\Delta}_{обш,лин}^2, \\ \widehat{\Delta}_{обш,лин} &= \frac{2a^2}{l_0^2} \left[ -\frac{a_u}{a} \left( \frac{r_N}{a} \vartheta_N + \frac{\delta_0}{a} \right) + \left( \frac{r_N}{a} - \frac{r_0}{a} \right) \frac{v_N}{a} \right], \\ \widehat{\Delta}_{обш,кв} &= \frac{a^2}{l_0^2} \left[ \left( \frac{v_N}{a} \right)^2 + \frac{r_N}{a} \frac{r_0}{a} \vartheta_N^2 + \left( \frac{\delta_0}{a} \right)^2 + 2\vartheta_N \frac{r_N}{a} \frac{\delta_0}{a} \right], \\ \widetilde{\Delta}_{обш,лин} &= \frac{2a^2}{l_0^2} \left[ \frac{a_u}{a} \left( \frac{r_N}{a} \vartheta_N - \frac{\delta_0}{a} \right) + \left( \frac{r_0}{a} - \frac{r_N}{a} \right) \frac{v_N}{a} \right], \\ \widetilde{\Delta}_{обш,кв} &= \frac{a^2}{l_0^2} \left[ \left( \frac{v_N}{a} \right)^2 + \frac{r_N}{a} \frac{r_0}{a} \vartheta_N^2 + \left( \frac{\delta_0}{a} \right)^2 - 2\vartheta_N \frac{r_N}{a} \frac{\delta_0}{a} \right].\end{aligned}$$

Тогда уравнения статической аэроупругости, по аналогии с (2.29), примут вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{11}\mathbf{q}_I + \mathbf{K}_{12}\mathbf{q}_{II} + f\tilde{\mathbf{R}}_I + \lambda\mathbf{B}\mathbf{q}_I &= -\lambda\boldsymbol{\mu}_0\mathfrak{G}_c - f\Delta_0\bar{\delta}_0, \\ \mathbf{K}_{21}\mathbf{q}_I + \mathbf{K}_{22}\mathbf{q}_{II} + f\tilde{\mathbf{R}}_{II} &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Здесь  $\bar{\delta}_0 = \delta_0 / a$ , а  $\tilde{\mathbf{R}}_I$ ,  $\tilde{\mathbf{R}}_{II}$  и  $\Delta_0$  будут вычисляться по формулам:

$$\tilde{\mathbf{R}}_I = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_k \frac{\partial \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_k}{\partial v_N} + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_k \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_k}{\partial v_N} \\ \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_k \frac{\partial \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_k}{\partial \mathfrak{G}_N} + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_k \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_k}{\partial \mathfrak{G}_N} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{R}}_{II} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.39)$$

$$\Delta_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ -\left(\frac{r_N}{a} - \frac{r_0}{a}\right) \cdot \frac{a_u}{a} \\ \frac{r_N}{a} \frac{a_u^2}{a^2} \end{pmatrix}$$

где

$$\frac{\partial \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_k}{\partial v_N} = \frac{1}{l_0^2}(r_N - r_0) + \frac{a}{l_0^2} \frac{v_N}{a} + \frac{a_u a}{l_0^4}(r_N - r_0) \left( \frac{r_N}{a} \mathfrak{G}_N + \frac{\delta_0}{a} \right) + \frac{a}{l_0^4}(r_N - r_0)^4 \frac{v_N}{a},$$

$$\frac{\partial \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_k}{\partial \mathfrak{G}_N} = \frac{a_u}{l_0^2}(-r_N) + \frac{r_N r_0}{l_0^2} \mathfrak{G}_N - \frac{a_u^2}{l_0^4} r_N^2 \mathfrak{G}_N - \frac{a^2}{l_0^4} r_N \delta_0 + \frac{a_u}{l_0^4} r_N (r_N - r_0) \frac{v_N}{a},$$

$$\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_k}{\partial v_N} = \frac{1}{l_0^2}(r_0 - r_N) + \frac{a}{l_0^2} \frac{v_N}{a} + \frac{a_u a}{l_0^4}(r_0 - r_N) \left( -\frac{r_N}{a} \mathfrak{G}_N + \frac{\delta_0}{a} \right) + \frac{a}{l_0^4}(r_0 - r_N)^4 \frac{v_N}{a},$$

$$\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_k}{\partial \mathfrak{G}_N} = \frac{a_u}{l_0^2} r_N + \frac{r_N r_0}{l_0^2} \mathfrak{G}_N - \frac{a_u^2}{l_0^4} r_N^2 \mathfrak{G}_N + \frac{a^2}{l_0^4} r_N \delta_0 - \frac{a_u}{l_0^4} r_N (r_0 - r_N) \frac{v_N}{a},$$

$$l_0 = \sqrt{a_u^2 + (r_N - r_0)^2}.$$



В линейной постановке задачи, полагая в (2.38)  $\tilde{\mathbf{R}}_I = \mathbf{0}$  и  $\tilde{\mathbf{R}}_{II} = \mathbf{0}$  и используя обозначение  $\mathbf{C} = \mathbf{K}_{11} - \mathbf{K}_{12}\mathbf{K}_{22}\mathbf{K}_{12}^T + \lambda \cdot \mathbf{V}$ , получаем:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{II} &= -\mathbf{K}_{22}^{-1}\mathbf{K}_{21}\mathbf{q}_I, \\ \mathbf{q}_I &= -\lambda\mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\mu}_0\vartheta_c - f\Delta_0\bar{\delta}_0. \end{aligned} \quad (2.40)$$

При учете нелинейности из уравнения (2.38) получим:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{II} &= -\mathbf{K}_{22}^{-1}\mathbf{K}_{21}\mathbf{q}_I - \beta_1\mathbf{K}_{22}^{-1}\tilde{\mathbf{R}}_{II} \\ \mathbf{q}_I &= -\lambda\mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\mu}_0\vartheta_c - f\Delta_0\bar{\delta}_0 - \beta_1\mathbf{C}^{-1}(\tilde{\mathbf{R}}_I - \mathbf{K}_{12}\mathbf{K}_{22}^{-1}\tilde{\mathbf{R}}_{II}). \end{aligned} \quad (2.41)$$

Так как обшивка работает только на растяжение, то верхняя и нижняя обшивки учитываются при вычислении коэффициентов в представленных уравнениях, только если для них выполняются условия  $\hat{l}_k - l_0 > 0$  (для верхней) и  $\check{l}_k - l_0 > 0$ , (для нижней). Расчет завершается, если разность между результатами, полученными на  $i$ -ом и на  $(i-1)$ -ом шагах итерации меньше  $\varepsilon < 10^{-6}$ .

В таб. 2.4 приведены данные для оценки влияния жесткости обшивки на растяжение на аэродинамические характеристики профиля на примере аэродинамических коэффициентов при следующих исходных данных:  $\vartheta_c = 0.1$ ,  $a = 0.5$  м,  $EI_0 = 1.2 \cdot 10^4$  Н·м<sup>2</sup>,  $GF_c = 7 \cdot 10^7$  Н,  $Eh_{обш} = 5.5 \cdot 10^3$  Н,  $a_u = 0.35$  м,  $x_0 = 0.05$  м,  $x_N = 0.4$  м,  $N = 4$ ,  $n = 50$ ,  $\lambda = 10$  при  $\bar{\delta}_0 = 0.1$  в линейной постановке задачи.

$Eh_{обш}$ , Н	$c_y$	$m_z$
$10^2$	0.51629	0.144383
$10^3$	0.56819	0.144434
$10^5$	0.574782	0.150021
$10^7$	1.069147	0.198586

Табл. 2.4. Влияние жесткости обшивки на характеристики профиля

На рис. 2.16, 2.17 показано влияние учета в расчетной модели обшивки и её геометрической нелинейности на форму деформирования профиля и угол поворота  $N$ -го сечения профиля при  $\bar{\delta}_0 = 0.1$ .

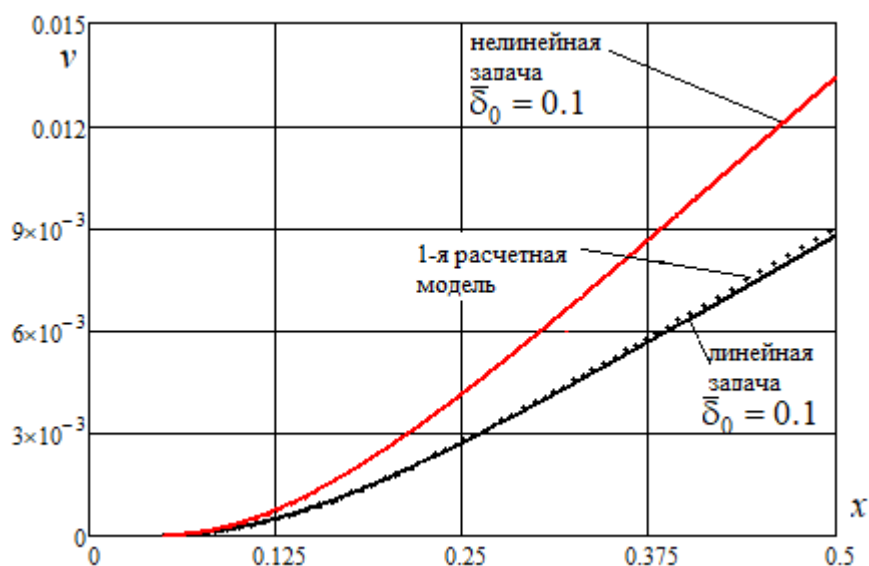


Рис. 2.16. Форма изгиба профиля

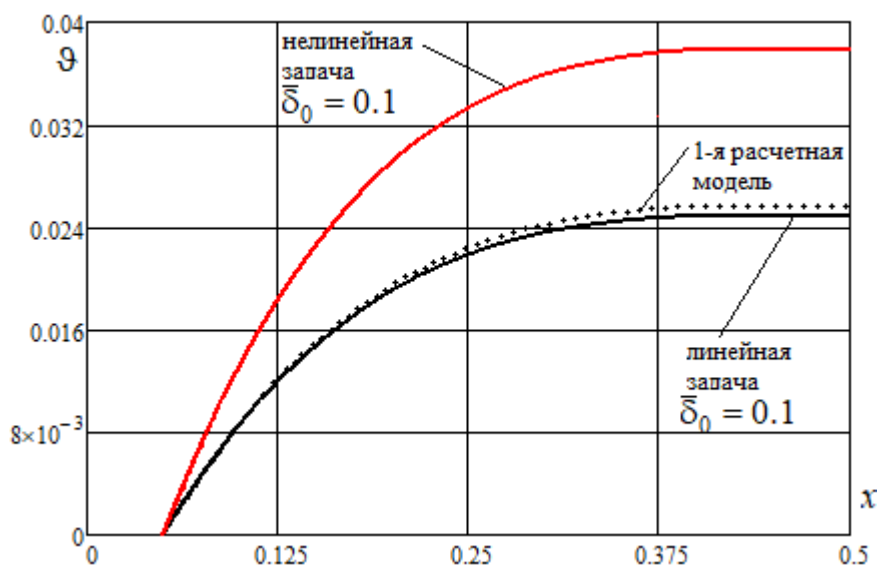


Рис. 2.17. Угол поворота упругой части профиля

На рис. 2.18, 2.19, 2.20 представлена зависимость приращения аэродинамических коэффициентов и перепада аэродинамического давления за счет упругости для линейной постановки задачи при предварительном изменении параметров относительно длины обшивки на  $\bar{\delta}_0$ . На графиках видно, что при линейной постановке задачи предварительное изменение длины обшивки незначительно влияет на полученные результаты. При увеличении жесткости обшивки, в соответствии с табл. 2.4, а также при

увеличении предварительного натяжения, расхождения между первой и второй расчетными моделями профиля более заметны.

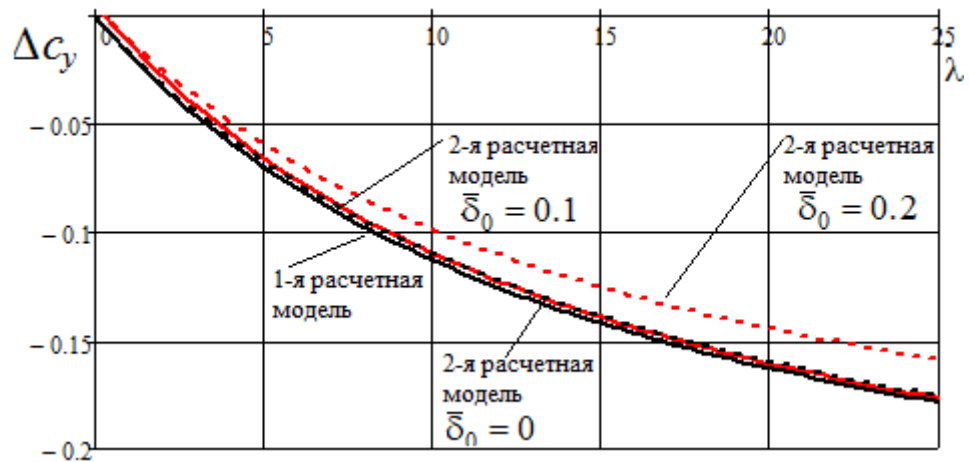


Рис. 2.18. Зависимость приращения коэффициента подъемной силы

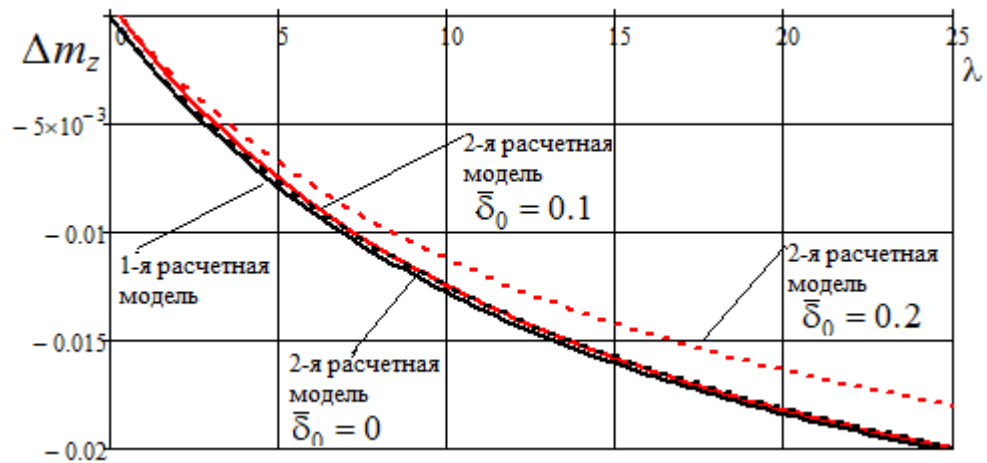


Рис. 2.19. Зависимость приращения коэффициента момента тангажа

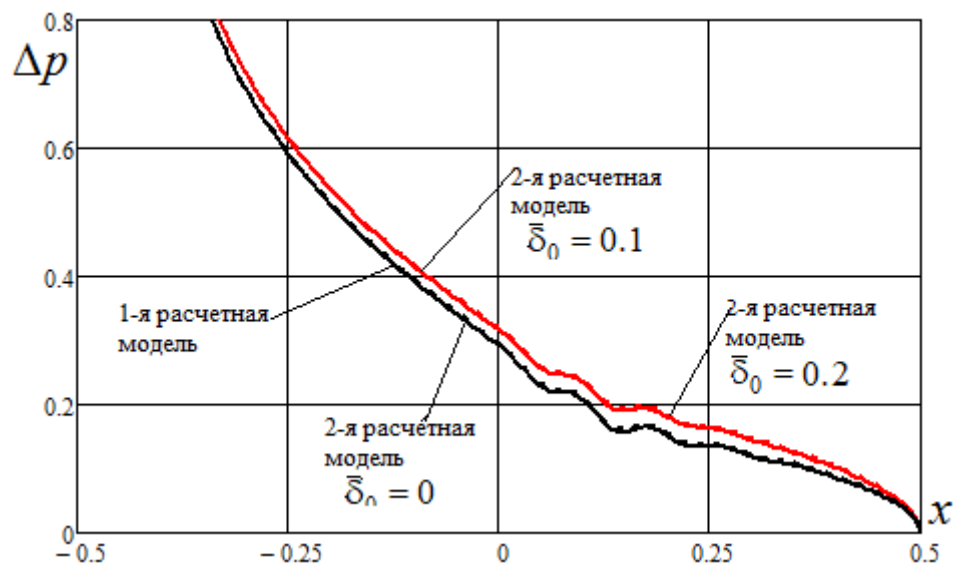


Рис. 2.20. Изменение перепада аэродинамического давления

На рис. 2.21, 2.22 приведены графики для сравнения аэродинамических характеристик при различном предварительном изменении длины обшивки на  $\bar{\delta}_0$  для линейной и нелинейной постановки задачи.

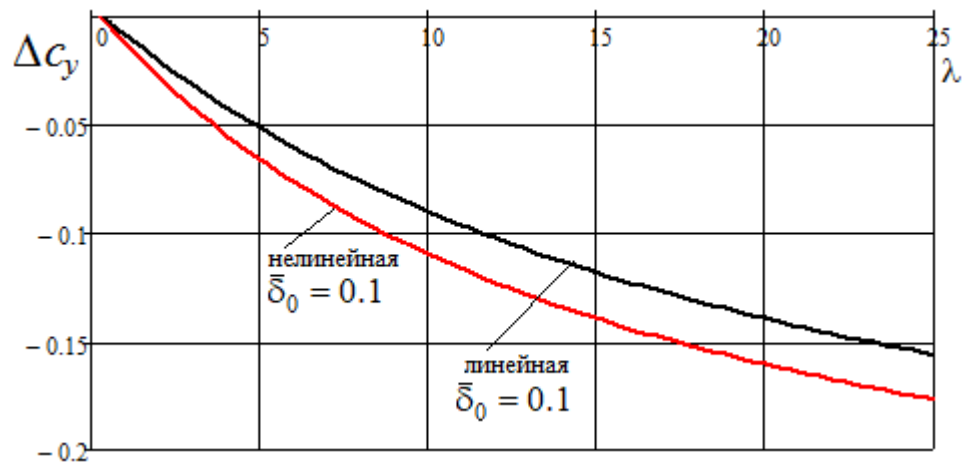


Рис. 2.21. Приращение коэффициента подъемной силы

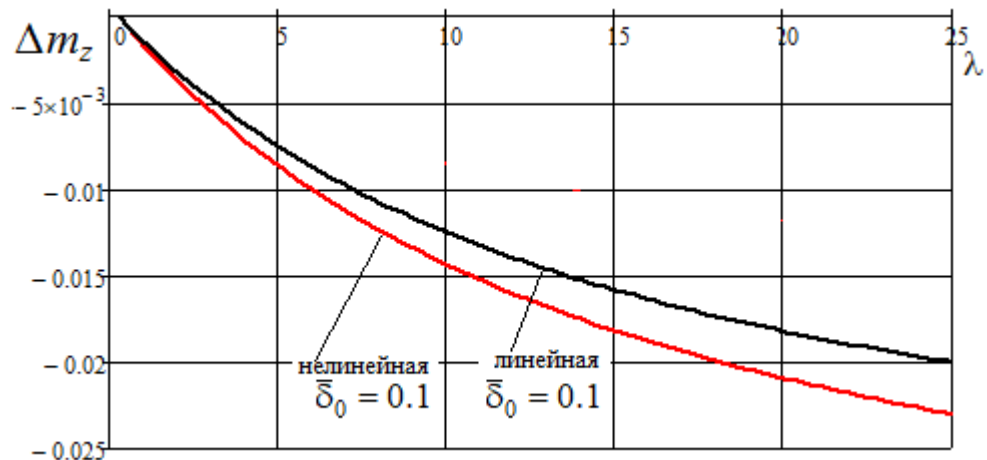


Рис. 2.22. Приращение коэффициента момента тангажа

### 2.4.3 Расчетная модель профиля по типу «рыбий хвост»

Для управления аэродинамическими характеристиками крыла рассмотрим модель с изгибом хвостовых частей профилей крыла по аналогии с работой рыбьего хвоста – тонкая центральная пластина профиля изгибается за счет управляемого натяжения верхней или нижней обшивок

(мембран или лент), связанных с пластиной в ряде точек с эксцентриситетами для создания изгибающих моментов. Эта задача решена в линейной и нелинейной постановках [32, 59].

Рассмотрим профиль, для каждого конечного элемента которого учитываются все обобщенные координаты: поперечные перемещения балки  $v_k$ , углы поворота балки  $\vartheta_k$ , продольные перемещения балки  $u_k$  и перемещения верхней и нижней обшивок соответственно  $\bar{\delta}_k, \check{\delta}_k$ , причем число упругих конечных элементов центральной балки может отличаться от числа конечных элементов обшивки (рис. 2.23).

Потенциальная энергия упругой деформации хвостика для такого профиля запишется в соответствии с (2.1) – (2.3).

Для дальнейшего расчета будем считать, что число конечных элементов упругой балки  $N = 4$ , число конечных элементов обшивки  $p = 2$ .

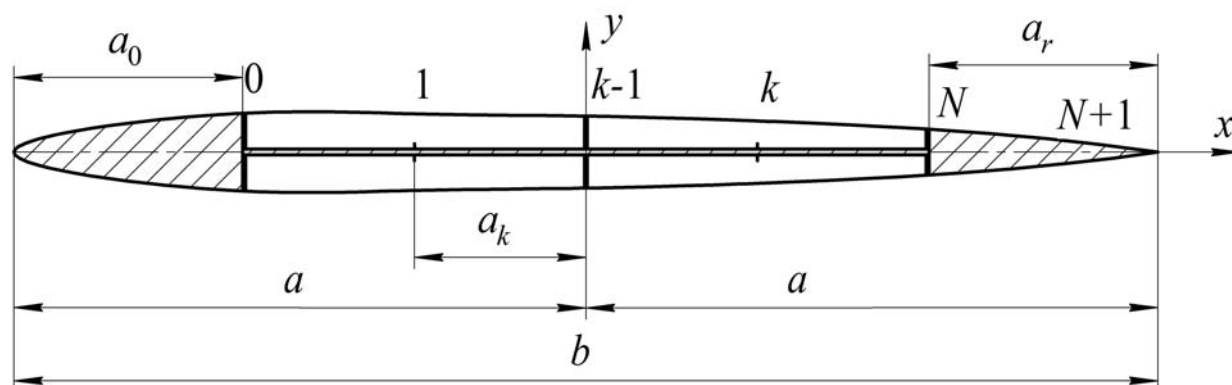


Рис. 2.23. Профиль с обшивкой

Аналогично разделу. 2.4.2., вводится обозначение  $f_0 = \frac{Eh_{обш} \cdot a^5}{EI_0 \cdot l_0^3}$ , где

$l_0 = \sqrt{a_k^2 + (r_p - r_{p-1})^2}$  – начальная длина элемента обшивки. Матрицы жесткости обшивки  $\mathbf{K}_{11,обш}$ ,  $\mathbf{K}_{12,обш}$  и  $\mathbf{K}_{22,обш}$  строятся отдельно, зависящие не только от числа конечных элементов, но и от жесткости оболочки на растяжение  $Eh_{обш}$ . Уравнения аэроупругости будут иметь вид (2.38) при следующей замене матриц жесткости:

$$\mathbf{K}_{11} \rightarrow \mathbf{K}_{11} + \mathbf{K}_{11,обш}, \quad \mathbf{K}_{12} \rightarrow \mathbf{K}_{12} + \mathbf{K}_{12,обш}, \quad \mathbf{K}_{22} \rightarrow \mathbf{K}_{22} + \mathbf{K}_{22,обш}.$$

Матрицы  $\mathbf{K}_{11,обш}$ ,  $\mathbf{K}_{12,обш}$  и  $\mathbf{K}_{22,обш}$  учитываются в расчетах только при соблюдении условий  $\bar{l}_k - l_0 > 0$ ,  $\bar{l}_k - l_0 > 0$ .

Матрицы жесткости ( $k-1 - k$ ) КЭ обшивки имеют вид:

$$\widehat{\mathbf{K}}_{11,обш} = f_0 \begin{bmatrix} (\bar{r}_k - \bar{r}_{k-1})^2 & -(\bar{r}_k - \bar{r}_{k-1})^2 \\ -(\bar{r}_k - \bar{r}_{k-1})^2 & (\bar{r}_k - \bar{r}_{k-1})^2 \end{bmatrix},$$

$$\check{\mathbf{K}}_{11,обш} = f_0 \begin{bmatrix} (\bar{r}_{k-1} - \bar{r}_k)^2 & -(\bar{r}_{k-1} - \bar{r}_k)^2 \\ -(\bar{r}_{k-1} - \bar{r}_k)^2 & (\bar{r}_{k-1} - \bar{r}_k)^2 \end{bmatrix},$$

$$\widehat{\mathbf{K}}_{12,обш} = f_0 \begin{bmatrix} -\bar{a}_k(\bar{r}_k - \bar{r}_{k-1})\bar{r}_{k-1} & \bar{a}_k(\bar{r}_k - \bar{r}_{k-1})\bar{r}_k & \bar{a}_k(\bar{r}_k - \bar{r}_{k-1}) & -\bar{a}_k(\bar{r}_k - \bar{r}_{k-1}) & \bar{a}_k(\bar{r}_k - \bar{r}_{k-1}) & -\bar{a}_k(\bar{r}_k - \bar{r}_{k-1}) \\ \bar{a}_k(\bar{r}_k - \bar{r}_{k-1})\bar{r}_{k-1} & -\bar{a}_k(\bar{r}_k - \bar{r}_{k-1})\bar{r}_k & -\bar{a}_k(\bar{r}_k - \bar{r}_{k-1}) & \bar{a}_k(\bar{r}_k - \bar{r}_{k-1}) & -\bar{a}_k(\bar{r}_k - \bar{r}_{k-1}) & \bar{a}_k(\bar{r}_k - \bar{r}_{k-1}) \end{bmatrix}$$

$$\check{\mathbf{K}}_{12,обш} = f_0 \begin{bmatrix} \bar{a}_k(\bar{r}_{k-1} - \bar{r}_k)\bar{r}_{k-1} & -\bar{a}_k(\bar{r}_{k-1} - \bar{r}_k)\bar{r}_k & \bar{a}_k(\bar{r}_{k-1} - \bar{r}_k) & -\bar{a}_k(\bar{r}_{k-1} - \bar{r}_k) & \bar{a}_k(\bar{r}_{k-1} - \bar{r}_k) & -\bar{a}_k(\bar{r}_{k-1} - \bar{r}_k) \\ -\bar{a}_k(\bar{r}_{k-1} - \bar{r}_k)\bar{r}_{k-1} & \bar{a}_k(\bar{r}_{k-1} - \bar{r}_k)\bar{r}_k & -\bar{a}_k(\bar{r}_{k-1} - \bar{r}_k) & \bar{a}_k(\bar{r}_{k-1} - \bar{r}_k) & -\bar{a}_k(\bar{r}_{k-1} - \bar{r}_k) & \bar{a}_k(\bar{r}_{k-1} - \bar{r}_k) \end{bmatrix}$$

$$\widehat{\mathbf{K}}_{22,обш} = f_0 \begin{bmatrix} \bar{a}_k^2 \bar{r}_{k-1}^2 & -\bar{a}_k^2 \bar{r}_{k-1} \bar{r}_k & -\bar{a}_k^2 \bar{r}_{k-1} & \bar{a}_k^2 \bar{r}_{k-1} & -\bar{a}_k^2 \bar{r}_{k-1} & \bar{a}_k^2 \bar{r}_{k-1} \\ -\bar{a}_k^2 \bar{r}_{k-1} \bar{r}_k & \bar{a}_k^2 \bar{r}_k^2 & \bar{a}_k^2 \bar{r}_k & -\bar{a}_k^2 \bar{r}_k & \bar{a}_k^2 \bar{r}_k & -\bar{a}_k^2 \bar{r}_k \\ -\bar{a}_k^2 \bar{r}_{k-1} & \bar{a}_k^2 \bar{r}_k^2 & \bar{a}_k^2 & -\bar{a}_k^2 & \bar{a}_k^2 & -\bar{a}_k^2 \\ \bar{a}_k^2 \bar{r}_{k-1} & -\bar{a}_k^2 \bar{r}_k & -\bar{a}_k^2 & \bar{a}_k^2 & -\bar{a}_k^2 & \bar{a}_k^2 \\ -\bar{a}_k^2 \bar{r}_{k-1} & \bar{a}_k^2 \bar{r}_k & \bar{a}_k^2 & -\bar{a}_k^2 & \bar{a}_k^2 & -\bar{a}_k^2 \\ \bar{a}_k^2 \bar{r}_{k-1} & -\bar{a}_k^2 \bar{r}_k & -\bar{a}_k^2 & \bar{a}_k^2 & -\bar{a}_k^2 & \bar{a}_k^2 + C \end{bmatrix},$$

$$\check{\mathbf{K}}_{22,обш} = f_0 \begin{bmatrix} \bar{a}_k^2 \bar{r}_{k-1}^2 & -\bar{a}_k^2 \bar{r}_{k-1} \bar{r}_k & \bar{a}_k^2 \bar{r}_{k-1} & -\bar{a}_k^2 \bar{r}_{k-1} & \bar{a}_k^2 \bar{r}_{k-1} & -\bar{a}_k^2 \bar{r}_{k-1} \\ -\bar{a}_k^2 \bar{r}_{k-1} \bar{r}_k & \bar{a}_k^2 \bar{r}_k^2 & -\bar{a}_k^2 \bar{r}_k & \bar{a}_k^2 \bar{r}_k & -\bar{a}_k^2 \bar{r}_k & \bar{a}_k^2 \bar{r}_k \\ \bar{a}_k^2 \bar{r}_{k-1} & -\bar{a}_k^2 \bar{r}_k^2 & \bar{a}_k^2 & -\bar{a}_k^2 & \bar{a}_k^2 & -\bar{a}_k^2 \\ -\bar{a}_k^2 \bar{r}_{k-1} & \bar{a}_k^2 \bar{r}_k & -\bar{a}_k^2 & \bar{a}_k^2 & -\bar{a}_k^2 & \bar{a}_k^2 \\ \bar{a}_k^2 \bar{r}_{k-1} & -\bar{a}_k^2 \bar{r}_k & \bar{a}_k^2 & -\bar{a}_k^2 & \bar{a}_k^2 & -\bar{a}_k^2 \\ -\bar{a}_k^2 \bar{r}_{k-1} & \bar{a}_k^2 \bar{r}_k & -\bar{a}_k^2 & \bar{a}_k^2 & -\bar{a}_k^2 & \bar{a}_k^2 + C \end{bmatrix}.$$

Матрицы жесткости (0-1) КЭ обшивки имеют вид:

$$\widehat{\mathbf{K}}_{11,обш}^{(0-1)} = f_0 [(\bar{r}_1 - \bar{r}_0)^2], \quad \check{\mathbf{K}}_{11,обш}^{(0-1)} = f_0 [(\bar{r}_0 - \bar{r}_1)^2],$$

$$\widehat{\mathbf{K}}_{12,обш}^{(0-1)} = f_0 [\bar{a}_1(\bar{r}_1 - \bar{r}_0)\bar{r}_1 \quad \bar{a}_1(\bar{r}_1 - \bar{r}_0) \quad \bar{a}_1(\bar{r}_1 - \bar{r}_0)],$$

$$\check{\mathbf{K}}_{12,обш}^{(0-1)} = f_0 [\bar{a}_1(\bar{r}_0 - \bar{r}_1)\bar{r}_1 \quad -\bar{a}_1(\bar{r}_0 - \bar{r}_1) \quad \bar{a}_1(\bar{r}_0 - \bar{r}_1)],$$

$$\widehat{\mathbf{K}}_{12,обш}^{(0-1)} = f_0 \begin{bmatrix} \bar{a}_1^2 \bar{r}_1^2 & -\bar{a}_1^2 \bar{r}_1 & -\bar{a}_1^2 \bar{r}_1 \\ -\bar{a}_1^2 \bar{r}_1 & \bar{a}_1^2 & \bar{a}_1^2 \\ -\bar{a}_1^2 \bar{r}_1 & \bar{a}_1^2 & \bar{a}_1^2 + C \end{bmatrix}, \quad \check{\mathbf{K}}_{12,обш}^{(0-1)} = f_0 \begin{bmatrix} \bar{a}_1^2 \bar{r}_1^2 & \bar{a}_1^2 \bar{r}_1 & \bar{a}_1^2 \bar{r}_1 \\ \bar{a}_1^2 \bar{r}_1 & \bar{a}_1^2 & \bar{a}_1^2 \\ \bar{a}_1^2 \bar{r}_1 & \bar{a}_1^2 & \bar{a}_1^2 + C \end{bmatrix}.$$

Матрицы жесткости  $(N-1 - N)$  КЭ обшивки имеют вид:

$$\widehat{\mathbf{K}}_{11,обш}^{(N-1-N)} = f_0 \begin{bmatrix} (\bar{r}_N - \bar{r}_{N-1})^2 & -(\bar{r}_N - \bar{r}_{N-1})^2 & \bar{a}_N (\bar{r}_N - \bar{r}_{N-1}) \bar{r}_N \\ -(\bar{r}_N - \bar{r}_{N-1})^2 & (\bar{r}_N - \bar{r}_{N-1})^2 & -\bar{a}_N (\bar{r}_N - \bar{r}_{N-1}) \bar{r}_N \\ \bar{a}_N (\bar{r}_N - \bar{r}_{N-1}) \bar{r}_N & -\bar{a}_N (\bar{r}_N - \bar{r}_{N-1}) \bar{r}_N & \bar{a}_N^2 \bar{r}_N^2 \end{bmatrix},$$

$$\check{\mathbf{K}}_{11,обш}^{(N-1-N)} = f_0 \begin{bmatrix} (\bar{r}_{N-1} - \bar{r}_N)^2 & -(\bar{r}_{N-1} - \bar{r}_N)^2 & -\bar{a}_N (\bar{r}_{N-1} - \bar{r}_N) \bar{r}_N \\ -(\bar{r}_{N-1} - \bar{r}_N)^2 & (\bar{r}_{N-1} - \bar{r}_N)^2 & \bar{a}_N (\bar{r}_{N-1} - \bar{r}_N) \bar{r}_N \\ -\bar{a}_N (\bar{r}_{N-1} - \bar{r}_N) \bar{r}_N & \bar{a}_N (\bar{r}_{N-1} - \bar{r}_N) \bar{r}_N & \bar{a}_N^2 \bar{r}_N^2 \end{bmatrix},$$

$$\widehat{\mathbf{K}}_{12,обш}^{(N-1-N)} = f_0 \begin{bmatrix} -\bar{a}_N (\bar{r}_N - \bar{r}_{N-1}) \bar{r}_{N-1} & \bar{a}_N (\bar{r}_N - \bar{r}_{N-1}) & -\bar{a}_N (\bar{r}_N - \bar{r}_{N-1}) & \bar{a}_N (\bar{r}_N - \bar{r}_{N-1}) \\ \bar{a}_N (\bar{r}_N - \bar{r}_{N-1}) \bar{r}_{N-1} & -\bar{a}_N (\bar{r}_N - \bar{r}_{N-1}) & \bar{a}_N (\bar{r}_N - \bar{r}_{N-1}) & -\bar{a}_N (\bar{r}_N - \bar{r}_{N-1}) \end{bmatrix},$$

$$\check{\mathbf{K}}_{12,обш}^{(N-1-N)} = f_0 \begin{bmatrix} \bar{a}_N (\bar{r}_{N-1} - \bar{r}_N) \bar{r}_{N-1} & \bar{a}_N (\bar{r}_{N-1} - \bar{r}_N) & -\bar{a}_N (\bar{r}_{N-1} - \bar{r}_N) & \bar{a}_N (\bar{r}_{N-1} - \bar{r}_N) \\ -\bar{a}_N (\bar{r}_{N-1} - \bar{r}_N) \bar{r}_{N-1} & -\bar{a}_N (\bar{r}_{N-1} - \bar{r}_N) & \bar{a}_N (\bar{r}_{N-1} - \bar{r}_N) & -\bar{a}_N (\bar{r}_{N-1} - \bar{r}_N) \end{bmatrix},$$

$$\widehat{\mathbf{K}}_{22,обш}^{(N-1-N)} = f_0 \begin{bmatrix} \bar{a}_N^2 \bar{r}_{N-1}^2 & -\bar{a}_N^2 \bar{r}_{N-1} & \bar{a}_N^2 \bar{r}_{N-1} & -\bar{a}_N^2 \bar{r}_{N-1} \\ -\bar{a}_N^2 \bar{r}_{N-1} & \bar{a}_N^2 & -\bar{a}_N^2 & \bar{a}_N^2 \\ \bar{a}_N^2 \bar{r}_{N-1} & -\bar{a}_N^2 & \bar{a}_N^2 & -\bar{a}_N^2 \\ -\bar{a}_N^2 \bar{r}_{N-1} & \bar{a}_N^2 & -\bar{a}_N^2 & \bar{a}_N^2 \end{bmatrix},$$

$$\check{\mathbf{K}}_{22,обш}^{(N-1-N)} = f_0 \begin{bmatrix} \bar{a}_N^2 \bar{r}_{N-1}^2 & \bar{a}_N^2 \bar{r}_{N-1} & -\bar{a}_N^2 \bar{r}_{N-1} & \bar{a}_N^2 \bar{r}_{N-1} \\ \bar{a}_N^2 \bar{r}_{N-1} & \bar{a}_N^2 & -\bar{a}_N^2 & \bar{a}_N^2 \\ -\bar{a}_N^2 \bar{r}_{N-1} & -\bar{a}_N^2 & \bar{a}_N^2 & -\bar{a}_N^2 \\ \bar{a}_N^2 \bar{r}_{N-1} & \bar{a}_N^2 & -\bar{a}_N^2 & \bar{a}_N^2 \end{bmatrix}.$$

Выше использовались обозначения  $\bar{r} = \frac{r}{a}$ ,  $\bar{a}_k = \frac{a_k}{a}$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ).

Векторы, учитывающие нелинейность, в этом случае равны  $\beta_1 \mathbf{R}_I + f_0 \check{\mathbf{R}}_I$ ,  $\beta_1 \mathbf{R}_{II} + f_0 \check{\mathbf{R}}_{II}$  и

$$\Delta_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\bar{a}_k^2 \bar{r}_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Для проведения численных расчетов примем, что  $\bar{\delta}_0 = 0.1$ ,  $\vartheta_c = 0.1$ ,  $a = 0.5$  м, изгибная жесткость центральной балки  $EI_0 = 1.2 \cdot 10^4$  Н·м<sup>2</sup>, сдвиговая жесткость центральной балки  $GF_c = 7 \cdot 10^7$  Н, жесткость балки-полоски на растяжение  $EF_0 = 5 \cdot 10^7$  Н, жесткость обшивки на растяжение  $Eh_{обш} = 5.5 \cdot 10^3$  Н, длина упругой части профиля  $a_u = 0.35$  м, линейная координата начала упругой части  $x_0 = 0.05$  м, линейная координата конца упругой части  $x_N = 0.4$  м,  $C = 1.3 \cdot 10^9$  Н/м – эквивалентная жесткость пружины.

На рис. 2.24, 2.25 представлены графики изменения приращений коэффициентов  $c_y$  и  $m_z$  за счет упругости профиля в зависимости от коэффициента  $\lambda$ . В табл. 2.5 приведены результаты расчетов, показывающие сильное влияние изменения жесткости обшивки на величины аэродинамических коэффициентов.

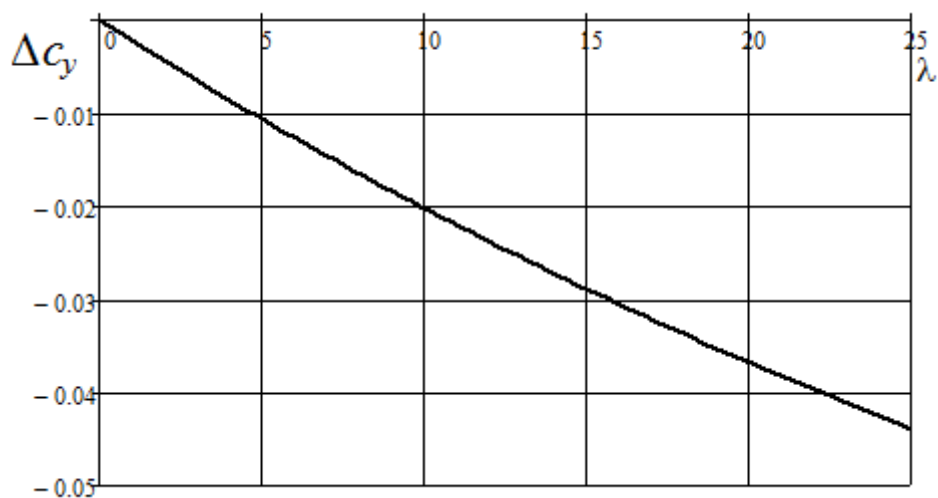


Рис. 2.24. Приращение коэффициента подъемной силы



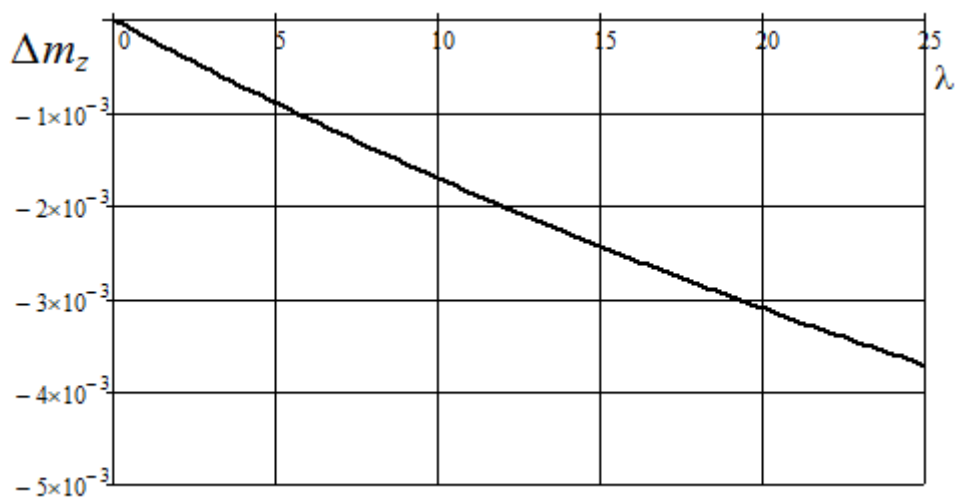


Рис. 2.25. Приращение коэффициента момента тангажа

$\lambda$	$Eh_{обш} = 5.5 \cdot 10^3 \text{ Н}$		$Eh_{обш} = 5.5 \cdot 10^5 \text{ Н}$	
	$\Delta c_y$	$\Delta m_z$	$\Delta c_y$	$\Delta m_z$
5	-0.011	$-9.076 \cdot 10^{-4}$	-0.01	$-3.271 \cdot 10^{-4}$
10	-0.02	$-1.684 \cdot 10^{-3}$	-0.019	$-1.093 \cdot 10^{-3}$
15	-0.029	$-2.433 \cdot 10^{-3}$	-0.028	$-1.831 \cdot 10^{-3}$
20	-0.037	$-3.114 \cdot 10^{-3}$	-0.036	$-2.503 \cdot 10^{-3}$

Табл. 2.5. Сравнение аэродинамических характеристик профиля при различной жесткости обшивки

На рис. 2.26, 2.27 приведены графики сравнения результатов, полученных для 2-й расчетной модели из разд. 2.4.2 и для модели «рыбий хвост» для  $\bar{\delta}_0 = 0.1$ .

На графиках сплошной линией представлены результаты расчетов для модели профиля «рыбий хвост», пунктирной линией – для 2-й расчетной модели из разд. 2.4.2. На рис. 2.28 для этих же расчетных моделей показаны графики перепада аэродинамического давления.

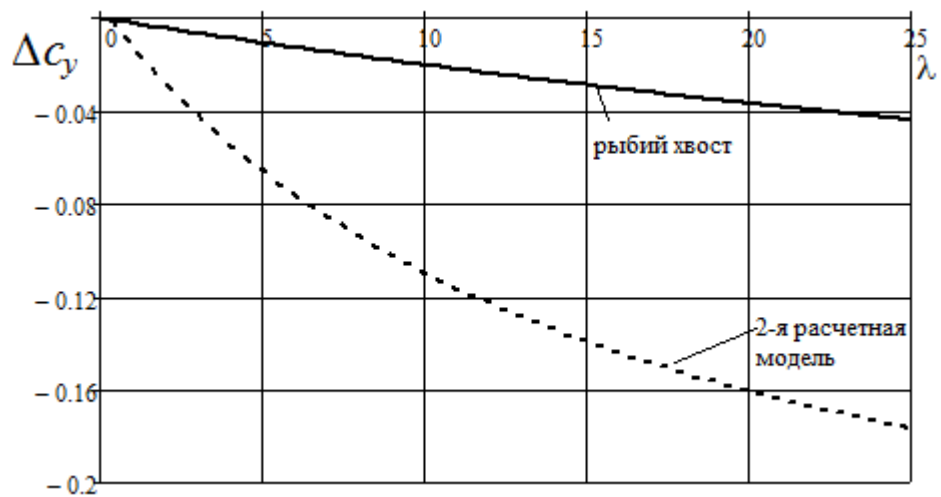


Рис. 2.26. Приращение коэффициента подъемной силы

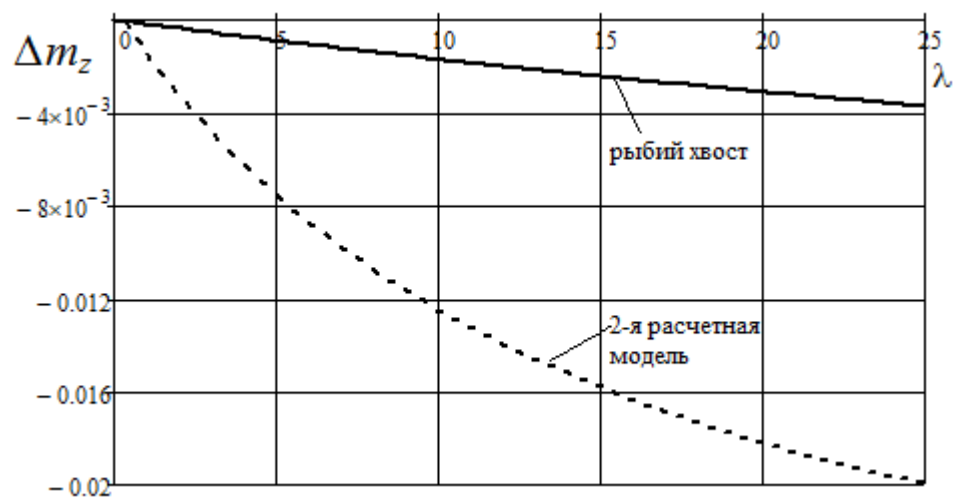


Рис. 2.27. Приращение коэффициента момента тангажа

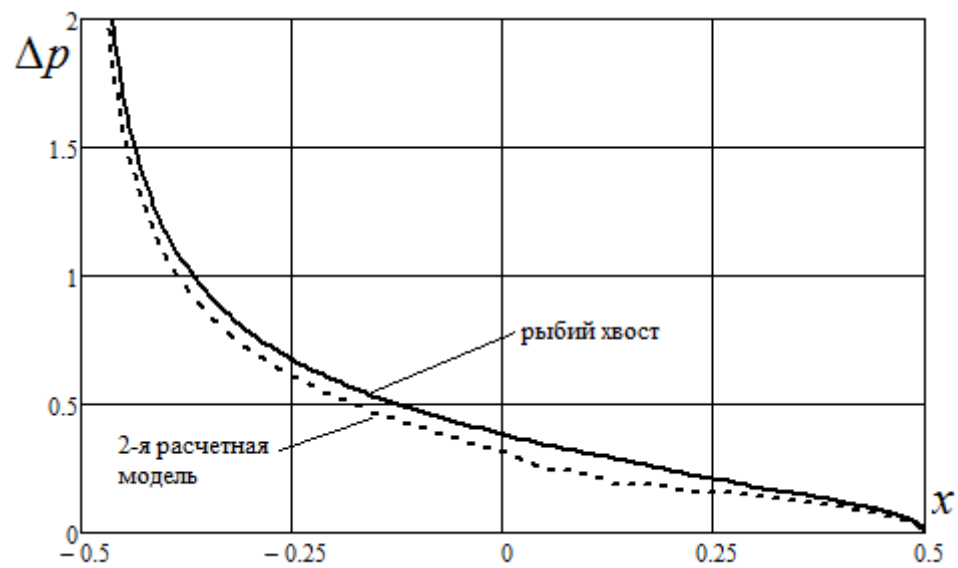


Рис. 2.28. Изменение перепада аэродинамического давления

### **Глава 3. Влияние нестационарности несжимаемого потока на изгибно-крутильные аэроупругие колебания крыла большого удлинения**

В предыдущих главах были рассмотрены два метода построения расчетно-математических моделей исследования аэродинамических и аэроупругих характеристик профиля крыла. Аэродинамические нагрузки определялись в соответствии с гипотезой плоского обтекания профилей крыла при использовании квазистационарной теории для определения нагрузок на колеблющийся профиль. В соответствии с этой теорией время, соответствующее рассматриваемому моменту  $t$ , «замораживалось» и рассматривалось как параметр.

При использовании нестационарной теории обтекания, аэродинамические и аэроупругие характеристики колебательного процесса изменяются во времени.

В данной главе выражение для перепада давлений будет определяться через функцию Теодорсена. На примере прямого крыла большого удлинения выполнено сравнение результатов расчета амплитудно-частотных характеристик, полученных на основании нестационарной и квазистационарных (уточненной и обычной) теорий, а также выполнены расчеты для определения границы динамической неустойчивости (флаттера) на основании нестационарной и квазистационарных (уточненной и обычной) теорий.

#### **3.1. Аэродинамические нагрузки, действующие на крыло при изгибно-крутильных колебаниях**

Рассмотрим консоль крыла с симметричными недеформируемыми профилями поперечных сечений с прямолинейной осью жесткости, с которой совмещается ось  $z$ , рис.1. Изгибно-крутильные колебания крыла как балки под действием поперечной силы на конце крыла  $P(t)$  и

возникающих при колебаниях распределенных аэродинамических нагрузок  $\Delta Y(z,t)$ ,  $\Delta M(z,t)$  описываются поперечными перемещениями оси  $v(x,t)$  и углами закручивания поперечных сечений  $\varphi(z,t)$ , рис.3.1.

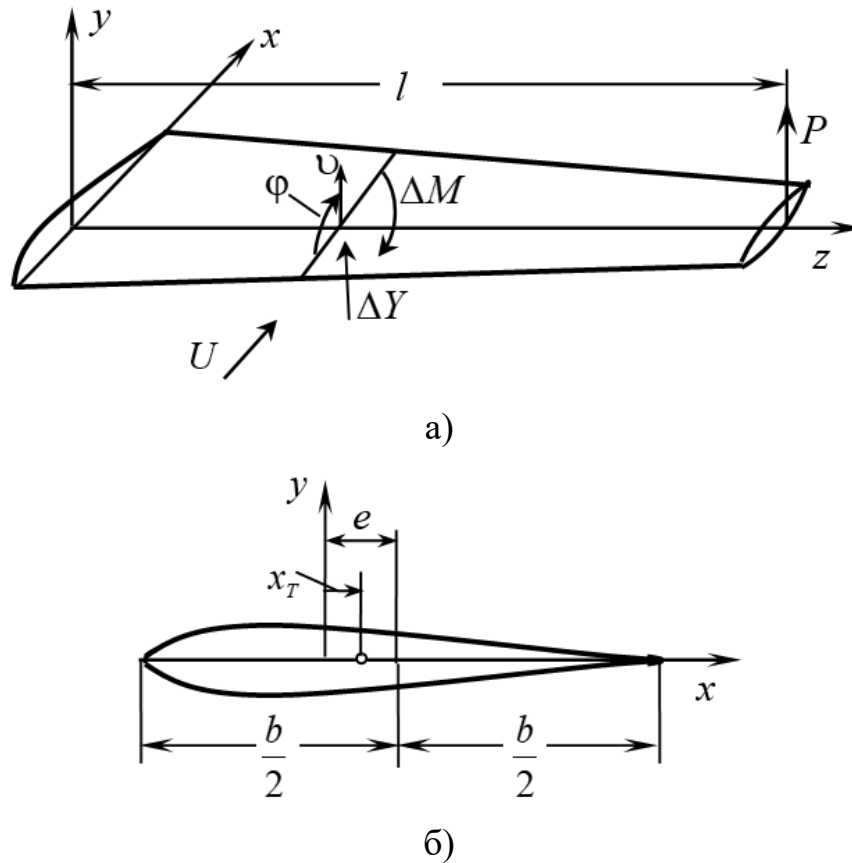


Рис. 3.1. Модель крыла

Погонные аэродинамические нагрузки (поперечные силы и крутящие моменты относительно оси  $z$ ) при малых гармонических колебаниях крыла с тонкими профилями, обтекаемыми плоским безотрывным потоком идеального несжимаемого газа, в общем случае по нестационарной теории записываются в виде [67]:

$$\Delta Y = \frac{\rho b}{2} [g_1 U (U\varphi - \dot{v}) + g_2^* U b \dot{\varphi} + g_3 b (U\dot{\varphi} - \ddot{v}) + g_4^* b^2 \ddot{\varphi}]; \quad (3.1)$$

$$\Delta M = \frac{\rho b^2}{2} [h_1^* U (U\varphi - \dot{v}) + h_2^* U b \dot{\varphi} + h_3^* b (U\dot{\varphi} - \ddot{v}) + h_4^* b^2 \ddot{\varphi}].$$

Здесь  $b(z)$  – хорда профиля,  $\rho$  и  $U$  – плотность и скорость набегающего потока; отмеченные верхними звездочками аэродинамические коэффициенты профиля крыла определяются по формулам:

$$\begin{aligned}
g_2^* &= g_2 + \bar{e}g_1, & g_4^* &= g_4 + \bar{e}g_3, & h_1^* &= h_1 - \bar{e}g_1, & \bar{e}(z) &= e/b, \\
h_2^* &= h_2 - \bar{e}^2g_1, & h_3^* &= h_3 - \bar{e}g_3, & h_4^* &= h_4 - \bar{e}^2g_3;
\end{aligned}
\tag{3.2}$$

$e(z)$  – расстояние от оси  $z$  до середины хорды в сечении  $z = const$ .

Значения коэффициентов без звездочек, относящихся к середине хорды, которые входят в формулы (3.2), приведены ниже.

1) Нестационарная теория для гармонических колебаний с частотой  $\omega$ :

$$\begin{aligned}
g_1 &= 2\pi C(k), & g_2 &= \frac{\pi}{2}C(k), & g_3 &= \frac{\pi}{2}, & g_4 &= 0, \\
h_1 &= \frac{\pi}{2}C(k), & h_2 &= \frac{\pi}{8}(C(k) - 1), & h_3 &= 0, & h_4 &= -\frac{\pi}{64},
\end{aligned}
\tag{3.3}$$

где  $C(k)$  – комплексная функция Теодорсена,  $k = \frac{\omega b}{2U}$  – приведенная частота колебаний.

2) Уточненная квазистационарная теория, которая следует из нестационарной при  $k \rightarrow 0$ ,  $C(k) \rightarrow 0$  и пренебрежении членами с  $\ddot{v}$  и  $\ddot{\phi}$ :

$$\begin{aligned}
g_1 &= 2\pi, & g_2 &= \frac{\pi}{2}, & g_3 &= \frac{\pi}{2}, & g_4 &= 0, \\
h_1 &= \frac{\pi}{2}, & h_2 &= 0, & h_3 &= 0, & h_4 &= 0.
\end{aligned}
\tag{3.4}$$

3) Обычная квазистационарная теория, основанная на гипотезе стационарности:

$$\begin{aligned}
g_1 &= 2\pi, & g_2 &= \frac{\pi}{2}, & g_3 &= 0, & g_4 &= 0, \\
h_1 &= \frac{\pi}{2}, & h_2 &= 0, & h_3 &= 0, & h_4 &= 0.
\end{aligned}
\tag{3.5}$$

Во всех случаях (3.3) – (3.5) в силу теоремы обратимости [10, 12, 67] выполняется соотношение  $h_1 = g_2, h_3 = g_4$ .

Функция  $C(k) = F(k) + iG(k)$  выражается через специальные функции Ханкеля [12, 18, 54, 62, 63] и имеет следующую асимптотику при  $k \rightarrow 0$ :

$$F(k) \approx 1 - \frac{\pi}{2}k, \quad G(k) \approx k(\ln \frac{k}{2} + 0.5772).$$

Для упрощения вычислений аэродинамических коэффициентов по нестационарной теории в случае крыла с переменными поперечными сечениями, для которых  $k(z) = \frac{\omega b(z)}{2U}$ , удобно использовать достаточно

точную во всем диапазоне  $0 \leq k \leq \infty$  аппроксимацию А.Н. Храброва [25]:

$$F(k) = \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^3 \frac{a_m b_m}{b_m^2 + k^2}, \quad G(k) = -k \sum_{m=1}^3 \frac{a_m b_m}{b_m^2 + k^2}, \quad \sum_{m=1}^3 a_m = \frac{1}{2}, \quad a_1 = 0.1149, \\ b_1 = 0.03619, \quad a_2 = 0.2915, \quad b_2 = 0.1899, \quad a_3 = 0.0936, \quad b_3 = 0.6820.$$

При использовании квазистационарной теории коэффициенты  $g_1, \dots$  и  $h_1, \dots$  определяются по формулам (3.4) и (3.5); в этих случаях они действительны и не зависят от приведенной частоты  $k$  и, соответственно, от координаты  $z$ . Это значительно упрощает расчеты.

Заметим, что при использовании гипотезы стационарности можно учесть сжимаемость дозвукового потока [67] путем умножения коэффициентов (3.5) на множитель  $\sqrt{1 - M^2}$ , где  $M = U/c$  – число Маха;  $c$  – скорость звука в воздухе, зависящая от его плотности и высоты полета. Отсюда видно, что поток можно считать несжимаемым ( $M = 0$ ) с точностью до 3% при  $0 \leq M \leq 0.25$ .

### 3.2. Уравнения аэроупругих колебаний крыла

Уравнения изгибно-крутильных аэроупругих колебаний прямого крыла большого удлинения получим как уравнения Лагранжа в обобщенных координатах. Кинетическая и потенциальная энергии крыла и вариация работы погонных аэродинамических нагрузок  $\Delta Y, \Delta M$  и заданной поперечной силы на его конце  $P$  записываются в виде:

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} \int_0^l (m\dot{v}^2 - 2mx_T\dot{v}\dot{\varphi} + J\dot{\varphi}^2) dz, \\
\Pi &= \frac{1}{2} \int_0^l (EIv''^2 + GJ_k\varphi'^2) dz, \\
\delta A &= \int_0^l (\Delta Y\delta v + \Delta M\delta\varphi) dz + P\delta v(l,t).
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Здесь  $m(z)$ ,  $J(z)$ ,  $x_T(z)$  – погонная масса, погонный массовый момент инерции относительно оси  $z$  и расстояние от оси  $z$  до центра тяжести в сечении  $z = const$ ;  $EI(z)$ ,  $GJ_k(z)$  – изгибная жесткость и жесткость свободного кручения крыла как тонкостенной балки в сечении  $z = const$ .

Поперечное перемещение оси крыла  $v$  и угол закручивания  $\varphi$  на основании метода Ритца будем искать в виде

$$v(z,t) = a \sum_{i=1}^s q_i(t) f_i(z); \quad \varphi(z,t) = \sum_{i=1}^s q_i(t) \varphi_i(z), \tag{3.7}$$

где  $a$  – некоторый характерный размер;  $f_i(z)$ ,  $\varphi_i(z)$  – заданные безразмерные функции, удовлетворяющие условиям жесткого закрепления крыла ( $f_i(0) = 0$ ,  $f_i'(0) = 0$ ,  $\varphi_i(0) = 0$ );  $q_i(t)$  – обобщенные координаты, имеющие одинаковую размерность.

Уравнения аэроупругих колебаний крыла в обобщенных координатах получим на основании (3.1), (3.2), (3.6), (3.7) в общем случае при использовании нестационарной теории, аэродинамические коэффициенты для которой определяются по формулам (3.3), являются комплексными и зависят сложным образом от переменной приведенной частоты колебаний

$$k(z) = \frac{\omega b(z)}{2U}, \text{ записываются в виде [29]:}$$

$$\sum_{j=1}^s (m_{ij} + g_{ij}) \ddot{q}_j + d_{ij} \dot{q}_j + (k_{ij} + b_{ij}) q_j = Q_i, \quad (i = 1, 2, \dots, s) \tag{3.8}$$

Здесь

$$m_{ij} = \int_0^l (ma^2 f_i f_j - mx_T a(f_i \varphi_j + f_j \varphi_i) + J \varphi_i \varphi_j) dz,$$

$$k_{ij} = \int_0^l (EIa^2 f_i'' f_j'' + GJ_k \varphi_i' \varphi_j') dz,$$

$$b_{ij} = -\frac{\rho b}{2} U^2 \int_0^l (g_1 a f_i \varphi_j + h_1^* b \varphi_i \varphi_j) dz,$$

$$d_{ij} = \frac{\rho b}{2} U \int_0^l (g_1 a^2 f_i f_j - (g_2^* + g_3) a b f_i \varphi_j + h_1^* a \varphi_i f_j - (h_2^* + h_3^*) b^2 \varphi_i \varphi_j) dz,$$

$$g_{ij} = \frac{\rho b^2}{2} \int_0^l (g_3 a^2 f_i f_j - g_3 \bar{e} a b (f_i \varphi_j + f_j \varphi_i) - h_4^* b^2 \varphi_i \varphi_j) dz,$$

$$Q_i = P_i(t) a f_i(l).$$

Коэффициенты  $g_{ij}$ , представляющие присоединенные массы воздуха, являются действительными и симметричными ( $g_{ij} = g_{ji}$ ), так как  $h_3 = g_4 = 0$  и  $h_3^* = -g_4^* = -\bar{e} g_3$ , а  $g_3$  и  $h_4$  действительны. Коэффициенты аэродинамического демпфирования  $d_{ij}$  и аэродинамической жесткости  $b_{ij}$  в рассматриваемом случае являются комплексными и несимметричными.

При использовании квазистационарной теории при достаточно медленных произвольных по времени изгибно-крутильных колебаниях крыла аэродинамические коэффициенты (3.2) при значениях (3.4) или (3.5) являются действительными и постоянными (не зависят от  $\omega$  и от  $z$ ).

Преобразуем уравнения (3.8) к безразмерному виду. Для этого разделим их на  $lmU^2$  и введем безразмерное время  $\tau = \frac{2U}{b} t$ . В качестве характерного размера для относительного прогиба крыла принято  $a = b/2$ .

Тогда уравнения аэроупругих колебаний крыла постоянного поперечного сечения в обобщенных координатах запишутся в виде [45]:

$$\sum_{j=1}^s \left[ \bar{m}_{ij} \frac{d^2 q_j}{d\tau^2} + \frac{1}{\gamma} \bar{d}_{ij} \frac{dq_j}{d\tau} + \left( \frac{1}{\psi^2} \bar{k}_{ij} + \frac{1}{\gamma} \bar{b}_{ij} \right) q_j \right] = \frac{1}{lmU^2} Q_i(t), \quad (i=1,2,\dots,s) \quad (3.9)$$

Коэффициенты уравнений (3.9) определяются по формулам



$$\bar{m}_{ij} = \left(1 + \frac{g_3}{\gamma}\right) \mu_{ij} - 2 \left(\bar{x}_T + \frac{\bar{e}}{\gamma} g_3\right) (v_{ij} + v_{ji}) + 4(j - h_4^*) \eta_{ij}, \quad \bar{k}_{ij} = \beta \frac{\beta_{ij}}{4} + \kappa_{ij},$$

$$\bar{d}_{ij} = g_1 \frac{\mu_{ij}}{2} - (g_2^* + g_3) v_{ij} + h_1^* v_{ji} - 2(h_2^* + h_3^*) \eta_{ij}, \quad \bar{b}_{ij} = -g_1 \frac{v_{ij}}{2} - h_1^* \eta_{ij};$$

$$\mu_{ij} = \int_0^1 f_i f_j d\xi, \quad \eta_{ij} = \int_0^1 \varphi_i \varphi_j d\xi, \quad v_{ij} = \int_0^1 f_i \varphi_j d\xi,$$

$$\beta_{ij} = \int_0^1 \frac{d^2 f_i}{d\xi^2} \frac{d^2 f_j}{d\xi^2} d\xi, \quad \kappa_{ij} = \int_0^1 \frac{d\varphi_i}{d\xi} \frac{d\varphi_j}{d\xi} d\xi.$$

Здесь введены следующие безразмерные параметры

$$\psi^2 = \frac{ml^2 U^2}{GJ_k}, \quad \beta = \frac{b^2 EI}{l^2 GJ_k}, \quad \gamma = \frac{2m}{\rho b^2}, \quad j = \frac{J}{mb^2}, \quad \bar{e} = \frac{e}{b}, \quad \bar{x}_T = \frac{x_T}{b}.$$

Коэффициенты  $\bar{m}_{ij}$ , записаны с учетом присоединенных масс воздуха, являются действительными и симметричными ( $\bar{m}_{ij} = \bar{m}_{ji}$ ), так как  $g_3$  и  $h_4$  действительны. Коэффициенты аэродинамического демпфирования  $\bar{d}_{ij}$  и аэродинамической жесткости  $\bar{b}_{ij}$  в случае использования нестационарной теории являются комплексными; при этом  $h_3 = g_4 = 0$  и  $h_3^* = -g_4^* = -\bar{e}g_3$ .

При использовании квазистационарной теории аэродинамические коэффициенты  $\bar{d}_{ij}$ ,  $\bar{b}_{ij}$  являются действительными, как и коэффициенты  $\bar{m}_{ij}$ ,  $\bar{k}_{ij}$ .

Рассмотрим аэроупругие колебания крыла при действии поперечной гармонической силы  $P = P^0 e^{ikt}$ . Тогда  $q_i = q_i^0 e^{ikt}$ ,  $\dot{q}_i = ik\dot{q}_i^0 e^{ikt}$ ,  $\ddot{q}_i = -k^2 \ddot{q}_i^0 e^{ikt}$  уравнения (3.8) после сокращения на  $e^{ikt}$  записываются в виде системы линейных алгебраических уравнений с комплексными коэффициентами

$$\sum_{j=1}^s \left[ -k^2 \bar{m}_{ij} + i \frac{1}{\gamma} k \bar{d}_{ij} + \left( \frac{\bar{k}_{ij}}{\psi^2} + \frac{1}{\gamma} \bar{b}_{ij} \right) \right] q_j^0 = \frac{1}{lmU^2} P^0 a. \quad (3.10)$$

При использовании квазистационарной теории аэродинамические коэффициенты  $\bar{d}_{ij}$ ,  $\bar{b}_{ij}$  являются действительными, как и коэффициенты  $\bar{m}_{ij}$ ,

$\bar{k}_{ij}$  и поэтому в уравнениях (3.10) комплексные коэффициенты при  $q_j^0$  имеют отдельные действительные и мнимые части, и решение этих уравнений не представляет трудностей.

При использовании нестационарной теории коэффициенты  $\bar{d}_{ij}$ ,  $\bar{b}_{ij}$  являются комплексными и весьма сложным образом зависят от приведенной частоты  $k(z) = \frac{\omega b(z)}{2U}$ . В этом случае приведение уравнений (3.10) к уравнениям с отдельными действительными и мнимыми частями является весьма трудоемким и громоздким.

### **3.3. Анализ влияния нестационарности несжимаемого потока на изгибно-крутильные аэроупругие колебания крыла при гармоническом воздействии**

В качестве примера рассмотрим двухстепенную модель изгибно-крутильных колебаний консольно-закрепленного крыла с постоянными характеристиками поперечных сечений [25- 27, 29]. В разложениях (3.7) при  $s = 2$  возьмем следующие функции:

$$\begin{aligned} f_1(\xi) &= 1 - \cos \frac{\pi}{2} \xi, \quad \varphi_1(\xi) = 0, \\ f_2(\xi) &= 0, \quad \varphi_2(\xi) = \sin \frac{\pi}{2} \xi, \quad \xi = \frac{z}{l}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Здесь  $f_1(\xi)$  представляет аппроксимацию низшей собственной формы изгибных колебаний, а  $\varphi_2(\xi)$  – точное выражение низшей собственной формы крутильных колебаний балки постоянного поперечного сечения. В качестве характерного размера для относительного прогиба крыла примем  $a = b/2$ .

Уравнения (3.10) для двухстепенной модели будут иметь вид:

$$\begin{aligned}
& \left[ -\left(1 + \frac{g_3}{\gamma}\right)k^2 + i\frac{1}{2}\frac{g_1}{\gamma}k + \frac{1}{4}\frac{1}{\psi^2}\beta\frac{\kappa_{11}}{\mu_{11}} \right] \mu_{11}q_1^0 + \\
& + \left[ 2\left(\bar{x}_T + \frac{g_3}{\gamma}\bar{e}\right)k^2 - i\left(\frac{g_2^* + g_3}{\gamma}\right)k - \frac{1}{2}\frac{g_1}{\gamma} \right] \mu_{12}q_2^0 = p_1^0, \\
& \left[ 2\left(\bar{x}_T + \frac{g_3}{\gamma}\bar{e}\right)k^2 + i\frac{h_1^*}{\gamma}k \right] \mu_{12}q_1^0 + \\
& + \left[ -4\left(j - \frac{h_4^*}{\gamma}\right)k^2 - i2\left(\frac{h_2^* + h_3^*}{\gamma}\right)k + \left(\frac{1}{\psi^2}\frac{\kappa_{22}}{\mu_{22}} - \frac{h_1^*}{\gamma}\right) \right] \mu_{22}q_2^0 = 0,
\end{aligned} \tag{3.12}$$

где кроме безразмерных аэродинамических коэффициентов (3.2), которые в общем случае нестационарной теории являются комплексными используются безразмерные параметры

$$\begin{aligned}
\beta &= \frac{b^2}{l^2} \frac{EI}{GJ_k}, \quad \psi^2 = \frac{ml^2U^2}{GJ_k}, \quad p_1^0 = \frac{P^0lb}{2GJ_k} \frac{1}{\psi^2} f_1(1), \quad \mu_{11} = \int_0^1 f_1^2 d\xi = \frac{3}{2} - \frac{4}{\pi}, \\
\mu_{12} &= \int_0^1 f_1\varphi_2 d\xi = \frac{1}{\pi}, \quad \mu_{22} = \int_0^1 \varphi_2^2 d\xi = \frac{1}{2}, \quad \kappa_{11} = l^3 \int_0^1 \left( \frac{d^2 f_1}{d\xi^2} \right)^2 d\xi = \frac{\pi^4}{32}, \\
\kappa_{22} &= l \int_0^1 \left( \frac{d^2 \varphi_2}{d\xi^2} \right)^2 d\xi = \frac{\pi^2}{8}.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

При использовании нестационарной теории комплексные аэродинамические коэффициенты с учетом  $C(k) = F(k) + iG(k)$  разделяются на действительные и мнимые части и затем соответственно группируются в выражениях, записанных в квадратных скобках уравнений (3.12). Далее, решая уравнение (3.12), с комплексными коэффициентами, разделенными на действительные и мнимые части, находим обобщенные координаты в комплексном виде  $q_n^0 = q_n^{\partial} + iq_n^M = A_n(\cos \theta_n + i \sin \theta_n)$ , где

$$A_n = \sqrt{(q_n^{\partial})^2 + (q_n^M)^2}, \quad \theta_n = \arctg \frac{q_n^M}{q_n^{\partial}}; \quad n = 1, 2.$$

Для расчета примем следующие безразмерные параметры:

$$\frac{l}{b} = 5; \quad \psi^2 = 60; \quad \beta = 1; \quad \gamma = 60; \quad j = 0.05; \quad \bar{e} = 0; \quad \bar{x}_T = 0; \quad p_1^0 = 0.1.$$

На рис. 3.2, 3.3 и 3.4, 3.5 приведены зависимости от приведенной частоты  $k$  амплитуд и углов сдвига по фазе в радианах изгибной и крутильной форм вынужденных гармонических колебаний крыла в потоке. Сплошными линиями показаны результаты, полученные по нестационарной теории, а пунктирными линиями – по квазистационарной теории.

При этом влияние присоединенных масс воздуха, которое учитывается в нестационарной теории и представлено в уравнениях (3.8) коэффициентами обобщенных масс  $g_{ij}$ , весьма мало, как видно из результатов, приведенных в таблице 3.1. Графики, полученные с учетом и без учета этих коэффициентов, практически не отличаются.

$k$	Нестационарная теория с учетом присоединенных масс воздуха				Нестационарная теория без учета присоединенных масс воздуха			
	$A_1$	$\Theta_1$	$A_2$	$\Theta_2$	$A_1$	$\Theta_1$	$A_2$	$\Theta_2$
0.1	0.85	-1.4409	0.0681	0.5994	0.8535	-1.4702	0.0683	0.5696
0.2	0.2348	-0.4979	0.0404	1.4102	0.2415	-0.5121	0.0412	1.4278
0.3	0.1086	-0.3212	0.0492	0.7123	0.1113	-0.3353	0.0486	0.7674
0.4	0.0512	0.0235	0.0207	-1.2219	0.0531	0.0266	0.0223	-1.1948

Табл. 3.1. Влияние присоединенных масс воздуха.

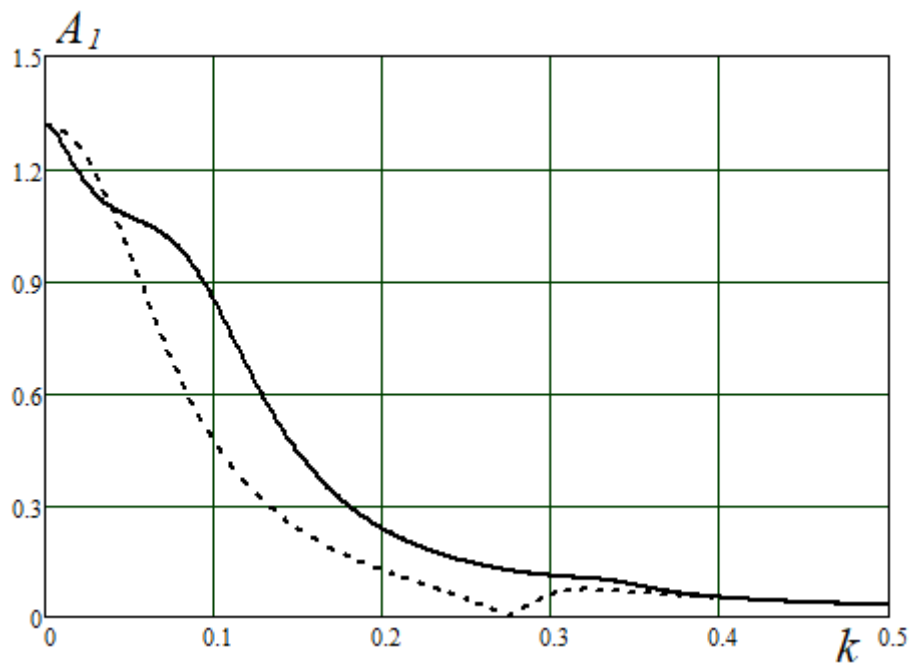


Рис. 3.2. Графики изменения амплитуды колебаний обобщенной координаты

$q_1$ .

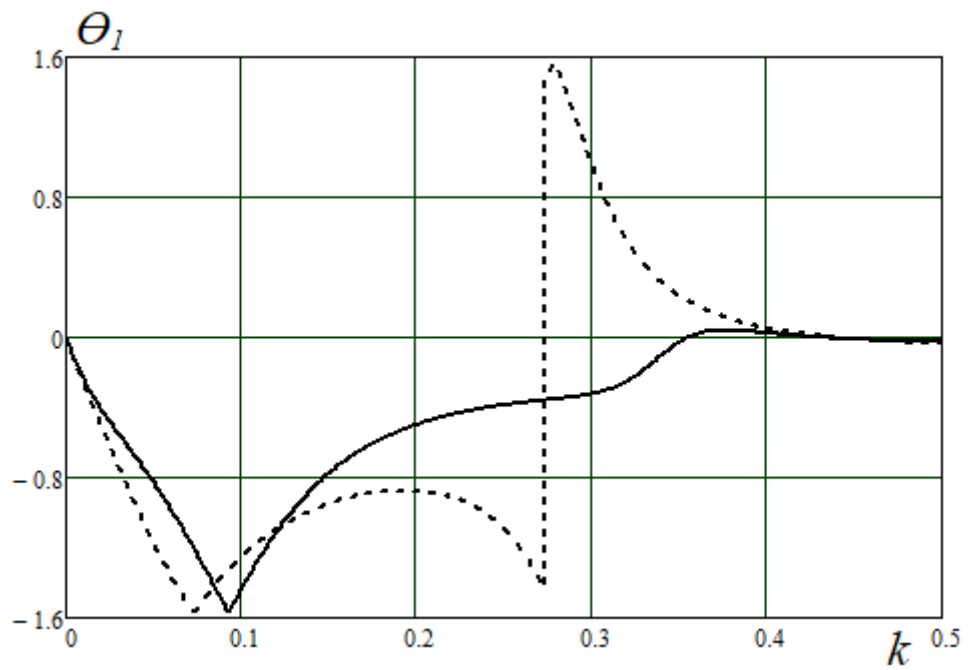


Рис. 3.3. Графики изменения угла сдвига по фазе обобщенной координаты

$q_1$ .

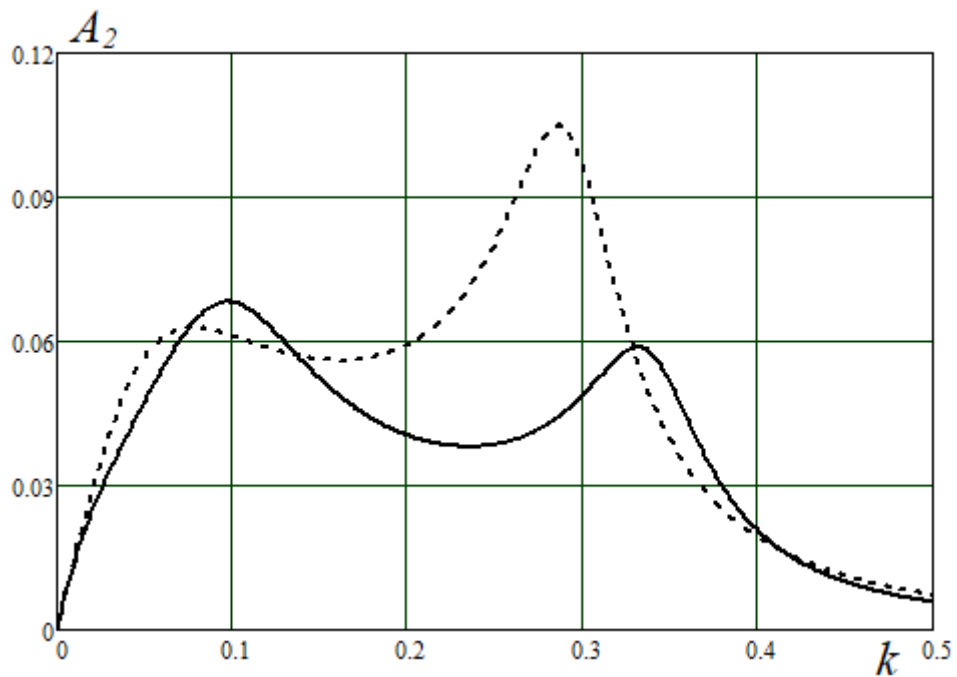


Рис. 3.4. Графики изменения амплитуды колебаний обобщенной координаты

$q_2$ .

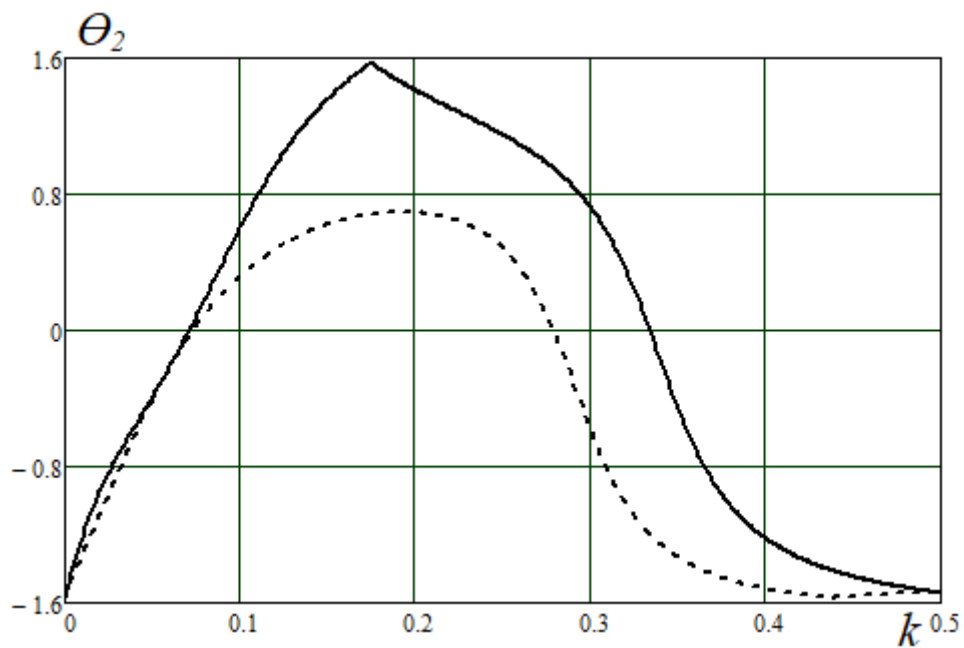


Рис. 3.5. Графики изменения угла сдвига по фазе обобщенной координаты

$q_2$ .

Графики, полученные по уточненной квазистационарной теории (с использованием аэродинамических коэффициентов (3.4)) и по обычной квазистационарной теории (с использованием коэффициентов (3.5)) также практически не отличаются друг от друга в рассматриваемом диапазоне

приведенных частот ( $0 \leq k \leq 0,5$ ), что видно по результатам, приведенным в таблице 3.2.

$k$	Квазистационарная теория				Уточненная квазистационарная теория			
	$A_1$	$\Theta_1$	$A_2$	$\Theta_2$	$A_1$	$\Theta_1$	$A_2$	$\Theta_2$
0.1	0.4745	-1.2503	0.0611	0.3205	0.4671	-1.2059	0.0602	0.3648
0.2	0.1236	-0.8785	0.0593	0.6922	0.1177	-0.8221	0.0564	0.7486
0.3	0.0593	1.005	0.0971	-0.5657	0.0633	1.1192	0.1035	-0.4515
0.4	0.0493	0.0523	0.0193	-1.5185	0.0499	0.0529	0.0195	-1.5179

Табл. 3.2. Сравнение уточненной и обычной квазистационарных теорий.

На рисунках 3.6 и 3.7 покажем на примере нестационарной теории влияние коэффициента  $\beta$  на графики изменения амплитуды колебаний обобщенных координат  $q_1$  и  $q_2$ .

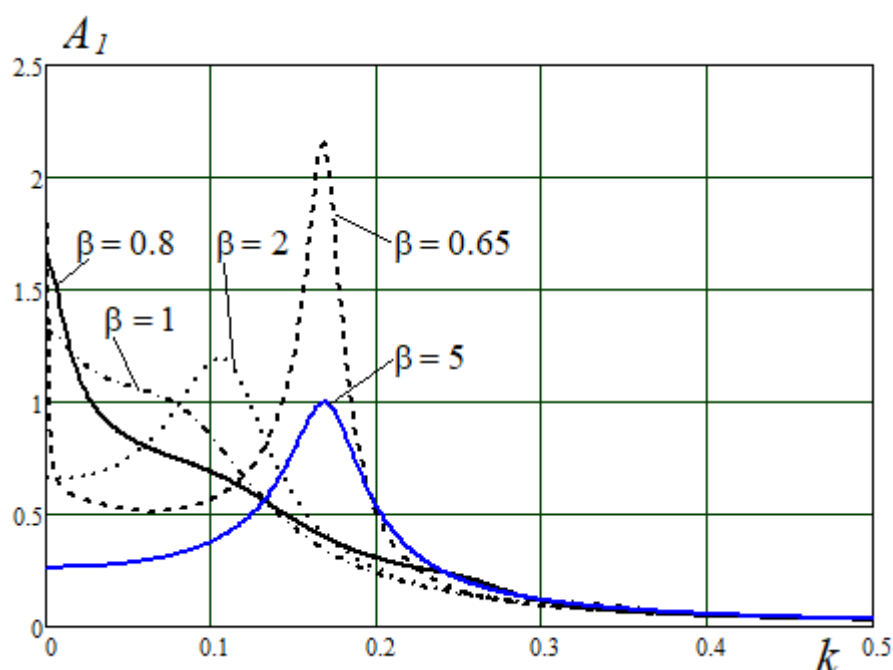


Рис. 3.6. Графики изменения амплитуды колебаний обобщенной координаты  $q_1$  при различных значениях коэффициента  $\beta$ .

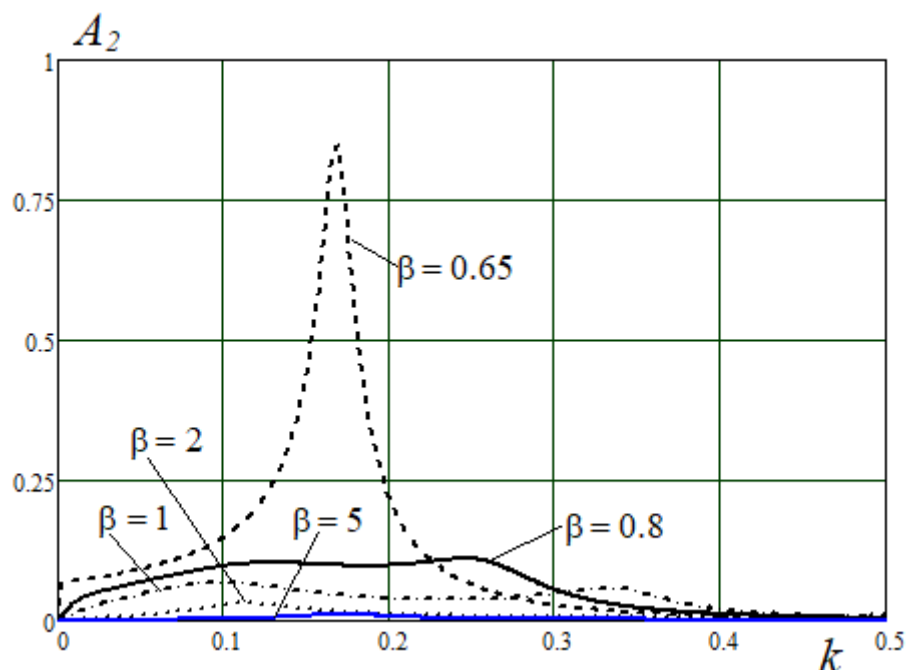


Рис. 3.7. Графики изменения амплитуды колебаний обобщенной координаты  $q_2$  при различных значениях коэффициента  $\beta$ .

### 3.4. Условия неустойчивости

Уравнения (3.9) используются для определения границ статической и динамической неустойчивости (дивергенции и флаттера). Запишем эти уравнения в матричном виде:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K} + \mathbf{B})\mathbf{q} = 0. \quad (3.14)$$

Здесь  $\mathbf{q} = \{q_i\}$  – вектор обобщенных координат размерности  $s$ ,  $\mathbf{M} = [m_{ij}]$ ,

$$\mathbf{K} = \left\{ \frac{1}{\psi^2} \bar{k}_{ij} \right\}, \quad \mathbf{D} = \left[ \frac{1}{\gamma} \bar{d}_{ij} \right], \quad \mathbf{B} = \left[ \frac{1}{\gamma} \bar{b}_{ij} \right] \quad \text{– квадратные матрицы.}$$

Для удобства решения задач о собственных значениях с помощью стандартных программ из математического обеспечения для компьютеров матричное уравнение второго порядка по времени (3.14) приводится к матричному уравнению первого порядка. Для этого наряду с вектором обобщенных координат  $\mathbf{q}$  в качестве независимых переменных



рассматриваются векторы обобщенных скоростей  $\mathbf{p} = \dot{\mathbf{q}}$ . Тогда для вектора фазовых координат  $\mathbf{r}$  будем иметь уравнение в пространстве состояний порядка  $2s$ ,

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{C}\mathbf{r} = \mathbf{0}, \quad (3.15)$$

где

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{B} + \mathbf{K} \\ -\mathbf{E} & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (3.16)$$

Для исследования устойчивости аэроупругой системы полагаем  $\mathbf{r} = \mathbf{V} e^{\lambda t}$ , где  $\mathbf{V}$  – неизвестный вектор-столбец порядка  $2s$ , а  $\lambda$  – неизвестное число. Получим однородное уравнение

$$[\lambda\mathbf{A} + \mathbf{C}]\mathbf{V} = \mathbf{0}, \quad (3.17)$$

которое представляет собой задачу для собственных значений и векторов пары действительных матриц. Так как матрица  $\mathbf{A}$  невырожденная, то уравнение (3.28) можно преобразовать к виду

$$[\mathbf{A}\mathbf{C}^{-1} + \lambda\mathbf{E}]\mathbf{V} = \mathbf{0}, \quad (3.18)$$

представляющему задачу для собственных значений и векторов матрицы  $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}$ .

Собственные значения уравнений (3.17) и (3.18) могут быть действительными ( $\lambda_v = \alpha_v$ ) и комплексными ( $\lambda_v = \alpha_v + i\beta_v$ ,  $\beta_v = \frac{\omega_v b}{2U}$ ). Если матрица  $\mathbf{C}$  действительная (в случае использования квазистационарной теории), то комплексные корни будут попарно комплексно-сопряженными ( $\lambda_v = \alpha_v + i\beta_v$ ,  $\bar{\lambda}_v = \alpha_v - i\beta_v$ ).

Для устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы вещественные части  $\alpha_v$  всех корней были отрицательны. Если имеется по крайней мере один корень с положительной вещественной частью, то система является неустойчивой. При  $\alpha_v > 0$  и  $\beta_v \neq 0$  система динамически неустойчива (флаттер), а при  $\alpha_v > 0$ ,  $\beta_v = 0$  система статически неустойчива (дивергенция). Граница устойчивости определяется из условия

$\alpha = 0$ : на границе флаттера  $\lambda = \pm i\beta$ ; на границе дивергенции  $\lambda = 0$ . Величина  $\alpha_v < 0$  характеризует запас устойчивости по  $v$ -й форме.

Критическую скорость можно определить численно, задаваясь значениями  $U$  (или безразмерного параметра  $\psi = \sqrt{\frac{ml^2U^2}{GJ_k}}$ ) в диапазоне  $U_{\min} < U < U_{\max}$  с некоторым шагом, а также – приведенной частоты  $k$  (при использовании нестационарной теории). При этих значениях  $U$  и  $k$  из уравнения (3.17) или (3.18) с использованием стандартной программы определяются собственные значения  $\lambda_v = \alpha_v + i\beta_v$ . Если при очередном увеличении  $U$  при фиксированном значении  $k$  у какого-либо  $\lambda_v$  значение  $\alpha_v$  меняет знак, то это означает, что в данном интервале находится критическая скорость флаттера  $U_\phi$ . Расчеты можно начать, используя квазистационарную аэродинамическую теорию при  $k = \frac{\omega b}{2U} \rightarrow 0$  (т.к.  $\omega_v t = \beta_v \tau$ , то  $k = |\beta_v|$ ). Затем при уточнении  $U_\phi$  путем деления этого интервала на более мелкие можно использовать нестационарную теорию при гармонических колебаниях с приведенной частотой  $k = \beta_v$  того корня  $\lambda_v = \alpha_v + i\beta_v$ , у которого  $\alpha_v \approx 0$ . Для минимизации  $\alpha_v$  на  $U$  и  $k$  можно использовать метод итераций.

### 3.4.1. Определение границ дивергенции и флаттера для двухстепенной модели

Двухстепенная расчетная модель часто используется для приближенных расчетов границ неустойчивости, поскольку она позволяет получать результаты в виде формул, на основании которых несложно исследовать влияние различных параметров конструкции на критическую скорость [31].

Воспользуемся уравнениями (3.12), которые были получены для

гармонических колебаний двухстепенной модели крыла.

Характеристическое уравнение однородной системы уравнений колебаний запишется в виде (3.19):

$$\begin{vmatrix} \left[ -\left(1 + \frac{g_3}{\gamma}\right)k^2 + i\frac{1}{2}\frac{g_1}{\gamma}k + \frac{1}{4}\frac{\beta}{\psi^2}\frac{\kappa_{11}}{\mu_{11}} \right] \mu_{11} & \left[ 2(\bar{x}_T + \frac{g_3}{\gamma}\bar{e})k^2 - i\left(\frac{g_2^* + g_3}{\gamma}\right)k - \frac{1}{2}\frac{g_1}{\gamma} \right] \mu_{12} \\ \left[ 2(\bar{x}_T + \frac{g_3}{\gamma}\bar{e})k^2 + i\frac{h_1^*}{\gamma}k \right] \mu_{12} & \left[ -4\left(j - \frac{h_4^*}{\gamma}\right)k^2 - i2\left(\frac{h_2^* + h_3^*}{\gamma}\right)k + \left(\frac{1}{\psi^2}\frac{\kappa_{22}}{\mu_{22}} - \frac{h_1^*}{\gamma}\right) \right] \mu_{22} \end{vmatrix} = 0$$

Раскрывая определитель, получаем:

$$(a_4 k^4 - a_2 k^2 + a_0) + ik(a_3 k^2 - a_1) = 0, \quad (3.20)$$

где

$$a_4 = 4(\gamma + g_3)(j\gamma - h_4^*)\mu_{11}\mu_{22} - 4\mu_{12}^2(\gamma\bar{x}_T + g_3\bar{e})^2,$$

$$a_3 = 2\mu_{11}\mu_{22}[(\gamma + g_3)(h_2^* + h_3^*) - g_1(j\gamma - h_4^*)] - 2\mu_{12}^2(\gamma\bar{x}_T + g_3\bar{e})[h_1^* + (g_2^* + g_3)],$$

$$a_2 = (\gamma + g_3)\mu_{11}\left(\frac{\gamma}{\psi^2}\kappa_{22} - h_1^*\mu_{22}\right) - g_1\mu_{11}\mu_{22}(h_2^* + h_3^*) + \frac{\gamma\beta}{\psi^2}\kappa_{11}\mu_{22}(j\gamma - h_4^*) + \mu_{12}^2[(g_2^* + g_3)h_1^* - g_1(\gamma\bar{x}_T + g_3\bar{e})],$$

$$a_1 = -\frac{1}{2}g_1\mu_{11}\left(\frac{\gamma}{\psi^2}\kappa_{22} - \mu_{22}h_1^*\right) + \frac{1}{2}\frac{\gamma\beta}{\psi^2}\kappa_{11}\mu_{22}(h_2^* + h_3^*) - \frac{1}{2}g_1h_1^*\mu_{12}^2,$$

$$a_0 = \frac{1}{4}\frac{\gamma\beta}{\psi^2}\kappa_{11}\left(\frac{\gamma}{\psi^2}\kappa_{22} - \mu_{22}h_1^*\right).$$

Полагая в уравнении (3.20)  $k = 0$ , находим границу дивергенции:

$$\frac{\gamma}{\psi^2}\frac{\kappa_{22}}{\mu_{22}} - h_1^* \Big|_{k=0} = 0. \quad (3.21)$$

При  $\psi_{div}^2 = \frac{\kappa_{22}}{\gamma\mu_{22}}\frac{1}{h_1^*} \Big|_{k=0}$  происходит крутильная дивергенция крыла.

В данном случае (3.2)  $h_1^* \Big|_{k=0} = \frac{\pi}{2} - \bar{e}2\pi$  и  $\psi_{div}^2 = \frac{\pi}{8\gamma\left(\frac{1}{4} - \bar{e}\right)}$ . Для

выполнения условия статической устойчивости крыла в потоке необходимо,

чтобы  $\psi^2 < \psi_{div}^2$ .

Для определения границы флаттера надо приравнять к нулю действительную и мнимую часть уравнения (3.20). Из условия равенства нулю мнимой части определяется критическая приведенная частота  $k_{\phi l}$ . Затем  $k_{\phi l}$  подставляем в условие равенства нулю действительной части, и из этого уравнения определяется критическое значение параметра  $\psi_{\phi l}$ .

Так как в случае нестационарной теории коэффициенты, входящие в выражения  $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4$  являются комплексными и зависят от  $k$ , то для определения границы флаттера можно использовать метод итерации. В первом приближении коэффициенты вычисляются по квазистационарной теории, то есть  $k = 0$ .

Тогда  $k^{(1)2} = \frac{a_1}{a_3} \Big|_{k=0}$ , а  $\psi^{(1)}_{\phi l}$  определяется из уравнения

$$a_1^2 a_4 - a_1 a_2 a_3 + a_0 a_3^2 = 0,$$

где

$$a_4 = 4\gamma(j\gamma\mu_{11}\mu_{22} - \mu_{12}^2 \bar{x}_T),$$

$$a_3 = -4\pi\gamma\mu_{11}\mu_{22}(\bar{e}^2 + j),$$

$$a_2 = \mu_{11}\mu_{22}[\gamma(\frac{\pi}{2} - 2\pi\bar{e}) - \bar{e}^2 4\pi^2] - \mu_{12}^2(\frac{\pi^2}{4} - \bar{e}^2 4\pi^2 + 2\pi\gamma\bar{x}_T^2) - \gamma\mu_{11} \frac{\gamma}{\psi^2} \kappa_{22} - \frac{\gamma\beta}{\psi^2} \kappa_{11}\mu_{22}j\gamma,$$

$$a_1 = \pi(\frac{\pi}{2} - 2\pi\bar{e})(\mu_{12}^2 - \mu_{11}\mu_{22}) + \pi\mu_{11}\kappa_{22} \frac{\gamma}{\psi^2} + \pi\bar{e}\mu_{22}\kappa_{11} \frac{\gamma\beta}{\psi^2},$$

$$a_0 = \frac{1}{4} \frac{\gamma^2\beta}{\psi^4} \kappa_{11}\kappa_{22} - \frac{1}{4} \frac{\gamma\beta}{\psi^2} \kappa_{11}\mu_{22}(\frac{\pi}{2} - \bar{e}2\pi).$$

Для примера, приведенного в разделе 3.3. будем иметь:

$$k^{(1)}_{\phi l} = 9.963 \times 10^{-3} \text{ и } \psi^{(1)}_{\phi l} = \sqrt{\frac{1}{0.065}} = 3.9223.$$

Итерационный процесс вычисления продолжается до выполнения

условий:

$$\left| k_{\phi_l}^{(i)} - k_{\phi_l}^{(i-1)} \right| < \varepsilon \text{ и } \left| \psi_{\phi_l}^{(i)} - \psi_{\phi_l}^{(i-1)} \right| < \varepsilon \text{ на } i\text{-ом шаге вычислений.}$$

Таким образом по нестационарной теории получим:  $k_{\phi_l} = 0.83$ ,  
 $\psi_{\phi_l} = 1.5523$ .

На рис. 3.8 и 3.9 приведены графики зависимости действительных и мнимых частей корней (собственных значений) характеристического уравнения. Аэродинамические коэффициенты вычислялись для приведенной частоты  $k = k_{\phi_l}$ .

На рисунке видно, что действительная часть одного из корней пересекает ось  $\alpha_v = 0$  при  $\psi_{\phi_l}^2 = 13.943$ .

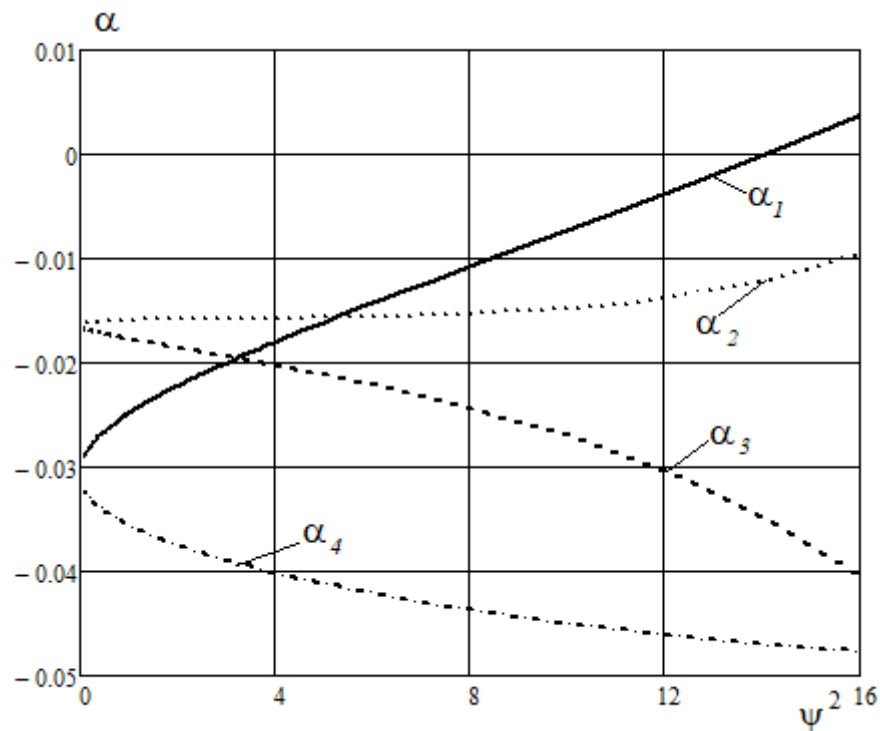


Рис. 3.8. Графики действительных частей собственных значений

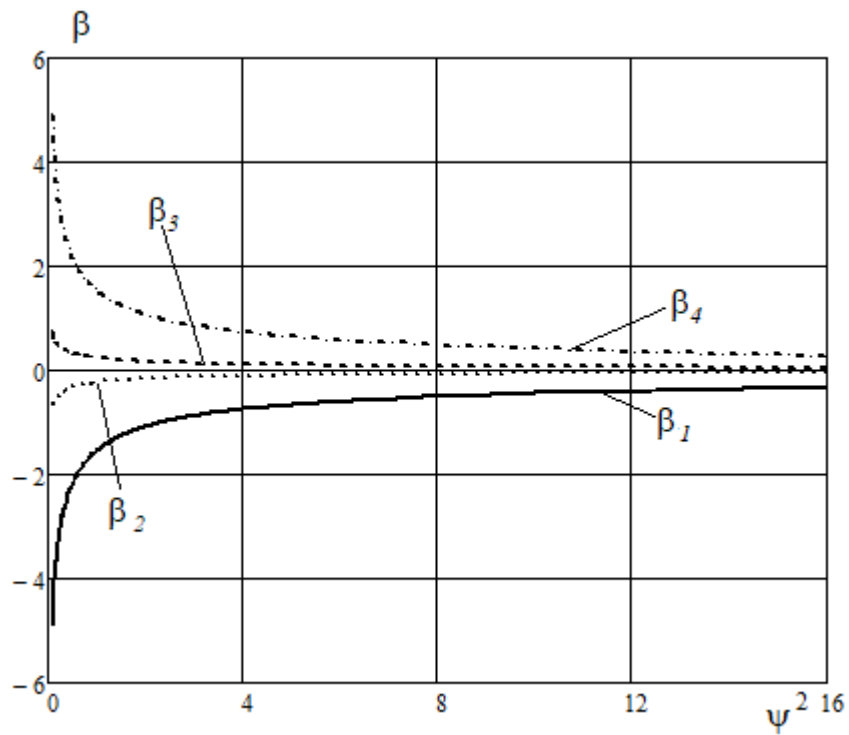


Рис. 3.9. Графики мнимых частей собственных значений

### 3.4.2. Определение границ неустойчивости для многостепенной модели

В качестве примера рассмотрим изгибно-крутильные колебания консольно закрепленного крыла с постоянными характеристиками поперечных сечений [30]. В качестве заданных функций в разложениях (3.7) будем использовать несвязанные собственные формы изгибных и крутильных колебаний консольной балки постоянного поперечного сечения:

$$f_i(\xi) = A_i \left[ U(\mu_i \xi) - \frac{V(\alpha_i)}{S(\alpha_i)} V(\mu_i \xi) \right], \quad \varphi_i(\xi) = 0, \quad i = 1, \dots, p; \quad (3.22)$$

$$f_j(\xi) = 0, \quad \varphi_j(\xi) = \sin v_{j-p} \xi, \quad \xi = \frac{z}{l}, \quad j = p + 1, \dots, s,$$

где

$$U(\mu_i \xi) = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} \mu_i \xi - \cos \mu_i \xi), \quad V(\mu_i \xi) = \frac{1}{2}(\operatorname{sh} \mu_i \xi - \sin \mu_i \xi),$$

$$S(\mu_i) = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}\mu_i + \cos\mu_i); \quad A_i \left[ U(\mu_i) - \frac{V^2(\mu_i)}{S(\mu_i)} \right] = 1;$$

$$\mu_i - \text{корни уравнения } \cos\mu + \frac{1}{\operatorname{ch}\mu} = 0;$$

$$\mu_1 = 1.875, \quad \mu_2 = 4.694, \quad \mu_3 = 7.855, \quad \mu_4 = 10.996, \quad \mu_5 = 14.13717;$$

$$v_i = \frac{2i-1}{2}\pi; \quad \omega_{i,\text{изг.}}^2 = \mu_i^4 \frac{EI}{ml^4}, \quad \omega_{i,\text{кр.}}^2 = v_i^2 \frac{GJ_k}{Jl^2}.$$

Для расчета были приняты следующие значения безразмерных параметров:

$$\frac{l}{b} = 5; \quad \beta = 0.1; \quad \gamma = 60; \quad j = 0.05; \quad \bar{e} = 0; \quad \bar{x}_T = 0.0 \text{ и } \bar{x}_T = -0.01.$$

При расчетах, когда аэродинамическая нагрузка определялась по квазистационарной и уточненной квазистационарной теориям матрицы коэффициентов в уравнении колебаний (3.14) являются действительными, и, следовательно, собственные значения получаются комплексно-сопряженными числами ( $\lambda_k = \alpha_k \pm i\beta_k$ ). Если при расчетах используется нестационарная теория, то матрицы коэффициентов содержат комплексные числа и собственные значения получаются также комплексными числами; при этом они не являются комплексно-сопряженными.

В таблицах 3.3, 3.4 приведены значения безразмерного параметра  $\psi$ , характеризующего скорость полета, и мнимые части собственных значений на границе флаттера при различном числе аппроксимирующих функций для трех вариантов определения аэродинамических коэффициентов (по формулам (3.3)-(3.5)): таблица 3.3 – для  $\bar{x}_T = 0$ ; и таблица 3.4 –  $\bar{x}_T = -0.01$ .

При вычислениях с использованием нестационарной теории динамическая неустойчивость (флаттер) происходит по форме, которая соответствует собственному значению с отрицательной мнимой частью. Собственные значения с отрицательной мнимой частью отмечены символом «~»

$$\tilde{\lambda}_k = \tilde{\alpha}_k - i\tilde{\beta}_k.$$

Число аппроксимирующих функций (изгиб, кручение)			(2,1)	(3,2)	(4,3)	(5,4)
Квазистационарная теория		$\psi$	2.9593	2.9609	2.9610	2.9610
		$\beta_2$	1.13195	1.13131	1.13127	1.13127
Уточненная квазистационарная теория	Без учета присоедине нных масс воздуха	$\psi$	3.5184	3.5257	3.5262	3.5262
		$\beta_2$	1.02642	1.02360	1.02343	1.02342
	С учетом присоедине нных масс воздуха	$\psi$	3.5184	3.5257	3.5262	3.5262
		$\beta_2$	0.93319	0.93098	0.93086	0.93085
Нестационарная теория	Без учета присоедине нных масс воздуха	$\psi$	5.1452	5.1485	5.1487	5.1486
		$k$	0.63159	0.63111	0.63109	0.63109
		$ \tilde{\beta}_2 $	0.63159	0.63111	0.63109	0.63109
	С учетом присоедине нных масс воздуха	$\psi$	5.1344	5.1379	5.1381	5.1381
		$k$	0.62784	0.62733	0.62730	0.62730
		$ \tilde{\beta}_2 $	0.62784	0.62733	0.62730	0.62730

Табл. 3.3.



Число аппроксимирующих функций (изгиб, кручение)			(2,1)	(3,2)	(4,3)	(5,4)
Квазистационарная теория		$\psi$	3.4646	3.4787	3.4795	3.4795
		$\beta_2$	0.95049	0.94615	0.94589	0.94588
Уточненная квазистационарная теория	Без учета присоединенных масс воздуха	$\psi$	3.8507	3.8695	3.8706	3.8706
		$\beta_2$	0.84235	0.83757	0.83729	0.83729
	С учетом присоединенных масс воздуха	$\psi$	4.0532	4.0725	4.0736	4.0736
		$\beta_2$	0.79266	0.78821	0.78795	0.78795
Нестационарная теория	Без учета присоединенных масс воздуха	$\psi$	5.3894	5.3935	5.3938	5.3938
		$k$	0.59879	0.59820	0.59815	0.59815
		$ \tilde{\beta}_2 $	0.59879	0.59820	0.59815	0.59815
	С учетом присоединенных масс воздуха	$\psi$	5.3674	5.3721	5.3724	5.3724
		$k$	5.3724	0.59583	0.59578	0.59577
		$ \tilde{\beta}_2 $	0.59649	0.59583	0.59578	0.59578

Табл. 3.4.

В таблицах 3.5, 3.6 приведены результаты расчетов по нестационарной теории с учетом присоединенных масс воздуха на нескольких шагах итерации: таблица 3.5 – для  $\bar{x}_T = 0$ ; таблица 3.6 – для  $\bar{x}_T = -0.01$ . Здесь на первом шаге итерации считалось, что приведенная частота равна нулю.

Номер шага итерации	Число аппроксимирующих функций: 2+1			Число аппроксимирующих функций: 3+2		
	$\psi$	$k = \frac{\omega b}{2U}$	$ \beta_2 $	$\psi$	$k = \frac{\omega b}{2U}$	$ \beta_2 $
1	3.3387	0	0.98227	3.3464	0	0.97975
2	6.3113	0.98227	0.49120	6.3092	0.97975	0.49140
3	4.5844	0.49120	0.71358	4.5910	0.49140	0.71241
10	5.1415	0.62972	0.62684	5.1449	0.62920	0.62635
11	5.1305	0.62684	0.62839	5.1341	0.62635	0.62786
12	5.1364	0.62839	0.62756	5.1399	0.62786	0.62705

Табл. 3.5.

Номер шага итерации	Число аппроксимирующих функций: 2+1			Число аппроксимирующих функций: 3+2		
	$\psi$	$k = \frac{\omega b}{2U}$	$ \beta_2 $	$\psi$	$k = \frac{\omega b}{2U}$	$ \beta_2 $
1	3.9125	0	0.81989	3.9313	0	0.81529
2	6.2155	0.81989	0.50142	6.2065	0.81529	0.50225
3	4.9572	0.50142	0.65305	4.9688	0.50225	0.65128
10	5.3726	0.59773	0.59583	5.3770	0.59702	0.59520
11	5.3647	0.59583	0.59684	5.3695	0.59520	0.59616
12	5.3689	0.59684	0.59630	5.3735	0.59616	0.59565

Табл. 3.6.

На рисунках 3.10, 3.11 приведены графики изменения действительной части собственного значения  $\lambda_2 = \alpha_2 + i\beta_2$  для пяти аппроксимирующих

функций (3 функции, аппроксимирующие изгибные формы и 2 – крутильные): рисунок 3.9 – для  $\bar{x}_T = 0$ ; рисунок 3.10 – для  $\bar{x}_T = -0.01$ . График 1 соответствует расчету с использованием квазистационарной теории (формулы (3.5)); графики 2 и 3 – уточненной квазистационарной теории (формулы (3.4)) без учета присоединенных масс воздуха и с учетом, соответственно; графики 4 и 5 – нестационарной теории (формулы 3.3)) без учета присоединенных масс воздуха и с учетом, соответственно. При вычислении по нестационарной теории значение приведенной частоты при  $\bar{x}_T = 0$  бралось равным 0.627, а при  $\bar{x}_T = -0.01$  – 0.595. Эти значения близки к значениям приведенных частот на границе флаттера.

На рисунках 3.12, 3.13 приведены графики изменения действительных и мнимых частей собственных значений  $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$ , полученных при расчете по уточненной квазистационарной теории для пяти аппроксимирующих функций (3 функции аппроксимирующие изгибные формы и 2 – крутильные) для  $\bar{x}_T = 0$ .

На рисунках 3.14 и 3.15 приведены аналогичные результаты расчетов для  $\bar{x}_T = -0.01$ .

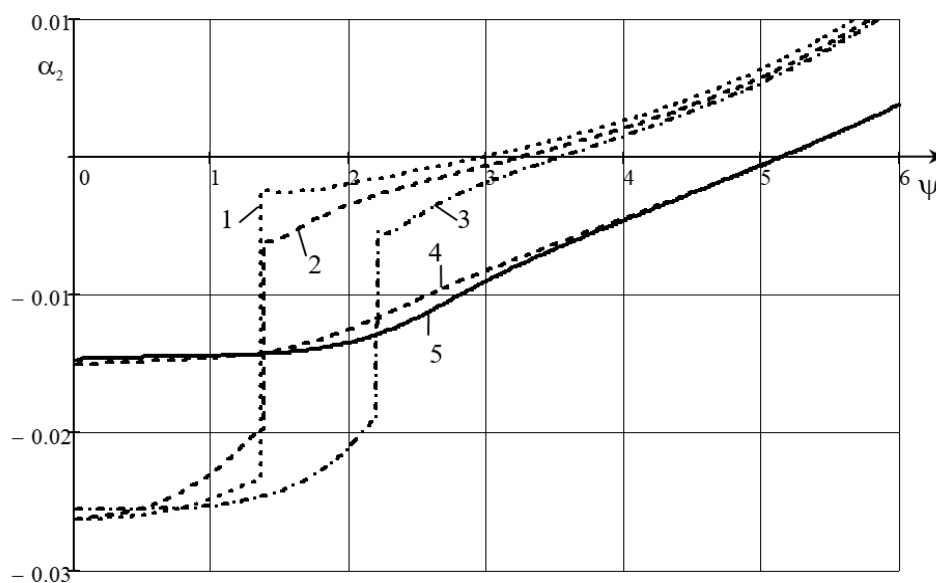


Рис. 3.10. Графики изменения действительных частей собственного значения  $\lambda_2$ , для различных вариантов вычисления аэродинамической нагрузки ( $\bar{x}_T = 0$ )

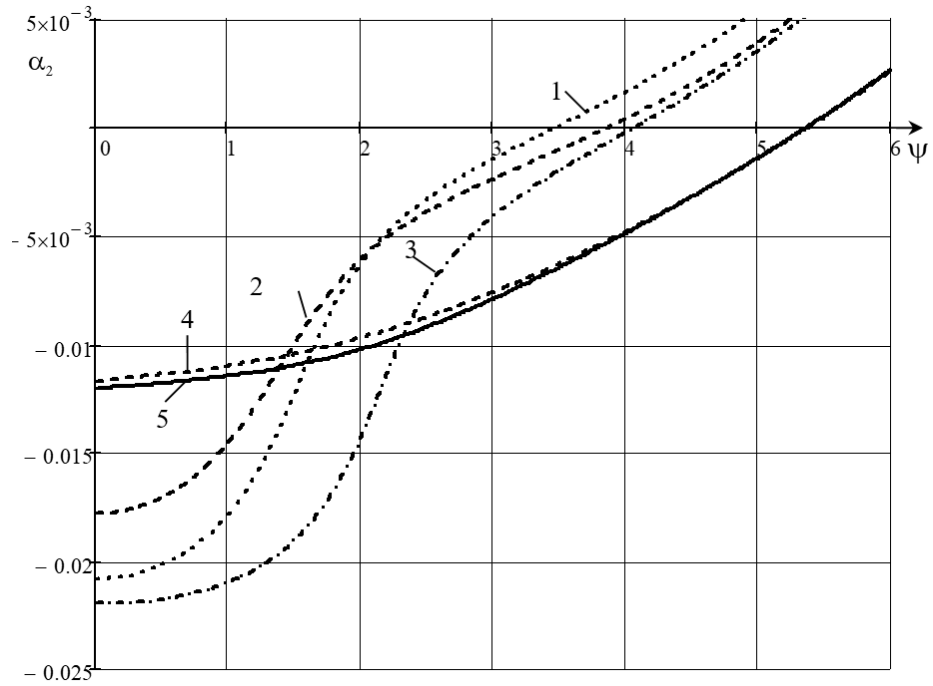


Рис. 3.11. Графики изменения действительных частей собственного значения  $\lambda_2$ , для различных вариантов вычисления аэродинамической нагрузки ( $\bar{x}_T = -0.01$ )

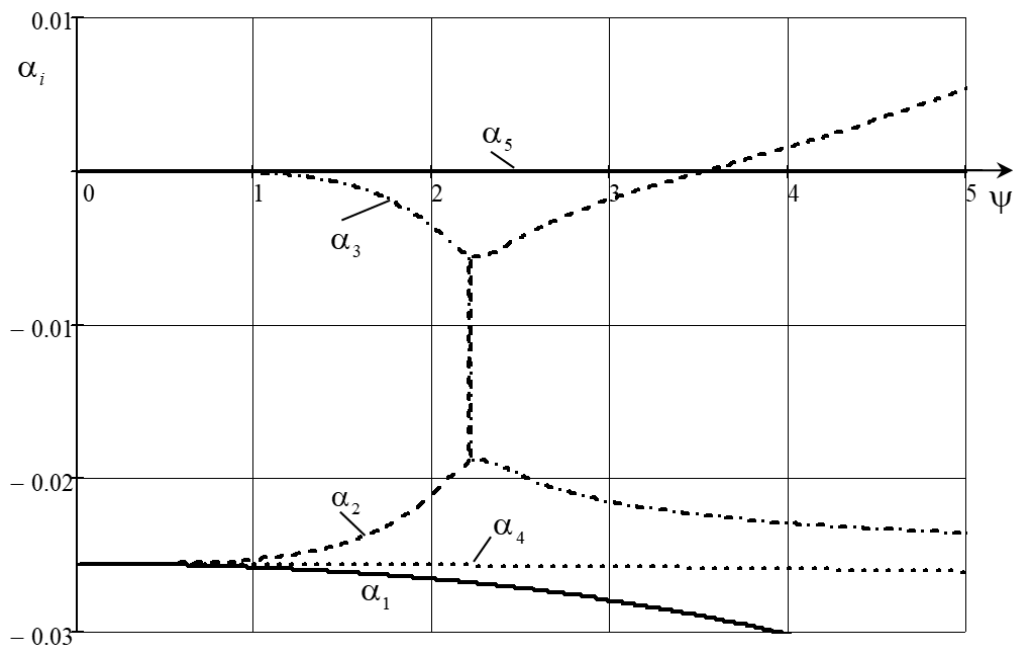


Рис. 3.12. График изменения действительных частей собственных значений (аэродинамические нагрузки определялись по уточненной квазистационарной теории при  $\bar{x}_T = 0$ ).

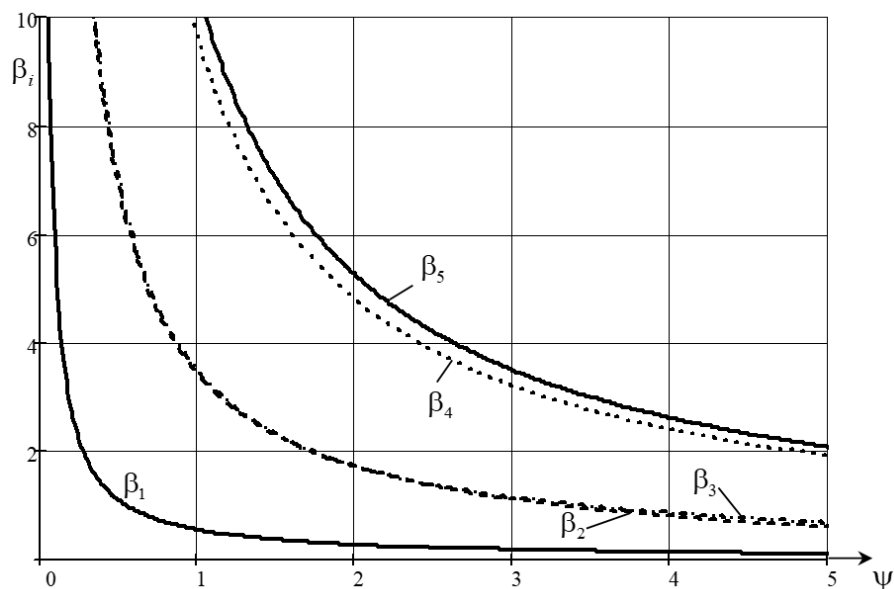


Рис. 3.13. График изменения мнимых частей собственных значений (аэродинамические нагрузки определялись по уточненной квазистационарной при  $\bar{x}_T = 0$ ).

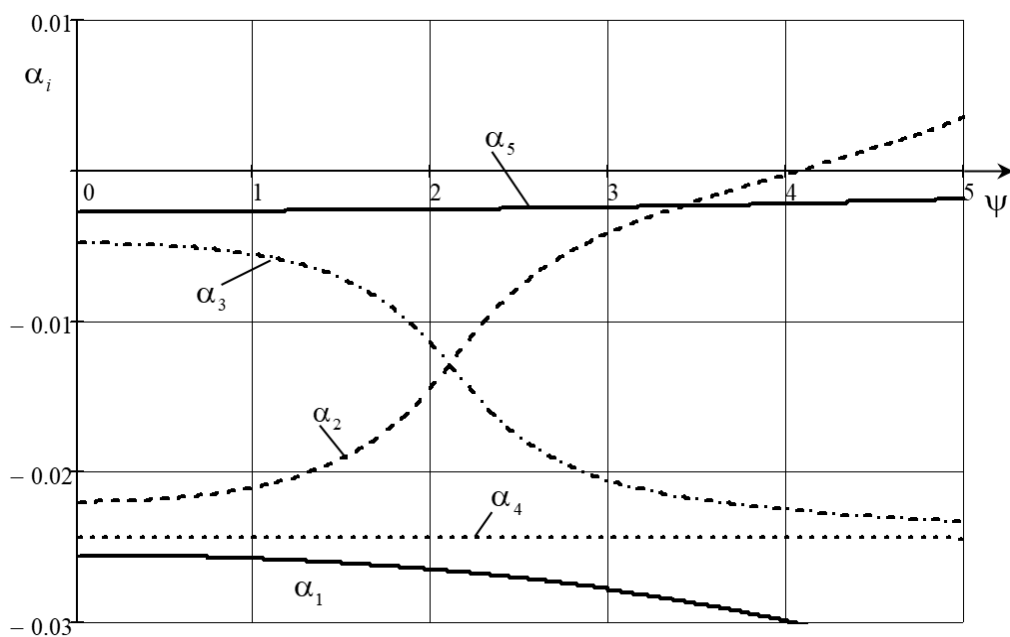


Рис. 3.14. График изменения действительных частей собственных значений (аэродинамические нагрузки определялись по уточненной квазистационарной теории при  $\bar{x}_T = -0.01$ ).

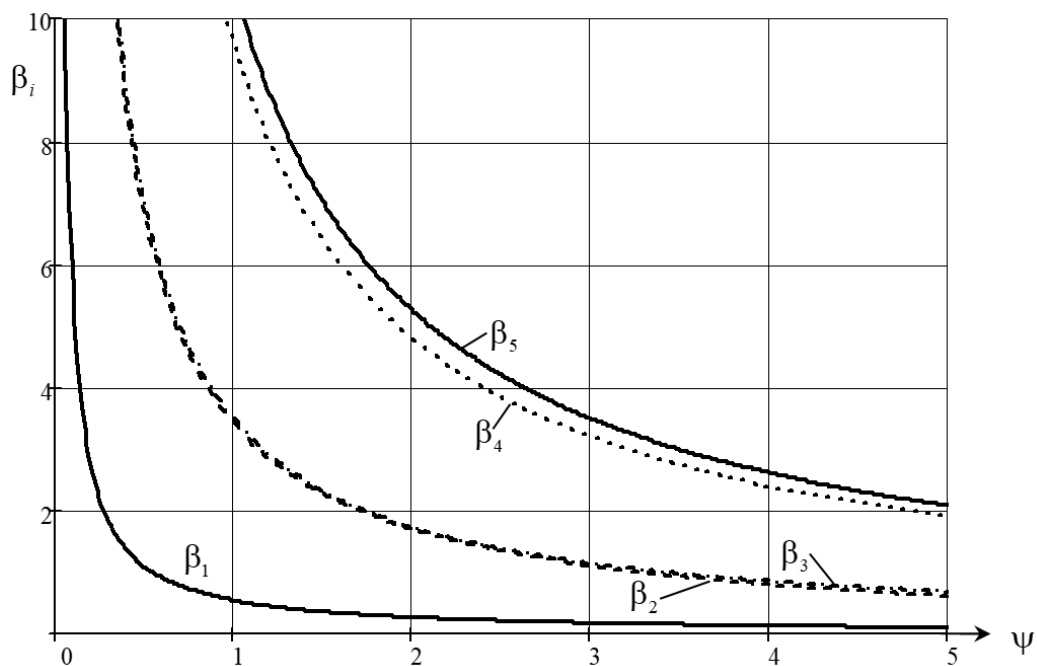


Рис. 3.15. График изменения мнимых частей собственных значений (аэродинамические нагрузки определялись по уточненной квазистационарной при  $\bar{x}_T = -0.01$ ).

На рисунках 3.16, 3.17 приведены графики изменения действительных и мнимых частей собственных значений  $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$ , полученных при расчете по нестационарной теории для пяти аппроксимирующих функций (3 функции, аппроксимирующие изгибные формы и 2 – крутильные): рисунок 3.16 – при  $\bar{x}_T = 0$ , рисунок 3.17 – при  $\bar{x}_T = -0.01$ .

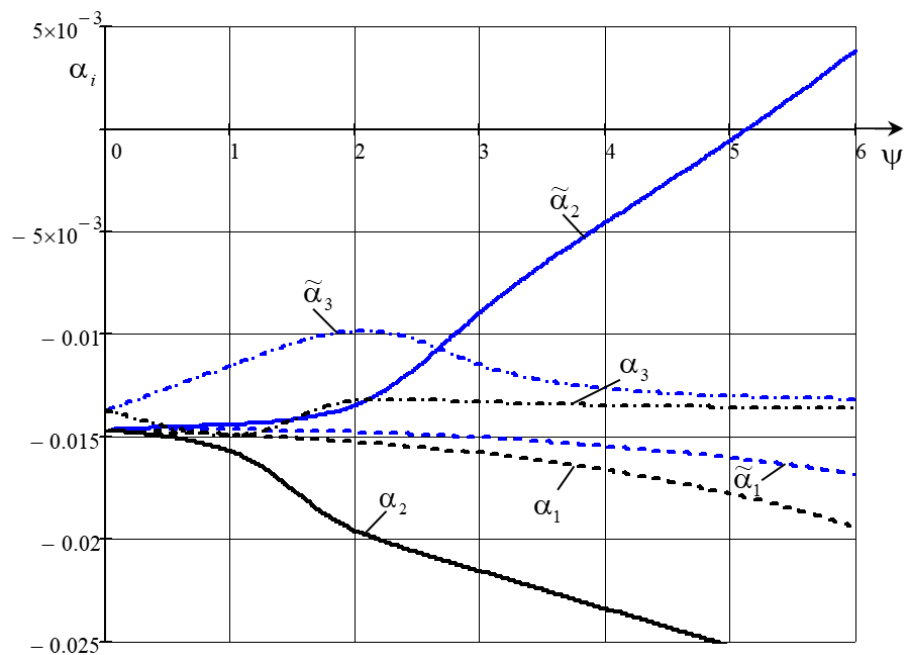


Рис. 3.16. График изменения действительных частей собственных значений (аэродинамические нагрузки определялись по нестационарной теории при  $\bar{x}_T = 0$ ).

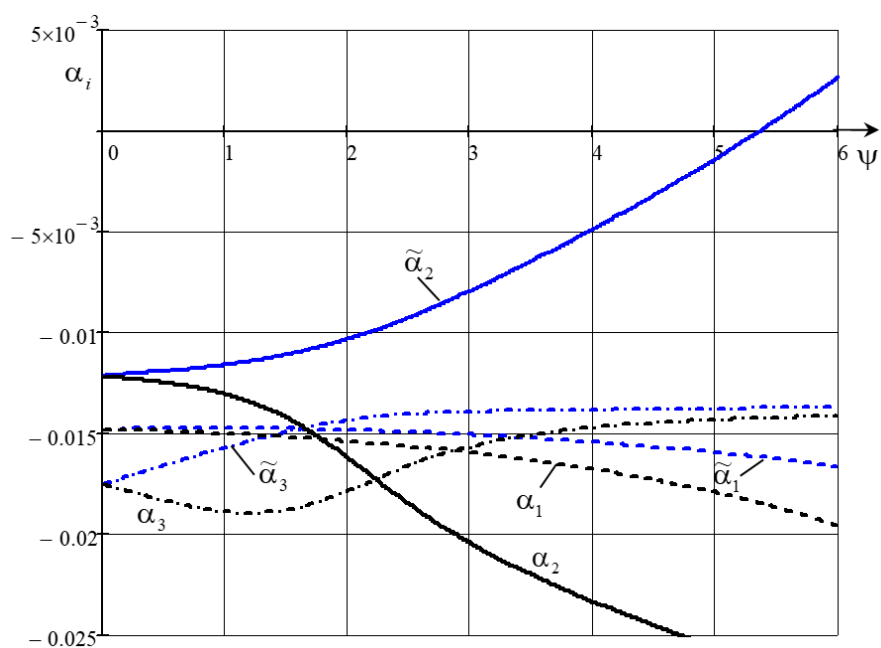


Рис. 3.17. График изменения действительных частей собственных значений (аэродинамические нагрузки определялись по нестационарной теории при  $\bar{x}_T = -0.01$ ).

Полученные результаты позволяют сделать вывод, что при использовании квазистационарной и уточненной квазистационарной теорий для определения аэродинамических нагрузок, значения критической скорости флаттера получаются меньше, чем при расчетах по нестационарной теории. Также показано, что при определении границы флаттера можно не учитывать влияние присоединенных масс воздуха.



## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

### Основные результаты диссертационной работы

1. Разработаны математические модели и решена задача аэродинамического нагружения и аэроупругих колебаний в дозвуковом квазистационарном потоке тонкого упругого профиля крыла большого удлинения, совершающего изгибно-крутильные колебания. Модели построены на основе метода Ритца и метода конечных элементов.

2. На основе метода конечных элементов разработана математическая модель профиля крыла типа «рыбий хвост» с управлением аэродинамическими характеристиками упругих профилей крыла путем натяжения их верхней или нижней обшивки.

3. Получены распределения аэродинамической нагрузки по хорде деформируемого профиля и значения квазистационарных аэродинамических коэффициентов подъемной силы и момента тангажа с учетом упругих деформаций хвостиков профилей.

4. Проведен сравнительный анализ расчетов по определению границы динамической устойчивости (флаттера) крыла большого удлинения, полученных при использовании нестационарной и квазистационарной аэродинамических теорий обтекания профилей.

5. Выполнены численные исследования влияния деформаций изгиба и поперечного сдвига упругого хвостика для двух вариантов профиля крыла на их аэродинамические характеристики.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Амирьянц Г.А. *Теоретическое определение влияния упругости и распределения масс конструкции на некоторые аэродинамические характеристики самолёта в квазиустановившемся движении.* // Уч. записки ЦАГИ. – 1976. – Т.10, № 1. – С. 55-63.
- [2] Амирьянц Г.А., Буньков В.Г. *Применение метода многочленов к расчету параметров установившегося маневра упругого самолета* // Уч. записки ЦАГИ. – 1976. – Т.7, № 4. – С. 88-94.
- [3] Амирьянц Г.А., Пархомовский Я.М. *О влиянии упругости конструкции на стационарные аэродинамические характеристики самолётов* // Тр. Сопевания советско-французской подгруппы по аэродинамике, авиационной акустики и прочности. – Париж, 1980. –22с.
- [4] Амирьянц Г.А., Токаръ В.Л. *О критической скорости дивергенции.* // Уч. записки ЦАГИ. – 1995. – Т. 26 № 3. – С. 147-154.
- [5] Афанасьева И.Н., Ланцова И.Ю. *Моделирование двумерного нестационарного обтекания гибкой упругой конструкции в связанной постановке. Часть 1: верификация методики численного моделирования поведения жидкости* // International Journal of Computational Civil and Structural Engineering, Volume 10, Issue 3 – г. Москва, 2014 г., стр. 23-32.
- [6] Афанасьева И.Н., Ланцова И.Ю. *Моделирование двумерного нестационарного обтекания гибкой упругой конструкции в связанной постановке. Часть 2: верификация методики численного моделирования связанной задачи аэрогидроупругости* // International Journal of Computational Civil and Structural Engineering, Volume 10, Issue 3 – г. Москва, 2014 г., стр. 33-39.
- [7] Афанасьева И.Н. *Моделирование двумерного нестационарного обтекания гибкой упругой конструкции в связанной постановке. Часть 3: верификация методики численного моделирования поведения гибкой упругой конструкции*

// International Journal of Computational Civil and Structural Engineering, Volume 10, Issue 3 – г. Москва, 2014 г., стр. 40-48.

[8] Баранов Н.И., Нуштаев П.Д., Нуштаев Ю.П. *Флаттер органов управления самолетов и ракет.* – М.: «Русавиа», 2003. – 360 с.

[9] Безуевский А.В., Ишмуратов Ф.З. *Влияние квазистатических деформаций на характеристики аэроупругости самолета с крылом большого удлинения* // Вестник Московского авиационного института. – 2018. – том 24. – № 4. – С. 14-23.

[10] Белоцерковский С.М., Скрипач Б.К., Табачников В.Г. *Крыло в нестационарном потоке газа.* – М.: Изд-во «Наука», Физматлит, 1971. – 768 с.

[11] Белоцерковский С.М., Скрипач Б.К. *Аэродинамические производные летательного аппарата и крыла при дозвуковых скоростях.* – М.: Изд-во «Наука», Физматлит, 1975. – 424 с.

[12] Бисплингхофф Р.Л., Эшли Х., Халфмен Р.Л. *Аэроупругость.* – М.: Изд-во иностранной литературы, 1958. – 800 с. (перевод с англ. Bisplinghoff R.L., Ashley H., Halfman R.L. *Aeroelasticity.* Addison-Wesley Publishing Company, Inc. Cambridge, Mass. 1955. )

[13] Благодырёва О.В. *Применение метода Рунца и метода конечных элементов к расчету аэроупругих колебаний крылатой ракеты* // Труды МАИ. – 2017. – № 95. – С. 7.

[14] Брутян М.А. *Влияние пассивной адаптации формы профиля на его аэродинамические характеристики при малых скоростях* // Фундаментальные и прикладные исследования: проблемы и результаты. 2014. № 11. – С. 155-160.

[15] Брутян М.А., Крапивский П.Л. *Теория тонкого деформируемого профиля* // Труды ЦАГИ. – 1983. – Вып. 2216. – С. 3-21.

[16] Буньков В.Г., Ишмуратов Ф.З., Мосунов В.А. *Решение некоторых задач аэроупругости на основе современной версии полиномиального метода Рунца* // Труды ЦАГИ. – 2004. – вып. 2664.

- [17] Вождаев В.В., Теперин Л.Л., Чан Ван Хынг. *Метод определения жесткостных характеристик аэроупругих моделей крыльев большого удлинения* // *Авиационная промышленность*. – 2014. – № 3. – С. 4-12
- [18] Гаррик И.Э. *Нестационарные характеристики крыла. В кн. «Аэродинамика частей самолета при больших скоростях»*. (Перевод с англ.). – М.: Изд-во иностр. лит., 1959. – 702 с.
- [19] Горшков А.Г., Морозов В.И., Пономарев А.Т., Шклярчук Ф.Н. *Аэрогидроупругость конструкций*. – М.: Физматлит, 2000. – 592 с.
- [20] Гришанина Т.В. *Расчет деформаций и колебаний крыльев большого удлинения с учетом конусности* // *Известия высших учебных заведений. Авиационная техника*. – 2004. – № 2. – С. 10-13.
- [21] Гришанина Т.В., Овчинникова Н.М. *Аэродинамические и аэроупругие характеристики профиля крыла с морфным отклоняемым хвостиком* // *Материалы XXII международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» имени А. Г. Горшкова, Вятчи, 15-19 февраля 2016 г.*, с.89
- [22] Гришанина Т.В., Русских Н.М. *Аэродинамические характеристики морфного профиля крыла, изгибаемого за счет одностороннего натяжения обшивки* // *15-я Международная конференция «Авиация и космонавтика» Тезисы, Москва, МАИ, 14-18 ноября 2016*, сс. 68-69
- [23] Гришанина Т.В., Русских Н.М. *Аэродинамические характеристики колеблющегося в потоке гибкого профиля крыла* // *Материалы XXIII международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» имени А. Г. Горшкова, Вятчи, 13-17 февраля 2017 г.*, с. 70-71
- [24] Гришанина Т.В., Русских Н.М. *Определение стационарной аэродинамической нагрузки, действующей на деформируемый профиль крыла при плоском дозвуковом обтекании* // *Сборник трудов 7-й всероссийской научной конференции с международным участием им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского «Механика композиционных материалов и*

конструкций, сложных и гетерогенных сред», 21-23 ноября 2017 года, г. Москва, Ленинградский проспект, 7, с. 67

[25] Гришанина Т.В., Русских Н.М. *Задача определения аэродинамических сил, действующих на колеблющиеся деформируемые профили крыла, на основе нестационарной теории плоского дозвукового обтекания* // Материалы XXIV международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» имени А. Г. Горшкова, Том 1, Вятчи, 19-23 марта 2018 г., сс.85-86

[26] Гришанина Т.В., Русских Н.М. *Влияние аэродинамического демпфирования на гармонические колебания профиля крыла при расчетах по нестационарной и квазистационарной теориям дозвукового обтекания* // 17-я Международная конференция «Авиация и космонавтика - 2018» Тезисы, Москва, МАИ, 19-23 ноября 2018, сс. 459-460

[27] Гришанина Т.В., Русских Н.М. *Колебания крыла при расчете по нестационарной и квазистационарной теориям* // Вопросы инновационного развития аэрокосмического комплекса России. Материалы первой Общероссийской научно-практической конференции – М.: Издательство «Доброе слово», 2018. – 248 с., Москва, сс. 63-66

[28] Гришанина Т.В., Русских Н.М. *Аэродинамические характеристики деформируемого профиля крыла при квазистационарном обтекании* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2018. – Т.24. – №3. – С.477-489.

[29] Гришанина Т.В., Русских Н.М. *Анализ влияния нестационарности несжимаемого потока на изгибно-крутильные аэроупругие колебания крыла большого удлинения* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2019. – Т. 25. № 2. – С. 207-218.

[30] Гришанина Т.В., Рыбкина Н.М. *К расчету флаттера прямого крыла большого удлинения в несжимаемом потоке с использованием нестационарной аэродинамической теории* // Механика композиционных материалов и конструкций – 2020. – т. 26 – № 1. – сс. 40-55

- [31] Гришанина Т.В., Рыбкина Н.М. *Аэроупругие колебания мембранного крыла большого удлинения в дозвуковом потоке* // 18-я Международная конференция «Авиация и космонавтика - 2019» Тезисы, Москва, МАИ, 18-22 ноября 2019, сс. 205-206
- [32] Гришанина Т.В., Рыбкина Н.М. *Определение аэродинамической нагрузки, действующей на деформируемый профиль с регулируемым натяжением обшивки* // Материалы XXVI Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Т.1. – М.: ООО "ТРП", 2020., Вятчи, 18 – 22 марта 2020 г., с.99
- [33] Гришанина Т.В., Шклярчук Ф.Н. *Деформация и аэродинамические характеристики профиля мембранного крыла при дозвуковом обтекании* // Вестник Московского авиационного института. – 2014. – Т. 21. – № 5. – С. 7-12.
- [34] Гришанина Т.В., Шклярчук Ф.Н. *Аэродинамические характеристики профиля крыла с нелинейно деформируемой мембраной в дозвуковом потоке* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2016. – Т. 22. – № 4. – С. 491-501.
- [35] Гришанина Т.В., Шклярчук Ф.Н. *Динамика упругих управляемых конструкций*. – М.: Изд-во МАИ, 2007. – 328 с.
- [36] Гришанина Т.В., Шклярчук Ф.Н. *Неустановившиеся колебания деформируемого профиля крыла в несжимаемом потоке* // Известия вузов. Авиационная техника. – 2009. – №2. – С.3-7.
- [37] Гроссман Е.П. *Курс вибраций частей самолета*. – М.: Оборонгиз, 1940. – 312 с.
- [38] Гроссман Е.П. *Флаттер* //Труды ЦАГИ. – №284 – 1937г. – 248 с.
- [39] Гудилин А.В., Евсеев Д.Д., Ишмуратов Ф.З., Липин Е.К., Маркин В.Н., Мосунов В.А., Пантелеев И.М., Сотников С.В., Теняева В.Е., Тимонин А.С., Чедрик В.В. *Комплекс программ аэропрочностного проектирования*

самолета "АРГОН" // Ученые записки ЦАГИ. – 1991. – Т. XXII. – № 5. – С. 89-101.

[40] Ден – Гартог Дж.П. *Механические колебания*. – М.: Физматгиз, 1960, – 580 с.

[41] Дынников Я.А. *К расчету машущего гибкого крыла в потоке вязкой несжимаемой жидкости* // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. – 2016. – №4. – С. 22 – 30.

[42] Зенкевич О.К. *Метод конечных элементов в технике*. – М.: Мир, 1975. – 536 с.

[43] Ишмуратов Ф.З., Поповский В.Н. *Особенности построения математической модели летательного аппарата для исследования аэроупругого взаимодействия с системой автоматического управления*. // Труды ЦАГИ. – 1988. – вып. 2395.

[44] Кабальнов Ю.С., Уразаева Л.Ю. *Математическое моделирование колебательных движений крыла с гибким профилем* // Вестник Уфимского государственного авиационного технического университета. – 2006. – Т. 7. – № 2. – С. 36-43.

[45] Карклэ П.Г., Кузнецов О.А. *Теоретические основы аэроупругости. Энциклопедия. Том IV, книга 1. Аэродинамика, динамика полета и прочность*. – М.: Машиностроение, 1984

[46] Колесников К.С., Сухов В.Н. *Упругий летательный аппарат как объект автоматического управления*. – М.: Машиностроение, 1974. – 267 с.

[47] Комаров В.А., Лаптева М.Ю. *Прогнозирование деформаций крыльев* // Полет. Общероссийский научно-технический журнал. – 2011. – № 3. – С. 7-12.

[48] Литвинов В.М., Литвинов Е.В. *Методика расчета массы крыла самолета с учетом ограничений по аэроупругости* // Ученые записки ЦАГИ – 2006. – Т. XXXVII. – № 3. – С. 63-83.

- [49] Ляскин А.С., Шахов В.Г. *Метод расчета аэродинамических характеристик деформируемого крыла* // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. – 2000. – № 4. – С. 15-17.
- [50] Макаревский А.И., Чижов В.М. *Основы прочности и аэроупругости летательных аппаратов*. – М. Машиностроение, 1982, – 238 с.
- [51] Мазур В.В., Турчанников Г.И. *Итерационный метод расчёта на прочность крыла самолёта с учётом влияния деформаций на распределение аэродинамических сил*. // Уч. записки ЦАГИ. – т.8. – №5. – 1985. – с.80- 89.
- [52] Морозов В.И., Пономарёв А.Т., Рысев О. В. *Математическое моделирование сложных аэроупругих систем*. – М.: Физматлит, 1995, 736с.
- [53] Набиуллин Э.Н. *Методы расчёта нестационарных аэродинамических нагрузок на тонкое крыло конечного удлинения, совершающее упругие гармонические колебания в дозвуковом потоке* // Уч. записки ЦАГИ. – 1972. – Т. 3, № 6. – С. 94-100.
- [54] Некрасов А.И. *Теория крыла в нестационарном потоке*. – М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1947. – 258 с.
- [55] Ортамеви Г., Зинченко Д.Н. *Исследования аэродинамических характеристик гибридного крыла* // Механіка елементів конструкцій. – 2014. – №28. – С.131-137.
- [56] Павлов В.А., Черников С.К. *О критической скорости флаттера оперения с рулём*. // Изв. вузов, Авиационная техника. – 1982. – & 4. – С. 61-64
- [57] Поповский В.Н., Фомин Г.М. *Некоторые проблемы аэроупругости летательных аппаратов* //Техника воздушного флота. – т. LXXIV. – №6 (647). – 2000. – С. 10-19.
- [58] Путов В.В., Шелудько В.Н., Нгуэт В.Ф., Тхань Н.Д. *Адаптивное управление упругим беспилотным летательным аппаратом в условиях неопределенности*. // Известия СПбГЭТУ ЛЭТИ. – № 4. – 2018. – С. 48-56.
- [59] Рыбкина Н.М. *Аэродинамические характеристики деформируемого профиля, изгибаемого за счет натяжения обшивки* // XLVI Международная



молодёжная научная конференция «Гагаринские чтения – 2020»: Сборник тезисов докладов. — М.: МАИ, 2020. — 1731 с., с. 895

[60] Стебунов В.А., Теперин Л.Л., Чучкалов И.Б. *Применение пространственной модели фюзеляжа к задачам статической аэроупругости в системе MSC NASTRAN* // Ученые записки ЦАГИ. – 2002. – Т. 33. – № 3-4. – С.136-143

[61] Туктаров С.А., Чедрик В.В. *Некоторые аспекты моделирования композиционного кессона крыла большого удлинения анизотропной балкой* // Ученые записки ЦАГИ. – 2015. – Т. 46. – № 3. – С. 70-84.

[62] Фершинг Г. *Основы аэроупругости*. – М.: Машиностроение, 1984. – 600 с. (Перевод с нем. Försching H.W. Grund lagen der Aeroelastic. Springer – Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1974).

[63] Фын Я.Ц. *Введение в теорию аэроупругости*. – М.: Физматлит, 1959. – 524 с. (перевод с англ. Fung Y.C. *An Introduction to the theory of aeroelasticity*. N.-Y. 1959. John Wiley & Sons, Inc.).

[64] Хараш Е.В., Ядыкин Ю.В., Абрамович Х. *Экспериментальные исследования изгибно-крутильного флаттера модели гибкого крыла среднего относительного удлинения*. // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. – №4. – 2012. – С.34-38.

[65] Храбров А.Н. *Математическое моделирование влияния схода вихрей на нестационарные аэродинамические характеристики профиля при его произвольном движении* // Ученые записки ЦАГИ. – 2002. – Т.33. – №3-4. – С.3-17.

[66] Чубань В.Д. *Метод расчета флаттера T-образного оперения, учитывающий влияние угла атаки и угла установки стабилизатора на критические параметры флаттера*. // Ученые Записки ЦАГИ. – т.ХХХV. – 2004. – №3-4. – С.90-99.

[67] Чучкалов И.Б. *Разработка математической модели и создание инженерной методики решения задач статической упругости* //

Диссертация на соискание ученой степени кандидата наук. – Москва. – 2000.  
– 121с.

[68] Шклярчук Ф.Н. *Аэроупругость самолета*. – М.: Изд-во МАИ, 1985. – 77 с.

[69] Benoit Beguin, Christian Breitsamter, Nikolaus Adams. *Aerodynamic Investigations of a Morphing Membrane Wing* // AIAA Journal Vol. 50, No. 11, November 2012. – p. 2588-2599.

[70] Frulla, G., *Aeroelastic Behavior of a Solar-Powered High-Altitude Long Endurance Unmanned Air Vehicle (HALE-UAV) Slender Wing* // Journal of Aerospace Engineering. – Vol. 218. – Part G. – Special Issue.

[71] P. Gamboa, J. Vale, F.J.P. Lau, A. Suleman. *Optimization of a Morphing Wing Based on Coupled Aerodynamic and Structural Constraints* // AIAA Journal Vol. 47, No. 9, September 2009. – p. 2087-2104.

[72] HE Yuanyuan, GUO Shijun. *Modeling and Experiment of a Morphing Wing Integrated with a Trailing Edge Control Actuation System* // Chinese Journal of Mechanical Engineering Vol. 25, No. 2, 2012. – p. 248-254

[73] Henrik Hesse, Rafael Palacios. *Reduced-Order Aeroelastic Models for Dynamics of a Maneuvering Flexible Aircraft* // AIAA Journal Vol. 52, No. 8, August 2014. – p. 1717-1732.

[74] Hodges D.H., Dowell E.H., *Non-linear Equations of Motion for the Elastic Bending and Torsion of Twisted. // Non Uniform Rotor Blades*. – NASA TN D-7818. – 1974

[75] Patil M. J., Hodges D. H. *Limit-Cycle Oscillations in high-aspect-ratio wings* // Journal of Fluids and Structures. – Vol. 15. – pp. 107-132. – 2001.

[76] Peter J. Attar, Brian J. Morris, William A. Romberg, Jordan W. Johnston, Ramkumar N. Parthasarathy. *Experimental Characterization of Aerodynamic Behavior of Membrane Wings in Low-Reynolds-Number Flow* // AIAA Journal Vol. 50, No. 7, June 2012. – p. 1525-1537.

- [77] Rafael Palacios, Joseba Murua, Robert Cook. *Structural and Aerodynamic Models in Nonlinear Flight Dynamics of Very Flexible Aircraft* // AIAA Journal Vol. 48, No. 11, November 2010. – p. 2648-2659.
- [78] Srinivas Vasista, Liyong Tong. *Topology-Optimized Design and Testing of a Pressure-Driven Morphing-Aerofoil Trailing-Edge Structure* // AIAA Journal Vol. 51, No. 8, August 2013. – p. 1898-1907.
- [79] Strong D. D., Kolonay R. M., Eastep F. E., Flick P. M. *Flutter Analysis of Wing Configurations Using Prestressed Frequencies and Mode Shapes*. – IFASD-2005, Munich, Germany
- [80] Tang, D., Dowell, E. H. *Experimental and Theoretical Study on Aeroelastic Response of High-Aspect-Ratio Wings* // AIAA Journal, Vol. 39, No. 8, 2001. – pp. 419-429.
- [81] Thomas E. Noll, John M. Brown, Marla E. Perez-Davis, Stephen D. Ishmael Geary C. Tiffany Matthew Gaier *Investigation of the Helios Prototype Aircraft* // Mishap, 2004. – 100 p.
- [82] Yuji Matsuzaki, Hiroshi Torii. *Flutter-Boundary Prediction of a Morphing Wing in the Process of Adaptation* // AIAA Journal Vol. 50, No. 6, June 2012. – p. 1257-1264.
- [83] Zhang Chi, Zhou Zhou, Meng Pu *Nonlinear static aeroelastic and trim analysis of highly flexible aircraft* // ICAS- 2018, 2018.