

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(национальный исследовательский университет)

На правах рукописи



Ильина Анастасия Николаевна

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГОЛОНОМНЫХ СИСТЕМ С
НЕЛИНЕЙНЫМИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ СВЯЗЯМИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ
ЗАДАЧ УСТОЙЧИВОСТИ И СТАБИЛИЗАЦИИ УСТАНОВИВШИХСЯ
ДВИЖЕНИЙ

Специальность 05.13.18

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
доцент А. Я. Красинский

Москва, 2019 год

Оглавление

Введение	5
Глава 1. Стабилизация положений равновесия систем с	
избыточными координатами	15
1.1. Уравнения Шульгина	16
1.2. Нелинейная математическая модель динамики мехатронной системы с геометрическими связями в переменных Лагранжа . . .	18
1.3. Структура уравнений возмущённого движения в окрестности положений равновесия	23
1.4. Стабилизация положений равновесия при полной информации о состоянии	30
1.5. Стабилизация положений равновесия при неполной информации о состоянии	33
1.6. Алгоритм численного нахождения коэффициентов стабилизирующего управления и наблюдателя для мехатронных систем с геометрическими связями	36
1.7. Выводы по главе 1	37
Глава 2. Стабилизация стационарных движений систем с	
избыточными координатами	39
2.1. Уравнения Шульгина в переменных Лагранжа при наличии циклических координат	40
2.2. Структура уравнений возмущённого движения в окрестности стационарного движения	45
2.3. Стабилизация стационарных движений при полной информации о состоянии	51
2.4. Стабилизация стационарных движений при неполной информации о состоянии	54
2.5. Алгоритм численного нахождения коэффициентов управления и наблюдателя для стабилизации стационарных движений мехатронных систем с геометрическими связями	59

2.6.	Уравнения Шульгина в переменных Рауса при наличии циклических координат	60
2.7.	Структура уравнений возмущённого движения в переменных Рауса в окрестности стационарного движения	68
2.8.	Стабилизация стационарных движений при полной информации о состоянии	74
2.9.	Стабилизация стационарных движений при неполной информации о состоянии	76
2.10.	Выводы по главе 2	77
Глава 3. Математическое моделирование системы GBV 1005		
	Ball and Beam	78
3.1.	Описание системы GBV 1005 Ball and Beam. Цели численного эксперимента	78
3.2.	Построение математической модели системы Ball and Beam. Общие положения	82
3.3.	Управление посредством механического момента	86
3.4.	Управление посредством дополнительным напряжением на якоре двигателя	91
3.5.	Стабилизация положений равновесия системы Ball and Beam при неполной информации о состоянии	102
3.6.	Построение математической модели динамики системы Ball and Beam посредством линеаризации уравнения связи	104
3.7.	Выводы по главе 3	109
Глава 4. Описание программного комплекса и численных алгоритмов		
	алгоритмов	110
4.1.	Постановка задачи	110
4.2.	Описание комплекса программ HolStabBV	111
4.3.	Используемые численные методы	115
4.4.	Алгоритм определения полного вектора начальных возмущений	121
4.5.	Выводы по главе 4	125
Заключение		127
Литература		128

Список литературы	128
Приложение А. Формулы матричного дифференцирования . . .	139
А.1. Основные определения и обозначения	140
А.2. Дифференцирование скалярной функции по векторному аргументу	142
А.3. Дифференцирование векторной функции по векторному аргументу	144
А.4. Дифференцирование векторной и матричной функций по параметру	146
А.5. Формулы преобразования для приведения подобных	148
А.6. Выделение первого приближения векторных и матричных функций	152
Приложение Б. Графики переходных процессов	157

Введение

Актуальность темы. Проблема математического описания динамики механических систем является необходимым этапом исследования любого современного технического устройства, имеющего в своём составе механическую компоненту. Начиная с основополагающих работ Ж.Л. Лагранжа [49], У.Р. Гамильтона [6] П.Э. Аппеля [1], Э.Дж. Рауса [61], усилиями многочисленных учёных [60, 64] создан мощный строго сбалансированный формализм, предлагающий широкий выбор способов математического моделирования динамики механических систем. Именно то, насколько выбранная модель соответствует природе рассматриваемой задачи, в значительной мере определяет уровень достижений в решаемой проблеме. При этом вариации переменных, описывающих систему, могут быть как независимыми, так и стеснёнными связями различного вида [5, 66, 51, 67, 59]. Среди таких систем голономные системы с геометрическими связями занимают особое место, поскольку геометрические связи, как и неголономные связи, накладывают ограничения на вариации координат. Но, в отличие от неголономных связей, стесняют начальные возмущения. Непосредственное исключение зависимых переменных из уравнений связей, часто являющихся трансцендентными уравнениями, приводит к значительным трудностям [59, 7].

Для моделирования динамики таких систем обычно применяются уравнения Лагранжа первого рода в декартовых координатах [51, 66] или уравнения Лагранжа с множителями связей [51, 56, 66]. При этом непосредственное интегрирование такой системы уравнений, как правило, является достаточно сложной задачей [67]. Кроме того, если в исследовании не предполагается определение реакций связей, то неопределённые множители необходимо исключать [56, 66]. Различные методы исключения множителей связей посредством двукратного или однократного дифференцирования геометрических связей разрабатывались А.И. Лурье [51], С.А. Зегждой [9], И.В. Новожиловым [59] и др. Аналитические выражения для множителей впервые были получены А.М. Ляпуновым [52] и Г.К. Суловым [66]. Продолжая работу в этом направлении М.Ф. Шульгин вывел уравнения для моделирования динамики систем с избыточными координатами, не содержащие множителей связи. Уравнения движения в форме М.Ф. Шульгина [67] имеют компактный вид, их число равно

числу степеней свободы системы. Именно эта форма уравнений была выбрана А.Я. Красинским [21] как наиболее удобная для решения задач устойчивости и стабилизации систем с нелинейными геометрическими связями. Данные задачи долгое время оставались недостаточно изученными, несмотря на общие результаты по теории устойчивости, полученные в работах А.М. Ляпунова [53], И.Г. Малкина [55], Г.В. Каменкова [16] и др. Сложность их решения заключается в том, что накладываемые связи неизбежно [28] приводят к появлению нулевых корней характеристического уравнения системы первого приближения в окрестности исследуемого движения. А.М. Ляпунов так писал [53] об этом: «... случаи этого рода весьма разнообразны и в каждом из них задача получает свой особый характер, так что не может быть и речи о каких-либо общих способах ее решения, которые относились бы ко всем таким случаям». Для упрощения ситуации в некоторых работах по динамике систем с нелинейными геометрическими связями зависимые переменные исключают посредством линеаризации уравнений связей в окрестности исследуемых стационарных движений, что приводит, вообще говоря, к необоснованным математическим моделям [22]. Ярким примером осуществления такого подхода может служить система GVB 1005 Ball and Beam [84, 85, 91, 93, 74, 99, 100] – популярный лабораторный стенд с нелинейной геометрической связью, который используется для исследования различных стратегий управления. Подробнее об этой системе, способах её математического моделирования и стабилизации будет написано в главе 3 настоящей работы.

Первые строгие результаты в решении задач стабилизации рассматриваемого класса систем были получены А.Я. Красинским. На основе уравнений Шульгина в переменных Лагранжа и Рауса с использованием теории критических случаев Ляпунова [53, 55] им были доказаны теоремы об асимптотической устойчивости положений равновесия [28] и устойчивости стационарных движений [29] систем с избыточными координатами при выполнении ограничений, накладываемых уравнениями связей на начальные возмущения. Были выделены классы систем, в которых правильные заключения об устойчивости могут быть получены только из рассмотрения первого приближения, а также получен ряд других важных результатов [24, 25, 26, 27, 28, 29, 31, 32].

Несмотря на существенное продвижение в решении задач стабилизации систем с избыточными координатами, этот класс систем требует дальнейшего серьёзного изучения в силу разнообразия типов систем и возможных способов

управления. В каждом таком случае уравнения динамики имеют свои особенности и требуют отдельного рассмотрения для обоснованного заключения об устойчивости и возможности стабилизации. Кроме того, как правило, на практике полное фазовое состояние объекта неизвестно – информация о состоянии представлена в виде вектора измерений, размерность которого, как правило, много меньше размерности фазового вектора. Поэтому важным этапом решения прикладных задач является оптимальное и субоптимальное [48, 65] оценивание фазового состояния управляемого объекта по экспериментальным данным (измерительной информации), которое возможно использовать для формирования управления. Отдельный интерес представляет дальнейшее исследование преимуществ, которые даёт использование различных типов переменных при математическом моделировании динамики системы. Так, например, переменные Лагранжа выгодны с точки зрения измерения текущих значений фазовых переменных, но уравнения в этих переменных получаются более громоздкими и сложными для анализа и определения коэффициентов стабилизирующего управления. Напротив, уравнения в переменных Рауса удобнее для анализа нелинейных членов и вычисления коэффициентов управляющих воздействий, однако они чрезвычайно затрудняют процедуру получения измерительной информации, так как импульсы не могут быть непосредственно измерены датчиками.

Кроме того, применение результатов теории критических случаев в задаче стабилизации систем с нелинейными геометрическими связями неизбежно связано с громоздкими преобразованиями. Для автоматизации этих процедур могут быть использованы современные технологии обработки символьной информации. Уже существуют [45] программные продукты, позволяющие линеаризовать уравнения в окрестности исследуемого положения равновесия или стационарного движения. Однако они имеют ряд существенных недостатков: во-первых, автоматический анализ нелинейных членов в них практически невозможен; во-вторых, их применение требует достаточно высокой квалификации пользователя в области программирования. В этой связи актуальной становится разработка такого способа записи уравнений динамики, которая позволила бы достаточно просто анализировать структуру членов уравнений, в том числе нелинейных с помощью компьютерных технологий.

Объектом исследования являются голономные механические и мехатронные системы с нелинейными геометрическими связями.

Цель и задачи работы заключаются в развитии методов решения задач устойчивости и стабилизации положений равновесия и стационарных движений систем с нелинейными геометрическими связями на основе комплексного применения аналитической механики, математического моделирования, теории критических случаев, математической теории управления и численных методов и разработке алгоритмов нахождения стабилизирующего управления.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

1) получить математические модели динамики рассматриваемого класса систем с учётом нелинейных связей на основе уравнений Шульгина в переменных Лагранжа и Рауса при наличии или отсутствии циклических координат для различных способов введения управляющих воздействий;

2) установить условия разрешимости нелинейных задач стабилизации стационарных движений и положений равновесия мехатронных систем с нелинейными геометрическими связями, в том числе при неполной информации о состоянии;

3) разработать алгоритм численного определения коэффициентов стабилизирующего управления и системы оценивания (наблюдателя);

4) разработать комплекс программ, реализующий предложенный алгоритм для системы GBV 1005 Ball and Beam;

5) применить полученные результаты для стабилизации всех положений равновесия системы GBV 1005 Ball and Beam, провести сравнение различных математических моделей.

Методы исследования. Для решения поставленных задач используются методы аналитической механики, математического моделирования, нелинейной теории устойчивости, математической теории управления и численные методы. В диссертационной работе развивается метод использования различных типов переменных для разных классов задач. При этом большое внимание уделяется получению векторно-матричных нелинейных уравнений и уравнений с выделенным первым приближением в окрестности исследуемого движения. Для получения различных форм записи векторно-матричных уравнений динамики используются методы матричной алгебры. В том числе, потребовалось обратиться к таким операциям с матрицами, как кронекеровское произведение [54] и векторизация [2, 54], а также потребовалось введение ряда вспомогательных

соотношений для преобразования и дифференцирования векторных и матричных функций.

Для написания комплекса программ, реализующего разработанный алгоритм, и проведения других численных исследований используется система MATLAB.

Достоверность результатов обеспечивается строгостью математических формулировок и доказательств утверждений, подтверждением полученных теоретических результатов численными экспериментами.

Научная новизна.

В диссертационной работе получены новые векторно-матричные уравнения динамики систем с нелинейными геометрическими связями в переменных Лагранжа при наличии циклических координат при различных способах управления (по вектору циклических, позиционных или избыточных координат) и в переменных Рауса для случая управления по части циклических координат. Предложена форма записи векторно-матричных нелинейных уравнений и уравнений с выделенным первым приближением в окрестности стационарного движения, позволяющая упростить анализ структуры нелинейных членов. Установлены новые достаточные условия разрешимости для задачи стабилизации систем с избыточными координатами. Построены математические модели системы GBV 1005 Ball and Beam с учетом нелинейной геометрической связи для различных случаев выбора избыточной координаты и различных способов введения управляющих воздействий. Выполнено подробное исследование всех положений равновесия системы Ball and Beam, проведено сравнение с математической моделью, полученной на основе уравнений Лагранжа второго рода после линеаризации уравнения связи.

Практическая ценность. Результаты исследования могут быть использованы при моделировании и управлении мехатронными системами с нелинейными геометрическими связями, в частности, некоторыми манипуляторами и многосвязными механизмами. Разработанный программный продукт может быть использован в учебном процессе.

Структура и объём диссертации. Работа изложена на 165 страницах, включая 28 рисунков, 9 таблиц и список литературы, содержащий 100 наименований.

Во введении обоснована актуальность исследования, проводимого в рамках работы, приведён обзор существующих результатов по теме исследования,

сформулирована цель работы и задачи, решаемые в рамках достижения этой цели, обоснована научная новизна и практическая значимость работы, изложено содержание глав диссертации.

В первой главе рассматривается задача стабилизации положений равновесия мехатронных систем с нелинейными геометрическими связями, в составе которых имеется один или несколько электроприводов. Как правило, управление такими системами осуществляется посредством изменения напряжения [10]. Для решения задачи стабилизации выводятся уравнения, учитывающие динамику приводов. Особое внимание уделяется использованию матричных преобразований, что позволяет получать нелинейные уравнения и уравнения с выделенным первым приближением в векторно-матричном виде, не переходя к скалярной записи. Данная форма записи также полезна в случае необходимости анализа нелинейных членов и удобна с точки зрения автоматизации процесса нахождения стабилизирующего управления и коэффициентов системы оценивания в случае неполной информации о состоянии.

На основе анализа структуры полученных уравнений устанавливается достаточное условие разрешимости задачи стабилизации, в том числе при неполной информации о состоянии. Для доказательства применяются результаты теории критических случаев [53, 55] и теорема об асимптотической устойчивости положений равновесия систем с избыточными координатами [28]. Разрабатывается алгоритм численного нахождения коэффициентов стабилизирующего управления и коэффициентов системы оценивания. Практическое использование полученных результатов описывается в третьей главе на примере стабилизации положений равновесия системы GBV 1005 Ball and Beam. Численные методы, используемые для решения этой задачи, обсуждаются в четвёртой главе.

Во второй главе рассматривается задача стабилизации стационарных движений систем с нелинейными геометрическими связями в предположении о наличии циклических координат. Для моделирования динамики таких систем предлагается развитие метода, описанного в первой главе. Выводятся векторно-матричные уравнения движения голономных систем с избыточными координатами в переменных Лагранжа и в переменных Рауса для случая управления по части циклических координат. В переменных Лагранжа рассматриваются три способа введения управляющих воздействий: по части избыточных координат,

по части позиционных (независимых) координат и по всему вектору циклических координат.

Проводится анализ структуры полученных уравнений. Устанавливаются достаточные условия разрешимости задач стабилизации как в случае полностью известного фазового вектора системы, так и при неполной информации о состоянии. В доказательстве применяются результаты теории критических случаев [53, 55], теорема Малкина об устойчивости при постоянно действующих возмущениях [55], теоремы об асимптотической устойчивости положений равновесия [27] и об устойчивости стационарных движений систем с избыточными координатами [29]. Разрабатывается алгоритм нахождения коэффициентов стабилизирующего воздействия и системы оценки состояния.

В третьей главе проводится подробное исследование лабораторного стенда GBV 1005 Ball and Beam как мехатронной системы с нелинейной геометрической связью. Для решения задачи стабилизации применяются результаты, полученные в первой главе диссертационной работы. Строятся различные математические модели этой системы в зависимости от способа управления и выбора зависимой координаты. Если не учитывать динамику электропривода, управление может осуществляться за счёт механического момента. Находятся управляющие воздействия, стабилизирующие все положения равновесия системы. Для сравнения приводится также математическая модель на основе уравнений Лагранжа второго рода, не учитывающая нелинейные члены уравнения связи. Компьютерное моделирование осуществляется в системе MATLAB.

В четвертой главе описывается программный комплекс HolStabBV, позволяющий сравнивать различные подходы к математическому моделированию системы Ball and Beam. Обсуждаются различные численные алгоритмы, необходимые для решения задачи стабилизации. Разрабатывается алгоритм, позволяющий численно находить все компоненты вектора начальных возмущений в случае, если на систему наложены нелинейные геометрические связи.

В заключении приведены основные научные результаты, полученные автором работы.

В приложении А собраны формулы, используемые для вывода явных векторно-матричных уравнений движения. Если эти формулы не относятся к общеизвестным, приводится их вывод.

В приложении Б приведены графики переходных процессов системы GBV 1005 Ball and Beam.

Соответствие диссертации паспорту научной специальности.

Построены математические модели динамики систем с избыточными координатами на основе уравнений в форме М.Ф. Шульгина в переменных Лагранжа и Рауса для различных способов введения управляющих воздействий. Разработан метод получения нелинейных уравнений и уравнений с выделенным первым приближением в окрестности исследуемого стационарного движения в векторно-матричном виде (**область исследования 2 специальности 05.13.18**).

Для построенных математических моделей и рассмотренных способов управления с применением результатов теории критических случаев сформулированы и доказаны новые достаточные условия разрешимости задачи стабилизации положений равновесия и стационарных движений (**область исследования 2 специальности 05.13.18**).

С использованием полученных результатов проведено подробное исследование системы GVB 1005 Ball and Beam как мехатронной системы с нелинейной геометрической связью, решена задача стабилизации всех положений равновесия системы, реализован алгоритм численного нахождения коэффициентов стабилизирующего управления и системы оценивания (**область исследования 5 специальности 05.13.18**).

Разработан комплекс проблемно-ориентированных программ, позволяющий сравнивать различные математические модели системы GVB 1005 Ball and Beam: на основе уравнений Шульгина с учетом нелинейной связи при различном выборе зависимой координаты, на основе уравнений Лагранжа при линеаризации уравнения связи (**область исследования 4 специальности 05.13.18**).

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на следующих научных конференциях и семинарах:

- 1) XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Казань, 2015);
- 2) 14-я Международная конференция «Авиация и космонавтика» (Москва, 2015);
- 3) 8-я Всероссийская мультиконференция по проблемам управления МКПУ-2015 (Геленджик, 2015);
- 4) XIII Международная конференция «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления (конференция Пятницкого)» (Москва, 2016);

5) X Всероссийская научная конференция им. Ю.И. Неймарка «Нелинейные колебания механических систем» (Нижний Новгород, 2016);

6) VII Всероссийское совещание-семинар заведующих кафедрами и преподавателей теоретической механики, робототехники, мехатроники вузов Российской Федерации (Махачкала, 2016);

7) Международная научно-техническая конференция «Пром-инжиниринг» (Челябинск, 2016);

8) XI Международная научная конференция «Аналитическая механика, устойчивость и управление» (Казань, 2017);

9) 1-я Международная конференция «Проблемы механики и управления» (Махачкала, 2018).

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 15 работах, из которых 5 опубликованы в журналах, рекомендованных ВАК [39, 40, 41, 86, 42], в том числе 3 опубликованы в журналах, цитируемых международной базой Scopus [40, 86, 42], в том числе 1 опубликован в журналах, цитируемых международной базой Web of Science [86], и 10 опубликованы в материалах различных конференций [11, 34, 35, 36, 37, 38, 43, 87, 88, 44].

Личный вклад. Автором построены все представленные математические модели систем с нелинейными геометрическими связями. Для получения математических моделей систем с нелинейными геометрическими связями в виде векторно-матричных нелинейных уравнений и уравнений с выделенным первым приближением предложена методика использования операций кронекеровского произведения и векторизации. Доказано несколько новых достаточных условий разрешимости задачи стабилизации положений равновесия и стационарных движений при полной и неполной информации о состоянии, разработаны алгоритмы численного нахождения коэффициентов стабилизирующих управлений и коэффициентов наблюдателя, предложен алгоритм численного нахождения полного вектора начальных возмущений фазовых переменных для систем с наложенными нелинейными геометрическими связями, проведено подробное исследование положений равновесия системы Ball and Beam. В системе MATLAB автором реализованы разработанные алгоритмы, проведены вычислительные эксперименты и анализ полученных результатов.

Благодарности. Автор выражает глубокую признательность научному руководителю А.Я. Красинскому и участникам научного семинара на кафедре «Теория вероятностей и компьютерное моделирование» МАИ (НИУ): А.И. Ки-

бзуну, А.В. Наумову, Ю.С. Кану, С.Л. Семакову, К.В. Семинихину, А.Н. Игнатову за ценные критические замечания, позволившие улучшить качество диссертационной работы.

Глава 1. Стабилизация положений равновесия систем с избыточными координатами

В первой главе исследуется задача устойчивости и стабилизации положений равновесия мехатронных систем с нелинейными геометрическими связями, в состав которых входит один или несколько приводов на базе электродвигателей постоянного тока. Под *мехатронным* [28] будем понимать устройство, основная функция которого осуществляется за счёт целенаправленного механического движения под действием управления, формируемого на основе обработки в реальном времени текущей измерительной информации. Таким образом, в составе мехатронной системы можно выделить четыре основных компоненты: механическое устройство, конечным звеном которого обычно является рабочий орган; блок приводов, в который может входить один или несколько двигателей; устройство компьютерного управления и сенсоры. Случаи управления мехатронной системой с нелинейными геометрическими связями по части позиционных и по части избыточных координат были изучены ранее в работах [24, 32, 33]. Поэтому в главе 1 рассматривается не исследованная ранее в общей постановке задача стабилизации положений равновесия, в которой управляющим воздействием непосредственно является изменяющееся напряжение на якорных обмотках двигателей. Строится специальная математическая модель динамики мехатронных систем с нелинейными геометрическими связями с явным учётом динамики электроприводов. Моделирование динамики механической части системы проводится на основе уравнений Шульгина в избыточных координатах в переменных Лагранжа. Общий метод исследования задачи устойчивости и стабилизации установившихся движений голономных механических систем изложен в статье [26]. Этот метод основан на систематическом применении векторно-матричных уравнений движения в форме, допускающей анализ линейных и нелинейных членов уравнений динамики после проведения аналитических преобразований теории критических случаев.

Изложение материала в главе 1 организовано следующим образом. Общий вид уравнений Шульгина приведён в разделе 1.1. С использованием формул дифференцирования векторно-матричных функций, полученных в приложении А, в разделе 1.2 строятся явные нелинейные уравнения динамики систем рассматриваемого класса в векторно-матричном виде. Значения параметров си-

стемы в положении равновесия вычисляются в разделе 1.3. Выводятся уравнения возмущенного движения с выделенным первым приближением в его окрестности. Там же показывается, что устойчивость положений равновесия систем рассматриваемого класса возможна только в критических случаях. На основе анализа структуры полученных уравнений с применением принципа сведения теории критических случаев устанавливаются достаточные условия разрешимости задачи стабилизации положений равновесия по линейной управляемой подсистеме при полной (раздел 1.4) и неполной (раздел 1.5) информации о состоянии. Соответствующие линейно-квадратичные задачи стабилизации по методу Н.Н. Красовского сводятся к решению алгебраических матричных уравнений Риккати. В разделе 1.6 на основе полученных результатов приводится алгоритм для вычисления стабилизирующего управления для рассматриваемых систем. Выводы по главе формулируются в разделе (раздел 1.7).

Практическое применение результатов проводится в главе 3 в задаче стабилизации всех равновесий системы GBV 1005 Ball and Beam. Алгоритмы численного определения коэффициентов управляющего воздействия обсуждаются в главе 4.

1.1. Уравнения Шульгина

Пусть конфигурация механической системы задана параметрами $q' = (q_1, \dots, q_n, \dots, q_{n+m})$, $m > 1$, взятыми в числе, превосходящем необходимое n – число степеней свободы. Здесь и далее штрих обозначает транспонирование. Тогда m из этих $n + m$ параметров называют *избыточными координатами* [66]. При этом будем предполагать, что на систему наложено m независимых нелинейных геометрических связей:

$$F' = (F_1(q), \dots, F_m(q)) = 0, \quad \text{rank} \frac{\partial F}{\partial q} = m. \quad (1.1.1)$$

Заметим, что на этом этапе исключение из (1.1.1) лишних координат часто приводит к громоздким формулам, особенно когда в уравнениях связей присутствуют тригонометрические функции ([67], с. 20-21).

Разобьём q на две части, обозначив $r' = (q_1, \dots, q_n)$ – вектор независимых координат, и $s' = (q_{n+1}, \dots, q_{n+m})$ – вектор избыточных координат. Продиффе-

ренцировав (1.1.1) по времени, получим кинематические интегрируемые связи в виде

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial r} \dot{r} + \frac{\partial F}{\partial s} \dot{s} = 0. \quad (1.1.2)$$

Если $\det \frac{\partial F}{\partial s} \neq 0$ – а мы всегда можем выбрать избыточные координаты таким образом в силу (1.1.1) – то соотношение (1.1.2) можно разрешить относительно скоростей зависимых координат, умножив (1.1.2) слева на обратную матрицу к $\frac{\partial F}{\partial s}$:

$$\dot{s} = B(q)\dot{r}, \quad B(q) = - \left(\frac{\partial F}{\partial s} \right)^{-1} \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial r} \right). \quad (1.1.3)$$

Пусть $T(q; \dot{q})$ и $\Pi(q)$ кинетическая и потенциальная энергия системы, соответственно. Пусть также по координатам r и s на систему действуют непотенциальные силы Q_r , Q_s общего вида. Все функции аналитические в некоторой области пространства. Относительно кинетической энергии будем также предполагать, что она имеет самый общий вид [51, 56]

$$T(q; \dot{q}) = T_2(q; \dot{q}) + T_1(q; \dot{q}) + T_0(q), \quad (1.1.4)$$

где $T_2(q; \dot{q})$ – квадратичная часть по \dot{q} , $T_1(q; \dot{q})$ – линейная часть по \dot{q} и член $T_0(q)$ не зависит от скоростей.

Замечание 1.1.1. *Если в качестве управляющих воздействий выбраны механические силы или моменты, они включаются в силы Q_r , Q_s . Здесь эти случаи рассматриваться не будут, так как они уже были изучены ранее в [32, 33].*

Исключим из выражения кинетической энергии и непотенциальных сил зависимые скорости \dot{s} с помощью уравнений (1.1.3). Соответствующие выражения обозначим $T^*(q; \dot{r})$, Q_r^* и Q_s^* соответственно. Введем функцию Лагранжа $L^*(q; \dot{r}) = T^*(q; \dot{r}) - \Pi(q)$. Тогда уравнения динамики в форме М.Ф. Шульгина [67] можно записать в общем векторно-матричном виде [32]:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{r}'} - \frac{\partial L^*}{\partial r'} = Q_r^* + B'(q) \left(\frac{\partial L^*}{\partial s'} + Q_s^* \right). \quad (1.1.5)$$

Уравнения (1.1.5) компактны, не содержат множителей связей, их число равно числу степеней свободы системы n . Для получения полной системы уравнений движения, уравнения (1.1.5) следует рассматривать совместно с уравнениями связей (1.1.1). Также для рассматриваемого случая управления необходимо учёт математической модели электроприводов.

Как было отмечено ранее [29], система уравнений (1.1.5) может рассматриваться как частный случай уравнений движения неголономных систем с однородными связями в форме Воронца [51, 67], если кинематические связи интегрируемы и члены неголономности в уравнениях Воронца обращаются в нуль [17, 58, 67]. Это позволяет применять к исследованию динамики систем с избыточными координатами все методы, разработанные для изучения динамики неголономных систем. Но, вместе с тем, кроме принципиально иной структуры (из-за отсутствия членов неголономности), эти уравнения имеют и другие особенности, которые требуют дальнейшего изучения и использования.

1.2. Нелинейная математическая модель динамики мехатронной системы с геометрическими связями в переменных Лагранжа

Для применения метода [26] к системам рассматриваемого класса, необходимо получить запись нелинейных уравнений динамики (1.1.5) в явном векторно-матричном виде. Обычно для этого переходят от общих уравнений, таких как (1.1.5) к их скалярной записи, а потом из коэффициентов полученных выражений некоторым образом снова формируются матрицы [20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33]. Однако чем сложнее рассматриваемые уравнения, тем труднее становится процедура обратного перехода, так как коэффициенты при переменных могут иметь по три и более индекса суммирования, каждый из которых меняется в своём диапазоне. Требовалось вводить специальные обозначения, чтобы пояснить, какие именно элементы формируют эти матрицы (см., например, [26]).

В данной работе предлагается новый подход для получения уравнений динамики в векторно-матричной записи. В приложении А выводятся формулы матричного дифференцирования, которые позволяют получать уравнения динамики, не переходя к скалярной записи. Соотношениями из приложения А можно пользоваться по аналогии с таблицей производных для скалярных функций. Матрицы коэффициентов выражаются в виде комбинации известных матриц, которые связаны матричными операциями сложения, умножения, кронекеровского произведения и векторизации. Отметим, что две последние операции

получают всё большее применение в задачах автоматического управления [2] и других приложениях [4, 54, 80].

Пусть система включает в себя k , $k \geq 1$ двигателей постоянного тока с независимым возбуждением. Математическая модель такого двигателя может быть записана в виде [10]

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a \cdot i_a + k_1 \cdot \omega = k_2 \cdot e_\nu, \quad (1.2.1)$$

где i_a – сила тока в якорной обмотке, e_ν – напряжение в цепи якоря, L_a – индуктивность, R_a – сопротивление, k_1 – электромагнитный коэффициент, k_2 – коэффициент преобразователя питания, ω – угловая скорость вращения вала. Уравнение (1.2.1) представляет собой линейное приближение второго закона Кирхгофа.

Для того чтобы в явном виде включить уравнения вида (1.2.1) в полную систему уравнений динамики, разобьём фазовый вектор q следующим образом:

$$q = \begin{pmatrix} r \\ I \\ s \end{pmatrix}, \quad r = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_{n-k} \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} q_{n-k+1} \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}, \quad s = \begin{pmatrix} q_{n+1} \\ \vdots \\ q_{n+m} \end{pmatrix}, \quad k < n,$$

где r – вектор независимых координат, I – вектор токов в якорных обмотках электродвигателей, s – вектор избыточных координат.

Кинетическую энергию (1.1.4) механической части системы можно записать в виде

$$T(q; \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}' \cdot A_2 \cdot \dot{q} + A_1' \cdot \dot{q} + T_0(q), \quad (1.2.2)$$

где символом $A_2(q)$ обозначена определено-положительная симметричная матрица порядка $n + m - k$ коэффициентов квадратичной по скоростям части кинетической энергии, а символом A_1 обозначен вектор-столбец длины $n + m - k$ коэффициентов линейной по скоростям части $T(q; \dot{q})$.

Замечание 1.2.1. *Связь механической части системы с исполнительными приводами осуществляется за счёт непотенциальных сил. Компоненты вектора I должны входить в выражения Q_r^* , Q_s^* , но кинетическая и потенциальная энергия от них не зависит.*

Введём ещё одно обозначение, которое будем использовать везде далее: если α и β – некоторые векторы-столбцы, возможно, разных размерностей, то

символом $A_{\alpha\beta}$ будем обозначать матрицу, число строк которой равно длине вектора α , а число столбцов – размерности вектора β . Аналогично, будем считать, что A_α – вектор-столбец, совпадающий по размерности с вектором α , а A'_β – вектор-строка, совпадающая по размерности с вектором β' . Подобное обозначение позволяет контролировать размеры перемножаемых матриц.

Исключим из (1.2.2) зависимые скорости \dot{s} с помощью (1.1.3). Тогда выражение кинетической энергии (1.2.2) преобразуется к виду

$$T^*(q; \dot{r}) = \frac{1}{2} \dot{r}' \cdot a_{rr}(r, s) \cdot \dot{r} + a'_r(r, s) \cdot \dot{r} + T_0(r, s), \quad (1.2.3)$$

где матрицы коэффициентов следующим образом зависят от коэффициентов первоначальной кинетической энергии:

$$\begin{aligned} a_{rr}(r, s) &= A_{rr} + B' \cdot A_{sr} + A_{rs} \cdot B + B' \cdot A_{ss} \cdot B, \\ a'_r(r, s) &= A'_r + A'_s \cdot B. \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

Здесь A_{rr} , A_{rs} , A_{sr} , A_{ss} – соответствующие блоки матрицы A_2 размерностей $(n-k) \times (n-k)$, $(n-k) \times m$, $m \times (n-k)$, $m \times m$ соответственно, элементы которых являются функциями координат r и s , а A_r , A_s – столбцы размеров $n-k$ и m соответственно, элементы которых также зависят от компонент векторов r и s :

$$A_2 = \begin{pmatrix} A_{rr} & A_{rs} \\ A_{sr} & A_{ss} \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} A_r \\ A_s \end{pmatrix}.$$

Замечание 1.2.2. Так как матрица A_2 симметрична, то $A'_{rs} = A_{sr}$, $A'_{rr} = A_{rr}$ и $A'_{ss} = A_{ss}$. Отсюда и из выражений (1.2.4) также следует симметричность матрицы a_{rr} .

Если обозначить $W(r, s) = \Pi(r, s) - T_0(r, s)$ приведенную потенциальную энергию, то изменённая функция Лагранжа запишется в виде

$$L^*(r, s; \dot{r}) = \frac{1}{2} \dot{r}' \cdot a_{rr}(r, s) \cdot \dot{r} + a'_r(r, s) \cdot \dot{r} - W(r, s). \quad (1.2.5)$$

Чтобы получить нелинейные уравнения в форме Шульгина в явном виде, подставим (1.2.5) в (1.1.5). В качестве примера распишем процесс получения нелинейных уравнений в явном виде более подробно. Сначала запишем необходимые нам частные производные в векторно-матричном виде, принимая во внимание вид функции Лагранжа (1.2.5):

$$\begin{aligned} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{r}'} &= a_{rr} \cdot \dot{r} + a_r, \\ \frac{\partial L^*}{\partial r'} &= \frac{1}{2} (E_{n-k} \otimes \dot{r}') \cdot a'_{rr} \cdot \dot{r} + \left(\frac{\partial a_r}{\partial r} \right)' \cdot \dot{r} - \left(\frac{\partial W}{\partial r} \right)', \\ \frac{\partial L^*}{\partial s'} &= \frac{1}{2} (E_m \otimes \dot{r}') \cdot a'_{rr} \cdot \dot{r} + \left(\frac{\partial a_r}{\partial s} \right)' \cdot \dot{r} - \left(\frac{\partial W}{\partial s} \right)'. \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

Напомним, что $A \otimes B = \|a_{ij}B\|$ обозначает кронекеровское произведение [54] матриц A и B , E_l – единичная матрица порядка l . Также для упрощения записи введём следующее обозначение для блочных матриц

$$a_{rr}^{r'} = \begin{pmatrix} \frac{\partial a_{rr}}{\partial q_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial a_{rr}}{\partial q_{n-k}} \end{pmatrix}, \quad a_{rr}^{s'} = \begin{pmatrix} \frac{\partial a_{rr}}{\partial q_{n+1}} \\ \vdots \\ \frac{\partial a_{rr}}{\partial q_{n+m}} \end{pmatrix},$$

где $\frac{\partial a_{rr}}{\partial q_i}$ – матрица частных производных элементов a_{rr} по q_i .

Для сравнения приведём запись производных (1.2.6) в скалярном виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_l} &= \sum_{j=1}^{n-k} a_{lj} \dot{q}_j + a_l, \quad l = 1, \dots, n-k \\ \frac{\partial L^*}{\partial q_l} &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n-k} \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_l} \dot{q}_i \dot{q}_j + \sum_{i=1}^{n-k} \frac{\partial a_i}{\partial q_l} \dot{q}_i - \frac{\partial W}{\partial q_l}, \quad l = 1, \dots, n-k, \\ \frac{\partial L^*}{\partial q_p} &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n-k} \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_p} \dot{q}_i \dot{q}_j + \sum_{i=1}^{n-k} \frac{\partial a_i}{\partial q_p} \dot{q}_i - \frac{\partial W}{\partial q_p}, \quad p = n+1, \dots, n+m, \end{aligned} \quad (1.2.7)$$

где $a_{ij}, i, j = 1, \dots, n-k$ – элементы матрицы a_{rr} , $a_i, i = 1, \dots, n-k$ – элементы вектора a_r .

Далее получим выражение для производной $\frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{r}'}$, продифференцировав первое выражение из (1.2.6) или (1.2.7) по времени. Принимая во внимание, что элементы матрицы a_{rr} и вектора a_r являются функциями векторов r и s , будем иметь в первом случае:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{r}'} &= a_{rr} \cdot \ddot{r} + (\dot{r}' \otimes E_{n-k}) \cdot a_{rr}^{r'} \cdot \dot{r} + (\dot{s}' \otimes E_{n-k}) \cdot a_{rr}^{s'} \cdot \dot{r} + \\ &+ \frac{\partial a_r}{\partial r} \cdot \dot{r} + \frac{\partial a_r}{\partial s} \cdot \dot{s}. \end{aligned} \quad (1.2.8)$$

В скалярном виде это будет $n-k$ выражений вида

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_l} &= \sum_{j=1}^{n-k} a_{lj} \ddot{q}_j + \sum_{i,j=1}^{n-k} \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_l} \dot{q}_i \dot{q}_j + \sum_{p=n+1}^{n+m} \sum_{j=1}^{n-k} \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_p} \dot{q}_p \dot{q}_j + \\ &+ \sum_{i=1}^{n-k} \frac{\partial a_i}{\partial q_l} \dot{q}_i + \sum_{p=n+1}^{n+m} \frac{\partial a_i}{\partial q_p} \dot{q}_p, \quad l = 1, \dots, n-k. \end{aligned} \quad (1.2.9)$$

Выражения (1.2.8) и, соответственно, (1.2.9) содержат зависимые скорости \dot{s} . Их нужно исключить с помощью уравнений связей (1.1.3).

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{r}'} &= a_{rr} \cdot \ddot{r} + (\dot{r}' \otimes E_{n-k}) \cdot a_{rr}^{r'} \cdot \dot{r} + (\dot{r}' B' \otimes E_{n-k}) \cdot a_{rr}^{s'} \cdot \dot{r} + \\ &+ \left(\frac{\partial a_r}{\partial r} + \frac{\partial a_r}{\partial s} \cdot B \right) \dot{r}. \end{aligned} \quad (1.2.10)$$

В скалярном виде (1.2.10) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_l} &= \sum_{j=1}^n a_{lj} \ddot{q}_j + \sum_{i,j=1}^{n-k} \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_l} \dot{q}_i \dot{q}_j + \sum_{p=n+1}^{n+m} \sum_{i,j=1}^{n-k} \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_p} b_{pi} \dot{q}_i \dot{q}_j + \\ &+ \sum_{i=1}^{n-k} \left(\frac{\partial a_i}{\partial q_l} + \sum_{p=n+1}^{n+m} \frac{\partial a_i}{\partial q_p} b_{pi} \right) \dot{q}_i, \quad l = 1, \dots, n-k, \end{aligned} \quad (1.2.11)$$

где $b_{pi}, p = n + 1, \dots, n + m, i = 1, \dots, n - k$ – элементы матрицы B .

Наконец, подставляя полученные выражения (1.2.6) и (1.2.10) для производных в уравнения (1.1.5), получим запись нелинейных уравнений Шульгина в явном виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{rr}\ddot{r} + (\dot{r}' \otimes E_{n-k}) \cdot a_{rr}' \cdot \dot{r} + (\dot{r}' B' \otimes E_{n-k}) \cdot a_{rr}' \cdot \dot{r} - \\ - \frac{1}{2}(E_{n-k} \otimes \dot{r}') \cdot a_{rr}' \cdot \dot{r} - \frac{1}{2}B'(E_m \otimes \dot{r}') \cdot a_{rr}' \cdot \dot{r} + \\ + \left[\frac{\partial a_r}{\partial r} - \left(\frac{\partial a_r}{\partial r} \right)' + \frac{\partial a_r}{\partial s} B - B' \left(\frac{\partial a_r}{\partial s} \right)' \right] \dot{r} + \left(\frac{\partial W}{\partial r} \right)' + \\ + B' \left(\frac{\partial W}{\partial s} \right)' = Q_r^* + B' Q_s^*, \\ \dot{s} = B \cdot \dot{r}. \end{array} \right. \quad (1.2.12)$$

Уравнения (1.2.12) в скалярном виде имеют следующую форму:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{lj}\ddot{q}_j + \frac{\partial a_{lj}}{\partial q_i} \dot{q}_i \dot{q}_j + \frac{\partial a_{lj}}{\partial q_p} b_{pi} \dot{q}_i \dot{q}_j + \left(\frac{\partial a_l}{\partial q_i} + \frac{\partial a_l}{\partial q_p} b_{pi} \right) \dot{q}_i - \\ - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_l} \dot{q}_i \dot{q}_j - \frac{\partial a_i}{\partial q_l} \dot{q}_i + \frac{\partial W}{\partial q_l} = \\ = Q_l^* + b_{lp} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_p} \dot{q}_i \dot{q}_j + \frac{\partial a_i}{\partial q_p} \dot{q}_i - \frac{\partial W}{\partial q_p} + Q_p^* \right), \quad l = 1, \dots, n - k, \\ \dot{q}_p = b_{pj} \dot{q}_j, \quad p = n + 1, \dots, m. \end{array} \right. \quad (1.2.13)$$

Здесь по повторяющимся индексам предполагается суммирование, причём $i, j, l = 1, \dots, n - k, p = n + 1, \dots, n + m$. Символами Q_l^*, Q_p^* обозначены элементы векторов Q_r^* и Q_s^* соответственно.

Замечание 1.2.3. Обратим внимание, что некоторые члены уравнений (1.2.13) имеют по три и более индекса, изменяющихся в разных пределах. При выделении первого приближения запись может существенно усложниться, особенно при наличии циклических координат. А это значит, что просто перейти от скалярной записи (1.2.13) к векторно-матричной не получится. Напротив, переход от (1.2.12) к (1.2.13) не вызывает затруднений и всегда может быть осуществлён при необходимости.

Для того чтобы получить полную систему уравнений динамики, к уравнениям (1.2.12) или (1.2.13) необходимо добавить k уравнений вида (1.2.1). Запишем их также в векторно-матричном виде следующим образом. Пусть \mathcal{L}_{II} – матрица индуктивности, \mathcal{R}_{II} – матрица сопротивлений, \mathcal{K}_{II} – матрица коэффициентов преобразователя питания, \mathcal{P}_{II} – матрица электромагнитных коэффициентов. Все эти матрицы диагональные и имеют порядок k . Пусть также $w_I(r, s; \dot{r})$ – вектор угловых скоростей вращения валов электродвигателей, которые некоторым образом выражаются через переменные механической части

системы. Тогда соответствующие уравнения в векторно-матричной записи будут иметь вид:

$$\mathcal{L}_{II}\dot{I} = -\mathcal{R}_{II} \cdot I - \mathcal{P}_{II} \cdot w_I + \mathcal{K}_{II} \cdot e_\nu. \quad (1.2.14)$$

Управляющее воздействие в рассматриваемом классе систем осуществляется через вектор напряжений e_ν .

Таким образом, уравнения (1.2.12) и (1.2.14) задают полную нелинейную математическую модель динамики мехатронной системы с нелинейными геометрическими связями, управляемых посредством электроприводов с явным учётом математической модели коллекторных двигателей постоянного тока с независимым возбуждением.

Замечание 1.2.4. Из уравнений (1.2.12) и (1.2.14) легко может быть получена векторно-матричная нелинейная математическая модель динамики мехатронной системы с нелинейными геометрическими связями для других способов управления (по части независимых позиционных координат r или по части избыточных координат s). Приведём здесь эти уравнения:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{rr}\ddot{r} + (\dot{r}' \otimes E_n) \cdot a_{rr}' \cdot \dot{r} + (\dot{r}' B' \otimes E_n) \cdot a_{rr}'^s \cdot \dot{r} - \\ - \frac{1}{2}(E_n \otimes \dot{r}') \cdot a_{rr}' \cdot \dot{r} - \frac{1}{2}B'(E_m \otimes \dot{r}') \cdot a_{rr}'^s \cdot \dot{r} + \\ + \left[\frac{\partial a_r}{\partial r} - \left(\frac{\partial a_r}{\partial r} \right)' + \frac{\partial a_r}{\partial s} B - B' \left(\frac{\partial a_r}{\partial s} \right)' \right] \dot{r} + \left(\frac{\partial W}{\partial r} \right)' + \\ + B' \left(\frac{\partial W}{\partial s} \right)' = \tilde{Q}_r^* + B' \left(\tilde{Q}_s^* \right), \\ \dot{s} = B \cdot \dot{r}, \end{array} \right. \quad (1.2.15)$$

где возникающие из-за управляющих воздействий (напряжений) члены по независимым или по избыточным координатам включены в выражения непотенциальных сил \tilde{Q}_r^* и \tilde{Q}_s^* , соответственно. Т.е. уравнения (1.2.15) представляют собой математическую модель мехатронной системы непрямого управления [48], на которую наложены нелинейные геометрические связи.

1.3. Структура уравнений возмущённого движения в окрестности положений равновесия

В данном разделе покажем, что если мехатронная система с нелинейными геометрическими связями допускает положение равновесия, то его устойчивость возможна только в критических случаях. Причём число нулевых корней

характеристического уравнения линеаризованной системы не менее чем m – число связей.

Чтобы получить уравнения для определения программных управлений и значений параметров системы, при которых она может находиться в равновесии, приравняем скорости \dot{r} , w_I и \dot{I} к нулю и подставим их в уравнения (1.2.12) и (1.2.14). При этом необходимо также учитывать уравнения геометрических связей (1.1.1). В итоге получим систему из трёх векторно-матричных (или $n + m + k$ скалярных) уравнений, связывающих $n + m$ неизвестных параметров системы и k управляющих воздействий:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)' + B' \left(\frac{\partial W}{\partial s}\right)' = Q_r^*|_{\dot{q}=0} + B' Q_s^*|_{\dot{q}=0}, \\ 0 = -\mathcal{R}_{II} \cdot I + \mathcal{K}_{II} \cdot e_\nu, \\ F(r, s) = 0. \end{cases} \quad (1.3.1)$$

Если система (1.3.1) допускает частное решение

$$r = r_0, \quad I = I_0, \quad s = s_0, \quad (1.3.2)$$

то ему соответствует положение равновесия рассматриваемой динамической системы. Обозначим $e_{\nu_0} = \mathcal{K}_{II}^{-1} \mathcal{R}_{II} I_0$ – программные управления в положении равновесия (1.3.1).

Замечание 1.3.1. В отличие от систем с независимыми координатами, из уравнений (1.3.1) следует, что потенциальные и непотенциальные позиционные силы систем с избыточными координатами не обязательно обращаются в нуль в положениях равновесия. Действительно, может быть, что $\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)'_0 = l_r$, $\left(\frac{\partial W}{\partial s}\right)'_0 = l_s$, $Q_r^*|_{\dot{q}=0} = d_r$, $Q_s^*|_{\dot{q}=0} = d_s$ – постоянные ненулевые векторы соответствующих размерностей. Здесь и далее нижний индекс 0 означает, что значение функций вычисляется в положении равновесия.

Замечание 1.3.2. Также из уравнений (1.3.1) следует, что при использовании избыточных координат для систем рассматриваемого класса положение равновесия не обязательно является стационарной точкой потенциальной энергии. Действительно, в случае, когда $T_0 = 0$ и на систему не действуют непотенциальные силы Q_r^* , Q_s^* , вместо (1.3.1) будем иметь следующие уравнения равновесия:

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial r}\right)' + B' \left(\frac{\partial \Pi}{\partial s}\right)' = 0.$$

Если при этом потенциальная энергия может быть выражена через независимые обобщенные координаты, т.е. $\Pi(r,s) = \Pi(r)$, то $\left(\frac{\partial \Pi}{\partial s}\right)' = 0$ и уравнения (1.3.1) принимают вид

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial s}\right)' = 0.$$

Замечание 1.3.3. В общем случае при отсутствии непотенциальных позиционных сил положение равновесия определяется из уравнений для приведенной потенциальной энергии $W(q)$. Эти уравнения будут уравнениями относительного равновесия, т.е. равновесия относительно подвижной системы отсчета. Например, при сложном движении механической системы $T_0(q)$ представляет собой кинетическую энергию переносного движения системы [51].

Введём возмущения параметров системы в окрестности (1.3.2):

$$r = r_0 + x_1, \dot{r} = x_2, I = I_0 + x_3, s = s_0 + y, e_\nu = e_{\nu_0} + u. \quad (1.3.3)$$

Подставив (1.3.2) в (1.2.12) и (1.2.14), получим уравнения возмущённого движения в векторно-матричном виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{rr}\dot{x}_2 + (x'_2 \otimes E_{n-k}) \cdot a_{rr}' \cdot x_2 + (x'_2 B' \otimes E_{n-k}) \cdot a_{rr}^{s'} \cdot x_2 - \\ - \frac{1}{2}(E_{n-k} \otimes x'_2) \cdot a_{rr}' \cdot x_2 - \frac{1}{2}B'(E_m \otimes x'_2) \cdot a_{rr}^{s'} \cdot x_2 + \\ + \left[\frac{\partial a_r}{\partial r} - \left(\frac{\partial a_r}{\partial r}\right)' + \frac{\partial a_r}{\partial s} B - B' \left(\frac{\partial a_r}{\partial s}\right)' \right] x_2 + \left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)' + \\ + B' \left(\frac{\partial W}{\partial s}\right)' = Q_r^* + B' Q_s^*, \\ \mathcal{L}_{II} \dot{x}_3 = -\mathcal{R}_{II} \cdot x_3 - \mathcal{P}_{II} \cdot w_I + \mathcal{K}_{II} \cdot u, \\ \dot{y} = B \cdot x_2. \end{array} \right. \quad (1.3.4)$$

Выделим в (1.3.4) первое приближение в окрестности положения равновесия (1.3.2), не забывая, что коэффициенты всех функциональных матриц зависят от координат r и s .

Пусть в окрестности положения равновесия (1.3.2) после исключения зависимых скоростей и выделения первого приближения непотенциальные силы могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} Q_r^* &= Q_r^*(0) + f_{rr}x_1 + (g_{rr} + g_{rs}B(0))x_2 + f_{rI}x_3 + f_{rs}y + g_{rI}\dot{x}_3 + Q_r^{*(2)}, \\ Q_s^* &= Q_s^*(0) + f_{sr}x_1 + (g_{sr} + g_{ss}B(0))x_2 + f_{sI}x_3 + f_{ss}y + g_{sI}\dot{x}_3 + Q_s^{*(2)}, \end{aligned} \quad (1.3.5)$$

где $B(0) = B(r_0, s_0)$, $Q_r^*(0)$, $Q_s^*(0)$ – значения сил в положении равновесия (1.3.2), $Q_r^{*(2)}$, $Q_s^{*(2)}$ – члены высших порядков по отношению к возмущениям

x_1, x_2, x_3, y и обращающиеся в нуль, если $x_1 = x_2 = x_3 = y = 0$. Символами $g_{rr}, g_{sr}, g_{rs}, g_{ss}, g_{rI}, g_{sI}, f_{rr}, f_{rI}, f_{rs}, f_{sr}, f_{sI}, f_{ss}$ обозначены постоянные матрицы коэффициентов соответствующих размерностей:

$$\begin{aligned} g_{rr} &= \left(\frac{\partial Q_r}{\partial \dot{r}} \right)_0 & f_{rr} &= \left(\frac{\partial Q_r}{\partial r} \right)_0 & f_{rI} &= \left(\frac{\partial Q_r}{\partial I} \right)_0 & f_{rs} &= \left(\frac{\partial Q_r}{\partial s} \right)_0 \\ g_{sr} &= \left(\frac{\partial Q_s}{\partial \dot{r}} \right)_0 & f_{sr} &= \left(\frac{\partial Q_s}{\partial r} \right)_0 & f_{sI} &= \left(\frac{\partial Q_s}{\partial I} \right)_0 & f_{ss} &= \left(\frac{\partial Q_s}{\partial s} \right)_0 \\ g_{rs} &= \left(\frac{\partial Q_r}{\partial \dot{s}} \right)_0 & g_{ss} &= \left(\frac{\partial Q_s}{\partial \dot{s}} \right)_0 & g_{rI} &= \left(\frac{\partial Q_r}{\partial I} \right)_0 & g_{sI} &= \left(\frac{\partial Q_s}{\partial I} \right)_0. \end{aligned}$$

Все элементы матриц вычислены в положении равновесия (1.3.2), что отмечено нижним индексом 0.

Пусть также в окрестности положения равновесия (1.3.2)

$$\mathcal{P}_{II} w_I = \omega_{Ir} x_1 + \phi_{Ir} x_2 + \omega_{Is} y + \Omega_{Ir}^{(2)}(x_1, y; x_2), \quad (1.3.6)$$

где постоянные матрицы коэффициентов обозначены следующим образом:

$$\omega_{Ir} = \mathcal{P}_{II} \cdot \left(\frac{\partial w_I}{\partial r} \right)_0 \quad \omega_{Is} = \mathcal{P}_{II} \cdot \left(\frac{\partial w_I}{\partial s} \right)_0 \quad \phi_{Ir} = \mathcal{P}_{II} \cdot \left(\left(\frac{\partial w_I}{\partial \dot{r}} \right)_0 + \left(\frac{\partial w_I}{\partial \dot{s}} \right)_0 \cdot B(0) \right).$$

Элементы всех матриц вычислены в положении равновесия. $\Omega_{Ir}^{(2)}(x_1, y; x_2)$ – члены высших порядков относительно возмущений координат, обращающиеся в ноль при $x_1 = x_2 = y = 0$.

Для выделения первого приближения членов $\left(\frac{\partial W}{\partial r} \right)'$ и $B' \cdot \left(\frac{\partial W}{\partial s} \right)'$ используем формулы (А.32), (А.33) из приложения А. В первом случае мы имеем векторную функцию, во втором – произведение функциональной матрицы на векторную функцию. Поэтому

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial W}{\partial r} \right)' &= \left(\frac{\partial W}{\partial r} \right)'_0 + \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial W}{\partial r} \right)' \right)_0 x_1 + \left(\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial W}{\partial r} \right)' \right)_0 y + \dots, \\ B' \left(\frac{\partial W}{\partial s} \right)' &= B'(0) \left(\frac{\partial W}{\partial s} \right)'_0 + \left[(B')_0^r \left(E_{n-k} \otimes \left(\frac{\partial W}{\partial s} \right)'_0 \right) + B'(0) \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial W}{\partial s} \right)' \right)_0 \right] x_1 + \\ &+ \left[(B')_0^s \left(E_m \otimes \left(\frac{\partial W}{\partial s} \right)'_0 \right) + B'(0) \left(\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial W}{\partial s} \right)' \right)_0 \right] y + \dots \end{aligned}$$

Здесь согласно обозначениям, введённым выше, матрицы $(B')_0^r$ и $(B')_0^s$ составлены из блоков частных производных B' по координатам q_i, q_p :

$$(B')_0^r = \left(\frac{\partial B'}{\partial q_1} \dots \frac{\partial B'}{\partial q_{n-k}} \right)_0, \quad (B')_0^s = \left(\frac{\partial B'}{\partial q_{n+1}} \dots \frac{\partial B'}{\partial q_{n+m}} \right)_0.$$

Все элементы матриц вычислены в положении равновесия (1.3.2). Аналогично,

$$\begin{aligned} B' Q_s^* &= B'(0) Q_s^*(0) + [(B')_0^r (E_{n-k} \otimes Q_s^*(0)) + B'(0) f_{sr}] x_1 + \\ &+ B'(0) (g_{sr} + g_{ss} B(0)) x_2 + [(B')_0^s (E_m \otimes Q_s^*(0)) + B'(0) f_{ss}] y + \\ &+ B'(0) g_{sI} \dot{x}_3 + B'(0) f_{sI} x_3 + \dots \end{aligned}$$

Окончательно с учетом уравнений (1.3.1) в окрестности положения равновесия (1.3.2) будем иметь

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2, \\ A\dot{x}_2 - H\dot{x}_3 = - [C_1 + B'(0)C_2 + C_{rr}^B - F_{rr}] x_1 - (K - G) x_2 + \\ \quad + F_{rI}x_3 - [C_2' + B'(0)C_3 + C_{rs}^B - F_{rs}] y + X_r^{(2)}(x_1, x_2, x_3, y), \\ \mathcal{L}_{II}\dot{x}_3 = -\omega_{Ir}x_1 - \phi_{Ir}x_2 - \mathcal{R}_{II}x_3 - \omega_{Is}y + k_{II}u + X_I^{(2)}(x_1, x_2, x_3, y), \\ \dot{y} = B(0) \cdot y_2 + B^{(1)}(x_1, y) \cdot y_2, \end{array} \right. \quad (1.3.7)$$

где

$$B^{(1)}(x_1, y) = B(r_0 + x_1, s_0 + y) - B(r_0, s_0),$$

постоянные матрицы коэффициентов выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} A &= a_{rr}(0) = a_{rr}(r_0, s_0), \\ K &= \left(\frac{\partial a_r}{\partial r}\right)_0 - \left(\frac{\partial a_r}{\partial r}\right)'_0 + \left(\frac{\partial a_r}{\partial s}\right)_0 B(0) - B'(0) \left(\frac{\partial a_r}{\partial s}\right)'_0, \\ G &= g_{rr} + g_{rs}B(0) + B'(0)g_{sr} + B'(0)g_{ss}B(0), \quad H = g_{rI} + B'(0)g_{sI}, \\ F_{rr} &= f_{rr} + B'(0)f_{sr}, \quad F_{rs} = f_{rs} + B'(0)f_{ss}, \quad F_{rI} = f_{rI} + B'(0)f_{sI}, \\ C_1 &= \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)'\right)_0, \quad C_2 = \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial W}{\partial s}\right)'\right)_0, \quad C_3 = \left(\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial W}{\partial s}\right)'\right)_0, \\ C_{rr}^B &= (B')_0^r \left(E_{n-k} \otimes \left[\left(\frac{\partial W}{\partial s}\right)'_0 - Q_s^*(0) \right] \right), \quad C_{rs}^B = (B')_0^s \left(E_m \otimes \left[\left(\frac{\partial W}{\partial s}\right)'_0 - Q_s^*(0) \right] \right), \end{aligned}$$

Замечание 1.3.4. Из формул для матриц C_{rr}^B , C_{rs}^B видно, что для их вычисления необходимы частные производные выражения B , что соответствует частным производным второго порядка уравнений связей (1.1.1). Следует отметить, что ещё Э.Дж. Раус [61] указывал на необходимость учёта квадратичных членов в разложении геометрических связей при выделении первого приближения в уравнениях возмущённого движения с множителями связей. Таким образом, в общем случае в коэффициентах первого приближения присутствуют члены, происходящие из нелинейных членов уравнений связей.

Теперь для выделения критических переменных и приведения системы (1.3.7) к специальному виду теории критических случаев, применим линейную замену [70]

$$z = y - B(0)x_1. \quad (1.3.8)$$

Тогда система (1.3.7) приведётся к виду

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2, \\ A\dot{x}_2 - H\dot{x}_3 = -[C + C^B - F]x_1 - \\ \quad - (K - G)x_2 + F_{rI}x_3 - Sz + \tilde{X}_r^{(2)}(x_1, x_2, x_3, z), \\ L_{II}\dot{x}_3 = -\Omega_{Ir}x_1 - \phi_{Ir}x_2 - R_{II}x_3 - \omega_{Is}z + k_{II}u + \tilde{X}_I^{(2)}(x_1, x_2, x_3, z), \\ \dot{z} = B^{(1)}(x_1, z) \cdot x_2. \end{array} \right. \quad (1.3.9)$$

После замены (1.3.8) в последних m уравнениях остаются только нелинейные члены, а матрицы коэффициентов изменяются следующим образом:

$$\begin{aligned} C &= C_1 + B'(0)C_2 + C_2'B(0) + B'(0)C_3B(0), \quad C^B = C_{rr}^B + C_{rs}^B B(0), \\ F &= F_{rr} + F_{rs}B(0), \quad \Omega_{Ir} = \omega_{Ir} + \omega_{Is}B(0). \quad S = C_2' + B'(0)C_3 + C_{rs}^B - F_{rs}. \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \tilde{X}_r^{(2)}(x_1, x_2, x_3, z) &= X_r^{(2)}(x_1, x_2, x_3, z + B(0)x_1), \\ \tilde{X}_I^{(2)}(x_1, x_2, x_3, z) &= X_I^{(2)}(x_1, x_2, x_3, z + B(0)x_1). \end{aligned}$$

Теперь приведём (1.3.9) к нормальной форме. Обозначим

$$\begin{pmatrix} A & -H \\ 0 & \mathcal{L}_{II} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & h \\ 0 & \mathcal{L}_{II}^{-1} \end{pmatrix}, \quad \text{где } h = A^{-1}H\mathcal{L}_{II}^{-1}.$$

После умножения слева на обратную матрицу, система (1.3.9) преобразуется к виду

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = N_1x_1 + N_2x_2 + N_3x_3 + S_1z + U_1u + \Xi_r^{(2)}(x_1, x_2, x_3, z), \\ \dot{x}_3 = N_4x_1 + N_5x_2 + N_6x_3 + S_2z + U_2u + \Xi_I^{(2)}(x_1, x_2, x_3, z), \\ \dot{z} = B^{(1)}(x_1, z) \cdot x_2, \end{array} \right. \quad (1.3.10)$$

где постоянные матрицы коэффициентов теперь выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} N_1 &= -A^{-1}(C + C^B - F) - h\Omega_{Ir}, \quad N_2 = -A^{-1}(K - G) - h\phi_{Ir}, \\ N_3 &= A^{-1}F_{rI} - hR_{II}, \quad N_4 = -\mathcal{L}_{II}^{-1}\Omega_{Ir}, \quad N_5 = -\mathcal{L}_{II}^{-1}\phi_{Ir}, \quad N_6 = -\mathcal{L}_{II}^{-1}R_{II}, \\ S_1 &= A^{-1}S - h\omega_{Is}, \quad S_2 = -\mathcal{L}_{II}^{-1}\omega_{Is}, \quad U_1 = hk_{II}, \quad U_2 = \mathcal{L}_{II}^{-1}k_{II}. \\ \Xi_r^{(2)} &= A^{-1}X_r^{(2)} + hX_I^{(2)}, \quad \Xi_I^{(2)} = \mathcal{L}_{II}^{-1}X_I^{(2)}. \end{aligned} \quad (1.3.11)$$

Уравнения (1.3.10) совместно с формулами (1.3.11) являются математической моделью мехатронной системы с нелинейными геометрическими связями при явном учёте математической модели двигателей в окрестности положения равновесия (1.3.2). Теперь на основе этой модели можно провести анализ устойчивости положения равновесия (1.3.2). Линеаризованная система уравнений динамики имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = N_1x_1 + N_2x_2 + N_3x_3 + S_1z + U_1u, \\ \dot{x}_3 = N_4x_1 + N_5x_2 + N_6x_3 + S_2z + U_2u, \\ \dot{z} = 0. \end{cases} \quad (1.3.12)$$

Рассмотрим матрицу системы (1.3.12). Это квадратная блочная матрица порядка $2n + k + m$, имеющая вид:

$$N = \begin{pmatrix} 0 & E_{n-k} & 0 & 0 \\ N_1 & N_2 & N_3 & S_1 \\ N_4 & N_5 & N_6 & S_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.3.13)$$

Нулями здесь обозначены нулевые матрицы соответствующих размеров, а блоки $N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6, S_1, S_2$ – в общем случае ненулевые матрицы, которые выражаются известным образом по формулам (1.3.11).

Характеристическое уравнение системы (1.3.12) имеет вид:

$$\lambda^m \cdot \det \begin{pmatrix} -\lambda E_{n-k} & E_{n-k} & 0 \\ N_1 & N_2 - \lambda E_{n-k} & N_3 \\ N_4 & N_5 & N_6 - \lambda E_m \end{pmatrix} = 0.$$

Таким образом, имеем критический случай m нулевых корней.

Замечание 1.3.5. Система (1.3.10) была получена при явном учёте математических моделей исполнительных электроприводов. Нулевые корни характеристического уравнения соответствуют уравнениям связей. Как будет показано, наличие уравнений (1.2.14) при соответствующем управлении, не влияет на количество нулей.

Так как характеристическое уравнение инвариантно по отношению к невырожденным линейным преобразованиям, приходим к утверждению:

Утверждение 1.3.1. *Устойчивость положений равновесия мехатронных систем с нелинейными геометрическими связями (1.1.1) возможна только в критических случаях. Причём число нулевых корней системы первого приближения в окрестности положения равновесия не менее t , где t - число геометрических связей.*

1.4. Стабилизация положений равновесия при полной информации о состоянии

В данном разделе продолжим анализ структуры членов системы (1.3.10) и определим достаточные условия, при выполнении которых положение равновесия (1.3.2) устойчиво асимптотически.

Сначала приведём формулировку основной теоремы, устанавливающей достаточные условия асимптотической устойчивости для систем с избыточными координатами.

Теорема 1.4.1. [28] *Для системы с геометрическими связями (1.1.1), находящейся под действием произвольных потенциальных и непотенциальных сил положение равновесия (1.3.2) устойчиво асимптотически, если действительные части всех корней характеристического уравнения, кроме t нулевых, соответствующих уравнениям связей, отрицательны.*

Априори мы не можем утверждать, что все ненулевые корни характеристического уравнения линеаризованной системы (1.3.12) имеют отрицательные действительные части. Для того чтобы обеспечить отрицательность действительных частей всех ненулевых корней характеристического уравнения, в систему различными способами вводятся управляющие воздействия. Способ введения управляющих воздействий необходимо предусматривать еще на стадии математического моделирования при составлении уравнений динамики. В рассматриваемом случае это напряжение на якоре двигателей постоянного тока.

Определение 1.4.1. *Если линейную стационарную систему, описываемую уравнением*

$$\dot{\xi} = N\xi + Ui, \quad \xi' = (x', \dot{x}'), \quad (1.4.1)$$

можно из любого заданного начального состояния перевести в любое желаемое состояние за конечный промежуток времени, выбирая надлежащим образом закон изменения управляющих сил u , то её называют вполне управляемой [63]. Также говорят, что пара матриц (N, U) управляема.

Так как управляемость системы определяется [63] строением матриц N и U , то и условие управляемости выражается в терминах этих матриц. А именно, условие управляемости системы (1.4.1) состоит в том [63], что матрица

$$\mathcal{W} = \begin{pmatrix} U & NU & N^2U & \dots & N^{n-1}U \end{pmatrix}$$

имеет полный ранг.

Обозначим $\xi' = (x'_1, x'_2, x'_3)$ – вектор фазовых переменных, не содержащий критических переменных z . Тогда систему (1.3.10) можно переписать в следующем компактном виде:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = M\xi + Uu + Zz + \Xi^{(2)}(\xi, z), \\ \dot{z} = B^{(1)}(x_1, z)x_2. \end{cases} \quad (1.4.2)$$

где

$$M = \begin{pmatrix} 0 & E_{n-k} & 0 \\ N_1 & N_2 & N_3 \\ N_4 & N_5 & N_6 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 0 \\ U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 0 \\ S_1 \\ S_2 \end{pmatrix}, \quad \Xi^{(2)}(\xi, x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \Xi_r^{(2)} \\ \Xi_I^{(2)} \end{pmatrix}.$$

Теперь мы можем сформулировать достаточное условие стабилизируемости системы (1.4.2) в виде следующей теоремы.

Теорема 1.4.2. *Если пара (M, U) управляема, то положение равновесия (1.3.2) стабилизируется до асимптотической устойчивости по всем переменным приложением по всему вектору напряжений e_r управления вида*

$$u = -\mathcal{K}\xi, \quad (1.4.3)$$

где \mathcal{K} – постоянная матрица.

Доказательство. По доказанному выше утверждению 1.3.1, для системы (1.4.2) имеет место критический случай m нулевых корней. Выделим из полной нелинейной системы (1.4.2) управляемую линейную подсистему меньшей размерности, в которую не входят критические переменные:

$$\dot{\xi} = M\xi + Uu. \quad (1.4.4)$$

Если пара (M, U) управляема, т.е. выполнено условие

$$\text{rank} \begin{bmatrix} U & MU & M^2U & \dots & M^{2n-k-1}U \end{bmatrix} = 2n - k, \quad (1.4.5)$$

то существует [14] управление u вида (1.4.3), действующее по вектору напряжений e_ν , такое, что действительные части всех корней подсистемы (1.4.4) отрицательны.

Пусть такое управление найдено. Подставим его в полную нелинейную систему (1.4.2). В результате она преобразуется к виду:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = (M - U\mathcal{K})\xi + Zz + \Xi^{(2)}(\xi, z), \\ \dot{z} = B^{(1)}(x_1, z)x_2, \end{cases} \quad (1.4.6)$$

причём характеристическое уравнение линеаризованной системы

$$\begin{cases} \dot{\xi} = (M - U\mathcal{K})\xi + Zz, \\ \dot{z} = 0, \end{cases} \quad (1.4.7)$$

имеет ровно m нулевых корней, а у остальных действительные части меньше нуля. Таким образом, полная нелинейная система (1.4.6) приведена к специальному виду теории критических случаев. Причём, в силу структуры нелинейных членов последних m уравнений системы (1.4.6), имеет место особый случай. В таком виде система (1.4.6) полностью соответствует условиям теоремы 1.4.1 об асимптотической устойчивости положений равновесия систем с геометрическими связями. \square

Стабилизирующее управление u может быть найдено по методу Н.Н. Красовского [46] посредством решения линейно-квадратичной задачи стабилизации для управляемой подсистемы (1.4.4), которая сводится к решению системы дифференциальных уравнений относительно коэффициентов функции Ляпунова. В случае, когда матрицы M и U постоянны, функция Ляпунова ищется в виде квадратичной формы $V_0 = \xi'V\xi$, где V – постоянная матрица коэффициентов. При этом дифференциальные уравнения превращаются [50] в алгебраическое матричное уравнение Риккати

$$VM + M'V - V(UR^{-1}U')V + Q = 0, \quad (1.4.8)$$

где квадратные матрицы Q и R порядков $2n - k$ и k соответственно определяют критерий качества

$$I = \int_{t_0}^{+\infty} (\xi'R\xi + u'Qu) dt.$$

Соответствующее линейное управляющее воздействие u рассчитывается по формуле

$$u = -R^{-1}Q'V \cdot \xi,$$

т.е. $\mathcal{K} = R^{-1}Q'V$.

Матрицы, входящие в алгебраическое уравнение Риккати (1.4.8), определяются в явном виде формулами (1.3.11) и могут быть вычислены, если заданы выражения кинетической и потенциальной энергии, уравнения связей, выражения непотенциальных сил и некоторые характеристики управляющих двигателей. Для решения уравнения (1.4.8) существуют различные численные методы, о которых подробнее будет указано в главе 4.

1.5. Стабилизация положений равновесия при неполной информации о состоянии

Обычно на практике полное фазовое состояние объекта неизвестно. Информация о работе системы преимущественно определяется посредством датчиков, число которых, как правило, ограничено. Измерение значений некоторых параметров может представлять принципиальную сложность в силу их природы. Но даже если все фазовые переменные принципиально поддаются измерению, возникает вопрос об уменьшении количества датчиков для упрощения обслуживания системы и возможного уменьшения её стоимости. Следует также отметить, что каждое измерительное устройство является инерционным, со своим переходным процессом. Сокращение числа датчиков упрощает структуру системы и, тем самым, повышает её надёжность. Поэтому очень важным этапом решения прикладных задач является разработка систем оценивания фазового состояния управляемого объекта (наблюдателей) по имеющейся измерительной информации, которая будет использоваться для формирования управления.

Отметим также, что в ситуации, когда необходимо непрерывно оценивать вектор фазовых переменных в реальном времени, ещё большее значение для повышения качества работы системы управления имеет адекватность математической модели управляемого объекта. При неполной информации математическая модель системы используется во всё время её функционирования, поскольку в системе оценивания состояния происходит непрерывное сравнение измеряемого

и соответствующего модельного сигналов. Так, для систем с геометрическими связями, динамика математической модели, построенной без учёта нелинейных членов в уравнениях связей, может коренным образом отличаться от поведения реального объекта.

Отметим также, что методы аналитической механики позволяют использовать для построения математических моделей не только разные формы уравнений движения, но и различные типы переменных, что даёт более широкий выбор вариантов использования измерительных устройств и способов управления. Подробнее об этом будет написано в главе 2.

В терминах математического моделирования систем управление объектом при неполной информации о состоянии включает задачу проектирования наблюдателя [14, 18] для определения неизвестных значений фазовых параметров системы.

Определение 1.5.1. *Возможность восстановления начального состояния системы по некоторой наблюдаемой линейной операции над её выходом (выходным сигналом) называется наблюдаемостью [63]. Системы, обладающие этим свойством, называются вполне наблюдаемыми. Матрицей наблюдаемости называется матрица*

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} C' & A'C' & A'^2C' & \dots & (A')^{n-1}C' \end{pmatrix},$$

где A – матрица системы – квадратная матрица порядка n , C – матрица выходных сигналов размера $t \times n$. Автономная система наблюдаема тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$\text{rank} \mathcal{O} = n.$$

Если для пары матриц (A, C) это условие выполняется, то пара называется наблюдаемой.

Пусть информация о фазовом состоянии системы получается в виде вектора σ размерности $\dim \sigma \leq 2n - k$, линейные члены в разложении которого в окрестности рассматриваемого положения равновесия имеют вид

$$\sigma = \Sigma \xi = \Sigma_1 x_1 + \Sigma_2 x_2 + \Sigma_3 x_3. \quad (1.5.1)$$

Обозначим $\hat{\xi}' = (\hat{x}'_1 \hat{x}'_2 \hat{x}'_3)$ – вектор оценки фазового состояния системы, полученный по измерению (1.5.1). Поскольку полный вектор фазовых координат неизвестен, управляющее воздействие, поступающее на вход системы, будем

формировать в виде

$$u = -\mathcal{K}\hat{\xi}, \quad (1.5.2)$$

а вектор $\hat{\xi}$ будем определять посредством наблюдателя, определяемого линейной системой [14]

$$\dot{\hat{\xi}} = M\hat{\xi} + Uu + \Lambda(\sigma - \Sigma\hat{\xi}), \quad (1.5.3)$$

где Λ – постоянная матрица коэффициентов системы оценивания.

Теорема 1.5.1. *Если для систем (1.4.2) и (1.5.3) пара (M, U) управляема, а пара (M, Σ) наблюдаема, то существует линейное управление вида $u = -\mathcal{K}\hat{\xi}$, стабилизирующее положение равновесия (1.3.2) до асимптотической устойчивости по всем переменным.*

Доказательство. Полная система уравнений динамики с учётом наблюдателя (1.5.3) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{\xi} = M\xi + Uu + Zz + \Xi^{(2)}(\xi, z), \\ \dot{z} = B^{(1)}(x_1, z)x_2, \\ \dot{\hat{\xi}} = M\hat{\xi} + Uu + \Lambda(\sigma - \Sigma\hat{\xi}), \\ u = -\mathcal{K}\hat{\xi}, \quad \sigma = \Sigma\xi. \end{cases} \quad (1.5.4)$$

При этом, поскольку в случае асимптотической устойчивости $\lim_{t \rightarrow 0} \|\xi\| = 0$, необходимо построить такой наблюдатель, чтобы вектор оценки $\hat{\xi}$ также асимптотически стремился к нулю, т.е. $\hat{\xi} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Тогда для вектора ошибки $e = \hat{\xi} - \xi$ будет выполнено

$$e = (\hat{\xi} - \xi) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty. \quad (1.5.5)$$

Так как выполнены условия управляемости и наблюдаемости пар (M, U) и (M, Σ) , т.е. выполнены условия

$$\begin{aligned} \text{rank } [U \quad MU \quad M^2U \quad \dots \quad M^{2n-k-1}U] &= 2n - k, \\ \text{rank } [\Sigma' \quad M'\Sigma' \quad (M')^2\Sigma' \quad \dots \quad (M')^{2n-k-1}\Sigma'] &= 2n - k, \end{aligned}$$

то существуют [14] такие матрицы \mathcal{K} и Λ при которых действительные части всех корней характеристического уравнения линейной системы

$$\begin{cases} \dot{\xi} = (M - U\mathcal{K})\xi + U\mathcal{K}e, \\ \dot{e} = (M - \Lambda\Sigma)e, \end{cases} \quad (1.5.6)$$

отрицательны. Линейно-квадратичная задача для определения управления была построена в разделе 1.4. А коэффициенты наблюдателя можно найти, решая дуальную линейно-квадратичную задачу:

$$\dot{\mu} = M'\mu + \Sigma'\nu, \quad \nu = \Lambda'\mu. \quad (1.5.7)$$

Тогда структура полной нелинейной системы 1.5.3, замкнутой управлением вида (1.5.4) будет полностью соответствовать условиям теоремы 1.4.1 об асимптотической устойчивости положений равновесия систем с избыточными координатами. Минимальные размерности управляющего воздействия и вектора измерения определяются [15] числом нетривиальных инвариантных многочленов матрицы M . \square

1.6. Алгоритм численного нахождения коэффициентов стабилизирующего управления и наблюдателя для мехатронных систем с геометрическими связями

В заключение, на основании полученных результатов, приведём алгоритм, который может быть использован для численного нахождения коэффициентов стабилизирующего воздействия в системе MATLAB. В разработанном программном комплексе он применялся для стабилизации положений равновесия системы Ball and Beam.

Рассмотрим мехатронную систему с m нелинейными геометрическими связями (1.1.1), управляемую посредством напряжений на якоре двигателей электроприводов. Пусть необходимо стабилизировать её в некотором положении $q = q_0$. Пусть также заданы: кинетическая энергия $T(q; \dot{q})$, задаваемая выражением (1.1.4), потенциальная энергия $\Pi(q)$, непотенциальные силы Q_r, Q_s и известны характеристики двигателей.

Алгоритм 1.6.1. *Алгоритм численного нахождения коэффициентов стабилизирующего воздействия и наблюдателя для мехатронных систем с геометрическими связями*

1. *Исходя из уравнений геометрических связей (1.1.1), выделить m координат, которые будут считаться избыточными.*

2. Выразить скорости зависимых координат в виде $\dot{s} = B(q)\dot{r}$, согласно (1.1.3).
3. Исключить зависимые скорости \dot{s} из выражений для кинетической энергии и непотенциальных сил.
4. Определить матрицы коэффициентов кинетической энергии: $a_{rr}(r,s)$, $a_r(q)$, квадратичной и линейной по скоростям частей кинетической энергии системы, приведённую потенциальную энергию $W(q)$ и матрицы, связанные с электродвигателями: \mathcal{L}_{II} , \mathcal{R}_{II} \mathcal{K}_{II} , \mathcal{P}_{II} ;
5. Записать уравнения (1.3.1) для определения всех параметров системы в положении равновесия, найти значение управляющих воздействий в равновесии;
6. Ввести векторы возмущений координат аналогично (1.3.2);
7. По формулам (1.3.11) вычислить матрицы M и U коэффициентов линейной управляемой подсистемы (1.4.4).
8. Проверить условие управляемости (1.4.5) пары (M, U) .
9. Ввести квадратные матрицы R и Q порядков $2n - k$ и k соответственно, определяющие критерий качества. В самом простом случае можно взять $R = E_{2n-k}$ и $Q = E_k$.
10. Если условие управляемости выполнено, найти матрицу V коэффициентов функции Ляпунова, решив матричное уравнение Риккати:

$$VM + M'V - V(UR^{-1}U')V + Q = 0.$$

11. Найти матрицу \mathcal{K} коэффициентов линейного управляющего воздействия по формуле

$$\mathcal{K} = R^{-1}Q'V.$$

1.7. Выводы по главе 1

1. Построены математические модели динамики мехатронных систем с нелинейными геометрическими связями с учётом нелинейности связей при явном учёте математических моделей исполнительных приводов. Для получения математических моделей в виде векторно-матричных нелинейных уравнений и уравнений с выделенным первым приближе-

- нием применена методика использования операций кронекеровского произведения и формул матричного дифференцирования, полученных в приложении А. Рассмотрен случай реализации управления посредством изменения напряжений на якорях двигателей.
2. Показано, что устойчивость положений равновесия таких систем возможно только в критических случаях, причём характеристическое уравнение линеаризованной системы имеет не менее m нулевых корней, где m – число связей.
 3. Сформулировано и доказано достаточное условие разрешимости задачи стабилизации положения равновесия предлагаемым способом при полной и при неполной информации о состоянии.
 4. Разработан алгоритм численного нахождения коэффициентов стабилизирующего воздействия и наблюдателя для мехатронных систем с геометрическими связями.

Глава 2. Стабилизация стационарных движений систем с избыточными координатами

Во второй главе исследуется задача устойчивости и стабилизации стационарных движений мехатронных систем с нелинейными геометрическими связями. За основу построения математических моделей таких систем возьмём уравнения в форме М.Ф. Шульгина в переменных Лагранжа или Рауса. Последние становятся особенно полезными при исследовании устойчивости и стабилизации стационарных движений, так как наличие циклических координат существенно упрощает структуру уравнений [33] и, следовательно, процедуру определения коэффициентов линейных стабилизирующих управлений. Однако они оказываются невыгодными в случае неполной информации о состоянии для реализации найденного управления, поскольку необходимая для формирования управления в таком случае информация о возмущениях циклических импульсов не может быть получена непосредственно информационными датчиками. Использование переменных Лагранжа, как и при стабилизации положений равновесия, выгодно с точки зрения получения информации о текущем фазовом состоянии объекта. Однако их применение существенно усложняет структуру нелинейных уравнений движения. Таким образом, разумным представляется подход, заключающийся в комбинировании разных математических моделей одной и той же управляемой системы на разных этапах её функционирования.

Изложение материала в главе организовано следующим образом. В разделах 2.1 – 2.5 рассматриваются мехатронные системы с нелинейными геометрическими связями в переменных Лагранжа при наличии циклических координат. Предполагается, что управляющие воздействия вводятся по части независимых переменных, части избыточных переменных или по всему вектору циклических координат. Отметим, что в данной главе для упрощения изложения в качестве управляющих воздействий рассматриваются механические моменты или силы, приложенные по соответствующим координатам (по части независимых координат, по части избыточных координат или по всему вектору циклических координат). Строятся нелинейные математические модели систем изучаемого класса в векторно-матричном виде с применением операций кронекеровского произведения и векторизации, а также формул матричного дифференцирования, полученных в приложении А. Определяются параметры возможных стационарных

движений. Исследуется структура уравнений с выделенным первым приближением в окрестности стационарного движения. Достаточные условия разрешимости задачи стабилизации для перечисленных выше способов управления при полной информации о состоянии доказываются в разделе 2.3. Случай неполной информации о состоянии рассматриваются в разделе 2.5. Разделы 2.6 – 2.9 посвящены математическому моделированию систем рассматриваемого класса в переменных Рауса. Рассматривается не исследовавшийся ранее способ управления по части циклических координат. Нелинейная математическая модель мехатронной системы с избыточными координатами в переменных Рауса строится в разделе 2.6. Параметры стационарного движения определяются в разделе 2.7, там же анализируется структура системы в окрестности этого движения. Достаточные условия стабилизации при полной информации о состоянии формулируются и доказываются в разделе 2.8, при неполной информации – в разделе 2.9. Выводы по главе 2 приводятся в разделе 2.10.

2.1. Уравнения Шульгина в переменных Лагранжа при наличии циклических координат

В этом разделе получим нелинейную математическую модель мехатронной системы с нелинейными геометрическими связями при наличии циклических координат.

Определение 2.1.1. [67] Координаты β называются циклическими, если выполнены следующие условия:

1. координаты β не входят явно в выражение функции Лагранжа L , (но она явно зависит от $\dot{\beta}$), т.е. $\frac{\partial L}{\partial \beta} \equiv 0$;
2. координаты β не содержатся явно в выражениях конечных связей (1.1.1), т.е.

$$F(q) = F(\alpha, s), \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial \beta} \equiv 0.$$

Остальные – нециклические – координаты, называются позиционными.

Для выделения вектора циклических координат дополнительно разделим вектор независимых параметров на две части $r' = (\alpha', \beta')$, где

$$\alpha' = (q_1, \dots, q_k), \quad \beta' = (q_{k+1}, \dots, q_n), \quad l = n - k.$$

Тогда продифференцированные по времени уравнения связей (1.1.1) можно записать в виде:

$$\dot{s} = B_{s\alpha} \cdot \dot{\alpha} + B_{s\beta} \cdot \dot{\beta}. \quad (2.1.1)$$

Из определения циклических скоростей, а именно, из второго условия сразу следует, что

$$B_{s\beta} = - \left(\frac{\partial F}{\partial s} \right)^{-1} \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial \beta} \right) = 0$$

и выражения (2.1.1) для зависимых скоростей \dot{s} имеют вид

$$\dot{s} = B_{s\alpha}(\alpha, s) \cdot \dot{\alpha}, \quad B_{s\alpha}(\alpha, s) = - \left(\frac{\partial F}{\partial s} \right)^{-1} \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial \alpha} \right). \quad (2.1.2)$$

Следуя [51] будем также считать, что соответствующие циклическим координатам обобщённые силы равны нулю, а выражения остальных обобщённых сил не зависят от этой координаты, т.е.

$$Q_\alpha = Q_\alpha(\alpha, s, \dot{q}), \quad Q_s = Q_s(\alpha, s, \dot{q}).$$

Определение 2.1.2. [19] Координаты β будем называть псевдоциклическими, если для них выполнены условия 1 и 2 определения 2.1.1, но по ним могут быть приложены управляющие силы, действующие в окрестности невозмущенного движения.

Замечание 2.1.1. Из известного равенства [51, 56, 66]

$$-\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{\partial R}{\partial q}$$

следует, что циклические или псевдоциклические координаты β также не входят явно в функцию Рауса R .

В связи с дополнительным разбиением фазового вектора, общий вид кинетической энергии усложнится. Теперь после исключения избыточных скоростей вместо (1.2.3) она будет иметь вид

$$\begin{aligned} T^*(\alpha, s; \dot{r}) &= T_2^*(\alpha, s; \dot{r}) + T_1^*(\alpha, s; \dot{r}) + T_0(\alpha, s) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\dot{\alpha}' \cdot a_{\alpha\alpha} \cdot \dot{\alpha} + \dot{\beta}' \cdot a_{\beta\alpha} \cdot \dot{\alpha} + \dot{\alpha}' \cdot a_{\alpha\beta} \cdot \dot{\beta} + \dot{\beta}' \cdot a_{\beta\beta} \cdot \dot{\beta} \right) + \\ &\quad + a'_\alpha \cdot \dot{\alpha} + a'_\beta \cdot \dot{\beta} + T_0, \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

где матрицы коэффициентов следующим образом зависят от коэффициентов первоначальной кинетической энергии:

$$a_{\alpha\alpha} = A_{\alpha\alpha} + B'_{s\alpha}A_{s,\alpha} + A_{\alpha s}B_{s\alpha} + B'_{s\alpha}A_{ss}B_{s\alpha}, \quad a_{\beta\alpha} = A_{\beta\alpha} + A_{\beta s}B_{s\alpha},$$

$$a_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} + B'_{s\alpha}A_{s\beta} = a'_{\beta\alpha}, \quad a_{\beta\beta} = A_{\beta\beta}, \quad a'_{\alpha} = A'_{\alpha} + A'_{s}B_{s\alpha}, \quad a'_{\beta} = A'_{\beta}.$$

$A_{\alpha\alpha}$, $A_{\alpha\beta} = A'_{\beta\alpha}$, $A_{\alpha s} = A'_{s,\alpha}$, $A_{\beta s} = A'_{s\beta}$, $A_{\beta\beta}$, A_{ss} – блоки матрицы A_{qq} квадратичной по скоростям части кинетической энергии (1.1.4) размеров $k \times k$, $k \times l$, $k \times m$, $l \times m$, $l \times l$ и $m \times m$ соответственно:

$$A_2(\alpha, s) = \begin{pmatrix} A_{\alpha\alpha} & A_{\alpha\beta} & A_{\alpha s} \\ A_{\beta\alpha} & A_{\beta\beta} & A_{\beta s} \\ A_{s\alpha} & A_{s\beta} & A_{ss} \end{pmatrix}.$$

Их элементы являются функциями координат α и s .

A_{α} , A_{β} , A_s – блоки столбца A_q линейной по скоростям части кинетической энергии (1.1.4) размеров $k \times 1$, $l \times 1$, $m \times 1$ соответственно, элементы которых также зависят только от координат α и s :

$$A_q(\alpha, s) = \begin{pmatrix} A_{\alpha} \\ A_{\beta} \\ A_s \end{pmatrix}.$$

Как и ранее, через $W(\alpha, s)$ обозначим приведенную потенциальную энергию:

$$W(\alpha, s) = \Pi(\alpha, s) - T_0(\alpha, s).$$

Функция Лагранжа с учётом (2.1.2) в этом случае также будет иметь дополнительные по сравнению с (1.2.5) члены:

$$L^*(\alpha, s; \dot{r}) = \frac{1}{2} \left(\dot{\alpha}' a_{\alpha\alpha} \dot{\alpha} + 2 \dot{\alpha}' a_{\alpha\beta} \dot{\beta} + \dot{\beta}' a_{\beta\beta} \dot{\beta} \right) + a'_{\alpha} \dot{\alpha} + a'_{\beta} \dot{\beta} - W. \quad (2.1.4)$$

Пусть \tilde{Q}_{α}^* , \tilde{Q}_s^* – непотенциальные силы, действующие по координатам α и s после исключения скоростей зависимых координат с помощью выражения (2.1.2). В соответствии с определением циклических координат, выражения сил \tilde{Q}_{α}^* , \tilde{Q}_s^* не зависят от β (но могут зависеть от их скоростей $\dot{\beta}$). Если управляющими воздействия являются механические силы и моменты, они включаются в силы \tilde{Q}_{α}^* , \tilde{Q}_s^* . Обозначим u_1 – вектор управляющих воздействий с матрицей M_1 , приложенный по позиционным координатам α . Размерность вектора управления может быть меньше числа позиционных координат, т.е. $\dim u_1 \leq k$. Далее

обозначим u_2 – вектор управляющих воздействий по избыточным координатам s с матрицей M_2 , $\dim u_2 \leq m$. Для рассмотрения случая приложения управления по всему вектору циклических координат β введём вектор u_3 , $\dim u_3 = l$. Тогда

$$\tilde{Q}_\alpha^* = Q_\alpha^* + M_1 u_1, \quad \tilde{Q}_s^* = Q_s^* + M_2 u_2.$$

Уравнения Шульгина для независимых координат в общем случае с учетом цикличности координат β и возможных управлений из (1.1.5) преобразуются к виду

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{\alpha}'} - \frac{\partial L^*}{\partial \alpha'} = Q_\alpha^* + M_1 u_1 + B'_{s\alpha}(\alpha, s) \left(\frac{\partial L^*}{\partial s'} + Q_s^* + M_2 u_2 \right), \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{\beta}'} = u_3. \end{cases} \quad (2.1.5)$$

Для получения полной математической модели, уравнения (2.1.5) следует рассматривать совместно с уравнениями связей (2.1.2) и, возможно, уравнениями динамики электроприводов, аналогично тому, как это было сделано в главе 1.

Замечание 2.1.2. Если $u_3 = 0$, то система (2.1.5) устойчива относительно циклических импульсов $p_\beta = \frac{\partial L^*}{\partial \dot{\beta}'}$. Относительно циклических координат β в общем случае (при неасимптотической устойчивости по отношению к циклическим скоростям $\dot{\beta}$) стационарное движение неустойчиво. Если воздействовать управлением, обеспечивающим асимптотическую устойчивость по отношению к циклическим скоростям $\dot{\beta}$, невозмущенное стационарное движение будет устойчиво не асимптотически по отношению к циклическим координатам.

Используя формулы приложения А, уравнения движения в форме М.Ф. Шульгина можно записать в явном виде

$$\left\{ \begin{array}{l}
 a_{\alpha\alpha}\ddot{\alpha} + a_{\alpha\beta}\ddot{\beta} + ((\dot{\alpha}' \otimes E_k) a_{\alpha\alpha}' + ((\dot{\alpha}' \cdot B'_{s\alpha}) \otimes E_k) a_{\alpha\alpha}^{s'}) \dot{\alpha} - \\
 - \left(\frac{1}{2} (E_k \otimes \dot{\alpha}') a_{\alpha\alpha}' - \frac{1}{2} B'_{s\alpha} (E_m \otimes \dot{\alpha}') a_{\alpha\alpha}^{s'} \right) \dot{\alpha} + \\
 + \left(\frac{\partial a_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial a_\alpha}{\partial s} B_{s\alpha} - \left(\frac{\partial a_\alpha}{\partial \alpha} \right)' - B'_{s\alpha} \left(\frac{\partial a_\alpha}{\partial s} \right)' \right) \dot{\alpha} + \\
 + ((\dot{\alpha}' \otimes E_k) a_{\alpha\beta}' + ((\dot{\alpha}' \cdot B'_{s\alpha}) \otimes E_k) a_{\alpha\beta}^{s'} - (E_k \otimes \dot{\alpha}') a_{\alpha\beta}^{\alpha'}) \dot{\beta} - \\
 - \left(B'_{s\alpha} (E_m \otimes \dot{\alpha}') a_{\alpha\beta}^{s'} + \frac{1}{2} (E_k \otimes \dot{\beta}') a_{\beta\beta}' + B'_{s\alpha} (E_m \otimes \dot{\beta}') a_{\beta\beta}^{s'} \right) \dot{\beta} + \\
 - \left(\left(\frac{\partial a_\beta}{\partial \alpha} \right)' + B'_{s\alpha} \left(\frac{\partial a_\beta}{\partial s} \right)' \right) \dot{\beta} + \left(\frac{\partial W}{\partial \alpha} \right)' + B'_{s\alpha} \left(\frac{\partial W}{\partial s} \right)' \\
 = Q_\alpha^* + M_1 u_1 + B'_{s\alpha} \cdot (Q_s^* + M_2 u_2), \\
 \\
 a_{\beta\alpha}\ddot{\alpha} + a_{\beta\beta}\ddot{\beta} + ((\dot{\alpha}' \otimes E_l) a_{\beta\alpha}' + ((\dot{\alpha}' \cdot B'_{s\alpha}) \otimes E_l) a_{\beta\alpha}^{s'}) \dot{\alpha} + \\
 + ((\dot{\alpha}' \otimes E_l) a_{\beta\beta}' + ((\dot{\alpha}' \cdot B'_{s\alpha}) \otimes E_l) a_{\beta\beta}^{s'}) \dot{\beta} + \\
 + \left(\frac{\partial a_\beta}{\partial \alpha} + \frac{\partial a_\beta}{\partial s} B_{s\alpha} \right) \cdot \dot{\alpha} = u_3, \quad \dot{s} = B_{s\alpha} \cdot \dot{\alpha}.
 \end{array} \right. \quad (2.1.6)$$

Получение этих уравнений абсолютно аналогично выводу уравнений в главе 1. Однако формулы усложнились по сравнению с (1.2.12) из-за выделения дополнительных членов.

При $u_3 = 0$ система (2.1.6) допускает циклические интегралы и может совершать стационарные движения:

$$\alpha = \alpha_0 = \text{const}, \quad \dot{\alpha} = 0, \quad \dot{\beta} = c_\beta = \text{const}, \quad s = s_0 = \text{const}. \quad (2.1.7)$$

Подставив (2.1.7) в (2.1.6), получим уравнения для определения параметров стационарного движения. В том числе, определяются значения программных управлений u_{1_0} , u_{2_0} , необходимых для поддержания стационарного режима работы (2.1.7):

$$\left\{ \begin{array}{l}
 -\frac{1}{2} \left((E_k \otimes c'_\beta) a_{\beta\beta}'(0) + B'_{s\alpha}(0) \cdot (E_m \otimes c'_\beta) a_{\beta\beta}^{s'}(0) \right) c_\beta - \\
 - \left(\left(\frac{\partial a_\beta}{\partial \alpha} \right)'_0 + B'_{s\alpha}(0) \left(\frac{\partial a_\beta}{\partial s} \right)'_0 \right) c_\beta + \\
 + \left(\frac{\partial W}{\partial \alpha} \right)'_0 + B'_{s\alpha}(0) \left(\frac{\partial W}{\partial s} \right)'_0 = Q_\alpha^*(0) + M_1 u_{1_0} + \\
 + B'_{s\alpha}(0) \cdot (Q_s^*(0) + M_2 u_{2_0}),
 \end{array} \right. \quad (2.1.8)$$

Все элементы матриц и постоянные векторы $Q_\alpha^*(0)$ и $Q_s^*(0)$ вычисляются на движении (2.1.7):

$$B_{s\alpha}(0) = B_{s\alpha}(\alpha_0, s_0), \quad Q_\alpha^*(0) = Q_\alpha(\alpha_0, s_0; 0, c_\beta, 0), \quad Q_s^*(0) = Q_s(\alpha_0, s_0; 0, c_\beta, 0).$$

Замечание 2.1.3. Система (2.1.8) даёт k уравнений для определения $n + t$ параметров. Ещё необходимо учесть t уравнений геометрических связей (1.1.1). Следовательно, размерность многообразия стационарных движений голономных систем не меньше $l = n - k$, где l – число циклических координат.

Уравнения (2.1.6) являются нелинейной математической моделью динамики мехатронной системы с избыточными координатами в переменных Лагранжа при наличии циклических координат β . Уравнения для определения параметров стационарных движений (2.1.7) могут быть определены из системы (2.1.8).

2.2. Структура уравнений возмущённого движения в окрестности стационарного движения

В главе 1 было показано, что устойчивость положений равновесия систем с нелинейными геометрическими связями возможна только в критических случаях. Аналогичное утверждение можно сделать и в случае стационарных движений. Чтобы показать это, получим уравнения с выделенным первым приближением в окрестности движения (2.1.7).

Введём возмущения параметров системы и возможных управляющих воздействий:

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_0 + x, & \dot{\beta} &= c_\beta + w, & s &= s_0 + y, \\ u_1 &= u_{1_0} + u_\alpha, & u_2 &= u_{2_0} + u_s, & u_3 &= u_\beta. \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

Подставляя (2.2.1) в (2.1.6), получим уравнения возмущённого движения в явном виде:

$$\left\{ \begin{aligned}
 & a_{\alpha\alpha}\ddot{x} + a_{\alpha\beta}\dot{w} + ((\dot{x}' \otimes E_k) a_{\alpha\alpha}' + ((\dot{x}' \cdot B'_{s\alpha}) \otimes E_k) a_{\alpha\alpha}'^s) \dot{x} - \\
 & - \frac{1}{2} ((E_k \otimes \dot{x}') a_{\alpha\alpha}' + B'_{s\alpha} (E_m \otimes \dot{x}') a_{\alpha\alpha}'^s) \dot{x} + (\dot{x}' \otimes E_k) a_{\alpha\beta}' \dot{x} + \\
 & + (((\dot{x}' \cdot B'_{s\alpha}) \otimes E_k) a_{\alpha\beta}' - (E_k \otimes \dot{x}') a_{\alpha\beta}' - B'_{s\alpha} (E_m \otimes \dot{x}') a_{\alpha\beta}'^s) (c_\beta + w) - \\
 & - \frac{1}{2} ((E_k \otimes (c'_\beta + w')) a_{\beta\beta}' + B'_{s\alpha} (E_m \otimes (c'_\beta + w')) a_{\beta\beta}'^s) (c_\beta + w) + \\
 & + \left(\frac{\partial a_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial a_\alpha}{\partial s} B_{s\alpha} - \left(\frac{\partial a_\alpha}{\partial \alpha} \right)' - B'_{s\alpha} \left(\frac{\partial a_\alpha}{\partial s} \right)' \right) \dot{x} - \\
 & - \left(\left(\frac{\partial a_\beta}{\partial \alpha} \right)' + B'_{s\alpha} \left(\frac{\partial a_\beta}{\partial s} \right)' \right) (c_\beta + w) + \left(\frac{\partial W}{\partial \alpha} \right)' + B'_{s\alpha} \left(\frac{\partial W}{\partial s} \right)' = \\
 & = Q_\alpha^* + M_1 u_\alpha + B'_{s\alpha} \cdot (Q_s^* + M_2 u_s), \\
 \\
 & a_{\beta\alpha}\ddot{x} + a_{\beta\beta}\dot{w} + ((\dot{x}' \otimes E_l) a_{\beta\alpha}' + ((\dot{x}' \cdot B'_{s\alpha}) \otimes E_l) a_{\beta\alpha}'^s) \dot{x} + \\
 & + ((\dot{x}' \otimes E_l) a_{\beta\beta}' + ((\dot{x}' \cdot B'_{s\alpha}) \otimes E_l) a_{\beta\beta}'^s) (c_\beta + w) + \\
 & + \left(\frac{\partial a_\beta}{\partial \alpha} + \frac{\partial a_\beta}{\partial s} B_{s\alpha} \right) \cdot \dot{x} = u_\beta, \\
 \\
 & \dot{y} = B_{s\alpha}(0) \cdot \dot{x} + B_{s,\alpha}^{(1)}(x, y) \cdot \dot{x}.
 \end{aligned} \right. \tag{2.2.2}$$

где $B_{s,\alpha}^{(1)}(x, y) = B_{s\alpha}(\alpha_0 + x, s_0 + y) - B_{s\alpha}(0)$.

Пусть непотенциальные силы Q_α^* , Q_s^* в окрестности движения (2.1.7) представимы в виде

$$\begin{aligned}
 Q_\alpha^*(x, y; \dot{x}, w) &= Q_\alpha^*(0) + f_{\alpha\alpha}x + f_{\alpha s}y + \\
 &+ (g_{\alpha\alpha} + g_{\alpha s}B_{s\alpha}(0)) \dot{x} + g_{\alpha\beta}w + Q_\alpha^{*(2)}(x, y; \dot{x}, w), \\
 Q_s^*(x, y; \dot{x}, w) &= Q_s^*(0) + f_{s\alpha}x + f_{ss}y + \\
 &+ (g_{s,\alpha} + g_{ss}B_{s\alpha}(0)) \dot{x} + g_{s\beta}w + Q_s^{*(2)}(x, y; \dot{x}, w),
 \end{aligned}$$

где $g_{\alpha\alpha}$, $g_{\alpha s}$, $g_{\alpha\beta}$, $g_{s,\alpha}$, g_{ss} , $g_{s\beta}$, $f_{\alpha\alpha}$, $f_{\alpha s}$, $f_{s\alpha}$, f_{ss} – постоянные матрицы коэффициентов, вычисленные на движении (2.1.7):

$$\begin{aligned}
 g_{\alpha\alpha} &= \left(\frac{\partial Q_\alpha}{\partial \dot{\alpha}} \right)_0, \quad g_{\alpha s} = \left(\frac{\partial Q_\alpha}{\partial \dot{s}} \right)_0, \quad g_{\alpha\beta} = \left(\frac{\partial Q_\alpha}{\partial \dot{\beta}} \right)_0, \\
 g_{s,\alpha} &= \left(\frac{\partial Q_s}{\partial \dot{\alpha}} \right)_0, \quad g_{\alpha s} = \left(\frac{\partial Q_s}{\partial \dot{s}} \right)_0, \quad g_{s\beta} = \left(\frac{\partial Q_s}{\partial \dot{\beta}} \right)_0, \\
 f_{\alpha s} &= \left(\frac{\partial Q_\alpha}{\partial s} \right)_0, \quad f_{\alpha\alpha} = \left(\frac{\partial Q_\alpha}{\partial \alpha} \right)_0, \quad f_{s\alpha} = \left(\frac{\partial Q_s}{\partial \alpha} \right)_0, \quad f_{ss} = \left(\frac{\partial Q_s}{\partial s} \right)_0.
 \end{aligned}$$

Символами $Q_\alpha^{*(2)}$ и $Q_s^{*(2)}$ обозначены нелинейные члены, разложение которых начинается со второго порядка относительно переменных x, y, \dot{x}, w . Они обращающиеся в нуль при $x = y = \dot{x} = w = 0$.

Теперь запишем векторно-матричные уравнения движения с выделенным первым приближением. Для их получения в матричном виде будем использовать формулы, полученные в приложении А, аналогично тому, как это было сделано в первой главе. В итоге получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 \ddot{x} + A_2 \dot{w} + \\ + (A_{\alpha\alpha} + K - G_{\alpha\alpha}) \cdot \dot{x} - (A_{\alpha\beta} + K_{\alpha\beta} + G_{\alpha\beta}) \cdot w - \\ - (C_{\alpha\alpha} + C_{\alpha\alpha}^B + F_{\alpha\alpha}^B) \cdot x - (C_{\alpha s} + C_{\alpha s}^B + F_{\alpha s}^B) \cdot y = \\ = M_1 u_\alpha + B'_{s\alpha}(0) M_2 u_s + X_\alpha^{(2)}(x, y; \dot{x}, w, \dot{y}), \\ \\ A_3 \ddot{x} + A_4 \dot{w} + \\ + (A_{\beta\alpha} + K_{\beta\alpha}) \cdot \dot{x} = u_\beta + X_\beta^{(2)}(x, y; \dot{x}, w, \dot{y}), \\ \\ \dot{y} = B_{s\alpha}(0) \cdot \dot{x} + B_{s,\alpha}^{(1)}(x, y) \cdot \dot{x}. \end{array} \right. \quad (2.2.3)$$

Матрицы коэффициентов постоянны, их элементы вычислены на движении (2.1.7). В явном виде они выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} A_1 &= a_{\alpha\alpha}(0), \quad A_2 = a_{\alpha\beta}(0), \quad A_3 = a_{\beta\alpha}(0), \quad A_4 = a_{\beta\beta}(0), \\ A_{\alpha\alpha} &= (E_k \otimes c'_\beta) \cdot \left(\left(\frac{\partial a_{\beta\alpha}^\uparrow}{\partial \alpha} \right)_0 + \left(\frac{\partial a_{\beta\alpha}^\uparrow}{\partial s} \right)_0 B_{s\alpha}(0) - a_{\beta\alpha}^{\alpha'}(0) \right) - \\ &- B'_{s\alpha}(0) \cdot (E_m \otimes c'_\beta) a_{\beta\alpha}^{s'}(0), \quad G_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + B'_{s\alpha}(0) g_{s\beta}, \\ A_{\alpha\beta} &= \left((E_k \otimes c'_\beta) a_{\beta\beta}^{\alpha'} + B'_{s\alpha} (E_m \otimes c'_\beta) a_{\beta\beta}^{s'} \right)_0, \\ A_{\beta\alpha} &= (E_l \otimes c'_\beta) \cdot \left(\left(\frac{\partial a_{\beta\beta}^\uparrow}{\partial \alpha} \right)_0 + \left(\frac{\partial a_{\beta\beta}^\uparrow}{\partial s} \right)_0 B_{s\alpha}(0) \right), \\ K_{\alpha\alpha} &= \left(\frac{\partial a_\alpha}{\partial \alpha} \right)_0 - \left(\frac{\partial a_\alpha}{\partial \alpha} \right)'_0 + \left(\frac{\partial a_\alpha}{\partial s} \right)_0 B_{s\alpha}(0) - B'_{s\alpha}(0) \left(\frac{\partial a_\alpha}{\partial s} \right)'_0, \\ K &= \left(\frac{\partial a_\beta}{\partial \alpha} \right)'_0 + B'_{s\alpha}(0) \left(\frac{\partial a_\beta}{\partial s} \right)'_0, \quad K_{\beta\alpha} = K'_{\alpha\beta}, \\ G_{\alpha\alpha} &= g_{\alpha\alpha} + g_{\alpha s} B_{s\alpha}(0) + B'_{s\alpha}(0) g_{s,\alpha} + B'_{s\alpha}(0) g_{ss} B_{s\alpha}(0), \end{aligned}$$

$$F_{\alpha\alpha}^B = f_{\alpha\alpha} + B'_{s\alpha}(0)f_{s\alpha} + (B'_{s\alpha})_0^\alpha \cdot (E_k \otimes Q_s(0)),$$

$$F_{\alpha s}^B = f_{\alpha s} + B'_{s\alpha}(0)f_{ss} + (B'_{s\alpha})_0^s \cdot (E_m \otimes Q_s(0)).$$

Если дополнительно ввести обозначение для скалярной функции

$$\tilde{W}(\alpha, s) = \frac{1}{2}c'_\beta a_{\beta\beta} c_\beta + c'_\beta a_\beta - W,$$

то получим следующие выражения для матриц коэффициентов:

$$C_{\alpha\alpha} = C_1 + B'_{s\alpha}(0)C_2, \quad C_{\alpha s} = C'_2 + B'_{s\alpha}(0)C_3,$$

$$C_1 = \left(\frac{\partial}{\partial\alpha} \left(\frac{\partial\tilde{W}}{\partial\alpha} \right)' \right)_0, \quad C_2 = \left(\frac{\partial}{\partial\alpha} \left(\frac{\partial\tilde{W}}{\partial s} \right)' \right)_0, \quad C_3 = \left(\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial\tilde{W}}{\partial s} \right)' \right)_0,$$

$$C_{\alpha\alpha}^B = (B'_{s\alpha})_0^\alpha \cdot \left(E_k \otimes \left(\frac{\partial\tilde{W}}{\partial s} \right)'_0 \right), \quad C_{\alpha s}^B = (B'_{s\alpha})_0^s \cdot \left(E_m \otimes \left(\frac{\partial\tilde{W}}{\partial s} \right)'_0 \right).$$

Как и выше, матрицы, содержащие частные производные второго порядка уравнений связей, вычисленных на движении (2.1.7), отмечены верхним индексом В.

Теперь выделим переменные, которым соответствуют нулевые корни характеристического уравнения, и приведем систему (2.2.3) к специальному виду теории критических случаев. Выполним линейную замену [70], аналогичную замене (1.3.8):

$$z = y - B_{s\alpha}(0) \cdot x. \quad (2.2.4)$$

После замены (2.2.4) последние m уравнений принимают вид

$$\dot{z} = \tilde{B}_{s,\alpha}^{(1)}(x, z) \cdot \dot{x}, \quad \tilde{B}_{s,\alpha}^{(1)}(x, z) = B_{s,\alpha}^{(1)}(x, z + B_{s\alpha}(0) \cdot x),$$

а система (2.2.3) преобразуется следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1\ddot{x} + A_2\dot{w} + \\ + (K - G) \cdot \dot{x} - \Upsilon \cdot w - (C + C^B) \cdot x - S \cdot z = \\ = M_1 u_\alpha + B'_{s\alpha}(0)M_2 u_s + \tilde{X}_\alpha^{(2)}(x, y; \dot{x}, w, \dot{z}), \\ A_3\ddot{x} + A_4\dot{w} + \\ + \Gamma \cdot \dot{x} = u_\beta + \tilde{X}_\beta^{(2)}(x, y; \dot{x}, w, \dot{z}), \\ \dot{z} = \tilde{B}_{s,\alpha}^{(1)}(x, z) \cdot \dot{x}, \end{array} \right. \quad (2.2.5)$$

где

$$C = C_{\alpha\alpha} + C_{\alpha s} B_{s\alpha}(0), \quad C^B = C_{\alpha\alpha}^B + C_{\alpha s}^B B_{s\alpha}(0) + F^B,$$

$$F^B = F_{\alpha\alpha}^B + F_{\alpha s}^B B_{s\alpha}(0), \quad S = C_{\alpha s} + C_{\alpha s}^B + F_{\alpha s}^B$$

$$G = G_{\alpha\alpha} - A_{\alpha\alpha}, \quad \Upsilon = A_{\alpha\beta} + K_{\alpha\beta} + G_{\alpha\beta}, \quad \Gamma = A_{\beta\alpha} - K'_{\alpha\beta}.$$

Столбцы $X_\alpha^{(2)}$ и $X_\beta^{(2)}$ после замены (2.2.4) обозначим $\tilde{X}_\alpha^{(2)}$ и $\tilde{X}_\beta^{(2)}$. Это векторные функции, содержащие переменные $x, z, \dot{x}, w, \dot{z}$ в степени не ниже второй и обращающиеся в нуль, если все возмущения $x, z, \dot{x}, w, \dot{z}$ положить равными нулю.

Замечание 2.2.1. Из явных выражения для матриц видно, что C симметрична, а K кососимметрична. Действительно,

$$C = C_1 + B'_{s\alpha}(0)C_2 + C'_2 B_{s\alpha}(0) + B'_{s\alpha}(0)C_3 B_{s\alpha}(0),$$

где C_1 и C_3 – симметричные матрицы. Член Cx представляет собой часть потенциальных, а член Kx часть гироскопических сил, действующих на систему.

Замечание 2.2.2. Запишем матрицу C^B коэффициентов, зависящих от производных кинематических связей (вторых производных уравнений связей (1.1.1)):

$$\begin{aligned} C^B = & (B'_{s\alpha})_0^\alpha \left(E_k \otimes \left(\frac{\partial \tilde{W}}{\partial s} \right)'_0 \right) + (B'_{s\alpha})_0^s \cdot \left(E_m \otimes \left(\frac{\partial \tilde{W}}{\partial s} \right)'_0 \right) B_{s\alpha}(0) + \\ & + f_{\alpha\alpha} + B'_{s\alpha}(0) f_{s\alpha} + (B'_{s\alpha})_0^\alpha \cdot (E_k \otimes Q_s(0)) - \\ & - (f_{\alpha s} + B'_{s\alpha}(0) f_{ss} + (B'_{s\alpha})_0^s \cdot (E_m \otimes Q_s(0))). \end{aligned}$$

Если выполнены условия

1. $(B'_{s\alpha})_0^\alpha, (B'_{s\alpha})_0^s$ – нулевые матрицы;
2. $\left(\frac{\partial \tilde{W}}{\partial s} \right)'_0$ и $Q_s(0)$ – нулевые столбцы,

то коэффициенты системы первого приближения не зависят от производных уравнений связей (1.1.1) высших порядков.

Обозначим обратную матрицу для квадратичной части кинетической энергии

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix},$$

где b_1, b_2, b_3, b_4 – подматрицы размеров $k \times k$, $k \times l$, $l \times k$ и $l \times l$ соответственно. И пусть $\xi' = (x', x'_1, w')$ – вектор фазовых параметров, не содержащий критических переменных. Тогда уравнения (2.2.5) в нормальной форме в векторно-матричной записи примут вид:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = N\xi + V_\alpha u_\alpha + V_s u_s + V_\beta u_\beta + Zz + \Xi^{(2)}(\xi, z), \\ \dot{z} = \tilde{B}_{s\alpha}^{(1)}(x, z) x_1, \end{cases} \quad (2.2.6)$$

где

$$N = \begin{pmatrix} 0 & E_k & 0 \\ b_1\Phi & -b_1\Psi - b_2\Gamma & b_1\Upsilon \\ b_3\Phi & -b_3\Psi - b_4\Gamma & b_3\Upsilon \end{pmatrix}, \quad V_\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ b_1M_1 \\ b_3M_1 \end{pmatrix}, \quad V_\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \\ b_4 \end{pmatrix},$$

$$V_s = \begin{pmatrix} 0 \\ b_1B'_{s\alpha}(0)M_1 \\ b_3B'_{s\alpha}(0)M_1 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 0 \\ b_1S \\ b_3S \end{pmatrix}, \quad \Xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ b_1\tilde{X}_\alpha + b_2\tilde{X}_\beta \\ b_3\tilde{X}_\alpha + b_4\tilde{X}_\beta \end{pmatrix}.$$

Если линеаризовать систему (2.2.6), её матрица будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix} N & Z \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где нули обозначают нулевые матрицы размеров $t \times (n + k)$ и $t \times t$, соответственно. Следовательно, характеристическое уравнение системы, линеаризованной в окрестности (2.1.7), имеет не менее t нулевых корней, соответствующих уравнениям связей. Теперь можно сформулировать

Утверждение 2.2.1. *Устойчивость стационарных движений мехатронных систем с нелинейными геометрическими связями (1.1.1) возможна только в критических случаях. Причём число нулевых корней системы первого приближения в окрестности положения равновесия не менее t , где t - число геометрических связей.*

Таким образом, получены явные уравнения динамики с выделенным первым приближением в окрестности стационарного движения (2.1.7) для голономных систем с избыточными координатами в переменных Лагранжа при наличии циклических координат. Отметим ещё раз, что управление системой осуществляется посредством механических сил или моментов, вводимых по одной из групп параметров: позиционных, избыточных или циклических. Далее на базе уравнений (2.2.6) сформулируем и докажем достаточные условия стабилизируемости стационарного движения (2.1.7) для каждого из предполагаемых вариантов управления в случае полной или не полной информации о состоянии.

2.3. Стабилизация стационарных движений при полной информации о состоянии

Рассмотрим три способа управления системой (2.2.6): по всему вектору циклических координат, по вектору позиционных переменных и по вектору избыточных переменных. В этом разделе будем предполагать, что фазовое состояние объекта полностью известно. Тогда справедливы следующие теоремы.

Теорема 2.3.1. *Если пара (N, V_β) управляема, т.е. выполнено условие*

$$\text{rank} \begin{pmatrix} V_\beta & NV_\beta & N^2V_\beta & \dots & N^{n+k-1}V_\beta \end{pmatrix} = n + k,$$

то существует линейное управление вида

$$u_\beta = -\mathcal{K}_1\xi, \quad (2.3.1)$$

действующее по всему вектору циклических координат, стабилизирующее стационарное движение (2.1.7), до асимптотической устойчивости по всем переменным.

Доказательство. Пусть управление приложено по всему вектору циклических координат. Тогда система уравнений динамики с выделенным первым приближением вместо (2.2.6) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{\xi} = N\xi + V_\beta u_\beta + Zz + \Xi^{(2)}(\xi, z), \\ \dot{z} = \tilde{B}_{s\alpha}^{(1)}(x, z)x_1. \end{cases} \quad (2.3.2)$$

Выделим из (2.3.2) линейную управляемую подсистему:

$$\dot{\xi} = N\xi + V_\beta u_\beta. \quad (2.3.3)$$

Так как условие управляемости для этой подсистемы выполнено, то существует [14] стабилизирующее управление вида (2.3.1). Это управление может быть найдено решением линейно-квадратичной задачи стабилизации по методу Крассовского [46]. Тогда действительные части всех корней характеристического уравнения подсистемы (2.3.3), замкнутой управлением (2.3.1), будут иметь отрицательные действительные части. А полная нелинейная система (2.3.2) примет специальный вид теории критических случаев. Причём в силу структуры нелинейных членов уравнений связи, будет иметь место особый случай. Следовательно, структура этой системы удовлетворяет всем условиям теоремы 1.4.1 об

асимптотической устойчивости. Следовательно, управление (2.3.1) стабилизирует стационарное движение (2.1.7) до асимптотической устойчивости по всем переменным. \square

Замечание 2.3.1. Матрица управляемости в случае управления по всему вектору циклических координат имеет вид:

$$(V_\beta \quad NV_\beta \quad N^2V_\beta \quad \dots \quad N^{n+k-1}V_\beta) = \begin{pmatrix} 0 & b_2 & \dots \\ b_2 & N_2b_2 + N_3b_4 & \dots \\ b_4 & N_5b_2 + N_6b_4 & \dots \end{pmatrix}.$$

Поскольку обратная матрица квадратичной части кинетической энергии невырождена, то ее столбцы линейно независимы. Следовательно, первые l столбцов матрицы управляемости также линейно независимы. Отсюда следует, что

$$\text{rank}(V_\beta \quad NV_\beta \quad N^2V_\beta \quad \dots \quad N^{n+k-1}V_\beta) \geq l,$$

где l – число циклических координат.

Теперь рассмотрим случай управления по вектору позиционных координат.

Теорема 2.3.2. Если пара (N, V_α) управляема, т.е. выполнено условие

$$\text{rank}(V_\alpha \quad NV_\alpha \quad N^2V_\alpha \quad \dots \quad N^{n+k-1}V_\alpha) = n + k,$$

то существует линейное управление, действующее только по части позиционных координат:

$$u_\alpha = -\mathcal{K}_2\xi, \quad (2.3.4)$$

стабилизирующее стационарное движение (2.1.7), до асимптотической устойчивости по всем переменным.

Доказательство. Доказательство теоремы (2.3.2) аналогично доказательству предыдущей теоремы. Если управление приложено только по части позиционных координат, система уравнений динамики (2.2.6) с выделенным первым приближением принимает вид

$$\begin{cases} \dot{\xi} = N\xi + V_\alpha u_\alpha + Zz + \Xi^{(2)}(\xi, z), \\ \dot{z} = \tilde{B}_{s\alpha}^{(1)}(x, z)x_1. \end{cases} \quad (2.3.5)$$

Управляемая линейная подсистема в данном случае будет иметь вид

$$\dot{\xi} = N\xi + V_\alpha u_\alpha. \quad (2.3.6)$$

Решая линейно-квадратичную задачу стабилизации по методу Красовского [46], найдем управление вида (2.3.4), которое обеспечит отрицательность действительных частей корней характеристического уравнения управляемой линейной подсистемы (2.3.6). Тогда структура полной нелинейной системы (2.3.5), замкнутой управлением (2.3.4), будет удовлетворять всем условиям теоремы 1.4.1. Следовательно, найденное управление стабилизирует стационарное движение (2.1.7) до асимптотической устойчивости по всем переменным. \square

Наконец, рассмотрим способ управления системой, когда механические воздействия прикладываются только по избыточным координатам. Здесь справедлива

Теорема 2.3.3. *Если пара (N, V_s) управляема, т.е. выполнено условие*

$$\text{rank} \begin{pmatrix} V_s & NV_s & N^2V_s & \dots & N^{n+k-1}V_s \end{pmatrix} = n + k,$$

то существует линейное управление, действующее только по избыточным координатам:

$$u_s = -\mathcal{K}_3 \xi, \quad (2.3.7)$$

стабилизирующее стационарное движение (2.1.7), до асимптотической устойчивости по всем переменным.

Доказательство. Если управление приложено только по избыточным координатам, система уравнений динамики (2.2.6) с выделенным первым приближением принимает вид

$$\begin{cases} \dot{\xi} = N\xi + V_s u_s + Zz + \Xi^{(2)}(\xi, z), \\ \dot{z} = \tilde{B}_{s\alpha}^{(1)}(x, z) x_1. \end{cases} \quad (2.3.8)$$

Управляемая подсистема в таком случае будет иметь вид

$$\dot{\xi} = N\xi + V_s u_s. \quad (2.3.9)$$

Решая линейно-квадратичную задачу стабилизации по методу Красовского [46], найдем управление вида (2.3.7), которое обеспечит отрицательность действительных частей корней характеристического уравнения управляемой линейной подсистемы. Тогда структура полной нелинейной системы (2.3.8) удовлетворяет всем условиям теоремы 1.4.1, найденное управление стабилизирует ее до асимптотической устойчивости по всем переменным. \square

2.4. Стабилизация стационарных движений при неполной информации о состоянии

Рассмотрим простейшие варианты матриц коэффициентов линейного приближения вектора измерений σ . Пусть

$$\sigma_i = \Sigma_i \xi,$$

где $\Sigma_1 = \begin{pmatrix} E_k & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\Sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & E_k & 0 \end{pmatrix}$, $\Sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & E_l \end{pmatrix}$. Тогда система асимптотического оценивания (наблюдатель полного порядка) для получения необходимой для формирования стабилизирующего управления информации будет, соответственно, иметь вид [14]

$$\dot{\hat{\xi}} = N\hat{\xi} + V_\alpha u_\alpha + V_s u_s + V_\beta u_\beta + \Lambda_i (\sigma_i - \Sigma_i \hat{\xi}), \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.4.1)$$

где $\hat{\xi}' = (\hat{x}', \hat{x}'_1, \hat{w}')$ – вектор оценки фазового состояния по измерению σ_i , Λ_i – постоянные матрицы коэффициентов усиления наблюдателя, которые необходимо определить.

Рассмотрим сначала случай управления по всему вектору циклических координат.

Теорема 2.4.1. *Если для систем (2.2.6) и (2.4.1) пара (N, V_β) управляема, а пара (N, Σ_i) наблюдаема, т.е. выполнены условия*

$$\text{rank} (V_\beta \quad NV_\beta \quad N^2V_\beta \quad \dots \quad N^{n+k-1}V_\beta) = n + k,$$

$$\text{rank} \left(\Sigma'_i \quad N'\Sigma'_i \quad (N')^2\Sigma'_i \quad \dots \quad (N')^{n+k-1}\Sigma'_i \right) = n + k,$$

то стационарное движение (2.1.7) может быть стабилизировано до асимптотической по всем переменным устойчивости приложением по всему вектору циклических координат управления:

$$u_\beta = -\mathcal{K}_{3i}\hat{\xi}, \quad (2.4.2)$$

где $\hat{\xi}' = (\hat{x}', \hat{x}'_1, \hat{w}')$ – вектор оценки фазового состояния системы, полученный по измерению σ_i из наблюдателя

$$\dot{\hat{\xi}} = N\hat{\xi} + V_\beta u_\beta + \Lambda_i (\sigma_i - \Sigma_i \hat{\xi}), \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.4.3)$$

Доказательство. Запишем полную нелинейную систему уравнений динамики с учётом наблюдателя:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = N\xi + V_\beta u_\beta + Zz + \Xi^{(2)}(\xi, z), \\ \dot{z} = \tilde{B}_{s\alpha}^{(1)}(x, z)x_1, \\ \dot{\hat{\xi}} = N\hat{\xi} + V_\beta u_\beta + \Lambda_i(\sigma_i - \Sigma_i \hat{\xi}), \\ u_\beta = -\mathcal{K}_{3i}\hat{\xi}, \quad \sigma_i = \Sigma_i \xi. \end{cases} \quad (2.4.4)$$

Заменим вектор $(\xi', \hat{\xi}', z)$ на (ξ', e', z) , где $e(t) = \xi(t) - \hat{\xi}(t)$ – вектор ошибки восстановления. Так как это преобразование линейно и невырождено, оно не повлияет на корни характеристического уравнения линеаризованной системы. Тогда (2.4.4) перепишется в виде

$$\begin{cases} \dot{\xi} = (N - V_\beta \mathcal{K}_{3i})\xi + V_\beta \mathcal{K}_{3i}e + Zz + \Xi^{(2)}(\xi, z), \\ \dot{e} = (N - \Lambda_i \Sigma_i)e + Zz + \Xi^{(2)}(\xi, z), \\ \dot{z} = B(x, z)\xi, \end{cases} \quad (2.4.5)$$

где $B(x, z) = \begin{pmatrix} 0 & B_{s,\alpha}^{(1)}(x, z) & 0 \end{pmatrix}$, нулями обозначены нулевые матрицы размеров $m \times k$ и $m \times l$ соответственно. Если выполнены условия управляемости и наблюдаемости пар (N, V_β) и (N, Σ) , то существуют такие матрицы \mathcal{K}_{3i} и Λ_i , что действительные части всех корней характеристического уравнения матрицы

$$\begin{pmatrix} N - V_\beta \mathcal{K}_{3i} & V_\beta \mathcal{K}_{3i} \\ 0 & N - \Lambda_i \Sigma_i \end{pmatrix}$$

отрицательны. Элементы матриц могут быть однозначно определены решением методом Красовского [46] соответствующих линейно-квадратичных задач. При этом структура системы (2.4.5), замкнутой управлением (2.4.2), соответствует условиям теоремы 1.4.1. Следовательно, $\xi(t) \rightarrow 0$ и $e(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ и стационарное движение (2.1.7) стабилизируется до асимптотической устойчивости по всем переменным. \square

Замечание 2.4.1. Рассмотрим матрицу N' :

$$N' = \begin{pmatrix} 0 & \Phi'b'_1 & \Phi'b'_3 \\ E_k & -\Psi'b'_1 - \Gamma'b'_2 & -\Psi'b'_3 - \Gamma'b'_4 \\ 0 & \Upsilon'b'_1 & \Upsilon'b'_3 \end{pmatrix}.$$

Как нетрудно увидеть, при различных вариантах вектора наблюдений σ_i определяющую роль в условии наблюдаемости пары (N, Σ) играют различные

столбцы матрицы N' (соответственно, строки матрицы N). Действительно, при $i = 1$ матрица наблюдаемости имеет вид

$$\begin{pmatrix} E_k & 0 & \Phi'b'_1 & \cdots \\ 0 & E_k & -\Psi'b'_1 - \Gamma'b'_2 & \cdots \\ 0 & 0 & \Upsilon'b'_1 & \cdots \end{pmatrix},$$

при $i = 2$:

$$\begin{pmatrix} 0 & \Phi'b'_1 & \cdots \\ E_k & -\Psi'b'_1 - \Gamma'b'_2 & \cdots \\ 0 & \Upsilon'b'_1 & \cdots \end{pmatrix}$$

и при $i = 3$:

$$\begin{pmatrix} 0 & \Phi'b'_3 & \cdots \\ 0 & -\Psi'b'_3 - \Gamma'b'_4 & \cdots \\ E_k & \Upsilon'b'_3 & \cdots \end{pmatrix}.$$

В частности, очевидно, что при $b_1\Upsilon = 0$ достаточное условие построения разрабатываемым методом наблюдателя выполнено быть не может. Для голономных систем с независимыми координатами и кинетической энергией в виде только квадратичной формы аналогичный результат получен в [15].

Теперь рассмотрим случай управления по вектору позиционных координат. Здесь достаточные условия нахождения стабилизирующего управления описывает

Теорема 2.4.2. Если для систем (2.2.6) и (2.4.1) выполнены условия управляемости пары (N, V_α) и условия наблюдаемости пары (N, Σ_i) , т.е. выполнены условия

$$\begin{aligned} \text{rank} (V_\alpha \quad NV_\alpha \quad N^2V_\alpha \quad \cdots \quad N^{n+k-1}V_\alpha) &= n + k, \\ \text{rank} (\Sigma'_i \quad N'\Sigma'_i \quad (N')^2\Sigma'_i \quad \cdots \quad (N')^{n+k-1}\Sigma'_i) &= n + k, \end{aligned}$$

то стационарное движение (2.1.7) может быть стабилизировано до асимптотической устойчивости по всем переменным приложением по вектору позиционных координат управления:

$$u_\alpha = -\mathcal{K}_{1i}\hat{\xi}, \quad (2.4.6)$$

где $\hat{\xi}' = (\hat{x}' \quad \hat{x}'_1 \quad \hat{w}')$ – вектор оценки фазового состояния системы, полученный по измерению σ_i из наблюдателя

$$\dot{\hat{\xi}} = N\hat{\xi} + V_\alpha u_\alpha + \Lambda_i (\sigma_i - \Sigma_i \hat{\xi}), \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.4.7)$$

Доказательство. Полная нелинейная система управлений динамики с учётом наблюдателя в этом случае будет иметь вид

$$\begin{cases} \dot{\xi} = N\xi + V_\alpha u_\alpha + Zz + \Xi^{(2)}(\xi, z), \\ \dot{z} = \tilde{B}_{s\alpha}^{(1)}(x, z)x_1, \\ \dot{\hat{\xi}} = N\hat{\xi} + V_\alpha u_\alpha + \Lambda_i(\sigma_i - \Sigma_i \hat{\xi}) \\ u_\alpha = -\mathcal{K}_{1i}\hat{x}_i, \quad \sigma_i = \Sigma_i \xi. \end{cases} \quad (2.4.8)$$

Введём вектор ошибки восстановления $e(t) = \xi(t) - \hat{\xi}(t)$ и заменим вектор $(\xi', \hat{\xi}', z)$ на (ξ', e', z) . Тогда (2.4.8) переписывается в виде

$$\begin{cases} \dot{\xi} = (N - V_\alpha \mathcal{K}_{1i})\xi + V_\alpha \mathcal{K}_{1i}e + Zz + \Xi^{(2)}(\xi, z), \\ \dot{e} = (N - \Lambda_i \Sigma_i)e + Zz + \Xi^{(2)}(\xi, z), \\ \dot{z} = B(x, z)\xi, \end{cases} \quad (2.4.9)$$

где $B(x, z) = \begin{pmatrix} 0 & B_{s,\alpha}^{(1)}(x, z) & 0 \end{pmatrix}$, нулями обозначены нулевые матрицы размеров $m \times k$ и $m \times l$ соответственно.

При выполнении условий управляемости пары (N, V_α) и наблюдаемости пары (N', Σ_i) существуют [14] такие матрицы \mathcal{K}_{1i} и Λ_i , что действительные части всех корней характеристического уравнения матрицы

$$\begin{pmatrix} N - V_\alpha \mathcal{K}_{1i} & V_\alpha \mathcal{K}_{1i} \\ 0 & N - \Lambda_i \Sigma_i \end{pmatrix}$$

отрицательны. Элементы матриц могут быть однозначно определены решением методом Красовского [46] соответствующих линейно-квадратичных задач. При этом структура системы (2.4.9), замкнутой управлением (2.4.6), соответствует условиям теоремы 1.4.1. Следовательно, $\xi(t) \rightarrow 0$ и $e(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ и стационарное движение (2.1.7) стабилизируется до асимптотической устойчивости по всем переменным. \square

Достаточные условия нахождения стабилизирующего управления по вектору избыточных координат описывает

Теорема 2.4.3. *Если для систем (2.2.6) и (2.4.1) выполнены условия управляемости пары (N, V_s) и условия наблюдаемости пары (N', Σ'_i) , т.е. выполнены условия*

$$\begin{aligned} \text{rank} (V_s \quad NV_s \quad N^2V_s \quad \dots \quad N^{n+k-1}V_s) &= n + k, \\ \text{rank} \left(\Sigma'_i \quad N'\Sigma'_i \quad (N')^2\Sigma'_i \quad \dots \quad (N')^{n+k-1}\Sigma'_i \right) &= n + k, \end{aligned}$$

то стационарное движение (2.1.7) может быть стабилизировано до асимптотической устойчивости по всем переменным приложением по вектору избыточных координат управления:

$$u_s = -\mathcal{K}_{2i}\hat{\xi}, \quad (2.4.10)$$

где $\hat{\xi}' = (\hat{x}' \ \hat{x}'_1 \ \hat{w}')$ – вектор оценки фазового состояния системы, полученный по измерению σ_i из наблюдателя

$$\dot{\hat{\xi}} = N\hat{\xi} + V_s u_s + \Lambda_i (\sigma_i - \Sigma_i \hat{\xi}), \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.4.11)$$

Доказательство. Полная нелинейная система управлений динамики с учётом наблюдателя в этом случае будет иметь вид

$$\begin{cases} \dot{\xi} = N\xi + V_s u_s + Zz + \Xi^{(2)}(\xi, z), \\ \dot{z} = \tilde{B}_{s\alpha}^{(1)}(x, z)x_1, \\ \dot{\hat{\xi}} = N\hat{\xi} + V_s u_s + \Lambda_i (\sigma_i - \Sigma_i \hat{\xi}) \\ u_s = -\mathcal{K}_{2i}\hat{\xi}, \quad \sigma_i = \Sigma_i \xi. \end{cases} \quad (2.4.12)$$

После введения вектора ошибки восстановления $e(t) = \xi(t) - \hat{\xi}(t)$ будем иметь систему

$$\begin{cases} \dot{\xi} = (N - V_s \mathcal{K}_{2i})\xi + V_s \mathcal{K}_{2i}e + Zz + \Xi^{(2)}(\xi, z), \\ \dot{e} = (N - \Lambda_i \Sigma_i)e + Zz + \Xi^{(2)}(\xi, z), \\ \dot{z} = B(x, z)\xi, \end{cases} \quad (2.4.13)$$

При выполнении условий управляемости пары (N, V_s) и наблюдаемости пары (N', Σ'_i) существуют [14] такие матрицы \mathcal{K}_{2i} и Λ_i , что действительные части всех корней характеристического уравнения матрицы

$$\begin{pmatrix} N - V_s \mathcal{K}_{2i} & V_s \mathcal{K}_{2i} \\ 0 & N - \Lambda_i \Sigma_i \end{pmatrix}$$

отрицательны. Элементы матриц могут быть однозначно определены решением методом Красовского [46] соответствующих линейно-квадратичных задач. При этом структура системы (2.4.13), замкнутой управлением (2.4.10), соответствует условиям теоремы 1.4.1. Следовательно, $\xi(t) \rightarrow 0$ и $e(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ и стационарное движение (2.1.7) стабилизируется до асимптотической устойчивости по всем переменным. \square

2.5. Алгоритм численного нахождения коэффициентов управления и наблюдателя для стабилизации стационарных движений мехатронных систем с геометрическими связями

На основании полученных результатов, приведём алгоритм, который может быть использован для численного нахождения коэффициентов стабилизирующего воздействия в системе MATLAB.

Рассмотрим мехатронную систему с t нелинейными геометрическими связями (1.1.1), допускающую стационарное движение (2.1.7). Пусть заданы кинетическая энергия $T(q; \dot{q})$, потенциальная энергия $\Pi(q)$, непотенциальные силы Q_r, Q_s и определён один из рассмотренных выше способов введения управляющих воздействий: по части позиционных координат, по части избыточных координат или по всему вектору циклических координат и задана соответствующая матрица.

Алгоритм 2.5.1. *Алгоритм численного нахождения матрицы коэффициентов стабилизирующего воздействия и коэффициентов усиления наблюдателя*

1. *Исходя из уравнений геометрических связей (1.1.1), выделить t координат, которые будут считаться избыточными.*
2. *Выразить скорости зависимых координат в виде $\dot{s} = B_{s\alpha}(q)\dot{r}$, согласно (2.1.2).*
3. *Исключить зависимые скорости \dot{s} из выражений для кинетической энергии и непотенциальных сил.*
4. *Определить матрицы коэффициентов кинетической энергии, входящие в (2.1.3) и приведённую потенциальную энергию $W(q)$;*
5. *Записать уравнения (2.1.8) для определения всех параметров системы в положении равновесия и программных управлений в соответствии с выбранным способом управления;*
6. *Ввести векторы возмущений, согласно (2.2.1);*
7. *По формулам (2.2.6) вычислить матрицы, входящие в линейную управляемую подсистему (2.3.3), (2.3.6) или (2.3.9) в зависимости от выбранного варианта введения управляющих воздействий.*
8. *Проверить выполнимость условия управляемости для пары (N, V_β) , (N, V_α) или (N, V_s) , соответственно.*
9. *Проверить выполнимость условия наблюдаемости для пары (N, Σ_i) .*

10. Если условия пунктов 8 и 9 выполнены, задать квадратные матрицы R и Q , определяющие критерий качества.

11. Найти матрицу коэффициентов стабилизирующего управления $\mathcal{K}_{ji} = -R^{-1}Q'X$, найдя X из соответствующего матричного уравнения Риккати:

управление по части позиционных координат:

$$XN + N'X - X(V_\alpha R^{-1}V_\alpha')X + Q = 0;$$

управление по части избыточных координат:

$$XN + N'X - X(V_s R^{-1}V_s')X + Q = 0;$$

управление по вектору циклических координат:

$$XN + N'X - X(V_\beta R^{-1}V_\beta')X + Q = 0;$$

12. Найти матрицу $\Lambda_i = -Y'Q(R^{-1})'$ коэффициентов наблюдателя, где матрица Y является решением матричного уравнения Риккати

$$YN' + NY - Y(\Sigma_i R^{-1}\Sigma_i')Y + Q = 0.$$

2.6. Уравнения Шульгина в переменных Рауса при наличии циклических координат

В переменных Рауса импульсы можно вводить [65] вместо любых компонент вектора скоростей. Конкретный выбор определяется спецификой рассматриваемой системы. Как уже было сказано выше, использование переменных Лагранжа удобно с точки зрения получения информации о фазовом состоянии системы, так как в этом случае возможно непосредственное измерение возмущений циклических скоростей. Однако в этих переменных уравнения динамики оказываются довольно громоздкими, что усложняет процедуру определения стабилизирующего управления и анализ структуры нелинейных уравнений движения замкнутой найденным управлением системы. В частности, при приложении управляющих воздействий не по всем компонентам вектора циклических координат при любом способе управления характеристическое уравнение будет

иметь дополнительные по сравнению с числом связей нулевые корни. При этом очевидная в переменных Рауса структура замкнутой нелинейной управляемой системы с готовым специальным видом теории критических случаев становится трудно поддающейся анализу в переменных Лагранжа.

Применение переменных Рауса и переход к циклическим импульсам (переменным Гамильтона) упрощает [19, 33, 64] анализ структуры замкнутой нелинейной системы и процедуру определения коэффициентов линейных стабилизирующих управлений. Задача стабилизации стационарных движений систем с избыточными координатами, когда импульсы вводятся по всем управляемым циклическим координатам, подробно рассмотрена в работе [33]. Однако с точки зрения практического осуществления этот способ управления оказывается невыгодным при неполной информации о состоянии, так как полученное управление зависит от импульсов.

В то же время, использование переменных Рауса позволяет рассмотреть ещё один способ решения задачи стабилизации систем с циклическими координатами, когда импульсы (переменные Гамильтона) вводятся только по части циклических координат, которые остаются неуправляемыми. Управления же прикладываются по циклическим координатам, описываемым переменными Лагранжа. В этом случае возмущения импульсов не включаются в управляемую подсистему и в систему оценивания при неполной информации о состоянии.

В доказательстве достаточного условия разрешимости задачи стабилизации в этом случае будет использована теорема об устойчивости стационарных движений систем с избыточными координатами. Приведём здесь её формулировку.

Теорема 2.6.1. *(об устойчивости стационарных движений систем с избыточными координатами) [29]. Пусть характеристическое уравнение системы первого приближения уравнений возмущённого движения с учётом возмущений циклических импульсов в случае отсутствия сил по циклическим координатам имеет вид*

$$\lambda^{m+l} \det [A\lambda^2 + (K - G)\lambda + C + C^B + F] = 0.$$

Тогда если действительные части всех ненулевых корней характеристического уравнения отрицательны, то стационарное движение устойчиво.

Как известно, состояние системы может быть описано разными параметрами [64]. В качестве таких параметров могут использоваться величины p_i –

обобщенные импульсы [56], определяемые из соотношений

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}.$$

Переменные q_i, p_i, t называются *переменными Гамильтона* [56].

Величины $q_i, \dot{q}_i; q_j, p_j; t, \quad i = 1, \dots, k; \quad j = k + 1, \dots, n$, где k – произвольное фиксированное число, $k < n$, называются *переменными Рауса* [56]. Применение уравнений в переменных Гамильтона или Рауса [51, 66] хорошо отработано в случае, когда все параметры, описывающие состояние системы, являются независимыми.

Уравнения Шульгина в переменных Рауса без предположения о наличии циклических координат были получены в [33]. Они имеют вид

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \dot{\alpha}'} - \frac{\partial R}{\partial \alpha'} = Q_\alpha^* + B'_{s\alpha} \left(\frac{\partial R}{\partial s'} + Q_s^* \right), \\ \dot{p} = \frac{\partial R}{\partial \gamma'} + Q_\gamma^* + B'_{s\gamma} \left(\frac{\partial R}{\partial s'} + Q_s^* \right), \\ \dot{\gamma} = -\frac{\partial R}{\partial p'}. \end{cases} \quad (2.6.1)$$

Взяв за основу уравнения (2.6.1), получим специальную математическую модель для мехатронных систем с нелинейными геометрическими связями в случае, когда управление осуществляется по части циклических координат.

Для получения соответствующих уравнений дополнительно разобьём вектор координат q следующим образом:

$$\begin{aligned} q' &= (r', s'), \quad r' = (\alpha', \beta', \gamma'), \quad \alpha' = (q_1, \dots, q_k), \quad \beta' = (q_{k+1}, \dots, q_l), \\ \gamma' &= (q_{l+1}, \dots, q_n), \quad s' = (q_{n+1}, \dots, q_{n+m}), \quad 1 < k < l < n. \end{aligned} \quad (2.6.2)$$

За переменные Лагранжа примем часть независимых координат α и их скорости $\dot{\alpha}$, управляемые псевдоциклические координаты β и их скорости $\dot{\beta}$ и избыточные координаты s и их скорости \dot{s} . За переменные Гамильтона возьмем оставшуюся часть циклических (неуправляемых) координат γ и их импульсы. Таким образом, переменными Рауса в данной постановке будут являться параметры $\alpha, \dot{\alpha}, \beta, \dot{\beta}, \gamma, p, s, \dot{s}$ где

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{\gamma}'}. \quad (2.6.3)$$

Как и ранее будем предполагать, что на систему наложены геометрические связи (1.1.1). Продифференцировав их по времени, получим кинематические интегрируемые связи в виде:

$$\dot{s} = B_{s\alpha}(q) \cdot \dot{\alpha} + B_{s\beta}(q) \cdot \dot{\beta} + B_{ss}(q) \cdot \dot{s}.$$

И в силу цикличности координат β и γ окончательно будем иметь

$$\dot{s} = B_{s\alpha}(q) \cdot \dot{\alpha}, \quad B_{s\alpha}(q) = - \left(\frac{\partial F}{\partial s} \right)^{-1} \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial \alpha} \right). \quad (2.6.4)$$

Кинетическая энергия, как и в главе 1 предполагается самого общего вида (1.1.4), с симметричной матрицей квадратичной по \dot{q} части A_{qq} и столбцом коэффициентов A_q линейной по \dot{q} части

$$A_{qq} = \begin{pmatrix} A_{\alpha\alpha} & A_{\alpha\beta} & A_{\alpha\gamma} & A_{\alpha s} \\ A_{\beta\alpha} & A_{\beta\beta} & A_{\beta\gamma} & A_{\beta s} \\ A_{\gamma\alpha} & A_{\gamma\beta} & A_{\gamma\gamma} & A_{\gamma s} \\ A_{s,\alpha} & A_{s\beta} & A_{s\gamma} & A_{ss} \end{pmatrix}, \quad A_q = \begin{pmatrix} A_\alpha \\ A_\beta \\ A_\gamma \\ A_s \end{pmatrix},$$

где $A_{\alpha\alpha}$, $A_{\alpha\beta}$, \dots , A_{ss} – блоки соответствующих размеров, A_α , A_β , A_γ , A_s – столбцы соответствующих размеров. Все элементы матриц являются функциями, зависящими только от координат α и s .

Замечание 2.6.1. В силу симметричности матрицы A_{qq} квадратичной части кинетической энергии будем иметь:

$$\begin{aligned} A'_{\alpha\alpha} &= A_{\alpha\alpha}, & A'_{\beta\beta} &= A_{\beta\beta}, & A'_{\gamma\gamma} &= A_{\gamma\gamma}, & A'_{ss} &= A_{ss}, \\ A'_{\beta\alpha} &= A_{\alpha\alpha}, & A'_{\gamma\beta} &= A_{\beta\gamma}, & A'_{s\beta} &= A_{\beta s}, & A'_{\gamma\alpha} &= A_{\alpha\gamma}, \\ & & A'_{s\gamma} &= A_{\gamma s}, & A'_{s,\alpha} &= A_{\alpha s}. \end{aligned}$$

После исключения зависимых скоростей с помощью (2.6.4) запишем кинетическую энергию в виде

$$\begin{aligned} T^*(q; \dot{r}) &= \frac{1}{2} \dot{r}' \cdot a_{rr}(\alpha, s) \cdot \dot{r} + a'_r(\alpha, s) \cdot \dot{r} + T_0(\alpha, s) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\dot{\alpha}' a_{\alpha\alpha} \dot{\alpha} + 2\dot{\alpha}' a_{\alpha\beta} \dot{\beta} + 2\dot{\alpha}' a_{\alpha\gamma} \dot{\gamma} + \dot{\beta}' a_{\beta\beta} \dot{\beta} + 2\dot{\beta}' a_{\beta\gamma} \dot{\gamma} + \dot{\gamma}' a_{\gamma\gamma} \dot{\gamma} \right) + \\ &\quad + a'_{\alpha} \dot{\alpha} + a'_{\beta} \dot{\beta} + a'_{\gamma} \dot{\gamma} + T_0, \end{aligned} \quad (2.6.5)$$

где функциональные матрицы коэффициентов квадратичной части a_{rr} , $a_{\alpha\alpha}$, $a_{\alpha\beta}$, $a_{\alpha\gamma}$, $a_{\beta\beta}$, $a_{\beta\gamma}$, $a_{\gamma\gamma}$ и векторы a_r , a_α , a_β , a_γ зависят от координатных векторов α и s и следующим образом выражаются через матрицы коэффициентов первоначальной кинетической энергии:

$$a_{rr}(\alpha, s) = \begin{pmatrix} a_{\alpha\alpha} & a_{\alpha\beta} & a_{\alpha\gamma} \\ a_{\beta\alpha} & a_{\beta\beta} & a_{\beta\gamma} \\ a_{\gamma\alpha} & a_{\gamma\beta} & a_{\gamma\gamma} \end{pmatrix}, \quad a_r = \begin{pmatrix} a_\alpha \\ a_\beta \\ a_\gamma \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
a_{\alpha\alpha} &= A_{\alpha\alpha} + 2A_{\alpha s}B_{s\alpha} + B'_{s\alpha}A_{ss}B_{s\alpha}, & a_{\alpha\beta} &= A_{\alpha\beta} + B'_{s\alpha}A_{s\beta}, \\
a_{\alpha\gamma} &= A_{\alpha\gamma} + B'_{s\alpha}A_{s\gamma}, & a_{\beta\beta} &= A_{\beta\beta}, & a_{\beta\gamma} &= A_{\beta\gamma}, & a_{\gamma\gamma} &= A_{\gamma\gamma}, \\
a_{\alpha} &= A_{\alpha} + B'_{s\alpha}A_s, & a_{\beta} &= A_{\beta}, & a_{\gamma} &= A_{\gamma}.
\end{aligned}$$

Замечание 2.6.2. *Здесь в выражениях для коэффициентов использована симметрия матрицы A_{qq} . Так,*

$$A_{\alpha s}B_{s\alpha} + B'_{s\alpha}A_{s,\alpha} = 2A_{\alpha s}B_{s\alpha}, \quad A_{\alpha s}B_{s\gamma} + B'_{s\gamma}A_{s,\alpha} = 2A_{\alpha s}B_{s\gamma} \text{ и т.д.}$$

Замечание 2.6.3. *Из симметрии матрицы A_{qq} квадратичной части кинетической энергии также следует симметрия матрицы a_{rr} квадратичной части T^* , то есть выполняются соотношения*

$$\begin{aligned}
a'_{\alpha\alpha} &= a_{\alpha\alpha}, & a'_{\beta\beta} &= a_{\beta\beta}, & a'_{\gamma\gamma} &= a_{\gamma\gamma}, \\
a'_{\alpha\beta} &= a_{\beta\alpha}, & a'_{\alpha\gamma} &= a_{\gamma\alpha}, & a'_{\gamma\beta} &= a_{\beta\gamma}.
\end{aligned}$$

Потенциальная энергия в общем случае зависит от координат q . Как и везде выше, обозначим её $\Pi(q)$.

На систему по координатам α , s могут действовать непотенциальные силы Q_{α} , Q_s . Будем считать, что управляющие воздействия прикладываются только по псевдоциклическим координатам β . После исключения зависимых скоростей из выражений скоростей с помощью (2.6.4) обозначим их Q_{α}^* , Q_s^* соответственно.

Выразим $\dot{\gamma}$ – скорости координат, по которым введены импульсы. Для этого выпишем функцию Лагранжа и продифференцируем её по $\dot{\gamma}$.

$$\begin{aligned}
L^*(q; \dot{r}) &= \frac{1}{2} \left(\dot{\alpha}' a_{\alpha\alpha} \dot{\alpha} + 2\dot{\alpha}' a_{\alpha\beta} \dot{\beta} + 2\dot{\alpha}' a_{\alpha\gamma} \dot{\gamma} + \dot{\beta}' a_{\beta\beta} \dot{\beta} + 2\dot{\beta}' a_{\beta\gamma} \dot{\gamma} + \dot{\gamma}' a_{\gamma\gamma} \dot{\gamma} \right) + \\
&\quad + a'_{\alpha} \dot{\alpha} + a'_{\beta} \dot{\beta} + a'_{\gamma} \dot{\gamma} - W(\alpha, s),
\end{aligned}$$

где $W(\alpha, s) = \Pi(\alpha, s) - T_0(\alpha, s)$ – приведённая потенциальная энергия.

В соответствии с формулами (А.2), (А.4), (А.6) приложения А, будем иметь следующее выражение для вектора импульсов

$$p = \frac{\partial L^*}{\partial \dot{\gamma}'} = a_{\gamma\alpha} \dot{\alpha} + a_{\gamma\beta} \dot{\beta} + a_{\gamma\gamma} \dot{\gamma} + a_{\gamma}. \quad (2.6.6)$$

Пусть $\det(a_{\gamma\gamma}) \neq 0$. Тогда из (2.6.6) выражается вектор скоростей $\dot{\gamma}$:

$$\dot{\gamma} = a_{\gamma\gamma}^{-1} (p - a_{\gamma}) - a_{\gamma\gamma}^{-1} a_{\gamma\alpha} \dot{\alpha} - a_{\gamma\gamma}^{-1} a_{\gamma\beta} \dot{\beta}. \quad (2.6.7)$$

Теперь введем функцию Рауса

$$R^* (\alpha, s; \dot{\alpha}, \dot{\beta}, p) = L^* (q; \dot{r}) - p' \cdot \dot{\gamma}, \quad (2.6.8)$$

где везде вместо $\dot{\gamma}$ подставлено выражение (2.6.7).

Выражение R^* как квадратичной функции переменных $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$ и p имеет вид:

$$R^* (\alpha, s; \dot{\alpha}, \dot{\beta}, p) = \frac{1}{2} \left[\dot{\alpha}' b_{\alpha\alpha} \dot{\alpha} + 2\dot{\alpha}' b_{\alpha\beta} \dot{\beta} + \dot{\beta}' b_{\beta\beta} \dot{\beta} \right] - \frac{1}{2} p' b_{\gamma\gamma} p + \\ + p' b_{\gamma\alpha} \dot{\alpha} + p' b_{\gamma\beta} \dot{\beta} + b'_{\alpha} \dot{\alpha} + b'_{\beta} \dot{\beta} + b'_{\gamma} p + R_0, \quad (2.6.9)$$

где

$$b_{rr} (\alpha, s) = \begin{pmatrix} b_{\alpha\alpha} & b_{\alpha\beta} & b_{\alpha\gamma} \\ b_{\beta\alpha} & b_{\beta\beta} & b_{\beta\gamma} \\ b_{\gamma\alpha} & b_{\gamma\beta} & -b_{\gamma\gamma} \end{pmatrix}, \quad b'_r (\alpha, s) = \begin{pmatrix} b'_{\alpha} & b'_{\beta} & b'_{\gamma} \end{pmatrix},$$

$$b_{\alpha\alpha} = a_{\alpha\alpha} - a_{\alpha\gamma} a_{\gamma\gamma}^{-1} a_{\gamma\alpha}, \quad b_{\gamma\alpha} = a_{\gamma\gamma}^{-1} a_{\gamma\alpha}, \quad b_{\gamma\beta} = a_{\gamma\gamma}^{-1} a_{\gamma\beta},$$

$$b_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} - a_{\alpha\gamma} a_{\gamma\gamma}^{-1} a_{\gamma\beta}, \quad b_{\gamma\gamma} = a_{\gamma\gamma}^{-1}, \quad b'_{\alpha} = a'_{\alpha} - a'_{\gamma} a_{\gamma\gamma}^{-1} a_{\gamma\alpha},$$

$$b_{\beta\beta} = a_{\beta\beta} - a_{\beta\gamma} a_{\gamma\gamma}^{-1} a_{\gamma\beta}, \quad b'_{\beta} = a'_{\beta} - a'_{\gamma} a_{\gamma\gamma}^{-1} a_{\gamma\beta}, \quad b'_{\gamma} = a'_{\gamma} a_{\gamma\gamma}^{-1},$$

$$R_0 (\alpha, s) = T_0 - \Pi - \frac{1}{2} a'_{\gamma} a_{\gamma\gamma}^{-1} a_{\gamma}.$$

Матрицы $b_{\alpha\alpha}$, $b_{\alpha\beta}$, $b_{\beta\beta}$, $b_{\gamma\alpha}$, $b_{\gamma\beta}$, $b_{\gamma\gamma}$ и векторы b_{α} , b_{β} , b_{γ} – функциональные матрицы, элементы которых являются функциями координат α и s . Кроме того из приведённых выражений видно, что $b_{\alpha\alpha}$, $b_{\beta\beta}$ и $b_{\gamma\gamma}$ – симметричные матрицы, и

$$b'_{\alpha\beta} = b_{\beta\alpha}, \quad b'_{\alpha\gamma} = b_{\gamma\alpha}, \quad b'_{\beta\gamma} = b_{\gamma\beta}.$$

Уравнения Шульгина в переменных Рауса получим из (2.6.1) с учётом цикличности координат β и γ имеют вид:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \dot{\alpha}'} - \frac{\partial R}{\partial \alpha'} = Q_{\alpha}^* + B'_{s\alpha} \left(\frac{\partial R}{\partial s'} + Q_s^* \right), \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \dot{\beta}'} = Q_{\beta}^*, \quad \dot{p} = 0, \quad \dot{\gamma} = -\frac{\partial R}{\partial p'}. \end{cases} \quad (2.6.10)$$

Для получения полной математической модели динамики, (2.6.10) необходимо рассматривать вместе с уравнениями связей (2.6.4) и, возможно, математической моделью исполнительных приводов.

Чтобы получить нелинейные уравнения динамики в явном виде, подставим выражение для функции Рауса (2.6.9) в систему (2.6.10). При вычислении

производных будем учитывать выражение для зависимых скоростей (2.6.4). Тогда будем иметь:

$$\frac{\partial R^*}{\partial \dot{\alpha}'} = b_{\alpha\alpha} \dot{\alpha} + b_{\alpha\beta} \dot{\beta} + b_{\alpha\gamma} p + b_{\alpha},$$

$$\frac{\partial R^*}{\partial \dot{\beta}'} = b_{\beta\alpha} \dot{\alpha} + b_{\beta\beta} \dot{\beta} + b_{\beta\gamma} p + b_{\beta},$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial R^*}{\partial \dot{\alpha}'} &= b_{\alpha\alpha} \ddot{\alpha} + b_{\alpha\beta} \ddot{\beta} + b_{\alpha\gamma} \dot{p} + [(\dot{\alpha}' \otimes E_k) b_{\alpha\alpha}^{\alpha'} + (\dot{\alpha}' B'_{s\alpha} \otimes E_k) b_{\alpha\alpha}^{s'}] \dot{\alpha} + \\ &+ [(\dot{\alpha}' \otimes E_k) b_{\alpha\beta}^{\alpha'} + (\dot{\alpha}' B'_{s\alpha} \otimes E_k) b_{\alpha\beta}^{s'}] \dot{\beta} + [(\dot{\alpha}' \otimes E_k) b_{\alpha\gamma}^{\alpha'} + (\dot{\alpha}' B'_{s\alpha} \otimes E_k) b_{\alpha\gamma}^{s'}] p + \\ &+ \left[\frac{\partial b_{\alpha}}{\partial \alpha} + \frac{\partial b_{\alpha}}{\partial s} B_{s\alpha} \right] \dot{\alpha}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial R^*}{\partial \dot{\beta}'} &= b_{\beta\alpha} \ddot{\alpha} + b_{\beta\beta} \ddot{\beta} + b_{\beta\gamma} \dot{p} + [(\dot{\alpha}' \otimes E_{l-k}) b_{\beta\alpha}^{\alpha'} + (\dot{\alpha}' B'_{s\alpha} \otimes E_{l-k}) b_{\beta\alpha}^{s'}] \dot{\alpha} + \\ &+ [(\dot{\alpha}' \otimes E_{l-k}) b_{\beta\beta}^{\alpha'} + (\dot{\alpha}' B'_{s\alpha} \otimes E_{l-k}) b_{\beta\beta}^{s'}] \dot{\beta} + \\ &+ [(\dot{\alpha}' \otimes E_{l-k}) b_{\beta\gamma}^{\alpha'} + (\dot{\alpha}' B'_{s\alpha} \otimes E_{l-k}) b_{\beta\gamma}^{s'}] p + \left[\frac{\partial b_{\beta}}{\partial \alpha} + \frac{\partial b_{\beta}}{\partial s} B_{s\alpha} \right] \dot{\alpha}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R^*}{\partial \alpha'} &= \frac{1}{2} \left((E_k \otimes \dot{\alpha}') b_{\alpha\alpha}^{\alpha'} \dot{\alpha} + 2 (E_k \otimes \dot{\alpha}') b_{\alpha\beta}^{\alpha'} \dot{\beta} + (E_k \otimes \dot{\beta}') b_{\beta\beta}^{\alpha'} \dot{\beta} \right) - \\ &- \frac{1}{2} (E_k \otimes p') b_{\gamma\gamma}^{\alpha'} p + (E_k \otimes p') b_{\gamma\alpha}^{\alpha'} \dot{\alpha} + (E_k \otimes p') b_{\gamma\beta}^{\alpha'} \dot{\beta} + \\ &+ \left(\frac{\partial b_{\alpha}}{\partial \alpha} \right)' \dot{\alpha} + \left(\frac{\partial b_{\beta}}{\partial \alpha} \right)' \dot{\beta} + \left(\frac{\partial b_{\gamma}}{\partial \alpha} \right)' p + \left(\frac{\partial R_0}{\partial \alpha} \right)', \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R^*}{\partial s'} &= \frac{1}{2} \left((E_m \otimes \dot{\alpha}') b_{\alpha\alpha}^{s'} \dot{\alpha} + 2 (E_m \otimes \dot{\alpha}') b_{\alpha\beta}^{s'} \dot{\beta} + (E_m \otimes \dot{\beta}') b_{\beta\beta}^{s'} \dot{\beta} \right) - \\ &- \frac{1}{2} (E_m \otimes p') b_{\gamma\gamma}^{s'} p + (E_m \otimes p') b_{\gamma\alpha}^{s'} \dot{\alpha} + (E_m \otimes p') b_{\gamma\beta}^{s'} \dot{\beta} + \\ &+ \left(\frac{\partial b_{\alpha}}{\partial s} \right)' \dot{\alpha} + \left(\frac{\partial b_{\beta}}{\partial s} \right)' \dot{\beta} + \left(\frac{\partial b_{\gamma}}{\partial s} \right)' p + \left(\frac{\partial R_0}{\partial s} \right)', \end{aligned}$$

$$\frac{\partial R^*}{\partial p'} = -b_{\gamma\gamma} p + b_{\gamma\alpha} \dot{\alpha} + b_{\gamma\beta} \dot{\beta} + b_{\gamma}.$$

Подставляя полученные выражения для производных в (2.6.10), получим нелинейные уравнения в явном виде:

$$\left\{ \begin{aligned}
 & b_{\alpha\alpha}\ddot{\alpha} + b_{\alpha\beta}\ddot{\beta} + \\
 & + [(\dot{\alpha}' \otimes E_k) b_{\alpha\alpha}^{\alpha'} + (\dot{\alpha}' B'_{s\alpha} \otimes E_k) b_{\alpha\alpha}^{s'}] \dot{\alpha} - \\
 & - \frac{1}{2} [(E_k \otimes \dot{\alpha}') b_{\alpha\alpha}^{\alpha'} + B'_{s\alpha} (E_m \otimes \dot{\alpha}') b_{\alpha\alpha}^{s'}] \dot{\alpha} + \\
 & + [(\dot{\alpha}' \otimes E_k) b_{\alpha\beta}^{\alpha'} + (\dot{\alpha}' B'_{s\alpha} \otimes E_k) b_{\alpha\beta}^{s'} - (E_k \otimes \dot{\alpha}') b_{\alpha\beta}^{\alpha'}] \dot{\beta} - \\
 & - \left[B'_{s\alpha} (E_m \otimes \dot{\alpha}') b_{\alpha\beta}^{s'} \dot{\beta} + \frac{1}{2} (E_k \otimes \dot{\beta}') b_{\beta\beta}^{\alpha'} + \frac{1}{2} B'_{s\alpha} (E_m \otimes \dot{\beta}') b_{\beta\beta}^{s'} \right] \dot{\beta} + \\
 & + \frac{1}{2} [(E_k \otimes p') b_{\gamma\gamma}^{\alpha'} + B'_{s\alpha} (E_m \otimes p') b_{\gamma\gamma}^{s'}] p - \\
 & - \left[(E_k \otimes \dot{\beta}') b_{\beta\gamma}^{\alpha'} + B'_{s\alpha} (E_m \otimes \dot{\beta}') b_{\beta\gamma}^{s'} \right] p + \\
 & + [(\dot{\alpha}' \otimes E_k) b_{\alpha\gamma}^{\alpha'} + (\dot{\alpha}' B'_{s\alpha} \otimes E_k) b_{\alpha\gamma}^{s'}] p - \\
 & - [(E_k \otimes \dot{\alpha}') b_{\alpha\gamma}^{\alpha'} - B'_{s\alpha} (E_m \otimes \dot{\alpha}') b_{\alpha\gamma}^{s'}] p + \\
 & + \left[\frac{\partial b_\alpha}{\partial \alpha} - \left(\frac{\partial b_\alpha}{\partial \alpha} \right)' + \frac{\partial b_\alpha}{\partial s} B_{s\alpha} - B'_{s\alpha} \left(\frac{\partial b_\alpha}{\partial s} \right)' \right] \dot{\alpha} - \\
 & - \left[\left(\frac{\partial b_\beta}{\partial \alpha} \right)' + B'_{s\alpha} \left(\frac{\partial b_\beta}{\partial s} \right)' \right] \dot{\beta} - \left[\left(\frac{\partial b_\gamma}{\partial \alpha} \right)' + B'_{s\alpha} \left(\frac{\partial b_\gamma}{\partial s} \right)' \right] p - \\
 & - \left(\frac{\partial R_0}{\partial \alpha} \right)' - B'_{s\alpha} \left(\frac{\partial R_0}{\partial s} \right)' = Q_\alpha^* + B'_{s\alpha} Q_s^*, \\
 \\
 & b_{\beta\alpha}\ddot{\alpha} + b_{\beta\beta}\ddot{\beta} + \\
 & + [(\dot{\alpha}' \otimes E_{l-k}) b_{\beta\alpha}^{\alpha'} + (\dot{\alpha}' B'_{s\alpha} \otimes E_{l-k}) b_{\beta\alpha}^{s'}] \dot{\alpha} + \\
 & + [(\dot{\alpha}' \otimes E_{l-k}) b_{\beta\beta}^{\alpha'} + (\dot{\alpha}' B'_{s\alpha} \otimes E_{l-k}) b_{\beta\beta}^{s'}] \dot{\beta} + \\
 & + [(\dot{\alpha}' \otimes E_{l-k}) b_{\beta\gamma}^{\alpha'} + (\dot{\alpha}' B'_{s\alpha} \otimes E_{l-k}) b_{\beta\gamma}^{s'}] p + \\
 & + \left[\frac{\partial b_\beta}{\partial \alpha} \frac{\partial b_\beta}{\partial s} B_{s\alpha} \right] \dot{\alpha} = Q_\beta^*, \\
 \\
 & \dot{\gamma} = b_{\gamma\gamma} p - b_{\gamma\alpha} \dot{\alpha} - b_{\gamma\beta} \dot{\beta} - b_\gamma, \\
 \\
 & \dot{s} = B_{s\alpha}(\alpha, s) \cdot \dot{\alpha}, \quad \dot{p} = 0.
 \end{aligned} \right. \tag{2.6.11}$$

Уравнения (2.6.11) являются нелинейной математической моделью мехатронной системы с избыточными координатами и циклическими скоростями в случае управления по части циклических координат, записанной в векторно-матричном виде.

Для решения задачи стабилизации определим возможные значения параметров системы (2.6.11) соответствующие стационарному движению и выделим первое приближение в окрестности этого движения.

2.7. Структура уравнений возмущённого движения в переменных Рауса в окрестности стационарного движения

Уравнения (2.6.11) при $Q_\beta^* = 0$ имеют циклические интегралы и частные решения, соответствующие стационарным движениям

$$\alpha = \alpha_0 = \text{const}, \quad p = p_0 = \text{const}, \quad \dot{\beta} = c_\beta = \text{const}, \quad s = s_0 = \text{const}. \quad (2.7.1)$$

Чтобы определить все параметры стационарного движения, подставим (2.7.1) в (2.6.11). Получим уравнения для определения параметров стационарных движений и программных управлений:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{2} [(E_k \otimes c'_\beta) b_{\beta\beta}^{\alpha'} + B'_{s\alpha} (E_m \otimes c'_\beta) b_{\beta\beta}^{s'}] c_\beta + \\ + \frac{1}{2} [(E_k \otimes p'_0) b_{\gamma\gamma}^{\alpha'} + B'_{s\alpha} (E_m \otimes p'_0) b_{\gamma\gamma}^{s'}] p_0 - \\ - [(E_k \otimes c'_\beta) b_{\beta\gamma}^{\alpha'} + B'_{s\alpha} (E_m \otimes c'_\beta) b_{\beta\gamma}^{s'}] p_0 + \\ - \left[\left(\frac{\partial b_\beta}{\partial \alpha} \right)' + B'_{s\alpha} \left(\frac{\partial b_\beta}{\partial s} \right)' \right] c_\beta - \left[\left(\frac{\partial b_\gamma}{\partial \alpha} \right)' + B'_{s\alpha} \left(\frac{\partial b_\gamma}{\partial s} \right)' \right] p_0 - \\ - \left(\frac{\partial R_0}{\partial \alpha} \right)' - B'_{s\alpha} \left(\frac{\partial R_0}{\partial s} \right)' = Q_\alpha^* + B'_{s\alpha} Q_s^*, \\ c_\gamma = b_{\gamma\gamma} p_0 - b_{\gamma\beta} c_\beta - b_\gamma. \end{array} \right. \quad (2.7.2)$$

В уравнениях (2.7.2) все коэффициенты матриц вычислены на стационарном движении (2.7.1). Если учесть формулы (А.30), (А.31) из приложения А, то члены (2.7.2) можно записать следующим образом:

$$(E_k \otimes c'_\beta) b_{\beta\beta}^{\alpha'} c_\beta = \left(\frac{\partial (c'_\beta b_{\beta\beta} c_\beta)}{\partial \alpha} \right)', \quad B'_{s\alpha} (E_m \otimes c'_\beta) b_{\beta\beta}^{s'} c_\beta = \left(\frac{\partial (c'_\beta b_{\beta\beta} c_\beta)}{\partial s} \right)',$$

$$(E_k \otimes p'_0) b_{\gamma\gamma}^{\alpha'} p_0 = \left(\frac{\partial (p'_0 b_{\gamma\gamma} p_0)}{\partial \alpha} \right)', \quad B'_{s\alpha} (E_m \otimes p'_0) b_{\gamma\gamma}^{s'} p_0 = \left(\frac{\partial (p'_0 b_{\gamma\gamma} p_0)}{\partial s} \right)',$$

и т.д. Тогда (2.7.2) можно представить в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{2} p'_0 b_{\gamma\gamma} p_0 - \frac{1}{2} c'_\beta b_{\beta\beta} c_\beta - c'_\beta b_{\beta\gamma} p_0 - c'_\beta b_\beta - p'_0 b_\gamma - R_0 \right) \right)' + \\ + B'_{s\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{2} p'_0 b_{\gamma\gamma} p_0 - \frac{1}{2} c'_\beta b_{\beta\beta} c_\beta - c'_\beta b_{\beta\gamma} p_0 - c'_\beta b_\beta - p'_0 b_\gamma - R_0 \right) \right)' = \\ = Q_\alpha^* + B'_{s\alpha} Q_s^*, \\ c_\gamma = b_{\gamma\gamma} p_0 - b_{\gamma\beta} c_\beta - b_\gamma, \end{array} \right.$$

где $\frac{1}{2}p'_0 b_{\gamma\gamma} p_0 - \frac{1}{2}c'_\beta b_{\beta\beta} c_\beta - c'_\beta b_{\beta\gamma} p_0 - c'_\beta b_\beta - p'_0 b_\gamma - R_0$ – скалярная функция.

Система (2.7.2) с учётом уравнений связей (1.1.1) даёт $k + n - l + m$ уравнений для определения $n + m$ параметров.

Теперь введём возмущения координат:

$$\alpha = \alpha_0 + x, \quad p = p_0 + v, \quad \dot{\beta} = c_\beta + w, \quad s = s_0 + y, \quad Q_\beta = u. \quad (2.7.3)$$

Как и ранее, считаем, что непотенциальные силы Q_α^* , Q_s^* – аналитические векторные функции в окрестности движения (2.7.1). Тогда после исключения зависимых скоростей \dot{s} и циклических скоростей $\dot{\gamma}$ они могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} Q_\alpha^*(x, v, y, \dot{x}, w) &= Q_\alpha^*(0) + f_{\alpha\alpha}x + f_{\alpha s}y + g_{\alpha\alpha}\dot{x} + \\ &\quad + g_{\alpha\beta}w + h_{\alpha\gamma}v + Q_\alpha^{*(2)}(x, v, y, \dot{x}, w), \\ Q_s^*(x, v, y, \dot{x}, w) &= Q_s^*(0) + f_{s\alpha}x + f_{ss}y + g_{s,\alpha}\dot{x} + \\ &\quad + g_{s\beta}w + h_{s\gamma}v + Q_s^{*(2)}(x, v, y, \dot{x}, w), \end{aligned} \quad (2.7.4)$$

где символами $f_{\alpha\alpha}$, $f_{\alpha s}$, $g_{\alpha\alpha}$ и т.д. обозначены постоянные матрицы коэффициентов соответствующих размеров:

$$\begin{aligned} g_{\alpha\alpha} &= \left(\frac{\partial Q_\alpha^*}{\partial \dot{\alpha}} \right)_0, \quad g_{\alpha\beta} = \left(\frac{\partial Q_\alpha^*}{\partial \dot{\beta}} \right)_0, \quad f_{\alpha\alpha} = \left(\frac{\partial Q_\alpha^*}{\partial \alpha} \right)_0, \quad f_{\alpha s} = \left(\frac{\partial Q_\alpha^*}{\partial s} \right)_0, \\ g_{s,\alpha} &= \left(\frac{\partial Q_s^*}{\partial \dot{\alpha}} \right)_0, \quad g_{s\beta} = \left(\frac{\partial Q_s^*}{\partial \dot{\beta}} \right)_0, \quad f_{s\alpha} = \left(\frac{\partial Q_s^*}{\partial \alpha} \right)_0, \quad f_{ss} = \left(\frac{\partial Q_s^*}{\partial s} \right)_0, \\ h_{\alpha\gamma} &= \left(\frac{\partial Q_\alpha^*}{\partial p} \right)_0, \quad h_{s\gamma} = \left(\frac{\partial Q_s^*}{\partial p} \right)_0. \end{aligned}$$

Нижний нулевой индекс означает, что элементы всех матриц вычислены на стационарном движении (2.7.1). $Q_\alpha^{*(2)}$, $Q_s^{*(2)}$ – члены высших порядков по отношению к возмущениям x, v, y, \dot{x}, w и обращающиеся в нуль, если $x = v = y = \dot{x} = w = 0$. $Q_\alpha^*(0)$, $Q_s^*(0)$ – значения сил на движении (2.7.1).

Подставив (2.7.3) в (2.6.11) и учитывая (2.7.2), получим уравнения возмущённого движения в окрестности (2.7.1):

$$\left\{ \begin{aligned} & b_{\alpha\alpha}\ddot{x} + b_{\alpha\beta}\dot{w} + \\ & + [(\dot{x}' \otimes E_k) b_{\alpha\alpha}^{\alpha'} + (\dot{x}' B'_{s\alpha} \otimes E_k) b_{\alpha\alpha}^{s'} - \frac{1}{2} (E_k \otimes \dot{x}') b_{\alpha\alpha}^{\alpha'}] \dot{x} - \\ & \quad - \frac{1}{2} B'_{s\alpha} (E_m \otimes \dot{x}') b_{\alpha\alpha}^{s'} \dot{x} + \\ & \quad + \left[\frac{\partial b_{\alpha}}{\partial \alpha} - \left(\frac{\partial b_{\alpha}}{\partial \alpha} \right)' + \frac{\partial b_{\alpha}}{\partial s} B_{s\alpha} - B'_{s\alpha} \left(\frac{\partial b_{\alpha}}{\partial s} \right)' \right] \dot{x} + \\ & + [(\dot{x}' \otimes E_k) b_{\alpha\beta}^{\alpha'} + (\dot{x}' B'_{s\alpha} \otimes E_k) b_{\alpha\beta}^{s'} - (E_k \otimes \dot{x}') b_{\alpha\beta}^{\alpha'}] (c_{\beta} + w) - \\ & \quad - B'_{s\alpha} (E_m \otimes \dot{x}') b_{\alpha\beta}^{s'} (c_{\beta} + w) + \\ & - \frac{1}{2} [(E_k \otimes (c'_{\beta} + w')) b_{\beta\beta}^{\alpha'} + B'_{s\alpha} (E_m \otimes (c'_{\beta} + w')) b_{\beta\beta}^{s'}] (c_{\beta} + w) + \\ & \quad + \frac{1}{2} [(E_k \otimes (p'_0 + v')) b_{\gamma\gamma}^{\alpha'} + B'_{s\alpha} (E_m \otimes (p'_0 + v')) b_{\gamma\gamma}^{s'}] (p_0 + v) - \\ & \quad - [(E_k \otimes (c'_{\beta} + w')) b_{\beta\gamma}^{\alpha'} + B'_{s\alpha} (E_m \otimes (c'_{\beta} + w')) b_{\beta\gamma}^{s'}] (p_0 + v) + \\ & \quad + [(\dot{x}' \otimes E_k) b_{\alpha\gamma}^{\alpha'} + (\dot{x}' B'_{s\alpha} \otimes E_k) b_{\alpha\gamma}^{s'} - (E_k \otimes \dot{x}') b_{\alpha\gamma}^{\alpha'}] (p_0 + v) - \\ & \quad - B'_{s\alpha} (E_m \otimes \dot{x}') b_{\alpha\gamma}^{s'} (p_0 + v) - \\ & - \left[\left(\frac{\partial b_{\beta}}{\partial \alpha} \right)' + B'_{s\alpha} \left(\frac{\partial b_{\beta}}{\partial s} \right)' \right] (c_{\beta} + w) - \left[\left(\frac{\partial b_{\gamma}}{\partial \alpha} \right)' + B'_{s\alpha} \left(\frac{\partial b_{\gamma}}{\partial s} \right)' \right] (p_0 + v) - \\ & \quad - \left(\frac{\partial R_0}{\partial \alpha} \right)' - B'_{s\alpha} \left(\frac{\partial R_0}{\partial s} \right)' = Q_{\alpha}^* + B'_{s\alpha} Q_s^*, \end{aligned} \right. \quad (2.7.5)$$

$$\begin{aligned} & b_{\beta\alpha}\ddot{x} + b_{\beta\beta}\dot{w} + [(\dot{x}' \otimes E_{l-k}) b_{\beta\alpha}^{\alpha'} + (\dot{x}' B'_{s\alpha} \otimes E_{l-k}) b_{\beta\alpha}^{s'}] \dot{x} + \\ & \quad + [(\dot{x}' \otimes E_{l-k}) b_{\beta\beta}^{\alpha'} + (\dot{x}' B'_{s\alpha} \otimes E_{l-k}) b_{\beta\beta}^{s'}] (c_{\beta} + w) + \\ & \quad + [(\dot{x}' \otimes E_{l-k}) b_{\beta\gamma}^{\alpha'} + (\dot{x}' B'_{s\alpha} \otimes E_{l-k}) b_{\beta\gamma}^{s'}] (p_0 + v) + \\ & \quad + \left[\frac{\partial b_{\beta}}{\partial \alpha} + \frac{\partial b_{\beta}}{\partial s} B_{s\alpha} \right] \dot{x} = Q_{\beta}^*, \end{aligned}$$

$$\dot{y} = B_{s\alpha} \cdot \dot{x}, \quad \dot{v} = 0.$$

Выделим в (2.7.5) первое приближение в окрестности движения (2.7.1). При этом учитываем, что элементы всех матриц коэффициентов зависят только от координат α и s . Будем использовать формулы (A.26) – (A.29), (A.32) и (A.33), приведённые в приложении А. В итоге будем иметь

$$\left\{ \begin{aligned} & A_1 \ddot{x} + A_2 \dot{w} + (K_1 - G) \dot{x} + (C_1 + B'_{s\alpha}(0) C_2 + C_{\alpha\alpha}^B - F_{\alpha\alpha}) x + \\ & \quad + (C'_2 + B'_{s\alpha}(0) C_3 + C_{\alpha s}^B - F_{\alpha s}) y + \\ & \quad + H v + P w = X_{\alpha}^{(2)}(x, v, y, \dot{x}, w, \dot{v}), \\ & A_3 \ddot{x} + A_4 \dot{w} + K_2 \dot{x} = u + X_{\beta}^{(2)}(x, v, y, \dot{x}, w, \dot{v}), \\ & \dot{y} = B_{s\alpha}(0) \cdot \dot{x} + B_{s,\alpha}^{(1)}(x, y) \cdot \dot{x}, \quad \dot{v} = 0, \end{aligned} \right. \quad (2.7.6)$$

где матрицы коэффициентов постоянны и выражаются через функцию Рауса, уравнения связей и выражения непотенциальных сил следующим образом:

$$A_1 = b_{\alpha\alpha}(0), \quad A_2 = b_{\alpha\beta}(0), \quad A_3 = b_{\beta\alpha}(0), \quad A_4 = b_{\beta\beta}(0),$$

$$G = g_{\alpha\alpha} + B'_{s\alpha}(0) g_{s,\alpha},$$

$$\begin{aligned} K_1 = & (E_k \otimes c'_\beta) \left[\left(\frac{\partial b_{\beta\alpha}^\dagger}{\partial \alpha} \right)_0 + \left(\frac{\partial b_{\beta\alpha}^\dagger}{\partial s} \right)_0 B_{s\alpha}(0) - b_{\beta\alpha}^{\alpha'}(0) \right] + \\ & + (E_k \otimes p'_0) \left[\left(\frac{\partial b_{\gamma\alpha}^\dagger}{\partial \alpha} \right)_0 + \left(\frac{\partial b_{\gamma\alpha}^\dagger}{\partial s} \right)_0 B_{s\alpha}(0) - b_{\gamma\alpha}^{\alpha'}(0) \right] - \\ & - B'_{s\alpha}(0) (E_s \otimes p'_0) b_{\gamma\alpha}^{s'}(0) - B'_{s\alpha}(0) (E_s \otimes c'_\beta) b_{\beta\alpha}^{s'}(0) + \\ & + \left[\left(\frac{\partial b_\alpha}{\partial \alpha} \right)_0 - \left(\frac{\partial b_\alpha}{\partial \alpha} \right)'_0 + \left(\frac{\partial b_\alpha}{\partial s} \right)_0 B_{s\alpha}(0) - B'_{s\alpha}(0) \left(\frac{\partial b_\alpha}{\partial s} \right)'_0 \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_2 = & (E_k \otimes c'_\beta) \left[\left(\frac{\partial b_{\beta\beta}^\dagger}{\partial \alpha} \right)_0 + \left(\frac{\partial b_{\beta\beta}^\dagger}{\partial s} \right)_0 B_{s\alpha}(0) \right] + \\ & + \left[\left(\frac{\partial b_\beta}{\partial \alpha} \right)_0 + \left(\frac{\partial b_\beta}{\partial s} \right)_0 B_{s\alpha}(0) \right] + \\ & + (E_k \otimes p'_0) \left[\left(\frac{\partial b_{\gamma\beta}^\dagger}{\partial \alpha} \right)_0 + \left(\frac{\partial b_{\gamma\beta}^\dagger}{\partial s} \right)_0 B_{s\alpha}(0) \right]. \end{aligned}$$

Верхней стрелочкой \dagger обозначена операция векторизации [2, 54]. Её определение приведено также в приложении А.

Введём обозначение для скалярной функции:

$$\tilde{R}_0 = \frac{1}{2} p'_0 b_{\gamma\gamma} p_0 - \frac{1}{2} c'_\beta b_{\beta\beta} c_\beta - c'_\beta b_{\beta\gamma} p_0 - c'_\beta b_\beta - p'_0 b_\gamma - R_0$$

Тогда

$$C_1 = \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial \tilde{R}_0}{\partial \alpha} \right)' \right)_0, \quad C_2 = \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial \tilde{R}_0}{\partial s} \right)' \right)_0, \quad C_3 = \left(\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \tilde{R}_0}{\partial s} \right)' \right)_0,$$

$$C_{\alpha\alpha}^B = (B'_{s\alpha})_0^\alpha \cdot \left(E_k \otimes \left(\frac{\partial \tilde{R}_0}{\partial s} \right)' \right)_0, \quad C_{\alpha s}^B = (B'_{s\alpha})_0^s \cdot \left(E_m \otimes \left(\frac{\partial \tilde{R}_0}{\partial s} \right)' \right)_0,$$

$$F_{\alpha\alpha}^B = f_{\alpha\alpha} + B'_{s\beta}(0) f_{s\alpha} + (B'_{s\alpha})_0^\alpha \cdot (E_k \otimes Q_s^*(0)),$$

$$F_{\alpha s}^B = f_{\alpha s} + B'_{s\beta}(0) f_{ss} + (B'_{s\alpha})_0^s \cdot (E_m \otimes Q_s^*(0)),$$

$$\begin{aligned} H = & (E_k \otimes p'_0) b_{\gamma\gamma}^{\alpha'}(0) + B'_{s\alpha}(0) (E_m \otimes p'_0) b_{\gamma\gamma}^{s'}(0) - \\ & - (E_k \otimes c'_\beta) b_{\beta\gamma}^{\alpha'}(0) - B'_{s\alpha}(0) (E_m \otimes c'_\beta) b_{\beta\gamma}^{s'}(0) - \\ & - \left(\left(\frac{\partial b_\gamma}{\partial \alpha} \right)'_0 + B'_{s\alpha}(0) \left(\frac{\partial b_\gamma}{\partial s} \right)'_0 \right) - (h_{\alpha\gamma} + B'_{s\alpha}(0) h_{s\gamma}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P = & - (E_k \otimes c'_\beta) b_{\beta\beta}^{\alpha'}(0) - B'_{s\alpha}(0) (E_m \otimes c'_\beta) b_{\beta\beta}^{s'}(0) - \\
& - (E_k \otimes p'_0) b_{\gamma\beta}^{\alpha'}(0) - B'_{s\alpha}(0) (E_m \otimes p'_0) b_{\gamma\beta}^{s'}(0) - \\
& - (g_{\alpha\beta} + B'_{s\alpha}(0) h_{s\beta}) - \left(\left(\frac{\partial b_\beta}{\partial \alpha} \right)'_0 + B'_{s\alpha}(0) \left(\frac{\partial b_\beta}{\partial s} \right)'_0 \right).
\end{aligned}$$

Коэффициенты матриц постоянны. Они вычисляются на движении (2.7.1), что отмечено символом 0. Кроме этого,

$$B_{s,\alpha}^{(1)}(x, y) = B_{s\alpha}(\alpha_0 + x, s_0 + y) - B_{s\alpha}(0).$$

Проведём в уравнениях (2.7.6) линейную замену [70]

$$z = y - B_{s\alpha}(0) \cdot x. \quad (2.7.7)$$

С помощью замены (2.7.7) система (2.7.6) приводится к специальному виду теории критических случаев. При этом выделяются критические переменные z . После замены (2.7.7) система (2.7.6) принимает вид:

$$\left\{ \begin{array}{l}
A_1 \ddot{x} + A_2 \dot{w} + (K_1 - G) \dot{x} + (C + C^B) x + \\
+ Sz + Hv + Pw = \tilde{X}_\alpha^{(2)}(x, v, z, \dot{x}, w, \dot{v}), \\
A_3 \ddot{x} + A_4 \dot{w} + K_2 \dot{x} = u + \tilde{X}_\beta^{(2)}(x, v, z, \dot{x}, w, \dot{v}), \\
\dot{z} = \tilde{B}_{s,\alpha}^{(1)}(x, z) \cdot \dot{x}, \quad \dot{v} = 0,
\end{array} \right. \quad (2.7.8)$$

где

$$\begin{aligned}
C &= C_1 + B'_{s\alpha}(0) C_2 + C'_2 B_{s\alpha}(0) + B'_{s\alpha}(0) C_3 B_{s\alpha}(0), \\
C^B &= C_{\alpha\alpha}^B + C_{\alpha s}^B B_{s\alpha}(0) - F^B, \quad F^B = F_{\alpha\alpha}^B + F_{\alpha s}^B B_{s\alpha}(0), \\
S &= C'_2 + B'_{s\alpha}(0) C_3 + \frac{B}{\alpha s} - F_{\alpha s}^B. \\
\tilde{X}_\alpha^{(2)}(x, v, z, \dot{x}, w, \dot{v}) &= X_\alpha^{(2)}(x, v, z + B_{s\alpha}(0)x, \dot{x}, w, \dot{v}), \\
\tilde{X}_\beta^{(2)}(x, v, z, \dot{x}, w, \dot{v}) &= X_\beta^{(2)}(x, v, z + B_{s\alpha}(0)x, \dot{x}, w, \dot{v}), \\
\tilde{B}_{s\alpha}^{(1)}(x, z) &= B_{s,\alpha}^{(1)}(x, z + B_{s\alpha}(0)x).
\end{aligned}$$

Замечание 2.7.1. После замены (2.7.7) матрица C коэффициентов при координатах x становится симметричной, как это было и в случае других переменных. Однако вид скалярной функции, которая служит основой для вычисления элементов матриц C_1, C_2, C_3 заметно усложняется. Член Cx можно

интерпретировать как потенциальные силы [57], действующие на систему. Часть гироскопических сил входит в матрицу K_1 . Они появляются в математической модели системы, если линейная по скоростям часть функции Рауса (2.6.9) $b'_\alpha \dot{\alpha}$ отлична от нуля. Т.е., если столбец $a_\alpha - a_{\alpha\gamma} a_{\gamma\gamma}^{-1} a_\gamma$ не нулевой.

Замечание 2.7.2. Следуя обозначениям, введённым ранее, обозначаем верхним индексом B матрицы, содержащие производные высших порядков уравнений связей (1.1.1).

$$\begin{aligned} C^B = & (B'_{s\alpha})_0^\alpha \cdot \left(E_k \otimes \left(\frac{\partial \tilde{R}_0}{\partial s} \right)'_0 \right) + (B'_{s\alpha})_0^s \cdot \left(E_m \otimes \left(\frac{\partial \tilde{R}_0}{\partial s} \right)'_0 \right) B_{s\alpha}(0) - , \\ & - f_{\alpha\alpha} - B'_{s\beta}(0) f_{s\alpha} - f_{\alpha s} B_{s\alpha}(0) - B'_{s\beta}(0) f_{ss} B_{s\alpha}(0) - \\ & - (B'_{s\alpha})_0^\alpha \cdot (E_k \otimes Q_s^*(0)) - (B'_{s\alpha})_0^s \cdot (E_m \otimes Q_s^*(0)). \end{aligned}$$

Если матрицы $(B'_{s\alpha})_0^\alpha$ и $(B'_{s\alpha})_0^s$, содержащие вторые производные уравнений связей (1.1.1) на движении (2.7.1) нулевые, то уравнения первого приближения не будут зависеть от квадратичных членов разложения голономных связей (1.1.1). Как и выше, при рассмотрении уравнений в переменных Лагранжа, можно сделать вывод, что в общем случае при моделировании динамики систем с нелинейными геометрическими связями нельзя ограничиваться рассмотрением только линейного приближения связей.

Приведём уравнения (2.7.8) к нормальной форме. Введём обратную матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}.$$

Тогда уравнения (2.7.8) можно записать в следующем компактном виде:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = N\xi + Vu + Zz + \Phi^{(2)}(\xi, v, z), \\ \dot{z} = \tilde{B}_{s,\alpha}^{(1)}(x, z) \cdot \dot{x}, \quad \dot{v} = 0 \quad \xi' = (x', \dot{x}', w'), \end{cases} \quad (2.7.9)$$

где

$$\begin{aligned} N = & \begin{pmatrix} 0 & E_k & 0 \\ -b_1(C + C^B) & -b_1(K_1 - G) - b_2K_2 & -b_1P \\ -b_3(C + C^B) & -b_3(K_1 - G) - b_4K_2 & -b_2P \end{pmatrix}, \\ V = & \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \\ b_4 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 0 \\ -b_1S \\ -b_3S \end{pmatrix}, \quad \Phi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ b_1\tilde{X}_\alpha^{(2)} + b_2\tilde{X}_\beta^{(2)} \\ b_1\tilde{X}_\alpha^{(2)} + b_2\tilde{X}_\beta^{(2)} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.7.10)$$

Таким образом, получены уравнения возмущённого движения с выделенным первым приближением в окрестности стационарного движения (2.7.1) в форме Шульгина в переменных Рауса в случае введения управляющих воздействий по части циклических координат. Для построения полной модели конкретной управляемой системы можно добавлять уравнения описывающие динамику двигателей, осуществляющих стабилизацию установившегося режима.

Характеристическое уравнение линеаризованной системы будет иметь не менее $n + m - l$ нулевых корней, которые соответствуют, во-первых, уравнениям нелинейных связей, а, во-вторых, неуправляемым циклическим импульсам.

2.8. Стабилизация стационарных движений при полной информации о состоянии

Сначала предположим, что информация о состоянии системы полностью известна. Тогда достаточное условие разрешимости задачи стабилизации движения (2.7.1) до устойчивости по всем переменным могут быть сформулированы в виде следующей теоремы.

Теорема 2.8.1. *Если для системы (2.7.9) пара (N, V) управляема, т.е. выполнено условие*

$$\text{rank} (V \quad NV \quad N^2V \quad \dots \quad N^{k+l-1}V) = k + l, \quad (2.8.1)$$

то существует линейное управление

$$u = -\mathcal{K}\xi, \quad (2.8.2)$$

стабилизирующее стационарное движение (2.7.1), до устойчивости по всем переменным.

Доказательство. Выделим из системы (2.7.9) линейную управляемую подсистему

$$\dot{\xi} = N\xi + Vu, \quad (2.8.3)$$

не содержащую переменных z и v , которым точно соответствуют нулевые корни характеристического уравнения первого приближения системы (2.7.9). Если

выполнено условие (2.8.1) управляемости пары (N, V) , то существует [14] такая матрица \mathcal{K} , что действительные части всех корней характеристического уравнения системы (2.8.3) будут отрицательны. Элементы этой матрицы могут быть найдены посредством решения соответствующей линейно-квадратичной задачи по методу Н.Н. Красовского [46]. Тогда структура полной нелинейной системы (2.7.9), замкнутой управлением (2.8.2) будет полностью соответствовать условию теоремы 2.6.1 (об устойчивости стационарных движений систем с избыточными координатами).

При этом при отсутствии возмущений циклических импульсов, т.е. при $v = 0$, вместо системы (2.7.9) будем иметь систему

$$\begin{cases} \dot{\xi} = N\xi + Vu + Zz + \Phi^{(2)}(\xi, 0, z), \\ \dot{z} = \tilde{B}_{s\alpha}^{(1)}(x, z) \cdot \dot{x}, \end{cases} \quad (2.8.4)$$

для которой задача устойчивости сводится к особенному случаю Ляпунова с помощью (нелинейной) замены

$$\xi = \eta + \varphi(z),$$

где $\varphi(z)$ определяется векторно-матричным уравнением

$$(N - V\mathcal{K})\varphi(z) + Zz + \Phi^{(2)}(\varphi(z), 0, z) \equiv 0.$$

Такая замена существует в силу того, что действительные части всех корней характеристического уравнения матрицы $N - V\mathcal{K}$ отрицательны [55]. Тогда аналогично теореме об асимптотической устойчивости положений равновесия систем с избыточными координатами, стационарное движение будет устойчиво относительно всех переменных, включая и избыточные координаты. При наличии циклических импульсов (и существовании циклических интегралов) система (2.7.9) может быть представлена как полученная из (2.8.4) добавлением постоянно действующих возмущений – функций, зависящих от возмущений циклических импульсов $v = \text{const} \neq 0$. Тогда полная система (2.7.9) будет удовлетворять условиям теоремы Малкина об устойчивости при постоянно действующих возмущениях [55]. \square

2.9. Стабилизация стационарных движений при неполной информации о состоянии

Пусть теперь информация о состоянии получается в виде вектора измерений σ . Рассмотрим простейшие варианты матриц коэффициентов линейного приближения: $\sigma_i = \Sigma_i \xi$, $i = 1, 2, 3$, где

$$\Sigma_1 = \begin{pmatrix} E_k & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & E_k & 0 \end{pmatrix}, \quad \Sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & E_{l-k} \end{pmatrix}.$$

Управление в данном случае будем формировать в виде

$$u_i = -\mathcal{K}_i \widehat{\xi}_i,$$

где $\widehat{\xi}_i$ – вектор оценки фазового состояния системы, полученный по измерению σ_i . Для получения необходимой информации для формирования стабилизирующего управления построим наблюдатель [14] вида

$$\dot{\widehat{\xi}} = N\widehat{\xi} + Vu + \Lambda_i (\Sigma_i \widehat{\xi}_i - \sigma_i), \quad (2.9.1)$$

где Λ_i – постоянные матрицы коэффициентов системы оценивания, которые необходимо определить.

Достаточное условие разрешимости задачи стабилизации стационарного движения (2.7.1) до устойчивости по всем переменным при неполной информации о состоянии может быть сформулировано в виде следующей теоремы:

Теорема 2.9.1. *Если для системы (2.7.9) пара (N, V) управляема, а для системы (2.9.1) пара (N, Σ_i) наблюдаема, т.е. выполнены условия (2.8.1) и*

$$\text{rank} \begin{pmatrix} \Sigma'_i & N\Sigma'_i & N^2\Sigma'_i & \dots & N^{k+l-1}\Sigma'_i \end{pmatrix} = k + l, \quad (2.9.2)$$

то существует линейное управление вида

$$u_i = -\mathcal{K}_i \widehat{\xi}_i, \quad (2.9.3)$$

стабилизирующее стационарное движение (2.7.1), до устойчивости по всем переменным. Вектор $\widehat{\xi}_i$ оценки фазового состояния получен по измерению σ_i из решения дуальной задачи стабилизации

$$\dot{\widehat{\xi}}_i = N'\widehat{\xi}_i + \Sigma'_i \zeta_i, \quad \zeta_i = \Lambda'_i \widehat{\xi}_i.$$

Доказательство. Выделим из системы (2.7.9) линейную управляемую подсистему (2.8.3). Если выполнены условия управляемости (2.8.1) и наблюдаемости (2.9.2), то существуют [14] такие матрицы \mathcal{K}_i и Σ_i , что действительные части всех корней характеристического уравнения системы (2.7.9) (кроме нулевых, соответствующих связям и циклическим импульсам) и (2.9.1) будут отрицательны. Элементы этих матриц могут быть найдены по методу Н.Н. Красовского [46] посредством решения соответствующих линейно-квадратичных задач. При этом структура полной нелинейной системы (2.7.9), замкнутой управлением (2.9.3), соответствует условию теоремы об устойчивости стационарных движений с избыточными координатами 2.6.1. Точно также как и в доказательстве теоремы 2.8.1 можно показать, что если отсутствуют возмущения циклических импульсов, стационарное движение (2.7.1) системы (2.7.9) будет асимптотически устойчиво относительно всех переменных. \square

Полученные теоретические результаты были применены в работах [37, 39, 41] для стабилизации стационарных движений некоторых манипуляторов.

2.10. Выводы по главе 2

1. С использования операций кронекеровского произведения и векторизации, в переменных Лагранжа и Рауса получены математические модели динамики мехатронных систем с нелинейными геометрическими связями в виде векторно-матричных нелинейных уравнений и уравнений с выделенным первым приближением в предположении о наличии циклических координат.
2. Доказаны новые достаточные условия разрешимости задачи стабилизации для полной нелинейной системы при различных способах введения управляющих воздействий: по независимым позиционным координатам, по избыточным координатам, по всему вектору циклических координат, по части циклических координат, в том числе при неполной информации о состоянии.
3. Разработан алгоритм численного нахождения коэффициентов стабилизирующего управления и наблюдателя для стабилизации стационарных движений мехатронных систем с геометрическими связями.

Глава 3. Математическое моделирование системы GBV 1005 Ball and Beam

В данной главе рассматриваются различные подходы к моделированию и стабилизации положений равновесия мехатронной системы GBV 1005 Ball and Beam. Описание системы и постановка задачи приводятся в разделе 3.1. Рассмотрены следующие задачи:

1. получены математические модели системы GBV 1005 Ball and Beam для разных способов введения управляющих воздействий: посредством механического момента или посредством дополнительного напряжения на якорь двигателя. Возможно построить две различные математические модели в зависимости от выбора избыточной координаты (разделы 3.1–3.4);
2. вычислены матрицы коэффициентов стабилизирующих воздействий;
3. проведено сравнение результатов применения математических моделей динамики этой системы, построенных на основе уравнений Шульгина, при различном выборе избыточной координаты;
4. построена математическая модель системы в случае неполной информации о состоянии (раздел 3.5);
5. проведено сравнение с математической моделью, построенной без учёта нелинейных членов связи (уравнения Лагранжа второго рода при линеаризации уравнения связи) (раздел 3.6).

3.1. Описание системы GBV 1005 Ball and Beam. Цели численного эксперимента

Системы типа Ball and Beam широко используются для изучения в реальном времени динамики нелинейных управляемых объектов. В составе этих систем имеется механическая компонента, включающая шар, движущийся по жёлобу под действием только силы тяжести. Наклон жёлоба изменяется электроприводом. Решению задачи стабилизации положений равновесия системы Ball and Beam с помощью различных подходов к управлению, посвящено много

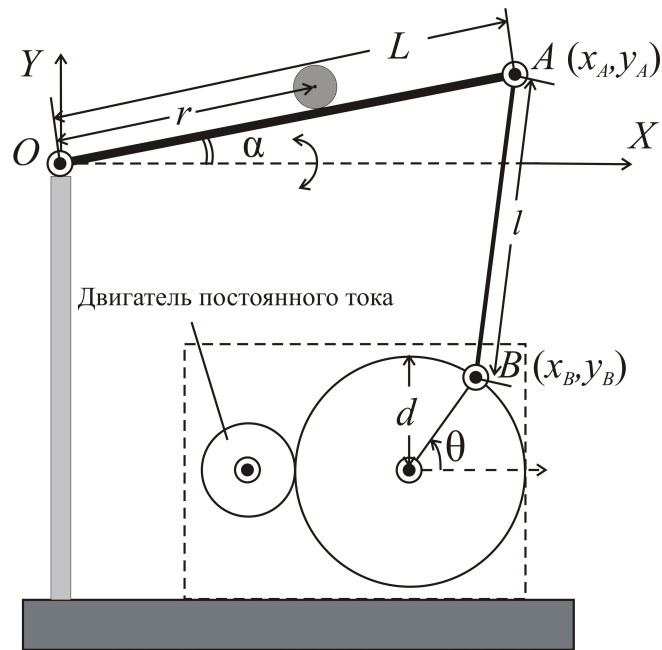


Рис. 3.1. Схема системы GVB 1005 Ball and Beam

работ [68, 69, 71, 72, 74, 78, 84, 85, 91, 93, 99, 100]. Заметим, что система GVB 1005 Ball and Beam пользуется заслуженной популярностью благодаря своей простоте, компактности и безопасности.

Существуют разные модификации систем Ball and Beam. В работах [69, 71, 72, 78] рассматриваются системы, где жёлоб непосредственно связан с валом редуктора электропривода. Их динамика может быть адекватно описана уравнениями Лагранжа второго рода. Статьи [74, 84, 85, 91, 93, 99, 100] посвящены исследованию систем другого типа, в которых наклон желоба изменяется с помощью стержня постоянной длины, связанного с колесом редуктора электропривода. В результате угол наклона желоба и угол поворота колеса связаны нелинейным уравнением, разрешить которое относительно какого-либо из углов в удобной форме не удаётся. Таким образом, соответствующие углы оказываются зависимыми. Поэтому будем рассматривать эту систему как систему с избыточной координатой и для математического моделирования её динамики воспользуемся результатами главы 1.

Введем систему координат как указано на рисунке 3.1. Тогда положение шара $r(t)$ – расстояние от начала O неподвижной системы координат OXY до точки касания шара и желоба – регулируется за счет изменения угла $\alpha(t)$ наклона желоба OA и должно стабилизироваться в некотором наперед заданном положении r_0 , $0 < r_0 < L$, где L – длина желоба OA . Угол поворота колеса редуктора электродвигателя обозначим $\theta(t)$.

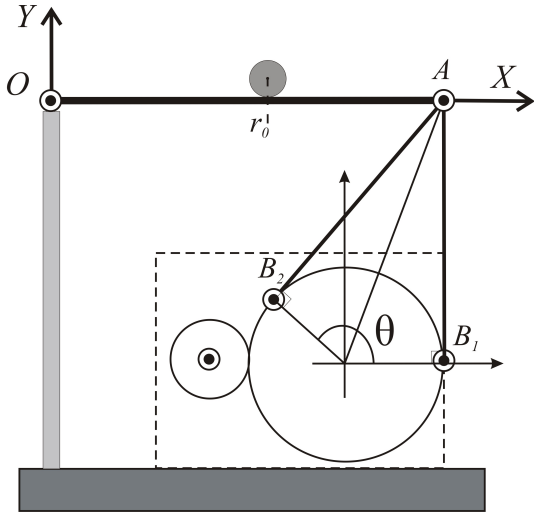


Рис. 3.2. Положения равновесия системы Ball and Beam

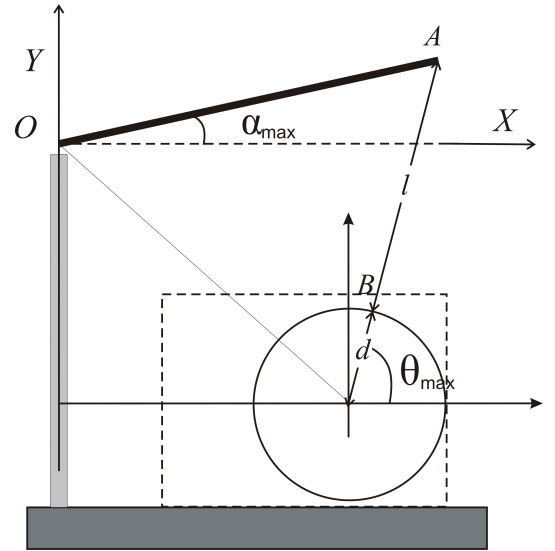


Рис. 3.3. Максимальное положительное отклонение угла α

Отметим, что без приложения постоянного момента, создаваемого приводным двигателем, в рассматриваемой конструкции Ball and Beam равновесия не существует. Постоянный момент для заданного положения равновесия является отличной от нуля неконсервативной позиционной силой.

Уравнение геометрической связи получается из условия, что расстояние между точками $A(x_A, y_A)$ и $B(x_B, y_B)$ постоянно. Тогда имеем нелинейное уравнение связи в виде [30]

$$(L(\cos \alpha - 1) + d(1 - \cos \theta))^2 + (L \sin \alpha + l - d \sin \theta)^2 = l^2, \quad (3.1.1)$$

где $l = AB$, d – радиус колеса.

Очевидно, равновесие возможно только тогда, когда $\alpha = 0$, т.е. когда желоб расположен горизонтально. Положив $\alpha_0 = 0$ и приняв для однозначного определения, что $0 \leq \theta \leq \pi$, получим значения угла θ , соответствующие всем положениям равновесия системы:

$$\theta_0 = 0, \quad \theta_1 = 2 \arccos \left(\frac{d}{\sqrt{l^2 + d^2}} \right). \quad (3.1.2)$$

Соответствующие геометрические конфигурации показаны на рис. 3.2.

Замечание 3.1.1. Во всех работах, посвящённых стабилизации равновесия системы *GVB 1005 Ball and Beam*, рассматривается только одно положение равновесия: $\alpha_0 = \theta_0 = 0$. Положение равновесия для ненулевого значения угла

θ впервые было указано А.Я. Красинским [22]. Оно, очевидно, теряется, если вместо нелинейного уравнения связи (3.1.1) пользоваться приближённым [99, 100]

$$\alpha \approx \frac{d}{L}\theta. \quad (3.1.3)$$

За счёт уравнения (3.1.3) исключают один из углов, что дает возможность использовать для моделирования уравнения Лагранжа второго рода. По такому принципу построено большинство математических моделей для стабилизации системы *Ball and Beam* с геометрической связью [74, 84, 85, 91, 93, 99, 100]. Однако, как показывает анализ аналитических уравнений динамики, в общем случае такой подход некорректен [22]. В разделе 3.6 это будет продемонстрировано на конкретном примере системы *GBB 1005 Ball and Beam* с помощью компьютерного моделирования процессов стабилизации.

Замечание 3.1.2. Геометрические связи, наложенные на систему, ограничивают пределы изменения координат. Иными словами, значения параметров системы и, соответственно, их возмущений должны быть совместимы со связями. Это соображение важно учитывать при определении параметров в положении равновесия и при задании начальных возмущений для компьютерного моделирования. В случае рассматриваемой системы *Ball and Beam* такие ограничения существуют для углов α , θ и положения r шара в желобе. Диапазон изменения последнего принадлежит интервалу $(R, L - R)$, где R – радиус шара. Максимально возможное значение угла наклона желоба α_{\max} легко рассчитывается из геометрии конструкции, что показано на рис. 3.3:

$$\alpha_{\max} = \arccos \left(\frac{L^2 - Ld - ld}{L\sqrt{l^2 + (L - d)^2}} \right) - \arccos \left(\frac{L - d}{\sqrt{l^2 + (L - d)^2}} \right).$$

Минимальное значение α может варьироваться в зависимости от конструкции, будем считать, что $\alpha_{\min} = -\alpha_{\max}$.

Итак, геометрическая конфигурация системы полностью задается тремя параметрами: положением шара в желобе $r(t)$ и углами $\alpha(t)$ и $\theta(t)$, отсчитываемыми, как указано на рис. 3.1. Причем параметры $\alpha(t)$ и $\theta(t)$ связаны нелинейной зависимостью (3.1.1). Таким образом, при построении уравнений Шульгина в качестве зависимой координаты можно выбрать любой из этих двух параметров. Математические уравнения динамики системы при этом будут различны,

однако это не окажет влияния работу системы в целом. Как будет показано далее, переходные процессы по всем координатам будут совпадать с точностью до вычислительной погрешности. Для одного и того же положения равновесия совпадают и графики управлений как функций времени, несмотря на то, что выражены эти воздействия, как линейные функции различных фазовых переменных, по-разному.

Замечание 3.1.3. *При различном выборе зависимой координаты (угол α или угол θ) одни и те же векторы начальных возмущений будут соответствовать различным начальным конфигурациям системы. Поэтому для адекватного сравнения результатов управления (для одного и того же равновесия) необходимо согласование начальных возмущений угловых переменных в соответствии с уравнением связи (3.1.1).*

В заключение, сформулируем **цели численного эксперимента:**

1. Продемонстрировать стабилизируемость положений равновесия системы до асимптотической устойчивости, несмотря на наличие нулевого корня в характеристическом уравнении линеаризованной системы.
2. Применить алгоритм (1.6.1) численного нахождения коэффициентов стабилизирующего управления и наблюдателя для мехатронных систем с геометрическими связями для стабилизации положений равновесия системы Ball and Beam.
3. Показать, что различие математических моделей, построенных на основе уравнений в форме М.Ф. Шульгина но при разном выборе зависимой координаты, не оказывает влияние на работу системы в целом.
4. Показать, что использование для определения коэффициентов стабилизирующего управления математической модели, построенной на основе линеаризации связей может привести к некорректной работе стенда.

3.2. Построение математической модели системы Ball and Beam.

Общие положения

Для корректного сравнения разных математических моделей, при их построении будем использовать одни и те же механические допущения, а также

одинаковые выражения для кинетической и потенциальной энергий и непотенциальных сил.

При построении всех математических моделей системы Ball and Beam прием следующие основные допущения:

- рассматриваем плоскую задачу;
- толщиной колеса редуктора электропривода пренебрегаем;
- радиус R шара учитывается;
- массу желоба считаем пренебрежимо малой;
- трение не учитывается;
- учитывается внешнее сопротивление при вращении вала редуктора электродвигателя;
- шарниры идеальные плоские;
- звено AB будем считать тонким прямым невесомым, абсолютно жестким стержнем.

Замечание 3.2.1. *За координату, определяющую положение шара, можно также взять $s = OC$ – расстояние от точки O до центра масс шара C . Этот вариант был подробно рассмотрен в [30]. Расстояния s от начала координат до точки соприкосновения шара с желобом, очевидно, связаны соотношением $OC^2 = OP^2 + R^2$. Вид кинетической и потенциальной энергий существенно зависит от того, какая именно координата используется для определения положения шара [30]. Так как с точки зрения выполнения аналитических преобразований более удобен вариант $r = OP$ (см. рис. 3.1), будем использовать именно его.*

С учетом принятых допущений и обозначений, для механической части системы, включающей шар и ротор двигателя с редуктором, кинетическая энергия может быть записана [30] в общем виде следующим образом:

$$T = \frac{mV_C^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2} + \frac{J_0\dot{\theta}^2}{2},$$

где V_C – скорость центра масс шара, $\omega = \dot{\alpha} - \frac{\dot{r}}{R}$ – полная угловая скорость шара относительно системы координат Кёнига с центром в точке C и осями, параллельными неподвижным. Это выражение получается из условия качения шарика без проскальзывания. Далее, $J = \frac{2}{5}mR^2$ – момент инерции шара, J_0 – момент инерции всей системы, приведенной к валу двигателя.

Скорость V_C центра масс шара складывается из скорости движения вдоль желоба и движения по касательной к окружности радиуса s с центром в точке O . Поэтому для выражения кинетической и потенциальной энергий системы будем иметь [30]:

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{m}{2}(r^2 + R^2)\left(\dot{\alpha} - \frac{R\dot{r}}{r^2 + R^2}\right)^2 + \frac{J}{2}\left(\dot{\alpha} - \frac{\dot{r}}{R}\right)^2 + \frac{J_0}{2}\dot{\theta}^2. \\ \Pi &= mg(r\sin\alpha + R\cos\alpha). \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

Для численного решения задачи стабилизации введём следующие значения параметров системы, взятые из [68]:

Таблица 3.1 Механические параметры системы				
№	Параметр	Обозначение	Величина	Единицы измерения
1.	Масса шара	m	0,064	кг
2.	Радиус шара	R	0.0254	м
3.	Положение шара на желобе	r_0	от 0.03 до 0,4	м
4.	Длина желоба OA	L	0,425	м
5.	Длина стержня AB	l	0,12	м
6.	Радиус колеса электропривода	d	0,06	м
7.	Ускорение свободного падения	g	9,81	кг/м сек ²

Заметим, что при сравнении с линеаризованной моделью в разделе 3.6 некоторые значения параметров из таблицы 3.1 придётся изменять, так как степень влияния нелинейных членов уравнения связи (3.1.1) зависит от соотношения между L , d и l .

Для построения полной математической модели Ball and Beam в случае управления посредством дополнительного напряжения в полную систему уравнений динамики необходимо добавить уравнение управляемого электропривода с исполнительным двигателем постоянного тока. Его математическая модель

может быть описана [10] линейным приближением второго закона Кирхгофа:

$$L_a \frac{dI}{dt} + R_a I + K_a \dot{\theta} = k_2 e_\nu, \quad (3.2.2)$$

где I – ток в цепи якоря, e_ν – напряжение на выходе усилителя, подающего питание на якорную обмотку двигателя, K_a – постоянная двигателя, k_2 – коэффициент преобразователя питания, L_a – индуктивность обмотки якоря, R_a – его сопротивление. Параметры двигателя также возьмём из [68]:

Таблица 3.2 Параметры электропривода				
№	Параметр	Обозначение	Величина	Единицы измерения
1.	Индуктивность	L_a	0,0016	Гн
2.	Сопротивление	R_a	2,6	Ом
3.	Постоянная двигателя	K_a	0,00767	·
4.	коэффициент преобразователя питания	k_2	1	
5	электромеханическая постоянная двигателя	k_3	0,00676	·

По координатам α и s на систему действуют только потенциальные силы. Непотенциальная сила приложена только по координате θ [30]. Её будем записывать в виде

$$Q_\theta = \nu - b_0 \dot{\theta}, \quad (3.2.3)$$

если за управление выбран механический момент ν или

$$Q_\theta = k_3 I - b_0 \dot{\theta}, \quad (3.2.4)$$

если управление производится за счёт дополнительного напряжения. Здесь k_3 – электромеханическая постоянная двигателя, b_0 – коэффициент сопротивления вращению.

Теперь переходим к выведению уравнений динамики.

3.3. Управление посредством механического момента

Рассмотрим случай, когда в качестве управляющего воздействия выбран механический момент ν , приложенный вокруг оси приводного колеса. Угол поворота этого колеса примем за избыточную координату. Упоминание о возможности управления системой Ball and Beam в этом случае было сделано в работе [32].

В этом случае в качестве независимых позиционных координат выберем r и α , а избыточных координат будет только одна – угол θ .

Продифференцировав уравнение связи (3.1.1) по времени, получим уравнение кинематической связи в виде:

$$L [d \sin(\alpha - \theta) + (L - d) \sin \alpha + l \cos \alpha] \dot{\alpha} - d [L \sin(\alpha - \theta) + (L - d) \sin \theta + l \cos \theta] \dot{\theta} = 0.$$

После чего выразим скорость $\dot{\theta}$:

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= B(\alpha, \theta) \dot{\alpha}, \\ B(\alpha, \theta) &= \frac{L}{d} \cdot \frac{d \sin(\alpha - \theta) + (L - d) \sin \alpha + l \cos \alpha}{L \sin(\alpha - \theta) + (L - d) \sin \theta + l \cos \theta}. \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

Используем (3.3.1) для исключения зависимой скорости из выражения для кинетической энергии (3.2.1). Тогда функция Лагранжа $L^* = T^* - \Pi$ примет вид:

$$\begin{aligned} L^* &= \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{m}{2} (r^2 + R^2) \left(\dot{\alpha} - \frac{R \dot{r}}{r^2 + R^2} \right)^2 + \\ &+ \frac{J}{2} \left(\dot{\alpha} - \frac{\dot{r}}{R} \right)^2 + \frac{J_0}{2} (B(\alpha, \theta))^2 \dot{\alpha}^2 - mg(r \sin \alpha + R \cos \alpha). \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

Также исключим $\dot{\theta}$ из выражения (3.2.3) непотенциальной силы Q_θ :

$$Q_\theta^* = \nu - b_0 B(\alpha, \theta) \dot{\alpha}. \quad (3.3.3)$$

Уравнения Шульгина в общем виде с учетом действующих на систему сил здесь запишутся в виде

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L^*}{\partial r} = 0, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{\alpha}} - \frac{\partial L^*}{\partial \alpha} = B(\alpha, \theta) \cdot \left(\frac{\partial L^*}{\partial \theta} + Q_\theta^* \right). \end{cases} \quad (3.3.4)$$

Для получения полной системы уравнений динамики к ним надо добавить ещё уравнение связи (3.1.1). Подставляя (3.3.2) и (3.3.3) в (3.3.4), получим полную

нелинейную систему уравнений динамики:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(m + \frac{J}{R^2} + \frac{mR^2}{r^2+R^2} \right) \ddot{r} - \\ -R \left(m + \frac{J}{R^2} \right) \ddot{\alpha} - mR^2 \frac{r}{(r^2+R^2)^2} \dot{r}^2 - mr\dot{\alpha}^2 + mg \sin \alpha = 0, \\ -R \left(m + \frac{J}{R^2} \right) \ddot{r} + \left(m(r^2 + R^2) + J + J_0 B^2(\alpha, \theta) \right) \ddot{\alpha} + \\ + 2mrr\dot{\alpha} + mg(r \cos \alpha - R \sin \alpha) = B(\alpha, \theta)\nu - b_0 B^2(\alpha, \theta)\dot{\alpha}, \\ \dot{\theta} = B(\alpha, \theta)\dot{\alpha}. \end{array} \right. \quad (3.3.5)$$

Из уравнений (3.3.5) легко определить значение программного управления в положениях равновесия. Действительно, положив $\alpha = \alpha_0 = 0$, $\theta = \theta_i = \text{const}$ и подставив в (3.3.5), получим:

$$mgr_0 = B(0, \theta_i)\nu_0 \Rightarrow \nu_0 = \frac{mgr_0}{B(0)}, \quad (3.3.6)$$

где

$$B(0) = B(0, \theta_i) = \begin{cases} \frac{L}{d}, & \theta = \theta_0 = 0, \\ \frac{L}{d} \frac{d^2 - l^2}{d^2 + l^2}, & \theta = \theta_1 \neq 0. \end{cases}$$

Значения углов α_0 и θ_i были получены выше из уравнения связей, а r_0 задаётся заранее. Таким образом, если задано положение r_0 шара, то система допускает два положения равновесия. Одно из них ($\alpha_0 = 0, \theta_0 = 0$) назовём нулевым, второе ($\alpha_1 = 0, \theta_1 \neq 0$), соответственно, будем называть ненулевым.

Введём возмущения координат в окрестности положения равновесия:

$$\begin{aligned} r &= r_0 + x_1, \quad \alpha = x_2, \quad \dot{r} = x_3, \\ \dot{\alpha} &= x_4, \quad \theta = \theta_i + x_5, \quad \nu = \nu_0 + u. \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

Для того, чтобы сделать обоснованное заключение об устойчивости положений равновесия и найти коэффициенты стабилизирующего воздействия, выделим в уравнениях возмущённого движения первое приближение.

В соответствии с методом, применённым в главе 1, для приведения подобных систем к специальному виду теории критических случаев необходимо применить линейную замену. В данном случае она будет иметь вид:

$$z = x_5 - B(0)x_2. \quad (3.3.8)$$

В итоге система с выделенным первым приближением в окрестности положения равновесия после замены (3.3.8) в векторно-матричном виде может быть

записана следующим образом

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ h_{31} & h_{32} & 0 & h_{34} & h_{35} \\ h_{41} & h_{42} & 0 & h_{44} & h_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ s_1 \\ s_2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot u + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \tilde{X}_3^{(2)} \\ \tilde{X}_4^{(2)} \\ B^{(1)}x_4 \end{pmatrix}, \quad (3.3.9)$$

где элементы матриц выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} h_{31} &= -\frac{mgR}{\det A} \left(m + \frac{J}{R^2} \right), & h_{34} &= -\frac{b_0R}{\det A} \left(m + \frac{J}{R^2} \right) B^2(0), \\ h_{35} &= \frac{R}{\det A} \left(m + \frac{J}{R^2} \right) \frac{\partial B}{\partial \theta} \Big|_0 \nu_0, & h_{41} &= -\frac{mg}{\det A} \left(m + \frac{J}{R^2} + \frac{mR^2}{r_0^2 + R^2} \right), \\ h_{44} &= -\frac{b_0}{\det A} \left(m + \frac{J}{R^2} + \frac{mR^2}{r_0^2 + R^2} \right) B(0)^2, & h_{45} &= \frac{1}{\det A} \left(m + \frac{J}{R^2} + \frac{mR^2}{r_0^2 + R^2} \right) \frac{\partial B}{\partial \theta} \Big|_0 \nu_0, \\ s_1 &= \frac{R}{\det A} \left(m + \frac{J}{R^2} \right) B(0), & s_2 &= \frac{1}{\det A} \left(m + \frac{J}{R^2} + \frac{mR^2}{r_0^2 + R^2} \right) B(0), \\ h_{32} &= \frac{1}{\det A} \left(-mg(mr_0^2 + J_0 B^2(0)) + R \left(m + \frac{J}{R^2} \right) \left(\frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{\partial B}{\partial \theta} B \right)_0 \nu_0 \right), \\ h_{42} &= \frac{1}{\det A} \left(\frac{m^2 g R^3}{r_0^2 + R^2} + \left(m + \frac{J}{R^2} + \frac{mR^2}{r_0^2 + R^2} \right) \left(\frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{\partial B}{\partial \theta} B \right)_0 \nu_0 \right), \\ A &= \begin{pmatrix} m + \frac{J}{R^2} + \frac{mR^2}{r_0^2 + R^2} & -R \left(m + \frac{J}{R^2} \right) \\ -R \left(m + \frac{J}{R^2} \right) & m(r_0^2 + R^2) + J + J_0 B^2(0) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Символами $\tilde{X}_3^{(2)}$ и $\tilde{X}_4^{(2)}$ обозначены нелинейные члены соответствующих уравнений, $B^{(1)} = B^{(1)}(x_2, z) = [B(x_2, \theta_i + z + B(0)x_2) - B(0)]$ – коэффициенты нелинейных членов продифференцированного уравнения связи.

Обратим внимание на матрицу линеаризованной системы. Её последняя строка целиком состоит из нулей. Характеристическое уравнение такой матрицы гарантированно имеет нулевой корень. Т.е., согласно утверждению 1.3.1, устойчивость системы GBV 1005 Ball and Beam, как и любой системы с геометрическими связями, вне зависимости от положения равновесия, возможна только в критическом случае.

Для того, чтобы найти управляющее воздействие, обеспечивающее асимптотическую устойчивость положений равновесия, в соответствии с применяемым алгоритмом выделим линейную управляемую подсистему, в которую не входит критическая переменная z :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ h_{31} & h_{32} & 0 & h_{34} \\ h_{41} & h_{42} & 0 & h_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} \cdot u. \quad (3.3.10)$$

Численные значения матриц коэффициентов системы (3.3.10) для параметров, приведённых в таблицах 3.1 и 3.2 следующие:

$$N_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1,6187 & -6,9561 & 0 & -38,8074 \\ -64,1936 & 0,0118 & 0 & -1539,0019 \end{pmatrix}, \quad U_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 18,2623 \\ 724,2362 \end{pmatrix}$$

для нулевого положения равновесия и

$$N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2,6034 & -6,9559 & 0 & -22,469 \\ -103,2425 & 0,019 & 0 & -891,0632 \end{pmatrix}, \quad U_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -17,6228 \\ -698,8731 \end{pmatrix}$$

для ненулевого положения.

Без приложения управления возмущённое движение неустойчиво, так как среди корней характеристического уравнения матрицы системы имеется один с отрицательной действительной частью:

$$\lambda_1 = -1539, \quad \lambda_{2,3} = -0,3313 \pm 0,5734i, \quad \lambda_4 = 0,6616$$

в случае нулевого положения равновесия и

$$\lambda_1 = -891,06, \quad \lambda_{2,3} = -0,4661 \pm 0,8062i, \quad \lambda_4 = 0,9293$$

для ненулевого положения равновесия.

Критерий управляемости для пары (N_i, U_i) имеет вид

$$\text{rank} (U_i \quad N_i U_i \quad N_i^2 U_i \quad N_i^3 U_i) = 4, \quad i = 0, 1. \quad (3.3.11)$$

Матрицы управляемости:

$$\begin{pmatrix} 0 & 18,2623 & -28105,7492 & 43249734,6481 \\ 0 & 724,2361 & -1114600,8997 & 1715371761,6573 \\ 18,2623 & -28105,74923 & 43249734,6481 & 66561379529,4002 \\ 724,2362 & -1114600,8997 & 1715371761,6573 & 2639958644829,29 \end{pmatrix}$$

для нулевого положения равновесия и

$$\begin{pmatrix} 0 & -17,6228 & 15702,99752 & -13987455,3054 \\ 0 & -698,8731 & 622740,0319 & -554898889,4843 \\ -17,6228 & 15702,9975 & -13987455,3054 & 12463665429,1266 \\ -698,8731 & 622740,0311 & -554898889,4843 & 494448344060,28 \end{pmatrix}$$

для ненулевого положения равновесия имеют полный ранг, т.е. достаточное условие стабилизируемости выполнено. Чтобы найти управляющее воздействие, являющееся линейной функцией фазовых координат системы, решим соответствующие линейно-квадратичные задачи по методу Н.Н. Красовского [46]. Для однозначного решения требуется ввести критерий качества. Возьмем его в виде

$$I = \int_{t_0}^{+\infty} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + u^2) dt \rightarrow \min \quad (3.3.12)$$

Обозначим матрицы $R = E_4$, $Q = 1$. Тогда соответствующее матричное уравнение Риккати будет иметь вид:

$$N'_i S_i + S_i N_i - S_i U_i Q^{-1} U'_i S_i + R = N'_i S_i + S_i N_i - S_i U_i U'_i S_i + E_4. \quad (3.3.13)$$

Так как пары (N_i, U_i) управляемы, уравнения (3.3.13) имеют решение S_i , $i = 0, 1$. Тогда, в соответствии с методом Н.Н. Красовского [46], стабилизирующее воздействие будет иметь вид

$$u_i = -Q^{-1} U' S = -U' S_i.$$

Решая уравнения (3.3.13) с помощью системы MATLAB, находим стабилизирующее управление:

$$u_0 = 1,0926x_1 - 7,7938x_2 + 1,8026x_3 - 0,2737x_4 \quad (3.3.14)$$

для нулевого положения равновесия и

$$u_1 = -1,1586x_1 + 6,3023x_2 - 1,6827x_3 + 0,3935x_4 \quad (3.3.15)$$

для ненулевого положения равновесия. Подставляя эти управления в (3.3.10), получим подсистемы, корни характеристических уравнений которых имеют только отрицательные действительные части:

$$\tilde{\lambda}_1 = -1700,9924, \quad \tilde{\lambda}_{2,3} = -1,1693 \pm 1,3082i, \quad \tilde{\lambda}_4 = -0,9658$$

для нулевого положения равновесия и

$$\tilde{\lambda}_1 = -1132,5732, \quad \tilde{\lambda}_{2,3} = -1,4361 \pm 1,51667i, \quad \tilde{\lambda}_4 = -0,9946$$

для ненулевого положения.

Чтобы проиллюстрировать в асимптотическую устойчивость по всем переменным, управления (3.3.14) и (3.3.15) подставляем в полную нелинейную систему уравнений возмущённого движения и строим графики переходных процессов по всем переменным, включая и критическую переменную. Графики некоторых переходных процессов представлены на рис. Б.1 – Б.6. Таким образом, выделив линейную управляемую подсистему меньшей размерности и найдя для неё стабилизирующее управление, мы нашли стабилизирующее управление для полной нелинейной системы.

3.4. Управление посредством дополнительным напряжением на якоре двигателя

В подавляющем большинстве работ, посвящённых исследованию системы GBV 1005 Ball and Beam, управление системой осуществляется за счёт дополнительного напряжения на якоре коллекторного двигателя постоянного тока с независимым возбуждением. Уравнения динамики голономных систем с избыточными координатами при таком способе управления были получены в главе 1. Воспользуемся ими для решения задачи стабилизации положений равновесия системы GBV 1005 Ball and Beam. В целом ход решения задачи для такого способа управления аналогичен рассмотренному выше подробно рассмотренному случаю управления механическим моментом, поэтому здесь некоторые выкладки приведём в сокращении.

Замечание 3.4.1. *При выбранном способе реализации управляющих воздействий математическая модель объекта представляет собой систему непрямого управления [48], что значительно расширяет возможности системы управления.*

Как уже отмечалось выше, уравнение связи (3.1.1) позволяет в качестве зависимой координаты при построении математической модели выбрать один из углов: α или θ . В этом разделе проведём математическое моделирование в

обоих случаях и на численном примере продемонстрируем, что выбор тех или иных координат в качестве избыточных, не влияет на процесс стабилизации.

Случай зависимой координаты θ

Пусть зависимой координатой выбран угол θ , как и в случае, рассмотренном выше. Зависимая скорость $\dot{\theta}$ выражается через независимую $\dot{\alpha}$ согласно (3.3.1). Вид функции Лагранжа после исключения зависимой скорости с помощью (3.3.1) запишется в виде (3.3.2).

Чтобы воспользоваться уравнениями, полученными в главе 1, разобьём вектор фазовых координат q на подвекторы аналогично тому, как это было сделано в главе 1 при выводе этих уравнений. А именно, пусть $q' = (r, \alpha, I, \theta)$ – фазовый вектор, содержащий подвектор $r' = (r, \alpha)$ из двух независимых позиционных координат, один параметр I , соответствующий току в цепи якоря, и одну избыточную координату θ .

Непотенциальную силу, действующую по избыточной координате, теперь запишем в виде (3.2.4). После исключения $\dot{\theta}$ её выражение примет вид

$$Q_{\theta}^* = k_3 I - b_0 B(\alpha, \theta) \dot{\alpha}. \quad (3.4.1)$$

Уравнения Шульгина в общем виде с учетом действующих на систему сил в этом случае запишутся в виде

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L^*}{\partial r} = 0, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{\alpha}} - \frac{\partial L^*}{\partial \alpha} = B(\alpha, \theta) \cdot \left(\frac{\partial L^*}{\partial \theta} + Q_{\theta}^* \right). \end{cases} \quad (3.4.2)$$

Для получения полной математической модели, к уравнениям (3.4.2) необходимо добавить еще продифференцированное уравнение связи (3.3.1) и уравнение двигателя (3.2.2). С учётом (3.3.1) оно будет иметь вид

$$L_a \frac{dI}{dt} + R_a I + K_a B(\alpha, \theta) \dot{\alpha} = k_2 e_{\nu}. \quad (3.4.3)$$

Полная нелинейная система уравнений динамики записывается в скалярном виде следующим образом

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(m + \frac{J}{R^2} + \frac{mR^2}{r^2+R^2} \right) \cdot \ddot{r} - R \left(m + \frac{J}{R^2} \right) \cdot \ddot{\alpha} - mr \cdot \dot{\alpha}^2 - \\ \quad - mR^2 \frac{r}{(r^2+R^2)^2} \dot{r}^2 = -mg \sin \alpha , \\ \left(m (r^2 + R^2) + J + J_0(B(\alpha, \theta))^2 \right) \cdot \ddot{\alpha} - R \left(m + \frac{J}{R^2} \right) \cdot \ddot{r} + \\ \quad + J_0 B(\alpha, \theta) \left(\frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{\partial B}{\partial \theta} B(\alpha, \theta) \right) \cdot \dot{\alpha}^2 + 2mr \cdot \dot{\alpha} \dot{r} + \\ + mg (r \cos \alpha - R \sin \alpha) = k_3 B(\alpha, \theta) \cdot I - b_0 (B(\alpha, \theta))^2 \cdot \dot{\alpha}. \\ L_a \cdot \frac{dI}{dt} + R_a \cdot I + K_a B(\alpha, \theta) \cdot \dot{\alpha} = k_2 \cdot e_\nu, \\ \dot{\theta} = B(\alpha, \theta) \cdot \dot{\alpha}. \end{array} \right. \quad (3.4.4)$$

Подставив в (3.4.4) $\alpha = \alpha_0 = 0$, $r = r_0$ и одно из значений $\theta = \theta_i$, определяемых выражением (3.1.2), получим значения параметров системы и программного управления в положениях равновесия:

$$r = r_0, \quad \alpha_0 = 0, \quad \theta = \theta_i, \quad I_0 = \frac{mgr_0}{k_3 B(0, \theta_i)}, \quad e_{\nu_0} = \frac{R_a I_0}{k_2}. \quad (3.4.5)$$

Введем возмущения фазовых координат системы следующим образом:

$$\begin{array}{l} r = r_0 + x_1, \quad \alpha = x_2^I, \quad \dot{r} = x_3, \quad \dot{\alpha} = x_4^I, \\ I = I_0 + x_5, \quad \theta = \theta_i + x_6^I, \quad e_\nu = e_{\nu_0} + u_i^I. \end{array} \quad (3.4.6)$$

Замечание 3.4.2. При разном выборе избыточной координаты будут различными не только уравнения движения, но и некоторые компоненты фазовых векторов. Так, в случае зависимой координаты θ вторая и четвертая компоненты фазового вектора соответствуют возмущениям угла α и скорости $\dot{\alpha}$, а шестая – приращению угла θ . Если же зависимой координатой выбран угол α , то, напротив, вторая и четвертая компоненты фазового вектора будут соответствовать приращению угла θ и его скорости, а шестая – приращению угла α . Для того, чтобы подчеркнуть это различие, будем использовать верхний индекс I при выборе θ избыточной и II при выборе α избыточной.

Символом u_i^I обозначено управление – дополнительное напряжение на якоре двигателя. Найдём его как линейную функцию компонент фазового вектора. Коэффициенты этой функции будут различными для разных положений равновесия – нулевого ($i = 0$) или ненулевого ($i = 1$). Также очевидно, что его аналитическое выражение через координаты фазового вектора будет изменяться в зависимости от выбора избыточной координаты (верхний индекс I или II).

Подставив (3.4.6) в (3.4.4) и учитывая (3.4.5), получим уравнения возмущенного движения.

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(m + \frac{J}{R^2} + \frac{mR^2}{(s_0+x_1)^2+R^2} \right) \cdot \dot{x}_3 - R \left(m + \frac{J}{R^2} \right) \cdot \dot{x}_4^I - m (r_0 + x_1) \cdot x_4^{I2} - \\ \quad - mR^2 \frac{(r_0+x_1)}{((r_0+x_1)^2+R^2)^2} x_3^2 = -mg \sin x_2^I, \\ \left(m \left((r_0 + x_1)^2 + R^2 \right) + J + J_0 B^2 \right) \cdot \dot{x}_4^I - R \left(m + \frac{J}{R^2} \right) \cdot \dot{x}_3 + \\ \quad + J_0 B \left(\frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{\partial B}{\partial \theta} B \right) \cdot x_4^{I2} + 2m (r_0 + x_1) \cdot x_3 x_4^I + \\ \quad + mg \left((r_0 + x_1) \cos x_2^I - R \sin x_2^I \right) = k_3 B \cdot (I_0 + x_5) - b_0 B^2 \cdot x_4^I. \\ L_a \cdot \dot{x}_5 = -R_a \cdot x_5 - k_1 B \cdot x_4^I + k_2 \cdot u_i^I, \\ \dot{x}_6^I = B \cdot x_4^I. \end{array} \right. \quad (3.4.7)$$

$$B = B(x_2^I, \theta_i + x_6^I), \quad \frac{\partial B}{\partial \alpha} = \frac{\partial B}{\partial \alpha}(x_2^I, \theta_i + x_6^I), \quad \frac{\partial B}{\partial \alpha} = \frac{\partial B}{\partial \alpha}(x_2^I, \theta_i + x_6^I) .$$

После выделения первого приближения в окрестности положения равновесия, будем иметь:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(m + \frac{J}{R^2} + \frac{mR^2}{s_0^2+R^2} \right) \cdot \dot{x}_3 - R \left(m + \frac{J}{R^2} \right) \cdot \dot{x}_4^I = -mgx_2^I + X_r^{(2)}(x^I), \\ \left(m (s_0^2 + R^2) + J + J_0 B^2(0) \right) \cdot \dot{x}_4^I - R \left(m + \frac{J}{R^2} \right) \cdot \dot{x}_3 = \\ \quad = -mgx_1 + \left(mgR + k_3 I_0 \frac{\partial B}{\partial \alpha} \Big|_0 \right) \cdot x_2^I - b_0 B^2(0) \cdot x_4^I + \\ \quad + k_3 B(0) \cdot x_5 + k_3 I_0 \frac{\partial B}{\partial \theta} \Big|_0 \cdot x_6^I + X_\alpha^{(2)}(x^I), \\ L_a \cdot \dot{x}_5 = -R_a \cdot x_5 - k_1 B(0) \cdot x_4^I + k_2 \cdot u_i^I + X_I^{(2)}(x^I), \\ \dot{x}_6^I = B(0) \cdot x_4^I + B^{(1)}(x_2^I, x_6^I) x_4^I. \end{array} \right. \quad (3.4.8)$$

$$B^{(1)}(x_2^I, x_6^I) = B(x_2^I, \theta_i + x_6^I) - B(0).$$

Здесь символами $X_r^{(2)}(x^I)$ и т.п. обозначены члены второго порядка и выше, зависящие от компонент вектора приращений фазовых координат и обращающиеся в нуль, когда все возмущения равны нулю. Также для краткости используются следующие обозначения:

$$B(0) = B(0, \theta_i), \quad \frac{\partial B}{\partial \alpha} \Big|_0 = \frac{\partial B}{\partial \alpha}(0, \theta_i), \quad \frac{\partial B}{\partial \theta} \Big|_0 = \frac{\partial B}{\partial \theta}(0, \theta_i).$$

Из уравнений (3.4.8) с выделенным первым приближением видно, что некоторые коэффициенты зависят от квадратичных членов разложения уравнения геометрической связи (или линейных членов разложения кинематической связи), которые могут оказывать влияние на устойчивость положения равновесия. Исследование этого влияния в случае системы GBV 1005 Ball and Beam

будет проведено ниже в заключительном разделе этой главы. В общем случае условием допустимости перехода к линеаризованным связям является обращение в нуль в рассматриваемом положении равновесия указанных членов [22]. Приведем здесь их значения в положениях равновесия в явном виде:

Таблица 3.3. Коэффициенты линейных и квадратичных членов уравнения связи в положениях равновесия. Зависимая координата θ	
Нулевое положение равновесия	$B(0,0) = \frac{L}{d},$ $\left. \frac{\partial B}{\partial \alpha} \right _0 = \left. \frac{\partial B}{\partial \theta} \right _0 = 0.$
Ненулевое положение равновесия	$B(0,\theta_1) = -\frac{L}{d} \frac{l^2 - d^2}{l^2 + d^2},$ $\left. \frac{\partial B}{\partial \alpha} \right _0 = -2Ll \cdot \frac{2dl - d^2 - l^2}{(l^2 + d^2)^2}$ $\left. \frac{\partial B}{\partial \theta} \right _0 = 0.$

Из таблицы 3.3 видно, что линеаризация уравнений геометрических связей допустима при исследовании нулевого положения равновесия, так как частные производные $\frac{\partial B}{\partial \alpha}$ и $\frac{\partial B}{\partial \theta}$ в этих точках обращаются в нуль. Однако при исследовании устойчивости системы в ненулевом положении необходим учет квадратичных членов.

Для приведения системы (3.4.8) к специальному виду теории критических случаев и выделения критической переменной, применим линейную замену:

$$x_6^I = B(0) x_2^I + z^I. \quad (3.4.9)$$

Тогда продифференцированное уравнение связи, входящее в систему (3.4.8), в первом приближении примет вид $\dot{z}^I = 0$, а полная нелинейная система запишется в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_3, \quad \dot{x}_2 = x_4^I, \\ \left(m + \frac{J}{R^2} + \frac{mR^2}{r_0^2 + R^2} \right) \cdot \dot{x}_3 - R \left(m + \frac{J}{R^2} \right) \cdot \dot{x}_4^I = mg \cdot \dot{x}_2^I + X_r^{(2)}(x_1, \dots, x_5, z^I), \\ -R \left(m + \frac{J}{R^2} \right) \cdot \dot{x}_3 + \left(m(r_0^2 + R^2) + J + J_0 B^2(0) \right) \cdot \dot{x}_4^I = \\ = mg \cdot x_1 + mg \left(R + k_3 I_0 \left(\frac{\partial B}{\partial \alpha} + B \frac{\partial B}{\partial \theta} \right)_0 \right) \cdot x_2^I - \\ - b_0 B^2(0) \cdot x_4^I + k_3 B(0) \cdot x_5 - k_3 I_0 \left(\frac{\partial B}{\partial \theta} \right)_0 \cdot z^I + X_\alpha^{(2)}(x_1, \dots, x_5, z^I), \\ \dot{x}_5 = -\frac{R_a}{L_a} \cdot x_5 - \frac{k_1 B(0)}{L_a} \cdot x_4^I + \frac{k_2}{L_a} \cdot u_i^I + X_I^{(2)}(x_1, \dots, x_5, z^I), \\ \dot{z}^I = B^{(1)}(x_2^I, z^I) x_4^I. \end{array} \right. \quad (3.4.10)$$

Символами $X_r^{(2)}(x_1, \dots, x_5, z^I)$, $X_\alpha^{(2)}(x_1, \dots, x_5, z^I)$, $X_I^{(2)}(x_1, \dots, x_5, z^I)$ здесь обозначены нелинейные члены, разложение которых начинается со второго порядка относительно переменных x_1, \dots, x_5, z^I .

Приведём систему (3.4.10) к нормальному виду:

$$\begin{cases} \dot{x}^I = H_i^I x^I + P_i^I z^I + S u_i^I + X^{I(2)}(x^I, z^I), \\ \dot{z}^I = B^{(1)}(x_2^I, z^I) x_4^I, \quad (x^I)' = (x_1, x_2^I, x_3, x_4^I, x_5), \end{cases} \quad (3.4.11)$$

где матрицы H_i^I , P_i^I и S выражаются следующим образом:

$$H_i^I = \frac{1}{\det D^I} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & h_{31} & 0 & 0 & 0 \\ h_{41} & h_{42} & h_{43} & 0 & h_{54} \\ 0 & 0 & 0 & h_{54} & h_{55} \end{pmatrix}, \quad S_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ s \end{pmatrix}, \quad P_i^I = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ p \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$D^I = \begin{pmatrix} m + \frac{J}{R^2} + \frac{mR^2}{r_0^2 + R^2} & -R \left(m + \frac{J}{R^2} \right) \\ -R \left(m + \frac{J}{R^2} \right) & m \left(r_0^2 + R^2 \right) + J + J_0 B^2(0) \end{pmatrix},$$

$$h_{32} = mgR \left(m + \frac{J}{R^2} \right) \left(R + k_3 I_0 \left(\frac{\partial B}{\partial \alpha} \Big|_0 + B(0) \frac{\partial B}{\partial \theta} \Big|_0 \right) \right) - mg \left(m \left(r_0^2 + R^2 \right) + J + J_0 B^2(0) \right),$$

$$h_{34} = -R \left(m + \frac{J}{R^2} \right) b_0 B^2(0), \quad h_{25} = R \left(m + \frac{J}{R^2} \right) k_3 B(0),$$

$$h_{41} = -mg \left(m + \frac{J}{R^2} + \frac{mR^2}{s_0^2 + R^2} \right),$$

$$h_{42} = k_3 I_0 \left(\frac{\partial B^I}{\partial \alpha} \Big|_0 + B^I(0) \frac{\partial B^I}{\partial \theta} \Big|_0 \right) \left(m + \frac{J}{R^2} + \frac{mR^2}{s_0^2 + R^2} \right) + \frac{m^2 g R^3}{s_0^2 + R^2},$$

$$h_{44} = -b_0 \left(m + \frac{J}{R^2} + \frac{mR^2}{s_0^2 + R^2} \right) B^2(0),$$

$$h_{45} = k_3 B(0) \left(m + \frac{J}{R^2} + \frac{mR^2}{s_0^2 + R^2} \right), \quad p = k_3 I_0 \frac{\partial B^I}{\partial \theta} \Big|_0 \left(m + \frac{J}{R^2} + \frac{mR^2}{s_0^2 + R^2} \right),$$

$$h_{45} = -\frac{k_1 B(0)}{L_a}, \quad h_{55} = -\frac{R_a}{L_a}, \quad s = \frac{k_2}{L_a}.$$

Также как и в случае, рассмотренном выше, характеристическое уравнение системы (3.4.11) после линеаризации в окрестности (3.4.5) будет иметь нулевой корень. Он соответствует критической переменной z^I .

Выделим из (3.4.11) линейную управляемую подсистему, не содержащую переменную z^I :

$$\dot{x}^I = H_i^I x^I + S u_i^I. \quad (3.4.12)$$

Численные значения коэффициентов матриц для параметров, приведённых в таблицах 3.1 и 3.2, следующие:

$$H_0^I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1,8905 & -6,928 & 0 & -45,3246 & 0,1636 \\ -75,2747 & 0 & 0,0214 & -1804,6659 & 6,5138 \\ 0 & 0 & 0 & -4427,0833 & -1625 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4,225 \end{pmatrix},$$

для нулевого положения равновесия и

$$H_1^I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3,3973 & -6,906 & 0 & -29,3213 & -0,1764 \\ -135,2681 & 0 & 0,9 & -1167,4697 & -7,0231 \\ 0 & 0 & 0 & 2656,25 & -1625 \end{pmatrix}$$

для ненулевого положения.

Без приложения дополнительного управления положения равновесия системы (3.4.11) неустойчивы, так как характеристическое уравнение системы (3.4.12) имеет корень с положительной действительной частью:

$$\lambda_{1,2} = -1714,8 \pm 0,14i, \quad \lambda_3 = 0,69, \quad \lambda_{4,5} = -0,33 + 0,57i$$

для нулевого положения и

$$\lambda_{1,2} = -0,47 \pm 0,8i, \quad \lambda_3 = -1579,75, \quad \lambda_4 = -1212,69, \quad \lambda_5 = 0,91.$$

для ненулевого положения равновесия.

Проверим условие управляемости для пары (H_i^I, S) . В данном случае оно имеет вид

$$\text{rank} \left(S \ H_i^I \cdot S \ H_i^{I^2} \cdot S \ \dots \ H_i^{I^4} \cdot S \right) = 5, \quad i = 0,1. \quad (3.4.13)$$

Матрицы управляемости имеют полный ранг. Тогда по теореме 1.4.2 положения равновесия (3.4.5) могут быть стабилизированы до асимптотической устойчивости по всем переменным. Выберем критерий качества:

$$I = \int_{t_0}^{+\infty} \left(x_1^2 + (x_2^I)^2 + x_3^2 + (x_4^I)^2 + x_5^2 + (u_i^I)^2 \right) dt \rightarrow \min. \quad (3.4.14)$$

В отличие от (3.3.12), здесь $R = E_5$, $Q = 1$. Для нахождения коэффициентов управляющего воздействия в соответствии с алгоритмом 1.6.1 необходимо найти решение алгебраического матричного уравнения Риккати

$$\begin{aligned} (H_i^I)' X_i^I + X_i^I H_i^I - X_i^I S Q^{-1} S' X_i^I + R = \\ = (H_i^I)' X_i^I + X_i^I H_i^I - X_i^I S S' X_i^I + E_5, \end{aligned} \quad (3.4.15)$$

где X_i^I – неизвестная матрица. Тогда стабилизирующее управление имеет вид:

$$u_i^I = -Q^{-1} S' X_i^I = -S' X_i^I. \quad (3.4.16)$$

Решая алгебраическое матричное уравнение Риккати (3.4.15) численно с использованием системы MATLAB, находим стабилизирующее управление:

$$u_0^I = 8893x_1 + 142014,2x_2^I - 13494,8x_3 + 416,7x_4^I + 0,3x_5$$

для нулевого положения равновесия и

$$u_1^I = 14824x_1 - 118649x_2^I + 15717,3x_3 - 495x_4^I + 0,4x_5$$

для ненулевого положения равновесия. Подставляя эти управления в (3.4.12), получим линейные подсистемы, корни характеристических уравнений которых имеют только отрицательные действительные части:

$$\tilde{\lambda}_{1,2} = -1714,8 \pm 144,1i, \quad \tilde{\lambda}_{3,4} = -0,3 \pm 0,6i, \quad \tilde{\lambda}_5 = -0,7$$

для нулевого положения равновесия и

$$\tilde{\lambda}_1 = -1579,8, \quad \tilde{\lambda}_{2,3} = -0,5 \pm 0,8i, \quad \tilde{\lambda}_4 = -1212,7, \quad \tilde{\lambda}_5 = -0,9$$

для ненулевого положения.

Для проведения численного эксперимента стабилизирующее управление, найденное по управляемой подсистеме (3.4.12), подставляется в полную нелинейную систему (3.4.8). Графики переходных процессов по координате x_1 (положение шара в жёлобе) приведены на рис. Б.7 – Б.8.

Случай зависимой координаты α

Алгоритм математического моделирования и решения задачи стабилизации здесь полностью аналогичен рассмотренному выше случаю зависимой координаты θ . Поэтому опишем его сокращенно, указывая только основные формулы.

Скорость зависимой координаты $\dot{\alpha}$ выражается из продифференцированного уравнения связи (3.1.1) следующим образом:

$$\dot{\alpha} = \frac{1}{B(\alpha, \theta)} \dot{\theta} = B^{-1}(\alpha, \theta) \dot{\theta}. \quad (3.4.17)$$

Функция Лагранжа будет иметь вид

$$L^* = \frac{1}{2} \left(m + \frac{J}{R^2} + \frac{mR^2}{r^2 + R^2} \right) \dot{r}^2 - \frac{R}{B(\alpha, \theta)} \left(m + \frac{J}{R^2} \right) \dot{r} \dot{\theta} + \frac{1}{2} \left(m \frac{r^2 + R^2}{B^2(\alpha, \theta)} + \frac{J}{B^2(\alpha, \theta)} + J_0 \right) \dot{\theta}^2 - mg(r \sin \alpha + R \cos \alpha) \quad (3.4.18)$$

Так как $\dot{\alpha}$ не входит в выражение (3.2.4) для непотенциальной силы, её вид в данном случае не изменится, т.е. $Q_\theta^* = Q_\theta$.

Уравнения Шульгина в общем виде с учетом действующих на систему сил здесь запишутся в виде

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L^*}{\partial r} = 0, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L^*}{\partial \theta} = Q_\theta^* + \frac{1}{B(\alpha, \theta)} \cdot \frac{\partial L^*}{\partial \alpha}. \end{cases} \quad (3.4.19)$$

Полная математическая модель будет состоять из уравнений (3.4.19), (3.4.17) и уравнения двигателя (3.2.2), которое в данном случае не изменится.

Значения всех параметров в положениях равновесия, как легко убедиться, совпадают со значениями, полученными по формулам (3.4.5).

Введем обозначения для возмущений фазовых переменных системы аналогично тому, как это было сделано в (3.4.6):

$$\begin{aligned} r &= r_0 + x_1, \quad \theta = \theta_i + x_2^{II}, \quad \dot{r} = x_3, \quad \dot{\theta} = x_4^{II}, \\ I &= I_0 + x_5, \quad \alpha = x_6^{II}, \quad e_\nu = e_{\nu_0} + u_i^{II}. \end{aligned} \quad (3.4.20)$$

Замечание 3.4.3. *Здесь, в соответствии с введёнными выше обозначениями, некоторые компоненты фазового вектора отмечены верхним индексом II, так как они отличаются от соответствующих компонент в случае другой зависимой координаты. А именно, поменяют свой механический смысл вторая, четвертая и шестая компоненты. Это обстоятельство придётся учитывать и далее при задании вектора начальных возмущений, если мы хотим, чтобы графики переходных процессов совпадали.*

Уравнения возмущенного движения в данном случае имеют вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(m + \frac{J}{R^2} + \frac{mR^2}{(r_0+x_1)^2+R^2} \right) \cdot \dot{x}_3 - \frac{R}{B} \left(m + \frac{J}{R^2} \right) \cdot \dot{x}_4^{II} = \\ = -\frac{1}{B^2} \left(\frac{R}{B} \left(m + \frac{J}{R^2} \right) \left(\frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{\partial B}{\partial \theta} B \right) - m(r_0+x_1) \right) \cdot (x_4^{II})^2 + \\ + mR^2 \frac{r_0+x_1}{((r_0+x_1)^2+R^2)^2} \cdot x_3^2 - mg \sin x_6^{II}, \\ \left(\frac{m((r_0+x_1)^2+R^2)+J}{B^2} + J_0 \right) \cdot \dot{x}_4^{II} - \frac{R}{B} \left(m + \frac{J}{R^2} \right) \cdot \dot{x}_3 = \\ = -2\frac{m(r_0+x_1)}{B^2} \cdot x_3 x_4^{II} + \frac{m((r_0+x_1)^2+R^2)+J}{B^4} \left(\frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{\partial B}{\partial \theta} B \right) \cdot (x_4^{II})^2 + \\ + k_3 (I_0 + x_5) - b_0 x_4^{II} - \frac{mg}{B} \left((r_0+x_1) \cos x_6^{II} - R \sin x_6^{II} \right), \\ L_a \cdot \dot{x}_5 + R_a \cdot x_5 + K_a \cdot x_4^{II} = k_2 \cdot u_i^{II}, \\ \dot{x}_6^{II} = B^{-1} \cdot x_4^{II}, \end{array} \right. \quad (3.4.21)$$

где

$$\begin{aligned} B &= B(x_6^{II}, \theta_i + x_2^{II}), \\ \frac{\partial B}{\partial \alpha} &= \frac{\partial B}{\partial \alpha}(x_6^{II}, \theta_i + x_2^{II}), \quad \frac{\partial B}{\partial \theta} = \frac{\partial B}{\partial \theta}(x_6^{II}, \theta_i + x_2^{II}). \end{aligned}$$

Применим линейную замену

$$x_6^{II} = \frac{1}{B(0)} x_2^{II} + z^{II}. \quad (3.4.22)$$

для приведения системы к специальному виду теории критических случаев.

После замены (3.4.22) система (3.4.21) с выделенным первым приближением в окрестности положений равновесия (3.4.5) примет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_3, \quad \dot{x}_2^{II} = x_4^{II}, \\ \left(m + \frac{J}{R^2} + \frac{mR^2}{r_0^2+R^2} \right) \cdot \dot{x}_3 - \frac{R}{B(0)} \left(m + \frac{J}{R^2} \right) \cdot \dot{x}_4^{II} = \\ = -\frac{mg}{B(0)} \cdot x_2^{II} - mg \cdot z^{II} + X_r^{(2)}(x^{II}, z^{II}), \\ \left(\frac{1}{B^2(0)} \left(m(r_0^2+R^2) + J \right) + J_0 \right) \cdot \dot{x}_4^{II} - \\ - \frac{R}{B(0)} \left(m + \frac{J}{R^2} \right) \cdot \dot{x}_3 = -\frac{mg}{B(0)} \cdot x_1 + k_3 \cdot x_5 - b_0 \cdot x_4^{II} + \\ + \frac{mg}{B^3(0)} \left(RB(0) + r_0 \left(\frac{\partial B}{\partial \alpha} + B(0) \frac{\partial B}{\partial \theta} \right) \right) \Big|_0 \cdot x_2^{II} + \\ + \frac{mg}{B(0)} \left(\frac{R}{B(0)} + \frac{r_0}{B^2(0)} \left(\frac{\partial B}{\partial \alpha} \right) \Big|_0 \right) \cdot z^{II} + X_\theta^{(2)}(x^{II}, z^{II}), \\ L_a \cdot \dot{x}_5 = -R_a \cdot x_5 - K_a \cdot x_4^{II} + k_2 \cdot u_i^{II} + X_I^{(2)}(x^{II}, z^{II}), \\ \dot{z}^{II} = \tilde{B}^{(1)}(x_6^{II}, z^{II}) x_4^{II}, \quad (x^{II})' = (x_1, x_2^{II}, x_3, x_4^{II}, x_5), \end{array} \right. \quad (3.4.23)$$

где

$$\tilde{B}^{(1)}(x_6^{II}, z^{II}) = B^{-1}(0)x_4^{II} + (B^{-1}(z^{II} + B^{-1}(0)x_2^{II}, \theta_i + x_2^{II}) - B^{-1}(0))x_4^{II}.$$

Теперь запишем систему (3.4.23) в нормальном виде:

$$\begin{cases} \dot{x}^{II} = H_i^{II} x^{II} + P_i^{II} z^{II} + S u_i^{II} + X^{II(2)}(x^{II}, z^{II}), \\ \dot{z}^{II} = \tilde{B}^{(1)}(x_6^{II}, z^{II}) x_4^{II}, \end{cases} \quad (3.4.24)$$

где матрицы H_i^{II} , P_i^{II} и S имеют следующую структуру:

$$H_i^{II} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ h_{31} & h_{32} & 0 & h_{34} & h_{35} \\ h_{41} & h_{42} & 0 & h_{44} & h_{45} \\ 0 & 0 & 0 & h_{54} & h_{55} \end{pmatrix}, \quad P_i^{II} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p_1 \\ p_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ s \end{pmatrix}.$$

Элементы матриц вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned} A^{II} &= \begin{pmatrix} m + \frac{J}{R^2} + \frac{mR^2}{r_0^2 + R^2} & -\frac{R}{B(0)} \left(m + \frac{J}{R^2}\right) \\ -\frac{R}{B(0)} \left(m + \frac{J}{R^2}\right) & \frac{m(r_0^2 + R^2) + J}{B^2(0)} + J_0 \end{pmatrix}, \\ h_{31} &= -\frac{mgR}{\det A^{II}} \frac{1}{B^2(0)} \left(m + \frac{J}{R^2}\right), \quad h_{34} = -\frac{b_0 R}{\det A^{II}} \frac{1}{B(0)} \left(m + \frac{J}{R^2}\right), \\ h_{32} &= \frac{1}{\det A^{II}} \frac{mgR}{B^4(0)} \left(m + \frac{J}{R^2}\right) \left[RB(0) + r_0 \left(\frac{\partial B}{\partial \theta} B(0) + \frac{\partial B}{\partial \alpha}\right)\Big|_0\right] - \\ &\quad - \frac{mg}{\det A^{II}} \frac{1}{B(0)} \left[J_0 + \frac{m(r_0^2 + R^2) + J}{B^2(0)}\right], \\ h_{35} &= \frac{k_3 R}{\det A^{II}} \frac{1}{B(0)} \left(m + \frac{J}{R^2}\right), \quad h_{41} = -\frac{mg}{\det A^{II}} \frac{1}{B(0)} \left(m + \frac{J}{R^2} + \frac{mR^2}{r_0^2 + R^2}\right), \\ h_{42} &= \frac{mg}{\det A^{II}} \frac{1}{B^3(0)} \left(m + \frac{J}{R^2} + \frac{mR^2}{r_0^2 + R^2}\right) \left[RB(0) + r_0 \left(\frac{\partial B^{II}}{\partial \theta} B(0) + \frac{\partial B}{\partial \alpha}\right)\Big|_0\right] - \\ &\quad - \frac{1}{\det A^{II}} \frac{mgR}{B^2(0)} \left(m + \frac{J}{R^2}\right), \\ h_{44} &= -\frac{b_0}{\det A^{II}} \left(m + \frac{J}{R^2} + \frac{mR^2}{r_0^2 + R^2}\right), \quad h_{45} = \frac{k_3}{\det A^{II}} \left(m + \frac{J}{R^2} + \frac{mR^2}{r_0^2 + R^2}\right), \\ h_{54} &= -\frac{K_a}{L_a}, \quad h_{55} = -\frac{R_a}{L_a}, \quad s = \frac{k_2}{L_a}, \\ p_1 &= \frac{1}{\det A^{II}} \frac{R}{B(0)} \left(m + \frac{J}{R^2}\right) \cdot p, \quad p_2 = \frac{1}{\det A^{II}} \left(m + \frac{J}{R^2} + \frac{mR^2}{r_0^2 + R^2}\right) \cdot p, \\ p &= mg \left(\frac{R}{B(0)} + \frac{r_0}{B^2(0)} \left(\frac{\partial B}{\partial \alpha}\right)\Big|_0\right) \end{aligned}$$

Как и выше, для стабилизации системы в положении равновесия (3.4.5) необходимо управляющее воздействие. Критерий управляемости имеет вид

$$\text{rank} \left(S H_i^{II} \cdot S H_i^{II^2} \cdot S \dots H_i^{II^4} \cdot S \right) = 5, \quad i = 0, 1. \quad (3.4.25)$$

Условие (3.4.25) выполнено, поэтому, согласно теореме 1.4.1 существует линейное управляющее воздействие вида $u_i^{II} = -K_i^{II} x^{II}$, стабилизирующее полную

нелинейную систему (3.4.21) до асимптотической устойчивости по всем переменным.

Критерий качества выбираем в виде

$$I = \int_{t_0}^{+\infty} \left(x_1^2 + (x_2^{II})^2 + x_3 + (x_4^{II})^2 + x_5^2 + (u_i^{II})^2 \right) dt \rightarrow \min.$$

Коэффициенты стабилизирующего управления находятся посредством решения линейно-квадратичной задачи стабилизации по методу Н.Н. Красовского [46]. Найденное управление подставляется в (3.4.21), после чего строятся графики переходных процессов по всем переменным. Графики переходных процессов (рис. Б.9) подтверждают, что система стабилизируется до асимптотической устойчивости по всем переменным.

На рис. Б.10 – Б.13 приведены графики управляющих воздействий как функций времени для двух случаев зависимой координаты и двух положений равновесия. Они показывают, что, несмотря на различные аналитические выражения, переходные процессы для одного и того же положения равновесия совпадают.

3.5. Стабилизация положений равновесия системы Ball and Beam при неполной информации о состоянии

До сих пор мы строили математические модели, предполагая, что вся информация о состоянии фазового вектора доступна. Теперь рассмотрим реальную ситуацию и предположим, что используется имеющийся в системе один датчик типа потенциометр, определяющий положение шара r в жёлобе (точку соприкосновения шара и желоба), а остальные параметры остаются неизвестными. Для определённости будем считать, что зависимой координатой был выбран угол α . Тогда неизвестные компоненты фазового вектора придётся оценить, используя имеющиеся данные. В качестве управляющего воздействия будем использовать

$$u_i^{II} = -K_i^{II} \hat{x}^{II}, \quad (3.5.1)$$

где K_i^{II} – соответствующие матрицы коэффициентов управления, \hat{x}^{II} – вектор оценки фазовых координат, полученные по наблюдению

$$\sigma(t) = \Sigma x^{II}, \quad \Sigma = (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0). \quad (3.5.2)$$

Чтобы восстановить состояние системы по наблюдению σ , построим наблюдатель вида

$$\dot{\hat{x}}^{II} = H_i^{II} \hat{x}^{II} + S u_i^{II} + \Lambda_i^{II} (\sigma - \Sigma \hat{x}^{II}), \quad (3.5.3)$$

где σ – реально измеренный выход, Λ_i^{II} – матрица коэффициентов системы оценивания. Её коэффициенты определяются таким образом, чтобы вектор ошибки $e(t) = x^{II}(t) - \hat{x}^{II}(t)$ асимптотически стремился к нулю:

$$e(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0.$$

Проверим выполнимость условия наблюдаемости для системы (3.5.3). В данном случае оно будет иметь вид

$$\text{rank} \left(\Sigma' \quad (H_i^{II})' \Sigma' \quad \dots \quad (H_i^{II})'^4 \Sigma' \right) = 5.$$

Матрицы наблюдаемости в случае нулевого положения равновесия

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -6,15 & 14,35 & 1930,58 \\ 0 & 1 & 0 & -6,15 & 14,35 \\ 0 & 0 & -49,07 & -0,03 & 298,05 \\ 0 & 0 & -0,42 & -54,73 & 10922,47 \\ 0 & 0 & 0,01 & -17,27 & 28056,55 \end{pmatrix}$$

и в случае ненулевого положения равновесия

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -6,14 & 39,74 & 2107,56 \\ 0 & 1 & 0 & -6,14 & 39,74 \\ 0 & 0 & 29,4 & 0,3 & -164,91 \\ 0 & 0 & 0,69 & 35,97 & -18240,81 \\ 0 & 0 & -0,02 & 28,81 & -46804,75 \end{pmatrix}$$

имеют полный ранг, поэтому, согласно теореме 1.5.1, система может быть стабилизирована до асимптотической устойчивости по всем переменным управлением вида (3.5.1). Матрицу коэффициентов Λ_i^{II} найдём как и управляющие воздействия по методу Н.Н. Красовского [46] из решения линейно-квадратичной задачи стабилизации дуальной системы

$$\dot{\mu} = (H_i^{II})' \mu + \Sigma' \nu, \quad \nu = (\Lambda_i^{II})' \mu.$$

Если обозначить фазовый вектор для системы с датчиком:

$$\xi' = \left((x^{II})', z^{II}, e' \right),$$

то динамика управляемой подсистемы с учётом датчика будем описываться следующими уравнениями:

$$\begin{cases} \dot{x}^{II} = (H_i^{II} - SK_i^{II}) x^{II} + SK_i^{II} e, \\ \dot{e} = (H_i^{II} - S\Sigma) e \end{cases} \quad (3.5.4)$$

Замечание 3.5.1. Отметим, что здесь для асимптотической устойчивости нелинейной системы необходимо, чтобы начальные возмущения вектора фазовых координат выбирались не произвольно, а в соответствии с уравнением связи (3.1.1).

Графики некоторых переходных процессов, иллюстрирующие асимптотическую устойчивость положений равновесия, приведены на рисунках Б.14–Б.18.

3.6. Построение математической модели динамики системы Ball and Beam посредством линеаризации уравнения связи

Теперь посмотрим, можно ли построить адекватную математическую модель системы Ball and Beam, используя уравнения Лагранжа второго рода.

В общем виде, уравнение связи (3.1.1) имеет вид

$$f(\alpha, \theta) = 0. \quad (3.6.1)$$

Раскладывая (3.6.1) в ряд в окрестности положений равновесия (3.4.5) и учитывая, что $f(\alpha_0, \theta_0) = f(\alpha_0, \theta_1) = 0$, будем иметь

$$f(\alpha, \theta) = \left. \frac{\partial f}{\partial \alpha} \right|_0 \cdot \Delta\alpha + \left. \frac{\partial f}{\partial \theta} \right|_0 \cdot \Delta\theta + \dots, \quad (3.6.2)$$

где многоточием обозначены члены более высоких порядков, а производные вычислены в соответствующем положении равновесия.

Отбрасывая члены высших порядков, получим линеаризованные уравнения связи в виде [84, 85, 91, 93, 74, 99, 100]

$$\alpha = \frac{d}{L}\theta, \quad (3.6.3)$$

в случае нулевого положения равновесия, и

$$\alpha = -\frac{d l^2 + d^2}{L l^2 - d^2} (\theta - \theta_1), \quad (3.6.4)$$

в случае ненулевого положения равновесия. Угол θ_1 рассчитывается по формуле (3.1.2).

Для упрощения дальнейших формул, обозначим числовые коэффициенты

$$B_0 = \frac{d}{L}, \quad B_1 = -\frac{d l^2 + d^2}{L l^2 - d^2}. \quad (3.6.5)$$

Сразу заметим, что $B_0 = \frac{1}{B(0,0)}$, $B_1 = \frac{1}{B(0,\theta_1)}$. Одной формулой линеаризованное уравнение связи (3.6.3) для двух положений равновесия можно записать как

$$\alpha = B_i(\theta - \theta_i), \quad i = 1, 2. \quad (3.6.6)$$

Продифференцировав (3.6.6) по времени, получим выражение для исключения скорости по координате α :

$$\dot{\alpha} = B_i \cdot \dot{\theta}. \quad (3.6.7)$$

Подставляя (3.6.6) и (3.6.7) в (3.2.1), получим выражения для кинетической и потенциальной энергий, в которые входят только независимые координаты и их скорости:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m (r^2 + R^2) \left(B_i \dot{\theta} - \frac{R}{r^2 + R^2} \dot{r} \right)^2 + \\ &\quad + \frac{J}{2} \left(B_i \dot{\theta} - \frac{1}{R} \dot{r} \right)^2 + \frac{J_0}{2} \dot{\theta}^2, \quad (3.6.8) \\ \Pi &= mg (r \cdot \sin (B_i (\theta - \theta_i)) + R \cdot \cos (B_i (\theta - \theta_i))). \end{aligned}$$

Выражение для непотенциальной силы, действующей по координате θ , остается неизменным и определяется выражением (3.2.4).

Составим уравнения Лагранжа второго рода:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = Q_\theta, \end{cases} \quad (3.6.9)$$

где $L = T - \Pi$ – функция Лагранжа.

Динамику электропривода будем описывать, как и выше уравнением (3.4.1). Тогда нелинейная система уравнений, описывающая динамику устрой-

ства, будет иметь вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(m + \frac{J}{R^2} + \frac{mR^2}{r^2+R^2} \right) \cdot \ddot{r} - R \left(m + \frac{J}{R^2} \right) B_i \cdot \ddot{\theta} - \\ - mR^2 \frac{r}{(r^2+R^2)^2} \cdot \dot{r}^2 - mrB_i^2 \cdot \dot{\theta}^2 + mg \sin(B_i(\theta - \theta_i)) = 0, \\ \left(B_i^2 \left(m(r^2 + R^2) + J \right) + J_0 \right) \cdot \ddot{\theta} - R \left(m + \frac{J}{R^2} \right) B_i \cdot \ddot{r} + \\ + 2mrB_i^2 \cdot \dot{r}\dot{\theta} + mgB_i (r \cdot \cos(B_i(\theta - \theta_i)) - R \cdot \sin(B_i(\theta - \theta_i))) = \\ = k_3 I - b_0 \dot{\theta}, \\ L_a \frac{dI}{dt} + R_a I + k_1 \dot{\theta} = k_2 e_\nu \end{array} \right. \quad (3.6.10)$$

Подставив в (3.6.10) $r = r_0$ и одно из значений $\theta = \theta_i$, определяемых выражением (3.1.2), получим значения координат системы в положениях равновесия:

$$r = r_0, \quad \theta = \theta_i, \quad I = I_0 = \frac{mgr_0}{k_3} B_i, \quad e_\nu = \frac{R_a I_0}{k_2}, \quad (3.6.11)$$

которые по числовым значениям совпадают с (3.4.5).

Введем возмущения:

$$\begin{array}{l} r = r_0 + x_1, \quad \theta = \theta_i + x_2, \quad \dot{r} = x_3, \\ \dot{\theta} = x_4, \quad I = I_0 + x_5, \quad e_\nu = e_{\nu_0} + u. \end{array} \quad (3.6.12)$$

Подставив (3.6.12) в (3.6.10) и учитывая (3.6.11), получим уравнения возмущенного движения в окрестности i -го положения равновесия.

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(m + \frac{J}{R^2} + \frac{mR^2}{(r_0+x_1)^2+R^2} \right) \cdot \dot{x}_3 - R \left(m + \frac{J}{R^2} \right) B_i \cdot \dot{x}_4 - \\ - mR^2 \frac{r_0+x_1}{((r_0+x_1)^2+R^2)^2} \cdot x_3^2 - m(r_0+x_1) B_i^2 \cdot x_4^2 = -mg \sin(B_i x_2), \\ \left(B_i^2 \left(m \left((r_0+x_1)^2 + R^2 \right) + J \right) + J_0 \right) \cdot \dot{x}_4 - R \left(m + \frac{J}{R^2} \right) B_i \cdot \dot{x}_3 + \\ + mgB_i ((r_0+x_1) \cdot \cos(B_i x_2) - R \cdot \sin(B_i x_2)) + \\ + 2m(r_0+x_1) B_i^2 \cdot \dot{x}_3 \dot{x}_4 = k_3 (I_0 + x_5) - b_0 x_4, \\ L_a \dot{x}_5 + R_a x_5 + K_a x_4 = k_2 u. \end{array} \right. \quad (3.6.13)$$

Выделяя первое приближение в уравнениях (3.6.13), получим линеаризованную систему

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(m + \frac{J}{R^2} + \frac{mR^2}{r_0^2+R^2} \right) \cdot \dot{x}_3 - R \left(m + \frac{J}{R^2} \right) B_i \cdot \dot{x}_4 = \\ = -mgB_i \cdot x_2, \\ \left(B_i^2 \left(m \left(r_0^2 + R^2 \right) + J \right) + J_0 \right) \cdot \dot{x}_4 - R \left(m + \frac{J}{R^2} \right) B_i \cdot \dot{x}_3 = \\ = -mgB_i \cdot x_1 + mgRB_i^2 \cdot x_2 - b_0 \cdot x_4 + k_3 \cdot x_5, \\ \dot{x}_5 = -\frac{R_a}{L_a} x_5 - \frac{K_a}{L_a} x_4 + \frac{k_2}{L_a} u. \end{array} \right. \quad (3.6.14)$$

Наконец, после приведения уравнений (3.6.14) к нормальному виду, получим систему:

$$\dot{x} = M_i x + Nu, \quad (3.6.15)$$

где

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}, \quad M_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 0 & m_{34} & m_{35} \\ m_{41} & m_{42} & 0 & m_{44} & m_{45} \\ 0 & 0 & 0 & m_{54} & m_{55} \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ h \end{pmatrix},$$

$$m_{31} = -\frac{mgR}{\det D} B_i^2 \left(m + \frac{J}{R^2} \right), \quad m_{32} = -\frac{mgB_i}{\det D} [mr_0^2 B_i^2 + J_0],$$

$$m_{34} = -\frac{b_0 R}{\det D} B_i \left(m + \frac{J}{R^2} \right), \quad m_{35} = \frac{k_3 R}{\det D} B_i \left(m + \frac{J}{R^2} \right),$$

$$m_{41} = -\frac{mgB_i}{\det D} \left(m + \frac{J}{R^2} + \frac{mR^2}{r_0^2 + R^2} \right), \quad m_{42} = \frac{m^2 g R^3}{\det D} \frac{B_i^2}{r_0^2 + R^2},$$

$$m_{44} = -\frac{b_0}{\det D} \left(m + \frac{J}{R^2} + \frac{mR^2}{r_0^2 + R^2} \right), \quad m_{45} = \frac{k_3}{\det D} \left(m + \frac{J}{R^2} + \frac{mR^2}{r_0^2 + R^2} \right),$$

$$m_{54} = -\frac{K_a}{L_a}, \quad m_{55} = -\frac{R_a}{L_a}, \quad h = \frac{k_2}{L_a},$$

$$D = \begin{pmatrix} m + \frac{J}{R^2} + \frac{mR^2}{r_0^2 + R^2} & -R \left(m + \frac{J}{R^2} \right) B_i \\ -R \left(m + \frac{J}{R^2} \right) B_i & B_i^2 (m(r_0^2 + R^2) + J) + J_0 \end{pmatrix}.$$

Если пара (M_i, N) управляема, то существует линейное управление вида $u_i = -K_i x$, стабилизирующее систему (3.6.14). Однако, как следует из [22], далеко не всегда это управление будет стабилизировать реальную систему. В этом можно убедиться, рассмотрев уравнения динамики с выделенным первым приближением в математических моделях, полученных с учетом членов нелинейности геометрических связей и без них.

Действительно, сравним полученную линеаризованную систему на основе уравнений Лагранжа (3.6.15) и линейную управляемую подсистему, выделенную из (3.4.24). Рассмотрим матрицы H_i^{II} и M_i . Их размерности совпадают. Кроме того, в нулевом положении равновесия, когда угол θ обращается в ноль, в ноль обращаются и производные $\frac{\partial B}{\partial \theta} \Big|_0$, $\frac{\partial B}{\partial \alpha} \Big|_0$. Следовательно, все соответствующие элементы матриц совпадают, т.е. $h_{32} = m_{32}$, $h_{42} = m_{42}$. Для остальных

элементов матриц, как не трудно убедиться из приведённых формул, также выполняется $h_{ij} = m_{ij}$. А значит, $H_i^{II} = M_i$. Это приводит к тому, что совпадают матричные уравнения, с помощью решения которых вычисляются коэффициенты стабилизирующего управления.

Однако в ненулевом положении равновесия, когда $\theta_1 \neq 0$, одна из частных производных, а именно $\frac{\partial B}{\partial \alpha} \Big|_0$, также отлична от нуля. В этом случае уже будем иметь $h_{32} \neq m_{32}$, $h_{42} \neq m_{42}$ и $H_i^{II} \neq M_i$. Матричные уравнения будут различны, а значит, различны будут и найденные стабилизирующие управления.

Можно предположить, что, в зависимости от соотношения некоторых параметров системы, влияние различия матриц на итоговое решение будет различным. В таблице 3.3 приведены аналитические выражения для частных производных выражения B в положениях равновесия. Они зависят только от механических параметров системы: длин L жёлоба и l плеча AB и радиуса d приводного колеса. Следовательно, именно эти параметры будут оказывать решающее влияние на разницу в динамике этих систем.

На рисунках Б.19, Б.20, Б.21 приведены графики переходных процессов по координате x_1 (положение шара) для ненулевого положения равновесия при различных значениях параметра d . Остальные параметры системы оставлены без изменения. Синим цветом обозначены переходные процессы линеаризованной системы. Так как вычисленное управление помещает все корни характеристического уравнения в левую полуплоскость, все кривые асимптотически стремятся к нулю. Красным цветом показаны графики переходных процессов полной нелинейной модели (3.4.21) с тем же управлением. Как видно, разница в поведении систем значительна. На рис. Б.21 управление, полученное по линеаризованной системе даже приводит к возбуждению полной нелинейной системы.

На рисунках Б.22, Б.23, Б.24 приведены графики переходных процессов по координате x_1 в аналогичных ситуациях для математической модели, построенной на основе уравнений Шульгина. Как видим, в этом случае поведение нелинейной системы не сильно отличается от поведения линеаризованной систем. И во всех случаях найденное управление обеспечивает асимптотическую сходимость.

3.7. Выводы по главе 3

В главе 3 были получены следующие результаты:

1. Построена математическая модель лабораторного стенда GBV 1005 Ball and Beam с нелинейной геометрической связью на основе уравнений Шульгина в случае управления механическим моментом. Найдено линейное управление, стабилизирующее положения равновесия системы до асимптотической устойчивости по всем переменным.
2. Построены математические модели той же системы Ball and Beam с учётом динамики исполнительного привода. Для двух моделей с различным выбором зависимой координаты найдено линейное стабилизирующее управление. Численно проверено, что при согласовании начальных возмущений переходные процессы двух моделей идентичны.
3. В случае неполной информации о состоянии (датчик измеряет положение шара в желобе) построены соответствующие системы оценивания. Графики переходных процессов демонстрируют асимптотическую устойчивость по всем переменным.
4. Проведено сравнение с математической моделью, построенной на основе уравнений Лагранжа (при линеаризации уравнения связи). Показано аналитически, а также на численном примере, что в нулевом положении графики переходных процессов идентичны. В ненулевом положении появляется разница, влияние которой зависит от некоторых механических параметров системы. При определённых значениях управление, найденное по системе уравнений Лагранжа, может приводить к возбуждению полной нелинейной системы.

Глава 4. Описание программного комплекса и численных алгоритмов

Глава 4 посвящена описанию разработанного в среде MATLAB программного комплекса HolStabBB моделирующего динамику системы GBV 1005 Ball and Beam, а также связанным с этим алгоритмам и численным методам.

Изложение материала организовано следующим образом. В разделе 4.1 приведена постановка задачи. В разделе 4.2 содержится описание программного комплекса HolStabBB [12], моделирующего процесс стабилизации положений равновесия лабораторного стенда GBV 1005 Ball and Beam в зависимости от математической модели системы. Разделы 4.3 и 4.4 посвящены численным методам и алгоритмам, используемым в программном комплексе. В разделе 4.1 приводятся выводы по главе 4.

4.1. Постановка задачи

Подробное исследование системы GBV 1005 Ball and Beam было проведено в главе 3. Там же несколькими способами были построены её математические модели. В связи с этим возникла необходимость разработки единого программного комплекса, позволяющего наглядно сравнивать результаты применения различных математических моделей системы Ball and Beam для нахождения стабилизирующего воздействия. Причём наибольший интерес представляет сравнение двух подходов к моделированию: с помощью уравнений в избыточных координатах с учётом нелинейных членов уравнения связи или на основе линеаризации связи в окрестности положения равновесия.

Замечание 4.1.1. *Заметим, что уже существуют программные продукты, посвящённые различным стратегиям управления системой Ball and Beam без связи [82] и с нелинейной связью [79, 96]. При этом основное внимание в этих программах уделяется выбору типа контроллера и подбору его параметров, а не корректности построения математической модели динамики системы. Кроме того, нет ни одной программы, моделирующей стабилизацию системы в ненулевом положении равновесия.*

Таким образом, новый программный комплекс должен позволять пользователю:

1. выбирать математическую модель системы Ball and Beam (на основе уравнений Шульгина или Лагранжа после линеаризации связи);
2. моделировать процесс стабилизации при полной или неполной информации о состоянии;
3. выбирать параметры положения равновесия для стабилизации, т.е. задавать требуемое положение шара в жёлобе для стабилизации и значения углов;
4. изменять параметры системы.

С учётом заданных параметров должен производиться численный расчёт коэффициентов стабилизирующего управления и коэффициентов наблюдателя, если выбрана стабилизация при неполной информации о состоянии. На основе полученных значений строятся графики переходных процессов по координате, соответствующей положению шара в жёлобе. Графиков выводится два. Один соответствует переходному процессу полной нелинейной системы, замкнутой найденным управлением. Второй изображает процесс стабилизации линейной подсистемы (в случае моделирования на основе уравнений Шульгина) или линеаризованной системы (если выбран способ линеаризации связи).

4.2. Описание комплекса программ HolStabBB

На рисунках 4.1–4.2 приведён интерфейс программного комплекса и примеры его работы.

Синим цветом изображается график переходного процесса, построенного по линейной управляемой подсистеме (в случае моделирования на основе уравнений Шульгина) или по линеаризованной системе (в случае моделирования на основе уравнений Лагранжа). Во всех случаях эти графики будут сходиться, так как если выполнено условие управляемости, то управление обеспечивает отрицательность действительных частей всех корней характеристического уравнения.

Красным цветом в обоих случаях изображены графики переходных процессов полной нелинейной системы на основе уравнений Шульгина. Так как в

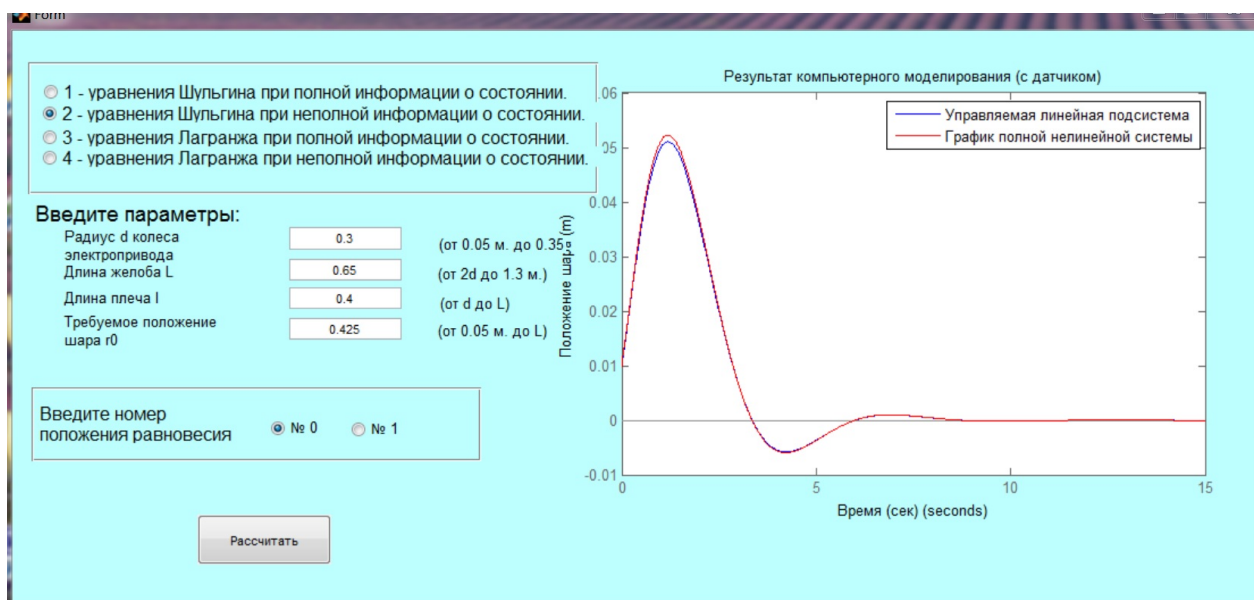


Рис. 4.1. Интерфейс программы HolStabBB. Моделирование системы на основе уравнений Шульгина при неполной информации о состоянии

этом случае при построении математической модели учитываются члены нелинейности, эти переходные процессы более точно отражают поведение реальной системы.

На рис. 4.1, управление, определённое по математической модели с учётом членов нелинейности связи стабилизирует систему до асимптотической устойчивости, причём процесс стабилизации практически не отличается от переходного процесса управляемой линейной подсистемы. На рис. 4.2 управление, было вычислено исходя из математической модели, построенной с использованием линеаризованного уравнения связи, т.е. без учёта членов нелинейности. Это управление, подставленное в полную нелинейную систему, не только не стабилизировало систему, но привело к её возбуждению. Таким образом, разработанный программный комплекс позволяет легко посмотреть, каким образом будет себя вести система типа Ball and Beam с нелинейной геометрической связью при воздействии управлений, вычисленных в зависимости от разных математических моделей. Или, другими словами, насколько адекватна та или иная математическая модель.

На рис. 4.3 приведена блок-схема программы.

Для реализации программного комплекса была выбрана система MATLAB. Эта система обладает широкими возможностями для математического моделирования различных систем и содержит большой набор встроенных

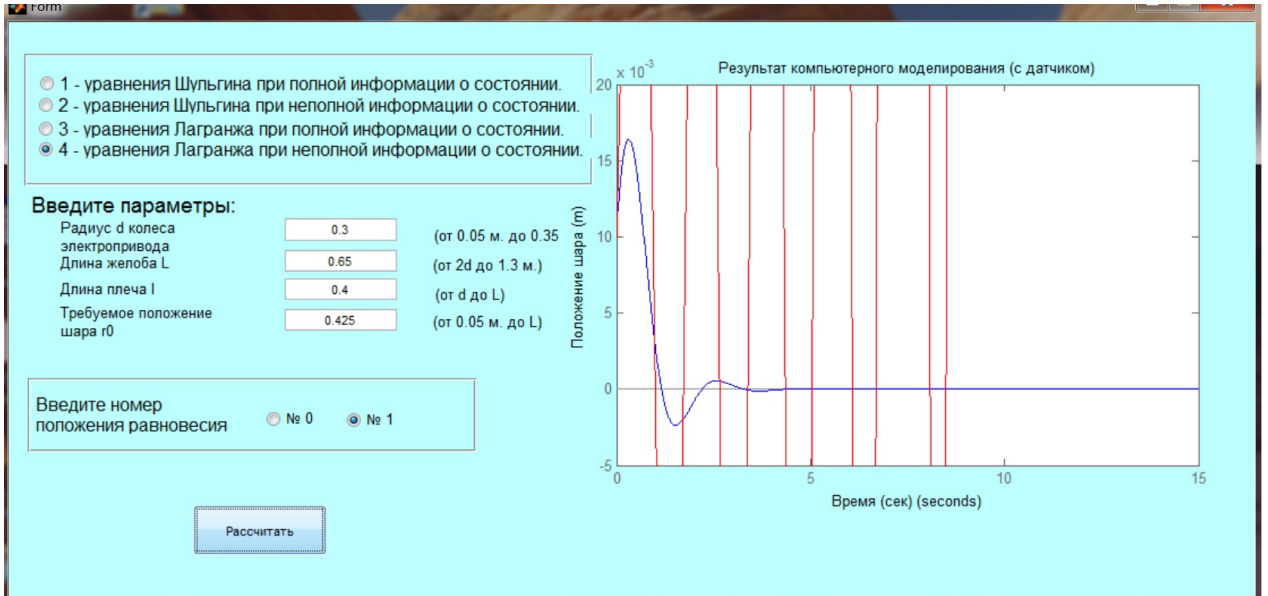


Рис. 4.2. Интерфейс программы HolStabBB. Моделирование системы на основе уравнений Лагранжа при неполной информации о состоянии

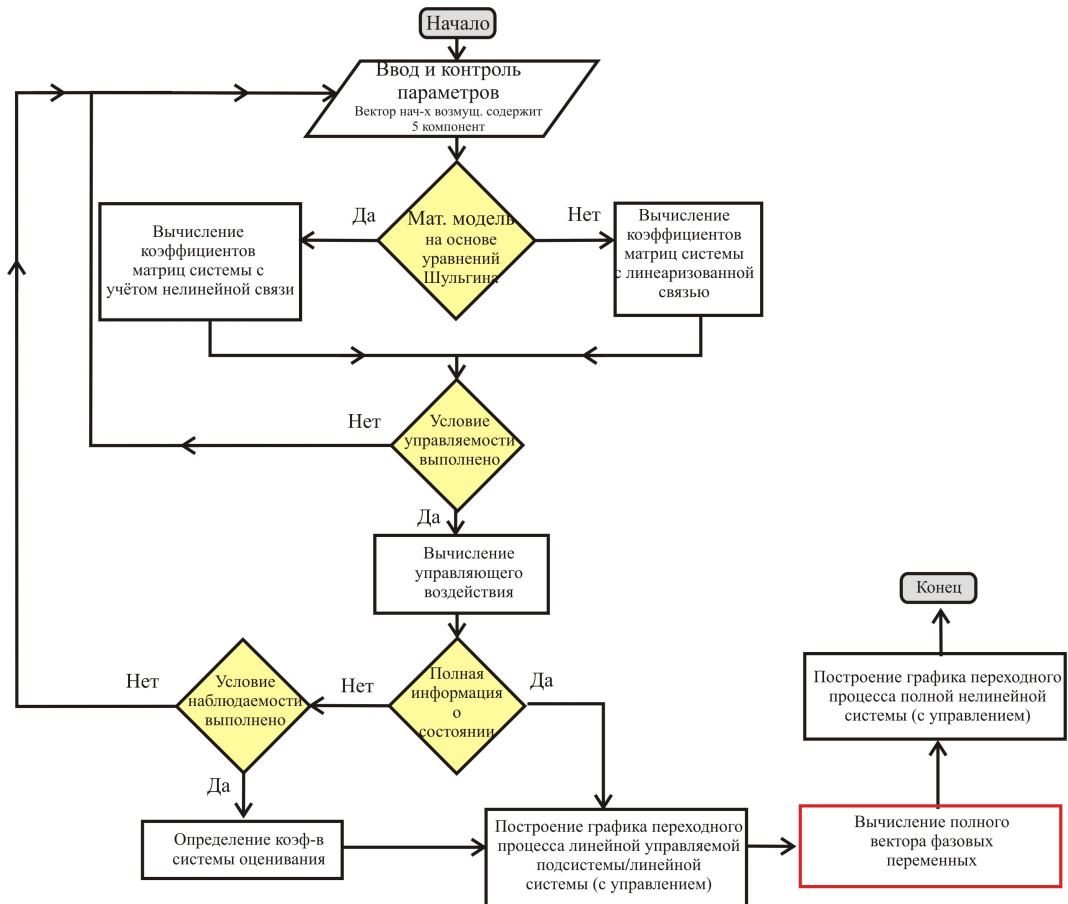


Рис. 4.3. Блок-схема программы HolStabBB

функций, в том числе для обработки символьной информации. Кроме того, она ориентирована на обработку данных в векторно-матричном виде.

В разделе 3.4 главы 3 было проведено сравнение математических моделей в зависимости от выбора избыточной координаты, и была показана их эквивалентность. Для реализации в программном комплексе за основу нелинейной математической модели были выбраны уравнения Шульгина при избыточной координате α (угол наклона жёлоба). Соответственно, при линеаризации связи также исключается эта координата. Соответствующая математическая модель была построена в разделе 3.6 главы 3.

В главе 1 отмечалось, что асимптотическая устойчивость положений равновесия систем с геометрическими связями имеет место, только если начальные возмущения также удовлетворяют этим условиям. То есть начальные возмущения не могут быть любыми, а связаны некоторыми соотношениями. В данном случае, это будет уравнение связи (3.1.1). Несмотря на то, что уравнения (3.1.1) могут быть разрешены аналитически, в общем случае эту задачу нужно решать численно. Подробнее об этом будет написано ниже.

Для реализации алгоритма использовались следующие встроенные функции MATLAB:

1. $ctrb(A,B)$ – вычисление матрицы управляемости пары (A, B) ;
2. $[K,C,e] = lqr(A,B,Q,R)$ – вычисление матрицы коэффициентов стабилизирующего управления $u = -Kx$ динамической системы

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

минимизирующей функционал качества

$$J = \int_0^{\infty} x'Qx + u'Ru dt.$$

Функция $lqr(A,B,Q,R)$ решает алгебраическое матричное уравнение Риккати [8]

$$A'C + CA - CBR^{-1}B'C + Q = 0, \quad (4.2.1)$$

где C – матрица коэффициентов функции Ляпунова. Тогда матрица коэффициентов стабилизирующего управления K рассчитывается по формуле

$$K = R^{-1}B'C.$$

Для работы функции требуется, чтобы пара (A, B) была управляема, $R > 0$ и $Q \geq 0$.

3. $K = place(A, B, p)$ – вычисляет такую матрицу K , что матрица $A - BK$ имеет заданные корни характеристического уравнения, указанные в векторе p . Длина вектора p должна совпадать с числом строк матрицы A . Функция $place$ работает для систем с несколькими входами и основана на алгоритме [83].
4. $sys = ss(A, B, C, D)$ – создаёт модель в пространстве состояний динамической линейной системы вида

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

5. $lsim(sys, u, t, x_0)$ – строит график переходного процесса линейной динамической модели системы sys и вектором начальных возмущений x_0 .
6. $x = fsolve(fun, x_0)$ – решает систему уравнений вида $F(x) = 0$, где x – векторный аргумент, F – вектор-функция, x_0 – начальное приближение к решению.
7. $[T, Y] = ode45(odefun, tspan, y0)$ – функция численного интегрирования систем ОДУ, реализует метод Рунге-Кутты [3, 76, 77, 75].

4.3. Используемые численные методы

При описании используемых численных методов выделим три основных:

1. решение матричных алгебраических уравнений Риккати;
2. численное интегрирование систем дифференциальных уравнений для компьютерного моделирования переходных процессов;
3. решение систем нелинейных уравнений для нахождения зависимых компонент фазового вектора.

Теперь рассмотрим некоторые из них подробнее.

Решение матричного алгебраического уравнения Риккати

Алгебраические матричные уравнения Риккати играют значительную роль во многих задачах теории управления. Для их решения существуют различные способы. Например, как указывается в [46], можно использовать метод установления, или метод Репина-Третьякова [62]. Он основан на том, что решение матричного дифференциального уравнения

$$A'C(t) + C(t)A - C(t)BR^{-1}B'C(t) + Q = \dot{C}(t), \quad (4.3.1)$$

с начальным условием $C(0) = 0$ сходится [13] при $t \rightarrow +\infty$ к положительно определённой матрице C , удовлетворяющей (4.2.1). Однако в этом случае встаёт проблема выбора рационального метода и шага численного интегрирования. Как показывает анализ, проведённый в [47], наиболее рациональным методом численного интегрирования дифференциального уравнения Риккати для решения матричного алгебраического уравнения является метод Эйлера, причём шаг интегрирования должен выбираться достаточно большим. Тем не менее, он требует ручного подбора подходящего шага и анализа полученного результата, поэтому оказывается невыгоден для автоматизации процесса нахождения стабилизирующего управления.

Метод нахождения решения алгебраического уравнения Риккати, который реализован в MATLAB [80], позволяет работать с матрицами большого размера ($n \geq 100$) и основан на итерационном методе проекции на матричное подпространство Крылова с целью получения приближенных решений низкого ранга для стабилизирующего решения алгебраического уравнения Риккати

$$A'X + XA - XBB'X + C'C = 0,$$

где $A, X \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $C \in \mathbb{R}^{s \times n}$, $s \ll n$, $p \ll n$. Он основывается на глобальном процессе Арнольди [73, 81] построения ортонормированного базиса V_1, V_2, \dots, V_m подпространства Крылова $\mathcal{K}_m(A, V) = \text{span}\{V, AV, \dots, A^{m-1}V\}$, т.е.

$$\langle V_i, V_j \rangle_F = 0 \text{ при } i \neq j \text{ и } \langle V_i, V_i \rangle_F = 1,$$

$\|\cdot\|_F$ означает норму Фробениуса.

Модифицированный глобальный алгоритм Арнольди может быть описан следующим образом:

Алгоритм 4.3.1. *Модифицированный глобальный алгоритм Арнольди [80]*

1. $V_1 = V / \|V\|_F,$

2. *for* $j = 1, \dots, m,$

$$\tilde{V} = AV_j,$$

- for* $i = 1, \dots, j,$

$$h_{ij} = \text{tr}(V_i' \tilde{V}),$$

$$\tilde{V} = \tilde{V} - h_{ij} V_i,$$

end.

$$h_{j+1,j} = \|\tilde{V}\|_F,$$

$$V_{j+1} = \tilde{V} / h_{j+1,j},$$

end.

По существу, глобальный алгоритм Арнольди – это стандартный алгоритм Арнольди [95], применённый к паре (\mathcal{A}, v) , где $\mathcal{A} = E_s \otimes A$ и $v = V^\uparrow$. Алгоритм останавливается на шаге j тогда и только тогда, когда $h_{j+1,j} = 0$ и в этом случае инвариантное подпространство построено. Алгоритм сводит задачу к задаче меньшей размерности, которая может быть решена стандартным методом, таким как метод Шура [89].

Решение систем нелинейных уравнений

Как уже упоминалось выше, необходимость в этих методах возникает при вычислении полного вектора возмущений компонент фазового вектора. Для того, чтобы построить графики переходных процессов полной нелинейной системы уравнений динамики, необходимо задание вектора начальных возмущений (x, y) , который должен содержать возмущения всех компонент, а не только независимых. Соответственно, задача состоит в том, чтобы по возмущениям x вектора r независимых переменных определить недостающие компоненты y вектора (x, y) .

Пусть из некоторых соображений полный вектор фазовых компонент разделён на два подвектора, один из которых содержит независимые компоненты,

а второй - избыточные. Тогда имеем систему нелинейных уравнений

$$\begin{cases} F_1(r,s) = 0, \\ \dots \\ F_m(r,s) = 0, \end{cases} \quad (4.3.2)$$

где r – вектор независимых переменных длины n , а s – вектор зависимых компонент длины m , причём $\det \frac{\partial F}{\partial s} \neq 0$. Пусть известно одно из решений системы (r_0, s_0) , т.е. $F(r_0, s_0) = 0$. Также будем предполагать, что $\Omega = \{r - r_0\|_1 \leq a, \|s - s_0\| \leq b\}$ – область изменения параметров r и s , в которой функции системы (4.4.1) определены и $\det \left(\frac{\partial F}{\partial s}\right) \neq 0$.

Зададим возмущения x^* независимых параметров так, что $r_0 + x^* \in \Omega$, $\|x^*\|_1 < \epsilon$, причём величина $\epsilon > 0$ должна быть достаточно мала. Надо найти такой вектор y^* возмущений зависимых компонент, что

$$F(r_0 + x^*, s_0 + y^*) = 0. \quad (4.3.3)$$

Как видно, эта задача легко сводится к проблеме отыскания численного решения системы m нелинейных уравнений относительно m неизвестных. Однако приведённая постановка имеет свою специфику, которую можно использовать для облегчения процесса решения.

Для решения систем нелинейных уравнений в среде MATLAB существует оператор *fsolve*. Он решает следующую задачу.

Пусть задана система уравнений. Оператор *fsolve* пробует найти решение, минимизируя сумму квадратов компонент, т.е. ищет такое z^* , что

$$F_1^2(z^*) + \dots + F_m^2(z^*) \rightarrow \min. \quad (4.3.4)$$

Процесс поиска z^* оператором основан на трёх алгоритмах:

1. trust-region dogleg [92];
2. trust-region reflective [98];
3. алгоритм Левенберга-Марквардта [90].

Все алгоритмы итерационные и могут работать с задачами большой размерности. Опции оператора *fsolve* позволяют выбрать один из перечисленных алгоритмов для решения задачи (4.3.3). В нескольких словах опишем суть этих алгоритмов.

Пусть нужно минимизировать скалярную функцию $f(z)$, зависящую от векторного аргумента z . Основная идея алгоритмов доверительной области

(trust-region) заключается в аппроксимации $f(x)$ на k -м шаге её квадратичной моделью $m_k(z)$, которая в достаточной степени отражает поведение оригинальной функции в некоторой окрестности $T_k(z)$ (trust region) точки z :

$$f(z^{(k)} + s) \approx m_k(s) = f(z^{(k)}) + g'_k s + \frac{1}{2} s' B_k s, \quad (4.3.5)$$

где $g_k = \nabla f(z^{(k)})$ – градиент, а B_k – симметричная положительно определённая матрица, аппроксимирующая матрицу Гессе H_k функции $f(z)$ в точке $z^{(k)}$.

Доверительная область (trust region) может быть определена как

$$T_k = \{z \in \mathbb{R}^n : \|z - z^{(k)}\| \leq \Delta_k\}. \quad (4.3.6)$$

Замечание 4.3.1. *Различный выбор нормы в (4.3.6) приводит к различным формам доверительных областей (trust region). В системе MATLAB использована стандартная Евклидова норма $\|\cdot\|_2$, соответствующая гиперсфере. В работе [97] алгоритм trust-region dogleg модифицируется для работы с нормой $\|\cdot\|_\infty$, которая определяет доверительную область (trust region) в форме n -мерного куба.*

Пробный шаг вычисляется так, чтобы минимизировать $m_k(z)$ в $T_k(z)$, причём размер области на каждой итерации зависит от результатов, достигнутых на предыдущих шагах. Если вычисления показывают достаточно хорошее приближение аппроксимирующей модели к целевой функции, то trust region может быть увеличен. В противном случае он должен быть сокращён.

TR алгоритмы различаются в зависимости от стратегии аппроксимации квадратичной модели. Один из самых эффективных методов называется dogleg. Согласно этому алгоритму, путь, по которому минимизируется аппроксимирующая модель $m_k(z)$, имеет вид ломаной, состоящей из двух звеньев (откуда и происходит название алгоритма). Он определяется следующим образом:

$$s(a) = \begin{cases} \tau \cdot C, & 0 \leq \tau \leq 1 \\ C + (\tau - 1)(N - C), & 1 \leq \tau \leq 2 \end{cases} \quad (4.3.7)$$

где $C = -\frac{g'_k g_k}{g'_k H_k g_k} \cdot g_k$ – шаг Коши, $N = -H_k^{-1} g_k$ – шаг Ньютона.

Алгоритм Левенберга-Марквардта и алгоритмы доверительной области (trust-region) используют в своей основе шаг метода Ньютона, поэтому они обладают квадратичной скоростью сходимости в окрестности решения z^* . Однако

вдали от решения матрица Гессе функции $f(z)$ может быть отрицательно определена. Это условие является необходимым для сходимости метода Ньютона. В алгоритме Левенберга-Марквардта направление поиска определяется из системы

$$(H_k + \lambda E) s^{(k)} = -g_k, \quad (4.3.8)$$

где E – единичная матрица соответствующего размера, а λ выбирается таким образом, чтобы $B_k = H_k + \lambda E$ была положительно определённой. Значение λ адаптируется в процессе оптимизации. Но так как направление поиска шага основано на произвольных возмущениях H_k , отрицательная определённость матрицы Гессе приводит к значительному снижению сходимости алгоритма. Алгоритмы методов доверительной области (trust region) в такой ситуации приводят к увеличению шага ($\|z - z^{(k)}\| = \Delta_k$), чтобы быстрее перейти к нужной окрестности. TR методы надёжны и устойчивы, могут быть применены к плохо обусловленным задачам [98].

Теперь вернёмся к рассмотрению исходной задачи об определении полного вектора возмущений фазовых параметров. Пусть некоторым произвольным образом выбраны возмущения x^* , $\|x^*\|_1 < \epsilon$ вектора независимых компонент. Введём в рассмотрение новые функции $G(y) = F(r_0 + x^*, s_0 + y)$. Тогда система (4.3.2) превращается в систему из m уравнений относительно m неизвестных:

$$\begin{cases} G_1(y) = 0, \\ \vdots \\ G_m(y) = 0. \end{cases} \quad (4.3.9)$$

Чтобы воспользоваться итерационным методом нахождения решения системы (4.3.8), нужно указать начальное приближение $y^{(0)}$ к искомому решению y^* . Согласно условию задачи, решение y^* (и соответствующие возмущения x^*) должно удовлетворять уравнению (4.3.3). Разложим левую часть (4.3.3) в ряд в окрестности (r_0, s_0) , выделяя члены первого порядка:

$$0 = F(r_0 + x^*, s_0 + y^*) = \left(\frac{\partial F}{\partial r} \right)_0 x^* + \left(\frac{\partial F}{\partial s} \right)_0 y^* + F^{(2)}(x^*, y^*). \quad (4.3.10)$$

Так как $\det \left(\frac{\partial F}{\partial s} \right)_0 \neq 0$, а x^* известно, положим для начального приближения $y^{(0)}$:

$$y^{(0)} = - \left(\frac{\partial F}{\partial s} \right)_0^{-1} \left(\frac{\partial F}{\partial r} \right)_0 x^* = B(0)x^*. \quad (4.3.11)$$

Всегда существуют такие достаточно малые начальные возмущения x^* , что начальное приближение $y^{(0)}$, определяемое уравнением (4.3.11) получается достаточно близким к искомому решению y^* и точка $(r_0 + x^*, s_0 + y^{(0)}) \in \Omega$. Тогда по теореме о неявной функции существует единственное решение y^* системы (4.3.9). Если

$$\|G(y^{(0)})\|_1 \geq 10^{-6}, \quad (4.3.12)$$

то уточняем решение с помощью алгоритма trust-region dogleg.

4.4. Алгоритм определения полного вектора начальных возмущений

Алгоритм 4.4.1. 1. Зададим некоторые $\epsilon > 0$ и $\mu > 0$ определяющие норму вектора начальных возмущений вектора x и точность работы алгоритма. По умолчанию, $\mu = 10^{-6}$, значение параметра ϵ существенно зависит от механической конструкции системы.

2. Зададим произвольно возмущения независимых координат x^* так, что $\|x^*\|_1 < \epsilon$.

3. Определим новую функцию $G(y) = F(r_0 + x^*, s_0 + y)$.

4. Определим вектор начальных приближений вектора избыточных координат по формуле (4.3.11)

$$y^{(0)} = B(0) \cdot x^0.$$

5. Если $G(y^{(0)}) \leq \mu$, положим $y^* = y^{(0)}$. Иначе доопределим решение с помощью алгоритма trust-region dogleg поиска решений систем нелинейных уравнений.

6. Если решение не найдено в п.5, положим $x^* = \frac{1}{2}x^*$ и переходим к п. 3.

Замечание 4.4.1. Матрица $B(0)$ была вычислена на этапе определения коэффициентов системы первого приближения, поэтому для определения $y^{(0)}$ требуется только вычисление умножения уже известной матрицы и $B(0)$ на вектор x^* . Всего на это требуется tn умножений и $t(n-1)$ сложений.

В заключение, приведём сравнительные примеры работы алгоритма для системы Ball and Beam.

Таблица 1: Результат работы обычного алгоритма trust-region dogleg. Входные параметры: нулевое положение равновесия, зависимая координата θ , возмущение независимой координаты $x^* = 0.1$, $\mu = 10^{-15}$.

Iteration	Func-count	Norm of $f(x)$	Trust-region radius
0	2	0.000101537	1
1	4	3.01177e-06	1
2	6	4.0724e-08	1.35
3	8	2.45192e-11	1.35
4	10	1.10263e-17	1.35
5	12	2.36226e-30	

Таблица 2: Результат работы алгоритма 4.4.1 и trust-region dogleg. Входные параметры: нулевое положение равновесия, зависимая координата θ , возмущение независимой координаты $x^* = 0.1$, $\mu = 10^{-15}$.

Iteration	Func-count	Norm of $f(x)$	Trust-region radius
0	2	9.56243e-07	1
1	4	6.81881e-09	1
2	6	7.81242e-13	1
3	8	1.1247e-20	1
4	10	0	

Таблица 3: Результат работы алгоритма 4.4.1 и алгоритма Левенберга-Марквардта. Входные параметры: нулевое положение равновесия, зависимая координата θ , возмущение независимой координаты $x^* = 0.1$, $\mu = 10^{-15}$.

Iteration	Func-count	Norm of $f(x)$	Trust-region radius
0	2	9.56243e-07	
1	4	9.36349e-07	0.000995165
2	6	7.6757e-07	0.00898718
3	8	2.03361e-07	0.0438032
4	10	4.1302e-09	0.0434485
5	12	1.97399e-12	0.00746375
6	14	5.19166e-18	0.000167987
7	16	1.07287e-25	2.72886e-07

Таблица 4: Результат работы обычного алгоритма trust-region dogleg. Входные параметры: ненулевое положение равновесия, зависимая координата θ , возмущение независимой координаты $x^* = 0.05$, $\mu = 10^{-15}$.

Iteration	Func-count	Norm of $f(x)$	Trust-region radius
0	2	8.62336e-05	1
1	4	2.58584e-06	1
2	6	3.24394e-08	1.27
3	8	1.59152e-11	1.27
4	10	4.65087e-18	1.27
5	12	3.8568e-31	

Таблица 5: Результат работы алгоритма 4.4.1 и trust-region dogleg. Входные параметры: ненулевое положение равновесия, зависимая координата θ , возмущение независимой координаты $x^* = 0.05$, $\mu = 10^{-15}$.

Iteration	Func-count	Norm of $f(x)$	Trust-region radius
0	2	7.18649e-08	1
1	4	5.96511e-12	1
2	6	4.54991e-20	1
3	8	3.00927e-36	

Таблица 6: Результат работы алгоритма 4.4.1 и алгоритма Левенберга-Марквардта. Входные параметры: ненулевое положение равновесия, зависимая координата θ , возмущение независимой координаты $x^* = 0.05$, $\mu = 10^{-15}$.

Iteration	Func-count	Norm of $f(x)$	Trust-region radius
0	2	7.18649e-08	
1	4	6.9292e-08	0.000357064
2	6	4.94641e-08	0.00301508
3	8	6.29391e-09	0.0106324
4	10	1.92756e-11	0.00561212
5	12	6.3979e-16	0.000327801
6	14	2.04003e-22	1.89871e-06
7	16	6.50678e-31	1.0727e-09

Вывод: В таблицах 1–6 приведены сравнительные результаты работы алгоритмов trust-region dogleg, алгоритма 4.4.1 и trust-region dogleg, алгоритма 4.4.1 и алгоритма Левенберга-Марквардта. В первых трёх испытаниях поиск вёлся в окрестности нулевого положения равновесия, в последующих – в окрестности ненулевого положения равновесия. В случаях, приведённых в 1–3 начальное возмущение независимой компоненты фазового вектора x^* было выбрано достаточно большим в масштабах исследуемой задачи. В трёх других 4–6 оно было уменьшено в два раза. Требуемая точность μ во всех случаях была повышена по сравнению со стандартным значением.

Во всех случаях работы алгоритмов за конечное число итераций был получен правильный ответ: $y^* = -0.5705$ при начальном приближении $y^{(0)} = -0.42500$ в случае нулевого положения равновесия и $y^* = -0.2324$ при начальном приближении $y^{(0)} = -0.21250$ в случае ненулевого положения равновесия. По количеству итераций в обоих случаях наилучший результат показал алгоритм 4.2.1 (с уточнением значения с помощью алгоритма trust-region dogleg). Причём преимущество оказалось тем больше, чем меньше были выбраны начальные возмущения независимых координат. В первых трёх случаях начальные возмущения x^* были близки к максимально возможным, поэтому преимущество алгоритма 4.2.1 было незначительным. По сравнению со стандартным алгоритмом trust-region dogleg вычисления были сокращены на одну итерацию. В случае уменьшения начального возмущения требуемый результат алгоритмом 4.2.1 (с уточнением значения с помощью алгоритма trust-region dogleg) был достигнут всего за три итерации, стандартный trust-region dogleg вычислил ответ за пять итераций. Уточнение решения с помощью алгоритма Левенберга-Марквардта в обоих случаях дало наихудший результат из семи итераций.

4.5. Выводы по главе 4

1. Разработан программный комплекс HolStabBB, моделирующий динамику системы GBV 1005 Ball and Beam и позволяющий наглядно сравнивать применимость той или иной математической модели для вычисления стабилизирующего воздействия при различных параметрах модели и реализующий численный алгоритм 1.6.1, позволяющий находить

коэффициенты стабилизирующего управления и системы оценивания для мехатронных систем с нелинейными геометрическими связями.

2. Разработан алгоритм численного нахождения полного вектора возмущений параметров системы, необходимый для компьютерного моделирования процесса стабилизации систем с нелинейными геометрическими связями.

Заключение

Предложена и реализована методика получения нелинейных математических моделей динамики мехатронных систем с нелинейными геометрическими связями в виде векторно-матричных уравнений с выделенным первым приближением в переменных Лагранжа и Рауса.

Разработан метод получения явных нелинейных уравнений динамики и уравнений с выделенным первым приближением в векторно-матричном виде.

Доказаны новые достаточные условия разрешимости нелинейных задач стабилизации стационарных движений и положений равновесия мехатронных голономных систем с геометрическими связями при различных способах введения управляющих воздействий при полной и неполной информации о состоянии.

Разработаны алгоритмы численного нахождения коэффициентов стабилизирующего управления и наблюдателя для мехатронных систем с нелинейными геометрическими связями.

Разработан комплекс программ для реализации предложенных алгоритмов применительно к полному исследованию динамики системы GBV 1005 Ball and Beam.

Литература

- [1] Аппель П.Э. Теоретическая механика. Т.2. – М.: Физматгиз, 1960.
- [2] Балонин Н.А. Новый курс теории управления движением. СПб.: Изд-во С-Петербур. ун-та, 2000.
- [3] Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Т.2. – М.: Физматгиз, 1962.
- [4] Власенко В.А., Лаппа Ю.М., Ярославский Л.П. Методы синтеза быстрых алгоритмов свертки и спектрального анализа сигналов – М.: Наука, 1990.
- [5] Воронец П.В. Об уравнениях движения твёрдого тела // Нелинейная динамика, 2012. Т. 8. № 2. С. 431–441.
- [6] Гамильтон У.Р. Избранные труды: оптика, динамика, кватернионы. – М.: Наука, 1994.
- [7] Гофман М.Н., Ефимов И.К. Динамический анализ механизма качания хобота напольной завалочной машины // Вестник Приазовского государственного технического университета, 2000. № 2. С. 135-137.
- [8] Егоров А.И. Уравнения Риккати. – М.: Физматлит, 2001.
- [9] Зегжда С.А., Солтаханов Ш.Х., Юшков М.П. Уравнения движения негोलомных систем и вариационные принципы механики. Новый класс задач управления. – М.: Физматлит, 2005.
- [10] Зенкевич С.Л, Ющенко А.С. Основы управления манипуляционными роботами. – М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004.
- [11] Ильина А.Н. Об исследовании структуры линеаризованных уравнений возмущённого движения механической системы с геометрическими связями в избыточных координатах // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Сборник докладов. – Казань: Изд-во Казанского федерального университета, 2015. С. 1602-1604.

- [12] Ильина А.Н., Красинский А.Я., Рукавишников А.С. HolStabBB – программа для исследования мехатронных голономных систем: система Ball and Beam // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2018663031 от 18 октября 2018 г.
- [13] Калман Р. Об общей теории систем управления // Труды I Конгресса ИФАК. Т. 2. – М.: Изд-во АН СССР, 1961. С. 521–547.
- [14] Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. – М.: УРСС, 2010.
- [15] Каленова В.И., Морозов В.М., Салмина М.А. К задаче стабилизации установившихся движений систем с циклическими координатами // ПММ., 1989. Т. 53. Вып. 5. С. 707–713.
- [16] Каменков Г.В. Устойчивость и колебания нелинейных систем. Т. 2. – М.: Наука, 1972.
- [17] Карапетян А.В., Румянцев В.В. Устойчивость консервативных и диссипативных систем. Итоги науки и техники. Общая механика. Т. 6. – М.: ВИНТИ, 1983. С. 3-128.
- [18] Квакернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления. – М.: Мир, 1977.
- [19] Клоков А.С., Самсонов В.А. О стабилизируемости тривиальных установившихся движений гироскопически связанных систем с псевдоциклическими координатами // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 2. С. 199-202.
- [20] Красинская–Тюменева Э.М., Красинский А.Я. О влиянии структуры сил на устойчивость положений равновесия неголономных систем // Вопросы вычислительной и прикладной математики, 1977, № 45. С. 172-186.
- [21] Красинская Э.М., Красинский А.Я., Обносов К.Б. О развитии научных методов школы М.Ф. Шульгина в применении к задачам устойчивости и стабилизации равновесий мехатронных систем с избыточными координатами // Теоретическая механика. Сборник научно-методических статей – М.: Изд-во МГУ, 2012. Вып. 28. С. 169–184.

- [22] Красинский А.Я., Красинская Э.М. О допустимости линеаризации уравнений геометрических связей в задачах устойчивости и стабилизации равновесий // Теоретическая механика. Сборник научно-методических статей – М.: Изд-во МГУ, 2015. Вып. 29. С. 54–65.
- [23] Красинская Э.М. К стабилизации стационарных движений механических систем // ПММ, 1983. Т. 47, С. 302–309.
- [24] Красинский А.Я. Об устойчивости и стабилизации положений равновесия неголономных систем // ПММ, 1988. Т. 52. С. 194–202.
- [25] Красинский А.Я. О стабилизации установившихся движений систем с циклическими координатами // ПММ, 1992. Т. 56, С. 939–950.
- [26] Красинская Э.М., Красинский А.Я. Об устойчивости и стабилизации неизолированных установившихся движений механических систем. Голономные системы // Прикладная математика и механика. Сборник научных трудов – Ульяновск: УлГУ, 2011. С. 301–318.
- [27] Красинский А.Я. Об одном методе исследования устойчивости и стабилизации неизолированных установившихся движений механических систем // Избранные труды VIII Международного семинара «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» – М.: Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2004. С. 97–103.
- [28] Красинская Э.М., Красинский А.Я. Об устойчивости и стабилизации равновесия механических систем с избыточными координатами // Наука и образование – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013. № 3. DOI: 10.7463/0313.0541146.
- [29] Красинская Э.М., Красинский А.Я. Об одном методе исследования устойчивости и стабилизации установившихся движений механических систем с избыточными координатами // Материалы XII Всерос. совещания по проблемам управления (ВСПУ-2014) – М.: Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2014. С. 1766–1778.
- [30] Красинский А.Я., Красинская Э.М. Моделирование динамики стенда GBV 1005 BALL AND BEAM как управляемой механической системы с

- избыточной координатой // Наука и образование – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014. № 1. DOI: 10.7463/0114.0646446.
- [31] Красинский А.Я., Красинская Э.М. О методе исследования одного класса задач стабилизации при неполной информации о состоянии // Труды международной конференции «Динамика и процессы управления» (SDCP' 2014) – Екатеринбург: ИММ Уро РАН, 2015. С. 228–235.
- [32] Красинский А.Я., Красинская Э.М. Об асимптотической устойчивости в задачах стабилизации с нулевыми корнями в замкнутой системе // Материалы XI Всероссийского съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики – Казань: Изд-во Академии наук РТ, 2015. С. 2055–2057.
- [33] Красинский А.Я., Красинская Э.М. Об одном методе стабилизации установившихся движений с нулевыми корнями в замкнутой системе // Автоматика и телемеханика, 2016. №. 8. С. 85-100.
- [34] Красинский А.Я., Красинская Э.М., Ильина А.Н. О моделировании динамики мехатронных систем с геометрическими связями как систем с избыточными координатами // Материалы 8-й Всероссийской мультikonференции в 3 т. Т. 2 – Ростов-на-Дону: Изд-во Южного Федерального ун-та, 2015. ISBN 978-5-9275-1633-9. С. 37–39.
- [35] Красинский А.Я., Ильина А.Н., Красинская Э.М. Об одном методе решения задачи стабилизации установившихся движений мехатронных систем с геометрическими связями // 14-я международная конференция «Авиация и космонавтика – 2015». Тезисы – М.: Типография «Люксор», 2015. С. 175.
- [36] Красинский А.Я., Ильина А.Н., Красинская Э.М. Об управлении и стабилизации мехатронных систем с геометрическими связями на примере стенда G1005 Ball&Beam // Материалы XIII Международной конференции «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» – М.: Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2016. С. 211-214.
- [37] Красинский А.Я., Ильина А.Н., Красинская Э.М., Рукавишникова А.С. Стабилизация продольного движения манипулятора с радиально деформируемыми колёсами // Труды XI Международной научной Четаевской

- конференции «Аналитическая механика, устойчивость и управление» – Казань: Изд-во КНИТУ-КАИ, 2017. Т. 3, часть 2. С. 82–88.
- [38] Красинский А.Я., Ильина А.Н., Красинская Э.М. О рациональном выборе типа переменных в задачах стабилизации установившихся движений при неполной информации о состоянии // Труды XI Международной научной Четаевской конференции «Аналитическая механика, устойчивость и управление» – Казань: Изд-во КНИТУ-КАИ, 2017. Т. 3, часть 2. С. 72–81.
- [39] Красинский А.Я., Ильина А.Н., Красинская Э.М., Рукавишникова А.С. Математическое и компьютерное моделирование динамики планетохода с радиально деформируемыми колесами // Труды МАИ, 2017. № 95. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=84612>
- [40] Красинский А.Я., Ильина А.Н., Красинская Э.М. О моделировании динамики системы Ball and Beam как нелинейной мехатронной системы с геометрической связью // Вестник Удмуртского университета. Секция механика, 2017. Т. 27, № 3. С. 414–430. URL: <http://vst.ics.org.ru/journal/article/2609/>
- [41] Красинский А.Я., Ильина А.Н., Красинская Э.М., Рукавишникова А.С. Математическое и компьютерное моделирование манипуляторов с нелинейной геометрической связью // Инженерный журнал: наука и инновации, 2018. № 4(76). DOI: 10.18698/2308-6033-2018-4-1757
- [42] Красинский А.Я., Ильина А.Н., Красинская Э.М. Об одном случае стабилизации стационарных движений систем с избыточными координатами // Вестник московского университета. Серия 1. Математика. Механика, 2019. № 1 С. 46–51.
- [43] Красинский А.Я., Ильина А.Н., Рукавишникова А.С. Сравнительный анализ компьютерных реализаций стабилизации стационарных движений голономных мехатронных систем при различных подходах к построению математических моделей // Материалы международной конференции «Проблемы механики и управления» – М.: Изд-во МГУ, 2018. С. 191–194.
- [44] Красинский А.Я., Ильина А.Н. О стабилизации положений равновесия системы Ball and Beam как мехатронной системы с геометрической связью

- // Труды X Всероссийской научной конференции им. Ю.И. Неймарка. – Нижний Новгород: Наш дом, 2016. С. 480–486.
- [45] Красинский А.Я., Халиков А.А., Иофе В.В., Каюмова Д.Р. Свидетельство о гос. регистрации программ для ЭВМ № 2011615362 Российская Федерация. Программное составление уравнений движения и исследование стабилизации механических движений. 2011. Правообладатель: ГОУ ВПО. Московский государственный университет прикладной биотехнологии – Заявка № 2011613568; зарегистрирована в Реестре программ для ЭВМ 23 мая 2011 г.
- [46] Красовский Н.Н. Проблемы стабилизации управляемых движений // Малкин И.Г. Теория устойчивости движения – М.: Наука, 1966. С. 475–514.
- [47] Кувшинов В.М. Особенности численного решения матричного алгебраического уравнения Риккати методом установления // Ученые записки ЦАГИ, 1979. Т. 10. № 1. С. 69–76.
- [48] Кунцевич В.М., Лычак М.М. Синтез систем автоматического управления с помощью функций Ляпунова – М.: Наука 1977.
- [49] Лагранж Ж.Л. Аналитическая механика – Москва–Ленинград: ГИТТЛ, 1950.
- [50] Летов А.М. Математическая теория процессов управления – М.: Наука, 1981.
- [51] Лурье А.И. Аналитическая механика – М.: Физматлит, 1961.
- [52] Ляпунов А.М. Лекции по теоретической механике – Киев: Наукова думка, 1982.
- [53] Ляпунов А.М. Собрание сочинений, Т. 2. – Москва–Ленинград: Изд-во АН СССР, 1956.
- [54] Магнус Я.Р., Нейдекер Х. Матричное дифференциальное исчисление с приложениями к статистике и эконометрике. Пер. с англ. / Под ред. С.А. Айвазяна – М.: Физматлит, 2002.
- [55] Малкин И.Г. Теория устойчивости движения – М.: Наука, 1966.

- [56] Маркеев А.П. Теоретическая механика – М.: ЧеРо, 1999.
- [57] Меркин Д.Р. Введение в теорию устойчивости движения – М.: Наука, 1971.
- [58] Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Динамика неавтономных систем – М.: Наука, 1967.
- [59] Новожилов И.В., Зацепин М.Ф. Уравнения движения механических систем в избыточном наборе переменных // Сборник научно-методических статей по теоретической механике. 1987. Вып. 18. С. 62–66.
- [60] Парс Л.А. Аналитическая динамика. – М.: Наука, 1971.
- [61] Раус Э.Дж. Динамика системы твердых тел. Т. 2. – М.: Наука, 1983.
- [62] Репин Ю.М., Третьяков В.Е. Решение задачи об аналитическом конструировании регуляторов на электронных моделирующих устройствах. // Автоматика и телемеханика, 1963. Т. 24. № 6. С. 738–743.
- [63] Ройтенберг Я.Н. Автоматическое управление – М.: Наука, 1971.
- [64] Румянцев В.В. Об устойчивости стационарных движений спутников – М.: ВЦ АН СССР, 1967.
- [65] Справочник по теории автоматического управления. Под редакцией А.А. Красовского – М.: Наука, 1987.
- [66] Суслов Г.К. Теоретическая механика – Москва-Ленинград: ОГИЗ, 1946.
- [67] Шульгин М.Ф. О некоторых дифференциальных уравнениях аналитической динамики и их интегрировании – Ташкент: Изд-во САГУ, 1958.
URL: <http://vuz.exponenta.ru/pdf/book/Shulgin.pdf>
- [68] Abdul Aziz N.N., Yusoff M.I., Solihin M.I., Akmeliawati R. Two degrees of freedom control of a ball and beam system // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering, 2013. Vol 53. DOI: 10.1088/1757-899X/53/1/012070
- [69] Aguilar-Ibanez C., Suarez-Castanon M.S., de Jesu's Rubio J. Stabilization of the Ball on the Beam System by Means of the Inverse Lyapunov Approach // Hindawi Publishing Corporation Mathematical Problems in Engineering, Vol 2012, Article ID 810597. DOI: 10.1155/2012/

- [70] Aizerman M.A., Gantmacher F.R. Stabilitaet der gleichgewichtslage in einem nicht holonomen system // ZAMM, 1957. Vol. 37. № 1-2. P. 74–75. DOI: 10.1002/zamm.19570370112
- [71] Andreev F., Auckly D., Gosavi S., Kapitanski L., Kelkar A., White W. Matching, linear systems, and the ball and beam // Automatica, 2002. Vol. 38. № 12. P. 2147–2152. URL: [https://doi.org/10.1016/S0005-1098\(02\)00145-0](https://doi.org/10.1016/S0005-1098(02)00145-0)
- [72] Aoustin Y., Formal'skii A.M. Beam-and-Ball System under Limited Control: Stabilization with Large Basin of Attraction // American Control Conference, 2009. DOI: 10.1109/ACC.2009.5159859
- [73] Arnold W.F., Laub A.J., Generalized Eigenproblem Algorithms and Software for Algebraic Riccati Equations // Proceedings of the IEEE, 1984. Vol. 72. № 12. P. 1746–1754. DOI: 10.1109/PROC.1984.13083
- [74] Awadalla Ali, Taifour Ali, Osama A. Taha, Naseraldeem A. Design and Implementation of Ball and Beam System Using PID Controller // Automatic Control and Information Sciences, 2017. Vol. 3. P. 1-4. DOI: 10.12691/acis-3-1-1
- [75] Bogacki P., Shampine L.F., A 3(2) pair of Runge-Kutta formulas // Applied Mathematics Letters, 1989. Vol. 2. № 4. P. 321–325. URL: [https://doi.org/10.1016/0893-9659\(89\)90079-7](https://doi.org/10.1016/0893-9659(89)90079-7)
- [76] Dormand J.R., Prince P.J. A family of embedded Runge-Kutta formulae // Journal of Computational and Applied Mathematics, 1980. Vol. 6. № 1. P. 19–26. URL: [https://doi.org/10.1016/0771-050X\(80\)90013-3](https://doi.org/10.1016/0771-050X(80)90013-3)
- [77] Forsythe G.E., Malcolm M.A., Moler C.B. Computer Methods for Mathematical Computations. Prentice-Hall, 1977.
- [78] Hamed B. Application of a LabVIEW for Real-Time Control of Ball and Beam System // IACSIT International Journal of Engineering and Technology, 2010. Vol. 2, № 4. P. 401–407. DOI: 10.7763/IJET.2010.V2.155
- [79] Hill R. Ball & Beam Control. Animation of ball & beam state-feedback control system.
URL: <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/40799-ball-beam-control>

- [80] Jbilou K. An Arnoldi based algorithm for large algebraic Riccati equations // Applied Mathematics Letters, 2006. № 19. P. 437–444.
- [81] Jbilou K., Messaoudi A., Sadok Y. Global FOM and GMRES algorithms for matrix equations // Applied Numerical Mathematics, 1999. Vol. 31. № 1. P. 49–63.
- [82] Kantor J. Ball & Beam Demo. BALLBEAM demonstrates Proportional-Derivative (PD) control using a ball and beam simulation.
URL: <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/151-ball-beam-demo>
- [83] Kautsky J., Nichols N.K., Van Dooren P. Robust Pole Assignment in Linear State Feedback // International Journal of Control, 1985. Vol. 41. № 5. P. 1129–1155
- [84] Keshmiri M., Jahromi A.F., Mohebbi A., Amoozgar M.H., Wen-Fang Xie. Modeling and control of Ball and Beamsystem using model based and non-model based control approaches // International Journal on smart sensing and intelligent systems, 2012. Vol. 5. № 1. P. 14–35.
URL: <http://s2is.org/Issues/v5/n1/papers/paper2.pdf>
- [85] Koo M.-S., Choi H.-L., Lim J.-T. Adaptive nonlinear control of a ball and beam system using the centrifugal force term // International Journal of Innovative Computing, Information and control, 2012. Vol. 8. № 9. P. 5999–6009. URL: <http://www.ijicic.org/11-05068-1.pdf>
- [86] Krasinskiy A.Ya., Ilyina A.N. The mathematical modelling of the dynamics of systems with redundant coordinates in the neighborhood of steady motions // Вестник ЮУрГУ. Сер. Матем. моделирование и программирование, 2017. Т. 10. № 2. С. 38–50. DOI: <https://doi.org/10.14529/mmp170203>
- [87] Krasinskiy A.Ya., Krasinkaya E.M, Ilyina A.N. About mathematical models of system dynamics with geometric constraints in problems of stability and stabilization by incomplete state information // International Robotics and Automation Journal, 2017. Vol. 2. № 1. P. 7–11. DOI: [10.15406/iratj.2017.02.00007](https://doi.org/10.15406/iratj.2017.02.00007)

- [88] Krasinskaya E.M., Ilyina A.N., Rukavishnikova A.S. On modeling of the dynamics of a mobile manipulator as a mechatronic system // 2nd International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing (ICIEAM), 2016. DOI: 10.1109/ICIEAM.2016.7910960
- [89] Laub A.J. A Schur method for solving algebraic Riccati equations // IEEE Transactions on Automatical Control, 1979. Vol. 24. № 6. P. 913–921. DOI: 10.1109/TAC.1979.1102178
- [90] Levenberg K. A Method for the Solution of Certain Problems in Least Squares // Quart. Appl. Math., 1944. Vol. 2, P. 164–168.
- [91] Meenakshipriya B., Kalpana K. Modelling and Control of Ball and Beam System using Coefficient Diagram Method (CDM) based PID controller // Materials of the Third International Conference on Advances in Control and Optimization of Dynamical Systems, 2014. Vol. 47. № 1. P. 620-626. URL: <https://doi.org/10.3182/20140313-3-IN-3024.00079>
- [92] Powell M.J.D. A Fortran Subroutine for Solving Systems of Nonlinear Algebraic Equations // Numerical Methods for Nonlinear Algebraic Equations, 1970.
- [93] Rahmat M.F., Wahid H., Wahab N.A. Application of intelligent controller in a Ball and Beam control system // International journal on smart sensing and intelligent systems, 2010. Vol. 3. № 1. P. 45–60. DOI: 10.21307/ijssis-2017-378
- [94] Randal J. B. Matrix Differentiation, 2006.
URL: <https://atmos.washington.edu/~dennis/MatrixCalculus.pdf>
- [95] Saad Y. Iterative methods for sparse linear systems, PWS Publishing, New York, 1990.
- [96] Shamshiri R.R. Ball and Beam Control with Lead compensator and PD. Ball and Beam Control using Lead compensator and PD controller.
URL: <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/26011-ball-and-beam-control-with-lead-compensator-and-pd>
- [97] Voglis C., Lagaris I.E. A rectangular trust region dogleg approach for unconstrained and bound constrained nonlinear optimization.

- [98] Ya-xiang Yuan. A Review of Trust Region Algorithms for Optimization // Proceedings of the Fourth International Congress on Industrial and Applied Mathematics, 1999.
- [99] Yu W, Ortiz F. Stability analysis of PD regulation for Ball and Beam system // Proceedings of the 2005 IEEE Conference on Control Applications, 2005. P. 517–522. DOI: 10.1109/CCA.2005.1507178
- [100] Yu W. Nonlinear PD regulation for Ball and Beam system // Int. Journal of Electrical Engineering Education, 2009. Vol. 46. № 1. P. 59–73.
URL: <https://pdfs.semanticscholar.org/4da0/9fadd6604e5db0ee9e8fe8129caca425fe15.pdf>

Приложение А

Формулы матричного дифференцирования

При получении различных форм уравнений движения ключевую роль в аналитической механике играют функция Лагранжа или Рауса. В самом общем виде это скалярные функции нескольких векторных аргументов (координат, скоростей, импульсов какой-либо механической системы), которые можно записать в виде суммы квадратичной формы по скоростям, линейной функции скоростей и/или импульсов и свободного члена. Коэффициенты форм и свободный член также являются функциями одного или нескольких векторных аргументов (координат). В самом простом случае, такую функцию можно записать в виде:

$$F(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}' \cdot A_{qq}(q) \cdot \dot{q} + A_q \dot{q} + W(q), \quad A.1$$

где $q' = (q_1, \dots, q_n)$ – вектор параметров, описывающих конфигурацию системы, $A_{qq}(q)$ – квадратная симметричная матрица порядка n , элементы которой, в свою очередь, являются скалярными функциями векторного аргумента q , $W(q)$ – скалярная функция векторного аргумента q .

Для получения явной записи уравнений движения в векторно-матричной форме требуется применить к функции вида (А.1) операторы дифференцирования по каждому из векторных аргументов, что сопряжено со значительными трудностями. Аппарат векторно-матричных исчислений плохо приспособлен для дифференцирования функций векторного аргумента [2]. Несмотря на то, что существует общеизвестный набор формул векторно-матричного дифференцирования [94], для получения явного вида уравнений динамики обычно приходится обращаться к скалярной записи уравнений. После проведения определенных выкладок приходится опять возвращаться к векторно-матричной записи, так как она удобна и существенно упрощает анализ системы [26]. Поэтому возникает задача получения формул, которые позволили бы напрямую выводить явные нелинейные уравнения движения и уравнения с выделенным первым приближением в окрестности исследуемого движения, без перехода к скалярным уравнениям. Приложение А посвящено выводу этих формул.

Ещё раз заметим, что здесь речь идёт не о произвольных функциях векторных аргументов, а о скалярных функциях вида (А.1). При получении формул используются только известные операции с матрицами.

А.1. Основные определения и обозначения

Введём обозначения для векторов компонент: $x' = (x_1, \dots, x_n)$, $y' = (y_1, \dots, y_m)$, $z = (z_1, \dots, z_k)$. При выведении формул, будем опираться на следующие известные определения.

Определение А.1.1. [94] Если $f = f(x)$ – скалярная функция векторного аргумента x , то

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right), \quad \frac{\partial f}{\partial x'} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)' = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Определение А.1.2. [94] Если $y = y(x)$ – векторная функция векторного аргумента, то

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{m \times n}, \quad \frac{\partial y'}{\partial x'} = \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)' = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{n \times m}$$

(матрица Якоби) (транспонированная матрица Якоби)

Определение А.1.3. [94] Пусть A – матрица размера $m \times n$, элементы которой являются функциями скалярного параметра t , т.е. $a_{ij} = a_{ij}(t)$. Тогда производной матрицы A по параметру t будем называть матрицу

$$\frac{dA}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{da_{11}}{dt} & \dots & \frac{da_{1n}}{dt} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{da_{m1}}{dt} & \dots & \frac{da_{mn}}{dt} \end{pmatrix}.$$

Кроме этого, будем использовать следующие операции с матрицами:

Определение А.1.4. [54] Кронекеровским (или тензорным) произведением двух матриц A размера $m \times n$ и B размера $p \times q$ называется матрица $C = A \otimes B = (a_{ij} \cdot B)$ размера $mp \times nq$.

Например, символом $x \otimes E_k$, где E_k – единичная матрица размера k , будем обозначать блочную матрицу размера $nk \times k$ вида

$$\begin{pmatrix} x_1 \cdot E_k \\ \vdots \\ x_n \cdot E_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & 0 \\ 0 & & x_1 \\ & \vdots & \\ x_n & \cdots & 0 \\ 0 & & x_n \end{pmatrix},$$

символом $x' \otimes E_k$ – блочную матрицу размера $k \times nk$ вида

$$\begin{pmatrix} x_1 \cdot E_k & \cdots & x_n \cdot E_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & 0 & \cdots & x_n & \cdots & 0 \\ 0 & & x_1 & & 0 & & x_n \end{pmatrix},$$

символом $E_k \otimes x$ будем обозначать блочную матрицу размера $nk \times k$ вида

$$\begin{pmatrix} x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_n & 0 & & 0 \\ & x_1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & x_n & & \\ 0 & 0 & & x_1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & & x_n \end{pmatrix};$$

символом $E_k \otimes x'$ обозначается блочная матрица размера $k \times nk$ вида

$$\begin{pmatrix} x' & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x' & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$$

Обратим внимание, что

$$(x \otimes E_k)' = x' \otimes E_k, \quad (E_k \otimes x)' = E_k \otimes x'.$$

Везде далее символами $A^{(j)}$, $A_{(i)}$, $j = \overline{1, n}$, $i = \overline{1, m}$ – будут обозначены столбцы и строки матрицы A , соответственно.

Определение А.1.5. [2] Пусть A – произвольная матрица. Векторизацией A назовем вектор A^\uparrow размерности $tn \times 1$, составленный из столбцов матрицы A , записанных один под другим:

$$A^\uparrow = \begin{pmatrix} A^{(1)} \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{pmatrix}.$$

Пусть A прямоугольная матрица, элементы которой зависят от вектора x . Тогда введём следующие обозначения для блочных матриц:

$$A^x = \begin{pmatrix} \frac{\partial A}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial A}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \quad A^{x'} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial A}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что

$$(A^x)' = \begin{pmatrix} \frac{\partial A'}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial A'}{\partial x_n} \end{pmatrix} = (A')^{x'}, \quad (A^{x'})' = \begin{pmatrix} \frac{\partial A'}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial A'}{\partial x_n} \end{pmatrix} = (A')^x.$$

А.2. Дифференцирование скалярной функции по векторному аргументу

Утверждение А.2.1. Если скалярная функция $f = f(x)$ задана формулой $f = D'x$, где D – столбец размерности n , с элементами d_i , $i = \overline{1, n}$, не зависящими от x , то

$$\frac{\partial f}{\partial x} = D', \quad \frac{\partial f}{\partial x'} = D \quad \text{А.2}$$

Доказательство. По определению А.1.1 производной скалярной функции по столбцу, имеем:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{i=1}^n d_i x_i \right) = \begin{pmatrix} d_1 & \cdots & d_n \end{pmatrix} = D'.$$

Поскольку f – скалярная функция, то $\frac{\partial f}{\partial x'} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)' = D$. \square

Утверждение А.2.2. Если скалярная функция $f = f(x, y)$ задана формулой $f = D'y$, где D – столбец размерности m , с элементами $d_i = d_i(x)$, $i = \overline{1, m}$, то

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y' \frac{\partial D}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial x'} = \left(\frac{\partial D}{\partial x} \right)' y. \quad \text{A.3}$$

Доказательство. По определению А.1.1 имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \left(\sum_{i=1}^m \frac{\partial d_i}{\partial x_1} y_i \quad \cdots \quad \sum_{i=1}^m \frac{\partial d_i}{\partial x_n} y_i \right) = \\ &= \left(y_1 \quad \cdots \quad y_m \right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial d_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial d_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial d_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial d_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} = y' \frac{\partial D}{\partial x}. \\ \frac{\partial f}{\partial x'} &= \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)' = \left(\frac{\partial D}{\partial x} \right)' y. \end{aligned}$$

□

Утверждение А.2.3. [94] Если $f = x'Ax$ – скалярная функция, где A – квадратная матрица порядка n с элементами, не зависящими от x , то

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x'(A + A'), \quad \frac{\partial f}{\partial x'} = (A + A')x. \quad \text{A.4}$$

В частности, если A – симметричная матрица, то

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x'A, \quad \frac{\partial f}{\partial x'} = 2Ax.$$

Утверждение А.2.4. [94] Если скалярная функция $f = f(x, y)$ задана формулой $f = y'Ax$, где A – матрица размера $m \times n$, элементы которой не зависят от x и y , то

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y'A, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x'A', \quad \text{A.5}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y'A, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x'A', \quad \frac{\partial f}{\partial x'} = A'y, \quad \frac{\partial f}{\partial y'} = Ax. \quad \text{A.6}$$

Утверждение А.2.5. Если скалярная функция $f = f(x, y, z)$ задана формулой $f = y'A(z)x$, где A – матрица размера $m \times n$, элементы которой являются функциями вектора z , т.е. $a_{ij} = a_{ij}(z)$, то

$$\frac{\partial f}{\partial z'} = (E_k \otimes y') \cdot A^{z'} \cdot x. \quad \text{A.7}$$

Доказательство. По определению,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z'} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial z_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial z_k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' \cdot \frac{\partial A}{\partial z_1} \cdot x \\ \vdots \\ y' \cdot \frac{\partial A}{\partial z_k} \cdot x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & y' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial A}{\partial z_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial A}{\partial z_k} \end{pmatrix} \cdot x = \\ &= (E_k \otimes y') \cdot A^{z'} \cdot x. \end{aligned}$$

□

А.3. Дифференцирование векторной функции по векторному аргументу

Утверждение А.3.1. [94] Если векторная функция $y(x)$ задана формулой $y = A \cdot x$, где A – матрица размера $m \times n$, не зависящая от x , то

$$\frac{\partial y}{\partial x} = A, \quad \frac{\partial y'}{\partial x'} = A'. \quad \text{А.8}$$

Утверждение А.3.2. Если векторная функция $z(x, y)$ задана формулой $z = A(x) \cdot y$, где A – матрица размера $k \times m$, элементы которой являются функциями вектора x , т.е. $a_{ij} = a_{ij}(x)$, то

$$\frac{\partial z}{\partial x} = A^x \cdot (E_n \otimes y), \quad \frac{\partial z'}{\partial x'} = (E_n \otimes y) \cdot (A')^{x'}. \quad \text{А.9}$$

Доказательство. По определению производной векторной функции по вектору,

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^m \frac{\partial a_{1j}}{\partial x_1} y_j & \cdots & \sum_{j=1}^m \frac{\partial a_{1j}}{\partial x_n} y_j \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \sum_{j=1}^m \frac{\partial a_{kj}}{\partial x_1} y_j & \cdots & \sum_{j=1}^m \frac{\partial a_{kj}}{\partial x_n} y_j \end{pmatrix} = \\ &= \left(\frac{\partial A^{(1)}}{\partial x_1} y_1 + \cdots + \frac{\partial A^{(m)}}{\partial x_1} y_m \quad \cdots \quad \frac{\partial A^{(1)}}{\partial x_n} y_1 + \cdots + \frac{\partial A^{(m)}}{\partial x_n} y_m \right)_{k \times n}, \quad \text{А.10} \end{aligned}$$

(А.10) можно переписать в виде

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial A}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial A}{\partial x_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & y \end{pmatrix} = A^x \cdot (E_n \otimes y).$$

$$\frac{\partial z'}{\partial x'} = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)' = (E_n \otimes y)' \cdot (A^x)' = (E_n \otimes y') \cdot (A')'.$$

□

Утверждение А.3.3. [94] Если векторная функция $z(x, y)$ задана формулой $z = A \cdot y$, где A – матрица размера $k \times m$, элементы которой не зависят от x , а y – векторная функция вектора x , то

$$\frac{\partial z}{\partial x} = A \frac{\partial y}{\partial x}. \quad \text{A.11}$$

В частности, если t – скалярный параметр, $y = y(t)$, то

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= A \frac{\partial y}{\partial x} \\ \frac{dz}{dt} &= A \frac{dy}{dt}. \end{aligned} \quad \text{A.12}$$

Утверждение А.3.4. Если векторная функция $z = z(x, y)$ задана формулой $z = B(x) \cdot y$, где B – матрица размера $k \times m$ с элементами $b_{ij}(x)$, $i = \overline{1, k}$, $j = \overline{1, m}$, а $y = y(x)$ – векторная функция, также зависящая от x , то

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (y^T \otimes E_k) \cdot (B^\uparrow)^x + B \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right). \quad \text{A.13}$$

Доказательство. По определению А.1.2,

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^m b_{1j}(x)y_j(x) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m b_{kj}(x)y_j(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \sum_{j=1}^m b_{1j}(x)y_j(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \sum_{j=1}^m b_{1j}(x)y_j(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial \sum_{j=1}^m b_{kj}(x)y_j(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \sum_{j=1}^m b_{kj}(x)y_j(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^m \frac{\partial b_{1j}}{\partial x_1} y_j & \cdots & \sum_{j=1}^m \frac{\partial b_{1j}}{\partial x_n} y_j \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \sum_{j=1}^m \frac{\partial b_{kj}}{\partial x_1} y_j & \cdots & \sum_{j=1}^m \frac{\partial b_{kj}}{\partial x_n} y_j \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^m b_{1j} \frac{\partial y_j}{\partial x_1} & \cdots & \sum_{j=1}^m b_{1j} \frac{\partial y_j}{\partial x_n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \sum_{j=1}^m b_{kj} \frac{\partial y_j}{\partial x_1} & \cdots & \sum_{j=1}^m b_{kj} \frac{\partial y_j}{\partial x_n} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Рассмотрим сначала первую матрицу. Если обозначить столбцы матрицы B символами $B^{(j)}$, $j = \overline{1, m}$, ее можно записать в виде

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial B^{(j)}}{\partial x_1} y_j \quad \cdots \quad \sum_{j=1}^m \frac{\partial B^{(j)}}{\partial x_n} y_j \right) = \\ &= \left(\sum_{j=1}^m y_j E_k \cdot \frac{\partial B^{(j)}}{\partial x_1} \quad \cdots \quad \sum_{j=1}^m y_j E_k \cdot \frac{\partial B^{(j)}}{\partial x_n} \right) = \end{aligned}$$

что в свою очередь можно представить как произведение блочных матриц

$$= \begin{pmatrix} y_1 E_k & \cdots & y_m E_k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial B^{(1)}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial B^{(1)}}{\partial x_n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial B^{(m)}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial B^{(m)}}{\partial x_n} \end{pmatrix} =$$

Наконец, воспользовавшись определениями, А.1.4 и А.1.5, представим последнее выражение в виде

$$= (y' \otimes E_k) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial B^\dagger}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial B^\dagger}{\partial x_n} \end{pmatrix} = (y' \otimes E_k) \cdot (B^\dagger)^x. \quad A.14$$

Для второй матрицы сразу получаем:

$$\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^m b_{1j} \frac{\partial y_j}{\partial x_1} & \cdots & \sum_{j=1}^m b_{1j} \frac{\partial y_j}{\partial x_n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \sum_{j=1}^m b_{kj} \frac{\partial y_j}{\partial x_1} & \cdots & \sum_{j=1}^m b_{kj} \frac{\partial y_j}{\partial x_n} \end{pmatrix} = B \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right). \quad A.15$$

Суммируя (А.14) и (А.15), получаем требуемое утверждение.

□

А.4. Дифференцирование векторной и матричной функций по параметру

Утверждение А.4.1. Если D – столбец размерности l с элементами $d_i(x(t))$,

$i = \overline{1, l}$, то

$$\frac{dD}{dt} = \frac{\partial D}{\partial x} \dot{x}. \quad A.16$$

Доказательство. По определению А.1.3 дифференцирования матрицы по параметру,

$$\begin{aligned} \frac{dD}{dt} &= \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} d_1(x) \\ \vdots \\ \frac{d}{dt} d_l(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \frac{\partial d_1(x)}{\partial x_i} \cdot \dot{x}_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial d_l(x)}{\partial x_i} \cdot \dot{x}_i \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial d_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial d_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial d_l}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial d_l}{\partial x_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \frac{\partial D}{\partial x} \dot{x}. \end{aligned}$$

□

Замечание А.4.1. Очевидно, что если D – столбец, размерности l с элементами $d_i(x(t), y(t))$, то

$$\frac{dD}{dt} = \frac{\partial D}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial D}{\partial y} \dot{y}. \quad \text{A.17}$$

Утверждение А.4.2. Если $B = (b_{ij}(x(t)))$ – матрица размера $m \times k$ с элементами, зависящими от вектора $x(t)$, то

$$\frac{dB}{dt} = B^x \cdot (\dot{x} \otimes E_k) = (\dot{x}' \otimes E_m) \cdot B^x'. \quad \text{A.18}$$

Доказательство. По определению, А.1.3,

$$\frac{dB}{dt} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \frac{\partial b_{11}(x)}{\partial x_i} \cdot \dot{x}_i & \cdots & \sum_{i=1}^n \frac{\partial b_{1k}(x)}{\partial x_i} \cdot \dot{x}_i \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial b_{m1}(x)}{\partial x_i} \cdot \dot{x}_i & \cdots & \sum_{i=1}^n \frac{\partial b_{mk}(x)}{\partial x_i} \cdot \dot{x}_i \end{pmatrix}. \quad \text{A.19}$$

Обозначим столбцы матрицы B символом $B^{(j)}$, $j = 1 \dots k$. Тогда (А.19) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial B^{(1)}}{\partial x_1} \cdot \dot{x}_1 + \cdots + \frac{\partial B^{(1)}}{\partial x_n} \cdot \dot{x}_n \quad \cdots \quad \frac{\partial B^{(k)}}{\partial x_1} \cdot \dot{x}_1 + \cdots + \frac{\partial B^{(k)}}{\partial x_n} \cdot \dot{x}_n \right) = \\ & = \begin{pmatrix} \frac{\partial B^{(1)}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial B^{(k)}}{\partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial B^{(1)}}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial B^{(k)}}{\partial x_n} \end{pmatrix} \cdot \dot{x}_1 + \cdots + \begin{pmatrix} \frac{\partial B^{(1)}}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial B^{(k)}}{\partial x_n} \end{pmatrix} \cdot \dot{x}_n = \\ & = \frac{\partial B}{\partial x_1} \cdot \dot{x}_1 + \cdots + \frac{\partial B}{\partial x_n} \cdot \dot{x}_n. \end{aligned} \quad \text{A.20}$$

Теперь заметим, что умножение матрицы на скаляр можно представить в виде умножения матриц:

$$\frac{\partial B}{\partial x_i} \cdot \dot{x}_i = \begin{pmatrix} \dot{x}_i & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \dot{x}_i \end{pmatrix} \cdot \frac{\partial B}{\partial x_i} = (E_m \cdot \dot{x}_i) \cdot \frac{\partial B}{\partial x_i},$$

или

$$\frac{\partial B}{\partial x_i} \cdot \dot{x}_i = \frac{\partial B}{\partial x_i} \cdot \begin{pmatrix} \dot{x}_i & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \dot{x}_i \end{pmatrix} = \frac{\partial B}{\partial x_i} \cdot (E_k \cdot \dot{x}_i).$$

Тогда (А.20) можно записать в виде:

$$(E_m \cdot \dot{x}_1) \cdot \frac{\partial B}{\partial x_1} + \cdots + (E_m \cdot \dot{x}_n) \cdot \frac{\partial B}{\partial x_n}, \quad \text{A.21}$$

или

$$\frac{\partial B}{\partial x_1} \cdot (E_k \cdot \dot{x}_1) + \cdots + \frac{\partial B}{\partial x_n} \cdot (E_k \cdot \dot{x}_n). \quad \text{A.22}$$

Наконец, в соответствии с определением А.1.4, выражение (А.22) можно записать как

$$\left(\frac{\partial B}{\partial x_1} \quad \cdots \quad \frac{\partial B}{\partial x_n} \right) \cdot \begin{pmatrix} E_k \cdot \dot{x}_1 \\ \vdots \\ E_k \cdot \dot{x}_n \end{pmatrix} = B^x \cdot (\dot{x} \otimes E_k), \quad \text{A.23}$$

а выражение (А.21) как

$$\begin{pmatrix} E_m \cdot \dot{x}_1 & \cdots & E_m \cdot \dot{x}_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial B}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial B}{\partial x_n} \end{pmatrix} = (\dot{x}^T \otimes E_m) \cdot B^{x'}. \quad \text{A.24}$$

□

Из предложения А.4.2 можно сформулировать очевидное

Следствие А.4.1. Если $B = (b_{ij}(x(t), y(t)))$ – матрица размера $l \times k$, то

$$\frac{dB}{dt} = (\dot{x}' \otimes E_l) \cdot B^{x'} + (\dot{y}' \otimes E_l) \cdot B^{y'}. \quad \text{A.25}$$

А.5. Формулы преобразования для приведения подобных

Теперь докажем несколько полезных соотношений, которые понадобятся для приведения подобных членов в векторно-матричных уравнениях движения.

Утверждение А.5.1. Пусть A – функциональная матрица размера $m \times l$, элементы которой зависят от вектора $\alpha' = (q_1 \quad \cdots \quad q_k)$. Пусть также $x' = (x_1 \quad \cdots \quad x_k)$ и $c' = (c_1 \quad \cdots \quad c_l)$ – векторы размеров k и l соответственно. Тогда

$$(x' \otimes E_m) \cdot A^{\alpha'} \cdot c = (E_m \otimes c') \cdot \frac{\partial A^\dagger}{\partial \alpha} \cdot x \dots \quad \text{A.26}$$

Доказательство.

$$(x' \otimes E_m) \cdot A^{\alpha'} \cdot c = \begin{pmatrix} x_1 E_m & \cdots & x_k E_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial A}{\partial q_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial A}{\partial q_k} \end{pmatrix} \cdot c =$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & 0 & & x_k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & x_1 & & 0 & \cdots & x_k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \left\| \frac{\partial a_{11}}{\partial q_1} \cdots \frac{\partial a_{1l}}{\partial q_1} \right\| \\ \vdots \\ \left\| \frac{\partial a_{m1}}{\partial q_1} \cdots \frac{\partial a_{ml}}{\partial q_1} \right\| \\ \vdots \\ \left\| \frac{\partial a_{11}}{\partial q_k} \cdots \frac{\partial a_{1l}}{\partial q_k} \right\| \\ \vdots \\ \left\| \frac{\partial a_{m1}}{\partial q_k} \cdots \frac{\partial a_{ml}}{\partial q_k} \right\| \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_l \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & 0 & & x_k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \underbrace{x_1}_{m} & & 0 & \cdots & x_k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \left\| \sum_{i=1}^l c_i \frac{\partial a_{1i}}{\partial q_1} \right\| \\ \vdots \\ \left\| \sum_{i=1}^l c_i \frac{\partial a_{mi}}{\partial q_1} \right\| \\ \vdots \\ \left\| \sum_{i=1}^l c_i \frac{\partial a_{1i}}{\partial q_k} \right\| \\ \vdots \\ \left\| \sum_{i=1}^l c_i \frac{\partial a_{mi}}{\partial q_k} \right\| \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^k x_j c_i \frac{\partial a_{1i}}{\partial q_j} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^k x_j c_i \frac{\partial a_{mi}}{\partial q_j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^l c_i \frac{\partial a_{1i}}{\partial q_1} & \cdots & \sum_{i=1}^l c_i \frac{\partial a_{1i}}{\partial q_k} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \sum_{i=1}^l c_i \frac{\partial a_{mi}}{\partial q_1} & \cdots & \sum_{i=1}^l c_i \frac{\partial a_{mi}}{\partial q_k} \end{pmatrix} \cdot x = \\
&= \begin{pmatrix} c' \frac{\partial A'_{(1)}}{\partial q_1} & \cdots & c' \frac{\partial A'_{(1)}}{\partial q_k} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ c' \frac{\partial A'_{(m)}}{\partial q_1} & \cdots & c' \frac{\partial A'_{(m)}}{\partial q_k} \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} c' & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \underbrace{c'}_k \end{pmatrix} \cdot \frac{\partial A^\dagger}{\partial \alpha} \cdot x = (E_k \otimes c') \cdot \frac{\partial A^\dagger}{\partial \alpha} \cdot x.
\end{aligned}$$

□

Из предложения А.5.1 сразу вытекает

Следствие А.5.1. Пусть A – функциональная матрица размера $k \times l$, элементы которой зависят от вектора $\alpha' = (q_1, \dots, q_s)$, B – функциональная матрица размера $s \times t$, элементы которой также зависят от вектора α , векторы $y' = (y_1, \dots, y_m)$ и $c' = (c_1, \dots, c_l)$ – размеров m и l соответственно. Тогда

$$(y' B' \otimes E_k) \cdot A^{\alpha'} \cdot c = (E_k \otimes c') \cdot \frac{\partial A^\dagger}{\partial \alpha} \cdot B \cdot y. \quad \text{A.27}$$

Утверждение А.5.2. Пусть A – функциональная матрица размера $t \times l$, элементы которой зависят от вектора $\alpha' = (q_1, \dots, q_k)$, а $y' = (y_1, \dots, y_m)$ и $c' = (c_1, \dots, c_l)$ – векторы размеров t и l соответственно. Тогда

$$(E_k \otimes y') \cdot A^{\alpha'} \cdot c = (E_k \otimes c') \cdot (A')^{\alpha'} \cdot y. \quad \text{A.28}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} (E_k \otimes y') \cdot A^{\alpha'} \cdot c &= \begin{pmatrix} y' & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & y' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial A}{\partial q_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial A}{\partial q_k} \end{pmatrix} \cdot c = \\ &= \begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_m & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & y_1 & \cdots & y_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \left\| \begin{array}{ccc} \frac{\partial a_{11}}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial a_{1l}}{\partial q_1} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial a_{m1}}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial a_{ml}}{\partial q_1} \end{array} \right\| \\ \vdots \\ \left\| \begin{array}{ccc} \frac{\partial a_{11}}{\partial q_k} & \cdots & \frac{\partial a_{1l}}{\partial q_k} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial a_{m1}}{\partial q_k} & \cdots & \frac{\partial a_{ml}}{\partial q_k} \end{array} \right\| \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_l \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_m & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & y_1 & \cdots & y_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \left\| \begin{array}{c} \sum_{i=1}^l c_i \frac{\partial a_{1i}}{\partial q_1} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^l c_i \frac{\partial a_{mi}}{\partial q_1} \end{array} \right\| \\ \vdots \\ \left\| \begin{array}{c} \sum_{i=1}^l c_i \frac{\partial a_{1i}}{\partial q_k} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^l c_i \frac{\partial a_{mi}}{\partial q_k} \end{array} \right\| \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} y_1 \sum_{i=1}^l c_i \frac{\partial a_{1i}}{\partial q_1} + \cdots + y_m \sum_{i=1}^l c_i \frac{\partial a_{mi}}{\partial q_1} \\ \vdots \\ y_1 \sum_{i=1}^l c_i \frac{\partial a_{1i}}{\partial q_k} + \cdots + y_m \sum_{i=1}^l c_i \frac{\partial a_{mi}}{\partial q_k} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Последнюю матрицу можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^l c_i \frac{\partial a_{1i}}{\partial q_1} & \cdots & \sum_{i=1}^l c_i \frac{\partial a_{mi}}{\partial q_1} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \sum_{i=1}^l c_i \frac{\partial a_{1i}}{\partial q_k} & \cdots & \sum_{i=1}^l c_i \frac{\partial a_{mi}}{\partial q_k} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c' \cdot \frac{\partial A'_{(1)}}{\partial q_1} & \cdots & c' \cdot \frac{\partial A'_{(m)}}{\partial q_1} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ c' \cdot \frac{\partial A'_{(1)}}{\partial q_k} & \cdots & c' \cdot \frac{\partial A'_{(m)}}{\partial q_k} \end{pmatrix} \cdot y,$$

Распишем:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} c' \cdot \frac{\partial A'_{(1)}}{\partial q_1} & \cdots & c' \cdot \frac{\partial A'_{(m)}}{\partial q_1} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ c' \cdot \frac{\partial A'_{(1)}}{\partial q_k} & \cdots & c' \cdot \frac{\partial A'_{(m)}}{\partial q_k} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} c' & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & c' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial A'_{(1)}}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial A'_{(m)}}{\partial q_1} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial A'_{(1)}}{\partial q_k} & \cdots & \frac{\partial A'_{(m)}}{\partial q_k} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} c' & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & c' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial q_1} \begin{pmatrix} A'_{(1)} & \cdots & A'_{(m)} \end{pmatrix} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial q_k} \begin{pmatrix} A'_{(1)} & \cdots & A'_{(m)} \end{pmatrix} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Теперь заметим, что

$$A = \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(m)} \end{pmatrix} \implies A' = \begin{pmatrix} A'_{(1)} & \cdots & A'_{(m)} \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} c' & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & c' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial q_1} \begin{pmatrix} A'_{(1)} & \cdots & A'_{(m)} \end{pmatrix} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial q_k} \begin{pmatrix} A'_{(1)} & \cdots & A'_{(m)} \end{pmatrix} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} c' & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & c' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial A'}{\partial q_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial A'}{\partial q_k} \end{pmatrix} = \\ &= (E_k \otimes c') \cdot (A')^{\alpha'}. \end{aligned}$$

Окончательно имеем

$$(E_k \otimes y') \cdot A^{\alpha'} \cdot c = \begin{pmatrix} c' \cdot \frac{\partial A'_{(1)}}{\partial q_1} & \cdots & c' \cdot \frac{\partial A'_{(m)}}{\partial q_1} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ c' \cdot \frac{\partial A'_{(1)}}{\partial q_k} & \cdots & c' \cdot \frac{\partial A'_{(m)}}{\partial q_k} \end{pmatrix} \cdot y = (E_k \otimes c') \cdot (A')^{\alpha'} \cdot y,$$

что и доказывает утверждение.

□

Из предложения А.5.2 очевидно выводится

Следствие А.5.2. Если A – симметричная матрица, то

$$(E_k \otimes y') \cdot A^{\alpha'} \cdot c = (E_k \otimes c') \cdot A^{\alpha'} \cdot y. \quad \text{A.29}$$

Утверждение А.5.3. Пусть A функциональная матрица размера $t \times n$, элементы которой зависят от вектора $z' = (z_1, \dots, z_k)$, c и p – постоянные векторы столбцы размеров t и n соответственно. Тогда

$$(E_k \otimes c') \cdot A^{z'} \cdot p = \left(\frac{\partial (c'Ap)}{\partial z} \right)' \quad \text{A.30}$$

Доказательство.

$$(E_k \otimes c') \cdot A^{z'} \cdot p = \begin{pmatrix} c' & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & c' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial A}{\partial z_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial A}{\partial z_k} \end{pmatrix} \cdot p = \begin{pmatrix} \frac{\partial (c'Ap)}{\partial z_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial (c'Ap)}{\partial z_k} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial (c'Ap)}{\partial z} \right)'.$$

□

Утверждение А.5.4. Пусть D функциональный столбец размерности l , элементы которого зависят от вектора $z' = (z_1, \dots, z_k)$, c – постоянный вектор столбец размерности l . Тогда

$$\left(\frac{\partial D}{\partial z} \right)' \cdot c = \left(\frac{\partial (c'D)}{\partial z} \right)' \quad \text{A.31}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial D}{\partial z} \right)' \cdot c &= \begin{pmatrix} \frac{\partial d_1}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial d_1}{\partial z_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial d_1}{\partial z_k} & \dots & \frac{\partial d_1}{\partial z_k} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \frac{\partial d_1}{\partial z_1} + \dots + c_l \frac{\partial d_1}{\partial z_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1 \frac{\partial d_1}{\partial z_k} + \dots + c_l \frac{\partial d_1}{\partial z_k} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial (c'D)}{\partial z_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial (c'D)}{\partial z_k} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial (c'D)}{\partial z} \right)' \end{aligned}$$

□

А.6. Выделение первого приближения векторных и матричных функций

Предположим, что все элементы матриц являются аналитическими функциями и раскладываются в ряд в окрестности некоторой точки. Посмотрим,

как записать в векторно-матричном виде первое приближение векторной функции. Эти формулы нам понадобятся в дальнейшем при выделении первого приближения в уравнениях возмущенного движения в векторно-матричной форме. Начнем с самого простого случая.

Утверждение А.6.1. Пусть $D(\alpha, \beta)$ – вектор-столбец, зависящий от элементов векторов α и β размеров n и m соответственно: $\alpha' = (q_1, \dots, q_n)$, $\beta' = (q_{n+1}, \dots, q_{n+m})$. Пусть также элементы вектора $D(\alpha, \beta)$ – аналитические функции в окрестности точки (α_0, β_0) .

$$D(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} d_1(\alpha, \beta) \\ \vdots \\ d_k(\alpha, \beta) \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$D = D(\alpha_0, \beta_0) + \left(\frac{\partial D}{\partial \alpha} \right)_0 \cdot x + \left(\frac{\partial D}{\partial \beta} \right)_0 \cdot y + \dots \quad \text{A.32}$$

где $\alpha = \alpha_0 + x$, $\beta = \beta_0 + y$, а нижним индексом (0) обозначено, что элементы матрицы вычислены в точке (α_0, β_0) .

Доказательство. Формула эта практически очевидна и сразу следует из свойств матриц. Действительно, раскладывая каждый элемент вектора D в ряд в окрестности точки (α_0, β_0) будем иметь

$$\begin{aligned} D(\alpha, \beta) &= D(\alpha_0, \beta_0) + \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial d_1}{\partial q_1} \right)_0 x_1 + \dots + \left(\frac{\partial d_1}{\partial q_n} \right)_0 x_n \\ \vdots \\ \left(\frac{\partial d_k}{\partial q_1} \right)_0 x_1 + \dots + \left(\frac{\partial d_k}{\partial q_n} \right)_0 x_n \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial d_1}{\partial q_{n+1}} \right)_0 y_1 + \dots + \left(\frac{\partial d_1}{\partial q_{n+m}} \right)_0 y_m \\ \vdots \\ \left(\frac{\partial d_k}{\partial q_{n+1}} \right)_0 y_1 + \dots + \left(\frac{\partial d_k}{\partial q_{n+m}} \right)_0 y_m \end{pmatrix} + \dots = D(\alpha_0, \beta_0) + \\ &+ \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial d_1}{\partial q_1} \right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial d_1}{\partial q_n} \right)_0 \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \left(\frac{\partial d_k}{\partial q_1} \right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial d_k}{\partial q_n} \right)_0 \end{pmatrix}_0 \cdot x + \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial d_1}{\partial q_{n+1}} \right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial d_1}{\partial q_{n+m}} \right)_0 \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \left(\frac{\partial d_k}{\partial q_{n+1}} \right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial d_k}{\partial q_{n+m}} \right)_0 \end{pmatrix}_0 \cdot y + \dots = \\ &= D(\alpha_0, \beta_0) + \left(\frac{\partial D}{\partial \alpha} \right)_0 \cdot x + \left(\frac{\partial D}{\partial \beta} \right)_0 \cdot y + \dots \end{aligned}$$

□

Теперь усложним выражение для вектора. Пусть B – прямоугольная функциональная матрица размера $l \times k$, элементы которой зависят от элементов векторов α и β и являются аналитическими функциями в окрестности точки (α_0, β_0) . Пусть векторная функция имеет вид $Q(\alpha, \beta) = B(\alpha, \beta) \cdot D(\alpha, \beta)$. Как легко убедиться, после перемножения всех элементов мы снова получим вектор-столбец размерности l . Выделим первое приближение вектора $Q(\alpha, \beta)$ в окрестности точки (α_0, β_0) и запишем его в векторно-матричном виде, выяснив, каким образом коэффициенты разложения зависят от матрицы B и вектора D . Для краткости будем обозначать $B(0) = B(\alpha_0, \beta_0)$, $D(0) = D(\alpha_0, \beta_0)$ и т.д. Тогда справедливо

Утверждение А.6.2.

$$B \cdot D = B(0) \cdot D(0) + \left[B^\alpha(0) \cdot (E_n \otimes D(0)) + B(0) \cdot \left(\frac{\partial D}{\partial \alpha} \right)_0 \right] \cdot x + \\ + \left(B^\beta(0) \cdot (E_m \otimes D(0)) + B(0) \cdot \left(\frac{\partial D}{\partial \beta} \right)_0 \right) \cdot y + \dots, \quad \text{А.33}$$

где введено следующее обозначение блочных матриц:

$$B^\alpha = \left(\frac{\partial B}{\partial q_1} \quad \dots \quad \frac{\partial B}{\partial q_n} \right), \quad B^\beta = \left(\frac{\partial B}{\partial q_{n+1}} \quad \dots \quad \frac{\partial B}{\partial q_{n+m}} \right).$$

Доказательство.

$$B \cdot D = \begin{pmatrix} b_{11}d_1 + \dots + b_{1k}d_k \\ \vdots \\ b_{l1}d_1 + \dots + b_{lk}d_k \end{pmatrix}.$$

Раскладывая каждый элемент вектора в ряд и выделяя первое приближение, будем иметь:

$$B \cdot D = B(0) \cdot D(0) + \\ + \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^k \left(\left(\frac{\partial b_{1j}}{\partial q_1} \right)_0 x_1 + \dots + \left(\frac{\partial b_{1j}}{\partial q_n} \right)_0 x_n \right) d_j(0) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^k \left(\left(\frac{\partial b_{lj}}{\partial q_1} \right)_0 x_1 + \dots + \left(\frac{\partial b_{lj}}{\partial q_n} \right)_0 x_n \right) d_j(0) \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^k \left(\left(\frac{\partial b_{1j}}{\partial q_{n+1}} \right)_0 y_1 + \dots + \left(\frac{\partial b_{1j}}{\partial q_{n+m}} \right)_0 y_m \right) d_j(0) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^k \left(\left(\frac{\partial b_{lj}}{\partial q_{n+1}} \right)_0 y_1 + \dots + \left(\frac{\partial b_{lj}}{\partial q_{n+m}} \right)_0 y_m \right) d_j(0) \end{pmatrix} +$$

$$\begin{aligned}
& + \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^k b_{1j}(0) \left(\left(\frac{\partial d_j}{\partial q_1} \right)_0 x_1 + \cdots + \left(\frac{\partial d_j}{\partial q_n} \right)_0 x_n \right) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^k b_{lj}(0) \left(\left(\frac{\partial d_j}{\partial q_1} \right)_0 x_1 + \cdots + \left(\frac{\partial d_j}{\partial q_n} \right)_0 x_n \right) \end{pmatrix} + \\
& + \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^k b_{1j}(0) \left(\left(\frac{\partial d_j}{\partial q_{n+1}} \right)_0 y_1 + \cdots + \left(\frac{\partial d_j}{\partial q_{n+m}} \right)_0 y_m \right) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^k b_{lj}(0) \left(\left(\frac{\partial d_j}{\partial q_{n+1}} \right)_0 y_1 + \cdots + \left(\frac{\partial d_j}{\partial q_{n+m}} \right)_0 y_{n+m} \right) \end{pmatrix} + \dots
\end{aligned}$$

Отметим еще раз, что все частные производные вычислены в точке (α_0, β_0) .

Теперь перегруппируем члены так, чтобы выделить матрицы коэффициентов при векторах x и y .

$$\begin{aligned}
& B \cdot D = B(0) \cdot D(0) + \\
& + \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^k \left(\frac{\partial b_{1j}}{\partial q_1} \right)_0 d_j(0) & \cdots & \sum_{j=1}^k \left(\frac{\partial b_{1j}}{\partial q_n} \right)_0 d_j(0) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \sum_{j=1}^k \left(\frac{\partial b_{lj}}{\partial q_1} \right)_0 d_j(0) & \cdots & \sum_{j=1}^k \left(\frac{\partial b_{lj}}{\partial q_n} \right)_0 d_j(0) \end{pmatrix}_0 \cdot x + \\
& + \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^k \left(\frac{\partial b_{1j}}{\partial q_{n+1}} \right)_0 d_j(0) & \cdots & \sum_{j=1}^k \left(\frac{\partial b_{1j}}{\partial q_{n+m}} \right)_0 d_j(0) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \sum_{j=1}^k \left(\frac{\partial b_{lj}}{\partial q_{n+1}} \right)_0 d_j(0) & \cdots & \sum_{j=1}^k \left(\frac{\partial b_{lj}}{\partial q_{n+m}} \right)_0 d_j(0) \end{pmatrix}_0 \cdot y + \\
& + \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^k b_{j1}(0) \left(\frac{\partial d_j}{\partial q_1} \right)_0 & \cdots & \sum_{j=1}^k b_{1j}(0) \left(\frac{\partial d_j}{\partial q_n} \right)_0 \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \sum_{j=1}^k b_{lj}(0) \left(\frac{\partial d_j}{\partial q_1} \right)_0 & \cdots & \sum_{j=1}^k b_{lj}(0) \left(\frac{\partial d_j}{\partial q_n} \right)_0 \end{pmatrix}_0 \cdot x + \\
& + \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^k b_{1j}(0) \left(\frac{\partial d_j}{\partial q_{n+1}} \right)_0 & \cdots & \sum_{j=1}^k b_{1j}(0) \left(\frac{\partial d_j}{\partial q_n} \right)_0 \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \sum_{j=1}^k b_{lj}(0) \left(\frac{\partial d_j}{\partial q_{n+1}} \right)_0 & \cdots & \sum_{j=1}^k b_{lj}(0) \left(\frac{\partial d_j}{\partial q_{n+m}} \right)_0 \end{pmatrix}_0 \cdot y + \dots
\end{aligned}$$

Теперь остается записать в компактной форме матрицы коэффициентов при линейных членах.

$$\begin{aligned}
& B \cdot D = B(0) \cdot D(0) + \\
& + \left(\frac{\partial B}{\partial q_1} \cdot D \cdots \frac{\partial B}{\partial q_n} \cdot D \right)_0 \cdot x + \left(\frac{\partial B}{\partial q_{n+1}} \cdot D \cdots \frac{\partial B}{\partial q_{n+m}} \cdot D \right)_0 \cdot y + \\
& + B(0) \cdot \left(\frac{\partial D}{\partial \alpha} \right)_0 \cdot x + B(0) \cdot \left(\frac{\partial D}{\partial \beta} \right)_0 \cdot y + \\
& + \dots = B(0) \cdot D(0) + \\
& + B^\alpha(0) \cdot (E_k \otimes D(0)) \cdot x + B^\beta(0) \cdot (E_l \otimes D(0)) \cdot y + \\
& + B(0) \cdot \left(\frac{\partial D}{\partial \alpha} \right)_0 \cdot x + B(0) \cdot \left(\frac{\partial D}{\partial \beta} \right)_0 \cdot y + \dots = \\
& = B(0) \cdot \left(\frac{\partial W}{\partial \alpha} \right)'_0 + \left[B^\alpha(0) (E_k \otimes D(0)) + B(0) \cdot \left(\frac{\partial D}{\partial \alpha} \right)_0 \right] \cdot x + \\
& + \left(B^\beta(0) (E_l \otimes D(0)) + B(0) \cdot \left(\frac{\partial D}{\partial \beta} \right)_0 \right) \cdot y + \dots
\end{aligned}$$

□

Приложение Б

Графики переходных процессов

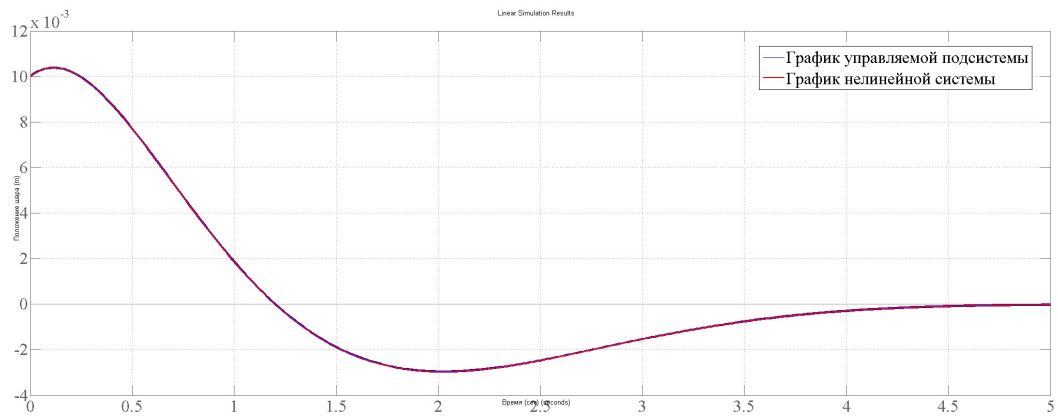


Рис. Б.1. Управление посредством механического момента. Переходный процесс по координате x_1 (положение шара), нулевое положение равновесия

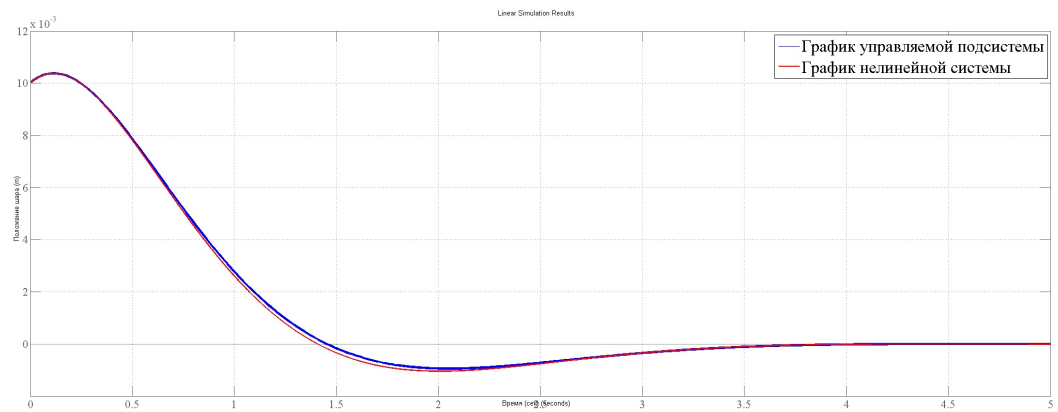


Рис. Б.2. Управление посредством механического момента. Переходный процесс по координате x_1 (положение шара), ненулевое положение равновесия

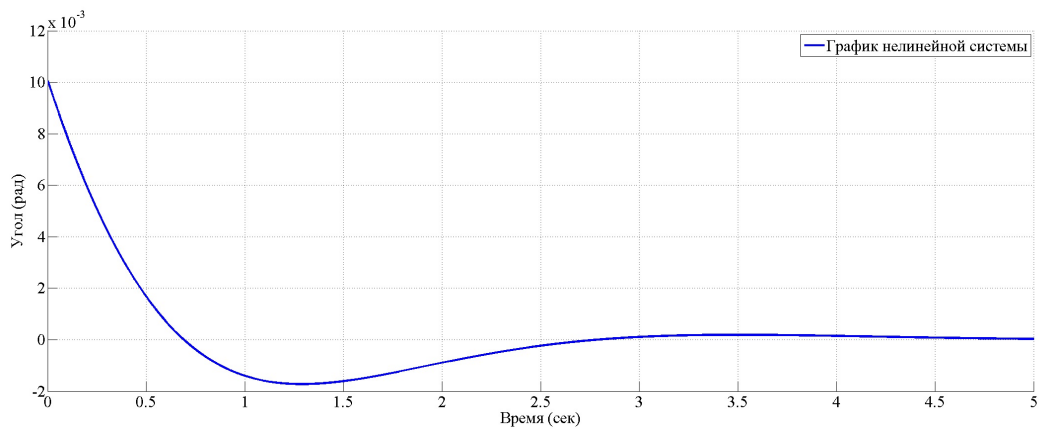


Рис. Б.3. Управление посредством механического момента. Переходный процесс по координате x_2 (угол α), нулевое положение равновесия

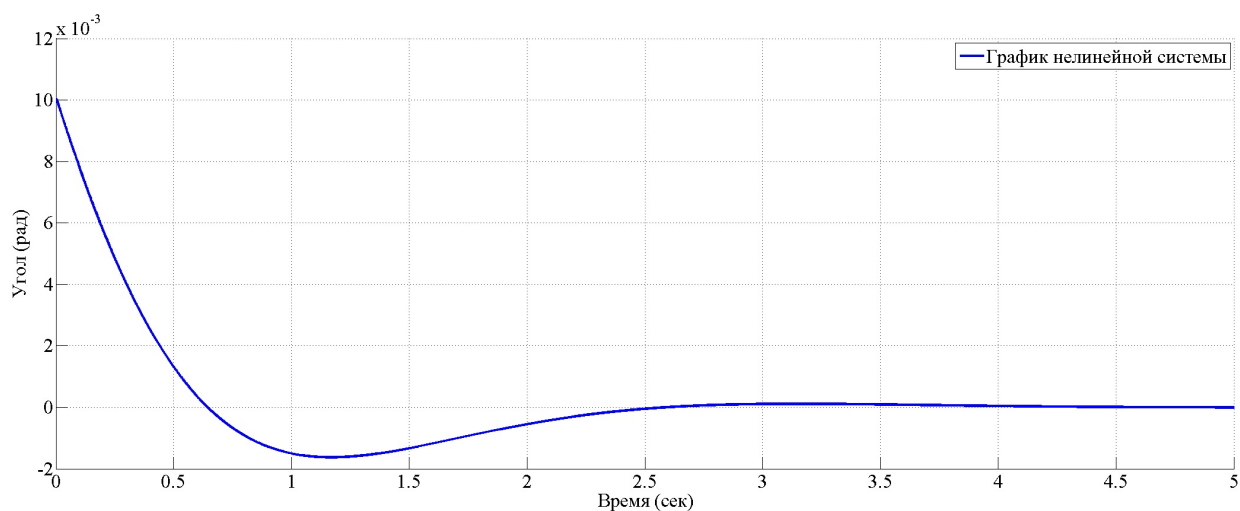


Рис. Б.4. Управление посредством механического момента. Переходный процесс по координате x_2 (угол α), ненулевое положение равновесия

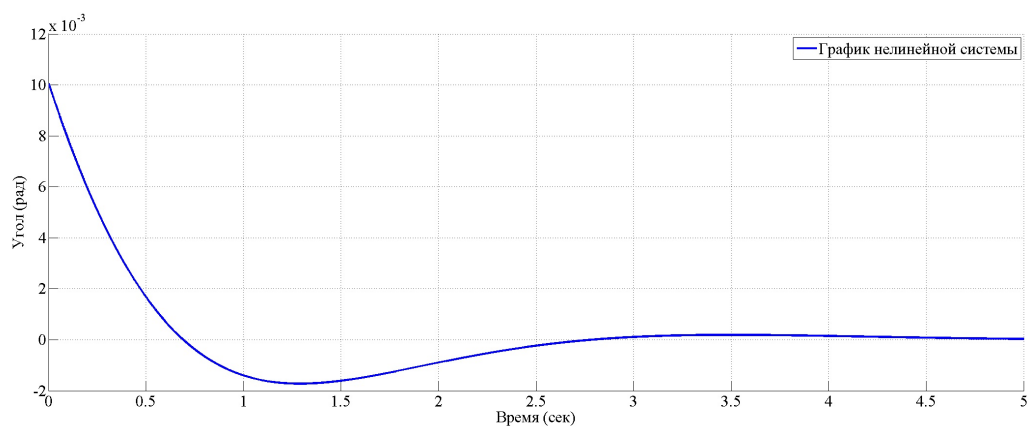


Рис. Б.5. Управление посредством механического момента. Переходный процесс по координате x_5 (угол θ), нулевое положение равновесия

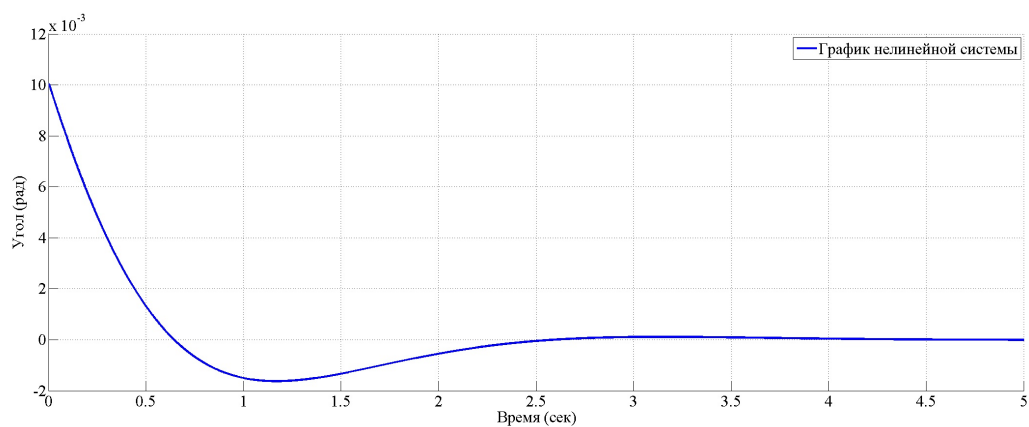


Рис. Б.6. Управление посредством механического момента. Переходный процесс по координате x_5 (угол θ), ненулевое положение равновесия

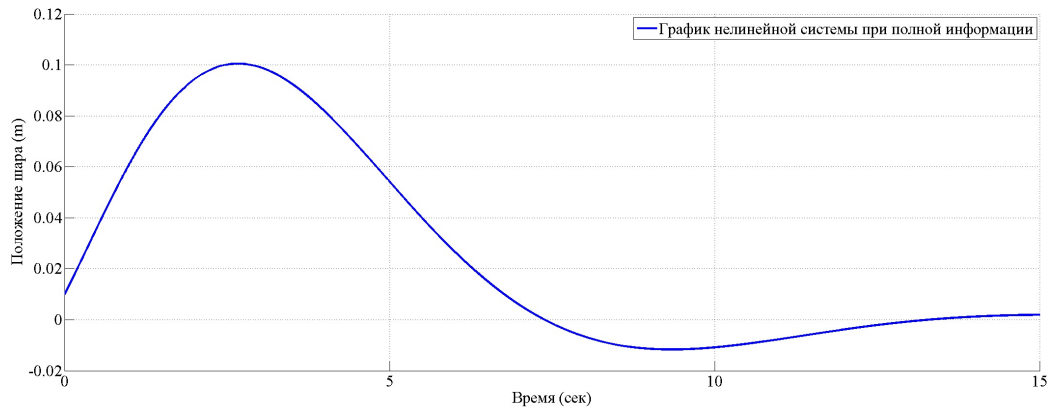


Рис. Б.7. Управление напряжением. Случай зависимой координаты θ . Переходный процесс по координате x_1 (положение шара), нулевое положение равновесия

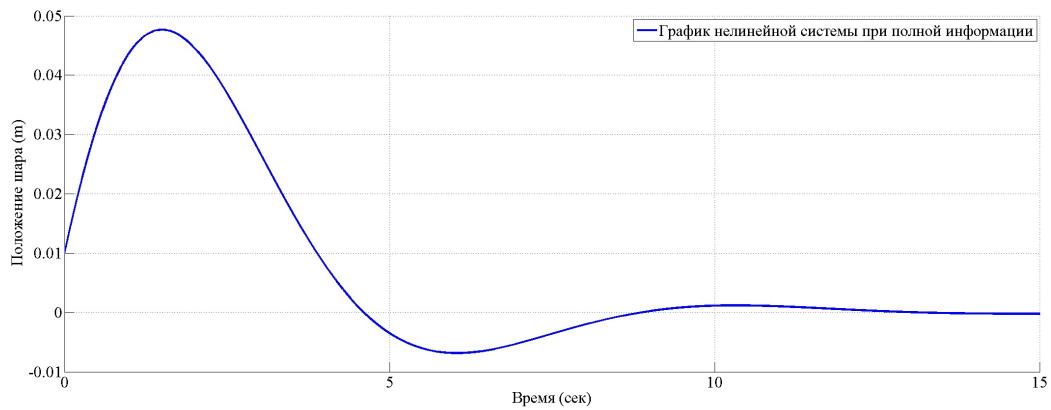


Рис. Б.8. Управление напряжением. Случай зависимой координаты θ . Переходный процесс по координате x_1 (положение шара), ненулевое положение равновесия

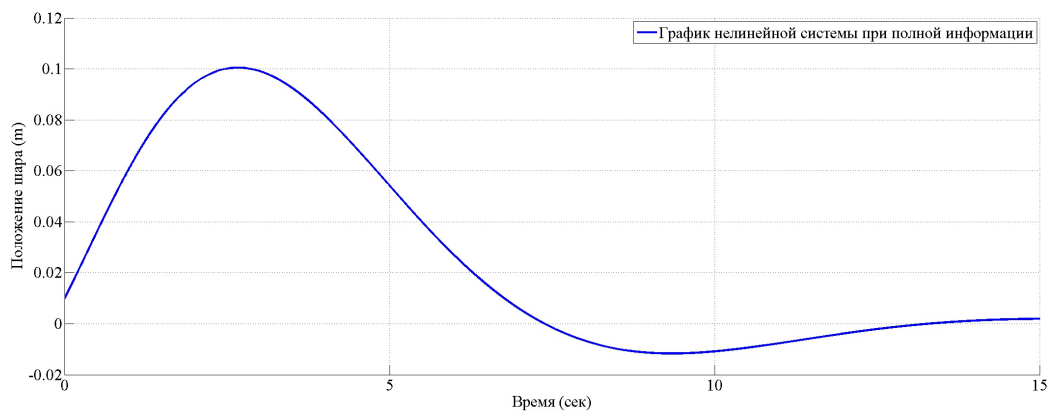


Рис. Б.9. Управление напряжением. Случай зависимой координаты α . Переходный процесс по координате x_1 (положение шара), нулевое положение равновесия

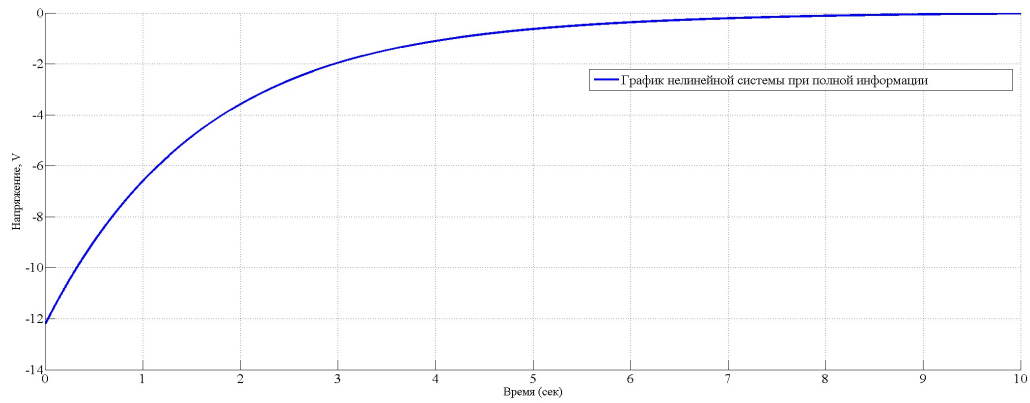


Рис. Б.10. Управление u_0^I , зависящая координата θ , нулевое положение равновесия

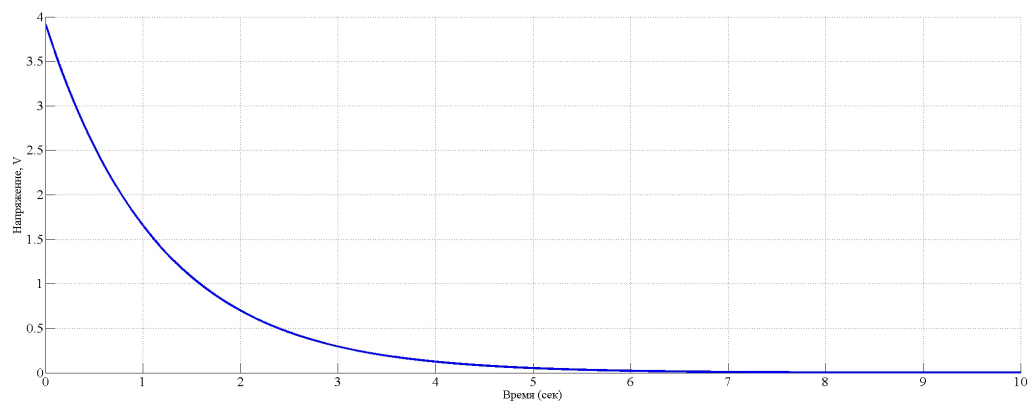


Рис. Б.11. Управление u_1^I , зависящая координата θ , ненулевое положение равновесия

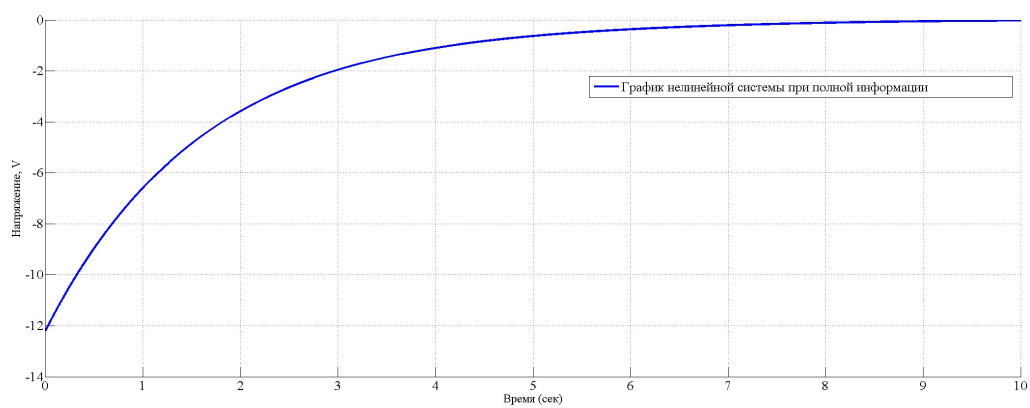


Рис. Б.12. Управление u_0^{II} , зависящая координата α , нулевое положение равновесия

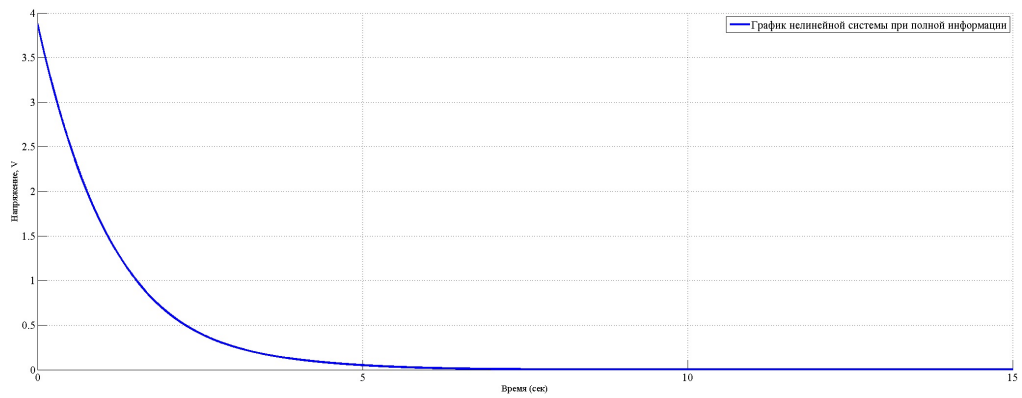


Рис. Б.13. Управление u_1^{II} , зависимая координата α , ненулевое положение равновесия

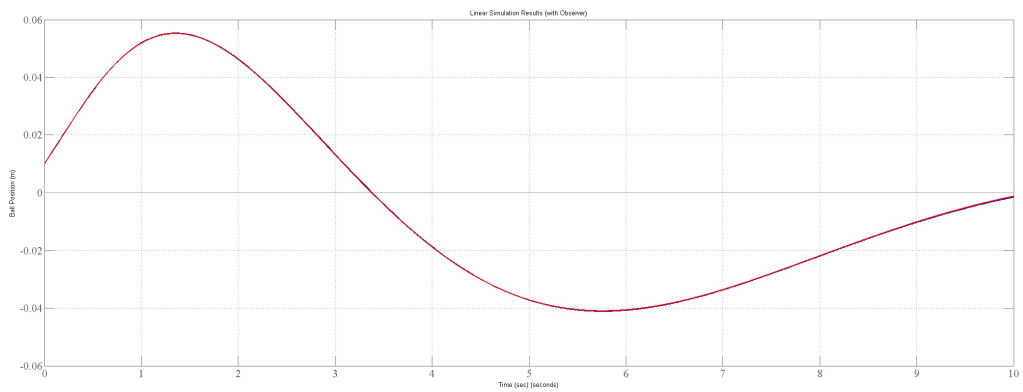


Рис. Б.14. Стабилизация при неполной информации о состоянии. Переходный процесс по координате x_1 , нулевое положение равновесия

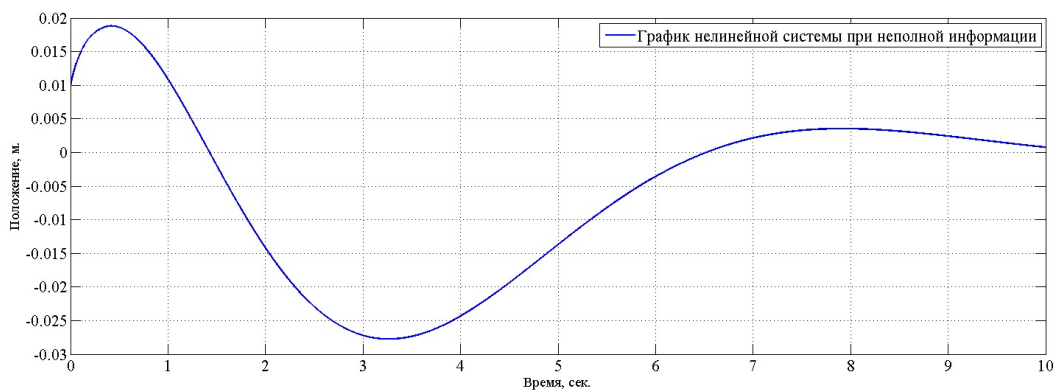


Рис. Б.15. Стабилизация при неполной информации о состоянии. Переходный процесс по координате x_1 , ненулевое положение равновесия

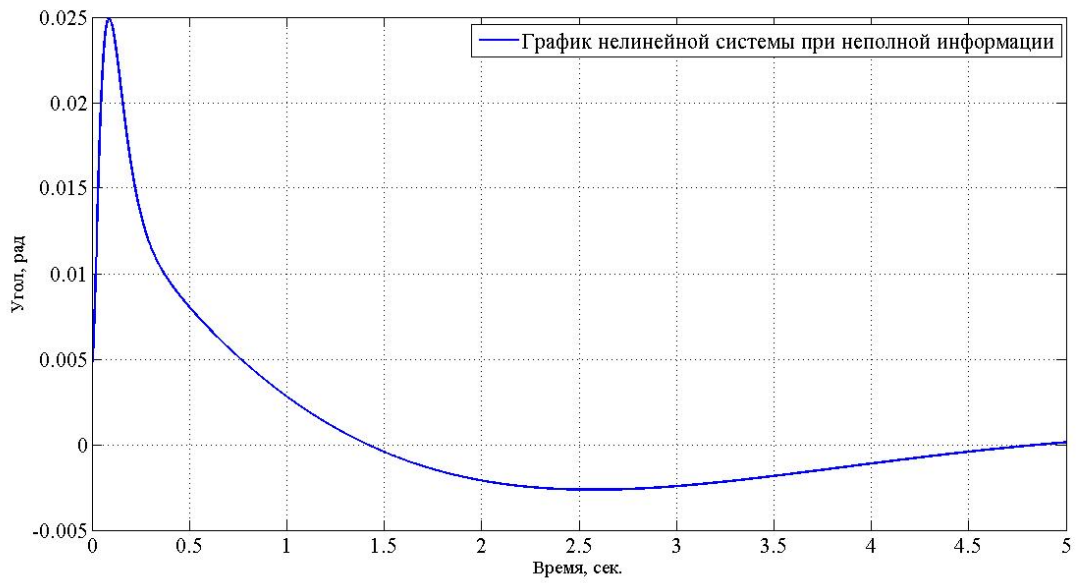


Рис. Б.16. Стабилизация при неполной информации о состоянии. Переходный процесс по координате x_6 (угол α), нулевое положение равновесия

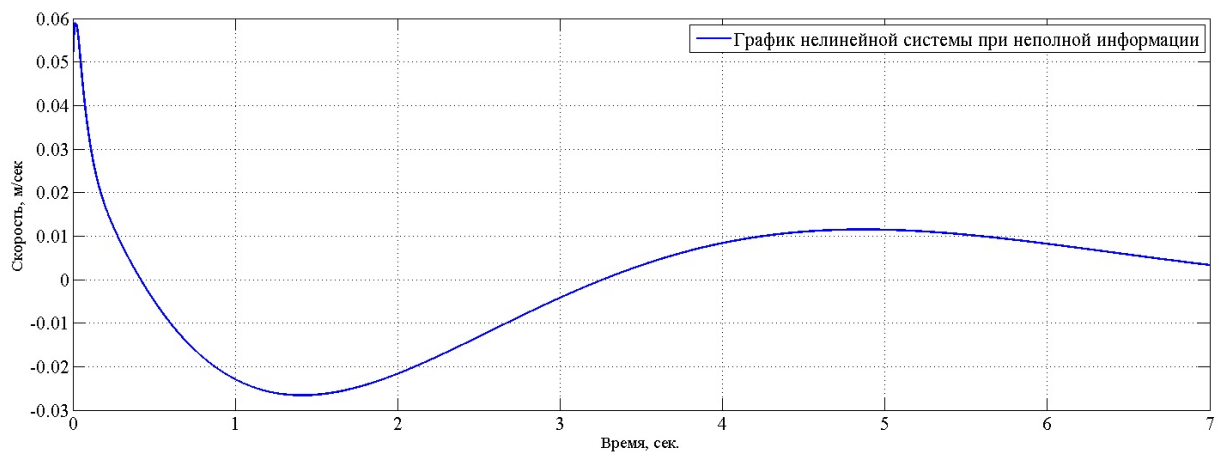


Рис. Б.17. Стабилизация при неполной информации о состоянии. Переходный процесс по координате x_3 (скорость шара), ненулевое положение равновесия

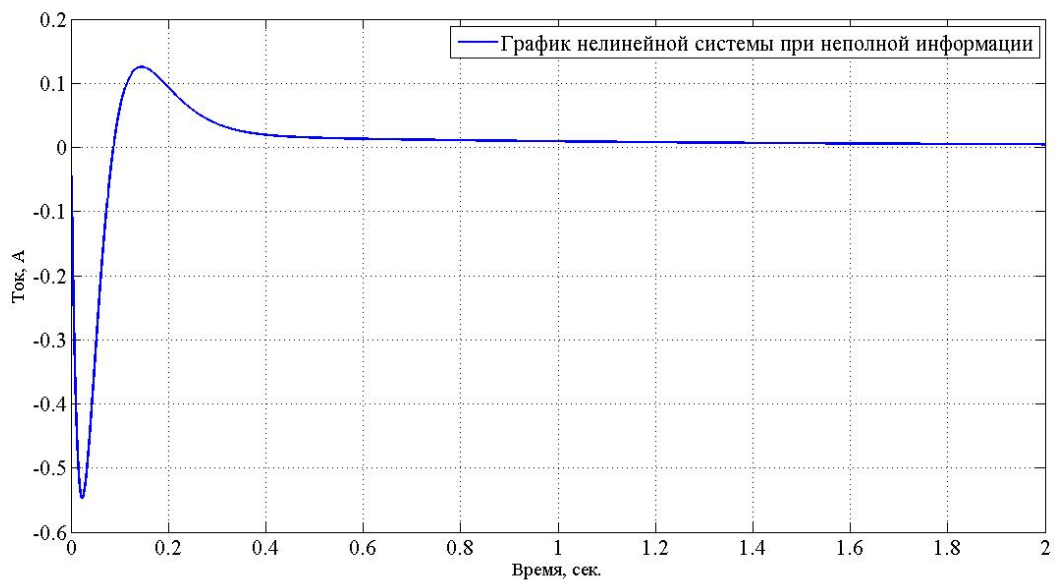


Рис. Б.18. Стабилизация при неполной информации о состоянии. Переходный процесс по координате x_5 (ток), ненулевое положение равновесия

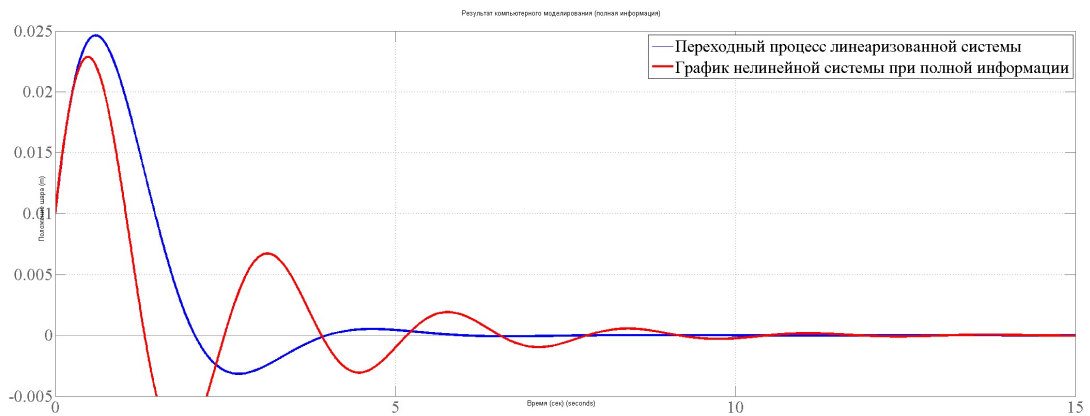


Рис. Б.19. Математическая модель на основе уравнений Лагранжа. Переходный процесс по координате x_1 , $d = 0.09$ м.

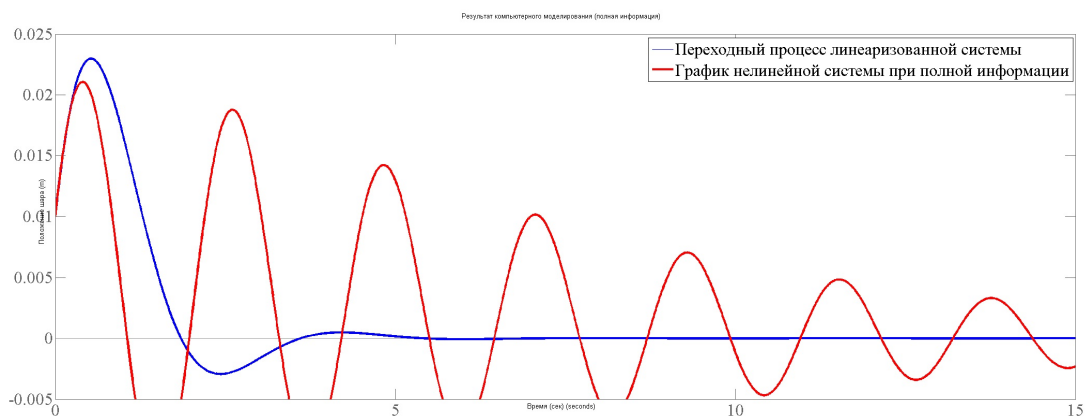


Рис. Б.20. Математическая модель на основе уравнений Лагранжа. Переходный процесс по координате x_1 , $d = 0.093$ м.

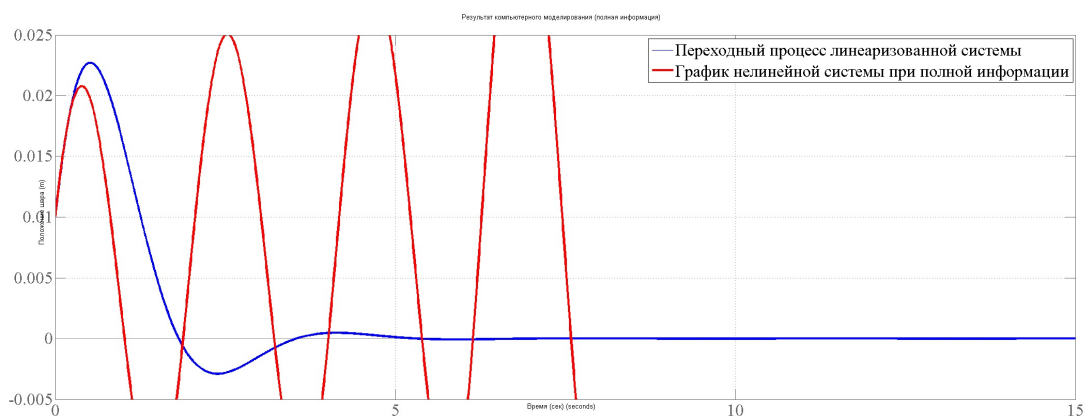


Рис. Б.21. Математическая модель на основе уравнений Лагранжа. Переходный процесс по координате x_1 , $d = 0.0935$ м.

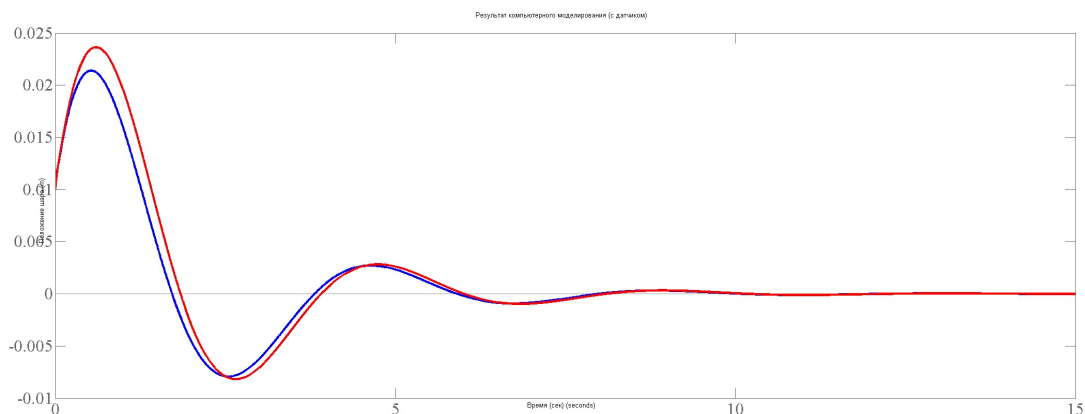


Рис. Б.22. Математическая модель на основе уравнений Шульгина. Переходный процесс по координате x_1 , $d = 0.09$ м.

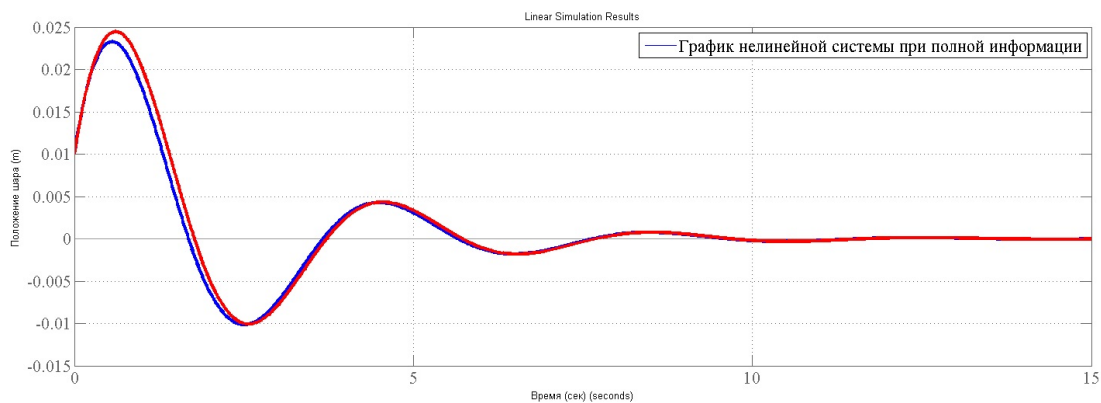


Рис. Б.23. Математическая модель на основе уравнений Шульгина. Переходный процесс по координате x_1 , $d = 0.093$ м.

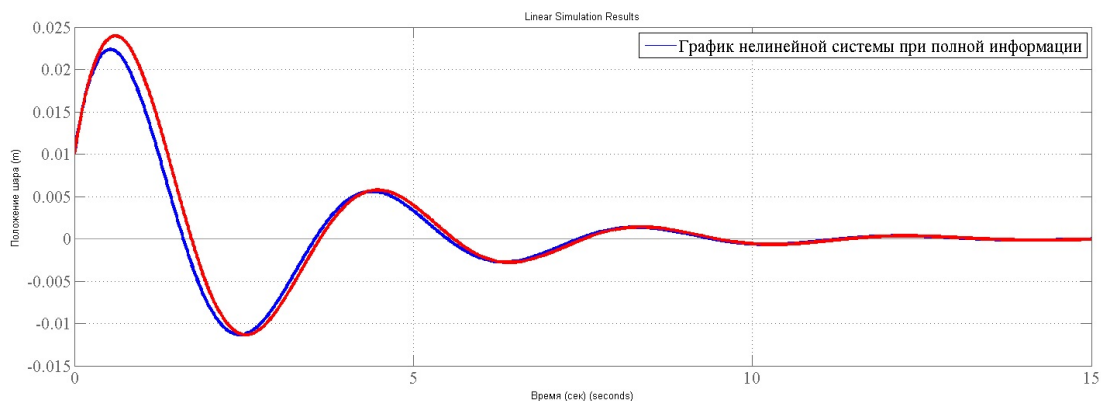


Рис. Б.24. Математическая модель на основе уравнений Шульгина. Переходный процесс по координате x_1 , $d = 0.095$ м.