

УДК 539.3

Определение критических температур потери устойчивости пологих цилиндрических оболочек

П.С. Григорьев¹, С.В. Беспалько¹, В.В. Гончаров²¹ Российский университет транспорта (РУТ (МИИТ)), Москва, 127994, Россия² АО «НПО Лавочкина», г. Химки, Московская область, 141402, Россия

e-mail: grigorev.p@gmail.com; besp-alco@yandex.ru; GoncharovVV@laspace.ru

DOI: 10.34759/tpt-2021-13-7-324-328

Поступила в редакцию 20.05.2021

После доработки 15.07.2021

Принята к публикации 20.07.2021

Рассматривается подход по определению уровня критических температур потери устойчивости пологих цилиндрических оболочек. Подход базируется на основе разрешающих уравнений пологих цилиндрических оболочек, предложенных В.З. Власовым. Авторами используется вариант уравнений этой теории в форме, представленной Л.Г. Доннеллом. В качестве воздействующих на конструкцию нагрузок рассматриваются воздействия, вызванные температурным расширением. Решение выбранного дифференциального уравнения выполняется по методу Бубнова–Галеркина и аппроксимируется двойными тригонометрическими рядами. Получены критические значения температур, при которых происходит потеря устойчивости рассматриваемой конструкции. Оценено влияние различных параметров модели на уровни полученных температур. Сделаны основные выводы. Качество решения оценивается путем сравнения с результатами, полученными методом конечных элементов.

Ключевые слова: пологие оболочки, потеря устойчивости, вариационный метод, температурные напряжения, метод Бубнова–Галеркина, критические нагрузки.

Введение и постановка задачи

Оболочечные элементы широко распространены в современных конструкциях. Например, они реализованы в корпусах летательных аппаратов, объектах транспортной отрасли, корпусах водных судов и строительных сооружениях. Применение оболочечных элементов позволяет уменьшить массу летательных аппаратов (проблема уменьшения массы конструкции особенно актуальна для ракетно-космической отрасли). При этом обеспечивается сохранение необходимого уровня жесткости и прочности. В связи с этим перед инженерами ставятся задачи по математическому моделированию и теоретической оценке поведения разрабатываемой конструкции при определенных режимах работы. Например, эксплуатация при различных температурных режимах космических лета-

тельных аппаратов может привести к потере устойчивости элементов, состоящих из тонкостенных оболочек. В связи с этим необходимо иметь методологические подходы и теоретические обоснования конструктивных решений с учетом критических температур потери устойчивости оболочечных элементов. Исследования в области потери устойчивости оболочек и панелей под действием внешних нагрузок проводились российскими и зарубежными учеными [1–6], однако следует иметь готовые математические зависимости, позволяющие достаточно быстро оценить характер работы конструкции.

Рассмотрим элемент оболочечной конструкции, относящийся к пологим цилиндрическим оболочкам. Согласно предложению В.З. Власова [7], принято считать оболочку полой, если стрела подъема H не превышает $1/5$ от наименьшего размера в плане (рис. 1).

Предлагается рассмотреть подход для решения задачи по теоретическому обоснованию определения критической температуры потери устойчивости такой пологой цилиндрической оболочки.

Материалы и методы

Для решения поставленной задачи воспользуемся основным разрешающим уравнением, применяемым для решения задач устойчивости пологих цилиндрических оболочек [8]. Эта запись уравнения пологих оболочек предложена Доннеллом [9]:

$$D\nabla^8 w + \frac{E \cdot h}{R^2} \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + N_1 \nabla^4 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_2 \nabla^4 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad (1)$$

где $D = \frac{E \cdot h^3}{12(1-\nu^2)}$ – цилиндрическая жесткость оболочки; E – модуль упругости материала оболочки; h – толщина оболочки; ν – коэффициент Пуассона; R – радиус кривизны оболочки; w – радиальные перемещения, направленные по нормали к срединной поверхности оболочки, в данном случае для пологой оболочки w направлено по радиусу к центру окружности поперечного сечения;

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4};$$

$$\nabla^8 = \frac{\partial^8}{\partial x^8} + 4 \frac{\partial^8}{\partial x^6 \partial y^2} + 6 \frac{\partial^8}{\partial x^4 \partial y^4} + 4 \frac{\partial^8}{\partial x^2 \partial y^6} + \frac{\partial^8}{\partial y^8};$$

N_1 и N_2 – осевое и тангенциальное погонное усилие соответственно.

Два последних слагаемых в уравнении (1) по сути отражают радиальную поверхностную нагрузку, над которой выполнена операция ∇^4 . Выразим значения погонных усилий N_1 и N_2 через изменение температуры и коэффициент температурного расширения:

$$N_1 = N_2 = E \cdot T_{кр} \cdot \alpha_{\tau} \cdot h, \quad (2)$$

где $T_{кр}$ – искомое значение критической температуры; α_{τ} – линейный коэффициент температурного расширения материала оболочки.

В нашем случае рассматривается оболочка, закрепленная по контуру от радиальных пере-

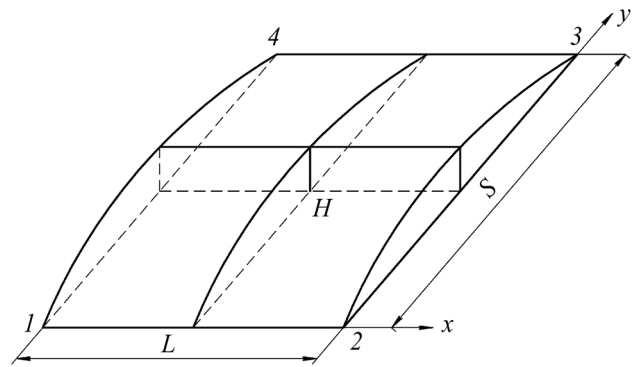


Рис. 1. Прямоугольная в плане панель пологой оболочки

мещений w , которая имеет свободный поворот этих сечений (по терминологии строительной механики – эта оболочка шарнирно закреплена по контуру). Таким образом, граничные условия однородные. Следует принять решение в виде двойных тригонометрических рядов, и тогда эти условия будут удовлетворяться:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \sin(\lambda \alpha) \sin(\mu \beta), \quad (3)$$

где $\lambda = \frac{m\pi}{\alpha_0}$, $\mu = \frac{n\pi}{\beta_0}$ – коэффициенты; $\alpha_0 = \frac{L}{R}$,

$\beta_0 = \frac{S}{R}$ – относительные координаты; m, n – коэффициенты членов ряда, соответствующие количеству полуволн при определении формы потери устойчивости; L и S – размеры оболочки.

Базисные функции в этой аппроксимации линейно независимы, система полная [10], кроме того, функции ортогональны, что значительно упрощает дальнейшее решение. Обращаем внимание, что приведенное исходное уравнение (1) по смыслу – уравнение равновесия бесконечно малого элемента, записанное в перемещениях.

В данной работе при применении метода Бубнова–Галеркина были использованы материалы [11]. Согласно этому источнику, метод Бубнова–Галеркина предусматривает аппроксимацию искомой функции в исходном дифференциальном уравнении и последующую ортогонализацию по каждой из базисных функций в пределах поверхности интегрирования. В результате этой операции получают систему алгебраических уравнений относительно коэффициентов аппроксимации. Поскольку рассматри-

вается уравнение равновесия, можно отметить, что используемый метод в полной мере корреспондируется с принципом возможных перемещений.

Имея в виду ортогональность базисных функций, рассмотрим один член ряда перемещений $w_{mn}\sin(\lambda\alpha)\sin(\mu\beta)$.

Преобразуем уравнение (1), записав его в относительных координатах, и учтем, что сжимающие погонные усилия по знаку отрицательны, тогда получим:

$$D\nabla^8 w + E \cdot h \cdot R^2 \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^4} - N_1 \nabla^4 R^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} - N_2 \nabla^4 R^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} = 0. \quad (4)$$

Подставив зависимости (2) и (3) в выражение (4), после ортогонализации получаем:

$$\left[D(\lambda^2 + \mu^2)^4 + E \cdot h \cdot R^2 \cdot \lambda^4 - E \cdot T_{кр} \cdot \alpha_t \cdot h \cdot R^2 (\lambda^2 + \mu^2)^3 \right] w_{mn} = 0. \quad (5)$$

Очевидно, что это равенство будет выполняться, если выражение в квадратных скобках равно нулю. Считая коэффициент при w_{mn} равным нулю, имеем возможность выразить критическую температуру:

$$T_{кр} = \frac{D \cdot (\lambda^2 + \mu^2)^4 + E \cdot h \cdot R^2 \cdot \lambda^4}{E \cdot \alpha_t \cdot h \cdot R^2 \cdot (\lambda^2 + \mu^2)^3}. \quad (6)$$

Таким образом, получено выражение для определения критического изменения температуры прямоугольной в плане шарнирно-закрепленной пологой оболочки при потере устойчивости. Такая панель может представлять фрагмент многих машиностроительных конструкций и летательных аппаратов. Для определения искомого значения критического уровня температуры необходимо провести исследование, определив при каких значениях m и n значение $T_{кр}$ будет минимальным.

Результаты

В качестве примера рассмотрены различные варианты габаритных размеров шарнирно-опертых пологих оболочек. За основу была принята полая оболочка с размерами 900×1500 мм, с радиусом кривизны $R = 3000$ мм и толщиной $h = 2$ мм. Материал – алюминий АМг-6 [13] с модулем упругости $E = 7.1 \cdot 10^4$ МПа

и коэффициентом теплового расширения $\alpha_t = 24.7 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$.

Для оценки достоверности полученных результатов был выполнен дополнительный расчет с использованием метода конечных элементов, реализуемый программным комплексом «Ansys». Была смоделирована пространственная пластина заданных размеров и выполнен статический расчет от температурной нагрузки. После чего, используя результаты статического расчета и встроенный модуль Eigenvalue Buckling [14] в линейной постановке, были определены коэффициенты запаса устойчивости при различных нагружениях. На основе полученных коэффициентов найдены критические температуры.

Результаты расчетов критических уровней изменения температуры различными методами, после которых происходит потеря устойчивости рассматриваемого объекта, приведены в таблице. Пример результата численного решения методом конечных элементов по определению формы потери устойчивости представлен на рис. 2.

Выводы и обсуждение

Расчеты, выполненные различными методами, показали удовлетворительную сходимость результатов предложенного подхода и численного метода решения. Таким образом, предложенный подход обеспечивает получение достоверных результатов. Стоит отметить, что для решения задач потери устойчивости и получения более углубленных результатов следует выполнять нелинейный анализ конструкции [5]. В связи с этим дополнительно рекомендуется выполнить экспериментальное исследование для определения истинных значений критических температур потери устойчивости.

Необходимо принять во внимание, что предложенный подход позволяет без применения дорогостоящих программных комплексов выполнить оценку разрабатываемой конструкции по определению критических температур и коэффициентов запаса устойчивости. Полученное выражение (5) будет представлять интерес для разработчиков конструкций, испытывающих воздействие температур. В случае превышения полученного показателя разработчик может предпринять необходимые конструктивные изменения, в частности:

Результаты расчетов критической температуры потери устойчивости

Геометрические размеры рассматриваемой оболочки	Коэффициенты членов ряда		$T_{кр}$, рассчитанное МКЭ, °С	$T_{кр}$, рассчитанное методом Бубнова–Галеркина, °С
	m	n		
$R = 3000$ мм, $h = 2$ мм, $L = 900$ мм, $S = 1500$ мм	5	4	16.1	13.5
$R = 2000$ мм, $h = 1.5$ мм, $L = 900$ мм, $S = 900$ мм	9	2	18.1	17.5
$R = 1500$ мм, $h = 1$ мм, $L = 600$ мм, $S = 600$ мм	8	2	16.2	15.5

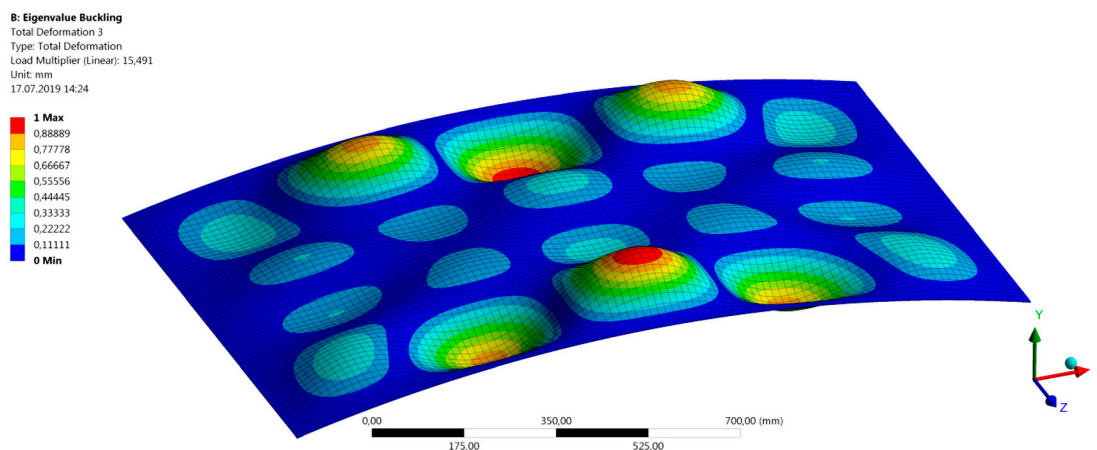


Рис. 2. Форма потери устойчивости цилиндрической полой оболочки

– применять для разрабатываемой конструкции материал с меньшим коэффициентом линейного расширения и большим модулем упругости;

– повышать момент инерции элементов оболочечных конструкций за счет увеличения количества и/или применения подкрепляющих элементов;

– использовать специальные лакокрасочные покрытия, имеющие низкий интегральный коэффициент поглощения солнечной радиации A_s .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Власов В.З.** Общая теория оболочек и ее приложение в технике. М.-Л.: Гостехиздат, 1949. 784 с.
2. **Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.** Пластинки и оболочки. М.: Физматгиз, 1963. 636 с.
3. **Lopatin A.V., Morozov E.V.** Approximate buckling analysis of the CCFR orthotropic plates subjected to in-plane loading // International Journal of Mechanical Sciences. 2015. V. 85. P. 38–44.
4. **Yu Chen.** Buckling of rectangular plates under intermediate and end loads. MSc Thesis, Department of Civil Engineering, National University of Singapore, 2003.
5. **Улитин В.В.** Физически нелинейный анализ устойчивости конструкций. СПб.: ГИОРД, 2007. 96 с.
6. **Onyia M.E., Rowland-Lato E.O., Ike C.C.** Galerkin-Vlasov Variational Method for the Elastic Buckling Analysis of SSCF and SSSS Rectangular Plates // International Journal of Engineering Research and Technology. 2020. V. 13. N 6. P. 1137–1146.
7. **Вольмир А.С.** Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.
8. **Погорелов В.И.** Строительная механика тонкостенных конструкций. СПб.: БХВ-Петербург, 2007. 528 с.
9. **Доннелл Л.Г.** Балки, пластины и оболочки / Под ред. Э.И. Григолюка. М.: Наука, 1982. 567 с.
10. **Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М.** Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высш. школа, 1970. 710 с.
11. **Пратусевич Я.А.** Вариационные методы в строительной механике М.-Л.: Гостехиздат, 1948. 400 с.
12. **Shi G.** Flexural vibration and buckling analysis of orthotropic plates by the boundary element method // International Journal of Solids and Structures. 1990. V. 26. P. 1351–1370.
13. **ГОСТ 4784–97.** Алюминий и сплавы алюминиевые деформируемые. Марки. 10 с.
14. **Баякин В.Б., Кожин А.Г.** Использование пакета ANSYS для проектирования деталей авиационных реакторов. Самара: Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2007. 44 с.

Determining critical temperatures of the gently sloping cylindrical shells stability loss

P.S. Grigoriev¹, S.V. Bernalco¹, V.V. Goncharov²

¹ *Russian University of Transport (RUT (MIIT)), Moscow, 127994, Russia*

² *JSC "NPO Lavochkina", Moscow region, Khimki, 141402, Russia*

e-mail: grigorev.p@gmail.com; bernalco@yandex.ru; GoncharovVV@laspace.ru

The article considers an approach to determining the critical temperatures level of stability loss of gently sloping cylindrical shells. The proposed approach is based on the resolving equations of the gently sloping cylindrical shells proposed by V.Z. Vlasov. The authors use the option presented by the L.G. Donnell equation. The forces caused by thermal expansion are used as the loading being applied structure. The obtained differential equation solution was performed using double trigonometric series by the method of the Bubnov–Galerkin approximate solution of the boundary value problem for differential equations. Values of critical temperatures, at which a stability loss of the considered structure occurs, were obtained. The impact of various model parameters on the levels of the obtained temperatures was evaluated. The main inferences were drawn. The solution quality is being evaluated by comparing with the results obtained by the finite element method.

Keywords: gently sloping shells, stability loss, variation method, temperature stresses, Bubnov–Galerkin method, critical loads.

REFERENCES

1. **Vlasov V.Z.** *Obshchaya teoriya obolochek i ee prilozhenie v tekhnike* [The general theory of shells and its application in technology]. Moscow-Leningrad: Gostekhizdat, 1949. 784 p. In Russ.
2. **Timoshenko S.P., Voinovskiy-Krieger S.** *Plastinki i obolochki* [Plates and shells]. Moscow: Fizmatgiz, 1963. 636 p. In Russ.
3. **Lopatkin A.V., Morozov E.V.** Approximate buckling analysis of the CCF orthotropic plates subjected to in-plane loading // *International Journal of Mechanical Sciences*, 2015, vol. 85, pp. 38–44. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2014.05.003
4. **Chen Yu.** Buckling of rectangular plates under intermediate and end loads, MSc Thesis, Department of Civil Engineering, National University of Singapore, 2003. 106 p.
5. **Ulitin V.V.** *Fizicheski nelineyny analiz ustoychivosti konstruktsiy* [Physically nonlinear analysis of structural stability]. Saint-Petersburg: GIORD, 2007. 96 p.
6. **Onyia M.E., Rowland-Lato E.O., Ike C.C.** Galerkin-Vlasov Variational Method for the Elastic Buckling Analysis of SSCF and SSSS Rectangular Plates // *International Journal of Engineering Research and Technology*. 2020. Vol. 13. № 6, pp. 1137-1146. DOI: 10.37624/IJERT/13.6.2020.1137-1146
7. **Volmir A.S.** *Ustoychivost' deformiruemyykh system* [Stability of deformable systems]. Moscow: Nauka, 1967. 984 p. In Russ.
8. **Pogorelov V.I.** *Stroitel'naya mekhanika tonkostennykh konstruktsiy* [Construction mechanics of thin-walled structures]. Saint-Petersburg: BHV-Petersburg, 2007. 528 p. In Russ.
9. **Donnell L.G.** *Balki, plastiny i obolochki* [Beams, plates and shells]. Moscow: Nauka, 1982. 567 p. In Russ.
10. **Koshlyakov N.S., Gliner E.B., Smirnov M.M.** *Uravneniya v chastnykh proizvodnykh matematicheskoy fiziki* [Partial differential equations of mathematical physics]. Moscow: Higher School, 1970. 710 p. In Russ.
11. **Pratusevich Ya.A.** *Variatsionnye metody v stroitel'noy mekhanike* [Variational methods in structural mechanics]. Moscow-Leningrad: Gostekhizdat, 1948. 400 p. In Russ.
12. **Shi G.** Flexural vibration and buckling analysis of orthotropic plates by the boundary element method // *International Journal of Solids and Structures*, 1990, vol. 26, iss. 12, pp. 1351–1370. DOI: 10.1016/0020-7683(90)90083-8
13. **GOST 4784–97** *Alyuminiy i splavy alyuminiyevye deformiruemye* [Aluminium and wrought aluminium alloys. Grades]. 10 p. In Russ.
14. **Balyakin V.B., Kozhin A.G.** *Ispol'zovanie paketa ANSYS dlya proektirovaniya detaley aviatsionnykh reduktorov* [Using the ANSYS package for the design of parts of aircraft reducers]. Samara: Publishing house of Samara State Aerospace University, 2007. 44 p. In Russ.