

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

*На правах рукописи*



**Пронина Полина Федоровна**  
**РАСЧЕТНО-ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ**  
**ЭКРАННО-ВАКУУМНОЙ ТЕПЛОИЗОЛЯЦИИ**

Специальность

1.1.7. «Теоретическая механика, динамика машин»

диссертация на соискание ученой степени

кандидата технических наук

**Научный руководитель:**

к.т.н., доцент

Тушавина Ольга Валериановна

Москва – 2023

## Оглавление

ВВЕДЕНИЕ.....	4
1. Состояние проблемы на текущий момент.....	13
2. Экспериментальное исследование экранно-вакуумной теплоизоляции .....	31
2.1 Структурные исследования .....	32
2.2 Механические исследования.....	36
2.3 Влияние излучения на физико-механические свойства.....	39
2.3.1 Излучение .....	39
2.3.2 Испытания на растяжение после излучения .....	41
3. Аналитическое моделирование .....	46
3.1 Постановка задачи .....	46
3.2 Тестовая задача .....	52
4. Определение напряженно-деформированного состояния для элемента экранно-вакуумной теплоизоляции, состоящей из 4-х слоев.....	64
5. Численное моделирование .....	97
5.1 Расчет распределения температуры в композитном теплозащитном покрытии .....	99
5.1.1 Расчет распределения в композитном 4-слойном теплозащитном покрытии.....	100
5.1.2 Расчет распределения в многослойном теплозащитном покрытии .....	104
5.2 Оптимизация толщины слоев покрытия.....	108
Заключение .....	111
Список литературы.....	112
Приложение А.....	123

## **ПЕРЕЧЕНЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ И СОКРАЩЕНИЙ**

В диссертации используются следующие сокращения и условные обозначения:

КА – космический аппарат

СОТР - система обеспечения теплового режима

ЭВТИ - экранно-вакуумная теплоизоляция

СТР - система терморегулирования

ПЭТФ – полиэтилентерефталатный

РЭМ - растровый электронный микроскоп

## ВВЕДЕНИЕ

### Актуальность темы

Необходимой предпосылкой надежного функционирования космического аппарата, его систем, установленной на нем научной аппаратуры является обеспечение необходимого теплового режима всех его элементов.

Математическое моделирование теплообмена большинства типов КА связано с рядом трудностей, обусловленных сложностью и значительной неопределенностью протекания физических процессов внешнего и внутреннего теплообмена между элементами КА. В связи с этим большое значение при создании КА имеет его тепловая отработка, представляющая собой совокупность тепловых экспериментов (испытаний) и проводимых на основе их результатов мероприятий по доработке (в случае необходимости) средств обеспечения теплового режима, а иногда и конструкции аппарата.

Тепловые испытания могут проводиться на различных стадиях создания КА: начиная с этапа научно-исследовательских и опытно-конструкторских работ до летно-конструкторских испытаний. Для начальной стадии разработки КА характерны эксперименты, связанные с поиском и отработкой новых методов, схемных и конструктивных решений задачи обеспечения теплового режима КА в целом или его отдельных частей, а также эксперименты, проводимые с целью подтверждения возможности получения требуемых технических характеристик систем КА. На последующих стадиях разработки КА этапы тепловых испытаний отражают один из принципов отработки техники в направлении от «простого к сложному». Этот принцип требует постепенного укрупнения и усложнения обрабатываемых частей КА.

Общепринятым является мнение о том, что при исследовании теплового режима КА в целом или его отдельных частей и систем достаточно воспроизводить следующие факторы космического пространства: высокий вакуум, тепловое излучение Солнца и планет, практически полное отсутствие теплового излучения по тем направлениям, которые находятся за пределами телесных углов обзора

Солнца и планет, а также практически полное поглощение собственного и отраженного излучения самого КА.

На сегодняшний день главными элементами системы обеспечения теплового режима (СОТР) являются подсистемы теплозащиты. В зависимости от целей и задач можно заметить различные варианты подсистем теплозащиты, разных по конструктивному выполнению и принципу действия. Подсистемы теплозащиты должны создавать необходимую температуру внутренних поверхностей. Одной из основных составляющих системы обеспечения теплового режима космического аппарата является экранно-вакуумная (ЭВТИ) теплоизоляция. Рассмотрим ее как одну из подсистем теплозащиты, она является самым результативным методом защиты от внешних тепловых потоков, поступающих от солнца, планет, излучения наружных поверхностей элементов космического аппарата (КА). Именно ее использование позволяет снизить лучистый теплообмен КА с внешней средой.

Используемые в настоящее время в инженерных расчетах тепловые модели ЭВТИ описывают совокупность изотермических элементов, соответствующих экранам, и не учитывают влияния волокнистых 5 разделительных слоев, расположенных между экранами, на перенос тепла в ЭВТИ. В известной литературе этот вопрос не рассматривается. В то же время, в связи с повышением требований к точности расчета тепловых изоляций космических аппаратов, возникает необходимость учитывать все значимые факторы. Поэтому необходимо учитывать нестационарные явления при работе ЭВТИ.

Для адекватного определения динамического поведения элементов экранно-вакуумной теплоизоляции необходимо с достаточной степенью точности знать механические характеристики элементов тепловой защиты. А также учитывать деградацию свойств элементов ЭВТИ в процессе эксплуатации.

Последнее обстоятельство послужило основанием для данной работы, в которой специальное внимание уделено влиянию математическому моделированию нестационарных процессов тепловой защиты, а также экспериментальным исследованиям, позволяющим ренальные механические характеристики

волокнистых разделителей на перенос тепла излучением. Теоретические исследования подкрепляются численными результатами в среде Ansys Workbench.

Изложенное выше делает задачу разработки и идентификации уточненной математической модели теплопереноса в экранно-вакуумной теплоизоляции космических аппаратов актуальной.

**Целью** диссертационной работы является исследование динамического поведения многослойных покрытий для оценки распределения температурных потоков в ЭВТИ, а также исследование влияния ионизирующего излучения на физико-механические характеристики теплоизоляции.

### **Задачи работы**

Цель диссертационной работы достигается в результате последовательного решения следующих задач:

1. Разработка математической модели, описывающей динамическое поведение элементов экранно-вакуумной теплоизоляции под действием температурного поля.
2. Проведение анализа структуры поверхности ЭВТИ.
3. Проведение испытаний на растяжение и определение физико-механических характеристик.
4. Облучение образцов ЭВТИ ионизирующим излучением с разной дозировкой с последующим испытанием на растяжение и определением физико-механических характеристик.
5. Анализ влияния излучения на физико-механические характеристики ЭВТИ с учетом деградации свойств элементов ЭВТИ.
6. Численное моделирование элементов теплоизоляции и сравнение полученных результатов с аналитическими исследованиями.

### **Научная новизна**

-проведено уточняющее математическое моделирование элементов экранно-вакуумной теплоизоляции в нестационарной постановке;

-впервые исследовано влияние излучения на деградацию свойств теплоизоляции;

-проведено численное моделирование с учетом деградации свойств и определения оптимальных толщин покрытий в ЭВТИ.

**Теоретическая значимость** работы определяется её научной новизной.

**Практическая значимость** работы определяется использованием полученных результатов в разработке современных элементов экранно-вакуумной теплоизоляции.

**Объектом исследования** в данной работе являются ЭВТИ и изделия схожие с ними.

**Предметом исследования** является многослойные теплозащитные покрытия типа ЭВТИ.

#### **Методология и методы исследования**

Для решения поставленных в диссертации задач использовались:

- аналитические и численные методы математического моделирования;
- при проведении экспериментальных исследований использовались: универсальная разрывная машина Instron 5969, линейный ускоритель электронов LINS-03-350, растровый электронный микроскоп Karl Zeiss 40.

-для реализации разработанной математической модели использовалось интегральное преобразование Лапласа по времени и классические методы математической физики.

-для разработки программ и проведения вычислительных экспериментов использовался язык программирования Ansys, Maple и Wolfram Mathematica.

**Достоверность и обоснованность результатов**, полученных в диссертации, подтверждается удовлетворительным совпадением результатов вычислительных экспериментов, проведённых с использованием разработанных моделей, вычислительных алгоритмов и компьютерных программ. Достоверность численных расчетов оценивалось путем варьирования размера конечно-элементной сетки, а также сопоставлением полученных решений с решением в рамках упрощённых аналитических моделей.

Все результаты, изложенные в диссертации лично получены автором, либо при его непосредственном участии.

### **Апробация работы**

Основные научные результаты работы докладывались на 4 научно-технических конференциях. В частности:

1. «II-я Международная конференция «Композитные материалы и конструкции». Москва, МАИ, 2021 г. Тема доклада: Математическое моделирование теплового излучения при высокоскоростном обтекании космических аппаратов.
2. «XII Международной научно-практической конференции, посвященной 160-летию Белорусской железной дороги». В 2-х частях. Гомель, 2022 г. Тема доклада: Экранно-вакуумная теплоизоляция для космических аппаратов
3. «XXVIII Международного симпозиума им. А.Г. Горшкова». Москва, 2022. Тема доклада: Исследование влияния излучения на физико-механические характеристики экранно-вакуумной теплоизоляции.
4. «Юбилейная Международная научно-практическая конференция, «Инновационное развитие транспортного и строительного комплексов», посвященной 70-летию БИИЖТа-БелГУТа. В 2-х частях. Гомель, 2023 г. Тема доклада: Расчетно-экспериментальные методы исследования экранно-вакуумной теплоизоляции.

### **Публикации**

По теме диссертационной работы опубликовано 10 публикаций в научных изданиях, из них 5 научные работы опубликованы в изданиях, рекомендуемых Перечнем ВАК при Министерстве образования и науки РФ:

1. Тушавина, О. В., Пронина, П. Ф., Лопатин, С. С. Подходы к моделированию изменения физико-механических свойств и напряженно-деформированного состояния многослойных покрытий при циклическом нагреве/ О. В. Тушавина, П. Ф. Пронина, С. С. Лопатин // СТИН. — 2023. — № 10. — С. 21-23.
2. Тушавина, О. В., Палешкин, А. В., Пронина, П. Ф., Шеметова, Е. В. Оценка допустимых погрешностей воспроизведения тепловых факторов космической среды и погрешностей моделирования тепловых режимов для малых космических



аппаратов/ О. В. Тушавина, А. В. Палешкин, П. Ф. Пронина, Е. В. Шеметова // СТИН. — 2023. — № 10. — С. 23-27.

3. Пронина, П. Ф. Аналитическое моделирование теплопереноса в элементах экранно-вакуумной теплоизоляции / П. Ф. Пронина // Труды МАИ. — 2023. — № 130. — С. 27.

4. Пронина, П. Ф. Исследование влияния дозы излучения на физико-механические характеристики полиимидных пленок с металлизированным покрытием элементов экранно-вакуумной теплоизоляции / П. Ф. Пронина // Труды МАИ. — 2023. — № 132. — С. 14.

5. Пронина, П. Ф., Пичужкин, П. В., Гофин, М.Я. Применение математического моделирования при исследовании теплозащитной конструкции космического аппарата на теплопроводность в условиях изменяющегося давления и температуры во время спуска в плотные слои атмосферы/ П. Ф. Пронина, П. В. Пичужкин, М.Я. Гофин // Научно-технический вестник Поволжья. — 2023. — № 5. — С. 81-84.

и 5 работ опубликовано в издании, цитируемом в базе данных Scopus:

1. Starovoitov E.I., Pronina P.F The influence of the temperature field on the stress-strain behaviour of heat protection tiles on an elastic base / Starovoitov E.I., Pronina P.F // Journal of the Balkan Tribological Association. — 2021. — № 2. — С. 256-270.

2. Orekhov A.A., Utkin Y.A., Pronina P.F. Determination of deformation in mesh composite structure under the action of compressive loads / Orekhov A.A., Utkin Y.A., Pronina P.F. // Periodico Tche Quimica. — 2020. — № 35. — С. 599-608.

3. Sha M., Utkin Y.A., Tushavina O.V., Pronina P.F. Experimental studies of heat and mass transfer from tip models made of carbon-carbon composite material (cccm) under conditions of high-intensity thermal load / Sha M., Utkin Y.A., Tushavina O.V., Pronina P.F. // Periodico Tche Quimica. — 2020. — № 35. — С. 988-997.

4. Pronina P.F., Tushavina O.V., Sun Y. Mathematical modelling of high-intensity heat flux on the elements of heat-shielding composite materials of a spacecraft / Pronina P.F., Tushavina O.V., Sun Y. // Journal of Applied Engineering Science. — 2020. — № 4. — С. 693-698.

5. Kyaw Y.K., Pronina P.F., Polyakov P.O. Mathematical modelling of the effect of heat fluxes from external sources on the surface of spacecraft / Kyaw Y.K., Pronina P.F., Polyakov P.O. // Journal of Applied Engineering Science. — 2020. — № 4. — С. 732-736.

### **Структура и объем работы**

**Во введении** сформулированы цель и задачи работы, обоснована актуальность диссертационного исследования, научная новизна, достоверность и обоснованность результатов, а также теоретическая и практическая значимость работы. Кратко охарактеризованы методы теоретического и экспериментального исследований.

**В первой главе** диссертации представлен краткий обзор используемых в настоящее время экранно-вакуумных теплоизоляций, структура ее пакетов, эксплуатационные параметры, технические особенности теплофизические параметры при различных температурных интервалах, методы определения теплопроводности и сравнительный анализ различных разработчиков метода определения теплопроводности ЭВТИ.

**Во второй главе** диссертации описано экспериментальное исследование ЭВТИ. Изложены физико-механические исследования характеристик ЭВТИ образцов производства НПП Полиплен. Показаны определения механических свойств ЭВТИ в квазистатических испытаниях на растяжение, которые проводились на универсальной электромеханической машине Instron 5969, из которых определялся, в частности, эффективный модуль упругости материала. Исследование влияния излучения на механические характеристики образцов. Испытания на растяжение после излучения.

**В третьей главе** на основе математического моделирования представлена постановка задачи по определению напряженно-деформированного состояния элемента ЭВТИ на основе решения нестационарной задачи теплопроводности совместно с уравнениями теории упругости для однородного упругого слоя,

нагруженного по внутренней и внешней поверхности температурным полем. Проведены тестовые расчеты.

**Четвертая глава** посвящена исследованию напряженно-деформированного состояния экранно-вакуумной теплоизоляции на основе постановки задачи приведенной в третьей главе. Здесь рассматривается напряженно-деформированное состояние ЭВТИ, состоящее из четырех слоев. При этом решается термоупругая задача в несвязанной постановке. Для решения поставленной задачи используется интегральное преобразование Лапласа по времени при однородных начальных условиях. Краевые условия на стыке слоев предполагают равенство температур, температурных потоков в температурной задаче, равенство перемещений и напряжений в упругой. На свободных поверхностях ЭВТИ задается температура, а также равенство нулю напряжений и перемещений.

**В пятой главе** проводится численное моделирование методом конечных элементов в среде Ansys Workbench. Расчет проводился в плоской осесимметричной постановке. Моделировалась ЭВТИ с ранее полученными характеристиками из эксперимента из второй главы и литературного обзора первой главы. В этой главе рассматривались две основные задачи: задача теплопроводности и задача термоупругости. В ходе моделирования были получены распределения температурных полей в каждом слое и на их границе, а так же определено напряженно-деформированное состояние для каждого из рассматриваемого случая. Полученные результаты позволят подобрать оптимальные толщины каждого слоя рассматриваемого покрытия. Выбор подобных толщин, позволит повысить статическую и циклическую прочность ЭВТИ, за счет снижения уровня максимальных напряжений, которые возникают при действии циклического нагрева.

**В заключении** обобщаются результаты выполненного исследования и представлены выводы по работе:

-сделан аналитический обзор литературных данных по проблеме защиты космический аппаратов путем использования экранно-вакуумной теплоизоляции.

Анализ литературы показал, что физико-механические характеристики малоизучены, в особенности это касается деградации свойств в условиях космического пространства.

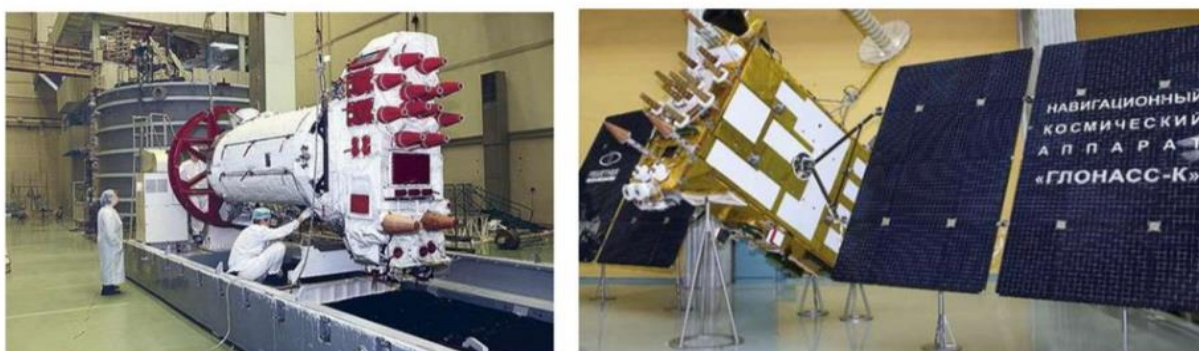
-для детального исследования проводилось экспериментальное исследование элемента ЭВТИ. Испытания проводились с использованием универсальной разрывной машины и линейного ускорителя электронов. В ходе проведенных исследований определялись свойства материала до излучения и после, в зависимости разного уровня излучения.

-построена математическая модель описывающая динамическое поведение ЭВТИ которая основана на совместном решении нестационарного уравнения теплопроводности и классического уравнения теории упругости для одномерного слоя. Решение проводится на основе интегрального преобразования Лапласа по времени. Решена тестовая задача. На основе математической модели получены аналитические зависимости кинематических и статических параметров для ЭВТИ состоящего из четырех слоев. Построены зависимости распределения температурного поля по времени и толщине многослойного пакета ЭВТИ, а также распределение нормальных напряжений по толщине пакета и во времени.

-проведено численное моделирование ЭВТИ для проверки полученных аналитических зависимостей. Определено влияние толщины на уровень НДС в слоях и на их границе. Моделирование проводилось с учетом полученных экспериментальных результатов.

## 1. Состояние проблемы на текущий момент

Надежное функционирование всех систем космического аппарата (КА) обеспечивается поддержанием допустимого теплового режима с помощью специальной бортовой системы – системы обеспечения теплового режима (СОТР) [19-20]. Под СОТР подразумевается комплекс бортовых устройств и элементов конструкции, специализированных для поддержки необходимого теплового режима КА. Пример СОТР на КА Глонасс представлен на рисунке 1.1.



Пример КА «Глонасс-М» с герметичной СОТР    Пример КА «Глонасс-К» с негерметичной СОТР 14

### Рисунок 1.1. КА с СОТР

Космический полет характеризуется сложными тепловыми условиями в разных климатических диапазонах температур атмосферы. Он может находиться в интервале от  $-70$  до  $+50^{\circ}\text{C}$ , но такой диапазон температур является сложным для работы технических устройств, так как при околоземных полетах температура поверхности КА меняется от  $-150$  до  $+150^{\circ}\text{C}$ , а на борту КА аппаратура работоспособна в диапазоне от  $0$  до  $40^{\circ}\text{C}$ . Поэтому для отдельных видов температур необходим куда более ограниченный интервал температур [66]. В связи с этим для бортовых обеспечивающих систем КА СОТР относят к жизненно важному числу. [38-40]

Работа бортовой аппаратуры КА сопровождается излучением теплоты, поэтому ее распространение необходимо регулировать в соответствии с режимом

работы всей системы бортовой аппаратуры, так как режим работы одних приборов взаимосвязан с другими [56].

Внешний теплообмен направлен на ориентацию как всего КА, так и на отдельные его элементы Солнце и небесное тело, вокруг которого совершается полет. [21, 22]

Рассмотрим некоторые виды СОТР и их состав. СОТР по герметичности можно разделить на: герметичные и негерметичные.

К герметичным относят системы, в которых температура управляется с помощью среды, циркулирующей внутри герметичного корпуса КА, при регулируемые параметрами будут температура и скорость движения среды.

К негерметичным относят систем, в которых бортовая аппаратура располагается в вакууме, а регулирование теплового режима – направлением и теплообменными контурами.

Сейчас многообещающими считаются негерметичные СОТР, имеющие меньшую массу и обеспечивающие более длительное время эксплуатации КА. [22-29]

Регулирование внешнего теплообмена входят в состав СОТР. К регулированию внешнего теплообмена относят термооптические покрытия и ЭВТИ. Термооптические покрытия – тонкие слои материала, наносимые на поверхность элементов конструкции КА электрохимическим или механическим методом с задачей придания им требуемых термооптических характеристик, коэффициента поглощения солнечного излучения  $A_s$  и степени черноты  $\epsilon$ . [22,25,29]

Существует три возможности проведения теплообмена – это кондукция, конвекция и излучение. В открытом космосе может быть только излучение, а невесомость вызывает дефицит простой конвекции внутри КА. Именно поэтому разрабатываются СОТР КА, состоящих из средств пассивного и активного терморегулирования [57-58, 75-78].

К активным средствам относят принудительный теплообмен, относящийся к циркуляционной системе терморегулирования (СТР). В этих системах производят

расходы теплоносителей и управляют их температурой. Являются затратными средствами бортовых энергетических ресурсов, в отличие от пассивных. [30-34]

Пассивные средства обеспечивают температуру за счет теплофизических свойств конструкции КА [79, 87]. Одним из распространенных и надежных средств пассивной тепловой защиты является ЭВТИ, которая позволяет уменьшить лучистый теплообмен КА с внешней средой и является защитой от лучистого теплообмена, исходящих от излучения поверхностей КА, планет, солнца и тд [35-40, 104-105].

Глубокий вакуум, особенности радиационных характеристик различных материалов, а также специфический характер внешних тепловых нагрузок в условиях космического полета позволяют рассматривать ряд возможных вариантов теплозащиты на основе многослойного экранирования внешней поверхности объекта. ЭВТИ обладает рядом положительных свойств, таких, как высокое термическое сопротивление при относительно малой плотности, надежность, сравнительная простота установки на поверхности сложной конфигурации и т.п. [41]

Экранно-вакуумная теплоизоляция (MLI - multilayer thermal insulation) обеспечивает тепловой режим космических аппаратов [1, 4], станций и баков РН с криогенными компонентами топлива [3, 5-8].

Существуют варианты теплоизоляции со слоем датчиков для обнаружения попадания микрометеоритов [10]. В случае баков это необходимо с целью снижения прогрева компонентов и их испарение. Так как при заправке бака происходит захлаживание его теплоизоляционного покрытия, в нём может происходить конденсация отдельных компонентов газовой смеси и уменьшение давление в её объёме, что вызывает подсос газа и влаги извне. Для обеспечения её эффективной работы и предотвращения локального повреждения требуется удалить из изоляции воздух и исключить криогенный подсос. В случае КА требуется обеспечить его защиту от излучения Солнца. Поверхность КА поглощает солнечный поток и переизлучает поглощённую энергию в инфракрасном спектре [59-65].



Рисунок 1.2. ЭВТИ

Пакет состоит (рисунок 1.2) [10] из слоя стеклоткани, прилегающей к стенке в данном случае бака. Далее идут слои экранов с рифлением и двухсторонним напылением алюминия разделённых между собой стекловалью. Следующий слой алюминиевая фольга и внешний слой стеклоткани или стеклохолста. Все слои после укладки сшиваются между собой и при необходимости проклеиваются, особенно если имеются вырезы под оснастку бака [53-55, 67-69].

В настоящее время существует множество вариантов и результатов исследования ЭВТИ. В обзоре рассмотрены некоторые из них.

В работе [11] представлен метод определения теплопроводности в ЭВТИ. Авторы разработали точный и воспроизводимый неразрушающий метод определения теплопроводности ЭВТИ. Нейлоновые булавки (Nylon Pins) фиксированной длины используются для скрепления слоев между собой (рисунок 1.3). Фиксированная длина стержня позволяет анализировать переменное количество слоев. Затем можно измерить общую толщину и давление образца слоя с помощью тестера. Определив расстояние между пластинами материала, можно оценить сжимающую нагрузку. Это значение необходимо, когда образец тестируется в калориметре.



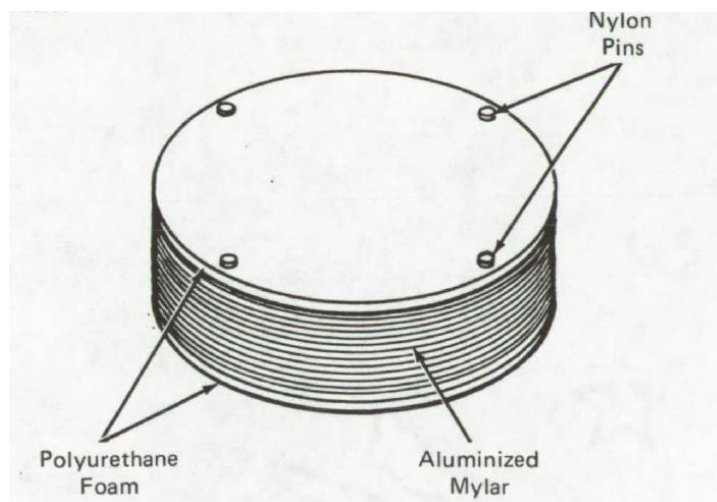


Рисунок 1.3. Образец ЭВТИ для калориметра.

Образцы изоляционного материала (экраны) укладываются так, чтобы алюминированная сторона касалась майларовой стороны примыкающих экранов. Полиуретановые прокладки размещаются сверху и снизу, образуя сэндвич, и закрепляются штифтами (Рис. 1.3). Небольшое сжатие происходит от штифтов, но оно незначительное. Далее образец взвешивается и помещается в тестер, оснащенный параллельными пластинами диаметром 30.5 см, которые отрегулированы авторами метода таким образом, чтобы едва заметно соприкасаться со сторонами образца. Затем измеряется толщина образца и приложенное давление. Затем образец извлекается из тестера и помещают в калориметр; над экранированным калориметром помещается колпак; теплую пластину калориметра поднимают, чтобы расстояние между пластинами составляло 1,72 см (0,434 дюйма), и калориметр вакуумируют в течение суток. В это время криоген вводят в испытательную установку на внешнем ограждении, внутреннем ограждении и в измерительном сосуде. Образцу дают уравновеситься в течение 12 часов, а затем начинают сбор данных. Собранные данные включают объем выпарного газа, барометрическое давление, температуру газа, давление в камере и перепад давления между конечностями. Объем выкипания представлен как функция времени. Наклон этой линии равен равновесному выкипанию в единицу времени.

В работах [12, 14, 15-18] один из новых видов ЭВТИ- Интегрированная многослойная изоляция (рисунки 1.4, 1.5) (Integrated MLI). Интегрированная многослойная изоляция предлагает несколько преимуществ по сравнению с обычной ЭВТИ [14]. Она разрабатывается как улучшенная альтернатива традиционной ЭВТИ. Типичное обычное покрытие ЭВТИ состоит из 10-12 металлизированных полимерных пленок, разделенных стеклотканью (стекловуалью) или сетками из полиэстера. ЭВТИ— лучший теплоизоляционный материал для использования в вакууме и предпочтительный изоляционный материал для космических кораблей и криогенных систем. Однако традиционный ЭВТИ имеет ряд недостатков: трудно или невозможно поддерживать требуемое значение зазора между слоями пленки, трудно обеспечить стабильные рабочие характеристики, сложный процесс изготовления и монтажа. Разработка IMLI преодолевает эти недостатки и предлагает дополнительные преимущества по сравнению с обычной ЭВТИ. Прототипы IMLI, изготовленные для NASA и независимо протестированные Криогенной испытательной лабораторией НАСА, демонстрируют, что измеренная теплоотдача 0,41 Вт/м<sup>2</sup> (20 слоев, 3.7 см, 78–292 К, 1.2 10<sup>-6</sup> торр) [16], утечка тепла на слой примерно на 37 % ниже, чем у обычного ЭВТИ на основе сетки.

Адаптивный к нагрузке ЭВТИ (Load Responsive MLI), была термически и структурно смоделирована и находится согласно данным авторов в стадии изготовления и испытаний прототипа. LRMLI — это динамическая система, которая сжимает динамический пучок под атмосферным давлением для поддержки интегрированной тонкой вакуумной оболочки и разъединяется под вакуумом для уменьшения утечки тепла через прокладку [17].

Основное отличие IMLI от обычного ЭВТИ заключается в способе сохранения зазоров между слоями пленки. В IMLI слои пленки разделены тем, что разработчики называют микроформованной дискретной матрицей, которую состоит из массивов небольших, легких полимерных (обычно термопластичных) рамок, прикрепленных (рисунок 1.4) и помещенных между ними. Так как расстояние между слоями можно поддерживать постоянным, становится

возможным оптимизировать это расстояние и сопутствующие размеры рам, для обеспечения необходимой структурной поддержки при минимизации площади контакта и связанной с этим кондуктивной утечкой тепла через раму. Таким образом, по сравнению с обычной ЭВТИ, IMLI будет более сложной системой. Матричная прокладка предназначена для снижения теплопроводности до минимального уровня, а несколько радиационных экранов уменьшают утечку радиационного тепла так, что вся система изоляции находится вблизи предела излучения. Тепловое моделирование проведенная авторами показало, что теплопроводность IMLI должна быть на 63% выше, чем у обычной ЭВТИ. Рассчитано, что в типичном применении масса панели IMLI (рисунок 1.5) с вакуумной оболочкой будет составлять примерно одну треть массы эквивалентной ЭВТИ с вакуумной оболочкой. На этапе II разработки разработана система IMLI второго поколения с расчетной утечкой тепла  $0,139 \text{ Вт/м}^2$  для 40-слойного одеяла, что составляет менее половины утечки тепла традиционной ЭВТИ.



Рисунок 1.4. Дискретные полимерные прокладки [12], изготовленные методом микроформования, для разделения слоев изоляции IMLI компании Quest

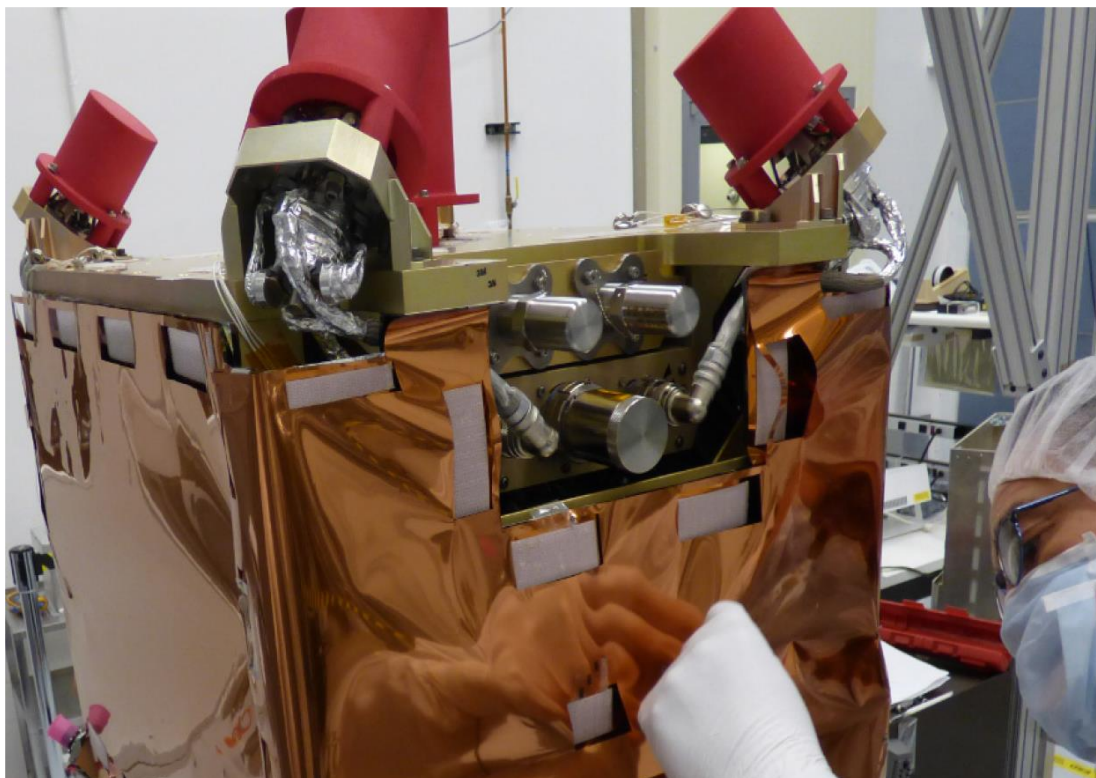


Рисунок 1.5. NASA's Green Propellant Infusion Mission (GPIM) с интегрированной ЭВТИ [12] (IMLI- Integrated MLI)

В работе [13] представлены рекомендации NASA для выбора ЭВТИ. Данный документ определяет материалы, утвержденные и использовавшиеся в предыдущих конструкциях тепловой изоляции космических аппаратов. Данные из них могут использоваться для будущих проектов ЭВТИ на различных поверхностях космических аппаратов, независимо от того, подвергаются ли они воздействию космической среды или защищены от прямого воздействия.

#### *Основные особенности конструкции ЭВТИ.*

Конструктивно ЭВТИ — это пакет тепловых экранов  $n = 10 \dots 100$  шт., состоящих из материалов с высокой отражающей способностью и отдельных панелей из материалов с низкой теплопроводностью. При воздействии на внешнюю поверхность ЭВТИ часть лучистого потока отражается от нее, а часть поглощается первым экраном. Приводит это к нагреву экрана и начинает излучать теплоту в обе стороны. Внутри пакета ЭВТИ теплота передается за счет тепловой радиации и теплопроводности. [42]

Выбор материала экранов зависит от температурных условий эксплуатации, обычно при рабочей температуре ЭВТИ до 423К для экранов применяются пленочные экраны из полиэтилентерефталатной (ПЭТФ) с напылением алюминия, серебра. При температуре до 723°K — алюминиевую фольгу с прокладками из стекловолокна. При температуре свыше 723°K для изготовления экранов используется фольга из меди, никеля или стали с кварцевым волокном в качестве прокладочного материала. Масса десяти экранов из полиэтилентерефталатной пленки площадью 1 м<sup>2</sup> каждый составляет 0,2—0,3 кг, а из металлической фольги — около 1, 0 кг. Экраны разделяются теплоизолирующими прокладками из стекловуали или кварцевого холста. Для уменьшения плотности укладки в определённых случаях экраны подвергаются рифлению. [43, 44]

Напыление металлов предназначено для придания поверхности пленки конкретных термооптических характеристик, таких как коэффициент поглощения солнечного излучения ( $A_s$ ) и степень черноты ( $\epsilon$ ). В соответствии от типа пакета используют односторонне алюминизированные (ОА) и двусторонне алюминизированные (ДА) пленки. [45, 46]

С металлизированной стороны экран имеет поглощательную способность прямого и отраженного от Земли солнечного излучения  $A_s = 0,1 \dots 0,2$ , и определяет излучательную и поглощательную способность по отношению к собственному тепловому потоку Земли  $\epsilon = 0,05 \dots 0,08$ .

Экраны бывают гладкими и рифлеными. При изготовлении и испытаниях пакета ЭВТИ фольга легко деформируется, в процессе многократных изгибов происходит образование изломов фольги, именно поэтому использование ее рекомендуют ограничивать. При изготовлении теплоизоляции, эксплуатируемой при высоких температурах, для снижения ее массы рекомендуется использовать комбинированную ЭВТИ, располагая к источнику тепла более теплоустойчивую ее часть.

Для защиты межэкранного зазора, устанавливают прокладки- разделители между экранами, которые исключают склеивание экранов. В качестве прокладок применяют стекловолнистый холст ХСВН-7, холст из штапельного кварцевого

волокна ХВК (при  $t > 450^{\circ}\text{C}$ ), полотно трикотажное основовязаное. Толщина прокладок 50...60 мкм. Если экраны выполняют рифлеными (гофрированными), то допускается использование их без прокладок.

Обеспечения тепловых оптических характеристик ЭВТИ ( $A_s$  и  $\varepsilon$ ) и достаточной эксплуатационной стойкости в космическом пространстве наружную (и внутреннюю) поверхность ЭВТИ обшивают облицовочным слоем, в роли которого используются материалы с конкретным значением соотношения  $A_s/\varepsilon$ :

- ткань стеклянная оптического назначения марки ТСОН с отношением оптических коэффициентов  $A_s/\varepsilon = 1.54$  (или 0,91);
- ткань техническая арамидная с отношением  $A_s/\varepsilon = 1.46$ ;
- угольная ткань УТМ-8 с отношением  $A_s/\varepsilon = 1.03$ .

В случае экранирования электромагнитных волн применяют специальные ткани (металлизированную или стеклянную), которые выполняют это условие. Для защиты от высокотемпературного потока газов применяют материалы типа листового титана. Для предохранения от механических повреждений с внутренней стороны ЭВТИ обшивают электроизоляционной стеклянной или арамидной тканями.

Особенности применения пакетов ЭВТИ и технические требования к ним определяются отраслевыми стандартами, разработанными ЦНИИМаш: ОСТ 92-1380-83 «ЭВТИ. Марки и технические требования»; ОСТ 92-1381-83 «ЭВТИ. Типовые технологические процессы».

На основании с этих стандартов для различных температурных условий разработан ряд марок ЭВТИ, отличающихся составом пакета и эксплуатационными параметрами.

В таблице 1.1 и 1.2 представлены температурные требования эксплуатации и технические характеристики некоторых пакетов ЭВТИ. Значения коэффициента теплопроводности и термического сопротивления (отношение толщины мата к коэффициенту теплопроводности) приведены в таблице 1.3 для ЭВТИ при заданной плотности укладки (количество экранов, приходящееся на 1 см толщины

теплоизоляции) в вакууме  $10^{-5}$  мм рт. ст. в интервале температур от  $T_1$  до  $T_2$ . В таблице 1.4 такие же параметры приведены при различных плотностях укладки для температурного диапазона от  $-196$  до  $+20^\circ\text{C}$ .

Таблица 1.1 Температурные требования эксплуатации пакетов ЭВТИ

Марка ЭВТИ	Температура, $^\circ\text{C}$	
	минимальная	максимальная
ЭВТИ-А, ЭВТИ-Б, ЭВТИ-В	-269	150
ЭВТИ-И		300
		500 (до 3 минут)
ЭВТИ-Г, ЭВТИ-Г1, ЭВТИ-Д		500

Таблица 1.2 Технические особенности пакетов ЭВТИ

Марка ЭВТИ	Состав
ЭВТИ-А	Пленка ПЭТ металлизированная марки К, ОА, 5 мкм по ТУ 6-00-21680878-01; холст стекловолокнистый ХСВН-7 по ТУ 6-48-05786904-147
ЭВТИ-Б	Пленка ПЭТ металлизированная марки К, ОА, 5 мкм, формованная на металлической сетке № 4-1,0 по ГОСТ 3826
ЭВТИ-В	Пленка ПЭТ металлизированная марки К, ОА, 5 мкм, сдублированная с холстом стекловолокнистым ХСВН-7 при формовании на металлической сетке № 4-1,0
ЭВТИ-Г	Фольга А5-М-0,01 или АД1-М-0,01 по ГОСТ 618; холст стекло-волокнистый ХСВН-7
ЭВТИ-Г1	Фольга А5-М-0,02 или АД1-М-0,02; холст стекловолокнистый ХСВН-7
ЭВТИ-Д	Фольга А5-М-0,01 или АД1-М-0,01, сдублированная с холстом стекловолокнистым ХСВН-7 при формовании на металлической сетке № 4-1,0

Марка ЭВТИ	Состав
ЭВТИ-И	Пленка ПМ-1ЭУ-ОА-0,02 по ТУ 6-00-21680878-02, сдублированная с холстом стекловолкнистым ХСВН-7 при формовании на металлической сетке № 4-1,0

Таблица 1.3 Теплофизические параметры ЭВТИ при различных температурных интервалах

Марка ЭВТИ	Плотность укладки $n$ в 1 см	Интервал температур, °С		Коэффициент теплопроводности $\lambda \cdot 10^5 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$	Термическое сопротивление
		от $T_1$	до $T_2$		
ЭВТИ-А	30	20	50	29,00	34,000
			100	37,00	27,000
			150	45,00	22,000
ЭВТИ-Б	14	20	50	32,00	31,000
			100	41,00	24,000
			150	49,00	20,000
ЭВТИ-В	13	20	50	25,00	40,000
			100	35,00	29,000
			150	41,00	24,000
ЭВТИ-И	21	20	50	13,00	77,000
			100	14,00	71,000
ЭВТИ-Г	30	150	200	26,00	38,600
			300	34,00	30,000
			400	43,00	23,200
			500	55,80	18,000
ЭВТИ-Д	18	150	300	63,90	15,470
			400	81,40	12,000
			500	110,48	8,600



Таблица 1.4 Теплофизические параметры ЭВТИ при различных плотностях укладки для температурного интервала (-196...+20) °С

Марка ЭВТИ	Плотность укладки n в 1 см									
	10	20	30	40	50	10	20	30	40	50
	Коэффициент теплопроводности $\lambda * 10^5 \frac{\text{Вт}}{\text{м*К}}$					Термическое сопротивление				
ЭВТИ-А	-	-	8,1	8,1	8,1	-	-	123	123	123
ЭВТИ-Б	11,6	14,0	19,8	23,3	25,6	86	71	50	42	39
ЭВТИ-В	-	4,7	5,8	8,1	10,5	-	212	172	123	95
ЭВТИ-И	-	-	6,4	5,0	5,2	-	-	156	200	192
ЭВТИ-Г	-	-	6,4	8,1	10,5	-	-	156	123	95
ЭВТИ-Д	18,6	16,3	17,4	23,3	29,1	53	61	57	42	34

Для создания необходимой теплоизоляции нужно набрать количество экранов исходя из требуемых теплофизических характеристик ЭВТИ: коэффициента теплопроводности  $\lambda$ , термического сопротивления R и ее минимальной массы. Необходимое термическое сопротивление подбирается соответствующим количеством экранов и плотностью их укладки.

Теплоизоляция на КА марки типа ЭВТИ-2В в основном применяется на основе гофрированной полиэтилентерефталатной пленки ПЭТФ-ДА, металлизированной с двух сторон алюминием и стекловуали в качестве разделительной перегородки. Однако иногда применение стекловолкнистых прокладок недопустимо из-за возможного оседания на оптике стеклянной пыли. Кроме того, ЭВТИ в процессе укладки подвергается различным видам физического воздействия: сгибам, сдвигам, растяжениям, сжатиям и т.п., что способствует изменению плотности укладки экранов, в результате чего теплоизоляция типа ЭВТИ-2В не имеет стабильных теплофизических характеристик. Разработанная в ЦСКБ (г. Самара) тепловая изоляция марки ЭВТИ-ВВ на основе двусторонних

металлизированных пленок с применением терморазделительного слоя синтетического ворса лишена этих недостатков. Разделительный слой наносится с помощью метода электрофлокирования в виде точек, расположенных на поверхности пленочного экрана в шахматном порядке. Вследствие повышенной жесткости пакета ЭВТИ-ВВ имеет, по сравнению с аналогом ЭВТИ-2В, меньшую на 30% массу и более стабильные теплофизические характеристики.

Основные этапы типового технологического процесса изготовления ЭВТИ: перфорация, формование (рифление), сварка, раскрой, изготовление матов, пакетов, панелей или цельной конструкции [100-103].

Экраны сшивают между собой, формируя пакеты (или маты). Пространство между экранами вакуумируется. В условиях открытого космоса время вакуумирования составляет не менее 1...5 часов, гарантированное время – одни сутки. Для ускорения процесса экраны перфорируют отверстиями, иначе пакет ЭВТИ может раздуться под давлением остаточного воздуха и разрушиться.

Изготовленная ЭВТИ подлежит тепловым испытаниям с целью подтверждения ее расчетных тепловых характеристик.

Основные характеристики пакетов ЭВТИ:

- высокое термическое сопротивление  $30...250 \text{ К}\cdot\text{м}^2/\text{Вт}$  (малое значение эффективного коэффициента теплопроводности);
- малая масса: для ПЭТФ 10 слоев  $0,2...0,3 \text{ кг/м}^2$ , для фольги в четыре раза тяжелее (с повышением термостойкости масса растет);
- невысокая стоимость;
- простота установки на поверхности сложной конфигурации;
- надежность.

ЭВТИ используется не только в космической технике, но и в наземных условиях. Эффективность ее применения зависит от характеристик межэкранной среды, отличающейся от условий открытого космического пространства. Поэтому весьма актуальным является экспериментальное исследование характеристик ЭВТИ при этих условиях.

Качественная тепловая защита элементов конструкции КА с помощью матов ЭВТИ позволяет:

- уменьшить тепловые потери и тем самым снизить тепловую нагрузку на КА;
- активизировать лучистые и кондуктивные связи во внутреннем объеме КА, увеличивая тепловую инерционность элементов конструкции КА;
- уменьшить амплитуду колебания температуры элементов конструкции при периодических изменениях внешней тепловой нагрузки.

Теплоизоляционные свойства ЭВТИ существенно зависят от конструктивных, технологических и эксплуатационных факторов. Поэтому особо важную роль приобретает надежная конечная оценка этих свойств путем расчетно-теоретических методов в сочетании с экспериментальной отработкой по верификации гарантированного диапазона возможных действительных значений удельного термического сопротивления матов ЭВТИ. В этом случае общая проектная и экспериментальная надежность СОТР гарантированно подтверждается для экстремальных условий внешнего и внутреннего теплообмена КА:

- при отработке “холодного” расчетного случая используются значения нижней границы гарантированного диапазона удельного термического сопротивления матов ЭВТИ;
- при отработке “горячего” расчетного случая используются значения верхней границы гарантированного диапазона удельного термического сопротивления матов ЭВТИ. [8, 47–51]

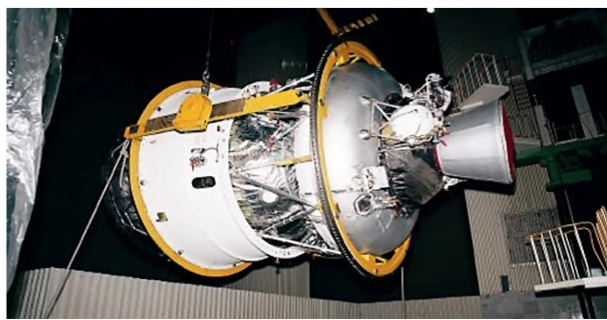
Экраны ЭВТИ, которые применяются в космической технике, имеют и используются в диапазоне температур от 4 до 273 °K .

Промышленность выпускает большой ассортимент материалов ЭВТИ для применения в диапазоне температур - для рабочих от 4 до 1000 и умеренных температур (до 150–300). [10]

Примеры составной многокомпонентной теплоизоляции представлены на рисунке 1.7.



ЭВТИ в РБ ДМ-S1



ЭВТИ в РБ ДМ-03



ЭВТИ в КА «Канопус»



ЭВТИ в радиотелескопе «Спектр-Р»

Рисунок 1.7. Примеры составной многокомпонентной теплоизоляции

Основные этапы технического процесса разработки изготовления ЭВТИ: рифление, сварка, перфорация, изготовление пакетов, матов, панелей и тд.

Пространство между экранами вакуумируется за счёт сшивания между собой экранов, формируя пакет. Время вакуумирования в открытом космосе составляет от 1 до 5 часов, сутки – гарантированное время. Под давлением остаточного воздуха пакет ЭВТИ может разрушиться, для этого ускоряют процесс, перфорируя отверстиями экраны.

Характеристики пакетов:

- высокое термическое сопротивление от 30 до  $250\text{K}\cdot\text{m}^2/\text{Вт}$ ;
- легкая установка;
- надежность;
- не большая масса: для ПЭТФ 10 слоев от 0,2 до 0,3  $\text{кг}/\text{m}^2$ , для фольги в 4 раза тяжелее. [36-40]

Пример ЭВТИ, который используется на разгонном блоке Д бака окислителя для снижения испарения. Он состоит [19, 4] из нескольких чередующихся слоёв экранов и прокладок. Тепло передаётся теплопроводностью изолирующих

материалов, остаточных газов, тепловым излучением. На космических кораблях и аппаратах используется для обеспечения теплового режима [8].

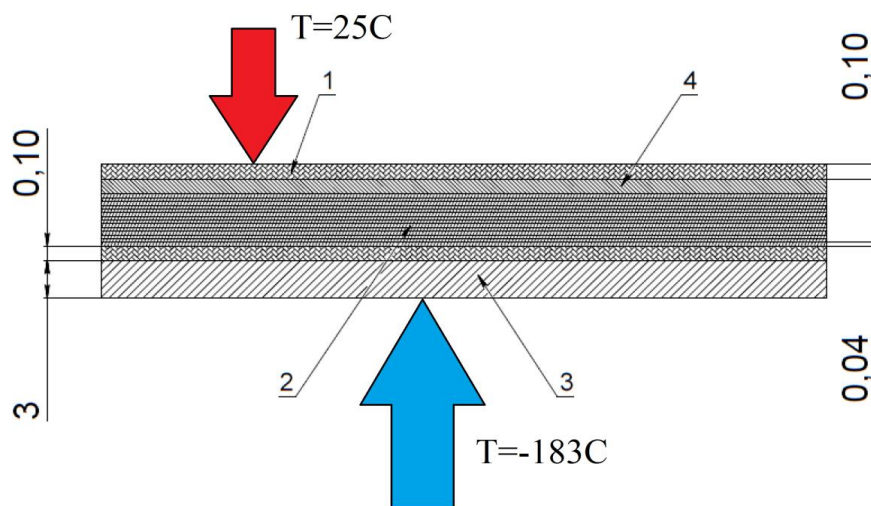


Рисунок 1.8. Слои экранно-вакуумной теплоизоляции (ЭВТИ)

Слои ЭВТИ блока Д (рисунок 1.8):

1. Прокладка – стеклянные (стеклохолст), кварцевые (кремнийорганическая, кремнеземная ткань), минеральные волокна (базальтовая ткань). Толщина прокладки 0.05-0.2 мм.

2. Экран-плёнка из полиэтилена (полиэтилентерефталат или лавсан; ЭВТИ-7) [3] или полиимида с напылением алюминия, серебра [7], золота. Толщина экрана 10-40мкм. Плёнка экрана может быть рифлёной и не рифлёной, иметь двухстороннее и одностороннее напыление. Толщина напыления 0.00127мкм. Количество слоёв – 23. Количество может быть меньше или больше, в зависимости от условий [5, 6]. Укладка экранов может быть экран к экрану или через дополнительную прокладку из стеклоткани или стекловуали [10].

3. Алюминиевая стенка бака 1201 [2]

4. Алюминиевая фольга

Толщина пакета ЭВТИ в сжатом виде ~3.67мм

Таблица 5. Режимы ЭВТИ бака [5]

Критический режим	$T_{\text{внеш}}, \text{ }^{\circ}\text{C}$	$T_{\text{кр}}, \text{ }^{\circ}\text{C}$
● захлаживание	25	-198
● радиация космоса	120-150	-183
Рабочий	25	-183

## 2. Экспериментальное исследование экранно-вакуумной теплоизоляции

Для детального исследования физико-механических характеристик ЭВТИ исследовались образцы производства НПП Полиплен марки ПМ-1ЭУ-ОА с толщиной алюминиевого покрытия:  $0.05 \div 0.09$  мкм (двухстороннее) и толщиной подложки равной 12 мкм. Образцы вырезались из полиимидного металлизированного рулона ширина которой составляла 600мм, рисунок 2.1 [97-99].

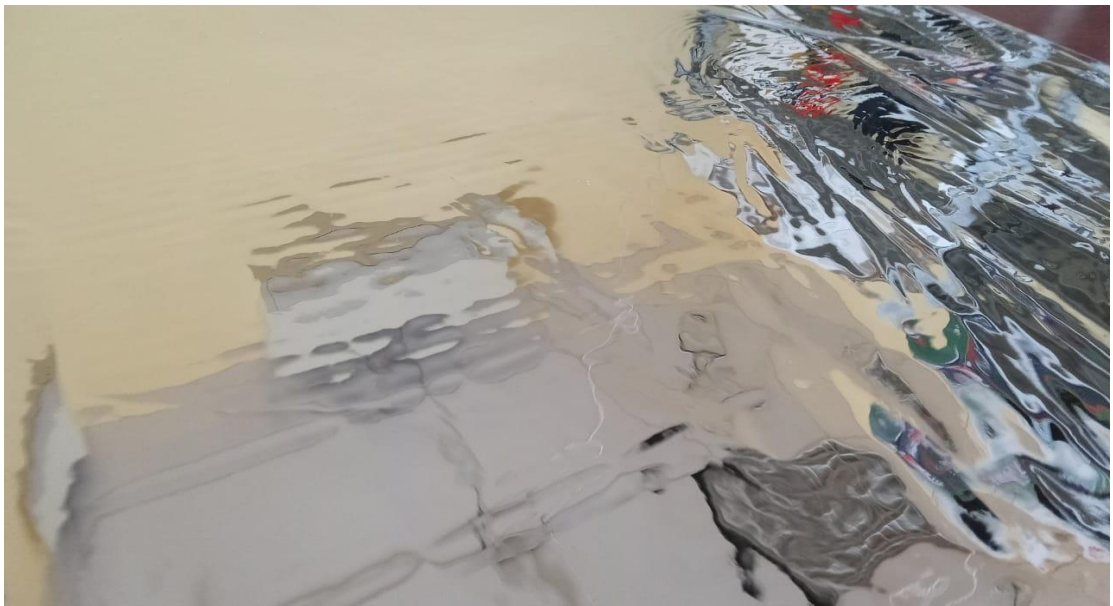


Рисунок 2.1. Полиимидный металлизированный рулон

Образцы для механических испытаний вырезались габаритами 25ммx100мм скальпелем, рисунок 2.2. До механических испытаний проводились структурные исследования пленки с использованием растрового электронного микроскопа (РЭМ) [70-74].

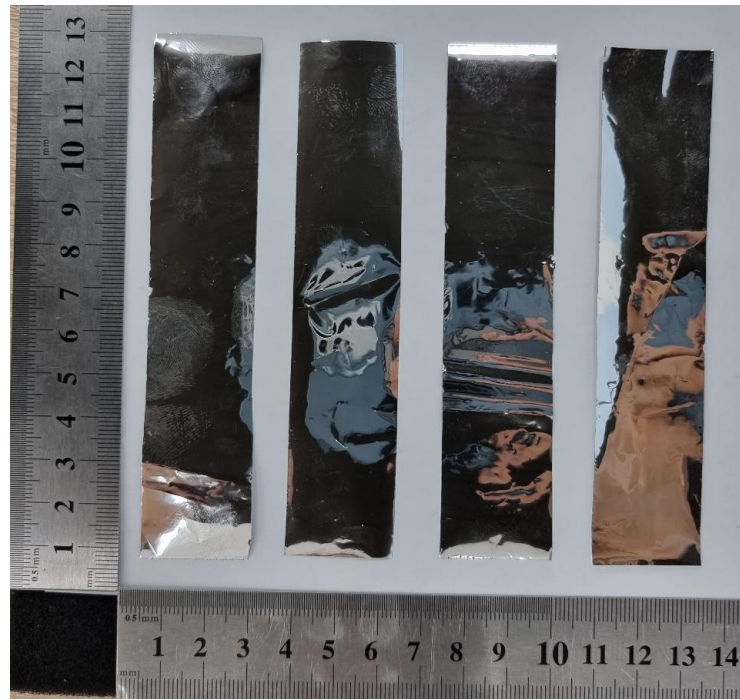


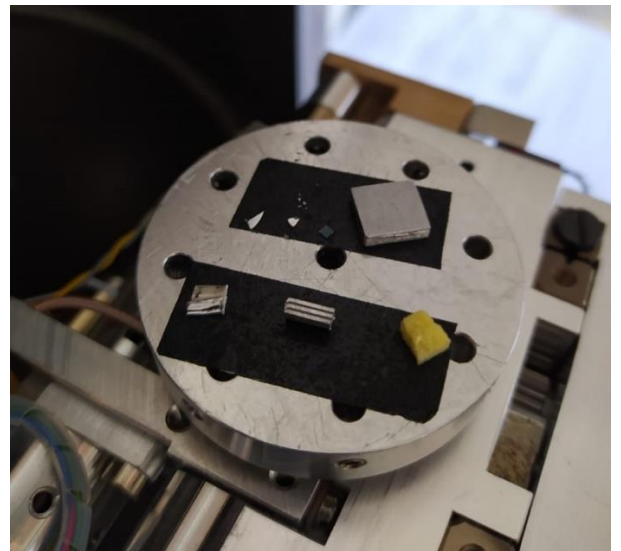
Рисунок 2.2. Образцы для механических испытаний.

## 2.1 Структурные исследования

Для определения микроструктуры и химического состава использовался растровый электронный микроскоп Karl Zeiss 40 (рисунок 2.3а). Исследовались образцы 5 x 5 мм. Исследуемые образцы на платформе микроскопа представлены на рисунке 2.3б.



а)



б)

Рисунок 2.3. (а – растровый электронный микроскоп Karl Zeiss 40, б – исследуемые образцы)



Исследование проводилось при режимах микроскопа: фокусное расстояние 31,5 мм, сила тока 9 рА, напряжение 9 кV. Структура образца представлена на рисунке 2.4.

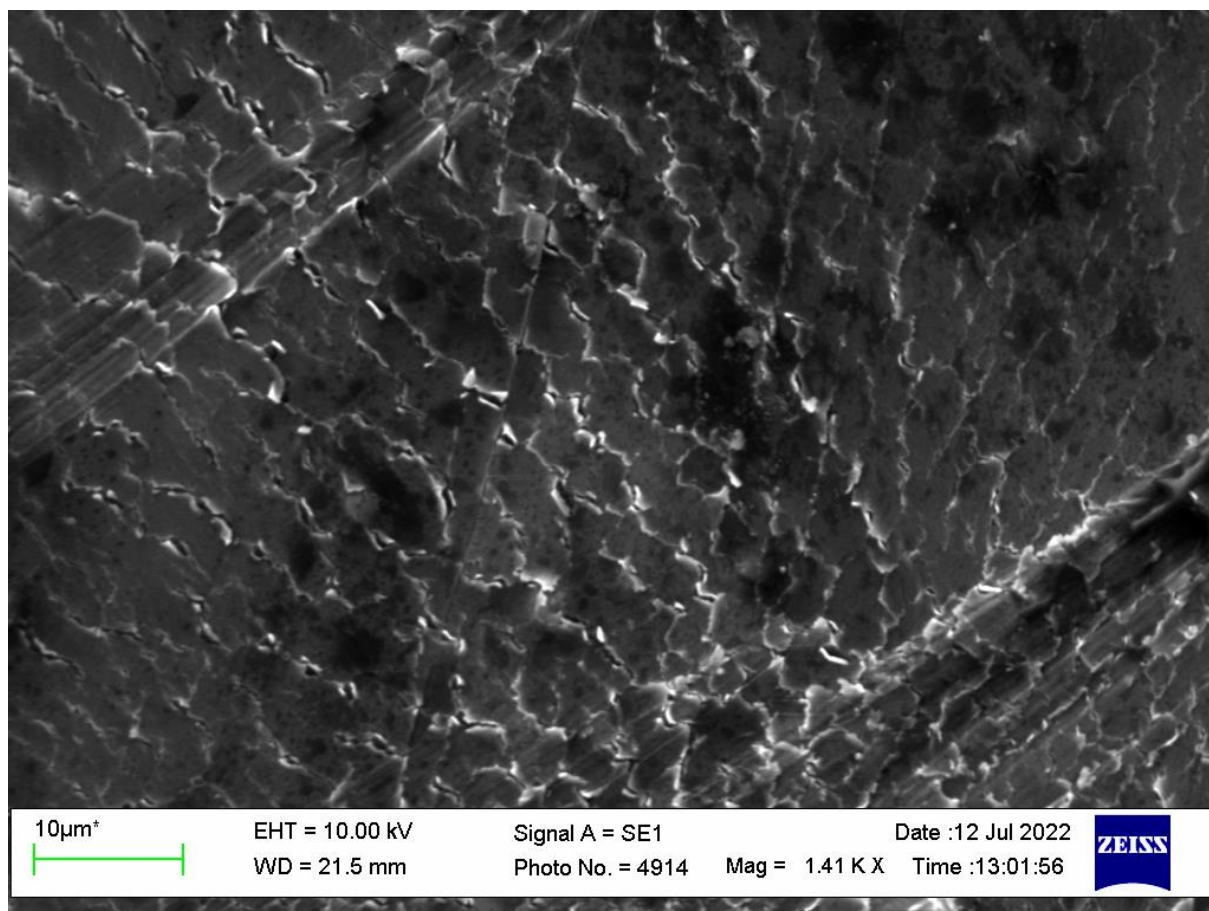


Рисунок 2.4. Структура образца.

По результатам исследования структуры для образцов проверялись характерные размеры слоев, а также наличие дефектов. По результатам в исследуемом образце дефектов обнаружено не было, а размеры слоев представлены на рисунке 2.5. В результате исследования образцов определялась толщина покрытий.

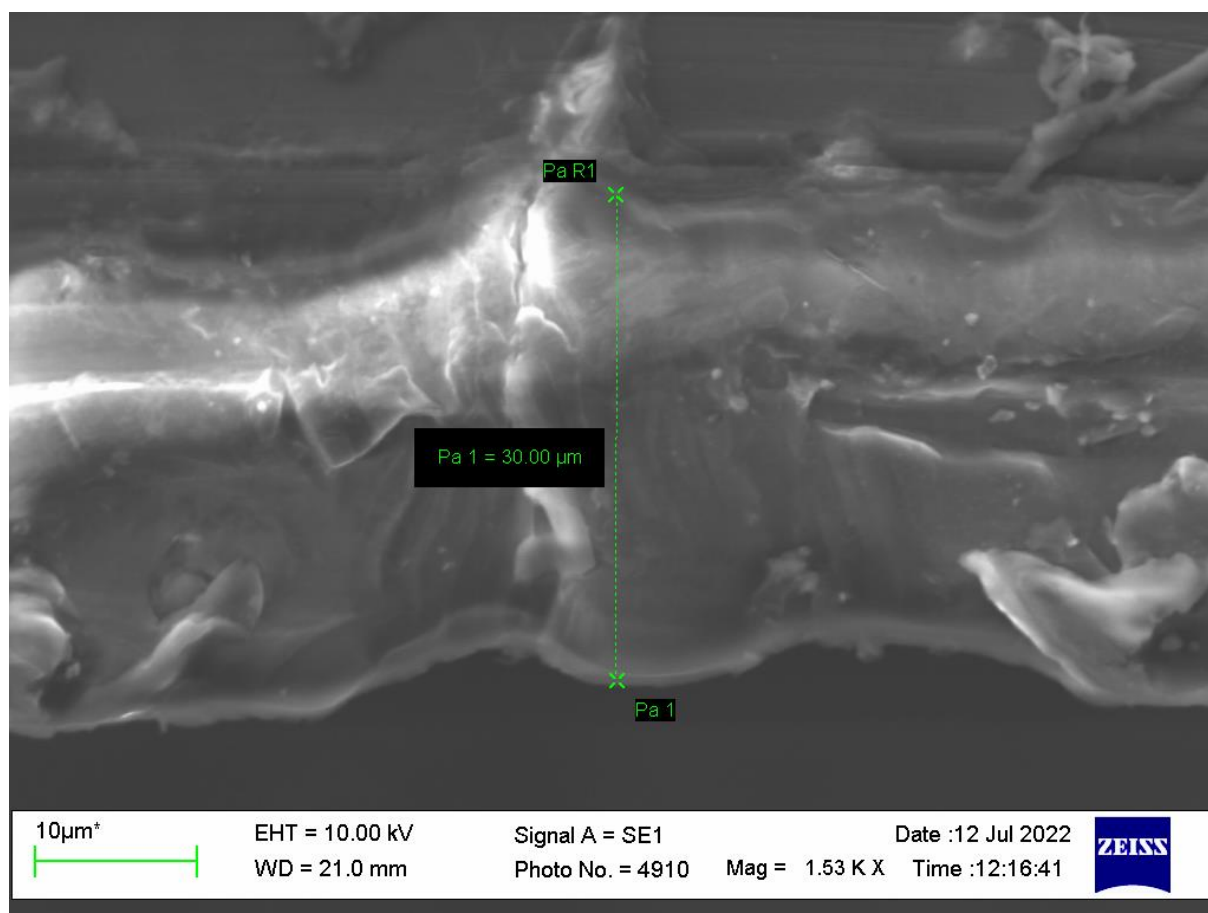


Рисунок 2.5. Размеры слоев структуры

Для проверки исследуемых материалов, заявленных производителями, а также исключением нежелательных элементов проводился химический анализ. Анализ проводился с использованием детектора X-Max и программное обеспечение Aztec с параметрами: входной сигнал SE, разрешение 1024×640 пикселей (по высоте и ширине соответственно), ширина изображения 2,36 мм, высота изображения 1,47 мм, наклон столика и образца 0 градусов, программа по коррекции наклона не применялась, увеличение 119 х, число усредненных кадров 1, время выдержки 10  $\mu$ s, живое время 29,9 s, время обработки 4, ускоряющее напряжение 9 кВ, рабочее расстояние 31,3 мм, наклон образца 0 градусов, угол отбора 35 градусов, энергетический диапазон 10 кэВ, энергия на канал 10 эВ, тип детектора X-Max. Область проведения анализа представлены на рисунке 2.6. Полученный результат представлен на рисунке 2.7.

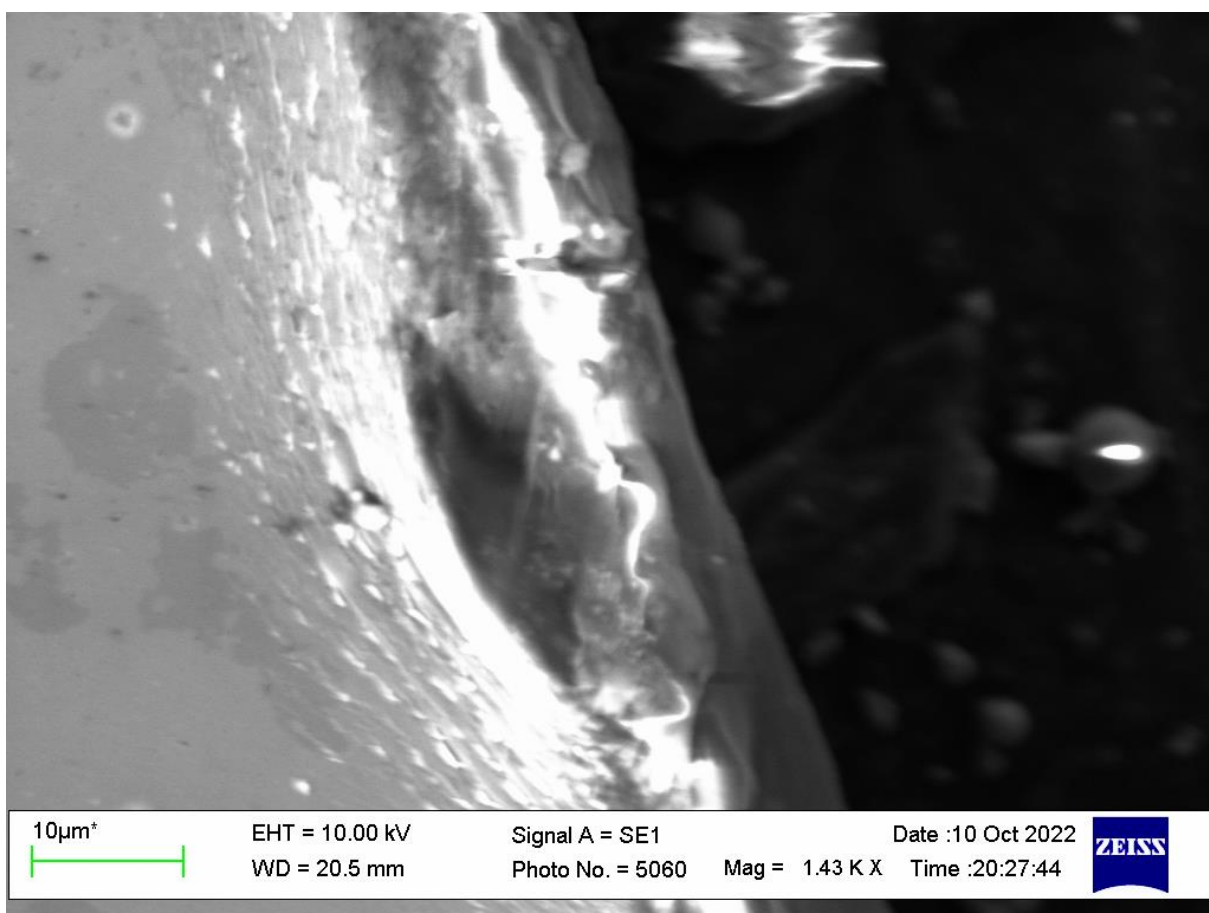


Рисунок 2.6. Область проведения анализа

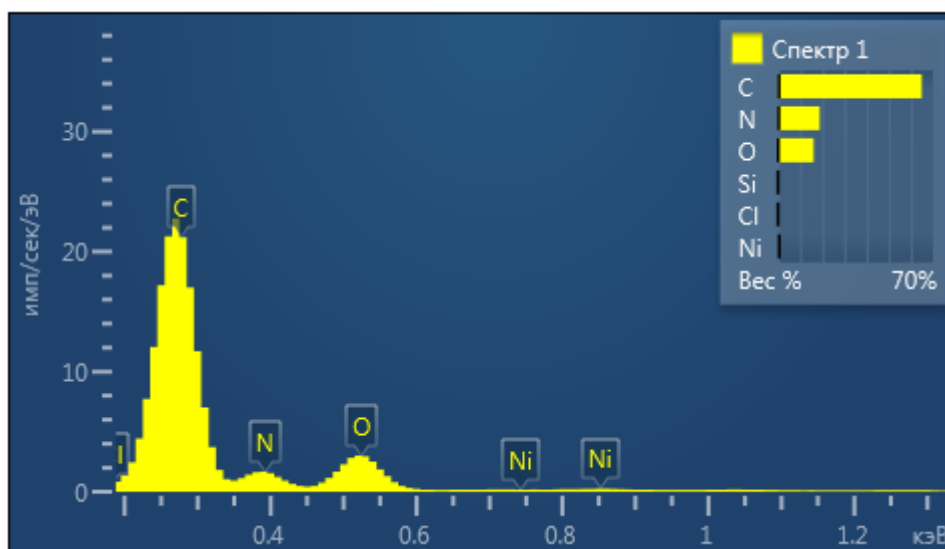


Рисунок 2.7. Результаты определения химического состава.

По результатам химического анализа образцов химический состав образцов соответствует составу, заявленному производителями.

## 2.2 Механические исследования

Механические свойства ЭВТИ определялись в квазистатических испытаниях на растяжение, из которых определялся, в частности, эффективный модуль упругости материала.

Все квазистатические испытания проводились на универсальной электромеханической машине Instron 5969. Скорость движения траверсы в испытаниях на растяжение составляла 0,5 мм/мин. В связи с тем, что образец имел зеркальную поверхность, то использование видеоэкстензометра не представлялось возможным. Для определения истинных деформаций определялась кривая податливости, с учетом которой определялись истинные деформации образца путем вычитания из основных полученных результатов значения податливости. Образец фиксировался в пневматические захваты с прорезиненными губками.

Для определения механических свойств проводились испытания на образцах с геометрическими параметрами длиной  $L = 100$  мм и шириной  $b = 25$  мм. Всего было испытано по 3 однотипных образца, рисунок 2.8. Образец в захватах представлен на рисунке 2.9.

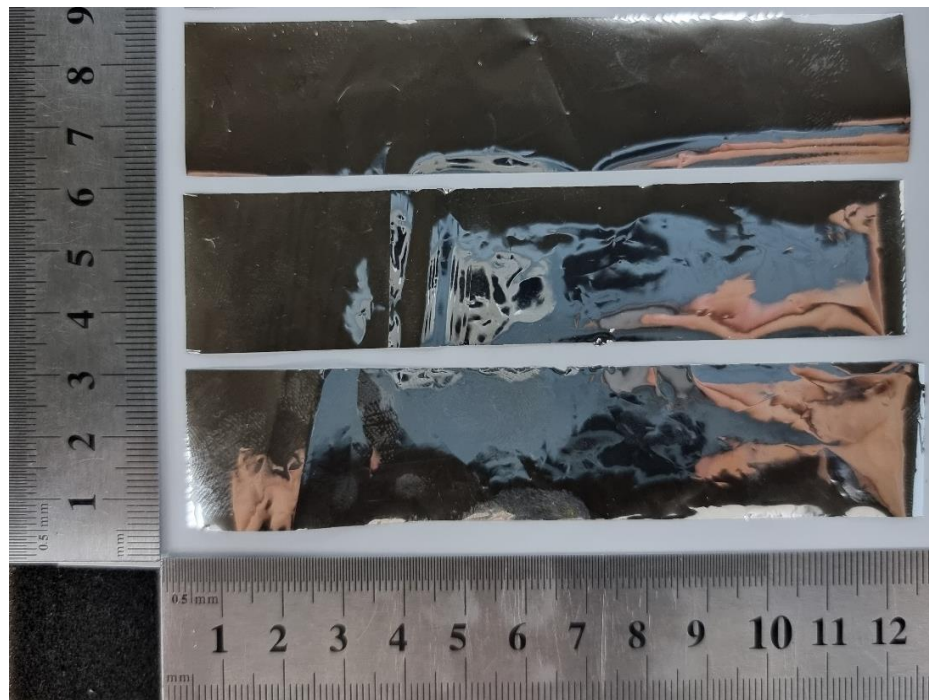


Рисунок 2.8. Образцы до испытаний

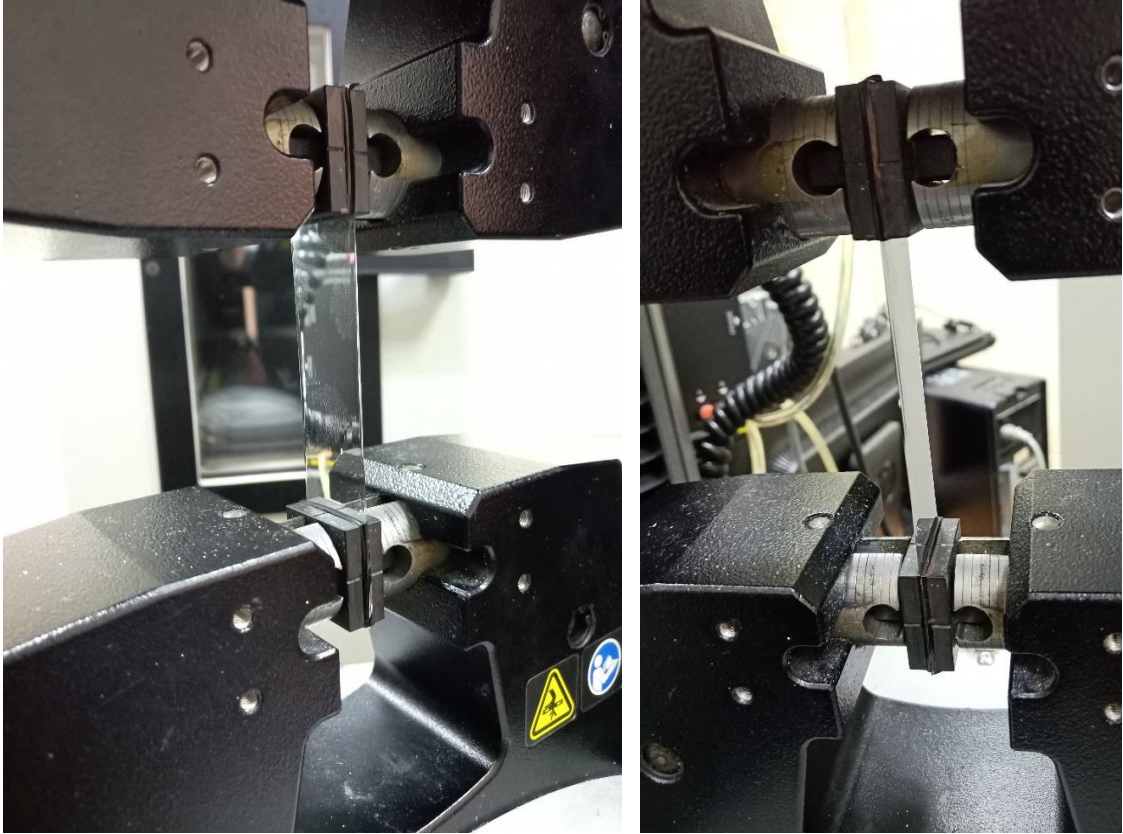


Рисунок 2.9. Установленный образец в испытательной машине

Образец испытывался до разрушения. Образцы после разрушения представлены на рисунке 2.10.



Рисунок 2.10. Образцы после испытаний

Диаграмма податливости представлена на рисунке 2.11.

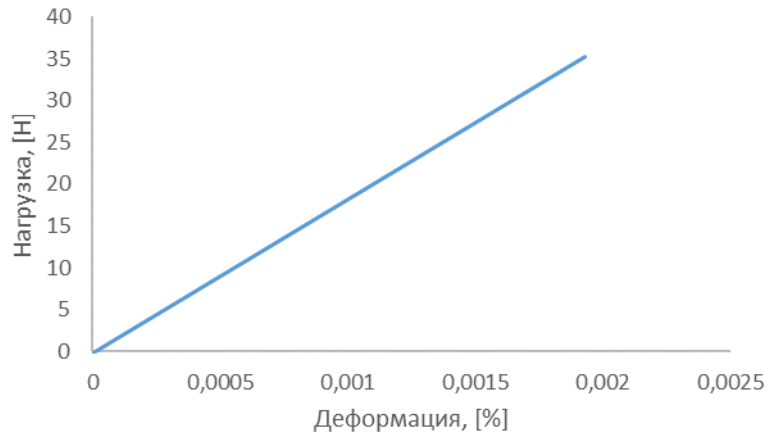


Рисунок 2.11. Диаграмма податливости

Получены диаграмма напряжения – деформации, определенной в испытаниях на растяжение для образца, представленная на рисунке 2.12, а диаграмма перемещение – нагрузка, представленная на рисунке 2.13. В ходе испытания был определен модуль упругости  $E$  равный 9,72 ГПа, а предел прочности составил 13,8 МПа. Коэффициент вариации при этом составлял  $\sim 3\%$ .

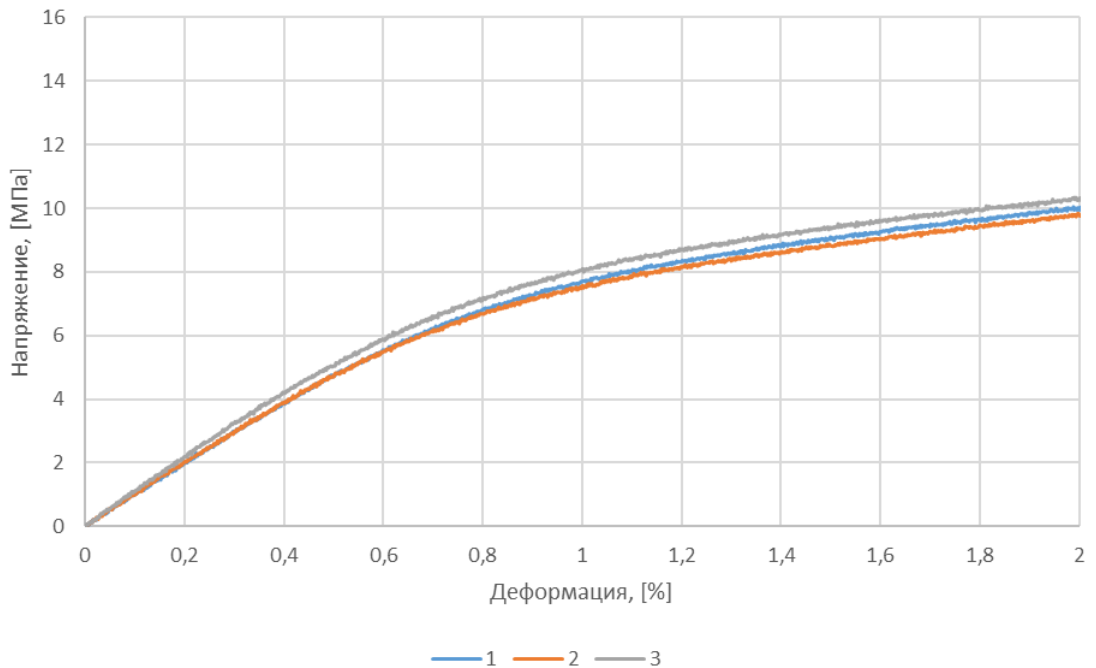


Рисунок 2.12. Диаграмма напряжение - деформация, определенная на испытаниях на растяжение образца

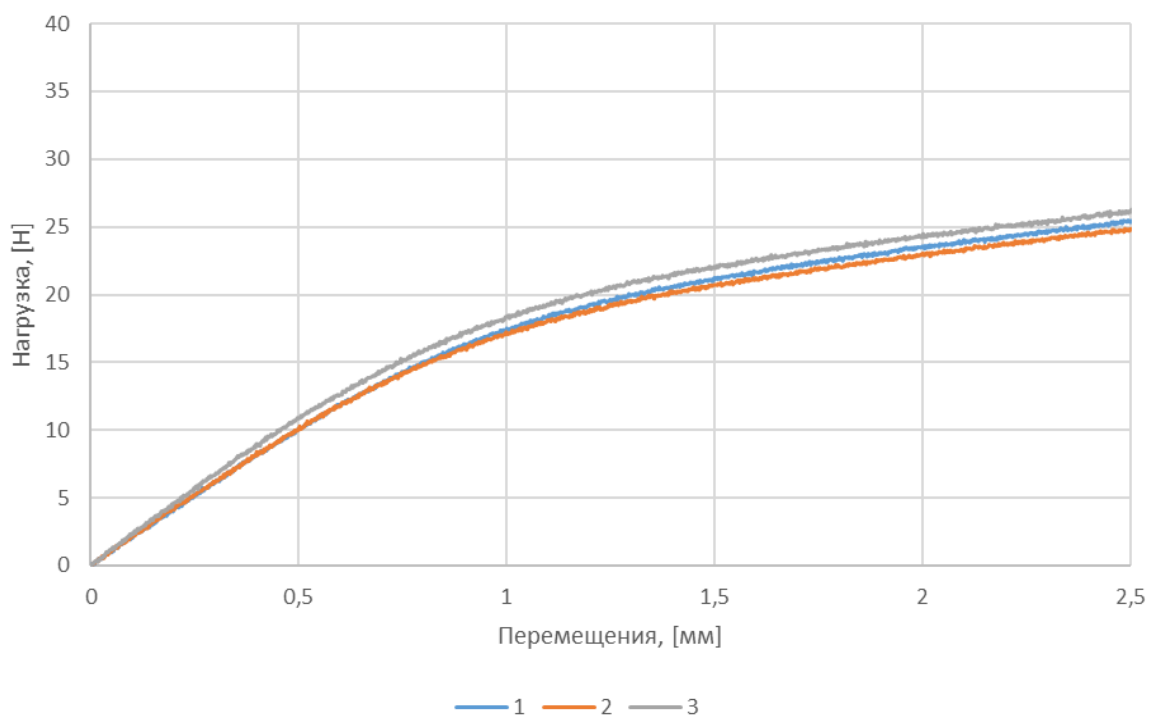


Рисунок 2.13. Диаграмма перемещение – нагрузка, определенная на испытаниях на растяжение образца

## 2.3 Влияние излучения на физико-механические свойства

### 2.3.1 Излучение

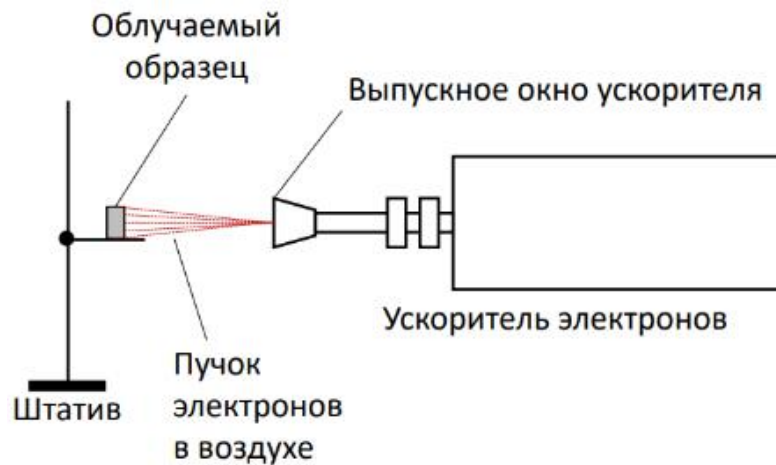
Проводилось исследование влияния излучения на механические характеристики образцов. Облучение проводилось на линейном ускорителе электронов LINS-03-350 (фирмы RadiaBeam Systems, США) с горизонтальным не сканируемым пучком при энергии 3 МэВ, длительности импульса 4 мкс и частоте повторения импульсов 50 Гц. Доза за импульс при воздушном зазоре 26 см составляла  $2,7 \pm 0,1$  Гр. Облучение проводилось на воздухе при температуре 295 К.

Ускоритель представляет собой импульсный резонатор с пролетной трубкой и ускоряющими зазорами, таким образом, ускоряемый пучок приобретает на выходе ускорителя необходимую энергию.

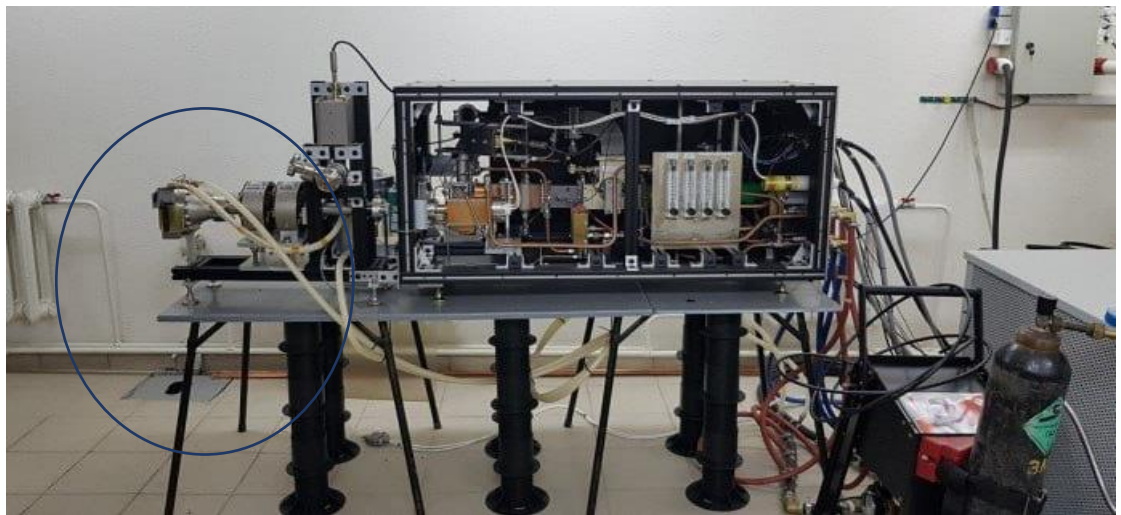
Резонансный контур ускоряющей структуры, представляющий из себя четвертьволновую линию, возбуждается импульсным двухкаскадным высокочастотным (ВЧ) генератором, охваченным контуром обратной связи, стабилизирующим амплитуду ВЧ-напряжения на ускоряющих зазорах. Импульсный автогенератор малой мощности – порядка нескольких киловатт –

служит для предварительного подвозбуждения резонатора и обеспечивает прохождение области низкой добротности при малых амплитудах ВЧ-напряжения и выходе в рабочую точку с большой крутизной. Анодное питание ВЧ-генератора осуществляется от линейного модулятора, задающего длительность импульса ВЧ-напряжения.

Схема излучения и сама установка показана на рисунке 2.14.



а)



б)

Рисунок 2.14. Структурная схема (а) и фото(б) ускорителя ионов

Ускоряемые ионы генерируются в мишенной камере лазерного ионного источника (ЛИИ) и поступают на вход ускоряющего резонатора через согласующий канал с электростатическими линзами и группирователем, обеспечивающим



формирование банчевой структуры пучка на частоте основного ускоряющего резонатора. Генератор ВЧ-группирователя управляется частотой резонансного контура ускоряющей структуры через фазовращатель, обеспечивающий регулирование фазы формируемого сгустка пучка относительно фазы ускоряющего напряжения.

Излучение проводилось при 3-х режимах: 25 кГр, 50 кГр и 100 кГр. При каждом режиме партия состояла из трех однотипных образцов. Исследуемые образцы после излучения визуально никак не отличались друг от друга.

Каждое излучение проводилось при одинаковых условиях:

- Образец размещался напротив выпускного окна ускорителя.
- Расстояние между выпускным окном ускорителя и облучаемым образцом составляло 27 см.
- Эффективный диаметр пучка электронов в месте расположения облучаемого образца – 70 мм
- Равномерность дозы в пучке в месте размещения облучаемого объекта -  $\pm 7\%$
- Время облучения (доза) – 200 с (25 кГр). - Образец помещался в стеклянную пробирку в виде трубочки. - Образец поворачивался на 90 градусов через каждые 50 секунд (для равномерности облучения).

### **2.3.2 Испытания на растяжение после излучения**

Испытания после излучения проводилось при тех же условиях, что и для образцов без излучения. С использованием одного и того же оборудования, универсальной электромеханической машине Instron 5969. Скорость движения траверсы в испытаниях на растяжение составляла 0,5 мм/мин.

Для определения истинных деформаций определялась кривая податливости, с учетом которой определялись истинные деформации образца путем вычитания из основных полученных результатов значения податливости. Образец фиксировался в пневматические захваты с прорезиненными губками.

Для определения механических свойств проводились испытания на образцах для каждого типа образца. Всего было испытано по 3 однотипных образца каждого типа. Исследуемые образцы представлены на рисунке 2.15.

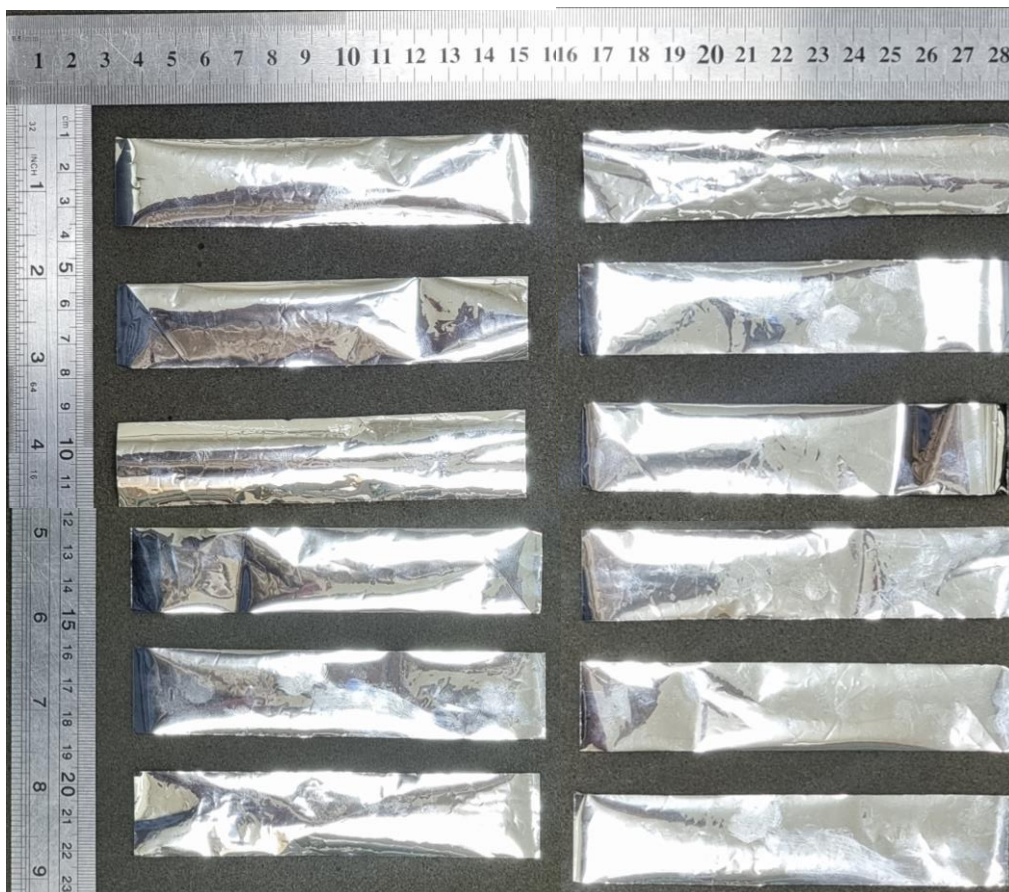


Рисунок 2.15. Образцы для механических испытаний

Образец в захватах представлен на рисунке 2.16. Образцы после испытаний предоставлены на рисунке 2.17.

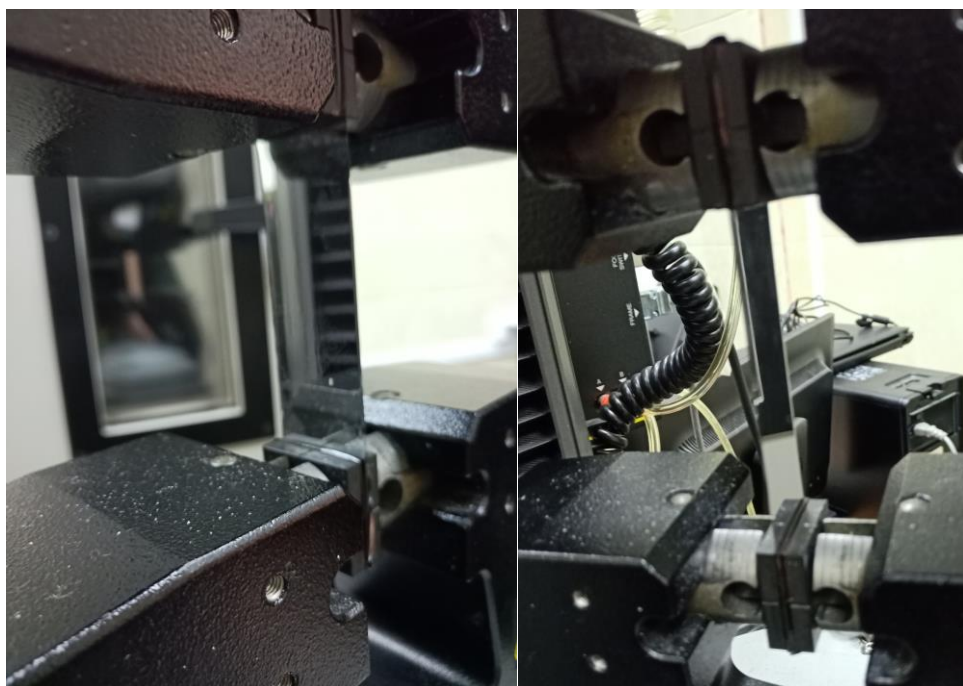


Рисунок 2.16. Установленный образец в испытательной машине

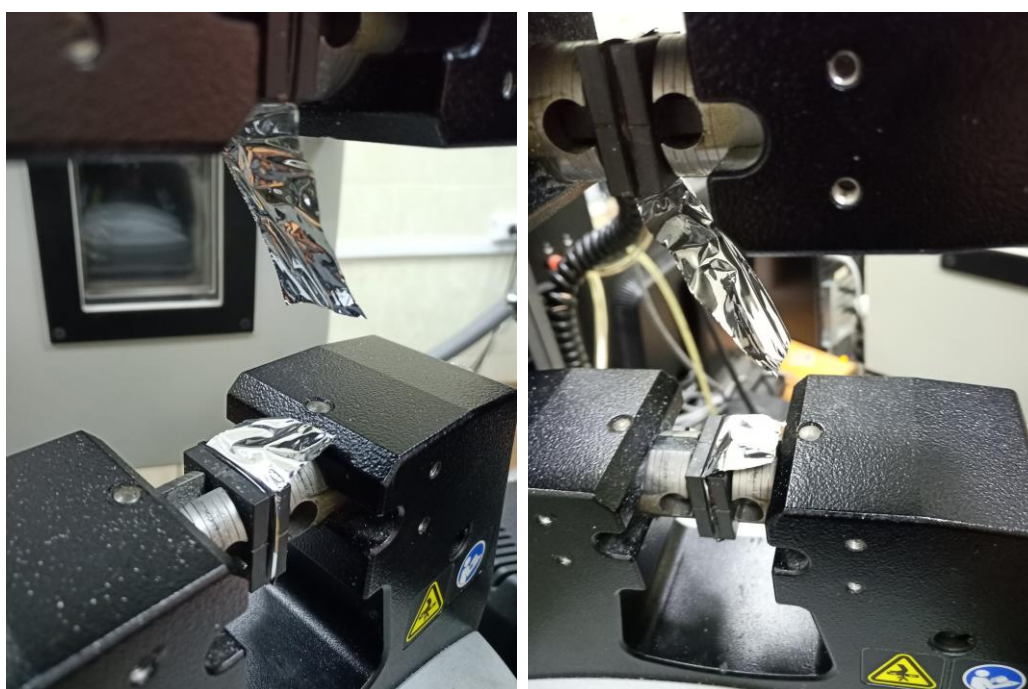


Рисунок 2.17. Образцы после испытаний

Характерные результаты для каждого типа образца представлены на рисунках 2.18–2.19. Диаграмма напряжения – деформации, определенная в испытаниях на растяжение представленная на рисунке 2.18, а диаграмма перемещение – нагрузка, представленная на рисунке 2.19.

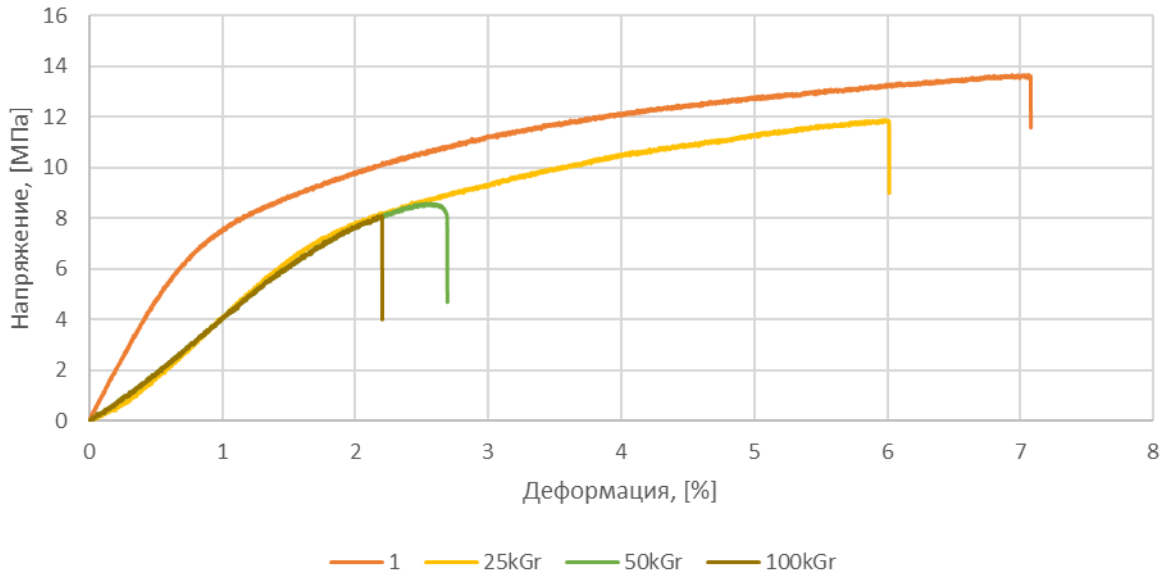


Рисунок 2.18. Диаграмма напряжение - деформация, определенная на испытаниях на растяжение образца

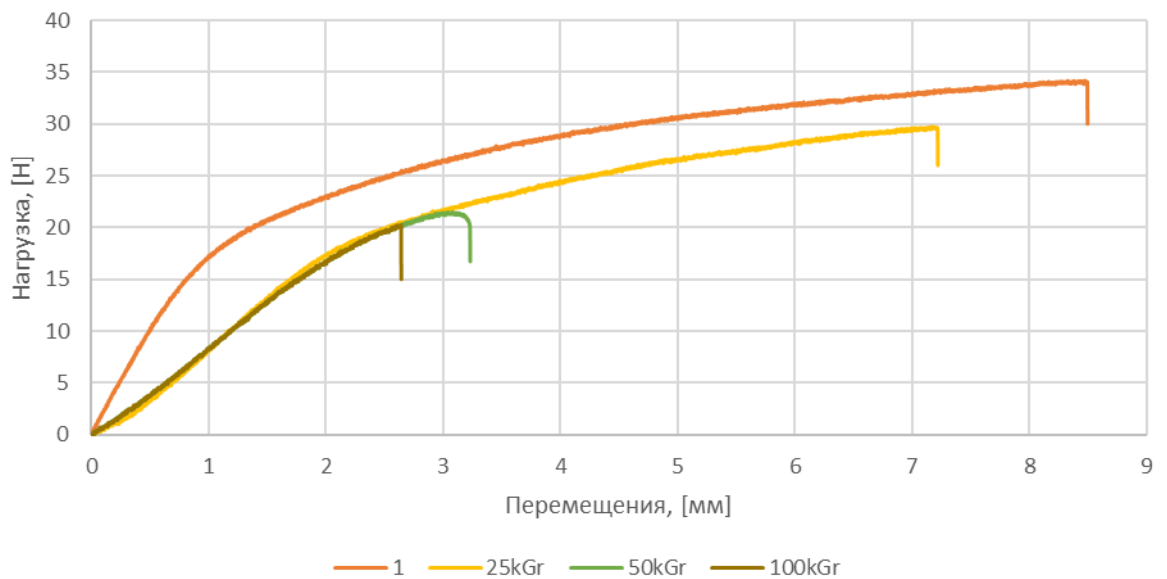


Рисунок 2.19. Диаграмма перемещение – нагрузка, определенная на испытаниях на растяжение образца

Коэффициент вариации в партии для каждого типа образца не превышал 10%. Модуль упругости у необлучённого образца равен 9,72 ГПа, предел прочности составил 13,8 МПа, а деформация 7,07%. Модуль упругости у облучённого образца 25 кГр, равен 4 ГПа, предел прочности составил 11,8 МПа, а деформация 6,01%. Модуль упругости у облучённого образца 50 кГр, равен 3,5 ГПа, предел прочности

составил 8,6 МПа, а деформация 2,69%. Модуль упругости у облучённого образца 100 кГр, равен 3,4 ГПа, предел прочности составил 8 МПа, а деформация 2,2% [85].

С учетом полученных результатов можно сделать выводы, что даже не существенное излучение порядка 25 кГр влияют на модуль упругости материала. Влияние излучения в первую очередь изменяет упругость материала, а при дальнейшем увеличении уровня излучения падает прочность и предельная деформация материала. Увеличение уровня излучения не существенно меняет модуль упругости материала, однако практически соразмерно влияет на прочностные характеристики [80-83].

### 3. Аналитическое моделирование

#### 3.1 Постановка задачи

Рассматривается элемент экранно-вакуумной теплоизоляции, представляющей собой слоистую композитную конструкцию, состоящую из теплозащитного покрытия, которое состоит из слоя стеклоткани, полиамида и алюминиевой подложки. Рассматриваемая теплоизоляция находится под действием температурного поля (рисунок 3.1). Необходимо найти распределения поля температур и тепловых потоков по толщине пакета, а также определить напряженно-деформированное состояние от действия температурного поля.

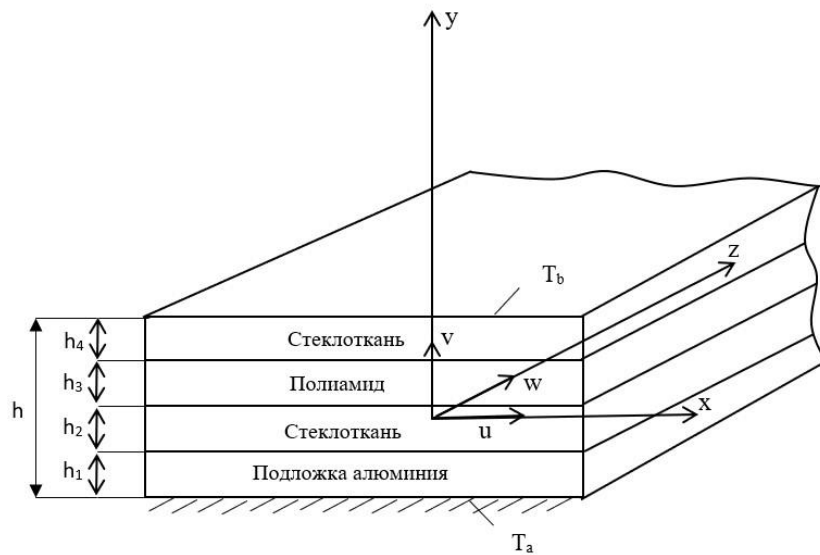


Рисунок 3.1. Общий вид теплоизоляции под действием температурного поля

Для определения поля температур в многослойной конструкции рассмотрим нестационарную задачу теплопроводности на основе четырехслойного однородного пакета. На фронтальной поверхности которого действует температура  $T_a$ , а на тыловой задано охлаждение с температурой  $T_b$ .

Математическая постановка задачи для композитного элемента экранно-вакуумной теплоизоляции, образованной несколькими слоями, состоящими из различных материалов под действием температурного поля расположенного на верхней и нижней поверхности слоя с учетом контактных условий на границах слоев (равенство напряжений и перемещений).

Нестационарное уравнение теплопроводности в этом случае будет иметь вид:

$$\frac{\partial T(t, x, y, z)}{\partial t} - a^2 \nabla^2 T(t, x, y, z) = 0 \quad (3.1)$$

где  $T(t, x, y, z)$  - поле температур,  $t, x, y, z$  - время и система декартовых координат соответственно,  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  - оператор Лапласа,  $a$  - коэффициент теплового расширения материала.

Введем безразмерные параметры:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{c}{a^2} x; \quad \bar{y} = \frac{c}{a^2} y; \\ \bar{z} &= \frac{c}{a^2} z; \quad \bar{\tau} = \frac{c^2}{a^2} t; \quad \bar{T} = \frac{T(t, x, y, z)}{T_0}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

Тогда уравнение (3.1) примет вид:

$$\frac{\partial T(\bar{\tau}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}{\partial \bar{\tau}} - \nabla^2 T(\bar{\tau}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = 0 \quad (3.3)$$

Предположим, что данная конструкция находится в плоском деформированном состоянии. Перемещения  $u(\tau, x, y, z), v(\tau, x, y, z)$  предполагаются не зависящими от координаты  $z$ , тогда как  $w(\tau, x, y, z)$  не зависит от координат  $x, y$ , а его зависимость от  $z$  может быть только линейна, тогда компоненты вектора смещений будут иметь вид (рисунок 3.2):

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y), \quad w = w_0 + \zeta z \quad (3.4)$$

$\zeta$  - деформация в направлении оси  $z$ .

Используя безразмерные параметры (3.2) перемещения (3.4), будут:

$$\bar{u} = u(x, y) \frac{c}{a^2}, \quad \bar{v} = v(x, y) \frac{c}{a^2}, \quad \bar{w} = w_0 \frac{c}{a^2} + \zeta z \frac{c}{a^2} \quad (3.5)$$

Далее штрихи над безразмерными величинами опускаем.

В этих выражениях  $\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$   $\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}$  - параметры Ламе,

$\nu$  - коэффициент Пуассона,  $\alpha$  - коэффициент линейного расширения материала,  $G$

- модуль сдвига,  $c = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$  - скорость распространения волн расширения в упругой среде,  $T_0$  - характерное значение температуры.

Следствием этих предположений является отсутствие касательных напряжений  $\tau_{zx}$ ,  $\tau_{yz}$ :

$$\tau_{zx} = G\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) = 0, \quad \tau_{yz} = G\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) = 0 \quad (3.6)$$

Ненулевые компоненты тензора напряжений также не зависят от координаты  $z$ . Тогда обобщенный закон Гука можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= (2\mu + \lambda)\varepsilon_x + \lambda(\varepsilon_y + \varepsilon_z) - 3K\alpha T \\ \sigma_y &= (2\mu + \lambda)\varepsilon_y + \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_z) - 3K\alpha T \\ \sigma_z &= (2\mu + \lambda)\varepsilon_z + \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y) - 3K\alpha T \\ \tau_{xy} &= G\varepsilon_{xy}, \tau_{xz} = G\varepsilon_{xz}, \tau_{yz} = G\varepsilon_{yz} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Введем безразмерные параметры

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_x &= \frac{\sigma_x}{\lambda + 2\mu}, \quad \bar{\sigma}_y = \frac{\sigma_y}{\lambda + 2\mu}, \quad \bar{\sigma}_z = \frac{\sigma_z}{\lambda + 2\mu} \\ \bar{\tau}_{xy} &= \frac{G}{2\mu + \lambda}\varepsilon_{xy}, \quad \bar{\tau}_{xz} = \frac{G}{2\mu + \lambda}\varepsilon_{xz}, \quad \bar{\tau}_{yz} = \frac{G}{2\mu + \lambda}\varepsilon_{yz} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Тогда с учетом (3.8) получаем:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_x &= \varepsilon_x + \gamma(\varepsilon_y + \varepsilon_z) - \beta\bar{T} \\ \bar{\sigma}_y &= \varepsilon_y + \gamma(\varepsilon_x + \varepsilon_z) - \beta\bar{T} \\ \bar{\sigma}_z &= \varepsilon_z + \gamma(\varepsilon_x + \varepsilon_y) - \beta\bar{T} \\ \bar{\tau}_{xy} &= \gamma\varepsilon_{xy}, \quad \bar{\tau}_{xz} = \gamma\varepsilon_{xz}, \quad \bar{\tau}_{yz} = \gamma\varepsilon_{yz} \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\beta = \frac{3K\alpha T_0}{2\mu + \lambda} = \frac{3(2\mu + 3\lambda)\alpha T_0}{2\mu + \lambda}, \quad \gamma = \frac{\lambda}{2\mu + \lambda} = \frac{\nu}{1 - \nu}, \quad \text{здесь и далее черточки над}$$

безразмерными функциями в (3.5,3.9) опускаем



Здесь  $K = 2\mu + 3\lambda$ ,  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  - нормальные напряжения в направлении соответствующих осей,  $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$  - касательные напряжения.

Ненулевые деформации в (3.9) определяются соотношениями Коши:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \zeta \quad (3.10)$$

Плоская деформация реализуется в призматическом теле, теоретически бесконечной длины, нагруженном поверхностными и объемными силами, перпендикулярными оси  $z$ , интенсивность которых не зависит от  $z$ . Тогда все поперечные сечения тела находятся в одинаковых условиях, чем оправдывается задание перемещений в форме (3.4). Приближенно плоская деформация осуществляется в удаленной от торцов средней части тела конечного протяжения по оси  $z$ .

Уравнения статики при реализации плоской деформации будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \rho K_x &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \rho K_y &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Краевые условия на контуре поперечного сечения тела будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y &= F_x \\ \sigma_y n_y + \tau_{xy} n_x &= F_y \end{aligned} \quad (3.12)$$

Начальные условия предполагаются однородными.

Здесь  $K_x, K_y, F_x, F_y$  - объемные силы и поверхностные силы в направлениях осей  $x, y$  соответственно,  $n_x, n_y$  - внешние нормали,  $\rho$  - плотность.

Используя безразмерные параметры (3.5, 3.8) из (3.11) при отсутствии массовых сил, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x(\tau, y)}{\partial x} &= \frac{\partial^2 u(\tau, y)}{\partial \tau^2} \\ \frac{\partial \sigma_y(\tau, y)}{\partial y} &= \frac{\partial^2 v(\tau, y)}{\partial \tau^2} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Также естественно предположить, что вся композитная структура деформируется в направлении оси  $x$  как одно целое (деформации  $\varepsilon_x^i$  в каждом слое одинаковы и постоянны), и, по сути, в рассматриваемой постановке задачи предполагается справедливость модели Фойхта (параллельного расположения фаз) в направлении плоскости слоя и отсутствуют деформации сдвига. При этом естественно предполагаем, что все компоненты напряженно-деформированного состояния зависят лишь от одной координаты  $y$ , тогда соотношения Коши (3.10) будут:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u(\tau, y)}{\partial x} = 0, \quad \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u(\tau, y)}{\partial y} + \frac{\partial v(\tau, y)}{\partial x} \right] = 0 \quad (3.14)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v(\tau, y)}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \zeta$$

С учетом принятых допущений (3.4, 3.6, 3.10) математическая постановка задачи для  $i$  слоя будет иметь вид:

-уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial T_i(\tau, y)}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 T_i(\tau, y)}{\partial y^2} = 0 \quad (3.15)$$

-напряжения (3.9) в  $i$  слое определяются с учетом соотношений (3.14):

$$\sigma_x^i(\tau, y) = \gamma \left[ \frac{\partial v(\tau, y)}{\partial y} + \zeta \right] - \beta T_i(\tau, y)$$

$$\sigma_y^i(\tau, y) = \frac{\partial v(\tau, y)}{\partial y} + \gamma \zeta - \beta T_i(\tau, y) \quad (3.16)$$

$$\sigma_z^i(\tau, y) = \zeta + \gamma \frac{\partial v(\tau, y)}{\partial y} - \beta T_i(\tau, y)$$

$$\tau_{xy}(\tau, y) = \tau_{xz}(\tau, y) = \tau_{yz}(\tau, y) = 0$$

Уравнения статики при реализации плоской деформации для  $i$  слоя при отсутствии объемных и поверхностных сил будут иметь вид:

$$\frac{\partial \sigma_y^i(\tau, y)}{\partial y} = \frac{\partial^2 v_i(\tau, y)}{\partial \tau^2} \quad (3.17)$$

Начальные условия для системы уравнений (3.15-3.17) предполагаются однородными.

Краевые уравнения для системы уравнений (3.15-3.17) будут:

-краевые условия на стыках для  $i$  слоя имеют вид

$$T_i(\tau, y)\Big|_{y=y_i} = T_{i+1}(\tau, y)\Big|_{y=y_i} \quad \frac{\partial T_i(\tau, y)}{\partial y}\Big|_{y=y_i} = \tilde{\beta}_i \frac{\partial T_{i+1}(\tau, y)}{\partial y}\Big|_{y=y_i} \quad (3.18)$$

$$v_i(\tau, y)\Big|_{y=y_i} = v_{i+1}(\tau, y)\Big|_{y=y_i} \quad \sigma_y^i(\tau, y)\Big|_{y=y_i} = \sigma_y^{i+1}(\tau, y)\Big|_{y=y_i}$$

Здесь  $\tilde{\beta} = \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i}$  где  $\lambda_i$  - теплопроводность

-краевые условия на границе слоев будут

$$T_1(\tau, y)\Big|_{y=0} = T_a \quad v_1(\tau, y)\Big|_{y=0} = 0$$

$$T_4(\tau, y)\Big|_{y=h} = T_b \quad \sigma_y^4(\tau, y) = \frac{\partial v(\tau, y)}{\partial y} + \gamma\zeta - \beta T_4(\tau, y)\Big|_{y=\bar{h}} = 0 \quad (3.19)$$

Где  $\bar{h} = \frac{c}{a^2} h$  - безразмерный параметр толщины,  $\bar{T}_a = \frac{T_a}{T_0}$ ,  $\bar{T}_b = \frac{T_b}{T_0}$  -

безразмерная температура на границе слоя.

В постановке задачи присутствуют дополнительные константы в каждом слое, которые по своему физическому смыслу являются деформациями в направлении оси  $x$  из которых образована композитная слоистая структура. Эти константы следует определять из интегрального условия равновесия слоя:

$$\sum_{i=1}^N \int_{y_i}^{y_{i+1}} \sigma_x^i(\tau, y) dy = 0 \quad (3.20)$$

Таким образом, система уравнений (3.15-3.17) с краевыми условиями (3.18-3.19) при однородных начальных условиях представляет собой математическую постановку задачи для определения температурного поля и напряженно-деформированного состояния в современных элементах экранно-вакуумной теплоизоляции космического аппарата.

### 3.2 Тестовая задача

В качестве тестовой рассмотрим задачу нестационарной теплопроводности по определению напряженно-деформированного состояния элементов экранно-вакуумная теплоизоляции, состоящей из одного слоя (рисунок 3.2), полагая при этом равенства нулю деформации в направлении оси  $z$  ( $\zeta = 0$ ).

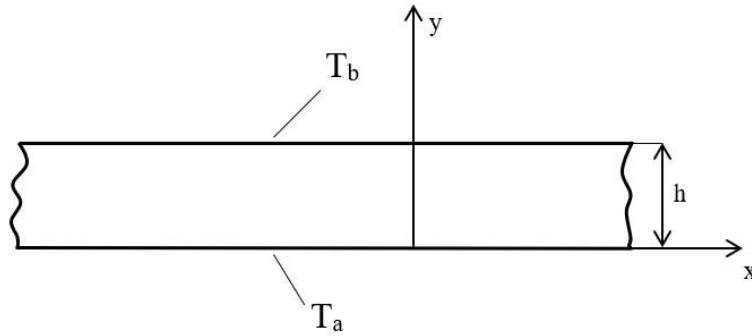


Рисунок 3.2. Общий вид стержня,  $h$  – толщина слоя

Математическая постановка задачи в этом случае будет иметь вид:

$$\frac{\partial T(\tau, y)}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 T(\tau, y)}{\partial y^2} = 0 \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} \sigma_x(\tau, y) &= \gamma \frac{\partial v(\tau, y)}{\partial y} - \beta T(\tau, y) \\ \sigma_y(\tau, y) &= \frac{\partial v(\tau, y)}{\partial y} - \beta T(\tau, y) \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} \sigma_z(\tau, y) &= \gamma \frac{\partial v(\tau, y)}{\partial y} - \beta T(\tau, y) \\ \frac{\partial \sigma_y(\tau, y)}{\partial x} &= \frac{\partial^2 v(\tau, y)}{\partial \tau^2} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Краевые и начальные условия примут вид:

$$\begin{aligned} T(\tau, y)|_{t=0} &= 0, \\ T(\tau, y)|_{y=0} &= T_a \quad T(\tau, y)|_{y=h} = T_b \\ v(\tau, y)|_{y=0} &= 0 \quad \sigma_y(\tau, y)|_{y=h} = \frac{\partial v(\tau, y)}{\partial y} - \beta T(\tau, y)|_{y=h} = 0 \end{aligned} \quad (3.24)$$

Для решения поставленной задачи применим к системе уравнений (3.15–3.18) и краевыми условиями (3.19) интегральное преобразование Лапласа по времени  $t$ :

$$T^L(s, y) = \int_0^{\infty} e^{-s\tau} T(\tau, y) d\tau \quad v^L(s, y) = \int_0^{\infty} e^{-s\tau} v(\tau, y) d\tau \quad (3.25)$$

Где  $\bar{s} = s \frac{a^2}{c^2}$  - безразмерный параметр преобразования Лапласа.

Применяя соотношения (3.25) к системе уравнений (3.21-3.23) с краевыми условиями (3.24) получаем обыкновенные дифференциальные уравнения относительно трансформант.

$$\frac{d^2 T^L(\tau, y)}{dy^2} - s T^L(\tau, y) = 0 \quad (3.26)$$

$$\sigma_x^L(s, y) = \gamma \frac{dv^L(s, y)}{dy} - \beta T^L(s, y)$$

$$\sigma_y^L(s, y) = \frac{dv^L(s, y)}{dy} - \beta T^L(s, y) \quad (3.27)$$

$$\sigma_z^L(s, y) = \gamma \frac{dv^L(s, y)}{dy} - \beta T^L(s, y)$$

$$\frac{d\sigma_y^L(s, y)}{dy} = s^2 v^L(s, y) \quad (3.28)$$

Краевые и начальные условия примут вид:

$$T^L(s, y) \Big|_{y=0} = \frac{T_a}{s} \quad T^L(s, y) \Big|_{y=h} = \frac{T_b}{s} \quad (3.29)$$

$$v^L(s, y) \Big|_{y=0} = 0$$

$$\sigma_y^L(s, y) \Big|_{y=h} = \frac{dv^L(s, y)}{dy} - \beta T^L(s, y) \Big|_{y=h} = 0 \quad (3.30)$$

Сначала решим уравнение теплопроводности. Решение этого уравнения имеет вид:

$$T^L(s, y) = c_1 e^{\sqrt{s}y} + c_2 e^{-\sqrt{s}y} \quad (3.31)$$

Удовлетворяя (3.31) краевым условиям (3.29), получаем трансформанту распределения температуры по толщине слоя и ее производную

$$T^L(s, y) = \frac{T_a \left[ e^{-\sqrt{s}y} - e^{-\sqrt{s}(2h-y)} \right] + T_b \left[ e^{-\sqrt{s}(h-y)} - e^{-\sqrt{s}(h+y)} \right]}{s(1 - e^{-2\sqrt{s}h})} \quad (3.32)$$

$$\frac{dT^L(s, y)}{dy} = -\frac{T_a \left[ e^{-\sqrt{s}y} + e^{-\sqrt{s}(2h-y)} \right] + T_b \left[ e^{-\sqrt{s}(h-y)} + e^{-\sqrt{s}(h+y)} \right]}{\sqrt{s}(1 - e^{-2\sqrt{s}h})} \quad (3.33)$$

Подставляя выражение (3.33) и трансформанту  $\sigma_y^L(s, y)$  из системы (3.27) в уравнение (3.28), получаем:

$$\frac{d^2 v^L(s, y)}{dy^2} - s^2 v^L(s, y) = \beta \frac{-T_a \left[ e^{-\sqrt{s}y} - e^{-\sqrt{s}(2h-y)} \right] + T_b \left[ e^{-\sqrt{s}(h-y)} + e^{-\sqrt{s}(h+y)} \right]}{\sqrt{s}(1 - e^{-2\sqrt{s}h})} \quad (3.34)$$

Решение уравнения (3.34) будет

$$v^L(s, y) = C_1 e^{sy} + C_2 e^{-sy} - \beta \frac{T_a \left[ e^{-\sqrt{s}y} + e^{-\sqrt{s}(2h-y)} \right] - T_b \left[ e^{-\sqrt{s}(h-y)} + e^{-\sqrt{s}(h+y)} \right]}{s\sqrt{s}(s-1)(1 - e^{-2h\sqrt{s}})} \quad (3.35)$$

Тогда,

$$\frac{dv^L(s, y)}{dy} = s(C_1 e^{sy} - C_2 e^{-sy}) + \frac{\beta T^L(s, y)}{s-1} \quad (3.36)$$

Трансформанты нормальных напряжений будут иметь вид:

$$\sigma_x^L(s, y) = \gamma s(C_1 e^{sy} - C_2 e^{-sy}) + \beta T^L(s, y) \left( \frac{\gamma}{s-1} - 1 \right) \quad (3.37)$$

$$\sigma_y^L(s, y) = s(C_1 e^{sy} - C_2 e^{-sy}) + \beta T^L(s, y) \frac{2-s}{s-1} \quad (3.38)$$

$$\sigma_z^L(s, y) = \gamma s(C_1 e^{sy} - C_2 e^{-sy}) + \beta T^L(s, y) \left( \frac{\gamma}{s-1} - 1 \right) \quad (3.39)$$

Постоянные интегрирования  $C_1, C_2$  определяются из краевых условий (3.30), тогда получаем систему алгебраических уравнений (здесь и далее полагаем  $\zeta = 0$ ):

$$C_1 + C_2 - \beta \frac{T_a (1 + e^{-2h\sqrt{s}}) - 2T_b e^{-h\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}(s-1)(1 - e^{-2h\sqrt{s}})} = 0 \quad (3.40)$$

$$C_1 e^{sh} - C_2 e^{-sh} + \beta \frac{(2-s)T_b}{s^2(s-1)} = 0 \quad (3.41)$$

Решение этой системы уравнений будет иметь вид:

$$C_1 = \beta \frac{T_a (1 + e^{-2h\sqrt{s}}) e^{-2sh} - 2T_b e^{-3sh}}{s\sqrt{s}(s-1)(1 - e^{-2h\sqrt{s}})(1 + e^{-2sh})} - \beta \frac{T_b (2-s) e^{-sh}}{s^2(s-1)(1 + e^{-2sh})} \quad (3.42)$$

$$C_2 = \beta \frac{T_a (1 + e^{-2h\sqrt{s}}) - 2T_b e^{-sh}}{s\sqrt{s}(s-1)(1 - e^{-2h\sqrt{s}})(1 + e^{-2sh})} + \beta \frac{T_b (2-s) e^{-sh}}{s^2(s-1)(1 + e^{-2sh})} \quad (3.43)$$

Сначала определим оригинал трансформанты  $T^L(s, y)$ , для этого преобразуем формулу (3.32) к виду:

$$T^L(s, y) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left\{ \frac{T_a \left[ e^{-\sqrt{s}(y+2nh)} - e^{-\sqrt{s}[2h(1+n)-y]} \right]}{s} + \frac{T_b \left[ e^{-\sqrt{s}[h(1+2n)-y]} - e^{-\sqrt{s}[h(1+2n)+y]} \right]}{s} \right\} \quad (3.44)$$

Учитывая то, что выражение (3.44) состоит из суммы трансформант  $\frac{e^{-x\sqrt{s}}}{s}$ , оригинал этой трансформанты определяется достаточно просто из таблиц с использованием свойств преобразования Лапласа:

$$T(\tau, y) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left\{ T_a \left[ \Phi_1 \left( \frac{2hn+y}{a}, \tau \right) - \Phi_1 \left( \frac{2h(n+1)-y}{a}, \tau \right) \right] + T_b \left[ \Phi_1 \left( \frac{(2n+1)h-y}{a}, \tau \right) - \Phi_1 \left( \frac{(2n+1)h+y}{a}, \tau \right) \right] \right\} \quad (3.45)$$

В этом выражении  $\frac{e^{-x\sqrt{s}}}{s} \rightarrow^L \Phi_1(t, x) = \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{t}}$

Подставляя постоянные интегрирования (3.42-3.43) в соотношения (3.35, 3.37-3.39) получаем трансформанты перемещений и напряжений. После соответствующих преобразований получаем:

$$v^L(s, y) = \beta T_a \left\{ \frac{(1 + e^{-2h\sqrt{s}})(e^{-sy} + e^{-s(2h-y)})}{s\sqrt{s}(s-1)(1 - e^{-2h\sqrt{s}})(1 + e^{-2sh})} - \frac{e^{-\sqrt{s}y} + e^{-\sqrt{s}(2h-y)}}{s\sqrt{s}(s-1)(1 - e^{-2h\sqrt{s}})} \right\} \\ + \beta T_b \left\{ \frac{-2[e^{-s(3h-y)} + e^{-s(h+y)}]}{s\sqrt{s}(s-1)(1 - e^{-2h\sqrt{s}})(1 + e^{-2sh})} - \frac{(2-s)[e^{-s(h-y)} - e^{-s(h+y)}]}{s^2(s-1)(1 + e^{-2sh})} - \right. \\ \left. - \frac{e^{-\sqrt{s}(h-y)} + e^{-\sqrt{s}(h+y)}}{s\sqrt{s}(s-1)(1 - e^{-2h\sqrt{s}})} \right\} \quad (3.46)$$

$$\sigma_x^L(s, y) = \sigma_z^L(s, y) = \beta T_a \left\{ \gamma \frac{(1 + e^{-2h\sqrt{s}})[e^{-s(2h-y)} - e^{-sy}]}{\sqrt{s}(s-1)(1 - e^{-2h\sqrt{s}})(1 + e^{-2sh})} + \right. \\ \left. + \left( \frac{\gamma}{s-1} - 1 \right) \frac{[e^{-\sqrt{s}y} - e^{-\sqrt{s}(2h-y)}]}{s(1 - e^{-2h\sqrt{s}})} \right\} + \\ + \beta T_b \left\{ \gamma \frac{-2[e^{-s(3h-y)} - e^{-s(h+y)}]}{\sqrt{s}(s-1)(1 - e^{-2h\sqrt{s}})(1 + e^{-2sh})} - \gamma \frac{(2-s)[e^{-s(h-y)} + e^{-s(h+y)}]}{s(s-1)(1 + e^{-2sh})} - \right. \\ \left. + \left( \frac{\gamma}{s-1} - 1 \right) \frac{[e^{-\sqrt{s}(h-y)} - e^{-\sqrt{s}(h+y)}]}{s(1 - e^{-2h\sqrt{s}})} \right\} \quad (3.47)$$



$$\begin{aligned}
\sigma_y^L(s, y) &= s(C_1 e^{sy} - C_2 e^{-sy}) + \beta T^L(s, y) \frac{2-s}{s-1} = \\
&= \beta T_a \left\{ \frac{(1 + e^{-2h\sqrt{s}}) [e^{-s(2h-y)} - e^{-sy}]}{\sqrt{s}(s-1)(1 - e^{-2h\sqrt{s}})(1 + e^{-2sh})} + \frac{2-s}{s-1} \frac{[e^{-\sqrt{s}y} - e^{-\sqrt{s}(2h-y)}]}{s(1 - e^{-2h\sqrt{s}})} \right\} + \\
&+ \beta T_b \left\{ \frac{-2[e^{-s(3h-y)} - e^{-s(h+y)}]}{\sqrt{s}(s-1)(1 - e^{-2h\sqrt{s}})(1 + e^{-2sh})} - \gamma \frac{(2-s)[e^{-s(h-y)} + e^{-s(h+y)}]}{s(s-1)(1 + e^{-2sh})} - \right. \\
&\left. + \frac{2-s}{s-1} \frac{[e^{-\sqrt{s}(h-y)} - e^{-\sqrt{s}(h+y)}]}{s(1 - e^{-2h\sqrt{s}})} \right\} \quad (3.48)
\end{aligned}$$

Далее представим трансцендентные составляющие знаменателей в (3.46-3.48) в виде ряда, получаем выражения для трансформант перемещений и напряжений:

$$\begin{aligned}
v^L(s, y) &= \beta T_a \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{-2hn\sqrt{s}} + e^{-2h(n+1)\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}(s-1)} \sum_{m=0}^{\infty} [e^{-s(2hm+y)} + e^{-s[2h(m+1)-y]}] - \right. \\
&- \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{-\sqrt{s}(2hn+y)} + e^{-\sqrt{s}(2h(n+1)+y)}}{s\sqrt{s}(s-1)} \left. \right\} + \\
&+ T_b \beta \left\{ -2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{-2hn\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}(s-1)} \sum_{m=0}^{\infty} [e^{-s[h(3+2m)-y]} + e^{-s[h(2m+1)-y]}] - \right. \\
&- \frac{2-s}{s^2(s-1)} \sum_{m=0}^{\infty} [e^{-s[h(2m+1)-y]} - e^{-s[h(2m+1)+y]}] - \\
&\left. - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{-\sqrt{s}(h(2n+1)-y)} + e^{-\sqrt{s}(h(2n+1)+y)}}{s(s-1)\sqrt{s}} \right\} \quad (3.49)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_x^L(s, y) &= \sigma_z^L(s, y) = \\
&= \beta T_a \left\{ \gamma \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[ e^{-2hn\sqrt{s}} + e^{-2h(n+1)\sqrt{s}} \right] \sum_{m=0}^{\infty} \left[ e^{-s(2h(m+1)-y)} - e^{-s(2hm+y)} \right]}{\sqrt{s}(s-1)} + \right. \\
&+ \left. \left( \frac{\gamma}{s-1} - 1 \right) \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[ e^{-(2hn+y)\sqrt{s}} - e^{-\sqrt{s}(2h(n+1)-y)} \right]}{s} \right\} + \\
&+ \beta T_b \left\{ -2\gamma \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-2hn\sqrt{s}} \sum_{m=0}^{\infty} \left[ e^{-s(h(3+2m)-y)} - e^{-s(h(m+1)+y)} \right]}{\sqrt{s}(s-1)} - \right. \\
&- \gamma \frac{2-s}{s(s-1)} \sum_{m=0}^{\infty} \left[ e^{-s(h(1+2m)-y)} + e^{-s(h(m+1)+y)} \right] + \\
&+ \left. \left( \frac{\gamma}{s-1} - 1 \right) \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[ e^{-s(h(1+2n)-y)} - e^{-s(h(1+2n)+y)} \right] e^{-2hn\sqrt{s}}}{s} \right\} \quad (3.50)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_y^L(s, y) = & \beta T_a \left\{ \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[ e^{-2hn\sqrt{s}} + e^{-2h(n+1)\sqrt{s}} \right] \sum_{m=0}^{\infty} \left[ e^{-s(2h(m+1)-y)} - e^{-s(2hm+y)} \right]}{\sqrt{s}(s-1)} \right\} + \\
& + \frac{2-s}{s-1} \left\{ \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[ e^{-(2hn+y)\sqrt{s}} - e^{-\sqrt{s}(2h(n+1)-y)} \right]}{s} \right\} + \\
& + \beta T_b \left\{ -2 \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-2hn\sqrt{s}} \sum_{m=0}^{\infty} \left[ e^{-s(h(3+2m)-y)} - e^{-s(h(m+1)+y)} \right]}{\sqrt{s}(s-1)} \right\} - \\
& - \gamma \frac{2-s}{s(s-1)} \sum_{m=0}^{\infty} \left[ e^{-s(h(1+2m)-y)} + e^{-s(h(m+1)+y)} \right] + \\
& + \frac{2-s}{s-1} \left\{ \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[ e^{-s(h(1+2n)-y)} - e^{-s(h(1+2n)+y)} \right] e^{-2hn\sqrt{s}}}{s} \right\} \quad (3.51)
\end{aligned}$$

Оригиналы выражений (3.49-3.51) достаточно просто находятся при использовании свойств преобразования Лапласа, таблиц и интеграла свертки. Составляющие этих выражений будут иметь вид:

$$\begin{aligned}
\frac{e^{-x\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}(s-1)} e^{ys} & \rightarrow^L \Phi_2(t+y, x) \\
\Phi_2(t, x) & = \frac{e^{t-x}}{2} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2t-x}{2\sqrt{t}}\right) - \frac{e^{t+x}}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{2t+x}{2\sqrt{t}}\right) + x \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) - 2\sqrt{\frac{t}{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \quad (52) \\
\frac{2-s}{s^2(s-1)} e^{ys} & \rightarrow^L \Phi_3(t+y) = e^{t+y} - 2(t+y) - 1 \\
\Phi_3(t) & = e^t - 2t - 1
\end{aligned}$$

Используя соотношения (3.52) получаем оригинал функции перемещений:

$$\begin{aligned}
v(\tau, y) = & \beta T_a \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \Phi_2(\tau - 2hm - y, 2hn) + \Phi_2(\tau - 2hm - y, 2h(n+1)) + \right. \right. \\
& + \Phi_2(\tau - 2h(m+1) + y, 2hn) + \Phi_2(\tau - 2h(m+1) + y, 2h(n+1)) \left. \right] \\
& - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[ \Phi_2(\tau, 2hn + y) + \Phi_2(\tau, 2h(n+1) + y) \right] \left. \right\} + \\
& + T_b \beta \left\{ -2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \Phi_2(\tau - h(3+2m) + y, 2h) + \Phi_2(\tau - h(2m+1) + 2y, 2h) \right] - \right. \\
& - \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \left( e^{\tau - h(2m+1) + y} - 2(\tau - h(2m+1) + y) - 1 \right) + \left( e^{\tau - 2h(m+1) - y} - 2(\tau - 2h(m+1) - y) - 1 \right) \right] - \\
& \left. - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[ \Phi_2(\tau, h(2n+1) - y) + \Phi_2(\tau, h(2n+1) + y) \right] \right\} \\
(3.53)
\end{aligned}$$

В дополнении к соотношениям (3.52) составляющие выражений для напряжений будут иметь вид:

$$\begin{aligned}
& \frac{e^{-x\sqrt{s}}}{(s-1)\sqrt{s}} e^{ys} \rightarrow^L \Phi_4(t+y, x) \\
\Phi_4(t, x) = & \frac{e^{t-x}}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}} - \sqrt{t}\right) - \frac{e^{t+x}}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}} + \sqrt{t}\right) \\
& \left(\frac{\gamma}{s-1} - 1\right) \frac{e^{-x\sqrt{s}}}{s} \rightarrow^L \Phi_5(t, x) \\
\Phi_5(t, x) = & \frac{\gamma}{2} \left[ e^{t-x} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}} - \sqrt{t}\right) - e^{t+x} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}} + \sqrt{t}\right) \right] - (1+\gamma) \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)
\end{aligned}$$

$$\frac{2-s}{s-1} \frac{e^{-x\sqrt{s}}}{s} \xrightarrow{L} \Phi_6(t, x)$$

$$\Phi_6(t, x) = \frac{1}{2} \left[ e^{t-x} \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2\sqrt{t}} - \sqrt{t} \right) + e^{t+x} \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2\sqrt{t}} + \sqrt{t} \right) \right] - 2 \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2\sqrt{t}} \right) \quad (3.54)$$

$$\frac{2-s}{(s-1)s} e^{ys} \xrightarrow{L} \Phi_7(t+y) \Phi_7(t) = e^t - 2$$

$$\frac{2-s}{s-1} \frac{e^{-x\sqrt{s}}}{s} e^{ys} \xrightarrow{L} \Phi_6(t+y, x)$$

Тогда учитывая соотношения (3.54) оригиналы напряжений будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \sigma_x(\tau, y) = & \beta T_a \left\{ \gamma \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \Phi_4(\tau - 2hm - y, 2hn) + \Phi_4(\tau - 2h(m+1) + y, 2hn) + \right. \right. \\ & + \Phi_4(\tau - 2hm - y, 2h(n+1)) + \Phi_4(\tau - 2h(m+1) + y, 2h(n+1)) \left. \right] + \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left( \Phi_5(\tau, 2hn + y) + \Phi_5(\tau, 2h(n+1) + y) \right) \left. \right\} + \\ & + T_b \beta \left\{ -2\gamma \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \Phi_4(\tau - h(3+2m) + y, 2hn) + \Phi_3(\tau - h(2m+1) + y, 2hn) - \right. \right. \\ & - \gamma \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \Phi_7(\tau - h(1+2n) + y) - \Phi_7(\tau - h(1+2n) - y) \right] + \\ & \left. \left. + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[ \left( \Phi_5(\tau - h(1+2n) + y, 2hn) + \Phi_5(\tau - h(1+2n) - y, 2hn) \right) \right] \right] \right\} \quad (3.55) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_y(\tau, y) = & \beta T_a \left\{ \gamma \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \Phi_4(\tau - 2hm - y, 2hn) + \Phi_4(\tau - 2h(m+1) + y, 2hn) + \right. \right. \\ & + \Phi_4(\tau - 2hm - y, 2h(n+1)) + \Phi_4(\tau - 2h(m+1) + y, 2h(n+1)) \left. \right] + \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left( \Phi_6(\tau, 2hn + y) - \Phi_6(\tau, 2h(n+1) - y) \right) \left. \right\} + \\ & + T_b \beta \left\{ -2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \Phi_4(\tau - h(3+2m) - y, 2hn) + \Phi_4(\tau - h(2m+1) + y, 2hn) \right] + \right. \\ & + 2 \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \Phi_4(\tau - 2hn, h(2n+1) - y) + \Phi_4(\tau - 2hn, (h(2n+1) + y)) \right] + \\ & + \left[ \Phi_7(\tau - h(2m+1) + y) + \Phi_7(\tau - h(2m+1) - y) \right] + \\ & \left. + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[ \Phi_6(\tau - h(2n+1) + y, 2hn) - \Phi_6(\tau - h(2n+1) - y, 2hn) \right] \right\} \quad (3.56) \end{aligned}$$

На рисунке 3.3 представлены графики распределения поля температур перемещений и напряжений используя формулы (3.45, 3.53–3.56). Из этого графика следует что решение сходится достаточно удовлетворительно уже при  $n = 4$  при температурах на верхней поверхности слоя  $T_g = -183^0$  на нижней  $T_a = 25^0$

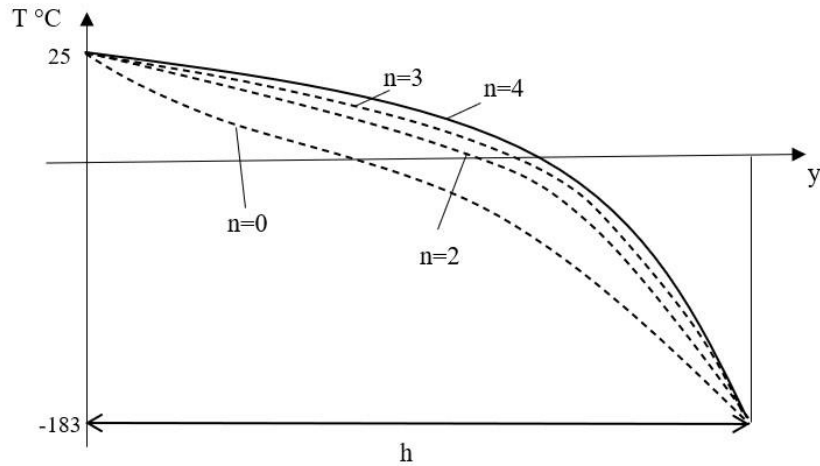


Рисунок 3.3. Распределение поля температур по толщине слоя,  $h$  – толщина слоя

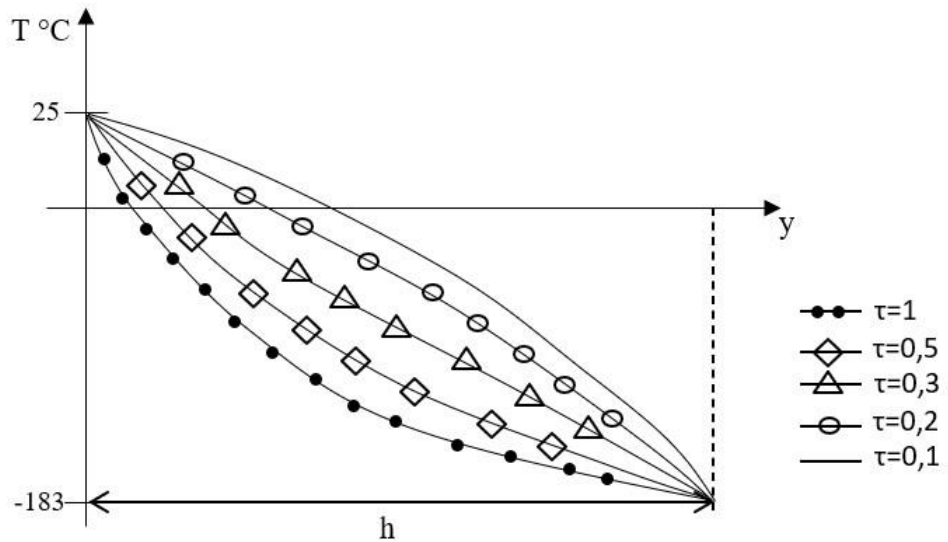


Рисунок 3.4. Распределение поля температур по толщине слоя при различных значениях безразмерного времени,  $h$  – толщина слоя

На рисунке 3.4 показано распределение поля температур по толщине при различных значениях безразмерного времени. Распределение перемещений в слое

от поля температур приведено на рисунке 3.5, который иллюстрирует плавное изменение кинематического параметра в зависимости от безразмерного времени.

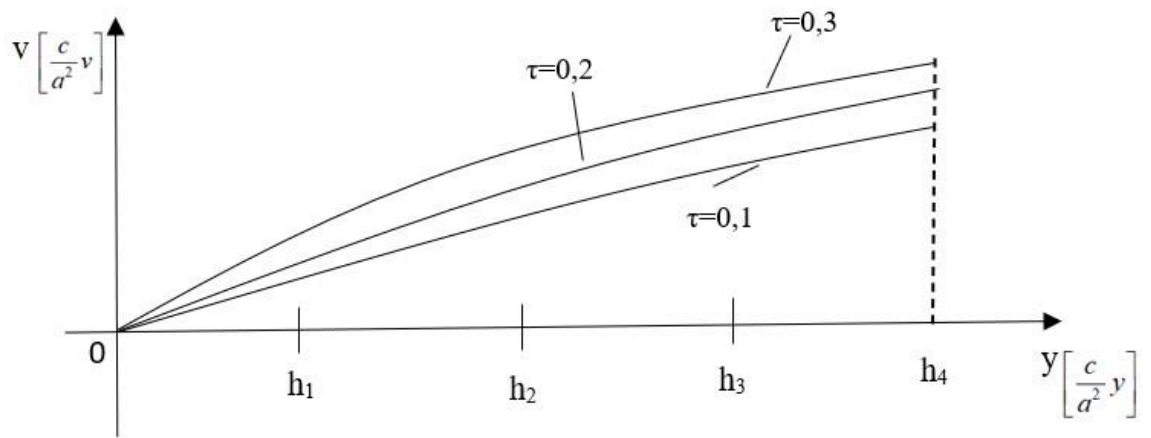


Рисунок 3.5 Распределение перемещений по толщине слоя при различных значениях безразмерного времени

На рисунке 3.6 приведены зависимости безразмерного нормального напряжения по толщине слоя. Видно, что напряжения увеличиваются при возрастании безразмерного времени.

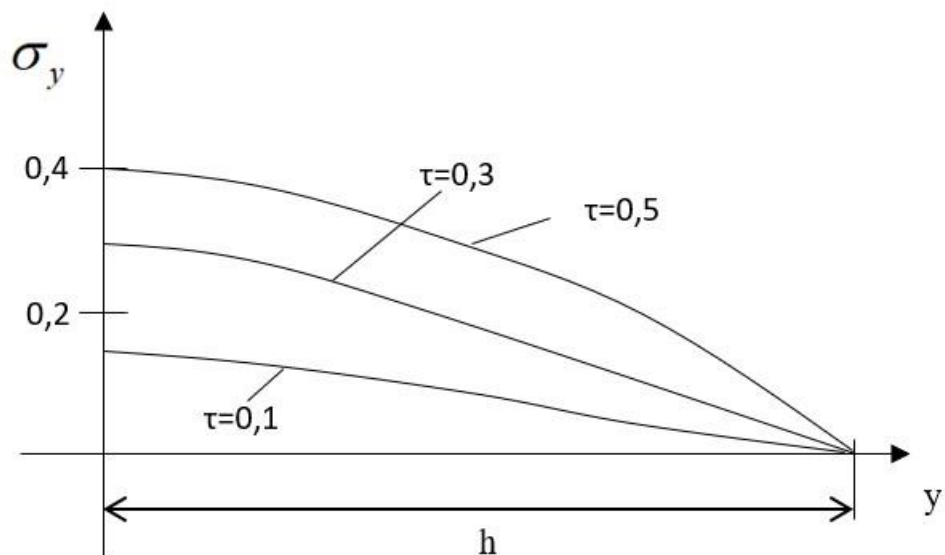


Рисунок 3.6. Распределение нормальных напряжений по толщине слоя при различных значениях безразмерного времени.

#### 4. Определение напряженно-деформированного состояния для элемента экранно-вакуумной теплоизоляции, состоящей из 4-х слоев

Для решения поставленной задачи воспользуемся уравнением теплопроводности (3.15) для  $i$  слоя. С учетом принятых допущений напряжения в  $i$  слое вычисляются по формулам (3.16). Уравнения статики принимаем в виде (3.17).

Начальные условия предполагаются однородными. Краевые условия на стыках для  $i$  слоя имеют вид (3.18–3.19). Дополнительные константы в каждом слое определяются из соотношений (3.20). Используя преобразование Лапласа по времени получаем обыкновенные дифференциальные уравнения относительно трансформант  $T_i^L(s, y)$  где  $S$  - параметр преобразования Лапласа,  $i=1..4$  – номер слоя:

$$\frac{d^2 T_i^L(s, y)}{dy^2} - s T_i^L(s, y) = 0 \quad (4.1)$$

Решение этого уравнения будет иметь вид:

$$T_i^L(s, y) = c_{i1} e^{\sqrt{s}y} + c_{i2} e^{-\sqrt{s}y} \quad (4.2)$$

Константы интегрирования в (4.2) определяются из следующих граничных условий, выраженных через соответствующие трансформанты:

1) на фронтальной и тыловой поверхностях тела заданы температуры:

$$T_1^L(s, y)\Big|_{y=0} = \frac{T_a}{s} \quad T_4^L(s, y)\Big|_{y=h_1+h_2+h_3+h_4} = \frac{T_b}{s} \quad (4.3)$$

2) Трансформанты температуры и тепловых потоков в месте соединения двух слоев должны быть одинаковы:



$$\begin{aligned}
T_1^L(s, y)\Big|_{y=h_1} &= T_2^L(s, y)\Big|_{y=h_1}, \quad \frac{dT_1^L(s, y)}{dy}\Big|_{y=h_1} = \tilde{\beta}_1 \frac{dT_2^L(s, y)}{dy}\Big|_{y=h_1} \\
T_2^L(s, y)\Big|_{y=h_1+h_2} &= T_3^L(s, y)\Big|_{y=h_1+h_2}, \quad \frac{dT_2^L(s, y)}{dy}\Big|_{y=h_1+h_2} = \tilde{\beta}_2 \frac{dT_3^L(s, y)}{dy}\Big|_{y=h_1+h_2} \\
T_3^L(s, y)\Big|_{y=h_1+h_2+h_3} &= T_4^L(s, y)\Big|_{y=h_1+h_2+h_3}, \quad \frac{dT_3^L(s, y)}{dy}\Big|_{y=h_1+h_2+h_3} = \tilde{\beta}_3 \frac{dT_4^L(s, y)}{dy}\Big|_{y=h_1+h_2+h_3}
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Постоянные интегрирования  $C_{i1}$  и  $C_{i2}$  определяются из краевых условий (4.4). Подставляя найденные константы в уравнение (4.2), получаем трансформанты распределения поля температур внутри каждого слоя стержня внешний вид которых будет

$$T_1^L(s, y) = \frac{T_a \sum_{i=0}^6 g_i \left( e^{-\gamma_{1i}(y)\sqrt{s}} + e^{-\bar{\gamma}_{1i}(y)\sqrt{s}} \right) + T_b g_7 \frac{e^{-\gamma_{1b}(y)\sqrt{s}} + e^{-\bar{\gamma}_{1b}(y)\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}}{sR(\sqrt{s})} \tag{4.5}$$

$$T_2^L(s, y) = \frac{T_a \sum_{i=0}^6 g_i \left( e^{-\gamma_{2i}(y)\sqrt{s}} + e^{-\bar{\gamma}_{2i}(y)\sqrt{s}} \right) + T_b g_7 \frac{e^{-\gamma_{2b}(y)\sqrt{s}} + e^{-\bar{\gamma}_{2b}(y)\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}}{sR(\sqrt{s})} \tag{4.6}$$

$$T_3^L(s, y) = \frac{T_a \sum_{i=0}^6 g_i \left( e^{-\gamma_{3i}(y)\sqrt{s}} + e^{-\bar{\gamma}_{3i}(y)\sqrt{s}} \right) + T_b g_7 \frac{e^{-\gamma_{3b}(y)\sqrt{s}} + e^{-\bar{\gamma}_{3b}(y)\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}}{sR(\sqrt{s})} \tag{4.7}$$

$$T_4^L(s, y) = \frac{T_a \sum_{i=0}^6 g_i \left( e^{-\gamma_{4i}(y)\sqrt{s}} + e^{-\bar{\gamma}_{4i}(y)\sqrt{s}} \right) + T_b g_7 \frac{e^{-\gamma_{4b}(y)\sqrt{s}} + e^{-\bar{\gamma}_{4b}(y)\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}}{sR(\sqrt{s})} \tag{4.8}$$

В этих выражениях

$\gamma_{1i}(y), \bar{\gamma}_{1i}(y), \gamma_{1b}(y), \bar{\gamma}_{1b}(y), \dots, \gamma_{4i}(y), \bar{\gamma}_{4i}(y), \gamma_{4b}(y), \bar{\gamma}_{4b}(y)$  -некоторые коэффициенты, зависящие от толщины слоев и координаты  $y$ , выражения для которых приведены в приложении А (А.1)

Знаменатель выражений (4.5-4.8) будет иметь вид:

$$\begin{aligned}
R(\sqrt{s}) = & s\sqrt{s}e^{(9h_1+h_2+h_3+h_4)\sqrt{s}} (\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_2 + \lambda_3)(\lambda_3 + \lambda_4) \left\{ e^{-2(h_1+h_2+h_3+h_4)\sqrt{s}} + \right. \\
& + \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} e^{-2(h_2+h_3+h_4)\sqrt{s}} + \frac{\lambda_3 - \lambda_4}{\lambda_3 + \lambda_4} e^{-2(h_1+h_2+h_3)\sqrt{s}} + \\
& + \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)}{(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_2 + \lambda_3)} e^{-2(h_1+h_3+h_4)\sqrt{s}} + \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_4)}{(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_2 + \lambda_3)(\lambda_3 + \lambda_4)} e^{-2(h_1+h_2+h_4)\sqrt{s}} + \\
& + \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{\lambda_2 + \lambda_3} e^{-2(h_3+h_4)\sqrt{s}} + \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_4)}{(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_2 + \lambda_3)(\lambda_3 + \lambda_4)} e^{-2(h_2+h_4)\sqrt{s}} + \\
& + \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_4)}{(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_3 + \lambda_4)} e^{-2(h_2+h_3)\sqrt{s}} + \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{\lambda_2 + \lambda_3} e^{-2(h_1+h_2)\sqrt{s}} + \\
& + \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_4)}{(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_2 + \lambda_3)(\lambda_3 + \lambda_4)} e^{-2(h_1+h_3)\sqrt{s}} + \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_4)}{(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_3 + \lambda_4)} e^{-2(h_1+h_4)\sqrt{s}} + \\
& \left. + \frac{\lambda_3 - \lambda_4}{\lambda_3 + \lambda_4} e^{-2h_4\sqrt{s}} + \frac{(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_4)}{(\lambda_2 + \lambda_3)(\lambda_3 + \lambda_4)} e^{-2h_3\sqrt{s}} + \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} e^{-2h_1\sqrt{s}} + 1 \right\} \quad (4.9)
\end{aligned}$$

Для определения оригиналов распределения поля температур внутри каждого слоя представим знаменатель функций (4.5-4.8) в виде ряда

$$\frac{1}{R(\sqrt{s})} = \frac{e^{-(9h_1+h_2+h_3+h_4)\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_2 + \lambda_3)(\lambda_3 + \lambda_4)} \sum_0^\infty \left( \sum_{k=0}^{13} \tilde{g}_i e^{-2\tilde{\gamma}_i\sqrt{s}} \right)^n$$

Значения коэффициентов  $\tilde{g}_i$  и  $\tilde{\gamma}_i$  приведены в приложении А (А.2)

Тогда выражения (4.5-4.8) с учетом (4.9) примут вид

$$\begin{aligned}
T_1^L(s, y, n) = & \left[ T_a \sum_{i=0}^6 g_i \frac{e^{-2\gamma_i^1(y)\sqrt{s}} - e^{-2\tilde{\gamma}_i^1(y)\sqrt{s}}}{s} + \right. \\
& \left. + T_b g_7 \frac{e^{-\gamma_-^1(y)\sqrt{s}} + e^{-\tilde{\gamma}_+^1(y)\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right] \sum_0^\infty \left( \sum_{k=0}^{13} \tilde{g}_i e^{-2\tilde{\gamma}_i\sqrt{s}} \right)^n \quad (4.11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_2^L(s, y, n) = & \left\{ 2T_a \sum_{i=1}^4 g_i \frac{e^{-2\gamma_i^2(y)\sqrt{s}} - e^{-2\tilde{\gamma}_i^2(y)\sqrt{s}}}{s} \right. \\
& \left. + 4T_b \left[ g_5^2 \frac{e^{-\gamma_-^2(y)\sqrt{s}} + e^{-\tilde{\gamma}_+^2(y)\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} + g_6^2 \frac{e^{-\gamma_6^2(y)\sqrt{s}} - e^{-\tilde{\gamma}_6^2(y)\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right] \right\} \sum_0^\infty \left( \sum_{k=0}^{13} \tilde{g}_i e^{-2\tilde{\gamma}_i\sqrt{s}} \right)^n \quad (4.12)
\end{aligned}$$

$$T_3^L(s, y, n) = 2 \left[ 2T_a \sum_{i=1}^2 g_i^3 \frac{\left( e^{-2\gamma_i^3(y)\sqrt{s}} + e^{-2\bar{\gamma}_i^3(y)\sqrt{s}} \right)}{s} + \right. \\ \left. + T_b \sum_{i=3}^6 g_i^3 \frac{\left( e^{-\gamma_i^3(y)\sqrt{s}} + e^{-\bar{\gamma}_i^3(y)\sqrt{s}} \right)}{s\sqrt{s}} \right] \sum_0^\infty \left( \sum_{k=0}^{13} \tilde{g}_i e^{-2\tilde{\gamma}_i\sqrt{s}} \right)^n y \quad (4.13)$$

$$T_4^L(s, y, n) = \left[ 4T_a g_8^4 \frac{\left( e^{-\gamma_8^4(y)\sqrt{s}} + e^{-\bar{\gamma}_8^4(y)\sqrt{s}} \right)}{s\sqrt{s}} + \right. \\ \left. + T_b \sum_{i=0}^7 g_i^4 \frac{\left( e^{-\gamma_i^4(y)\sqrt{s}} - e^{-\bar{\gamma}_i^4(y)\sqrt{s}} \right)}{s\sqrt{s}} \right] \sum_0^\infty \left( \sum_{k=0}^{13} \tilde{g}_i e^{-2\tilde{\gamma}_i\sqrt{s}} \right)^n \quad (4.14)$$

Здесь коэффициенты  $g_0^1, \dots, g_8^4$  будут иметь вид Приложение А (А.3), а  $\gamma_j^i(y), \bar{\gamma}_j^i(y)$  ( $i = 1, \dots, 4, j = 0, \dots, 8$ ) даны в Приложение А (А.4)

Производные этих выражений будут:

$$\frac{dT_1^L(s, y, n)}{dy} = \left[ 2T_a \sum_{i=0}^6 g_i \frac{-e^{-2\gamma_i^1\sqrt{s}} + e^{-2\bar{\gamma}_i^1\sqrt{s}}}{\sqrt{s}} - T_b g_7 \frac{e^{-\gamma_-^1\sqrt{s}} + e^{-\bar{\gamma}_+^1\sqrt{s}}}{s} \right] \sum_0^\infty \left( \sum_{k=0}^{13} \tilde{g}_i e^{-2\tilde{\gamma}_i\sqrt{s}} \right)^n \quad (4.16)$$

$$\frac{dT_2^L(s, y, n)}{dy} = \left\{ 4T_a \sum_{i=1}^4 g_i \frac{-e^{-2\gamma_i^2(y)\sqrt{s}} + e^{-2\bar{\gamma}_i^2(y)\sqrt{s}}}{\sqrt{s}} + 4T_b \left[ g_5^2 \frac{e^{-\gamma_-^2(y)\sqrt{s}} + e^{-\bar{\gamma}_+^2(y)\sqrt{s}}}{s} + \right. \right. \\ \left. \left. + g_6^2 \frac{e^{-\gamma_6^2(y)\sqrt{s}} - e^{-\bar{\gamma}_6^2(y)\sqrt{s}}}{s} \right] \right\} \sum_0^\infty \left( \sum_{k=0}^{13} \tilde{g}_i e^{-2\tilde{\gamma}_i\sqrt{s}} \right)^n \quad (4.17)$$

$$\frac{dT_3^L(s, y, n)}{dy} = 2 \left[ -4T_a \sum_{i=1}^2 g_i^3 \frac{e^{-2\gamma_i^3(y)\sqrt{s}} + e^{-2\bar{\gamma}_i^3(y)\sqrt{s}}}{\sqrt{s}} + \right. \\ \left. -T_b \sum_{i=3}^6 g_i^3 \frac{e^{-\gamma_i^3(y)\sqrt{s}} + e^{-\bar{\gamma}_i^3(y)\sqrt{s}}}{s} \right] \sum_0^\infty \left( \sum_{k=0}^{13} \tilde{g}_i e^{-2\tilde{\gamma}_i \sqrt{s}} \right)^n \quad (4.18)$$

$$\frac{dT_4^L(s, y, n)}{dy} = \\ = \left[ -4T_a g_8^4 \frac{e^{-\gamma_8^4(y)\sqrt{s}} + e^{-\bar{\gamma}_8^4(y)\sqrt{s}}}{s} + T_b \sum_{i=0}^7 g_i^4 \frac{-e^{-\gamma_i^4(y)\sqrt{s}} + e^{-\bar{\gamma}_i^4(y)\sqrt{s}}}{s} \right] \sum_0^\infty \left( \sum_{k=0}^{13} \tilde{g}_i e^{-2\tilde{\gamma}_i \sqrt{s}} \right)^n \quad (4.19-4.20)$$

Обозначения в трансформантах (4.16-4.19-4.20) будут иметь вид Приложение А (А.5);

Оригиналы выражений (4.16-4.19-4.20) определяются из таблиц с использованием свойств преобразования Лапласа:

$$\frac{e^{-x\sqrt{s}}}{s} \rightarrow^L \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2\sqrt{t}} \right) = \Phi_1(x, t) \quad (4.21)$$

$$\frac{e^{-x\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \rightarrow^L 2\sqrt{\frac{t}{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4t}} - x \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2\sqrt{t}} \right) = \Phi_1^2(x, t) \quad (4.22)$$

$$\frac{e^{-x\sqrt{s}}}{\sqrt{s}} \rightarrow^L \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{\pi t}} = \Phi_1^3(x, t) \quad (4.23)$$

Где  $\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt$  -дополнительная функция ошибок

В результате используя соотношение (4.21-4.23) для нулевого приближения (n=0) получаем:

$$T_1(\tau, y, 0) = 2T_a \sum_{i=0}^6 g_i \left[ -\Phi_1^3(2\gamma_i^1, \tau) + \Phi_1^3(2\bar{\gamma}_i^1, \tau) \right] + T_b g_7 \left[ \Phi_1(\gamma_-^1, \tau) + \Phi_1(\bar{\gamma}_+^1(y), \tau) \right] \quad (4.24)$$

$$T_2(\tau, x, 0) = 4T_a \sum_{i=1}^4 g_i \left[ \Phi_1^3(2\gamma_i^2, \tau) + \Phi_1^3(\bar{\gamma}_i^2, \tau) \right] + 4T_b \left\langle g_5^2 \left[ \Phi_1(\gamma_-^2, \tau) + \Phi_1(\bar{\gamma}_+^2, \tau) \right] + \right. \\ \left. + g_6^2 \left[ \Phi_1(\gamma_6^2, \tau) + \Phi_2(\bar{\gamma}_6^2, \tau) \right] \right\rangle \quad (4.25)$$

$$T_3(\tau, x, 0) = -8T_a \sum_{i=1}^2 g_i \left[ \Phi_1^3(2\gamma_i^3, \tau) + \Phi_1^3(2\bar{\gamma}_i^3, \tau) \right] - 2T_b \sum_{i=3}^6 g_i \left[ \Phi_1(\gamma_i^3, \tau) + \Phi_1(\bar{\gamma}_i^3, \tau) \right] \quad (4.26)$$

$$T_4(\tau, x, 0) = -4T_a g_8^4 \left[ \Phi_1(\gamma_8^4, \tau) + \Phi_1(\bar{\gamma}_8^4(y), \tau) \right] + T_b \sum_{i=0}^7 g_i^4 \left[ \Phi_1(\gamma_i^4, \tau) + \Phi_1(\bar{\gamma}_i^4(x), \tau) \right] \quad (4.27)$$

Оригиналы выражений (4.11-4.14) для  $n \geq 1$  определяются аналогичным образом и ввиду громоздкости здесь не приводятся.

Соответствующие тепловые потоки будут иметь вид:

$$q_i(t, x, N) = \lambda_i \frac{\partial T_i(t, x, N)}{\partial y} \quad (4.28)$$

Тогда тепловые потоки для каждого слоя будут иметь вид:

$$q_1(\tau, x, 0) = \lambda_1 \left\{ T_0 \sum_{i=0}^7 g_i \left[ \tilde{\Phi}_1(\gamma_i(x), \tau) + \Phi_1(\gamma_i^i(x), \tau) \right] + T_1 g_8 \left[ \tilde{\Phi}_2(\gamma_0(x), \tau) + \tilde{\Phi}_2(\bar{\gamma}_0(x), \tau) \right] \right\} \quad (4.29)$$

$$q_2(\tau, x, 0) = \lambda_1 \left\{ T_0 \sum_{i=0}^7 g_i \left[ \tilde{\Phi}_1(\gamma_i(x), \tau) + \Phi_1(\gamma_i^i(x), \tau) \right] + T_1 g_8 \left[ \tilde{\Phi}_2(\gamma_0(x), \tau) + \tilde{\Phi}_2(\bar{\gamma}_0(x), \tau) \right] \right\} \quad (4.30)$$

$$q_3(\tau, x, 0) = \lambda_1 \left\{ T_0 \sum_{i=0}^7 g_i \left[ \tilde{\Phi}_1(\gamma_i(x), \tau) + \Phi_1(\gamma_i^i(x), \tau) \right] + T_1 g_8 \left[ \tilde{\Phi}_2(\gamma_0(x), \tau) + \tilde{\Phi}_2(\bar{\gamma}_0(x), \tau) \right] \right\} \quad (4.31)$$

$$q_4(\tau, x, 0) = \lambda_1 \left\{ T_0 \sum_{i=0}^7 g_i \left[ \tilde{\Phi}_1(\gamma_i(x), \tau) + \Phi_1(\gamma_i^i(x), \tau) \right] + T_1 g_8 \left[ \tilde{\Phi}_2(\gamma_0(x), \tau) + \tilde{\Phi}_2(\bar{\gamma}_0(x), \tau) \right] \right\} \quad (4.32)$$

Для определения перемещений и напряжений в слоях теплоизоляции воспользуемся уравнением (3.17) и применим к нему преобразование Лапласа по времени. Это уравнение в трансформантах будет иметь вид:

$$\frac{d\sigma_{yi}^L(s, y)}{dy} = s^2 v_i^L(s, y) \quad (4.33)$$

С учетом выражения  $\sigma_y^i(\tau, y)$  в (3.16) получаем трансформанту для этого выражения :

$$\sigma_{yi}^L(s, y) = \frac{dv_i^L(s, y)}{dy} - \beta T_i^L(s, y, n) \quad (4.34)$$

В результате получаем обыкновенное дифференциальное уравнение относительно трансформанты перемещений:

$$\frac{d^2 v_i^L(s, y)}{dy^2} - s^2 v_i^L(s, y) - \beta \frac{dT_i^L(s, y, n)}{dy} = 0 \quad (4.35)$$

Тогда трансформанту перемещений для  $i$  слоя получаем в виде :

$$v_i^L(s, y) = C_{1i} e^{sy} + C_{2i} e^{-sy} - \beta \frac{T_i^L(s, y, n)}{s-1} \quad (4.36)$$

Тогда производная перемещения (4.27) будет:

$$\frac{dv_i^L(s, y)}{dy} = s(C_{1i} e^{sy} - C_{2i} e^{-sy}) + \beta \frac{dT_i^L(s, y, n)}{dy} \quad (4.37)$$

Трансформанты нормальных напряжений будут иметь вид аналогичный формулам (3.37-3.39):

$$\sigma_{xi}^L(s, y) = \gamma s(C_{1i} e^{sy} - C_{2i} e^{-sy}) + \beta T_i^L(s, y, n) \left( \frac{\gamma}{s-1} - 1 \right) \quad (4.38)$$

$$\sigma_{yi}^L(s, y) = s(C_{1i} e^{sy} - C_{2i} e^{-sy}) + \beta T_i^L(s, y, n) \frac{2-s}{s-1} \quad (4.39)$$

$$\sigma_{zi}^L(s, y) = \gamma s(C_{1i} e^{sy} - C_{2i} e^{-sy}) + \beta T_i^L(s, y, n) \left( \frac{\gamma}{s-1} - 1 \right) \quad (4.40)$$

Постоянные интегрирования  $C_{1i}, C_{2i}$  определяются из краевых условий (3.18-3.19), записанных в трансформантах тогда получаем:

Трансформанты краевых условий на стыках для  $i$  слоя имеют вид

$$v_i^L(s, y) \Big|_{y=h_i} = v_{i+1}^L(s, y) \Big|_{y=h_{i+1}} \quad \sigma_{yi}^L(s, y) \Big|_{y=h_i} = \sigma_{yi+1}^L(s, y) \Big|_{y=h_{i+1}} \quad (4.41)$$

Краевые условия на границе слоев имеют вид

$$v_1^L(s, y) \Big|_{y=0} = 0 \quad \sigma_{y1}^L(s, y) \Big|_{y=h} = 0 \quad (4.42)$$

Подставляя соотношения (4.27, 4.30) в краевые условия (4.32-4.33) получаем систему алгебраических уравнений относительно 8 констант  $C_{1i}, C_{2i}$

$$C_{11} + C_{21} - \beta \frac{T_1^L(s, 0, n)}{s-1} = 0 \quad (4.43)$$

$$C_{11} e^{sh_1} + C_{21} e^{-sh_1} - \beta \frac{T_1^L(s, h_1, n)}{s-1} = C_{12} e^{sh_2} + C_{22} e^{-sh_2} - \beta \frac{T_2^L(s, h_2, n)}{s-1} \quad (4.44)$$

$$C_{12}e^{sh_2} + C_{22}e^{-sh_2} - \beta \frac{T_2^L(s, h_2, n)}{s-1} = C_{13}e^{sh_3} + C_{23}e^{-sh_3} - \beta \frac{T_3^L(s, h_3, n)}{s-1} \quad (4.45)$$

$$C_{13}e^{sh_3} + C_{23}e^{-sh_3} - \beta \frac{T_3^L(s, h_3, n)}{s-1} = C_{14}e^{sh_4} + C_{24}e^{-sh_4} - \beta \frac{T_4^L(s, h_4, n)}{s-1} \quad (4.46)$$

$$\begin{aligned} & \gamma s (C_{11}e^{sh_1} - C_{21}e^{-sh_1}) + \beta T_1^L(s, h_1, n) \frac{2-s}{s-1} = \\ & = \gamma s (C_{12}e^{sh_2} - C_{22}e^{-sh_2}) + \beta T_2^L(s, h_2, n) \frac{2-s}{s-1} \end{aligned} \quad (4.47)$$

$$\begin{aligned} & \gamma s (C_{12}e^{sh_2} - C_{22}e^{-sh_2}) + \beta T_2^L(s, h_2, n) \frac{2-s}{s-1} = \\ & = \gamma s (C_{13}e^{sh_3} - C_{23}e^{-sh_3}) + \beta T_3^L(s, h_3, n) \frac{2-s}{s-1} \end{aligned} \quad (4.48)$$

$$\begin{aligned} & \gamma s (C_{13}e^{sh_3} - C_{23}e^{-sh_3}) + \beta T_3^L(s, h_3, n) \frac{2-s}{s-1} = \\ & = \gamma s (C_{14}e^{sh_4} - C_{24}e^{-sh_4}) + \beta T_4^L(s, h_4, n) \frac{2-s}{s-1} \end{aligned} \quad (4.49)$$

$$\gamma s (C_{14}e^{sh} - C_{24}e^{-sh}) + \beta T_4^L(s, h, n) \frac{2-s}{s-1} = 0 \quad (4.50)$$

Решая систему уравнений (4.43-4.50) получаем константы интегрирования  $C_{1i}, C_{2i}$   $i = 1-4$ . Тогда перемещения в слоях определяем по формуле (4.36):

$$\begin{aligned}
\nu_1^L(s, y) = & \beta \left\langle \left[ \frac{e^{-s\lambda_1^1}}{2(s-1)} + \frac{s-2}{2\gamma s(s-1)} e^{-s\lambda_2^1} - \right. \right. \\
& - \frac{2+s(\gamma-1)}{2\gamma(s-1)} e^{-s\lambda_3^1} \left. \left[ T_a \left[ \Psi_0^{11} \left( \frac{e^{-\alpha_0^{11}\sqrt{s}}}{s} \right) + \Psi_1^{11} \left( \frac{e^{-\alpha_1^{11}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] + T_b \Psi_2^{11} \left( \frac{e^{-\alpha_2^{11}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] \right\rangle + \\
& + \left[ \frac{s-2}{2\gamma s(s-1)} e^{-s\lambda_1^1} + \frac{e^{-s\lambda_2^1}}{2(s-1)} - \frac{2+s(\gamma-1)}{2\gamma(s-1)} e^{-s\lambda_3^1} \right] * \\
& * T_a \left[ \Psi_3^{11} \left( \frac{e^{-\alpha_3^{11}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) + \Psi_4^{11} \left( \frac{e^{-\alpha_4^{11}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] + T_b \Psi_5^{11} \left( \frac{e^{-\alpha_5^{11}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) + \\
& + \frac{s-2}{2\gamma s(s-1)} e^{-s\lambda_4^1} \left[ T_a \Psi_5^{11} \left( \frac{e^{-\alpha_6^{11}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) + T_b \Psi_7^{11} \left( \frac{e^{-\alpha_7^{11}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] - \frac{[e^{-s\lambda_5^1} - e^{-s\lambda_6^1}]}{s-1} + \\
& + 2 \frac{e^{-s\lambda_7^1}}{s-1} \left[ \left[ T_a \Psi_8^{11} \left( \frac{e^{-\alpha_8^{11}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) + T_b \Psi_9^{11} \left( \frac{e^{-\alpha_9^{11}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] \right] + \\
& + \frac{e^{-s\lambda_8^1} + e^{-s\lambda_9^1}}{s-1} \left[ T_a \Psi_0^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_0^{21}\sqrt{s}}}{s} \right) + T_b \Psi_1^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_1^{21}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] + \\
& + \frac{e^{-s\lambda_{10}^1}}{2(s-1)} \left\{ T_a \left[ \Psi_2^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_2^{21}\sqrt{s}}}{s} \right) + \Psi_3^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_3^{21}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] + T_b \Psi_4^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_4^{21}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right\} + \\
& + \frac{s-2}{2\gamma s(s-1)} \left\{ T_a \left[ \Psi_5^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_5^{21}\sqrt{s}}}{s} \right) + \Psi_6^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_6^{21}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] + T_b \Psi_7^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_7^{21}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right\} + \\
& + \frac{2+s(\gamma-1)}{2\gamma(s-1)} e^{-s\lambda_{11}^1} T_a \left\{ \left[ \Psi_5^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_5^{21}\sqrt{s}}}{s} \right) + \Psi_6^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_6^{21}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] + T_b \Psi_7^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_7^{21}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right\} -
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& -\frac{(s-2)\left[e^{-s\lambda_{12}^1} + e^{-s\lambda_{13}^1}\right]}{2\gamma s(s-1)} \left[ T_a \Psi_8^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_8^{21}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) + T_b \Psi_9^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_9^{21}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] + \\
& + e^{-s\lambda_{14}^1} \left\{ \frac{T_a}{2(s-1)} \left[ \Psi_5^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_5^{21}\sqrt{s}}}{s} \right) + \Psi_6^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_6^{21}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] + \frac{T_b}{2(s-1)} \Psi_7^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_7^{21}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right\} + \\
& + \frac{T_a(s-2)}{2\gamma s(s-1)} \left\{ \left[ \Psi_{10}^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_{10}^{21}\sqrt{s}}}{s} \right) + \Psi_{11}^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_{11}^{21}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] + T_b \Psi_{12}^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_{12}^{21}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right\} - \\
& - \frac{s-2}{\gamma s(s-1)} \left[ T_a \Psi_{13}^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_{10}^{21}\sqrt{s}}}{s} \right) + T_b \Psi_{14}^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_{14}^{21}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] \left. \right\} - \\
& - \frac{2+s(\gamma-1)}{2\gamma(s-1)} e^{-s\lambda_{15}^1} \left\{ T_a \left[ \Psi_2^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_2^{21}\sqrt{s}}}{s} \right) + \Psi_3^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_3^{21}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] + T_b \Psi_4^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_4^{21}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right\} + \\
& + \left[ T_a \Psi_{10} \left( \frac{e^{-\alpha_{10}\sqrt{s}}}{s} \right) + T_b \Psi_{11} \left( \frac{e^{-\alpha_{11}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] \left. \right\} \sum_{k=0}^{\infty} \left[ e^{-2s(h_1+h_2)} - e^{-2sh_1} + \right. \\
& \left. + e^{-2sh_2} + 2e^{-4s(h_1+h_2)} \right]^k \left( \sum_{i=0}^{13} \tilde{g}_i e^{-2\tilde{\gamma}_i\sqrt{s}} \right)^n
\end{aligned}$$

(4.51)

В этом выражении функции  $\Psi_j^{ik} \left( \frac{e^{-\alpha_0^{11}\sqrt{s}}}{s} \right) (i=1..4, j=0..1, k=1,2)$  даны в

Приложении А (А.6) Выражения для  $\lambda_1, \dots, \lambda_{15}$  даны в Приложении А (А.7)

Сначала определим оригинал выражения (4.51) для нулевого приближения  $n=0, k=0$ , который находится с помощью таблиц и свойств преобразования Лапласа для этого необходимо знать оригиналы следующих выражений, представленных в Приложении А (А.8).

Тогда используя эти выражения получаем оригинал соответствующих перемещения первого слоя:

$$\begin{aligned}
v_1(\tau, y) = & \beta \left\{ T_a \left\{ Q_1^1(\tau, y, \lambda_1^1, \alpha_0^{11}) + Q_2^1(\tau, y, \lambda_1^1, \alpha_1^{11}) + Q_3^1(\tau, y, \lambda_2^1, \alpha_0^{11}) + Q_4^1(\tau, y, \lambda_2^1, \alpha_1^{11}) - Q_5^1(\tau, y, \lambda_3^1, \alpha_0^{11}) + \right. \right. \\
& + Q_6^1(\tau, y, \lambda_3^1, \alpha_1^{11}) + Q_4^1(\tau, y, \lambda_1^1, \alpha_3^{11}) + Q_4^1(\tau, y, \lambda_1^1, \alpha_4^{11}) + Q_2^1(\tau, y, \lambda_2^1, \alpha_3^{11}) + Q_2^1(\tau, y, \lambda_2^1, \alpha_4^{11}) - Q_6^1(\tau, y, \lambda_3^1, \alpha_3^{11}) - \\
& - Q_6^1(\tau, y, \lambda_3^1, \alpha_4^{11}) + Q_5^1(\tau, y, \lambda_4^1, \alpha_6^{11}) - 2Q_2^1(\tau, y, \lambda_5^1, \alpha_8^{11}) + 2Q_2^1(\tau, y, \lambda_6^1, \alpha_8^{11}) - 4Q_2^1(\tau, y, \lambda_7^1, \alpha_8^{11}) + \\
& + 2Q_1^1(\tau, y, \lambda_8^1, \alpha_0^{21}) + 2Q_1^1(\tau, y, \lambda_9^1, \alpha_0^{21}) + Q_1^1(\tau, y, \lambda_{10}^1, \alpha_2^{21}) + Q_2^1(\tau, y, \lambda_{10}^1, \alpha_3^{21}) + Q_3^1(\tau, y, \alpha_5^{21}) + Q_4^1(\tau, y, \alpha_6^{21}) + \\
& + Q_5^1(\tau, y, \lambda_{11}^1, \alpha_5^{21}) + Q_6^1(\tau, y, \lambda_{11}^1, \alpha_6^{21}) - Q_5^1(\tau, y, \lambda_{12}^1, \alpha_8^{21}) - Q_5^1(\tau, y, \lambda_{13}^1, \alpha_8^{21}) + Q_1^1(\tau, y, \lambda_{14}^1, \alpha_5^{21}) + Q_2^1(\tau, y, \lambda_{14}^1, \alpha_6^{21}) + \\
& + Q_3^1(\tau, y, \lambda_{14}^1, \alpha_{10}^{21}) + Q_4^1(\tau, y, \lambda_{14}^1, \alpha_{11}^{21}) - 2Q_3^1(\tau, y, \lambda_{14}^1, \alpha_{13}^{21}) - Q_5^1(\tau, y, \lambda_{15}^1, \alpha_2^{21}) + Q_6^1(\tau, y, \lambda_{15}^1, \alpha_3^{21}) + Q_7^1(\tau, y, \alpha_{10}^{21}) \left. \right\} + \\
& + T_b \left\{ Q_2^1(\tau, y, \lambda_1^1, \alpha_2^{11}) + Q_4^1(m, y, \lambda_2^1, \alpha_2^{11}) - Q_6^1(\tau, y, \lambda_3^1, \alpha_2^{11}) + Q_4^1(\tau, y, \lambda_4^1, \alpha_5^{11}) + Q_2^1(\tau, y, \lambda_2^1, \alpha_5^{11}) - Q_6^1(\tau, y, \lambda_3^1, \alpha_5^{11}) + \right. \\
& + Q_5^1(\tau, y, \lambda_3^1, \alpha_7^{11}) - 2Q_2^1(\tau, y, \lambda_5^1, \alpha_9^{11}) + 2Q_2^1(\tau, y, \lambda_6^1, \alpha_9^{11}) - 4Q_2^1(\tau, y, \lambda_7^1, \alpha_9^{11}) + 2Q_2^1(\tau, y, \lambda_8^1, \alpha_1^{21}) + 2Q_2^1(\tau, y, \lambda_9^1, \alpha_1^{21}) + \\
& + Q_2^1(\tau, y, \lambda_{10}^1, \alpha_4^{21}) + Q_4^1(\tau, y, \alpha_7^{21}) + Q_6^1(\tau, y, \lambda_{11}^1, \alpha_7^{21}) - Q_6^1(\tau, y, \lambda_{12}^1, \alpha_9^{21}) - Q_6^1(\tau, y, \lambda_{13}^1, \alpha_9^{21}) + Q_2^1(\tau, y, \lambda_{14}^1, \alpha_7^{21}) + \\
& \left. + Q_4^1(\tau, y, \lambda_{14}^1, \alpha_{12}^{21}) - 2Q_4^1(\tau, y, \lambda_{14}^1, \alpha_{14}^{21}) - Q_6^1(\tau, y, \lambda_{15}^1, \alpha_4^{21}) + Q_8^1(\tau, y, \alpha_{11}^{21}) \right\} \quad (4.52)
\end{aligned}$$

Оригиналы перемещений по остальным слоям определяются аналогичным образом:

$$\begin{aligned}
v_2^L(s, y) = & \beta \left\langle \left( -\frac{(2 + (\gamma - 1)s)}{2\gamma s(s - 1)} 2T_a \Psi_0^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_0^{21}\sqrt{s}}}{s} \right) + \frac{(2 + (\gamma - 1)s)}{2\gamma s(s - 1)} 2T_b \Psi_1^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_1^{21}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) + \right. \right. \\
& + \frac{(2 + (\gamma - 1)s)}{2\gamma s(s - 1)} 4T_a \Psi_2^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_2^{21}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) - \frac{(2 + (\gamma - 1)s)}{2\gamma s(s - 1)} T_b \Psi_3^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_3^{21}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \left. \right) e^{-s\lambda_1^2} + \\
& + \frac{4s\gamma}{2\gamma s(s - 1)} T_a \Psi_4^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_4^{21}\sqrt{s}}}{s} \right) e^{-s\lambda_2} + \frac{4s\gamma}{2\gamma s(s - 1)} T_b \Psi_5^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_5^{21}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) e^{-s\lambda_2^2} + \\
& + \left\{ 2T_a \Psi_6^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_6^{21}\sqrt{s}}}{s} \right) \frac{((3 + \gamma)s - 6)}{2\gamma s(s - 1)} + 4T_b \Psi_7^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_7^{21}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \frac{((3 + \gamma)s - 6)}{2\gamma s(s - 1)} \right\} e^{-s\lambda_3^2} + \\
& + \left[ \frac{((\gamma - 1)s + 2)}{2\gamma s(s - 1)} 4T_a \Psi_8^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_8^{21}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) + \frac{((\gamma - 1)s + 2)}{2\gamma s(s - 1)} T_b \Psi_9^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_9^{21}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] e^{-s\lambda_3^2} + \\
& + 2 \left[ T_a \Psi_{10}^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_{10}^{21}\sqrt{s}}}{s} \right) \frac{(2 - s(\gamma + 1))}{2\gamma s(s - 1)} + \frac{(2 - s(\gamma + 1))}{2\gamma s(s - 1)} T_b \Psi_{11}^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_{11}^{21}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] e^{-s\lambda_3^2} + \\
& + \left\{ 2T_a \frac{(-2 + (\gamma + 1)s)}{2\gamma s(s - 1)} \left( \Psi_{12}^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_{12}^{21}\sqrt{s}}}{s} \right) - 2\Psi_{14}^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_{14}^{21}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right) \right\} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(-2 + (\gamma + 1)s)}{2\gamma s(s-1)} 4T_b \Psi_{13}^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_{13}^{21}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \left. \right\} * \left( e^{-s\lambda_4^2} + e^{-s\lambda_5^2} - e^{-s\lambda_6^2} + e^{-s\lambda_7^2} \right) + \\
& + 2 \left[ \frac{(s-2)}{2\gamma s(s-1)} 4T_a \Psi_{14}^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_{14}^{21}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) + \frac{(s-2)}{2\gamma s(s-1)} T_b \Psi_{15}^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_{15}^{21}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] \left( e^{-s\lambda_8^2} + e^{-s\lambda_9^2} - e^{-s\lambda_{10}^2} \right) + \\
& + \left\{ 2T_a \frac{(2 + (\gamma - 1)s)}{2\gamma s(s-1)} \left( \Psi_{12}^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_{12}^{21}\sqrt{s}}}{s} \right) - 2\Psi_{14}^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_{14}^{21}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right) \right. \\
& + 4T_b \frac{(2 + (\gamma - 1)s)}{2\gamma s(s-1)} \Psi_{13}^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_{13}^{21}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \left. \right\} * \left( e^{-s\lambda_{11}^2} - e^{-s\lambda_{12}^2} \right) + \\
& \left( 2 \left( \frac{2s\gamma}{2\gamma s(s-1)} T_a \Psi_0^{22} \left( \frac{e^{-\alpha_0^{22}\sqrt{s}}}{s} \right) + \frac{2s\gamma}{2\gamma s(s-1)} T_b \Psi_1^{22} \left( \frac{e^{-\alpha_1^{22}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right) e^{-s\lambda_{13}^2} - \right. \\
& - \left[ T_a \frac{(2 + (\gamma - 1)s)}{2\gamma s(s-1)} e^{-s\lambda_{14}^2} \left( \Psi_2^{22} \left( \frac{e^{-\alpha_2^{22}\sqrt{s}}}{s} \right) \right) + \frac{(2 + (\gamma - 1)s)}{2\gamma s(s-1)} e^{-s\lambda_{14}^2} T_b \Psi_3^{22} \left( \frac{e^{-\alpha_3^{22}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] - \\
& - \left[ \left[ T_a \frac{(-2 + (\gamma + 1)s)}{2\gamma s(s-1)} \left\{ \Psi_4^{22} \left( \frac{e^{-\alpha_4^{22}\sqrt{s}}}{s} \right) - \Psi_6^{22} \left( \frac{e^{-\alpha_6^{22}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right\} + \frac{(-2 + (\gamma + 1)s)}{2\gamma s(s-1)} T_b \left( \Psi_5^{22} \left( \frac{e^{-\alpha_5^{22}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right) \right] e^{-s\lambda_{15}^2} - \right. \\
& - 2 \left[ 4T_a \frac{(s-2)}{2\gamma s(s-1)} \Psi_6^{22} \left( \frac{e^{-\alpha_6^{22}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) + T_b \frac{(s-2)}{2\gamma s(s-1)} \Psi_7^{22} \left( \frac{e^{-\alpha_7^{22}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] e^{-s\lambda_{16}^2} + \\
& + e^{-s\lambda_{17}^2} \left( \left\{ T_a \frac{(2 + (\gamma - 1)s)}{2\gamma s(s-1)} \left[ 2\Psi_8^{22} \left( \frac{e^{-\alpha_8^{22}\sqrt{s}}}{s} \right) - \Psi_6^{22} \left( \frac{e^{-\alpha_6^{22}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] + T_b \frac{(2 + (\gamma - 1)s)}{2\gamma s(s-1)} \left[ \Psi_9^{22} \left( \frac{e^{-\alpha_9^{22}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] \right\} \right) \left. \right] \left. \right) \\
& - \frac{1}{s-1} \left\{ 2T_a \Psi_8^{22} \left( \frac{e^{-\alpha_8^{22}\sqrt{s}}}{s} \right) + T_b \Psi_{10}^{22} \left( \frac{e^{-\alpha_{10}^{22}\sqrt{s}}}{s} \right) \right\} * \sum_0^\infty \left( \sum_{k=0}^{13} \tilde{g}_i e^{-2\tilde{\gamma}_i \sqrt{s}} \right)^n * \\
& * \sum_{k=0}^\infty \left[ e^{-2s(h_1+h_2)} - e^{-2sh_1} + e^{-2sh_2} + 2e^{-4s(h_1+h_2)} \right]^k
\end{aligned}
\tag{4.53}$$

Тогда учитывая эти соотношения А.7 из Приложения А получаем оригинал второго перемещения:

$$\begin{aligned}
\nu_2(\tau, y) = & \beta \left[ T_a \left( 2Q_1^2(\tau, y, \lambda_1^2, \alpha_0^{21}) - 4Q_2^2(\tau, y, \lambda_1^2, \alpha_2^{21}) + Q_3^2(\tau, y, \lambda_2^2, \alpha_4^{21}) + \right. \right. \\
& 2Q_5^2(\tau, y, \lambda_3^2, \alpha_6^{21}) + 4Q_2^2(\tau, y, \lambda_3^2, \alpha_8^{21}) + 2Q_7^2(\tau, y, \lambda_3^2, \alpha_{10}^{21}) - 2Q_7^2(\tau, y, \lambda_4^2, \alpha_{12}^{21}) - \\
& - 2Q_7^2(\tau, y, \lambda_5^2, \alpha_{12}^{21}) - 2Q_7^2(\tau, y, \lambda_6^2, \alpha_{12}^{21}) - Q_7^2(\tau, y, \lambda_7^2, \alpha_{12}^{21}) + 8Q_9^2(\tau, y, \lambda_8^2, \alpha_{14}^{21}) + \\
& + 8Q_9^2(\tau, y, \lambda_9^2, \alpha_{14}^{21}) + 8Q_9^2(\tau, y, \lambda_{10}^2, \alpha_{14}^{21}) + 2Q_1^2(\tau, y, \lambda_{11}^2, \alpha_{12}^{21}) - 4Q_2^2(\tau, y, \lambda_{11}^2, \alpha_{14}^{21}) - \\
& - 2Q_1^2(\tau, y, \lambda_{12}^2, \alpha_{12}^{21}) - 4Q_2^2(\tau, y, \lambda_{12}^2, \alpha_{14}^{21}) + Q_3^2(\tau, y, \lambda_{13}^2, \alpha_0^{22}) + Q_7^2(\tau, y, \lambda_{17}^2, \alpha_4^{22}) - \\
& - Q_8^2(\tau, y, \lambda_{17}^2, \alpha_6^{22}) - 8Q_9^2(\tau, y, \lambda_{16}^2, \alpha_6^{22}) + 2Q_1^2(\tau, y, \lambda_{17}^2, \alpha_8^{22}) - Q_2^2(\tau, y, \lambda_{17}^2, \alpha_6^{22}) - \\
& - Q_1^2(\tau, y, \lambda_{14}^2, \alpha_2^{22}) - 2Q_{10}^2(\tau, y, \alpha_8^{22}) \left. \right) + T_b \left( -2Q_2^2(\tau, y, \lambda_1^2, \alpha_1^{21}) - Q_2^2(\tau, y, \lambda_1^2, \alpha_3^{21}) + \right. \\
& + Q_3^2(\tau, y, \lambda_2^2, \alpha_5^{21}) + 4Q_4^2(\tau, y, \lambda_3^2, \alpha_7^{21}) + Q_2^2(\tau, y, \lambda_3^2, \alpha_9^{21}) + 2Q_8^2(\tau, y, \lambda_3^2, \alpha_{11}^{21}) + \\
& + Q_8^2(\tau, y, \lambda_4^2, \alpha_{14}^{21}) - 4Q_8^2(\tau, y, \lambda_4^2, \alpha_{13}^{21}) + 2Q_8^2(\tau, y, \lambda_5^2, \alpha_{14}^{21}) - 4Q_8^2(\tau, y, \lambda_5^2, \alpha_{13}^{21}) + \\
& + 2Q_8^2(\tau, y, \lambda_6^2, \alpha_{14}^{21}) - 4Q_8^2(\tau, y, \lambda_6^2, \alpha_{13}^{21}) + 2Q_8^2(\tau, y, \lambda_7^2, \alpha_{14}^{21}) - 4Q_8^2(\tau, y, \lambda_7^2, \alpha_{13}^{21}) + \\
& + 2Q_9^2(\tau, y, \lambda_8^2, \alpha_{15}^{21}) + 2Q_9^2(\tau, y, \lambda_9^2, \alpha_{15}^{21}) + 2Q_9^2(\tau, y, \lambda_{10}^2, \alpha_{15}^{21}) + 4Q_2^2(\tau, y, \lambda_{11}^2, \alpha_{13}^{21}) - \\
& - 4Q_2^2(\tau, y, \lambda_{12}^2, \alpha_{13}^{21}) + \frac{1}{2}Q_4^2(\tau, y, \lambda_{13}^2, \alpha_1^{22}) - Q_2^2(\tau, y, \lambda_{14}^2, \alpha_3^{22}) + Q_8^2(\tau, y, \lambda_{17}^2, \alpha_5^{22}) - \\
& \left. - 2Q_9^2(\tau, y, \lambda_{16}^2, \alpha_7^{22}) + Q_2^1(\tau, y, \lambda_{17}^2, \alpha_9^{22}) - Q_{10}^2(\tau, y, \alpha_{10}^{22}) \right) \left. \right] \tag{4.54}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_3^L(s, y) = & \beta \left[ \left( -\frac{(2+(\gamma-1)s)}{2\gamma s(s-1)} 2T_a \left\{ \Psi_0^{31} \left( \frac{e^{-\alpha_0^{31}\sqrt{s}}}{s} \right) - \Psi_1^{31} \left( \frac{e^{-\alpha_1^{31}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right\} - \frac{(2+(\gamma-1)s)}{2\gamma s(s-1)} T_b \Psi_2^{31} \left( \frac{e^{-\alpha_2^{31}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right) e^{-s\lambda_3^3} + \right. \\
& + \left[ \frac{4s\gamma}{2\gamma s(s-1)} T_a \Psi_3^{31} \left( \frac{e^{-\alpha_3^{31}\sqrt{s}}}{s} \right) + \frac{4s\gamma}{2\gamma s(s-1)} T_b \Psi_4^{31} \left( \frac{e^{-\alpha_4^{31}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] e^{-s\lambda_3^3} + \frac{s(3+\gamma)}{2\gamma s(s-1)} e^{-s\lambda_3^3} \left\{ 2T_a \Psi_5^{31} \left( \frac{e^{-\alpha_5^{31}\sqrt{s}}}{s} \right) + 4T_b \Psi_6^{31} \left( \frac{e^{-\alpha_6^{31}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right\} + \\
& + \frac{(\gamma-1)s}{2\gamma s(s-1)} e^{-s\lambda_3^3} \left[ -2T_a \Psi_1^{31} \left( \frac{e^{-\alpha_1^{31}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) + T_b \Psi_7^{31} \left( \frac{e^{-\alpha_7^{31}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] - 2 \left[ T_a \Psi_3^{31} \left( \frac{e^{-\alpha_3^{31}\sqrt{s}}}{s} \right) + T_b \Psi_4^{31} \left( \frac{e^{-\alpha_4^{31}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] \frac{(\gamma+1)s}{2\gamma s(s-1)} e^{-s\lambda_3^3} + \\
& + \left[ T_a \left\{ \Psi_8^{31} \left( \frac{e^{-\alpha_8^{31}\sqrt{s}}}{s} \right) - 4\Psi_1^{31} \left( \frac{e^{-\alpha_1^{31}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right\} + T_b \Psi_9^{31} \left( \frac{e^{-\alpha_9^{31}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] e^{-s\lambda_3^3} + \\
& + \left\{ 2T_a \frac{(-2+(\gamma+1)s)}{2\gamma s(s-1)} \left( \Psi_5^{31} \left( \frac{e^{-\alpha_5^{31}\sqrt{s}}}{s} \right) + \Psi_1^{31} \left( \frac{e^{-\alpha_1^{31}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right) + T_b \frac{(-2+(\gamma+1)s)}{2\gamma s(s-1)} \left( 4\Psi_6^{31} \left( \frac{e^{-\alpha_6^{31}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) - T_b \Psi_7^{31} \left( \frac{e^{-\alpha_7^{31}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right) \right\} * \\
& * (e^{-s\lambda_4^3} + e^{-s\lambda_5^3} - e^{-s\lambda_6^3} + e^{-s\lambda_7^3}) + \\
& + \left[ -4T_a \Psi_1^{31} \left( \frac{e^{-\alpha_1^{31}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) + 2T_b \Psi_7^{31} \left( \frac{e^{-\alpha_7^{31}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] \frac{(s-2)}{2\gamma s(s-1)} (e^{-s\lambda_8^3} + e^{-s\lambda_9^3} - e^{-s\lambda_{10}^3}) + \\
& + \left\{ 2T_a \left[ \Psi_5^{31} \left( \frac{e^{-\alpha_5^{31}\sqrt{s}}}{s} \right) + \Psi_1^{31} \left( \frac{e^{-\alpha_1^{31}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] + T_b \left[ 4\Psi_6^{31} \left( \frac{e^{-\alpha_6^{31}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) - \Psi_7^{31} \left( \frac{e^{-\alpha_7^{31}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] \right\} * \frac{(2+(\gamma-1)s)}{2\gamma s(s-1)} (e^{-s\lambda_{11}^3} - e^{-s\lambda_{12}^3}) + \\
& + \left\langle \left[ 2T_a \Psi_0^{32} \left( \frac{e^{-\alpha_0^{32}\sqrt{s}}}{s} \right) + 4T_b \Psi_1^{32} \left( \frac{e^{-\alpha_1^{32}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] \right\rangle \frac{(2+(\gamma-1)s)}{2\gamma s(s-1)} (e^{-s\lambda_{13}^3} - e^{-s\lambda_{14}^3}) + 4s\gamma \left[ T_a \Psi_2^{32} \left( \frac{e^{-\alpha_2^{32}\sqrt{s}}}{s} \right) + T_b \Psi_3^{32} \left( \frac{e^{-\alpha_3^{32}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] e^{-s\lambda_{15}^3} - \\
& - \left[ 2T_a \Psi_4^{32} \left( \frac{e^{-\alpha_4^{32}\sqrt{s}}}{s} \right) + 2T_b \Psi_5^{32} \left( \frac{e^{-\alpha_5^{32}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] \frac{(2+(\gamma-1)s)}{2\gamma s(s-1)} e^{-s\lambda_{16}^3} + \left( -\left[ -2T_a \Psi_4^{32} \left( \frac{e^{-\alpha_4^{32}\sqrt{s}}}{s} \right) + T_b \Psi_6^{32} \left( \frac{e^{-\alpha_6^{32}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] \right) \frac{(s(\gamma+1)+2)}{2\gamma s(s-1)} + \\
& + \left[ 4T_a \Psi_7^{32} \left( \frac{e^{-\alpha_7^{32}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) + T_b \Psi_8^{32} \left( \frac{e^{-\alpha_8^{32}\sqrt{s}}}{s} \right) \right] \frac{(s(\gamma+1)-2)}{2\gamma s(s-1)} e^{-s\lambda_{17}^3} - 4 \left[ 4T_a \Psi_9^{32} \left( \frac{e^{-\alpha_9^{32}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) + T_b \Psi_{10}^{32} \left( \frac{e^{-\alpha_{10}^{32}\sqrt{s}}}{s} \right) \right] \frac{(s-2)}{2\gamma s(s-1)} e^{-s\lambda_{18}^3} + \\
& + 2 \left( \left[ 4T_a \left( \Psi_{11}^{32} \left( \frac{e^{-\alpha_{11}^{32}\sqrt{s}}}{s} \right) - \Psi_9^{32} \left( \frac{e^{-\alpha_9^{32}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right) - 2T_b \Psi_8^{32} \left( \frac{e^{-\alpha_8^{32}\sqrt{s}}}{s} \right) \right] \frac{(2+(\gamma-1)s)}{2\gamma s(s-1)} \right) e^{-s\lambda_{19}^3} \Big] - \\
& - \frac{\beta}{s-1} \left[ 4T_a \Psi_{11}^{32} \left( \frac{e^{-\alpha_{11}^{32}\sqrt{s}}}{s} \right) + 2T_b \Psi_{14}^{32} \left( \frac{e^{-\alpha_{14}^{32}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] * \\
& * \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{i=0}^{13} \tilde{g}_i e^{-2\tilde{\gamma}_i \sqrt{s}} \right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \left[ e^{-2s(h_1+h_2)} - e^{-2sh_1} + e^{-2sh_2} + 2e^{-4s(h_1+h_2)} \right]^k
\end{aligned} \tag{4.55}$$

Учитывая эти соотношения получаем оригинал третьего перемещения

$$\begin{aligned}
\nu_3(\tau, y) = & \beta \left[ T_a \left\langle -2Q_1^3(\tau, y, \lambda_1^3, \alpha_0^{31}) + 2Q_2^3(\tau, y, \lambda_1^3, \alpha_1^{31}) + Q_3^3(\tau, y, \lambda_2^3, \alpha_3^{31}) + 2Q_5^3(\tau, y, \lambda_3^3, \alpha_5^{31}) - \right. \right. \\
& -2Q_7^3(\tau, y, \lambda_3^3, \alpha_1^{31}) - 2Q_8^3(\tau, y, \lambda_3^3, \alpha_3^{31}) + Q_{10}^3(\tau, y, \lambda_3^3, \alpha_8^{31}) - 4Q_{11}^3(\tau, y, \lambda_3^3, \alpha_1^{31}) - \\
& -Q_{12}^3(\tau, y, \lambda_4^3, \alpha_5^{31}) - 2Q_{13}^3(\tau, y, \lambda_4^3, \alpha_1^{31}) - 2Q_{12}^3(\tau, y, \lambda_5^3, \alpha_5^{31}) - 2Q_{13}^3(\tau, y, \lambda_5^3, \alpha_1^{31}) + \\
& +2Q_{12}^3(\tau, y, \lambda_6^3, \alpha_5^{31}) + 2Q_{13}^3(\tau, y, \lambda_6^3, \alpha_1^{31}) - 2Q_{12}^3(\tau, y, \lambda_7^3, \alpha_5^{31}) - 2Q_{13}^3(\tau, y, \lambda_7^3, \alpha_1^{31}) - 4Q_{14}^3(\tau, y, \lambda_8^3, \alpha_1^{31}) - \\
& -4Q_{14}^3(\tau, y, \lambda_9^3, \alpha_1^{31}) + 4Q_{14}^3(\tau, y, \lambda_{10}^3, \alpha_1^{31}) + 2TQ_1^3(\tau, y, \lambda_{11}^3, \alpha_5^{31}) + 2Q_2^3(\tau, y, \lambda_{11}^3, \alpha_1^{31}) - 2Q_1^3(\tau, y, \lambda_{12}^3, \alpha_5^{31}) - \\
& -2Q_2^3(\tau, y, \lambda_{12}^3, \alpha_1^{31}) + 2Q_1^3(\tau, y, \lambda_{13}^3, \alpha_0^{32}) - 2Q_1^3(\tau, y, \lambda_{16}^3, \alpha_4^{32}) - 2Q_1^3(\tau, y, \lambda_{14}^3, \alpha_0^{32}) + Q_3^3(\tau, y, \lambda_{15}^3, \alpha_2^{32}) + \\
& +2Q_{15}^3(\tau, y, \lambda_{17}^3, \alpha_4^{32}) - 4Q_{13}^3(\tau, y, \lambda_{17}^3, \alpha_7^{32}) + 8(Q_1^3(\tau, y, \lambda_{19}^3, \alpha_{11}^{32}) - 16Q_{14}^3(\tau, y, \lambda_{18}^3, \alpha_9^{32}) - \\
& -8Q_2^3(\tau, y, \lambda_{19}^3, \alpha_9^{32}) - 4Q_{18}^3(\tau, y, \alpha_{11}^{32})) + T_b \left\langle Q_2^3(\tau, y, \lambda_1^3, \alpha_2^{31}) + Q_4^3(\tau, y, \lambda_2^3, \alpha_4^{31}) + 4Q_6^3(\tau, y, \lambda_3^3, \alpha_6^{31}) + \right. \\
& +Q_7^3(\tau, y, \lambda_3^3, \alpha_7^{31}) - 2Q_9^3(\tau, y, \lambda_3^3, \alpha_4^{31}) + Q_{11}^3(\tau, y, \lambda_3^3, \alpha_9^{31}) - 4Q_{13}^3(\tau, y, \lambda_4^3, \alpha_6^{31}) - Q_{13}^3(\tau, y, \lambda_4^3, \alpha_7^{31}) + \\
& +4Q_{13}^3(\tau, y, \lambda_5^3, \alpha_6^{31}) + Q_{13}^3(\tau, y, \lambda_5^3, \alpha_7^{31}) - 4Q_{13}^3(\tau, y, \lambda_6^3, \alpha_6^{31}) - Q_{13}^3(\tau, y, \lambda_6^3, \alpha_7^{31}) - \\
& -4Q_{13}^3(\tau, y, \lambda_7^3, \alpha_6^{31}) - Q_{13}^3(\tau, y, \lambda_7^3, \alpha_7^{31}) + 2Q_{14}^3(\tau, y, \lambda_8^3, \alpha_7^{31}) + 2Q_{14}^3(\tau, y, \lambda_9^3, \alpha_7^{31}) - \\
& -2Q_{14}^3(\tau, y, \lambda_{10}^3, \alpha_7^{31}) + 4Q_2^3(\tau, y, \lambda_{11}^3, \alpha_6^{31}) - Q_2^3(\tau, y, \lambda_{11}^3, \alpha_7^{31}) - 4Q_2^3(\tau, y, \lambda_{12}^3, \alpha_6^{31}) + Q_2^3(\tau, y, \lambda_{12}^3, \alpha_7^{31}) + \\
& +4Q_2^3(\tau, y, \lambda_{13}^3, \alpha_1^{32}) - 4Q_2^3(\tau, y, \lambda_{14}^3, \alpha_1^{32}) + Q_3^3(\tau, y, \lambda_{15}^3, \alpha_3^{32}) + 2Q_2^3(\tau, y, \lambda_{16}^3, \alpha_5^{32}) - Q_{16}^3(\tau, y, \lambda_{17}^3, \alpha_6^{32}) - \\
& \left. -Q_{12}^3(\tau, y, \lambda_{17}^3, \alpha_8^{32}) - 4Q_{17}^3(\tau, y, \lambda_{18}^3, \alpha_{10}^{32}) - 4Q_{17}^3(\tau, y, \lambda_{19}^3, \alpha_{11}^{32}) + 2Q_{18}^3(\tau, y, \alpha_{14}^{32}) \right\rangle \\
(4.56)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nu_4^L(s, y) = & \left\langle \left( \left( \frac{(2 + (\gamma - 1)s)}{2\gamma s(s - 1)} (e^{-s\lambda_4^4} - e^{-s\lambda_2^4}) \right) \left( \left\{ 2T_a \Psi_0^{41} \left( \frac{e^{-\alpha_0^{41}\sqrt{s}}}{s} \right) + T_b \Psi_2^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_2^{21}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right\} - \right. \right. \right. \\
& - \left[ 4T_a \Psi_1^{41} \left( \frac{e^{-\alpha_1^{41}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) + T_b \Psi_5^{41} \left( \frac{e^{-\alpha_5^{41}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] - \left( 2 \left[ T_a \Psi_3^{41} \left( \frac{e^{-\alpha_3^{41}\sqrt{s}}}{s} \right) + T_b \Psi_4^{41} \left( \frac{e^{-\alpha_4^{41}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] - \right. \\
& - \left[ 4T_a \Psi_1^{41} \left( \frac{e^{-\alpha_1^{41}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] \frac{(2 + (\gamma - 1)s)}{2\gamma s(s - 1)} e^{-s\lambda_3^4} + \left( \left[ 4T_a \Psi_1^{41} \left( \frac{e^{-\alpha_1^{41}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) + T_b \Psi_5^{41} \left( \frac{e^{-\alpha_5^{41}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] \right) * \\
& * \frac{((3\gamma + 1)s - 2)}{2\gamma s(s - 1)} + \left( \left\{ 2T_a \Psi_3^{41} \left( \frac{e^{-\alpha_3^{41}\sqrt{s}}}{s} \right) + T_b \Psi_6^{41} \left( \frac{e^{-\alpha_6^{41}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right\} \frac{(s(\gamma + 1) + 2)}{2\gamma s(s - 1)} e^{-s\lambda_4^4} + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2 \left[ 4T_a \Psi_1^{41} \left( \frac{e^{-\alpha_1^{41} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) + T_b \Psi_5^{41} \left( \frac{e^{-\alpha_5^{41} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] \frac{(s-2)}{2\gamma s(s-1)} \left( e^{-s\lambda_5^4} - e^{-s\lambda_6^4} + e^{-s\lambda_7^4} + e^{-s\lambda_8^4} \right) + \\
& + \frac{4s\gamma}{2\gamma s(s-1)} \left[ T_a \Psi_7^{41} \left( \frac{e^{-\alpha_7^{41} \sqrt{s}}}{s} \right) + T_b \Psi_8^{41} \left( \frac{e^{-\alpha_8^{41} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] e^{-s\lambda_9^4} + \\
& \left( \left( \left( \left[ 4T_a \Psi_0^{42} \left( \frac{e^{-\alpha_0^{42} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) + T_b \Psi_1^{42} \left( \frac{e^{-\alpha_1^{42} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] \frac{((3\gamma+1)s-2)}{2\gamma s(s-1)} - \left( 2T_a \Psi_2^{42} \left( \frac{e^{-\alpha_2^{42} \sqrt{s}}}{s} \right) + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + T_b \Psi_3^{42} \left( \frac{e^{-\alpha_3^{42} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right) \right) \frac{(s(\gamma+1)+2)}{2\gamma s(s-1)} \right) e^{-s\lambda_{10}^4} - \\
& - \frac{4}{2\gamma s(s-1)} \left( \left[ 4T_a \Psi_0^{42} \left( \frac{e^{-\alpha_0^{42} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) + T_b \Psi_1^{42} \left( \frac{e^{-\alpha_1^{42} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] - 2 \right) e^{-s\lambda_{11}^4} - \\
& - \frac{(2+(\gamma-1)s)}{2\gamma s(s-1)} \left( \left[ 2T_a \left\{ \Psi_4^{42} \left( \frac{e^{-\alpha_4^{42} \sqrt{s}}}{s} \right) - 2\Psi_0^{42} \left( \frac{e^{-\alpha_0^{42} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right\} + 2T_b \Psi_5^{42} \left( \frac{e^{-\alpha_5^{42} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] \right) e^{-s\lambda_{12}^4} + \\
& + \frac{(2+(\gamma-1)s)}{2\gamma s(s-1)} \left( \left\{ 2T_a \Psi_7^{42} \left( \frac{e^{-\alpha_7^{42} \sqrt{s}}}{s} \right) - T_b \Psi_5^{42} \left( \frac{e^{-\alpha_5^{42} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right\} - \left[ T_a \Psi_6^{42} \left( \frac{e^{-\alpha_6^{42} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] \right) * \\
& * \left( e^{-s\lambda_{13}^4} + e^{-s\lambda_{14}^4} \right) + \frac{4s\gamma}{2\gamma s(s-1)} \left[ T_a \Psi_8^{42} \left( \frac{e^{-\alpha_8^{42} \sqrt{s}}}{s} \right) + T_b \Psi_1^{42} \left( \frac{e^{-\alpha_1^{42} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] e^{-s\lambda_{15}^4} - \\
& - \frac{2\gamma s}{2\gamma s(s-1)} \left[ 4T_a \Psi_0^{42} \left( \frac{e^{-\alpha_0^{42} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) + T_b \Psi_1^{42} \left( \frac{e^{-\alpha_1^{42} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] * \\
& * \beta - \beta \frac{1}{s-1} \left[ 4T_a \Psi_1^{41} \left( \frac{e^{-\alpha_1^{41} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) + T_b \Psi_5^{41} \left( \frac{e^{-\alpha_5^{41} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] \left. \right] \sum_0^\infty \left( \sum_{k=0}^{13} \tilde{g}_i e^{-2\tilde{\gamma}_i \sqrt{s}} \right)^n * \\
& * \sum_{k=0}^\infty \left[ e^{-2s(h_1+h_2)} - e^{-2sh_1} + e^{-2sh_2} + 2e^{-4s(h_1+h_2)} \right]^k
\end{aligned}$$

(4.57)

$$\begin{aligned}
v_4(\tau, y) = & \beta(T_a \langle Q_1^4(\tau, y, \lambda_{11}^4, \alpha_0^{41}) - 4Q_2^4(\tau, y, \lambda_1^4, \alpha_1^{41}) - 2Q_1^4(\tau, y, \lambda_2^4, \alpha_0^{41}) + \\
& 4Q_2^4(\tau, y, \lambda_2^4, \alpha_1^{41}) - 2Q_1^4(\tau, y, \lambda_3^4, \alpha_3^{41}) + 8Q_2^4(\tau, y, \lambda_3^4, \alpha_1^{41}) + 4Q_3^4(\tau, y, \lambda_4^4, \alpha_1^{41}) + \\
& + 2Q_4^4(\tau, y, \lambda_4^4, \alpha_3^{41}) + 8Q_6^4(\tau, y, \lambda_5^4, \alpha_1^{41}) - 8Q_6^4(\tau, y, \lambda_6^4, \alpha_1^{41}) + 8Q_6^4(\tau, y, \lambda_7^4, \alpha_1^{41}) + \\
& + 8Q_6^4(\tau, y, \lambda_8^4, \alpha_1^{41}) + Q_7^4(\tau, y, \lambda_9^4, \alpha_7^{41}) + 4Q_3^4(\tau, y, \lambda_{10}^4, \alpha_0^{42}) - 2Q_4^4(\tau, y, \lambda_{10}^4, \alpha_2^{42}) - \\
& - 16Q_9^4(\tau, y, \lambda_{11}^4, \alpha_0^{42}) - 2\{Q_1^4(\tau, y, \lambda_{12}^4, \alpha_4^{42}) - 2Q_2^4(\tau, y, \lambda_{12}^4, \alpha_0^{42})\} + \\
& + 2Q_1^4(\tau, y, \lambda_{13}^4, \alpha_7^{42}) - Q_2^4(\tau, y, \lambda_{13}^4, \alpha_6^{22}) + 2Q_1^4(\tau, y, \lambda_{14}^4, \alpha_7^{42}) - Q_2^4(\tau, y, \lambda_{14}^4, \alpha_6^{22}) + \\
& + T_a Q_7^4(\tau, y, \lambda_{15}^4, \alpha_8^{42}) - 4Q_{10}^4(\tau, y, \alpha_0^{42}) - 4Q_{10}^4(\tau, y, \alpha_1^{41}) \rangle + \\
& + T_b \langle Q_2^4(\tau, y, \lambda_1^4, \alpha_2^{41}) + Q_2^4(\tau, y, \lambda_1^4, \alpha_1^{41}) - Q_2^4(\tau, y, \lambda_2^4, \alpha_2^{41}) - 2Q_2^4(\tau, y, \lambda_3^4, \alpha_4^{41}) + \\
& + Q_3^4(\tau, y, \lambda_4^4, \alpha_5^{41}) + Q_5^4(\tau, y, \lambda_4^4, \alpha_6^{41}) + 2Q_6^4(\tau, y, \lambda_5^4, \alpha_5^{41}) - 2Q_6^4(\tau, y, \lambda_6^4, \alpha_5^{41}) + \\
& + 2Q_6^4(\tau, y, \lambda_7^4, \alpha_5^{41}) + 2Q_6^4(\tau, y, \lambda_8^4, \alpha_5^{41}) + Q_8^4(\tau, y, \lambda_9^4, \alpha_8^{41}) + Q_3^4(\tau, y, \lambda_{10}^4, \alpha_1^{42}) - \\
& - Q_5^4(\tau, y, \lambda_{10}^4, \alpha_3^{42}) - 4Q_9^4(\tau, y, \lambda_{11}^4, \alpha_1^{42}) - 2Q_2^4(\tau, y, \lambda_{12}^4, \alpha_5^{42}) - Q_2^4(\tau, y, \lambda_{13}^4, \alpha_5^{42}) - \\
& - Q_2^4(\tau, y, \lambda_{14}^4, \alpha_5^{42}) + Q_8^4(\tau, y, \lambda_{15}^4, \alpha_1^{42}) - Q_{10}^4(\tau, y, \alpha_1^{42}) - Q_{10}^4(\tau, y, \alpha_5^{41}) \rangle * \\
& * \sum_0^\infty \left( \sum_{k=0}^{13} \tilde{g}_i e^{-2\tilde{\gamma}_i \sqrt{s}} \right)^n \sum_{k=0}^\infty \left[ e^{-2s(h_1+h_2)} - e^{-2sh_1} + e^{-2sh_2} + 2e^{-4s(h_1+h_2)} \right]^k
\end{aligned}$$

(4.58)

Далее определим напряжения в слоях из соотношений:

Трансформанты напряжений в слоях примут вид:

$$\begin{aligned}
\sigma_{xi}^L(s, y) &= \gamma s (C_{1i} e^{sy} - C_{2i} e^{-sy}) + \beta T_i^L(s, y, n) \left( \frac{\gamma}{s-1} - 1 \right) = \\
&= \gamma s \left[ v_i^L(s, y) + \beta \frac{T_i^L(s, y, n)}{s-1} \right] + \beta T_i^L(s, y, n) \left( \frac{\gamma}{s-1} - 1 \right) =
\end{aligned} \tag{4.59}$$



$$\begin{aligned}
&= \gamma s v_i^L(s, y) + \beta \gamma s \frac{T_i^L(s, y, n)}{s-1} + \beta T_i^L(s, y, n) \left( \frac{\gamma}{s-1} - 1 \right) = \\
&= \gamma s v_i^L(s, y) + \beta T_i^L(s, y, n) \left[ \frac{\gamma(s+1)}{s-1} - 1 \right] \\
\sigma_{yi}^L(s, y) &= s \left[ v_i^L(s, y) + \beta \frac{T_i^L(s, y, n)}{s-1} \right] + \beta T_i^L(s, y, n) \frac{2-s}{s-1} = \\
&= s v_i^L(s, y) + \beta T_i^L(s, y, n) \frac{3-s}{s-1}
\end{aligned} \tag{4.60}$$

Тогда используя соотношения (4.51,4.53,4.55,4.57) имеем

$$\begin{aligned}
\sigma_{x_1}^L(s, y) &= \beta \left\langle \left\{ \frac{\gamma s e^{-s\lambda_1^1}}{2(s-1)} + \frac{s-2}{2(s-1)} e^{-s\lambda_2^1} - \right. \right. \\
&- \frac{(2+s(\gamma-1))\gamma s}{2\gamma(s-1)} e^{-s\lambda_3^1} \left\{ T_a \left[ \Psi_0^{11} \left( \frac{e^{-\alpha_0^{11}\sqrt{s}}}{s} \right) + \Psi_1^{11} \left( \frac{e^{-\alpha_1^{11}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] + T_b \Psi_2^{11} \left( \frac{e^{-\alpha_2^{11}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right\} + \\
&+ \left[ \frac{s-2}{2(s-1)} e^{-s\lambda_4^1} + \frac{\gamma s e^{-s\lambda_2^1}}{2(s-1)} - \frac{\gamma s(2+s(\gamma-1))}{2\gamma(s-1)} e^{-s\lambda_3^1} \right] * \\
&* T_a \left[ \Psi_3^{11} \left( \frac{e^{-\alpha_3^{11}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) + \Psi_4^{11} \left( \frac{e^{-\alpha_4^{11}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] + T_b \Psi_5^{11} \left( \frac{e^{-\alpha_5^{11}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) + \\
&+ \frac{s-2}{2(s-1)} e^{-s\lambda_4^1} \left[ T_a \Psi_5^{11} \left( \frac{e^{-\alpha_6^{11}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) + T_b \Psi_7^{11} \left( \frac{e^{-\alpha_7^{11}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] - \frac{\gamma s [e^{-s\lambda_5^1} - e^{-s\lambda_6^1}]}{s-1} + \\
&+ 2 \frac{\gamma s e^{-s\lambda_7^1}}{s-1} \left[ T_a \Psi_8^{11} \left( \frac{e^{-\alpha_8^{11}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) + T_b \Psi_9^{11} \left( \frac{e^{-\alpha_9^{11}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] + \\
&+ \frac{\gamma s (e^{-s\lambda_8^1} + e^{-s\lambda_9^1})}{s-1} \left[ T_a \Psi_0^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_0^{21}\sqrt{s}}}{s} \right) + T_b \Psi_1^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_1^{21}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] + \\
&+ \frac{\gamma s e^{-s\lambda_{10}^1}}{2(s-1)} \left\{ T_a \left[ \Psi_2^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_2^{21}\sqrt{s}}}{s} \right) + \Psi_3^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_3^{21}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] + T_b \Psi_4^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_4^{21}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right\} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{s-2}{2(s-1)} \left\{ T_a \left[ \Psi_5^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_5^{21} \sqrt{s}}}{s} \right) + \Psi_6^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_6^{21} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] + T_b \Psi_7^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_7^{21} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right\} + \\
& + \frac{(2+s(\gamma-1))\gamma s}{2\gamma(s-1)} e^{-s\lambda_1^1} T_a \left\{ \left[ \Psi_5^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_5^{21} \sqrt{s}}}{s} \right) + \Psi_6^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_6^{21} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] + T_b \Psi_7^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_7^{21} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right\} - \\
& - \frac{(s-2) \left[ e^{-s\lambda_{12}^1} + e^{-s\lambda_{13}^1} \right]}{2(s-1)} \left[ T_a \Psi_8^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_8^{21} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) + T_b \Psi_9^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_9^{21} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] + \\
& + e^{-s\lambda_{14}^1} \left\{ \frac{T_a \gamma s}{2(s-1)} \left[ \Psi_5^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_5^{21} \sqrt{s}}}{s} \right) + \Psi_6^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_6^{21} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] + \frac{T_b \gamma s}{2(s-1)} \Psi_7^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_7^{21} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right\} + \\
& + \frac{T_a (s-2)}{2(s-1)} \left\{ \left[ \Psi_{10}^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_{10}^{21} \sqrt{s}}}{s} \right) + \Psi_{11}^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_{11}^{21} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] + T_b \Psi_{12}^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_{12}^{21} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right\} - \\
& - \frac{s-2}{(s-1)} \left[ T_a \Psi_{13}^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_{10}^{21} \sqrt{s}}}{s} \right) + T_b \Psi_{14}^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_{14}^{21} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] \left. \right\} - \\
& - \frac{(2+s(\gamma-1))\gamma s}{2\gamma(s-1)} e^{-s\lambda_{15}^1} \left\{ T_a \left[ \Psi_2^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_2^{21} \sqrt{s}}}{s} \right) + \Psi_3^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_3^{21} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] + T_b \Psi_4^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_4^{21} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right\} + (4.61)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \frac{\gamma}{s-1} - 1 \right) \left[ T_a \Psi_{10} \left( \frac{e^{-\alpha_{10} \sqrt{s}}}{s} \right) + T_b \Psi_{11} \left( \frac{e^{-\alpha_{11} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] \left. \right\} \sum_{k=0}^{\infty} \left[ e^{-2s(h_1+h_2)} - e^{-2sh_1} + \right. \\
& \left. + e^{-2sh_2} + 2e^{-4s(h_1+h_2)} \right]^k \left( \sum_{i=0}^{13} \tilde{g}_i e^{-2\tilde{\gamma}_i \sqrt{s}} \right)^n \\
\sigma_{x_1}(\tau, y) = & \beta \left\{ T_a \left\{ P_1^1(\tau, y, \lambda_1^1, \alpha_0^{11}) + P_2^1(\tau, y, \lambda_1^1, \alpha_1^{11}) + P_3^1(\tau, y, \lambda_2^1, \alpha_0^{11}) + P_4^1(\tau, y, \lambda_2^1, \alpha_1^{11}) - P_5^1(\tau, y, \lambda_3^1, \alpha_0^{11}) + \right. \right. \\
& + P_6^1(\tau, y, \lambda_3^1, \alpha_1^{11}) + P_4^1(\tau, y, \lambda_1^1, \alpha_3^{11}) + P_4^1(\tau, y, \lambda_1^1, \alpha_4^{11}) + P_2^1(\tau, y, \lambda_2^1, \alpha_3^{11}) + P_2^1(\tau, y, \lambda_2^1, \alpha_4^{11}) - P_6^1(\tau, y, \lambda_3^1, \alpha_3^{11}) - \\
& - P_6^1(\tau, y, \lambda_3^1, \alpha_4^{11}) + P_5^1(\tau, y, \lambda_4^1, \alpha_6^{11}) - 2P_2^1(\tau, y, \lambda_5^1, \alpha_8^{11}) + 2P_2^1(\tau, y, \lambda_6^1, \alpha_8^{11}) - 4P_2^1(\tau, y, \lambda_7^1, \alpha_8^{11}) + \\
& + 2P_1^1(\tau, y, \lambda_8^1, \alpha_0^{21}) + 2P_1^1(\tau, y, \lambda_9^1, \alpha_0^{21}) + P_1^1(\tau, y, \lambda_{10}^1, \alpha_2^{21}) + P_2^1(\tau, y, \lambda_{10}^1, \alpha_3^{21}) + P_3^1(\tau, y, \alpha_5^{21}) + P_4^1(\tau, y, \alpha_6^{21}) + \\
& + P_5^1(\tau, y, \lambda_{11}^1, \alpha_5^{21}) + P_6^1(\tau, y, \lambda_{11}^1, \alpha_6^{21}) - P_5^1(\tau, y, \lambda_{12}^1, \alpha_8^{21}) - P_5^1(\tau, y, \lambda_{13}^1, \alpha_8^{21}) + P_1^1(\tau, y, \lambda_{14}^1, \alpha_5^{21}) + P_2^1(\tau, y, \lambda_{14}^1, \alpha_6^{21}) + \\
& + P_3^1(\tau, y, \lambda_{14}^1, \alpha_{10}^{21}) + P_4^1(\tau, y, \lambda_{14}^1, \alpha_{11}^{21}) - 2P_3^1(\tau, y, \lambda_{14}^1, \alpha_{13}^{21}) - P_5^1(\tau, y, \lambda_{15}^1, \alpha_2^{21}) + P_6^1(\tau, y, \lambda_{15}^1, \alpha_3^{21}) + P_7^1(\tau, y, \alpha_{10}^{21}) \left. \right\} + \\
& + T_b \left\{ P_2^1(\tau, y, \lambda_1^1, \alpha_2^{11}) + P_4^1(\tau, y, \lambda_2^1, \alpha_2^{11}) - P_6^1(\tau, y, \lambda_3^1, \alpha_2^{11}) + P_4^1(\tau, y, \lambda_1^1, \alpha_5^{11}) + P_2^1(\tau, y, \lambda_2^1, \alpha_5^{11}) - P_6^1(\tau, y, \lambda_3^1, \alpha_5^{11}) + \right. \\
& + P_5^1(\tau, y, \lambda_3^1, \alpha_7^{11}) - 2P_2^1(\tau, y, \lambda_5^1, \alpha_9^{11}) + 2P_2^1(\tau, y, \lambda_6^1, \alpha_9^{11}) - 4P_2^1(\tau, y, \lambda_7^1, \alpha_9^{11}) + 2P_2^1(\tau, y, \lambda_8^1, \alpha_1^{21}) + 2P_2^1(\tau, y, \lambda_9^1, \alpha_1^{21}) + \\
& + P_2^1(\tau, y, \lambda_{10}^1, \alpha_4^{21}) + P_4^1(\tau, y, \alpha_7^{21}) + P_6^1(\tau, y, \lambda_{11}^1, \alpha_7^{21}) - P_6^1(\tau, y, \lambda_{12}^1, \alpha_9^{21}) - P_6^1(\tau, y, \lambda_{13}^1, \alpha_9^{21}) + P_2^1(\tau, y, \lambda_{14}^1, \alpha_7^{21}) + \\
& \left. + P_4^1(\tau, y, \lambda_{14}^1, \alpha_{12}^{21}) - 2P_4^1(\tau, y, \lambda_{14}^1, \alpha_{14}^{21}) - P_6^1(\tau, y, \lambda_{15}^1, \alpha_4^{21}) + P_8^1(\tau, y, \alpha_{11}^{21}) \right\} \left. \right\} \\
& (4.62)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{x_2}^L(s, y) = & \beta \left\langle \left( -\frac{\gamma s(2 + (\gamma - 1)s)}{2\gamma s(s-1)} 2T_a \Psi_0^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_0^{21}\sqrt{s}}}{s} \right) + \frac{(2 + (\gamma - 1)s)\gamma s}{2\gamma s(s-1)} 2T_b \Psi_1^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_1^{21}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right) + \right. \\
& + \frac{(2 + (\gamma - 1)s)\gamma s}{2\gamma s(s-1)} 4T_a \Psi_2^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_2^{21}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) - \frac{(2 + (\gamma - 1)s)\gamma s}{2\gamma s(s-1)} T_b \Psi_3^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_3^{21}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \left. \right\rangle e^{-s\lambda_1^2} + \\
& + \frac{4(\gamma s)^2}{2\gamma s(s-1)} T_a \Psi_4^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_4^{21}\sqrt{s}}}{s} \right) e^{-s\lambda_2^2} + \frac{4(\gamma s)^2}{2\gamma s(s-1)} T_b \Psi_5^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_5^{21}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) e^{-s\lambda_2^2} + \\
& + \left\{ 2T_a \Psi_6^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_6^{21}\sqrt{s}}}{s} \right) \frac{((3 + \gamma)s - 6)\gamma s}{2\gamma s(s-1)} + 4T_b \Psi_7^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_7^{21}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \frac{((3 + \gamma)s - 6)\gamma s}{2\gamma s(s-1)} \right\} e^{-s\lambda_3^2} + \\
& + \left[ \frac{((\gamma - 1)s + 2)\gamma s}{2\gamma s(s-1)} 4T_a \Psi_8^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_8^{21}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) + \frac{((\gamma - 1)s + 2)\gamma s}{2\gamma s(s-1)} T_b \Psi_9^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_9^{21}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] e^{-s\lambda_3^2} + \\
& + 2 \left[ T_a \Psi_{10}^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_{10}^{21}\sqrt{s}}}{s} \right) \frac{(2 - s(\gamma + 1))\gamma s}{2\gamma s(s-1)} + \frac{\gamma s(2 - s(\gamma + 1))}{2\gamma s(s-1)} T_b \Psi_{11}^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_{11}^{21}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] e^{-s\lambda_3^2} + \\
& + \left\{ 2T_a \frac{(-2 + (\gamma + 1)s)\gamma s}{2\gamma s(s-1)} \left( \Psi_{12}^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_{12}^{21}\sqrt{s}}}{s} \right) - 2\Psi_{14}^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_{14}^{21}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right) + \right. \\
& + \left. \frac{(-2 + (\gamma + 1)s)}{2\gamma s(s-1)} 4T_b \Psi_{13}^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_{13}^{21}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right\} * \left( e^{-s\lambda_4^2} + e^{-s\lambda_5^2} - e^{-s\lambda_6^2} + e^{-s\lambda_7^2} \right) + \\
& + 2 \left[ \frac{(s-2)\gamma s}{2\gamma s(s-1)} 4T_a \Psi_{14}^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_{14}^{21}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) + \frac{(s-2)\gamma s}{2\gamma s(s-1)} T_b \Psi_{15}^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_{15}^{21}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] \left( e^{-s\lambda_8^2} + e^{-s\lambda_9^2} - e^{-s\lambda_{10}^2} \right) + \\
& + \left\{ 2T_a \frac{(2 + (\gamma - 1)s)\gamma s}{2\gamma s(s-1)} \left( \Psi_{12}^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_{12}^{21}\sqrt{s}}}{s} \right) - 2\Psi_{14}^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_{14}^{21}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right) + \right. \\
& + 4T_b \frac{(2 + (\gamma - 1)s)\gamma s}{2\gamma s(s-1)} \Psi_{13}^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_{13}^{21}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \left. \right\} * \left( e^{-s\lambda_{11}^2} - e^{-s\lambda_{12}^2} \right) + \\
& \left( 2 \left[ \frac{2(\gamma s)^2}{2\gamma s(s-1)} T_a \Psi_0^{22} \left( \frac{e^{-\alpha_0^{22}\sqrt{s}}}{s} \right) + \frac{2\gamma s}{2\gamma s(s-1)} T_b \Psi_1^{22} \left( \frac{e^{-\alpha_1^{22}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] e^{-s\lambda_{13}^2} - \right. \\
& - \left[ T_a \frac{(2 + (\gamma - 1)s)\gamma s}{2\gamma s(s-1)} e^{-s\lambda_{14}^2} \left( \Psi_2^{22} \left( \frac{e^{-\alpha_2^{22}\sqrt{s}}}{s} \right) \right) + \frac{(2 + (\gamma - 1)s)\gamma s}{2\gamma s(s-1)} e^{-s\lambda_{14}^2} T_b \Psi_3^{22} \left( \frac{e^{-\alpha_3^{22}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] - \\
& - \left[ T_a \frac{(-2 + (\gamma + 1)s)\gamma s}{2\gamma s(s-1)} \left\{ \Psi_4^{22} \left( \frac{e^{-\alpha_4^{22}\sqrt{s}}}{s} \right) - \Psi_6^{22} \left( \frac{e^{-\alpha_6^{22}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right\} + \right. \\
& + \left. \frac{\gamma s(-2 + (\gamma + 1)s)}{2\gamma s(s-1)} T_b \left( \Psi_5^{22} \left( \frac{e^{-\alpha_5^{22}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right) \right] \left. \right) e^{-s\lambda_{15}^2} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2 \left[ 4T_a \frac{\gamma s(s-2)}{2\gamma s(s-1)} \Psi_6^{22} \left( \frac{e^{-\alpha_6^{22}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) + T_b \frac{\gamma s(s-2)}{2\gamma s(s-1)} \Psi_7^{22} \left( \frac{e^{-\alpha_7^{22}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] e^{-s\lambda_6^2} + \\
& + e^{-s\lambda_7^2} \left( \left\{ T_a \frac{\gamma s(2+(\gamma-1)s)}{2\gamma s(s-1)} \left[ 2\Psi_8^{22} \left( \frac{e^{-\alpha_8^{22}\sqrt{s}}}{s} \right) - \Psi_6^{22} \left( \frac{e^{-\alpha_6^{22}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] + T_b \frac{\gamma s(2+(\gamma-1)s)}{2\gamma s(s-1)} \left[ \Psi_9^{22} \left( \frac{e^{-\alpha_9^{22}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] \right\} \right) \\
& - \left( \frac{\gamma}{s-1} - 1 \right) \left\{ 2T_a \Psi_8^{22} \left( \frac{e^{-\alpha_8^{22}\sqrt{s}}}{s} \right) + T_b \Psi_{10}^{22} \left( \frac{e^{-\alpha_{10}^{22}\sqrt{s}}}{s} \right) \right\} * \sum_0^\infty \left( \sum_{k=0}^{13} \tilde{g}_i e^{-2\tilde{\gamma}_i\sqrt{s}} \right)^n * \\
& * \sum_{k=0}^\infty \left[ e^{-2s(h_1+h_2)} - e^{-2sh_1} + e^{-2sh_2} + 2e^{-4s(h_1+h_2)} \right]^k
\end{aligned}
\tag{4.63}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{x_2}(\tau, y) = & \beta \left[ T_a \left( 2P_1^2(\tau, y, \lambda_1^2, \alpha_0^{21}) - 4P_2^2(\tau, y, \lambda_1^2, \alpha_2^{21}) + P_3^2(\tau, y, \lambda_2^2, \alpha_4^{21}) + \right. \right. \\
& 2P_5^2(\tau, y, \lambda_3^2, \alpha_6^{21}) + 4P_2^2(\tau, y, \lambda_3^2, \alpha_8^{21}) + 2P_7^2(\tau, y, \lambda_3^2, \alpha_{10}^{21}) - 2P_7^2(\tau, y, \lambda_4^2, \alpha_{12}^{21}) - \\
& - 2P_7^2(\tau, y, \lambda_5^2, \alpha_{12}^{21}) - 2P_7^2(\tau, y, \lambda_6^2, \alpha_{12}^{21}) - P_7^2(\tau, y, \lambda_7^2, \alpha_{12}^{21}) + 8P_9^2(\tau, y, \lambda_8^2, \alpha_{14}^{21}) + \\
& + 8P_9^2(\tau, y, \lambda_9^2, \alpha_{14}^{21}) + 8P_9^2(\tau, y, \lambda_{10}^2, \alpha_{14}^{21}) + 2P_1^2(\tau, y, \lambda_{11}^2, \alpha_{12}^{21}) - 4P_2^2(\tau, y, \lambda_{11}^2, \alpha_{14}^{21}) - \\
& - 2P_1^2(\tau, y, \lambda_{12}^2, \alpha_{12}^{21}) - 4P_2^2(\tau, y, \lambda_{12}^2, \alpha_{14}^{21}) + P_3^2(\tau, y, \lambda_{13}^2, \alpha_0^{22}) + P_7^2(\tau, y, \lambda_{17}^2, \alpha_4^{22}) - \\
& - P_8^2(\tau, y, \lambda_{17}^2, \alpha_6^{22}) - 8P_9^2(\tau, y, \lambda_{16}^2, \alpha_6^{22}) + 2P_1^2(\tau, y, \lambda_{17}^2, \alpha_8^{22}) - P_2^2(\tau, y, \lambda_{17}^2, \alpha_6^{22}) - \\
& - P_1^2(\tau, y, \lambda_{14}^2, \alpha_2^{22}) - 2P_{10}^2(\tau, y, \alpha_8^{22}) \left. \right) + T_b \left( -2P_2^2(\tau, y, \lambda_1^2, \alpha_1^{21}) - P_2^2(\tau, y, \lambda_1^2, \alpha_3^{21}) + \right. \\
& + P_3^2(\tau, y, \lambda_2^2, \alpha_5^{21}) + 4P_4^2(\tau, y, \lambda_3^2, \alpha_7^{21}) + P_2^2(\tau, y, \lambda_3^2, \alpha_9^{21}) + 2P_8^2(\tau, y, \lambda_3^2, \alpha_{11}^{21}) + \\
& + P_8^2(\tau, y, \lambda_4^2, \alpha_{14}^{21}) - 4P_8^2(\tau, y, \lambda_4^2, \alpha_{13}^{21}) + 2P_8^2(\tau, y, \lambda_5^2, \alpha_{14}^{21}) - 4P_8^2(\tau, y, \lambda_5^2, \alpha_{13}^{21}) + \\
& + 2P_8^2(\tau, y, \lambda_6^2, \alpha_{14}^{21}) - 4P_8^2(\tau, y, \lambda_6^2, \alpha_{13}^{21}) + 2P_8^2(\tau, y, \lambda_7^2, \alpha_{14}^{21}) - 4P_8^2(\tau, y, \lambda_7^2, \alpha_{13}^{21}) + \\
& + 2P_9^2(\tau, y, \lambda_8^2, \alpha_{15}^{21}) + 2P_9^2(\tau, y, \lambda_9^2, \alpha_{15}^{21}) + 2P_9^2(\tau, y, \lambda_{10}^2, \alpha_{15}^{21}) + 4P_2^2(\tau, y, \lambda_{11}^2, \alpha_{13}^{21}) - \\
& - 4P_2^2(\tau, y, \lambda_{12}^2, \alpha_{13}^{21}) + \frac{1}{2} P_4^2(\tau, y, \lambda_{13}^2, \alpha_1^{22}) - P_2^2(\tau, y, \lambda_{14}^2, \alpha_3^{22}) + P_8^2(\tau, y, \lambda_{15}^2, \alpha_5^{22}) - \\
& \left. - 2P_9^2(\tau, y, \lambda_{16}^2, \alpha_7^{22}) + P_1^2(\tau, y, \lambda_{17}^2, \alpha_9^{22}) - P_{10}^2(\tau, y, \alpha_{10}^{22}) \right) \Big]
\end{aligned}
\tag{4.64}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{s_3}^L(s, y) = & \beta \left[ \left( -\frac{\gamma s(2+(\gamma-1)s)}{2\gamma s(s-1)} 2T_a \left\{ \Psi_0^{31} \left( \frac{e^{-\alpha_0^{31}\sqrt{s}}}{s} \right) - \Psi_1^{31} \left( \frac{e^{-\alpha_1^{31}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right\} - \frac{\gamma s(2+(\gamma-1)s)}{2\gamma s(s-1)} T_b \Psi_2^{31} \left( \frac{e^{-\alpha_2^{31}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right) e^{-s\lambda_3^3} + \right. \\
& + \left. \left[ \frac{4(s\gamma)^2}{2\gamma s(s-1)} T_a \Psi_3^{31} \left( \frac{e^{-\alpha_3^{31}\sqrt{s}}}{s} \right) + \frac{4(s\gamma)^2}{2\gamma s(s-1)} T_b \Psi_4^{31} \left( \frac{e^{-\alpha_4^{31}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] e^{-s\lambda_2^3} + \frac{s(3+\gamma)\gamma s}{2\gamma s(s-1)} e^{-s\lambda_3^3} \left\{ 2T_a \Psi_5^{31} \left( \frac{e^{-\alpha_5^{31}\sqrt{s}}}{s} \right) + 4T_b \Psi_6^{31} \left( \frac{e^{-\alpha_6^{31}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right\} + \right. \\
& + \frac{(\gamma-1)s\gamma s}{2\gamma s(s-1)} e^{-s\lambda_3^3} \left[ -2T_a \Psi_1^{31} \left( \frac{e^{-\alpha_1^{31}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) + T_b \Psi_7^{31} \left( \frac{e^{-\alpha_7^{31}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] - 2 \left[ T_a \Psi_3^{31} \left( \frac{e^{-\alpha_3^{31}\sqrt{s}}}{s} \right) + T_b \Psi_4^{31} \left( \frac{e^{-\alpha_4^{31}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] \frac{(\gamma+1)s\gamma s}{2\gamma s(s-1)} e^{-s\lambda_3^3} + \\
& + \gamma s \left[ T_a \left\{ \Psi_8^{31} \left( \frac{e^{-\alpha_8^{31}\sqrt{s}}}{s} \right) - 4\Psi_1^{31} \left( \frac{e^{-\alpha_1^{31}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right\} + T_b \Psi_9^{31} \left( \frac{e^{-\alpha_9^{31}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] e^{-s\lambda_3^3} + \\
& + \left. \left\{ 2T_a \frac{(-2+(\gamma+1)s)\gamma s}{2\gamma s(s-1)} \left( \Psi_5^{31} \left( \frac{e^{-\alpha_5^{31}\sqrt{s}}}{s} \right) + \Psi_1^{31} \left( \frac{e^{-\alpha_1^{31}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right) + T_b \frac{(-2+(\gamma+1)s)\gamma s}{2\gamma s(s-1)} \left( 4\Psi_6^{31} \left( \frac{e^{-\alpha_6^{31}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) - T_b \Psi_7^{31} \left( \frac{e^{-\alpha_7^{31}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right) \right\} * \right. \\
& * (e^{-s\lambda_4^3} + e^{-s\lambda_5^3} - e^{-s\lambda_6^3} + e^{-s\lambda_7^3}) + \\
& + \left[ -4T_a \Psi_1^{31} \left( \frac{e^{-\alpha_1^{31}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) + 2T_b \Psi_7^{31} \left( \frac{e^{-\alpha_7^{31}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] \frac{(s-2)\gamma s}{2\gamma s(s-1)} e^{(-s\lambda_8^3 + e^{-s\lambda_9^3} - e^{-s\lambda_{10}^3})} + \\
& + \left\{ 2T_a \left[ \Psi_5^{31} \left( \frac{e^{-\alpha_5^{31}\sqrt{s}}}{s} \right) + \Psi_1^{31} \left( \frac{e^{-\alpha_1^{31}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] + T_b \left[ 4\Psi_6^{31} \left( \frac{e^{-\alpha_6^{31}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) - \Psi_7^{31} \left( \frac{e^{-\alpha_7^{31}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] \right\} * \frac{(2+(\gamma-1)s)\gamma s}{2\gamma s(s-1)} (e^{-s\lambda_{11}^3} - e^{-s\lambda_{12}^3}) + \\
& + \left\langle \left\{ 2T_a \Psi_0^{32} \left( \frac{e^{-\alpha_0^{32}\sqrt{s}}}{s} \right) + 4T_b \Psi_1^{32} \left( \frac{e^{-\alpha_1^{32}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right\} \frac{(2+(\gamma-1)s)\gamma s}{2\gamma s(s-1)} (e^{-s\lambda_{13}^3} - e^{-s\lambda_{14}^3}) + 4s\gamma \left[ T_a \Psi_2^{32} \left( \frac{e^{-\alpha_2^{32}\sqrt{s}}}{s} \right) + T_b \Psi_3^{32} \left( \frac{e^{-\alpha_3^{32}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] e^{-\lambda_{15}^3} - \right. \\
& - \left. \left[ 2T_a \Psi_4^{32} \left( \frac{e^{-\alpha_4^{32}\sqrt{s}}}{s} \right) + 2T_b \Psi_5^{32} \left( \frac{e^{-\alpha_5^{32}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] \frac{(2+(\gamma-1)s)\gamma s}{2\gamma s(s-1)} e^{-s\lambda_{16}^3} + \left( -\left\{ -2T_a \Psi_4^{32} \left( \frac{e^{-\alpha_4^{32}\sqrt{s}}}{s} \right) + T_b \Psi_6^{32} \left( \frac{e^{-\alpha_6^{32}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right\} \frac{(s(\gamma+1)+2)\gamma s}{2\gamma s(s-1)} + \right. \\
& + \left. \left[ 4T_a \Psi_7^{32} \left( \frac{e^{-\alpha_7^{32}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) + T_b \Psi_8^{32} \left( \frac{e^{-\alpha_8^{32}\sqrt{s}}}{s} \right) \right] \frac{(s(\gamma+1)-2)\gamma s}{2\gamma s(s-1)} e^{-s\lambda_{17}^3} - 4 \left[ 4T_a \Psi_9^{32} \left( \frac{e^{-\alpha_9^{32}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) + T_b \Psi_{10}^{32} \left( \frac{e^{-\alpha_{10}^{32}\sqrt{s}}}{s} \right) \right] \frac{(s-2)\gamma s}{2\gamma s(s-1)} e^{-s\lambda_{18}^3} + \right. \\
& + \left. 2 \left( 4T_a \left( \Psi_{11}^{32} \left( \frac{e^{-\alpha_{11}^{32}\sqrt{s}}}{s} \right) - \Psi_9^{32} \left( \frac{e^{-\alpha_9^{32}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right) - 2T_b \Psi_8^{32} \left( \frac{e^{-\alpha_8^{32}\sqrt{s}}}{s} \right) \right) \frac{(2+(\gamma-1)s)\gamma s}{2\gamma s(s-1)} e^{-s\lambda_{19}^3} \right] - \\
& - \beta \left( \frac{\gamma}{s-1} - 1 \right) \left[ 4T_a \Psi_{11}^{32} \left( \frac{e^{-\alpha_{11}^{32}\sqrt{s}}}{s} \right) + 2T_b \Psi_{14}^{32} \left( \frac{e^{-\alpha_{14}^{32}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] * \\
& * \sum_0^\infty \left( \sum_{k=0}^{13} \tilde{g}_i e^{-2\tilde{\gamma}_i \sqrt{s}} \right)^n \sum_{k=0}^\infty \left[ e^{-2s(h_1+h_2)} - e^{-2sh_1} + e^{-2sh_2} + 2e^{-4s(h_1+h_2)} \right]^k
\end{aligned}
\tag{4.65}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{x_3}(\tau, y) = & \beta \left[ T_a \left\langle -2P_1^3(\tau, y, \lambda_{11}^3, \alpha_0^{31}) + 2P_2^3(\tau, y, \lambda_{11}^3, \alpha_1^{31}) + P_3^3(\tau, y, \lambda_2^3, \alpha_3^{31}) + 2P_5^3(\tau, y, \lambda_3^3, \alpha_5^{31}) - \right. \right. \\
& -2P_7^3(\tau, y, \lambda_3^3, \alpha_1^{31}) - 2P_8^3(\tau, y, \lambda_3^3, \alpha_3^{31}) + P_{10}^3(\tau, y, \lambda_3^3, \alpha_8^{31}) - 4P_{11}^3(\tau, y, \lambda_3^3, \alpha_1^{31}) - \\
& -P_{12}^3(\tau, y, \lambda_4^3, \alpha_5^{31}) - 2P_{13}^3(\tau, y, \lambda_4^3, \alpha_1^{31}) - 2P_{12}^3(\tau, y, \lambda_5^3, \alpha_5^{31}) - 2P_{13}^3(\tau, y, \lambda_5^3, \alpha_1^{31}) + \\
& +2P_{12}^3(\tau, y, \lambda_6^3, \alpha_5^{31}) + 2P_{13}^3(\tau, y, \lambda_6^3, \alpha_1^{31}) - 2P_{12}^3(\tau, y, \lambda_7^3, \alpha_5^{31}) - 2P_{13}^3(\tau, y, \lambda_7^3, \alpha_1^{31}) - 4P_{14}^3(\tau, y, \lambda_8^3, \alpha_1^{31}) - \\
& -4P_{14}^3(\tau, y, \lambda_9^3, \alpha_1^{31}) + 4P_{14}^3(\tau, y, \lambda_{10}^3, \alpha_1^{31}) + 2P_1^3(\tau, y, \lambda_{11}^3, \alpha_5^{31}) + 2P_2^3(\tau, y, \lambda_{11}^3, \alpha_1^{31}) - 2P_1^3(\tau, y, \lambda_{12}^3, \alpha_5^{31}) - \\
& -2P_2^3(\tau, y, \lambda_{12}^3, \alpha_1^{31}) + 2P_1^3(\tau, y, \lambda_{13}^3, \alpha_0^{32}) - 2P_1^3(\tau, y, \lambda_{16}^3, \alpha_4^{32}) - 2P_1^3(\tau, y, \lambda_{14}^3, \alpha_0^{32}) + P_3^3(\tau, y, \lambda_{15}^3, \alpha_2^{32}) + \\
& +2P_{15}^3(\tau, y, \lambda_{17}^3, \alpha_4^{32}) - 4P_{13}^3(\tau, y, \lambda_{17}^3, \alpha_7^{32}) + 8(P_1^3(\tau, y, \lambda_{19}^3, \alpha_{11}^{32}) - 16P_{14}^3(\tau, y, \lambda_{18}^3, \alpha_9^{32}) - \\
& -8P_2^3(\tau, y, \lambda_{19}^3, \alpha_9^{32}) - 4P_{18}^3(\tau, y, \alpha_{11}^{32})) \left. \right\rangle + T_b \left\langle P_2^3(\tau, y, \lambda_1^3, \alpha_2^{31}) + P_4^3(\tau, y, \lambda_2^3, \alpha_4^{31}) + 4P_6^3(\tau, y, \lambda_3^3, \alpha_6^{31}) + \right. \\
& +P_7^3(\tau, y, \lambda_3^3, \alpha_7^{31}) - 2P_9^3(\tau, y, \lambda_3^3, \alpha_4^{31}) + P_{11}^3(\tau, y, \lambda_3^3, \alpha_9^{31}) - 4P_{13}^3(\tau, y, \lambda_4^3, \alpha_6^{31}) - P_{13}^3(\tau, y, \lambda_4^3, \alpha_7^{31}) + \\
& +4P_{13}^3(\tau, y, \lambda_5^3, \alpha_6^{31}) + P_{13}^3(\tau, y, \lambda_5^3, \alpha_7^{31}) - 4P_{13}^3(\tau, y, \lambda_6^3, \alpha_6^{31}) - P_{13}^3(\tau, y, \lambda_6^3, \alpha_7^{31}) - \\
& -4P_{13}^3(\tau, y, \lambda_7^3, \alpha_6^{31}) - P_{13}^3(\tau, y, \lambda_7^3, \alpha_7^{31}) + 2P_{14}^3(\tau, y, \lambda_8^3, \alpha_7^{31}) + 2P_{14}^3(\tau, y, \lambda_9^3, \alpha_7^{31}) - \\
& -2P_{14}^3(\tau, y, \lambda_{10}^3, \alpha_7^{31}) + 4P_2^3(\tau, y, \lambda_{11}^3, \alpha_6^{31}) - P_2^3(\tau, y, \lambda_{11}^3, \alpha_7^{31}) - 4P_2^3(\tau, y, \lambda_{12}^3, \alpha_6^{31}) + P_2^3(\tau, y, \lambda_{12}^3, \alpha_7^{31}) + \\
& +4Q_2^3(\tau, y, \lambda_{13}^3, \alpha_1^{32}) - 4P_2^3(\tau, y, \lambda_{14}^3, \alpha_1^{32}) + P_3^3(\tau, y, \lambda_{15}^3, \alpha_3^{32}) + 2P_2^3(\tau, y, \lambda_{16}^3, \alpha_5^{32}) - P_{16}^3(\tau, y, \lambda_{17}^3, \alpha_6^{32}) - \\
& \left. -P_{12}^3(\tau, y, \lambda_{17}^3, \alpha_8^{32}) - 4P_{17}^3(\tau, y, \lambda_{18}^3, \alpha_{10}^{32}) - 4P_{11}^3(\tau, y, \lambda_{19}^3, \alpha_{11}^{32}) + 2P_{19}^3(\tau, y, \alpha_{14}^{32}) \right\rangle \quad (4.66)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{x_4}^L(s, y) = & \left\langle \left( \left( \frac{(2+(\gamma-1)s)\gamma s}{2\gamma s(s-1)} \left\{ 2T_a \Psi_0^{41} \left( \frac{e^{-\alpha_0^{41}\sqrt{s}}}{s} \right) + T_b \Psi_2^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_2^{21}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right\} - \left[ 4T_a \Psi_1^{41} \left( \frac{e^{-\alpha_1^{41}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) + T_b \Psi_5^{41} \left( \frac{e^{-\alpha_5^{41}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] \right) \right. \\
& * \left( e^{-s\lambda_4^4} - e^{-s\lambda_2^4} \right) - \left( 2 \left[ T_a \Psi_3^{41} \left( \frac{e^{-\alpha_3^{41}\sqrt{s}}}{s} \right) + T_b \Psi_4^{41} \left( \frac{e^{-\alpha_4^{41}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] - \right. \\
& - \left[ 4T_a \Psi_1^{41} \left( \frac{e^{-\alpha_1^{41}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] \frac{\gamma s(2+(\gamma-1)s)}{2\gamma s(s-1)} e^{-s\lambda_5^4} + \left( \left[ 4T_a \Psi_1^{41} \left( \frac{e^{-\alpha_1^{41}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) + T_b \Psi_5^{41} \left( \frac{e^{-\alpha_5^{41}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] \frac{\gamma s((3\gamma+1)s-2)}{2\gamma s(s-1)} + \right. \\
& + \left. \left( \left[ 2T_a \Psi_3^{41} \left( \frac{e^{-\alpha_3^{41}\sqrt{s}}}{s} \right) + T_b \Psi_6^{41} \left( \frac{e^{-\alpha_6^{41}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] \frac{\gamma s(s(\gamma+1)+2)}{2\gamma s(s-1)} e^{-s\lambda_4^4} + \right. \\
& + 2 \left[ 4T_a \Psi_1^{41} \left( \frac{e^{-\alpha_1^{41}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) + T_b \Psi_5^{41} \left( \frac{e^{-\alpha_5^{41}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] \frac{\gamma s(s-2)}{2\gamma s(s-1)} \left( e^{-s\lambda_5^4} - e^{-s\lambda_6^4} + e^{-s\lambda_7^4} + e^{-s\lambda_8^4} \right) + \\
& + \left. \frac{4(s\gamma)^2}{2\gamma s(s-1)} \left[ T_a \Psi_7^{41} \left( \frac{e^{-\alpha_7^{41}\sqrt{s}}}{s} \right) + T_b \Psi_8^{41} \left( \frac{e^{-\alpha_8^{41}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] e^{-s\lambda_9^4} \right) + \\
& \left( \left( \left( \left[ 4T_a \Psi_0^{42} \left( \frac{e^{-\alpha_0^{42}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) + T_b \Psi_1^{42} \left( \frac{e^{-\alpha_1^{42}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] \frac{\gamma s((3\gamma+1)s-2)}{2\gamma s(s-1)} - \left[ 2T_a \Psi_2^{42} \left( \frac{e^{-\alpha_2^{42}\sqrt{s}}}{s} \right) + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + T_b \Psi_3^{42} \left( \frac{e^{-\alpha_3^{42}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] \right) \frac{\gamma s(s(\gamma+1)+2)}{2\gamma s(s-1)} \right) e^{-s\lambda_{10}^4} \frac{4\gamma s}{2\gamma s(s-1)} * \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& * \left( \left[ 4T_a \Psi_0^{42} \left( \frac{e^{-\alpha_0^{42} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) + T_b \Psi_1^{42} \left( \frac{e^{-\alpha_1^{42} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] - 2 \right) e^{-s\lambda_1^4} - \\
& - \frac{\gamma s(2 + (\gamma - 1)s)}{2\gamma s(s-1)} \left( \left[ 2T_a \left\{ \Psi_4^{42} \left( \frac{e^{-\alpha_4^{42} \sqrt{s}}}{s} \right) - 2\Psi_0^{42} \left( \frac{e^{-\alpha_0^{42} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right\} + 2T_b \Psi_5^{42} \left( \frac{e^{-\alpha_5^{42} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] \right) e^{-s\lambda_2^4} + \\
& + \frac{\gamma s(2 + (\gamma - 1)s)}{2\gamma s(s-1)} \left( \left\{ 2T_a \Psi_7^{42} \left( \frac{e^{-\alpha_7^{42} \sqrt{s}}}{s} \right) - T_b \Psi_5^{42} \left( \frac{e^{-\alpha_5^{42} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right\} - \left[ T_a \Psi_6^{42} \left( \frac{e^{-\alpha_6^{22} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] \right) (e^{-s\lambda_3^4} + e^{-s\lambda_4^4}) + \\
& + \frac{\gamma s 4s\gamma}{2\gamma s(s-1)} \left[ T_a \Psi_8^{42} \left( \frac{e^{-\alpha_8^{42} \sqrt{s}}}{s} \right) + T_b \Psi_1^{42} \left( \frac{e^{-\alpha_1^{42} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] e^{-s\lambda_5^4} - \frac{\gamma s 2\gamma s}{2\gamma s(s-1)} \left[ 4T_a \Psi_0^{42} \left( \frac{e^{-\alpha_0^{42} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) + T_b \Psi_1^{42} \left( \frac{e^{-\alpha_1^{42} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] \\
& * \beta - \beta \left( \frac{\gamma}{s-1} - 1 \right) \left[ 4T_a \Psi_1^{41} \left( \frac{e^{-\alpha_1^{41} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) + T_b \Psi_5^{41} \left( \frac{e^{-\alpha_5^{41} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] \sum_0^\infty \left( \sum_{k=0}^{13} \tilde{g}_i e^{-2\tilde{\gamma}_i \sqrt{s}} \right)^n * \\
& * \sum_{k=0}^\infty \left[ e^{-2s(h_1+h_2)} - e^{-2sh_1} + e^{-2sh_2} + 2e^{-4s(h_1+h_2)} \right]^k
\end{aligned}
\tag{4.67}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{x_4}(\tau, y) = & \beta \left( T_a \left\langle P_1^4(\tau, y, \lambda_1^4, \alpha_0^{41}) - 4P_2^4(\tau, y, \lambda_1^4, \alpha_1^{41}) - 2P_1^4(\tau, y, \lambda_2^4, \alpha_0^{41}) + 4P_2^4(\tau, y, \lambda_2^4, \alpha_1^{41}) - \right. \right. \\
& - 2P_1^4(\tau, y, \lambda_3^4, \alpha_3^{41}) + 8P_2^4(\tau, y, \lambda_3^4, \alpha_1^{41}) + 4P_3^4(\tau, y, \lambda_4^4, \alpha_1^{41}) + 2P_4^4(\tau, y, \lambda_4^4, \alpha_3^{41}) \\
& + 8P_6^4(\tau, y, \lambda_5^4, \alpha_1^{41}) - 8P_6^4(\tau, y, \lambda_6^4, \alpha_1^{41}) + 8P_6^4(\tau, y, \lambda_7^4, \alpha_1^{41}) + 8P_6^4(\tau, y, \lambda_8^4, \alpha_1^{41}) + \\
& + P_7^4(\tau, y, \lambda_9^4, \alpha_7^{41}) + 4P_3^4(\tau, y, \lambda_{10}^4, \alpha_0^{42}) - 2P_4^4(\tau, y, \lambda_{10}^4, \alpha_2^{42}) - 16P_9^4(\tau, y, \lambda_{11}^4, \alpha_0^{42}) - \\
& - 2 \left\{ P_1^4(\tau, y, \lambda_{12}^4, \alpha_4^{42}) - 2P_2^4(\tau, y, \lambda_{12}^4, \alpha_0^{42}) \right\} + 2P_1^4(\tau, y, \lambda_{13}^4, \alpha_7^{42}) - P_2^4(\tau, y, \lambda_{13}^4, \alpha_6^{22}) + \\
& + 2P_1^4(\tau, y, \lambda_{14}^4, \alpha_7^{42}) - P_2^4(\tau, y, \lambda_{14}^4, \alpha_6^{22}) + T_a P_7^4(\tau, y, \lambda_{15}^4, \alpha_8^{42}) - 4T_a P_{10}^4(\tau, y, \alpha_0^{42}) - \\
& - 4P_{11}^4(\tau, y, \alpha_1^{41}) \left. \right\rangle + T_b \left\langle P_2^4(\tau, y, \lambda_1^4, \alpha_2^{41}) + P_2^4(\tau, y, \lambda_1^4, \alpha_1^{41}) - P_2^4(\tau, y, \lambda_2^4, \alpha_2^{41}) - 2P_2^4(\tau, y, \lambda_3^4, \alpha_4^{41}) + \right. \\
& + P_3^4(\tau, y, \lambda_4^4, \alpha_5^{41}) + P_5^4(\tau, y, \lambda_4^4, \alpha_6^{41}) + 2P_6^4(\tau, y, \lambda_5^4, \alpha_5^{41}) - 2P_6^4(\tau, y, \lambda_6^4, \alpha_5^{41}) + \\
& + 2P_6^4(\tau, y, \lambda_7^4, \alpha_5^{41}) + 2P_6^4(\tau, y, \lambda_8^4, \alpha_5^{41}) + P_8^4(\tau, y, \lambda_9^4, \alpha_8^{41}) + P_3^4(\tau, y, \lambda_{10}^4, \alpha_1^{42}) - \\
& - P_5^4(\tau, y, \lambda_{10}^4, \alpha_3^{42}) - 4P_9^4(\tau, y, \lambda_{11}^4, \alpha_1^{42}) - 2P_2^4(\tau, y, \lambda_{12}^4, \alpha_5^{42}) - P_2^4(\tau, y, \lambda_{13}^4, \alpha_5^{42}) - \\
& - P_2^4(\tau, y, \lambda_{14}^4, \alpha_5^{42}) + P_8^4(\tau, y, \lambda_{15}^4, \alpha_1^{42}) - \\
& \left. - P_{10}^4(\tau, y, \alpha_1^{42}) - P_{11}^4(\tau, y, \alpha_5^{41}) \right\rangle - 8)
\end{aligned}
\tag{4.68}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{y_1}^L(s, y) = & \beta \left\langle \left\{ \frac{se^{-s\lambda_1^1}}{2(s-1)} + \frac{s-2}{2\gamma(s-1)} e^{-s\lambda_2^1} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{s(2+s(\gamma-1))}{2\gamma(s-1)} e^{-s\lambda_3^1} \left[ T_a \left[ \Psi_0^{11} \left( \frac{e^{-\alpha_0^{11}\sqrt{s}}}{s} \right) + \Psi_1^{11} \left( \frac{e^{-\alpha_1^{11}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] + T_b \Psi_2^{11} \left( \frac{e^{-\alpha_2^{11}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] \right\} + \right. \\
& \left. + \left[ \frac{s-2}{2\gamma(s-1)} e^{-s\lambda_4^1} + \frac{se^{-s\lambda_2^1}}{2(s-1)} - \frac{(2+s(\gamma-1))s}{2\gamma(s-1)} e^{-s\lambda_3^1} \right] * \right. \\
& * T_a \left[ \Psi_3^{11} \left( \frac{e^{-\alpha_3^{11}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) + \Psi_4^{11} \left( \frac{e^{-\alpha_4^{11}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] + T_b \Psi_5^{11} \left( \frac{e^{-\alpha_5^{11}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) + \\
& + \frac{s-2}{2\gamma(s-1)} e^{-s\lambda_4^1} \left[ T_a \Psi_5^{11} \left( \frac{e^{-\alpha_6^{11}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) + T_b \Psi_7^{11} \left( \frac{e^{-\alpha_7^{11}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] - \frac{s \left[ e^{-s\lambda_5^1} - e^{-s\lambda_6^1} \right]}{s-1} + \\
& + 2 \frac{se^{-s\lambda_7^1}}{s-1} \left[ T_a \Psi_8^{11} \left( \frac{e^{-\alpha_8^{11}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) + T_b \Psi_9^{11} \left( \frac{e^{-\alpha_9^{11}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] + \\
& + s \frac{e^{-s\lambda_8^1} + e^{-s\lambda_9^1}}{s-1} \left[ T_a \Psi_0^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_0^{21}\sqrt{s}}}{s} \right) + T_b \Psi_1^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_1^{21}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] + \\
& + s \frac{e^{-s\lambda_{10}^1}}{2(s-1)} \left\{ T_a \left[ \Psi_2^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_2^{21}\sqrt{s}}}{s} \right) + \Psi_3^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_3^{21}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] + T_b \Psi_4^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_4^{21}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right\} + \\
& + \frac{s-2}{2\gamma(s-1)} \left\{ T_a \left[ \Psi_5^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_5^{21}\sqrt{s}}}{s} \right) + \Psi_6^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_6^{21}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] + T_b \Psi_7^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_7^{21}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right\} + \\
& + s \frac{2+s(\gamma-1)}{2\gamma(s-1)} e^{-s\lambda_{11}^1} T_a \left\{ \left[ \Psi_5^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_5^{21}\sqrt{s}}}{s} \right) + \Psi_6^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_6^{21}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] + T_b \Psi_7^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_7^{21}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right\} - \\
& - \frac{(s-2) \left[ e^{-s\lambda_{12}^1} + e^{-s\lambda_{13}^1} \right]}{2\gamma(s-1)} \left[ T_a \Psi_8^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_8^{21}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) + T_b \Psi_9^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_9^{21}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] + \\
& + e^{-s\lambda_{14}^1} \left\{ \frac{T_a s}{2(s-1)} \left[ \Psi_5^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_5^{21}\sqrt{s}}}{s} \right) + \Psi_6^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_6^{21}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] + \frac{T_b s}{2(s-1)} \Psi_7^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_7^{21}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) + \right. \\
& + \frac{T_a (s-2)}{2\gamma(s-1)} \left\{ \left[ \Psi_{10}^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_{10}^{21}\sqrt{s}}}{s} \right) + \Psi_{11}^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_{11}^{21}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] + T_b \Psi_{12}^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_{12}^{21}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right\} - \\
& - \frac{s-2}{\gamma(s-1)} \left[ T_a \Psi_{13}^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_{10}^{21}\sqrt{s}}}{s} \right) + T_b \Psi_{14}^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_{14}^{21}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] \left. \right\} - \\
& - s \frac{2+s(\gamma-1)}{2\gamma(s-1)} e^{-s\lambda_{15}^1} \left\{ T_a \left[ \Psi_2^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_2^{21}\sqrt{s}}}{s} \right) + \Psi_3^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_3^{21}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] + T_b \Psi_4^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_4^{21}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right\} + \\
& + \frac{2-s}{s-1} \left[ T_a \Psi_{10} \left( \frac{e^{-\alpha_{10}\sqrt{s}}}{s} \right) + T_b \Psi_{11} \left( \frac{e^{-\alpha_{11}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] \left. \right\rangle \sum_{k=0}^{\infty} \left[ e^{-2s(h_1+h_2)} - e^{-2sh_1} + \right. \\
& \left. + e^{-2sh_2} + 2e^{-4s(h_1+h_2)} \right]^k \left( \sum_{i=0}^{13} \tilde{g}_i e^{-2\tilde{\gamma}_i \sqrt{s}} \right)^n \tag{4.69}
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\sigma_{y1}(\tau, y) = & \beta \left\langle T_a \left\{ R_1^1(t, y, \lambda_1^1, \alpha_0^{11}) + R_2^1(t, y, \lambda_1^1, \alpha_1^{11}) + R_3^1(t, y, \lambda_2^1, \alpha_0^{11}) + R_4^1(t, y, \lambda_2^1, \alpha_1^{11}) - R_5^1(t, y, \lambda_3^1, \alpha_0^{11}) + \right. \right. \\
& + R_6^1(t, y, \lambda_3^1, \alpha_1^{11}) + R_4^1(t, y, \lambda_1^1, \alpha_3^{11}) + R_4^1(t, y, \lambda_1^1, \alpha_4^{11}) + R_2^1(t, y, \lambda_2^1, \alpha_3^{11}) + R_2^1(t, y, \lambda_2^1, \alpha_4^{11}) - R_6^1(t, y, \lambda_3^1, \alpha_3^{11}) - \\
& - R_6^1(t, y, \lambda_3^1, \alpha_4^{11}) + R_5^1(t, y, \lambda_4^1, \alpha_6^{11}) - 2R_2^1(t, y, \lambda_5^1, \alpha_8^{11}) + 2R_2^1(t, y, \lambda_6^1, \alpha_8^{11}) - 4R_2^1(t, y, \lambda_7^1, \alpha_8^{11}) + \\
& + 2R_1^1(t, y, \lambda_8^1, \alpha_0^{21}) + 2R_1^1(t, y, \lambda_9^1, \alpha_0^{21}) + R_1^1(t, y, \lambda_{10}^1, \alpha_2^{21}) + R_2^1(t, y, \lambda_{10}^1, \alpha_3^{21}) + R_3^1(t, y, \alpha_5^{21}) + R_4^1(t, y, \alpha_6^{21}) + \\
& + R_5^1(t, y, \lambda_{11}^1, \alpha_5^{21}) + R_6^1(t, y, \lambda_{11}^1, \alpha_6^{21}) - R_5^1(t, y, \lambda_{12}^1, \alpha_8^{21}) - R_5^1(t, y, \lambda_{13}^1, \alpha_8^{21}) + R_1^1(t, y, \lambda_{14}^1, \alpha_5^{21}) + R_2^1(t, y, \lambda_{14}^1, \alpha_6^{21}) + \\
& + R_3^1(t, y, \lambda_{14}^1, \alpha_{10}^{21}) + R_4^1(t, y, \lambda_{14}^1, \alpha_{11}^{21}) - 2R_3^1(t, y, \lambda_{14}^1, \alpha_{13}^{21}) - R_5^1(t, y, \lambda_{15}^1, \alpha_2^{21}) + R_6^1(t, y, \lambda_{15}^1, \alpha_3^{21}) + R_7^1(t, y, \alpha_{10}^{21}) \left. \right\} + \\
& + T_b \left\{ R_2^1(t, y, \lambda_1^1, \alpha_2^{11}) + R_4^1(t, y, \lambda_2^1, \alpha_2^{11}) - R_6^1(t, y, \lambda_3^1, \alpha_2^{11}) + R_4^1(t, y, \lambda_1^1, \alpha_5^{11}) + R_2^1(t, y, \lambda_2^1, \alpha_5^{11}) - R_6^1(t, y, \lambda_3^1, \alpha_5^{11}) + \right. \\
& + R_5^1(t, y, \lambda_3^1, \alpha_7^{11}) - 2R_2^1(t, y, \lambda_5^1, \alpha_9^{11}) + 2R_2^1(t, y, \lambda_6^1, \alpha_9^{11}) - 4R_2^1(t, y, \lambda_7^1, \alpha_9^{11}) + 2R_2^1(t, y, \lambda_8^1, \alpha_1^{21}) + 2R_2^1(t, y, \lambda_9^1, \alpha_1^{21}) + \\
& + R_2^1(t, y, \lambda_{10}^1, \alpha_4^{21}) + R_4^1(t, y, \alpha_7^{21}) + R_6^1(t, y, \lambda_{11}^1, \alpha_7^{21}) - R_6^1(t, y, \lambda_{12}^1, \alpha_9^{21}) - R_6^1(t, y, \lambda_{13}^1, \alpha_9^{21}) + R_2^1(t, y, \lambda_{14}^1, \alpha_7^{21}) + \\
& \left. + R_4^1(t, y, \lambda_{14}^1, \alpha_{12}^{21}) - 2R_4^1(t, y, \lambda_{14}^1, \alpha_{14}^{21}) - R_6^1(t, y, \lambda_{15}^1, \alpha_4^{21}) + R_8^1(t, y, \alpha_{11}^{21}) \right\} \left. \right\rangle
\end{aligned}$$

(4.70)

Напряжения в последующих слоях определяются аналогичным образом

$$\begin{aligned}
\sigma_{y2}^L(s, y) = & \beta \left\langle \left( -\frac{s(2 + (\gamma - 1)s)}{2\gamma s(s - 1)} 2T_a \Psi_0^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_0^{21}\sqrt{s}}}{s} \right) + \frac{(2 + (\gamma - 1)s)s}{2\gamma s(s - 1)} 2T_b \Psi_1^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_1^{21}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) + \right. \right. \\
& + \frac{(2 + (\gamma - 1)s)s}{2\gamma s(s - 1)} 4T_a \Psi_2^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_2^{21}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) - \frac{(2 + (\gamma - 1)s)s}{2\gamma s(s - 1)} T_b \Psi_3^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_3^{21}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \left. \right) e^{-s\lambda_1^2} + \\
& + \frac{4(\gamma s^2)}{2\gamma s(s - 1)} T_a \Psi_4^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_4^{21}\sqrt{s}}}{s} \right) e^{-s\lambda_2} + \frac{4(\gamma s^2)}{2\gamma s(s - 1)} T_b \Psi_5^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_5^{21}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) e^{-s\lambda_2} + \\
& + \left\{ 2T_a \Psi_6^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_6^{21}\sqrt{s}}}{s} \right) \frac{((3 + \gamma)s - 6)s}{2\gamma s(s - 1)} + 4T_b \Psi_7^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_7^{21}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \frac{((3 + \gamma)s - 6)s}{2\gamma s(s - 1)} \right\} e^{-s\lambda_3^2} + \\
& + \left[ \frac{((\gamma - 1)s + 2)s}{2\gamma s(s - 1)} 4T_a \Psi_8^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_8^{21}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) + \frac{((\gamma - 1)s + 2)s}{2\gamma s(s - 1)} T_b \Psi_9^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_9^{21}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] e^{-s\lambda_3^2} + \\
& + 2 \left[ T_a \Psi_{10}^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_{10}^{21}\sqrt{s}}}{s} \right) \frac{(2 - s(\gamma + 1))s}{2\gamma s(s - 1)} + \frac{s(2 - s(\gamma + 1))}{2\gamma s(s - 1)} T_b \Psi_{11}^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_{11}^{21}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] e^{-s\lambda_3^2} + \\
& + \left\{ 2T_a \frac{(-2 + (\gamma + 1)s)\gamma s}{2\gamma s(s - 1)} \left( \Psi_{12}^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_{12}^{21}\sqrt{s}}}{s} \right) - 2\Psi_{14}^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_{14}^{21}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right) + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(-2 + (\gamma + 1)s)}{2\gamma s(s-1)} 4T_b \Psi_{13}^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_{13}^{21}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \left\} * \left( e^{-s\lambda_4^2} + e^{-s\lambda_5^2} - e^{-s\lambda_6^2} + e^{-s\lambda_7^2} \right) + \\
& + 2 \left[ \frac{(s-2)s}{2\gamma s(s-1)} 4T_a \Psi_{14}^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_{14}^{21}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) + \frac{(s-2)\gamma s}{2\gamma s(s-1)} T_b \Psi_{15}^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_{15}^{21}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] \left( e^{-s\lambda_8^2} + e^{-s\lambda_9^2} - e^{-s\lambda_{10}^2} \right) + \\
& + \left\{ 2T_a \frac{(2 + (\gamma - 1)s)s}{2\gamma s(s-1)} \left( \Psi_{12}^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_{12}^{21}\sqrt{s}}}{s} \right) - 2\Psi_{14}^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_{14}^{21}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right) \right\} + \\
& + 4T_b \frac{(2 + (\gamma - 1)s)s}{2\gamma s(s-1)} \Psi_{13}^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_{13}^{21}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \left\} * \left( e^{-s\lambda_{11}^2} - e^{-s\lambda_{12}^2} \right) + \\
& + \left( 2 \left( \frac{2(\gamma s^2)}{2\gamma s(s-1)} T_a \Psi_0^{22} \left( \frac{e^{-\alpha_0^{22}\sqrt{s}}}{s} \right) + \frac{2s^2\gamma}{2\gamma s(s-1)} T_b \Psi_1^{22} \left( \frac{e^{-\alpha_1^{22}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right) e^{-s\lambda_{13}^2} - \right. \\
& - \left[ T_a \frac{(2 + (\gamma - 1)s)s}{2\gamma s(s-1)} e^{-s\lambda_{14}^2} \left( \Psi_2^{22} \left( \frac{e^{-\alpha_2^{22}\sqrt{s}}}{s} \right) \right) + \frac{(2 + (\gamma - 1)s)s}{2\gamma s(s-1)} e^{-s\lambda_{14}^2} T_b \Psi_3^{22} \left( \frac{e^{-\alpha_3^{22}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] - \\
& - \left[ T_a \frac{(-2 + (\gamma + 1)s)s}{2\gamma s(s-1)} \left\{ \Psi_4^{22} \left( \frac{e^{-\alpha_4^{22}\sqrt{s}}}{s} \right) - \Psi_6^{22} \left( \frac{e^{-\alpha_6^{22}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right\} \right] + \\
& + \left. \frac{s(-2 + (\gamma + 1)s)}{2\gamma s(s-1)} T_b \left( \Psi_5^{22} \left( \frac{e^{-\alpha_5^{22}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right) \right] e^{-s\lambda_{15}^2} - \\
& - 2 \left[ 4T_a \frac{s(s-2)}{2\gamma s(s-1)} \Psi_6^{22} \left( \frac{e^{-\alpha_6^{22}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) + T_b \frac{s(s-2)}{2\gamma s(s-1)} \Psi_7^{22} \left( \frac{e^{-\alpha_7^{22}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] e^{-s\lambda_{16}^2} + \\
& + e^{-s\lambda_{17}^2} \left( \left\{ T_a \frac{s(2 + (\gamma - 1)s)}{2\gamma s(s-1)} \left[ 2\Psi_8^{22} \left( \frac{e^{-\alpha_8^{22}\sqrt{s}}}{s} \right) - \Psi_6^{22} \left( \frac{e^{-\alpha_6^{22}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] + T_b \frac{s(2 + (\gamma - 1)s)}{2\gamma s(s-1)} \left[ \Psi_9^{22} \left( \frac{e^{-\alpha_9^{22}\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] \right\} \right) \\
& - \left( \frac{2-s}{s-1} \right) \left\{ 2T_a \Psi_8^{22} \left( \frac{e^{-\alpha_8^{22}\sqrt{s}}}{s} \right) + T_b \Psi_{10}^{22} \left( \frac{e^{-\alpha_{10}^{22}\sqrt{s}}}{s} \right) \right\} \left\} * \sum_0^\infty \left( \sum_{k=0}^{13} \tilde{g}_i e^{-2\tilde{\gamma}_i\sqrt{s}} \right)^n * \\
& * \sum_{k=0}^\infty \left[ e^{-2s(h_1+h_2)} - e^{-2sh_1} + e^{-2sh_2} + 2e^{-4s(h_1+h_2)} \right]^k
\end{aligned}
\tag{4.71}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{y_2}(\tau, y) = & \beta \left[ T_a \left( 2R_1^2(\tau, y, \lambda_1^2, \alpha_0^{21}) - 4R_2^2(\tau, y, \lambda_1^2, \alpha_2^{21}) + R_3^2(\tau, y, \lambda_2^2, \alpha_4^{21}) + \right. \right. \\
& + 2R_5^2(\tau, y, \lambda_3^2, \alpha_6^{21}) + 4R_2^2(\tau, y, \lambda_3^2, \alpha_8^{21}) + 2R_7^2(\tau, y, \lambda_3^2, \alpha_{10}^{21}) - 2R_7^2(\tau, y, \lambda_4^2, \alpha_{12}^{21}) - \\
& - 2R_7^2(\tau, y, \lambda_5^2, \alpha_{12}^{21}) - 2R_7^2(\tau, y, \lambda_6^2, \alpha_{12}^{21}) - R_7^2(\tau, y, \lambda_7^2, \alpha_{12}^{21}) + 8R_9^2(\tau, y, \lambda_8^2, \alpha_{14}^{21}) + \\
& + 8R_9^2(\tau, y, \lambda_9^2, \alpha_{14}^{21}) + 8R_9^2(\tau, y, \lambda_{10}^2, \alpha_{14}^{21}) + 2R_1^2(\tau, y, \lambda_{11}^2, \alpha_{12}^{21}) - 4R_2^2(\tau, y, \lambda_{11}^2, \alpha_{14}^{21}) - \\
& - 2R_1^2(\tau, y, \lambda_{12}^2, \alpha_{12}^{21}) - 4R_2^2(\tau, y, \lambda_{12}^2, \alpha_{14}^{21}) + R_3^2(\tau, y, \lambda_{13}^2, \alpha_0^{22}) + R_7^2(\tau, y, \lambda_{17}^2, \alpha_4^{22}) - \\
& - R_8^2(\tau, y, \lambda_{17}^2, \alpha_6^{22}) - 8R_9^2(\tau, y, \lambda_{16}^2, \alpha_6^{22}) + 2R_1^2(\tau, y, \lambda_{17}^2, \alpha_8^{22}) - R_2^2(\tau, y, \lambda_{17}^2, \alpha_6^{22}) - \\
& - R_1^2(\tau, y, \lambda_{14}^2, \alpha_2^{22}) - 2R_{10}^2(\tau, y, \alpha_8^{22}) \left. \right) + T_b \left( -2R_2^2(\tau, y, \lambda_1^2, \alpha_1^{21}) - R_2^2(\tau, y, \lambda_1^2, \alpha_3^{21}) + \right. \\
& + R_3^2(\tau, y, \lambda_2^2, \alpha_5^{21}) + 4R_4^2(\tau, y, \lambda_3^2, \alpha_7^{21}) + R_2^2(\tau, y, \lambda_3^2, \alpha_9^{21}) + 2R_8^2(\tau, y, \lambda_3^2, \alpha_{11}^{21}) + \\
& + R_8^2(\tau, y, \lambda_4^2, \alpha_{14}^{21}) - 4R_8^2(\tau, y, \lambda_4^2, \alpha_{13}^{21}) + 2R_8^2(\tau, y, \lambda_5^2, \alpha_{14}^{21}) - 4R_8^2(\tau, y, \lambda_5^2, \alpha_{13}^{21}) + \\
& + 2R_8^2(\tau, y, \lambda_6^2, \alpha_{14}^{21}) - 4R_8^2(\tau, y, \lambda_6^2, \alpha_{13}^{21}) + 2R_8^2(\tau, y, \lambda_7^2, \alpha_{14}^{21}) - 4R_8^2(\tau, y, \lambda_7^2, \alpha_{13}^{21}) + \\
& + 2R_9^2(\tau, y, \lambda_8^2, \alpha_{15}^{21}) + 2R_9^2(\tau, y, \lambda_9^2, \alpha_{15}^{21}) + 2R_9^2(\tau, y, \lambda_{10}^2, \alpha_{15}^{21}) + 4R_2^2(\tau, y, \lambda_{11}^2, \alpha_{13}^{21}) - \\
& - 4R_2^2(\tau, y, \lambda_{12}^2, \alpha_{13}^{21}) + \frac{1}{2} R_4^2(\tau, y, \lambda_{13}^2, \alpha_1^{22}) - R_2^2(\tau, y, \lambda_{14}^2, \alpha_3^{22}) + R_8^2(\tau, y, \lambda_{17}^2, \alpha_5^{22}) - \quad (4.72) \\
& \left. - 2R_9^2(\tau, y, \lambda_{16}^2, \alpha_7^{22}) + R_1^2(\tau, y, \lambda_{17}^2, \alpha_9^{22}) - R_{10}^2(\tau, y, \alpha_{10}^{22}) \right) \Big]
\end{aligned}$$

$$* \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{i=0}^{13} \tilde{g}_i e^{-2\tilde{\gamma}_i \sqrt{s}} \right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \left[ e^{-2s(h_1+h_2)} - e^{-2sh_1} + e^{-2sh_2} + 2e^{-4s(h_1+h_2)} \right]^k$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{y_3}^L(s, y) = & \beta \left[ \left( -\frac{s(2+(\gamma-1)s)}{2\gamma s(s-1)} 2T_a \left\{ \Psi_0^{31} \left( \frac{e^{-\alpha_0^{31} \sqrt{s}}}{s} \right) - \Psi_1^{31} \left( \frac{e^{-\alpha_1^{31} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right\} - \frac{s(2+(\gamma-1)s)}{2\gamma s(s-1)} T_b \Psi_2^{31} \left( \frac{e^{-\alpha_2^{31} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right) e^{-s\lambda_3^3} + \right. \\
& + \left[ \frac{4(s^2\gamma)}{2\gamma s(s-1)} T_a \Psi_3^{31} \left( \frac{e^{-\alpha_3^{31} \sqrt{s}}}{s} \right) + \frac{4(s^2\gamma)}{2\gamma s(s-1)} T_b \Psi_4^{31} \left( \frac{e^{-\alpha_4^{31} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] e^{-s\lambda_3^3} + \frac{s(3+\gamma)s}{2\gamma s(s-1)} e^{-s\lambda_3^3} \left\{ 2T_a \Psi_5^{31} \left( \frac{e^{-\alpha_5^{31} \sqrt{s}}}{s} \right) + 4T_b \Psi_6^{31} \left( \frac{e^{-\alpha_6^{31} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right\} + \\
& + \frac{(\gamma-1)s^2}{2\gamma s(s-1)} e^{-s\lambda_3^3} \left[ -2T_a \Psi_1^{31} \left( \frac{e^{-\alpha_1^{31} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) + T_b \Psi_7^{31} \left( \frac{e^{-\alpha_7^{31} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] - 2 \left[ T_a \Psi_3^{31} \left( \frac{e^{-\alpha_3^{31} \sqrt{s}}}{s} \right) + T_b \Psi_4^{31} \left( \frac{e^{-\alpha_4^{31} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] \frac{(\gamma+1)s^2}{2\gamma s(s-1)} e^{-s\lambda_3^3} + \\
& + s \left[ T_a \left\{ \Psi_8^{31} \left( \frac{e^{-\alpha_8^{31} \sqrt{s}}}{s} \right) - 4\Psi_1^{31} \left( \frac{e^{-\alpha_1^{31} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right\} + T_b \Psi_9^{31} \left( \frac{e^{-\alpha_9^{31} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] e^{-s\lambda_3^3} + \\
& + \left\{ 2T_a \frac{(-2+(\gamma+1)s)s}{2\gamma s(s-1)} \left( \Psi_5^{31} \left( \frac{e^{-\alpha_5^{31} \sqrt{s}}}{s} \right) + \Psi_1^{31} \left( \frac{e^{-\alpha_1^{31} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right) + T_b \frac{(-2+(\gamma+1)s)s}{2\gamma s(s-1)} \left( 4\Psi_6^{31} \left( \frac{e^{-\alpha_6^{31} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) - T_b \Psi_7^{31} \left( \frac{e^{-\alpha_7^{31} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right) \right\} * \\
& * (e^{-s\lambda_4^3} + e^{-s\lambda_5^3} - e^{-\lambda_6^3 s} + e^{-s\lambda_7^3}) + \\
& + \left[ -4T_a \Psi_1^{31} \left( \frac{e^{-\alpha_1^{31} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) + 2T_b \Psi_7^{31} \left( \frac{e^{-\alpha_7^{31} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] \frac{(s-2)s}{2\gamma s(s-1)} (e^{-s\lambda_8^3} + e^{-s\lambda_9^3} - e^{-s\lambda_{10}^3}) + \\
& + \left\{ 2T_a \left[ \Psi_5^{31} \left( \frac{e^{-\alpha_5^{31} \sqrt{s}}}{s} \right) + \Psi_1^{31} \left( \frac{e^{-\alpha_1^{31} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] + T_b \left[ 4\Psi_6^{31} \left( \frac{e^{-\alpha_6^{31} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) - \Psi_7^{31} \left( \frac{e^{-\alpha_7^{31} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] \right\} * \frac{(2+(\gamma-1)s)s}{2\gamma s(s-1)} (e^{-s\lambda_{11}^3} - e^{-s\lambda_{12}^3}) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\langle \left[ 2T_a \Psi_0^{32} \left( \frac{e^{-\alpha_0^{31} \sqrt{s}}}{s} \right) + 4T_b \Psi_1^{32} \left( \frac{e^{-\alpha_1^{32} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] \frac{(2+(\gamma-1)s)s}{2\gamma s(s-1)} \left( e^{-s\lambda_{13}^3} - e^{-s\lambda_{14}^3} \right) + 4s\gamma \left[ T_a \Psi_2^{32} \left( \frac{e^{-\alpha_2^{32} \sqrt{s}}}{s} \right) + T_b \Psi_3^{32} \left( \frac{e^{-\alpha_3^{32} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] e^{-s\lambda_{15}^3} - \right. \\
& - \left[ 2T_a \Psi_4^{32} \left( \frac{e^{-\alpha_4^{32} \sqrt{s}}}{s} \right) + 2T_b \Psi_5^{32} \left( \frac{e^{-\alpha_5^{32} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] \frac{(2+(\gamma-1)s)s}{2\gamma s(s-1)} e^{-s\lambda_{16}^3} + \left( -\left\{ -2T_a \Psi_4^{32} \left( \frac{e^{-\alpha_4^{32} \sqrt{s}}}{s} \right) + T_b \Psi_6^{32} \left( \frac{e^{-\alpha_6^{32} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right\} \frac{(s(\gamma+1)+2)s}{2\gamma s(s-1)} + \right. \\
& + \left[ 4T_a \Psi_7^{32} \left( \frac{e^{-\alpha_7^{32} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) + T_b \Psi_8^{32} \left( \frac{e^{-\alpha_8^{32} \sqrt{s}}}{s} \right) \right] \frac{(s(\gamma+1)-2)s}{2\gamma s(s-1)} e^{-s\lambda_{17}^3} - 4 \left[ 4T_a \Psi_9^{32} \left( \frac{e^{-\alpha_9^{32} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) + T_b \Psi_{10}^{32} \left( \frac{e^{-\alpha_{10}^{32} \sqrt{s}}}{s} \right) \right] \frac{(s-2)s}{2\gamma s(s-1)} e^{-s\lambda_{18}^3} + \\
& + 2 \left[ 4T_a \left( \Psi_{11}^{32} \left( \frac{e^{-\alpha_{11}^{32} \sqrt{s}}}{s} \right) - \Psi_9^{32} \left( \frac{e^{-\alpha_9^{32} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right) - 2T_b \Psi_8^{32} \left( \frac{e^{-\alpha_8^{32} \sqrt{s}}}{s} \right) \right] \frac{(2+(\gamma-1)s)s}{2\gamma s(s-1)} e^{-s\lambda_{19}^3} \left. \right] - \\
& - \beta \left( \frac{2-s}{s-1} \right) \left[ 4T_a \Psi_{11}^{32} \left( \frac{e^{-\alpha_{11}^{32} \sqrt{s}}}{s} \right) + 2T_b \Psi_{14}^{32} \left( \frac{e^{-\alpha_{14}^{32} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] * \\
& * \sum_0^\infty \left( \sum_{k=0}^{13} \tilde{g}_i e^{-2\tilde{\gamma}_i \sqrt{s}} \right)^n \sum_{k=0}^\infty \left[ e^{-2s(h_1+h_2)} - e^{-2sh_1} + e^{-2sh_2} + 2e^{-4s(h_1+h_2)} \right]^k
\end{aligned}$$

(4.73)

$$\begin{aligned}
\sigma_{y_3}(\tau, y) = & \beta \left[ T_a \left\langle -2R_1^3(\tau, y, \lambda_1^3, \alpha_0^{31}) + 2R_2^3(\tau, y, \lambda_1^3, \alpha_1^{31}) + R_3^3(\tau, y, \lambda_2^3, \alpha_3^{31}) + 2R_5^3(\tau, y, \lambda_3^3, \alpha_5^{31}) - \right. \right. \\
& - 2R_7^3(\tau, y, \lambda_3^3, \alpha_1^{31}) - 2R_8^3(\tau, y, \lambda_3^3, \alpha_3^{31}) + R_{10}^3(\tau, y, \lambda_3^3, \alpha_8^{31}) - 4R_{11}^3(\tau, y, \lambda_3^3, \alpha_1^{31}) - \\
& - R_{12}^3(\tau, y, \lambda_4^3, \alpha_5^{31}) - 2R_{13}^3(\tau, y, \lambda_4^3, \alpha_1^{31}) - 2R_{12}^3(\tau, y, \lambda_5^3, \alpha_5^{31}) - 2R_{13}^3(\tau, y, \lambda_5^3, \alpha_1^{31}) + \\
& + 2R_{12}^3(\tau, y, \lambda_6^3, \alpha_5^{31}) + 2R_{13}^3(\tau, y, \lambda_6^3, \alpha_1^{31}) - 2R_{12}^3(\tau, y, \lambda_7^3, \alpha_5^{31}) - 2R_{13}^3(\tau, y, \lambda_7^3, \alpha_1^{31}) - 4R_{14}^3(\tau, y, \lambda_8^3, \alpha_1^{31}) - \\
& - 4R_{14}^3(\tau, y, \lambda_9^3, \alpha_1^{31}) + 4R_{14}^3(\tau, y, \lambda_{10}^3, \alpha_1^{31}) + 2R_1^3(\tau, y, \lambda_{11}^3, \alpha_5^{31}) + 2R_2^3(\tau, y, \lambda_{11}^3, \alpha_1^{31}) - 2R_1^3(\tau, y, \lambda_{12}^3, \alpha_5^{31}) - \\
& - 2R_2^3(\tau, y, \lambda_{12}^3, \alpha_1^{31}) + 2R_1^3(\tau, y, \lambda_{13}^3, \alpha_0^{32}) - 2R_1^3(\tau, y, \lambda_{16}^3, \alpha_4^{32}) - 2R_1^3(\tau, y, \lambda_{14}^3, \alpha_0^{32}) + R_3^3(\tau, y, \lambda_{15}^3, \alpha_2^{32}) + \\
& + 2R_{15}^3(\tau, y, \lambda_{17}^3, \alpha_4^{32}) - 4R_{13}^3(\tau, y, \lambda_{17}^3, \alpha_7^{32}) + 8(R_{11}^3(\tau, y, \lambda_{19}^3, \alpha_{11}^{32}) - 16R_{14}^3(\tau, y, \lambda_{18}^3, \alpha_9^{32})) - \\
& - 8R_2^3(\tau, y, \lambda_{19}^3, \alpha_9^{32}) - 4R_{18}^3(\tau, y, \alpha_{11}^{32}) \left. \right\rangle + T_b \left\langle R_2^3(\tau, y, \lambda_1^3, \alpha_2^{31}) + R_4^3(\tau, y, \lambda_2^3, \alpha_4^{31}) + 4R_6^3(\tau, y, \lambda_3^3, \alpha_6^{31}) + \right. \\
& + R_7^3(\tau, y, \lambda_3^3, \alpha_7^{31}) - 2R_9^3(\tau, y, \lambda_3^3, \alpha_4^{31}) + R_{11}^3(\tau, y, \lambda_3^3, \alpha_9^{31}) - 4R_{13}^3(\tau, y, \lambda_4^3, \alpha_6^{31}) - R_{13}^3(\tau, y, \lambda_4^3, \alpha_7^{31}) + \\
& + 4R_{13}^3(\tau, y, \lambda_5^3, \alpha_6^{31}) + R_{13}^3(\tau, y, \lambda_5^3, \alpha_7^{31}) - 4R_{13}^3(\tau, y, \lambda_6^3, \alpha_6^{31}) - R_{13}^3(\tau, y, \lambda_6^3, \alpha_7^{31}) - \\
& - 4R_{13}^3(\tau, y, \lambda_7^3, \alpha_6^{31}) - R_{13}^3(\tau, y, \lambda_7^3, \alpha_7^{31}) + 2R_{14}^3(\tau, y, \lambda_8^3, \alpha_7^{31}) + 2R_{14}^3(\tau, y, \lambda_9^3, \alpha_7^{31}) - \\
& - 2R_{14}^3(\tau, y, \lambda_{10}^3, \alpha_7^{31}) + 4R_2^3(\tau, y, \lambda_{11}^3, \alpha_6^{31}) - R_2^3(\tau, y, \lambda_{11}^3, \alpha_7^{31}) - 4R_2^3(\tau, y, \lambda_{12}^3, \alpha_6^{31}) + R_2^3(\tau, y, \lambda_{12}^3, \alpha_7^{31}) + \\
& + 4R_2^3(\tau, y, \lambda_{13}^3, \alpha_1^{32}) - 4R_2^3(\tau, y, \lambda_{14}^3, \alpha_1^{32}) + R_3^3(\tau, y, \lambda_{15}^3, \alpha_3^{32}) + 2R_2^3(\tau, y, \lambda_{16}^3, \alpha_5^{32}) - R_{16}^3(\tau, y, \lambda_{17}^3, \alpha_6^{32}) - \\
& - R_{12}^3(\tau, y, \lambda_{17}^3, \alpha_8^{32}) - 4R_{17}^3(\tau, y, \lambda_{18}^3, \alpha_{10}^{32}) - 4R_1^3(\tau, y, \lambda_{19}^3, \alpha_{11}^{32}) + 2R_{19}^3(\tau, y, \alpha_{14}^{32}) \left. \right\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{y_4}^L(s, y) = & \left\langle \left( \left( \frac{(2 + (\gamma - 1)s)s}{2\gamma s(s-1)} \left\{ 2T_a \Psi_0^{41} \left( \frac{e^{-\alpha_0^{41} \sqrt{s}}}{s} \right) + T_b \Psi_2^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_2^{21} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right\} - \right. \right. \right. \\
& - \left[ 4T_a \Psi_1^{41} \left( \frac{e^{-\alpha_1^{41} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) + T_b \Psi_5^{41} \left( \frac{e^{-\alpha_5^{41} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] (e^{-s\lambda_4^4} - e^{-s\lambda_2^4}) - (2 \left[ T_a \Psi_3^{41} \left( \frac{e^{-\alpha_3^{41} \sqrt{s}}}{s} \right) + T_b \Psi_4^{41} \left( \frac{e^{-\alpha_4^{41} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] - \\
& \left[ 4T_a \Psi_1^{41} \left( \frac{e^{-\alpha_1^{41} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] \frac{s(2 + (\gamma - 1)s)}{2\gamma s(s-1)} e^{-s\lambda_3^4} + \left( 4T_a \Psi_1^{41} \left( \frac{e^{-\alpha_1^{41} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) + T_b \Psi_5^{41} \left( \frac{e^{-\alpha_5^{41} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right) \frac{s((3\gamma + 1)s - 2)}{2\gamma s(s-1)} + \\
& + \left( \left\{ 2T_a \Psi_3^{41} \left( \frac{e^{-\alpha_3^{41} \sqrt{s}}}{s} \right) + T_b \Psi_6^{41} \left( \frac{e^{-\alpha_6^{41} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right\} \frac{s(s(\gamma + 1) + 2)}{2\gamma s(s-1)} e^{-s\lambda_4^4} + \right. \\
& + 2 \left[ 4T_a \Psi_1^{41} \left( \frac{e^{-\alpha_1^{41} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) + T_b \Psi_5^{41} \left( \frac{e^{-\alpha_5^{41} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] \frac{s(s-2)}{2\gamma s(s-1)} (e^{-s\lambda_5^4} - e^{-s\lambda_6^4} + e^{-s\lambda_7^4} + e^{-s\lambda_8^4}) + \\
& + \left. \frac{4(s^2\gamma)}{2\gamma s(s-1)} \left[ T_a \Psi_7^{41} \left( \frac{e^{-\alpha_7^{41} \sqrt{s}}}{s} \right) + T_b \Psi_8^{41} \left( \frac{e^{-\alpha_8^{41} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] e^{-s\lambda_9^4} \right) + \\
& \left( \left( \left( \left[ 4T_a \Psi_0^{42} \left( \frac{e^{-\alpha_0^{42} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) + T_b \Psi_1^{42} \left( \frac{e^{-\alpha_1^{42} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] \frac{s((3\gamma + 1)s - 2)}{2\gamma s(s-1)} - \left( 2T_a \Psi_2^{42} \left( \frac{e^{-\alpha_2^{42} \sqrt{s}}}{s} \right) + T_b \Psi_3^{42} \left( \frac{e^{-\alpha_3^{42} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right) \right) \right) \right) * \\
& * \frac{s(s(\gamma + 1) + 2)}{2\gamma s(s-1)} e^{-s\lambda_{10}^4} - \frac{4s}{2\gamma s(s-1)} \left( \left[ 4T_a \Psi_0^{42} \left( \frac{e^{-\alpha_0^{42} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) + T_b \Psi_1^{42} \left( \frac{e^{-\alpha_1^{42} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] - 2 \right) e^{-s\lambda_{11}^4} - \\
& - \frac{s(2 + (\gamma - 1)s)}{2\gamma s(s-1)} \left( \left[ 2T_a \left\{ \Psi_4^{42} \left( \frac{e^{-\alpha_4^{42} \sqrt{s}}}{s} \right) - 2\Psi_0^{42} \left( \frac{e^{-\alpha_0^{42} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right\} + 2T_b \Psi_5^{42} \left( \frac{e^{-\alpha_5^{42} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] \right) e^{-s\lambda_{12}^4} + \\
& + \frac{s(2 + (\gamma - 1)s)}{2\gamma s(s-1)} \left( \left\{ 2T_a \Psi_7^{42} \left( \frac{e^{-\alpha_7^{42} \sqrt{s}}}{s} \right) - T_b \Psi_5^{42} \left( \frac{e^{-\alpha_5^{42} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right\} - \left[ T_a \Psi_6^{42} \left( \frac{e^{-\alpha_6^{42} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] \right) (e^{-s\lambda_{13}^4} + e^{-s\lambda_{14}^4}) + \\
& + \frac{s4s\gamma}{2\gamma s(s-1)} \left[ T_a \Psi_8^{42} \left( \frac{e^{-\alpha_8^{42} \sqrt{s}}}{s} \right) + T_b \Psi_1^{42} \left( \frac{e^{-\alpha_1^{42} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] e^{-s\lambda_{15}^4} - \frac{s2\gamma s}{2\gamma s(s-1)} \left[ 4T_a \Psi_0^{42} \left( \frac{e^{-\alpha_0^{42} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) + T_b \Psi_1^{42} \left( \frac{e^{-\alpha_1^{42} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] \\
& * \beta - \beta \left( \frac{2-s}{s-1} \right) \left[ 4T_a \Psi_1^{41} \left( \frac{e^{-\alpha_1^{41} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) + T_b \Psi_5^{41} \left( \frac{e^{-\alpha_5^{41} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \right] \left\langle \sum_0^\infty \left( \sum_{k=0}^{13} \tilde{g}_i e^{-2\tilde{\gamma}_i \sqrt{s}} \right)^n \sum_{k=0}^\infty \left[ e^{-2s(h_1+h_2)} - e^{-2sh_1} + e^{-2sh_2} + 2e^{-4s(h_1+h_2)} \right]^k \right\rangle \\
\sigma_{y_4}(\tau, y) = & \beta (T_a \langle R_1^4(\tau, y, \lambda_1^4, \alpha_0^{41}) - 4R_2^4(\tau, y, \lambda_1^4, \alpha_1^{41}) - 2R_1^4(\tau, y, \lambda_2^4, \alpha_0^{41}) + \\
& + 4R_2^4(\tau, y, \lambda_2^4, \alpha_1^{41}) - 2R_1^4(\tau, y, \lambda_3^4, \alpha_3^{41}) + 8R_2^4(\tau, y, \lambda_3^4, \alpha_1^{41}) + 4R_3^4(\tau, y, \lambda_4^4, \alpha_1^{41}) + \\
& + 2R_4^4(\tau, y, \lambda_4^4, \alpha_3^{41}) + 8R_6^4(\tau, y, \lambda_5^4, \alpha_1^{41}) - 8R_6^4(\tau, y, \lambda_6^4, \alpha_1^{41}) + 8R_6^4(\tau, y, \lambda_7^4, \alpha_1^{41}) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +8R_6^4(\tau, y, \lambda_8^4, \alpha_1^{41}) + R_7^4(\tau, y, \lambda_9^4, \alpha_7^{41}) + 4R_3^4(\tau, y, \lambda_{10}^4, \alpha_0^{42}) - 2R_4^4(\tau, y, \lambda_{10}^4, \alpha_2^{42}) - \\
& -16R_9^4(\tau, y, \lambda_{11}^4, \alpha_0^{42}) - 2\{R_1^4(\tau, y, \lambda_{12}^4, \alpha_4^{42}) - 2R_2^4(\tau, y, \lambda_{12}^4, \alpha_0^{42})\} + 2R_1^4(\tau, y, \lambda_{13}^4, \alpha_7^{42}) - \\
& -R_2^4(\tau, y, \lambda_{13}^4, \alpha_6^{22}) + 2R_1^4(\tau, y, \lambda_{14}^4, \alpha_7^{42}) - R_2^4(\tau, y, \lambda_{14}^4, \alpha_6^{22}) + R_7^4(\tau, y, \lambda_{15}^4, \alpha_8^{42}) - \\
& -P_{10}^4(\tau, y, \alpha_0^{42}) - 4R_{11}^4(\tau, y, \alpha_1^{41}) + T_b \langle R_2^4(\tau, y, \lambda_1^4, \alpha_2^{41}) + R_2^4(\tau, y, \lambda_1^4, \alpha_1^{41}) - \\
& -R_2^4(\tau, y, \lambda_2^4, \alpha_2^{41}) - \\
& -2R_2^4(\tau, y, \lambda_3^4, \alpha_4^{41}) + R_3^4(\tau, y, \lambda_4^4, \alpha_5^{41}) + R_5^4(\tau, y, \lambda_4^4, \alpha_6^{41}) + 2R_6^4(\tau, y, \lambda_5^4, \alpha_5^{41}) - \\
& -2R_6^4(\tau, y, \lambda_6^4, \alpha_5^{41}) + 2R_6^4(\tau, y, \lambda_7^4, \alpha_5^{41}) + 2R_6^4(\tau, y, \lambda_8^4, \alpha_5^{41}) + R_8^4(\tau, y, \lambda_9^4, \alpha_8^{41}) + \\
& +R_3^4(\tau, y, \lambda_{10}^4, \alpha_1^{42}) - R_5^4(\tau, y, \lambda_{10}^4, \alpha_3^{42}) - 4R_9^4(\tau, y, \lambda_{11}^4, \alpha_1^{42}) - 2R_2^4(\tau, y, \lambda_{12}^4, \alpha_5^{42}) - \\
& -R_2^4(\tau, y, \lambda_{13}^4, \alpha_5^{42}) - R_2^4(\tau, y, \lambda_{14}^4, \alpha_5^{42}) + R_8^4(\tau, y, \lambda_{15}^4, \alpha_1^{42}) - \\
& -R_{10}^4(\tau, y, \alpha_1^{42}) - R_{11}^4(\tau, y, \alpha_5^{41}) \rangle - 8 \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{i=0}^{13} \tilde{g}_i e^{-2\tilde{\gamma}_i \sqrt{s}} \right)^n
\end{aligned}$$

На рисунках 4.1–4.2 приведены распределения поля температур по слоям ЭВТИ. Расчеты, проведенные по оригиналам формул (4.11–4.14) и нулевому приближению (4.24–4.27) показывают, что решение сходится при  $n = 5$

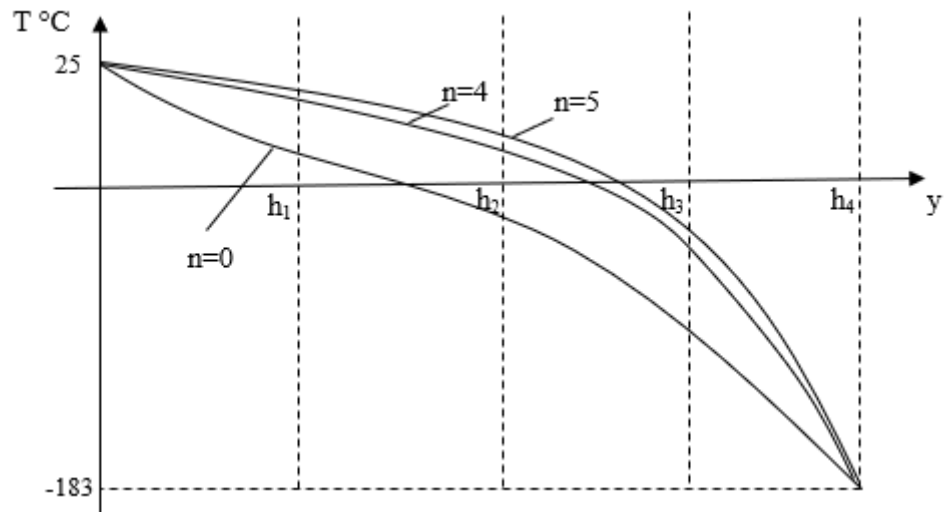


Рисунок 4.1. Распределение поля температур по слоям в зависимости от параметра  $n$

Рисунок 4.2 показывает распределение температурного поля по толщине пакета ЭВТИ при различных значениях безразмерного времени (3.2) и параметра  $n = 5$ . Этот график показывает, что при  $\tau \geq 0.5$  изменяются кривизна, что соответствует установившемуся режиму.

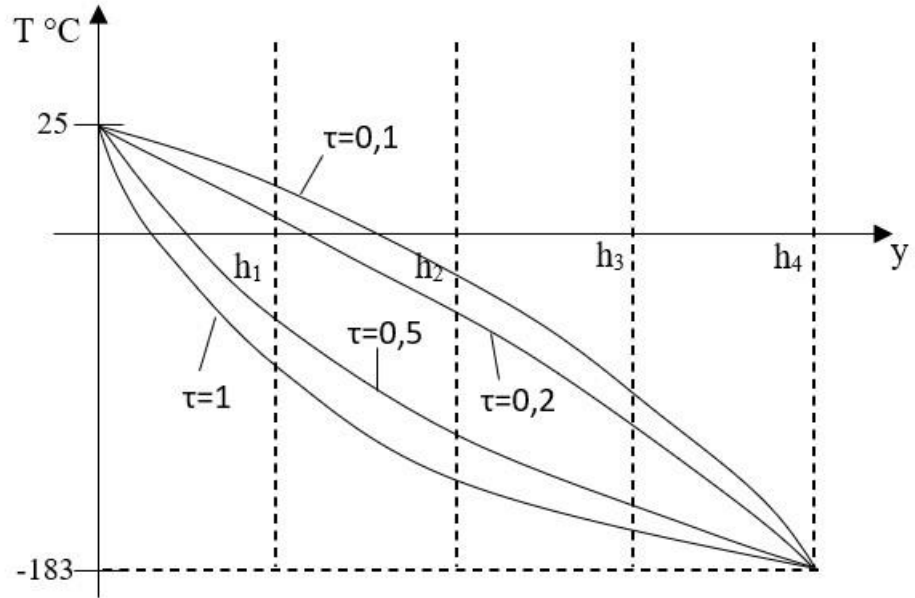


Рисунок 4.2. Распределение температурного поля по толщине пакета ЭВТИ  
 На рисунках 4.3–4.4 построены зависимости безразмерных (3.5,3.8) перемещений (формулы 4.52,4.54, 4.56,4.58) и напряжений (формулы 4.70,4.72, 4.74,4.76) по толщине пакета в зависимости от безразмерного времени при  $n = 5$ .

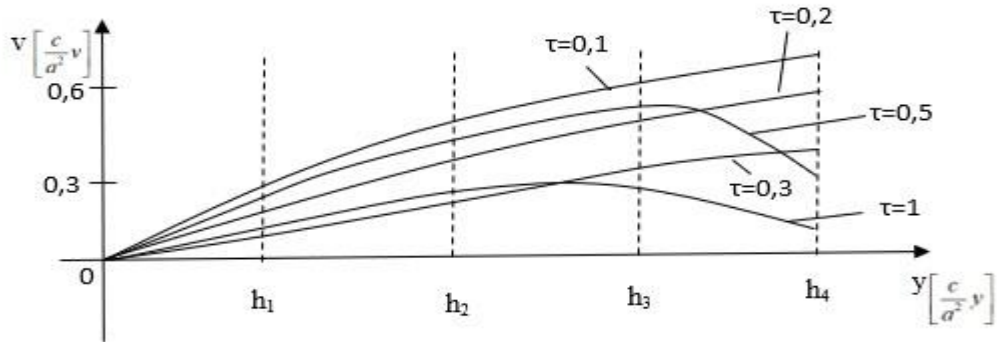


Рисунок 4.3. Распределение безразмерных перемещений по толщине пакета

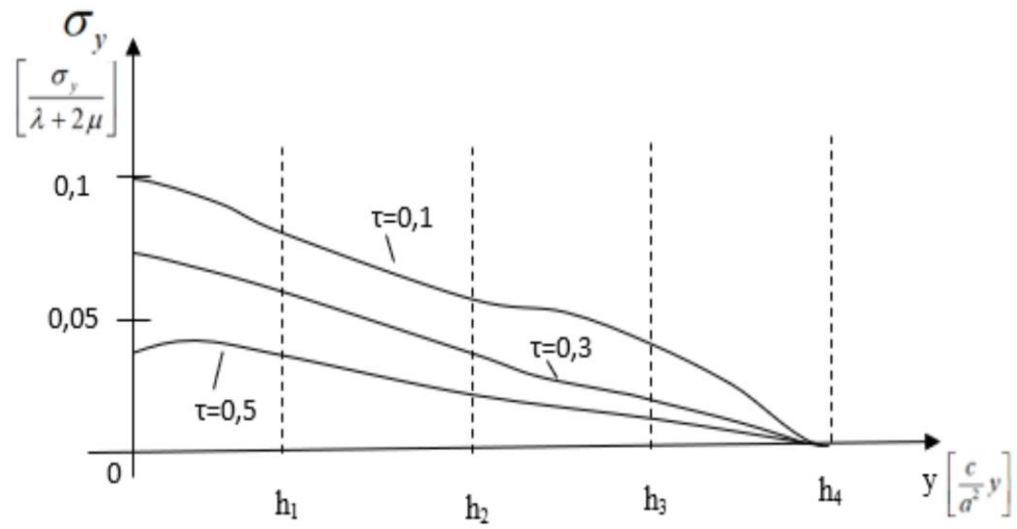


Рисунок 4.4. Распределение безразмерных напряжений по толщине пакета



## 5. Численное моделирование

Одной из задач данной диссертационной работы является разработка математических моделей и оптимизация экранно-вакуумной теплоизоляции (ЭВТИ) для адекватного прогноза термоупругих и теплофизических характеристик структур с тонкослойными покрытиями. Данные модели должны учитывать наличие слоистой структуры покрытия, различные свойства слоёв покрытия, масштабные эффекты (влияние различной толщины слоёв покрытия), влияние градиентов температурных полей.

Для проведения расчетов и описания перечисленных эффектов привлекается классическая модель теплопроводности.

Классическое решение задачи о распределении температурного поля и определении НДС композитного покрытия в условии статического нагрева проверяется путем сравнения с численным решением, полученным в среде ANSYS Workbench.

Основная задача исследований ЭВТИ заключается в определении оптимальной толщины слоев покрытия, при которой в нем будут реализоваться минимальные напряжения. Предполагается, что выбор таких толщин, позволит повысить и циклическую прочность покрытия, за счет снижения уровня максимальных напряжений, которые возникают при действии циклического нагрева.

В работе рассматривается пакет ЭВТИ, состоящий из следующих компонентов: 1 – прокладка из стеклоткани, 2 – алюминиевая фольга, 3 – пакет из экран-плёнок из полиимида с напылением алюминия, 4 – прокладка из стеклоткани и 5 – алюминиевая стенка бака. Пакет, состоящий из экран-плёнок из полиимида с напылением алюминия, рассматривался в качестве 5-ти слоев, где в качестве слоев учитывался и полиимид и напыленный на него алюминий. На рисунке 5.1 представлен рассматриваемый пакет ЭВТИ, в таблице 5.1 – схема укладки слоёв. Характеристики слоёв представлены в таблице 5.2, где введены стандартные обозначения:  $E$  – модуль Юнга или модуль упругости 1-го рода [ГПа],  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $\alpha_1$  – коэффициент линейного температурного расширения

$[K^{-1}]$ ,  $\chi$  – коэффициент теплопроводности  $[Вт/(м*град)]$ ,  $h$  – толщина слоя  $[мм]$ ,  $\rho$  – плотность материала  $[кг/м^3]$ ,  $\gamma$  – удельный коэффициент теплоёмкости  $[кДж/(кг*град)]$ ,  $\alpha$  – температуропроводность  $[м^2/с]$ .

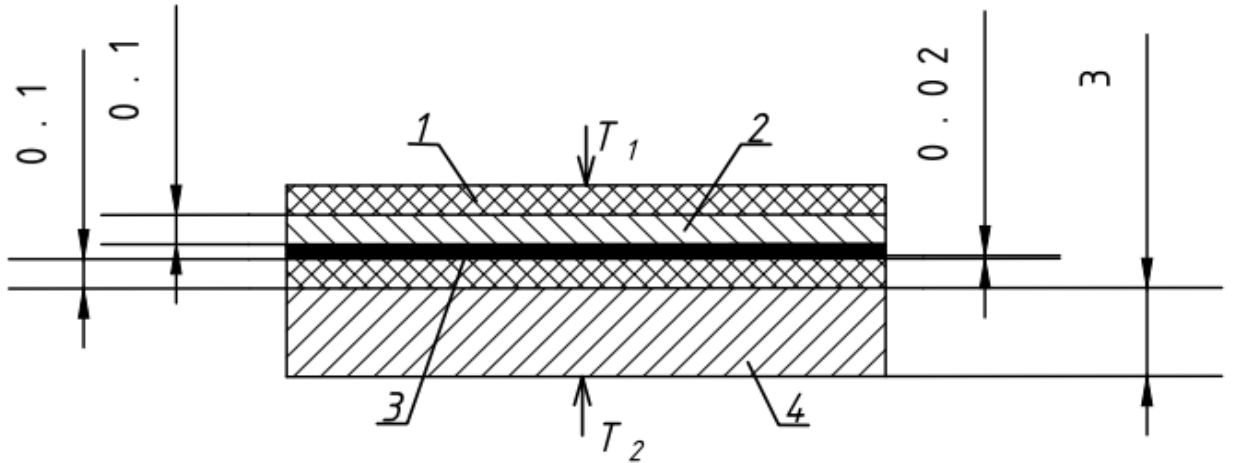


Рисунок 5.1. Пакет ЭВТИ.

1 – стеклоткань; 2 – алюминиевая фольга; 3 – полиимид;  
4 – алюминиевый бак.

Таблица 5.1 Схема укладки ЭВТИ.

Номер слоя	Материал	Толщина, мм
1	Стеклоткань	0,1
2	Алюминиевая фольга	0,1
3	Экран (полиимид)	0,02
4		0,02
5		0,02
6		0,02
7		0,02
8	Стеклоткань	0,1
9	Алюминий (AlCuMn <sub>6</sub> )	3

Таблица 5.2 Свойства материалов.

	E, ГПа	$\nu$	$\alpha_L, K^{-1}$	$\chi, \frac{Вт}{(м \cdot град)}$	h, мм	$\rho, \frac{кг}{м^3}$	$\gamma, \frac{кДж}{(кг \cdot град)}$	$\alpha, \frac{м^2}{с}$
Стеклоткань	72	0,35	$5 \cdot 10^{-6}$	0.35	0,1	290	1,46	0,827
Экран (полиимид)	3,7	0,35	$50 \cdot 10^{-6}$	0,22	0,02	1340	1,04	0,16
Алюминий (AlCuMn <sub>6</sub> )	77	0,33	$23,8 \cdot 10^{-6}$	142	3	2700	0,858	84,94
Алюминий (покрытие)	71	0,32	$24 \cdot 10^{-6}$	211	0,1	2700	0,92	61,30

В процессе эксплуатации ЭВТИ бака может подвергаться различным перепадам температуры и условиям окружающей среды. Исходя из заданных условий температуры внешней среды  $T_1$  и температуры внутри бака  $T_2$  рассматриваются три случая: один рабочий режим эксплуатации и два критических, которые представлены в таблице 5.3.

Таблица 5.3 Режимы работы ЭВТИ бака.

Номер	Режимы	$T_1, ^\circ C$	$T_{внут}, ^\circ C$
1	Рабочий	25	-183
2	Захолаживания	25	-198
3	Радиация космоса	150	-183

### 5.1 Расчет распределения температуры в композитном теплозащитном покрытии

Для получения распределения температуры в композитном теплозащитном покрытии необходимо решить одномерную задачу теплопроводности. На внешней поверхности покрытия действует температура  $T_2$ , со стороны бака действует температура  $T_1$ .

### 5.1.1 Расчет распределения в композитном 4-слойном теплозащитном покрытии

Проводилось моделирование четырехслойного теплозащитного покрытия, как показано на рисунке 5.2. Характеристики покрытий представлены в таблице 5.2.

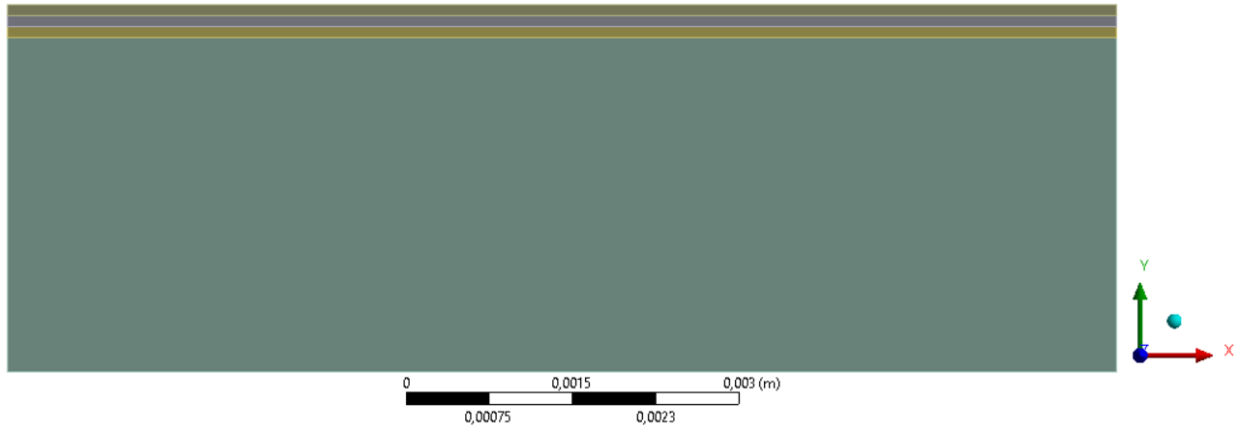


Рисунок 5.2. Геометрия и слои покрытия в ANSYS Workbench.

Чтобы изучить любой физический процесс, необходимо установить зависимость между величинами, которые характеризуют данный процесс. Обычно такие зависимости записываются в виде дифференциальных уравнений. Дифференциальное уравнение теплопроводности устанавливает связь между величинами, которые характеризуют перенос теплоты теплопроводностью [84,90].

Для получения уравнения теплопроводности в декартовой системе координат примем следующие упрощения:

- 1) тело является однородным;
- 2) внутренние источники теплоты в теле отсутствуют;
- 3) физические свойства тела являются величинами постоянными.

Получим уравнение теплопроводности в декартовой системе координат при отсутствии внутренних источников теплоты для функции  $T$  и времени  $t$ :

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \alpha \nabla^2 T = 0 \quad (5.1)$$

где  $\nabla^2$  – оператор Лапласа,  $\alpha$  – коэффициент температуропроводности.

$$\alpha = \frac{\chi}{\rho\gamma} \quad (5.2)$$

Решением стационарной задачи в одномерном случае т.е.  $\alpha \nabla^2 T = 0$  является

$$T_i(y) = A_i y + B_i \quad (5.3)$$

где  $i$  – номер слоя. Для нахождения констант  $A_i$  и  $B_i$  запишем граничные условия:

1) На внешней поверхности тела задана температура  $T_1$ :

$$T_1(0) = T_1 \quad (5.4)$$

2) Температура в местах соединения двух слоев должна быть одинакова:

$$\begin{aligned} T_1(h_1) &= T_2(h_1) \\ T_2(h_1 + h_2) &= T_3(h_1 + h_2) \\ T_3(h_1 + h_2 + h_3) &= T_4(h_1 + h_2 + h_3) \\ T_4(h_1 + h_2 + h_3 + h_4) &= T_5(h_1 + h_2 + h_3 + h_4) \end{aligned} \quad (5.5)$$

3) На границе раздела двух сред с разными коэффициентами теплопроводности удельные тепловые потоки должны совпадать:

$$\begin{aligned} \chi_1 \frac{\partial T_1}{\partial y} \Big|_{y=h_1} &= \chi_2 \frac{\partial T_2}{\partial y} \Big|_{y=h_1} \\ \chi_2 \frac{\partial T_2}{\partial y} \Big|_{y=h_1+h_2} &= \chi_3 \frac{\partial T_3}{\partial y} \Big|_{y=h_1+h_2} \\ \chi_3 \frac{\partial T_3}{\partial y} \Big|_{y=h_1+h_2+h_3} &= \chi_4 \frac{\partial T_4}{\partial y} \Big|_{y=h_1+h_2+h_3} \\ \chi_4 \frac{\partial T_4}{\partial y} \Big|_{y=h_1+h_2+h_3+h_4} &= \chi_5 \frac{\partial T_5}{\partial y} \Big|_{y=h_1+h_2+h_3+h_4} \end{aligned} \quad (5.6)$$

4) На поверхности подложки температура:

$$T_4(h_1 + h_2 + h_3) = T_2 \quad (5.7)$$

С учетом вышеизложенного получаем распределение температуры в слоях, найденное в Wolfram Mathematica. Для проверки решаем соответствующую задачу в ANSYS Workbench в модуле Steade-State Thermal.

Рассмотрим 3 случая режима работа покрытия на примере осесимметричной задачи в виде пластины, с температурой  $T_1$  с внешней стороны и с температурой  $T_2$  с внутренней стороны. Длина образца 10 мм (для тестового сравнения решений). Толщина и материал слоёв представлены в таблице 5.2.

Оба результата расчетов предоставлены на рисунке 5.3 (а-в), где точками указаны значения полученные в ANSYS. Как можно заметить, результаты идентичные. Это говорит о том, что аналитическое решение совпадает с численным решением и справедливо на всей области пластины: как в центре, так и на краях.

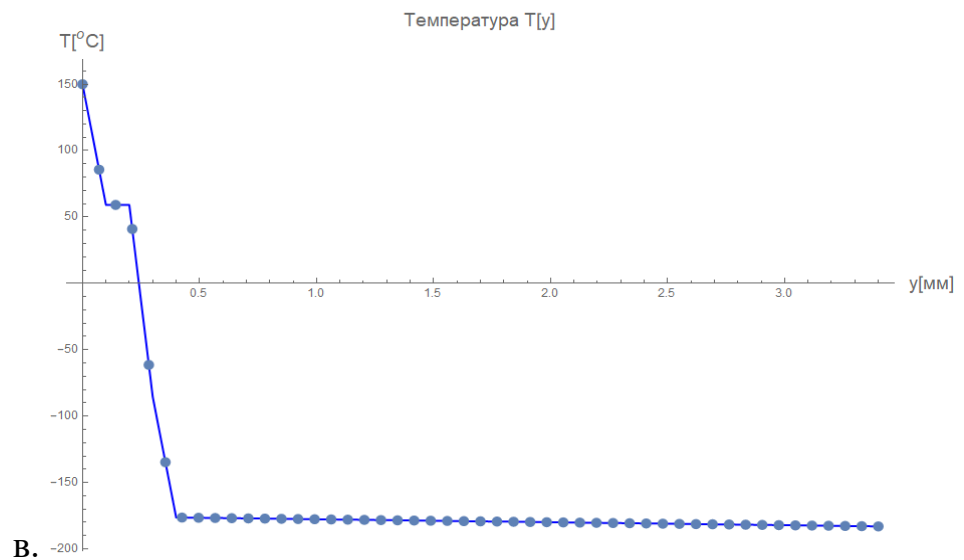
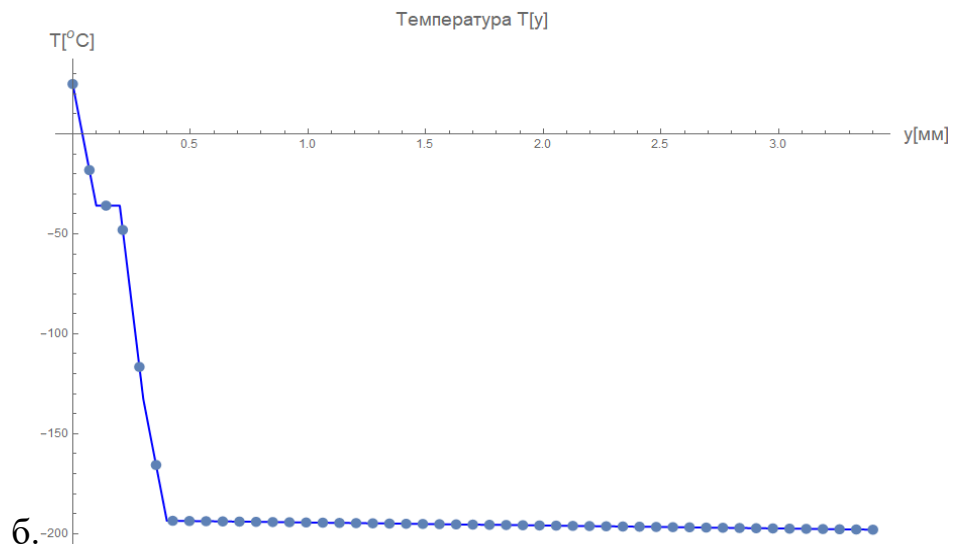
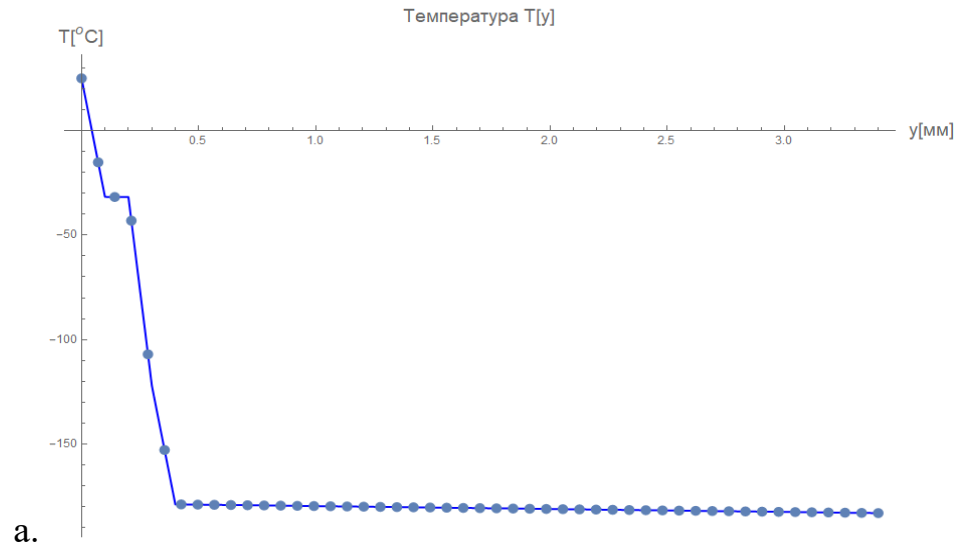


Рисунок 5.3. Распределение температуры в пластинах.

а – рабочий режим; б – критический режим захлаживания; в – критический режим радиации космоса.

Для дополнительной проверки аналитической модели, полученной в разделе 3, использовалась текущая конечно-элементная модель. Полученные результаты аналитического моделирования (рисунок 5.3) были сведены для расчетного случая 1 и сопоставлены с численным результатом. На рисунке 5.4 представлено сравнение аналитического решения (рисунок 4.2, кривая  $\tau = 1$ ) с полученными численными результатами (нанесено на график точками). Из этого графика видно, что результаты фактически совпадают.

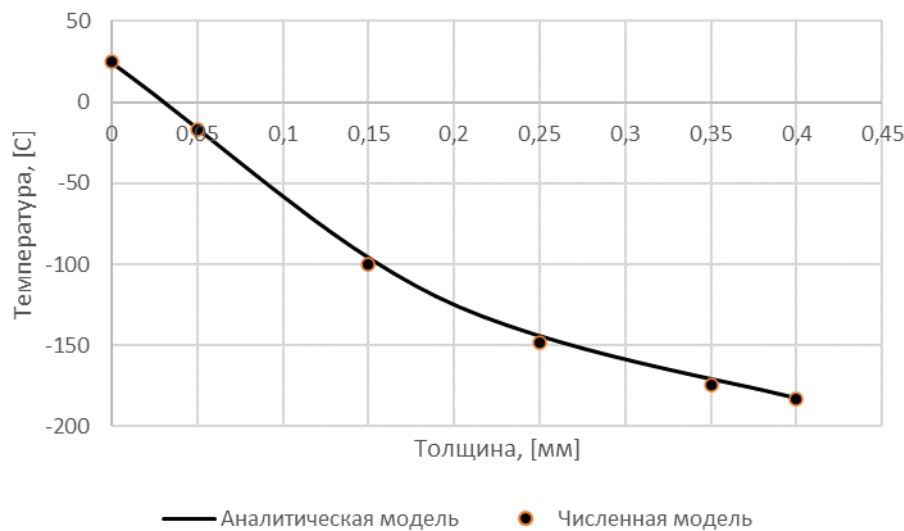


Рисунок 5.4. Распределение температуры для численных и аналитических решений.

### 5.1.2 Расчет распределения в многослойном теплозащитном покрытии

Проводилось моделирование многослойного теплозащитного покрытия, как показано на рисунке 5.5. Характеристики покрытий представлены в таблице 5.2.



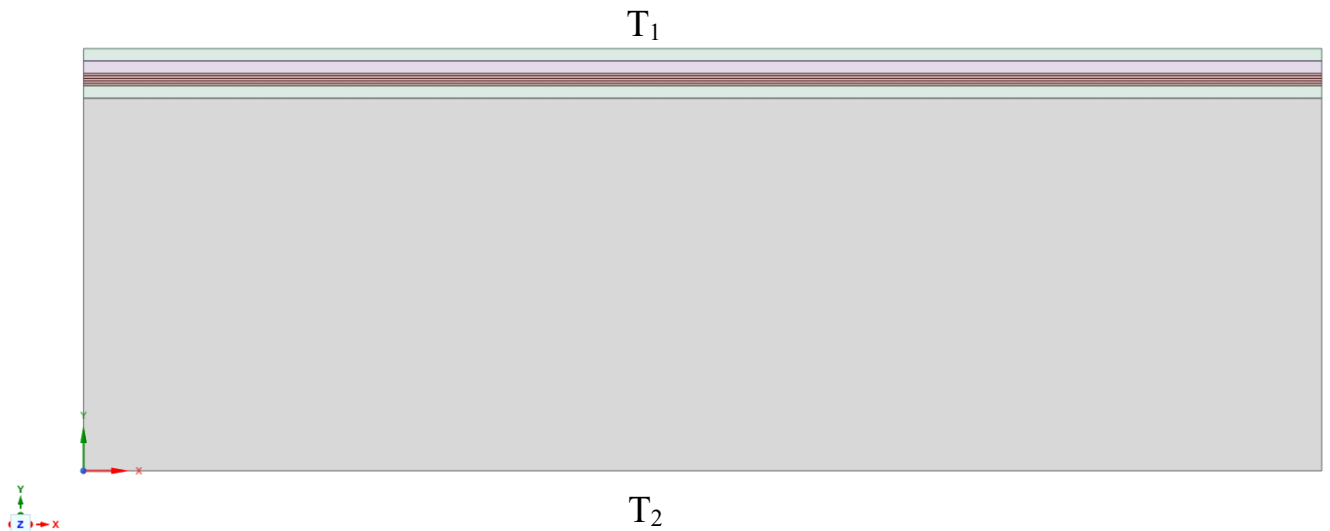


Рисунок 5.5. Геометрия и слои покрытия в ANSYS Workbench.

Здесь также как и ранее тело предполагается однородным при отсутствии источников теплоты и физические свойства тел – постоянные величины. Также используется решение стационарной задачи в одномерном случае является:

$$T_i(y) = A_i y + B_i \quad (5.8)$$

где  $i$  – номер слоя. Для нахождения констант  $A_i$  и  $B_i$  запишем граничные условия:

- 1) На внешней поверхности тела задана температура  $T_1$ :

$$T_1(0) = T_1 \quad (5.9)$$

- 2) Температура в местах соединения двух слоев должна быть одинакова:

$$T_1(h_1) = T_2(h_1)$$

$$T_2(h_1 + h_2) = T_3(h_1 + h_2)$$

$$T_3(h_1 + h_2 + h_3) = T_4(h_1 + h_2 + h_3)$$

$$T_4(h_1 + h_2 + h_3 + h_4) = T_5(h_1 + h_2 + h_3 + h_4) \quad (5.110)$$

$$T_5(h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5) = T_6(h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5)$$

$$T_6(h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5 + h_6) = T_7(h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5 + h_6)$$

$$T_7(h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5 + h_6 + h_7) = T_8(h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5 + h_7)$$

- 3) На границе раздела двух сред с разными коэффициентами теплопроводности удельные тепловые потоки должны совпадать:

$$\begin{aligned}
\chi_1 \frac{\partial T_1}{\partial y} \Big|_{y=h_1} &= \chi_2 \frac{\partial T_2}{\partial y} \Big|_{y=h_1} \\
\chi_2 \frac{\partial T_2}{\partial y} \Big|_{y=h_1+h_2} &= \chi_3 \frac{\partial T_3}{\partial y} \Big|_{y=h_1+h_2} \\
\chi_3 \frac{\partial T_3}{\partial y} \Big|_{y=h_1+h_2+h_3} &= \chi_4 \frac{\partial T_4}{\partial y} \Big|_{y=h_1+h_2+h_3} \\
\chi_4 \frac{\partial T_4}{\partial y} \Big|_{y=h_1+h_2+h_3+h_4} &= \chi_5 \frac{\partial T_5}{\partial y} \Big|_{y=h_1+h_2+h_3+h_4} \\
\chi_5 \frac{\partial T_5}{\partial y} \Big|_{y=h_1+h_2+h_3+h_4+h_5} &= \chi_6 \frac{\partial T_6}{\partial y} \Big|_{y=h_1+h_2+h_3+h_4+h_5} \\
\chi_6 \frac{\partial T_6}{\partial y} \Big|_{y=h_1+h_2+h_3+h_4+h_5+h_6} &= \chi_7 \frac{\partial T_7}{\partial y} \Big|_{y=h_1+h_2+h_3+h_4+h_5+h_6} \\
\chi_7 \frac{\partial T_7}{\partial y} \Big|_{y=h_1+h_2+h_3+h_4+h_5+h_6+h_7} &= \chi_8 \frac{\partial T_8}{\partial y} \Big|_{y=h_1+h_2+h_3+h_4+h_5+h_6+h_7}
\end{aligned} \tag{5.11}$$

4) На поверхности подложки температура:

$$T_4(h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_7 + h_8) = T_2 \tag{5.12}$$

С учетом вышеизложенного получаем распределение температуры в слоях, найденное в Wolfram Mathematica. Для проверки решаем соответствующую задачу в ANSYS Workbench в модуле Steade-State Thermal.

Рассмотрим 3 случая режима работа покрытия на примере осесимметричной задачи в виде пластины, с температурой  $T_1$  с внешней стороны и с температурой  $T_2$  с внутренней стороны. Длина образца 10 мм (для тестового сравнения решений). Толщина и материал слоёв представлены в таблице 5.2.

Оба результата предоставлены на рисунке 5.6 (а-в), где точками указаны значения полученные в ANSYS. Как можно заметить, результаты идентичные. Это говорит о том, что аналитическое решение совпадает с численным решением и справедливо на всей области пластины: как в центре, так и на краях.

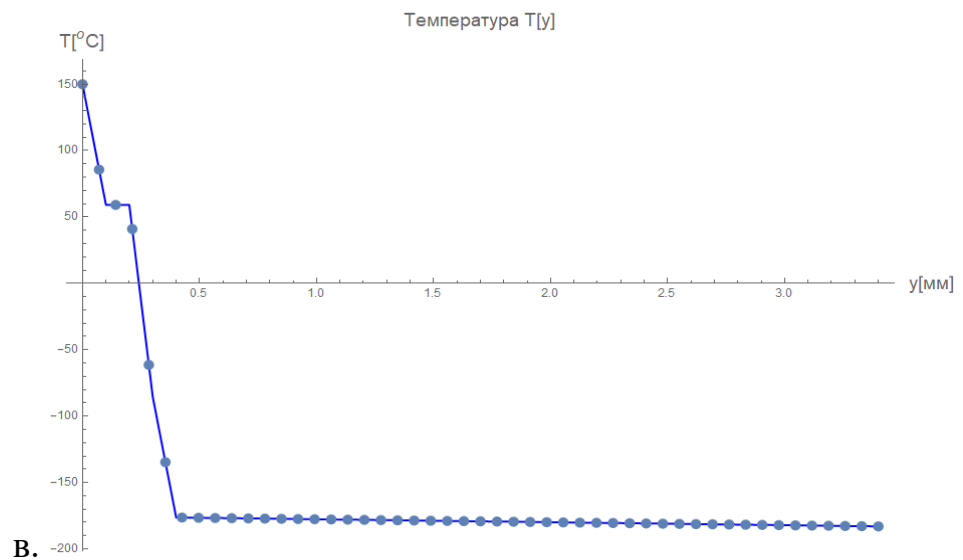
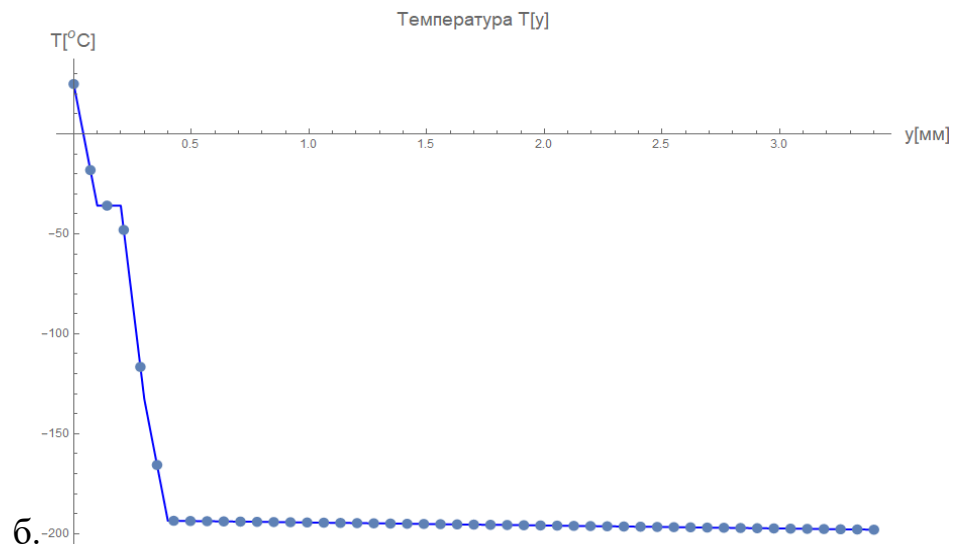
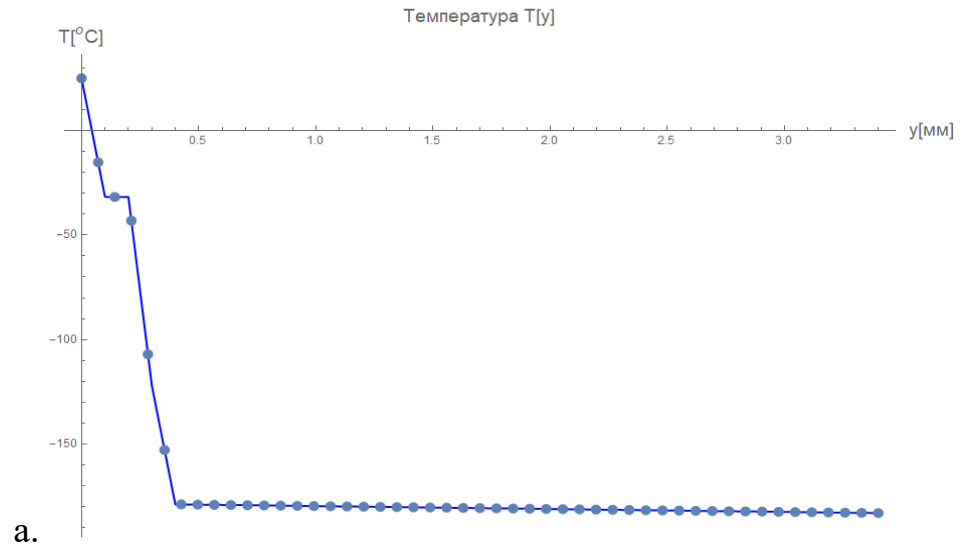


Рисунок 5.6. Распределение температуры в пластинах.

а – рабочий режим; б – критический режим захлаживания; в – критический режим радиации космоса.

## 5.2 Оптимизация толщины слоев покрытия

Варьируя толщину слоев, можно добиться уменьшения нормальных напряжений как в направлении нормали, так и плоскости слоя. Как было показано ранее для задачи теории упругости многослойной изотропной системы, образованное из 8 слоев покрытия и стенки бака, состоящих из различных изотропных материалов, максимальные напряжения наблюдаются в первом слое покрытия. Распределения перемещений, нормальных напряжений в направлении нормали, нормальных напряжений в плоскости слоя и деформаций в слоях покрытия при различных режимах, были найдены в среде Wolfram Mathematica (рисунок 5.7). Максимальные значения перемещений, напряжений и деформаций при различных режимах представлены на рисунке 5.8.

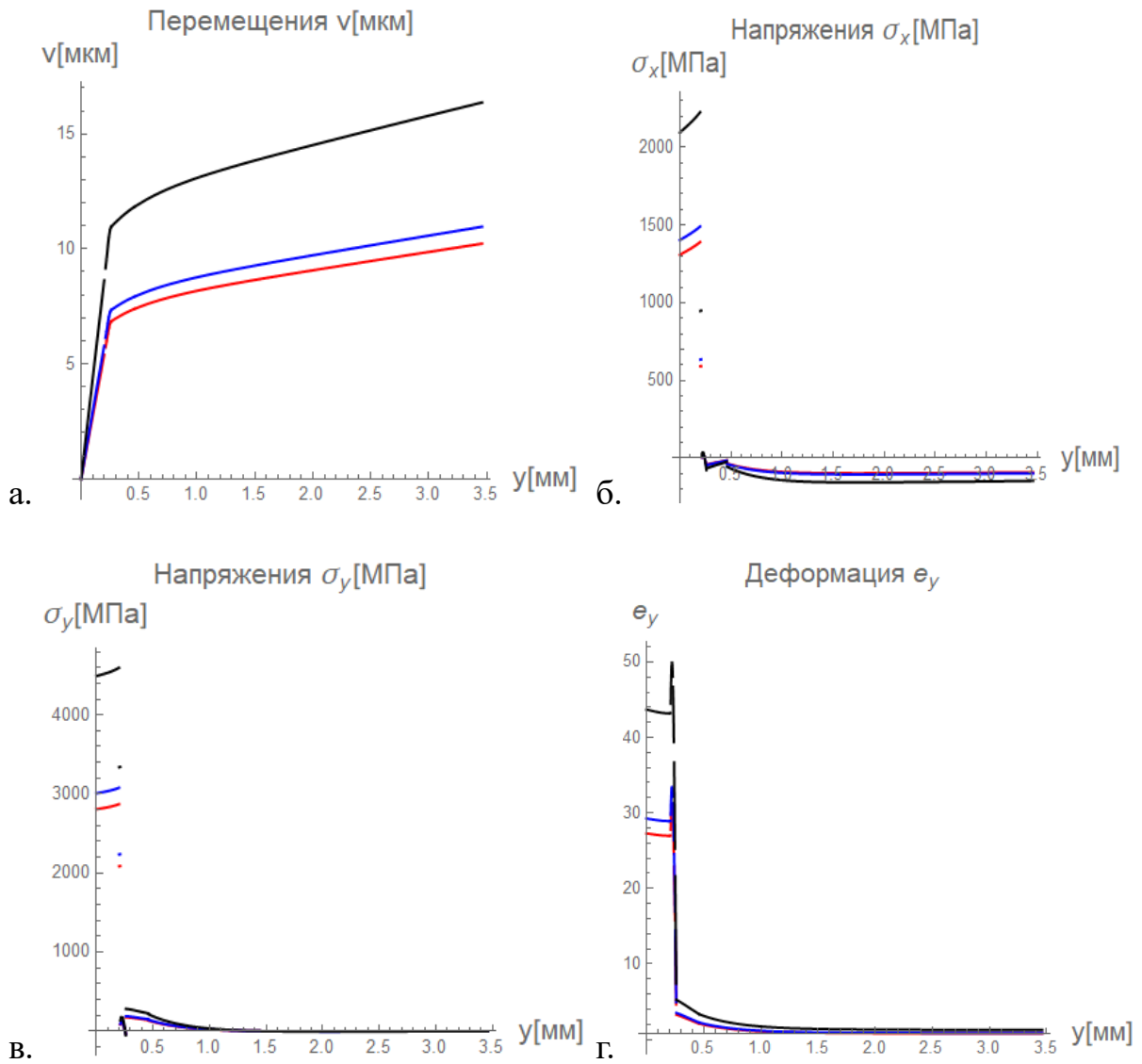


Рисунок 5.7. Распределение перемещений [мкм](а), нормальных напряжений в плоскости слоя [МПа] (б), нормальных напряжений в направлении нормали [МПа] (в), деформаций (г) в слоях покрытия.

(красным цветом обозначен рабочий режим, синим цветом – 1-й критический режим, черным цветом – 2-й критический режим).

	1 слой	2 слой	3 слой	4 слой	5 слой	6 слой	7 слой	8 слой	9 слой
Максимальные перемещения, [мкм]									
Рабочий режим	5,42	0,27	0,3	0,31	0,27	0,19	0,09	0,54	2,84
1-ый критический режим	5,81	0,29	0,32	0,33	0,29	0,21	0,1	0,58	3,04
2-ой критический режим	8,68	0,43	0,47	0,5	0,43	0,31	0,15	0,87	4,54
Максимальные напряжения в плоскости слоя, [МПа]									
Рабочий режим	1391	592,9	20,8	20,3	5,8	-19,2	-51,3	-14	-91
1-ый критический режим	1491	635,7	22,3	21,7	6,2	-20,6	-55	-15,1	-98
2-ой критический режим	2227	949,3	33,2	32,4	9,3	-30,7	-82,2	-22,5	-145,7
Максимальные напряжения в направлении нормали, [МПа]									
Рабочий режим	2872	2088	108,1	103,6	73,1	23,2	-40,2	139,8	-0,287
1-ый критический режим	3079	2239	115,9	111,1	78,4	24,8	-43	149,9	-0,307
2-ой критический режим	4598	3343	173,1	165,8	117	37,1	-64,3	223,8	-0,459
Максимальные деформации									
Рабочий режим	26,98	27,01	31,08	29,61	23,77	14,65	3,29	2,09	0,78
1-ый критический режим	28,92	28,95	33,32	31,75	25,5	15,71	3,53	2,25	0,83
2-ой критический режим	43,19	43,24	49,75	47,41	38,1	23,46	5,27	3,35	1,24

Рисунок 5.8. Значения максимальных перемещений [мкм], напряжений в плоскости слоя [МПа], напряжений в направлении нормали [МПа] и деформаций при различных режимах эксплуатации.

Не трудно заметить из полученного решения, что влияние толщины слоев на НДС покрытия оказывается значительным. По сравнению с предыдущем случаем, напряжения в направлении плоскости слоя в первом слое покрытия уменьшились на 37,2%, а напряжения в направлении нормали уменьшились на 36%.

## Заключение

Диссертационная работа посвящена исследованию динамического поведения слоистых теплозащитных покрытий на примере экранно-вакуумной теплоизоляции.

**В диссертационной работе получены следующие основные результаты, обладающие научной новизной и практической ценностью:**

Сделан аналитический обзор литературных данных по проблеме защиты космический аппаратов путем использования экранно-вакуумной теплоизоляции. Анализ литературы показал, что физико-механические характеристики малоизучены, в особенности это касается деградации свойств в условиях космического пространства.

Для детального исследования проводилось экспериментальное исследование элемента ЭВТИ. Испытания проводились с использованием универсальной разрывной машины и линейного ускорителя электронов. В ходе проведенных исследований определялись свойства материала до излучения и после в зависимости разного уровня излучения.

Построена математическая модель, описывающая динамическое поведение ЭВТИ, которая основана на совместном решении нестационарного уравнения теплопроводности и классического уравнения теории упругости для одномерного слоя. Решение проводилось на основе интегрального преобразования Лапласа по времени. Решена тестовая задача. На основе математической модели получены аналитические зависимости кинематических и статических параметров для ЭВТИ состоящего из четырех слоев. Построены зависимости распределения температурного поля по времени и толщине многослойного пакета ЭВТИ а также распределение нормальных напряжений по толщине пакета и во времени.

Проведено численное моделирование ЭВТИ для проверки полученных аналитических зависимостей. Определено влияние толщины на уровень НДС в слоях и на их границе. Моделирование проводилось с учетом полученных экспериментальных результатов.

### Список литературы

1. Малоземов, В. В. Тепловой режим космических аппаратов / В. В. Малоземов — Москва: Машиностроение, 1980 — 232 с.
2. Грабин Б. В., Давыдов О. И., Жихарев В. И. и др Основы конструирования ракет-носителей космических аппаратов / Грабин Б. В., Давыдов О. И., Жихарев В. И. и др.; Под ред. Мишина В. П., Карраска — Москва: Машиностроение, 1991 — 415 с.
3. Каганер, М. Г. Тепловая изоляция в технике низких температур / М. Г. Каганер — Москва: Машиностроение, 1966 — 275 с.
4. NASA NTRS 20110015287: Degradation of Multi-Layer Insulation (MLI) Retrieved from the Hubble Space Telescope
5. RU2155147C1 Способ заправки жидким кислородом бака космического разгонного блока
6. NASA NTRS 19720012295: Cryogenic research at MSFC: Research achievements review, Volume 4 no. 2
7. NASA NTRS 19730008921: Effect of environment on insulation materials, volume 1
8. Басов, А. А., Огорокова, К. С., Ставрицкий, А. К. Системы обеспечения теплового режима разгонных блоков типа ДМ ракет космического назначения / А. А. Басов, К. С. Огорокова, А. К. Ставрицкий // Космическая техника и технологии. — 2016. — № 3(14). — С. 77-79.
9. Ракетно-космическая корпорация «Энергия» имени С.П. Королёва (РКК «Энергия») <https://www.energia.ru/ktt/archive/2016/03-2016/03-07.pdf>
10. Мануйлов, К. К. Исследование теплофизических и механических характеристик композитных материалов экранно-вакуумной теплоизоляции / К. К. Мануйлов // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. — 2015. — № 53. — С. 1-16
11. NASA NTRS 20070018342 <https://ntrs.nasa.gov/citations/20070018342>
12. NASA NTRS 19720000154. Method of determining thermal conductivity in multi-layer insulation systems <https://ntrs.nasa.gov/citations/19720000154> NASA TECH BRIEF. Marshall Space Flight Center, May 1972



13. NASA NTRS 20210017410. Novel Lightweight Insulation Protects Fuel Tanks from Extreme Temperatures.  
[https://ntrs.nasa.gov/api/citations/20210017410/downloads/007QuestThermal\\_SuccessStory\\_V2.pdf](https://ntrs.nasa.gov/api/citations/20210017410/downloads/007QuestThermal_SuccessStory_V2.pdf)
14. NASA NTRS 19990047691 Multilayer Insulation. Material Guidelines  
<https://ntrs.nasa.gov/api/citations/19990047691/downloads/19990047691.pdf>
15. NASA Tech Brief Integrated Multilayer Insulation John H. Glenn Research Center  
Wednesday, April 01 2009  
<https://www.questthermal.com/sites/default/files/ckfinder/files/NASA%20Tech%20Brief%20Integrated%20Multilayer%20Insulation.pdf>
16. Wrapped multilayer insulation  
<https://www.questthermal.com/sites/default/files/ckfinder/files/wMLI%20CEC%20Poster%20Paper%20v6b.pdf>
17. Novel load responsive multilayer insulation with high in-atmosphere and on-orbit thermal performance S. Dye, A. Kopelove, G.L. Mills  
<https://www.questthermal.com/sites/default/files/ckfinder/files/Novel%20Load%20Responsive%20LRMLI%20JCryo%20article.pdf> 2012
18. Integrated and load responsive multilayer insulation.  
<https://www.questthermal.com/sites/default/files/ckfinder/files/Integrated%20and%20Load%20Responsive%20MLI%20CEC%20Paper%20v2.pdf>
19. Пронина, П. Ф. Аналитическое моделирование теплопереноса в элементах экранно-вакуумной теплоизоляции/ П. Ф. Пронина // Труды МАИ. — 2023. — № 130.. — С. 27.
20. Цаплин С.В., Большев С.А. Моделирование температурного поля оптико-электронного телескопического комплекса космического аппарата // Сборник материалов Всероссийской научно-технической конференции, посвященной 50-летию образования ЦСКБ и 90-летию со дня рождения Д.И. Козлова. 28 сентября – 3 октября 2009 г., ФГУП “ГНПРКЦ” ЦСКБ- Прогресс”. Самара, 2009 С. 125–130.
21. Блох, А. Г. Основы теплообмена излучением / А. Г. Блох - Москва: Госэнергоиздат, 1962 — 331 с.

22. Малоземов, В. В., Кутепов, С. Н., Логинов, С. Н. Выбор проектных параметров перспективных систем обеспечения теплового режима ЛА / В. В. Малоземов, С. Н. Кутепов, С. Н. Логинов — Москва: МАИ, 1989 — 67 с.
23. Залетаев, В. М., Капинос, Ю. В., Сургучов, О. В. Расчет теплообмена космического аппарата / В. М. Залетаев, Ю. В. Капинос, О. В. Сургучов— Москва: Машиностроение, 1982 — 152 с.
24. Кудрявцева, Н.С. Основы проектирования эффективных систем терморегулирования космических аппаратов/ Н.С. Кудрявцева — Москва: МАИ, 2012—228 с.
25. Малоземов, В.В., Кудрявцева, Н.С. Оптимизация систем терморегулирования космических аппаратов / В.В. Малоземов, Н.С. Кудрявцева — Москва: Машиностроение, 1988—108 с.
26. Залетаев, В. М. К расчету собственного излучения Земли на космический аппарат / В. М. Залетаев // Космические исследования. — 1968. — № 6. — С. 897 – 903.
27. Залетаев, В.М., Капинос, Ю.В., Сургучев, О.В. Расчет теплообмена космического аппарата / В.М. Залетаев, Ю.В. Капинос, О.В. Сургучев— Москва: Машиностроение, 1979—208 с.
28. Фаворский, О.Н., Каданер, Я.С. Вопросы теплообмена в космосе / О.Н. Фаворский, Я.С. Каданер — Москва: Высшая школа, 1967—248 с.
29. Авдудевский, В.С., Галицейский, Б.М. и др. Основы теплопередачи в авиационной и ракетно-космической технике / В.С. Авдудевский, Б.М. Галицейский, В.К. Кошкина и др. — Москва: Машиностроение, 1992—528 с.
30. Пичужкин, П. В., Пронина, П. Ф. Применение математического моделирования при исследовании теплозащитной конструкции космического аппарата на теплопроводность в условиях изменяющегося давления и температуры во время спуска в плотные слои атмосферы/ П. В. Пичужкин, П. Ф. Пронина // Научно-технический вестник Поволжья. — 2023. — № 5. — С. 81-84.
31. Пронина, П. Ф., Бабайцев, А. В., Вятлев, А. В. Экранно-вакуумная теплоизоляция для космических аппаратов / П. Ф. Пронина, А. В. Бабайцев, А. В.

- Вятлев// Проблемы безопасности на транспорте. — Гомель: Учреждение образования "Белорусский государственный университет транспорта", 2022 . — С. 238-239.
32. Цаплин С.В., Болычев С.А. Моделирование системы термоградиентной стабилизации оптико-электронного телескопического комплекса космического аппарата // Сборник трудов XXXI Российской школы по проблемам науки и технологий, 14–16 июня 2011, г. Миасс. Миасс, 2011.
33. Цаплин С.В., Болычев С.А. Моделирование температурных полей телескопа при воздействии условий эксплуатации КА // Сборник трудов Международной конференции” Научные и технологические эксперименты на автоматических космических аппаратах и малых спутниках”, 27–30 июня 2011 г. Самара. Самара, 2011.
34. Новацкий В. Вопросы термоупругости / Новацкий В. — Москва: Акад. наук СССР, 1962 — 364 с.
35. Матвеев, Н. К. Экранно-вакуумная теплоизоляция и определение ее характеристик / Н. К. Матвеев — Санкт-Петербург: БГТУ, 2012 — 39 с.
36. Глазков, А.А. Учебная лаборатория вакуумной техники: учебное пособие / А.А. Глазков, Р.А. Милованова. М. Москва: Атомиздат, 1971—281 с.
37. Измерения в промышленности: Справочное издание. В 3 т. Кн.2. Способы измерения и аппаратура / Под. ред. П. Профоса. М.: Металлургия, 1990.
38. Малоземов, В.В. Системы жизнеобеспечения экипажей летательных аппаратов / В.В. Малоземов [и др.]. — Москва: Машиностроение, 1986—584 с.
39. Рогов, В.А. Методика и практика технических экспериментов: учебное пособие / В.А. Рогов, Г.Г. Поздняк. — Москва: центр «Академия», 2005—288 с.
40. Иванов, Г.М. Теплотехнические измерения и приборы / Г.М. Иванов [и др.]. — Москва: МЭИ, 2005—460 с.
41. Экранно-вакуумная теплоизоляция космического аппарата. [Электронный <http://www.findpatent.ru/patent/234/2344972.html> (дата обращения 10.06.2016).

42. Основы теплопередачи в авиационной и ракетно-космической технике. /Авдеевский В.С., Галицейский Б.М., Глебов Г.А. и др.. под ред. проф. В.К.Кошкина. — Москва: Машиностроение, 1975—623 с.
43. Жунь Г. Г. Исследование экранно-вакуумной теплоизоляции с новыми материалами / Жунь Г. Г. // Энергосбережение. Энергетика. Энергоаудит. — 2012. — № № 8 (102). — С. 59-63.
44. Жунь, Г. Г., Гетманец, В. Ф. Новые подходы к описанию процессов вакуумирования и газоотделения. Вопросы атомной науки и техники / Г. Г. Жунь, В. Ф. Гетманец // Вопросы атомной науки и техники. — 2002. — № №1. — С. 67-71.
45. Нусинов, М.Д. Воздействие и моделирование космического вакуума/ М.Д. Нусинов — Москва: Машиностроение,1982—176 с.
46. Околосземное космическое пространство / Пер. с англ. / Под ред. Ф. С. Джонсона ; Под ред. В. П. Шабанского — Москва: Мир, 1966 — 191 с.
47. Панкратов, Б.М. Основы теплового проектирования транспортных космических систем / Б.М. Панкратов— Москва: Машиностроение, 1988—304 с.
48. ОСТ 92-1380-83 – Отраслевой стандарт “Изоляция тепловая экранно-вакуумная. Марки и технические требования”.
49. ОСТ 92-1381-83 – Отраслевой стандарт “Изоляция тепловая экранно-вакуумная. Типовые технологические процессы”.
50. Исаченко, В. П., Осипова, В. А., Сукомел, А. С. Теплопередача / В. П. Исаченко, В. А. Осипова, А. С. Сукомел — 4-е изд. — Москва: Энергоиздат, 1981 — 417 с.
51. Фаворский, О.М. Вопросы теплообмена в космосе / О.М. Фаворский, Я.С. Каданер — Москва: Высшая школа, 1967 — 239 с.
52. Харт, Х. Введение в измерительную технику: пер. с нем / Х. Харт — Москва: Мир, 1999 — 392 с.
53. Бондаренко В.А., Куперштейн В.Б. Обеспечение теплового режима десантного модуля космического аппарата «ЭкзоМарс-2018» // Вестник ФГУП НПО им. С.А. Лавочкина. 2014. № 2. С. 95-104.

54. Хартов В.В., Мартынов М.Б., Лукьянчиков А.В., Алексашкин С.Н. Проектная концепция десантного модуля «ЭкзоМарс-2018», создаваемого НПО им. С.А. Лавочкина // Вестник ФГУП НПО им. С.А. Лавочкина. 2014. № 2. С. 5-12.
55. E.Millour, F.Forget et al., The Mars Climate Database (MCD version 5.2), EPSC Abstracts, Vol.10, EPSC2015-438, 2015
56. Козлов Л.В., Нусинов М.Д. и др. Моделирование тепловых режимов космического аппарата и окружающей его среды/, под ред. акад. Петрова Г.И. М.: Машиностроение, 1971. 382с.
57. Козлов, Л. В., Нусинов, М. Д. Моделирование тепловых режимов космического аппарата и окружающей его среды / Л. В. Козлов, М. Д. Нусинов — Москва: Машиностроение, 1972 — 464 с.
58. Modest M.F. Solar flux incident on an orbiting surface after reflection from the planet. //AIAA Journal. 1980. V.18. N.6. P.727-730.
59. Колесников, А. В., Палешкин, А. В. Численный метод моделирования внешнего теплообмена космического аппарата с произвольной формой наружных поверхностей / А. В. Колесников, А. В. Палешкин // Вестник МАИ. — 2010. — № 4. — С. 81-89.
60. Грицевич, И. В., Домбровский, Л. А., Ненарокомов, А. В. Перенос тепла излучением в экрано-вакуумной тепловой изоляции космических аппаратов / И. В. Грицевич, Л. А. Домбровский, А. В. Ненарокомов // Тепловые процессы теплотехники. — 2013. — № 1. — С. 12-21.
61. Bohon H.L., Shideler J.L., Rummeler D.R. Radiative Metallic Thermal Protection Systems: A status report. // Journal of spacecraft and rockets. 1977. V.14. N.10. P. 626-631.
62. Dombrovsky L.A. and Baillis D. Thermal Radiation in Disperse Systems: An Engineering Approach. Begell House, New York and Redding (CT), 2010. 678 p.
63. Lee S.C. Radiation heat-transfer model for fibers oriented parallel to diffuse boundaries. // AIAA J. Thermophys. Heat Transfer. 1988. V. 2. N.4. P.303– 308.
64. Bartl J. and Baranek M. Emissivity of aluminium and its importance for radiometric measurements. // Meas. Phys. Quant. 2004. V. 31. N. 4. P. 31-36.

65. Brannon R.R. and Goldstein R.J. Emittance of oxide layers on a metal substrate. // ASME J. Heat Transfer. 1970. V. 92. N. 2. P. 257-263.
66. Бреннон Р., Голдстейн Р. Степень черноты окисных пленок на металлической подложке / Бреннон Р., Голдстейн Р. // Теплопередача. — 1970. — № 2. — С. 49–57.
67. Haevens O.S. Optical Properties of Thin Solid Films. Butterworths Scientific Publications, London, 1955. Ch. 4. 199 p
68. Siegel R. and Howell J.R. Thermal Radiation Heat Transfer. Fourth Edition. Taylor & Francis, New York, 2002. 934 p.
69. Malitson I.H. Interspecimen comparison of the refractive index of fused silica. // J. Opt. Soc. Am. 1965. V. 55. N. 10. P. 1205–1209.
70. Beder E.C., Bass C.D., and Shackelford W.L. Transmissivity and absorption of fused quartz between 0.22 $\mu\text{m}$  and 3.5  $\mu\text{m}$  from room temperature to 1500°C. // Appl. Optics. 1971. V. 10. N. 10. P. 2263–2268.
71. Banner D., Klarsfeld S. and Langlais C. Temperature dependence of the optical characteristics of semitransparent porous media. // High Temp.–High Press. 1989. V. 21. P. 347–354
72. Dombrovsky L.A. Infrared and microwave radiative properties of metal coated microfibers. // Revue Générale de Thermique. 1998. V. 37. N. 11. P. 925–933
73. Mishchenko M.I., Travis L.D. and Lacis A.A. Multiple Scattering of Light by Particles: Radiative Transfer and Coherent Backscattering. Cambridge Univ. Press, New York, 2006.
74. Формалев, В. Ф., Ревизников, Д. Л. Численные методы / В. Ф. Формалев, Д. Л. Ревизников — Москва: Физматлит, 2004 — 400 с.
75. Алифанов, О. М., Будник, С. А., Михайлов, В. В., Ненарокомов, А. В. Экспериментально-вычислительный комплекс для исследования теплофизических свойств теплотехнических материалов / О. М. Алифанов, С. А. Будник, В. В. Михайлов, А. В. Ненарокомов // Тепловые процессы теплотехники. — 2009. — № 2. — С. 49-60.

76. Алифанов, О. М., Артюхин, Е. А., Румянцев, С. В. Экстремальные методы решения некорректных задач и их приложения к обратным задачам теплообмена / О. М. Алифанов, Е. А. Артюхин, С. В. Румянцев — Москва: Наука, 1988 — 288 с.
77. Алифанов, О. М. Идентификация процессов теплообмена летательных аппаратов (введение в теорию обратных задач теплообмена) / О. М. Алифанов — Москва: Машиностроение, 1979 — 216 с.
78. Лебедев, В. А., Ермолаев, Г. В., Лой, С. А., Матвиенко, М. В. Напряженное состояние напыленного покрытия при испытаниях на термостойкость / В. А. Лебедев, Г. В. Ермолаев, С. А. Лой, М. В. Матвиенко // Ежемесячный научно-технический и производственный журнал «Упрочняющие технологии и покрытия». — 2014. — № №11 (119). — С. 8-12.
79. Будиновский, С. А. Применение аналитической модели определения упругих механических и термических напряжений в многослойной системе в решении задач по созданию жаростойких алюминидных покрытий / С. А. Будиновский // Вестник Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. Серия Машиностроение. — 2011. — № S2. — С. 26-37.
80. Нгуен, Д. К. Влияние термоциклических нагрузок на механические характеристики материала композитных панелей : специальность 01.02.04 «Механика деформируемого твердого тела» : Диссертация на соискание кандидата технических наук / Нгуен, Д. К. ; Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) . — Москва), 2015. — 121 с.
81. Toupin R.A. Elastic materials with couple-stresses / R.A. Toupin // Arch. Ration. Mech. And Analysis. — 1962. — V. 11.
82. Тупин Р.А. Теории упругости, учитывающие моментные напряжения / Р.А. Тупин // Механика. — 1965. — Т.91. — № 3. — С .113–140.
83. Лурье, С. А., Соляев, Ю. О., Медведский, А. Л., Рабинский, Л. Н. Исследование локальных эффектов в распределении температурных напряжений на контактных границах слоистых сред / С. А. Лурье, Ю. О. Соляев, А. Л. Медведский, Л. Н. Рабинский // Электронный журнал «Труды МАИ». — 2013. — № 71.

84. Cosserat E. Theore des corps deformables / E. Cosserat, F. Cosserat // Paris. Hermann. — 1909.
85. Некоторые классические модели тонких структур // Изв. Вузов. Северо-Кавказский регион, Естественные науки (к 80-ю академика И.И. Воровича). Ростов-на-Дону / И. Ф. Образцов [и др]; под ред. И. Ф. Образцов. — 2000. — № 3. — С. 110–118.
86. Орлов, М.Е. Теоретические основы теплотехники. Тепломассообмен: учебное пособие/ М. Е. Орлов; Ульяновский гос. техн. ун-т - Ульяновск: УлГТУ, 2013. – 204 с.
87. Юдин В.М. Распространение тепла в стеклопластиках В. М. Юдин. - Москва : [б. и.], 1970. - 40 с. : ил.; 26 см. - (Труды ЦАГИ имени профессора Н. Е. Жуковского; Вып. 1267).
88. Залетаев, В. М. Собственное излучение Земли на частично экранируемые от нее элементы космических аппаратов / В. М. Залетаев // Космические исследования. — 1970. — № 4. — С. 636-639.
89. Зигель Р., Хауэлл Дж. Теплообмен излучением / Зигель Р., Хауэлл Дж. — Москва: Мир, 1975 — 234 с.
90. Кобранов, Г. П., Цветков, А. П., Белов, А. И., Сухнев, В. А. Внешний теплообмен космических аппаратов / Г. П. Кобранов, А. П. Цветков, А. И. Белов, В. А. Сухнев — Москва: Машиностроение, 1977 — 104 с.
91. Колесников, А. В., Сербин, В. И. Моделирование условий внешнего теплообмена космических аппаратов / А. В. Колесников, В. И. Сербин — Москва: Информация – XXI век, 1997 — 170 с.
92. Формалев В. Ф., Колесник С. А., Селин И. А., Кузнецова Е. Л. Оптимальный выбор параметров экранно-вакуумной теплоизоляции космических аппаратов/ Формалев В. Ф., Колесник С. А., Селин И. А., Кузнецова Е. Л. // Теплофизика высоких температур. — 2017. — № 55. — С. 108–114.
93. Зиновьев, В. И., Красночуб, Е. К., Довгялло, А. И. Результаты испытаний и выбор оптимального состава экранно-вакуумной теплоизоляции для бортовой системы охлаждения ИК аппаратуры / В. И. Зиновьев, Е. К. Красночуб, А. И.



Довгялло // Труды XXIII Международной научно-технической конференции по фотоэлектронике и приборам ночного видения. — Москва:ОАО "НПО "Орион", 2014. — С. 115-118.

94. Зинкевич В.П. Анализ теплопередачи в экранно-вакуумной теплоизоляции при механическом воздействии / В. И. Зиновьев // В книге: Авиация и космонавтика. тезисы 21-ой международной конференции. Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) — Москва:"Перо" (Москва), 2022. — С. 331-332.

95. Полещук А.Ф., Цыганков О.С. Система контроля состояния внешней поверхности гермооболочки корпуса космического объекта под экранно-вакуумной теплоизоляцией, используемая космонавтом в процессе внекорабельной деятельности, и способ её эксплуатации. Патент на изобретение RU 2716608 С1, 13.03.2020. Заявка № 2019105518 от 27.02.2019.

96. Романько, В. А., Кравченко, С. В., Нестеров, С. Б., Маланин, Н. В., Акиншин, В. Г., Панова, Н. М., Христич, В. В. Перспективы применения вакуумной техники и технологии в космической отрасли / В. А. Романько, С. В. Кравченко, С. Б. Нестеров, Н. В. Маланин, В. Г. Акиншин, Н. М. Панова, В. В. Христич // Вакуумная техника и технология. — 2011. — № 1. — С. 49-56.

97. Пронина П. Ф., Тушавина, О. В., Шумская, С. А., Егорова, М. С. Аналитическое моделирование теплопереноса в элементах экранно-вакуумной теплоизоляции/ П. Ф. Пронина, О. В. Тушавина, С. А. Шумская, М. С. Егорова // Тепловые процессы в технике. — 2022. — № 8. — С. 348-353.

98. Тушавина, О. В., Пронина, П. Ф., Лопатин, С. С. Подходы к моделированию изменения физико-механических свойств и напряженно-деформированного состояния многослойных покрытий при циклическом нагреве/ О. В. Тушавина, П. Ф. Пронина, С. С. Лопатин // СТИН. — 2023. — № 10. — С. 21-23.

99. Тушавина, О. В., Палешкин, А. В., Пронина, П. Ф., Шеметова, Е. В. Оценка допустимых погрешностей воспроизведения тепловых факторов космической среды и погрешностей моделирования тепловых режимов для малых космических

аппаратов/ О. В. Тушавина, А. В. Палешкин, П. Ф. Пронина, Е. В. Шеметова // СТИН. — 2023. — № 10. — С. 23-27.

100. Starovoitov E.I., Pronina P.F The influence of the temperature field on the stress-strain behaviour of heat protection tiles on an elastic base / Starovoitov E.I., Pronina P.F // Journal of the Balkan Tribological Association. — 2021. — № 2. — С. 256-270.

101. Orekhov A.A., Utkin Y.A., Pronina P.F. Determination of deformation in mesh composite structure under the action of compressive loads / Orekhov A.A., Utkin Y.A., Pronina P.F. // Periodico Tche Quimica. — 2020. — № 35. — С. 599-608.

102. Sha M., Utkin Y.A., Tushavina O.V., Pronina P.F. Experimental studies of heat and mass transfer from tip models made of carbon-carbon composite material (cccm) under conditions of high-intensity thermal load / Sha M., Utkin Y.A., Tushavina O.V., Pronina P.F. // Periodico Tche Quimica. — 2020. — № 35. — С. 988-997.

103. Pronina P.F., Tushavina O.V., Sun Y. Mathematical modelling of high-intensity heat flux on the elements of heat-shielding composite materials of a spacecraft / Pronina P.F., Tushavina O.V., Sun Y. // Journal of Applied Engineering Science. — 2020. — № 4. — С. 693-698.

104. Kyaw Y.K., Pronina P.F., Polyakov P.O. Mathematical modelling of the effect of heat fluxes from external sources on the surface of / Kyaw Y.K., Pronina P.F., Polyakov P.O. // Journal of Applied Engineering Science. — 2020. — № 4. — С. 732-736.

105. Пронина, П. Ф., Колесников, А. В., Палешкин, А. В., Шеметова, Е. В. Влияние особенностей спектральных радиационных характеристик поверхности космического аппарата на точность моделирования тепловых нагрузок в инфракрасных имитаторах / П. Ф. Пронина, А. В. Колесников, А. В. Палешкин, Е. В. Шеметова // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. — 2022. — № 1(140). — С. 40-52.

$$\gamma_{li}(y), \bar{\gamma}_{li}(y), \gamma_{lb}(y), \tilde{\gamma}_{lb}(y) \dots \gamma_{4i}(y), \bar{\gamma}_{4i}(y), \gamma_{4b}(y), \tilde{\gamma}_{4b}(y) \quad (\text{A.1})$$

$$\begin{aligned} \tilde{g}_0 &= 1 \quad \tilde{\gamma}_0 = h_1 + h_2 + h_3 + h_4 \\ \tilde{g}_1 &= \tilde{g}_{14} = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \quad \tilde{g}_5 = \tilde{g}_8 = \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{\lambda_2 + \lambda_3} \\ \tilde{g}_2 &= \tilde{g}_{12} = \frac{\lambda_3 - \lambda_4}{\lambda_3 + \lambda_4} \quad \tilde{g}_3 = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)}{(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_2 + \lambda_3)} \\ \tilde{g}_4 &= \tilde{g}_6 = \tilde{g}_{10} = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_4)}{(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_2 + \lambda_3)(\lambda_3 + \lambda_4)} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

$$\tilde{g}_7 = \tilde{g}_9 = \tilde{g}_{11} = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_4)}{(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_3 + \lambda_4)} \quad \tilde{g}_{13} = \frac{(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_4)}{(\lambda_2 + \lambda_3)(\lambda_3 + \lambda_4)} \quad \tilde{\gamma}_1 = h_2 + h_3 + h_4$$

$$\tilde{\gamma}_2 = h_1 + h_2 + h_3 \quad \tilde{\gamma}_3 = h_1 + h_3 + h_4 \quad \tilde{\gamma}_4 = h_1 + h_2 + h_4$$

$$\tilde{\gamma}_5 = h_3 + h_4 \quad \tilde{\gamma}_6 = h_2 + h_4 \quad \tilde{\gamma}_7 = \tilde{\gamma}_9 = h_2 + h_3 \quad \tilde{\gamma}_8 = h_1 + h_2$$

$$\tilde{\gamma}_{10} = h_1 + h_3 \quad \tilde{\gamma}_{11} = \tilde{\gamma}_{13} = h_1 + h_4 \quad \tilde{\gamma}_{12} = h_4 \quad \tilde{\gamma}_{14} = h_1$$

$$g_0^1 = 1 \quad g_1^1 = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \quad g_2^1 = \frac{\lambda_3 - \lambda_4}{\lambda_3 + \lambda_4} \quad g_3^1 = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)}{(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_2 + \lambda_3)}$$

$$g_4^1 = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_4)}{(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_2 + \lambda_3)(\lambda_3 + \lambda_4)} \quad g_5^1 = \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{\lambda_2 + \lambda_3} \quad g_6^1 = \frac{(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_4)}{(\lambda_2 + \lambda_3)(\lambda_3 + \lambda_4)}$$

$$g_7^1 = \frac{8\lambda_2\lambda_3}{(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_2 + \lambda_3)(\lambda_3 + \lambda_4)}$$

$$g_1^2 = \frac{\lambda_1}{(\lambda_1 + \lambda_2)} \quad g_2^2 = \frac{\lambda_1(\lambda_3 - \lambda_4)}{(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_3 + \lambda_4)}$$

$$g_3^2 = \frac{\lambda_1(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_4)}{(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_2 + \lambda_3)(\lambda_3 + \lambda_4)} \quad g_4^2 = \frac{\lambda_3}{(\lambda_2 + \lambda_3)(\lambda_3 + \lambda_4)}$$

$$g_5^2 = \frac{\lambda_1(\lambda_3 - \lambda_2)}{(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_2 + \lambda_3)} \quad g_6^2 = \frac{\lambda_3(\lambda_1 - \lambda_2)}{(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_2 + \lambda_3)(\lambda_3 + \lambda_4)}$$

$$\begin{aligned}
g_1^3 &= \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_3 + \lambda_2)} & g_2^3 &= \frac{\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_3 - \lambda_4)}{(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_3 + \lambda_2)(\lambda_3 + \lambda_4)} \\
g_3^3 &= \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_2)}{(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_2 + \lambda_3)(\lambda_3 + \lambda_4)} & g_4^3 &= \frac{1}{(\lambda_3 + \lambda_4)} \\
g_5^3 &= \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)}{(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_3 + \lambda_4)} & g_6^3 &= \frac{(\lambda_3 - \lambda_2)}{(\lambda_3 + \lambda_2)(\lambda_3 + \lambda_4)} \\
g_1^4 &= \frac{(\lambda_3 - \lambda_4)}{(\lambda_3 + \lambda_4)} & g_2^4 &= \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_4)}{(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_3 + \lambda_4)} \\
g_3^4 &= \frac{(\lambda_3 - \lambda_2)}{(\lambda_3 + \lambda_2)} & g_4^4 &= \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_4)}{(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_3 + \lambda_2)(\lambda_3 + \lambda_4)} \\
g_5^4 &= \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_2)}{(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_3 + \lambda_2)} & g_6^4 &= \frac{(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_4)}{(\lambda_3 + \lambda_2)(\lambda_3 + \lambda_4)} \\
g_7^4 &= \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)}{(\lambda_1 + \lambda_2)} & g_8^4 &= \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}{(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_3 + \lambda_2)(\lambda_3 + \lambda_4)}
\end{aligned} \tag{A.3}$$

$$\gamma_0^1(y) = h_1 + \frac{y}{2} \quad \bar{\gamma}_0^1(y) = h_1 + h_2 + h_3 + h_4 - \frac{y}{2}$$

$$\gamma_1^1(y) = h_2 + h_3 + h_4 + \frac{y}{2} \quad \bar{\gamma}_1^1(y) = h_1 - \frac{y}{2}$$

$$\gamma_2^1(y) = h_1 + h_4 + \frac{y}{2} \quad \bar{\gamma}_2^1(y) = h_1 + h_2 + h_3 - \frac{y}{2}$$

$$\gamma_3^1(y) = h_1 + h_2 + \frac{y}{2} \quad \bar{\gamma}_3^1(y) = h_1 + h_3 - \frac{y}{2}$$

$$\gamma_4^1(y) = h_1 + h_2 + h_4 + \frac{y}{2} \quad \bar{\gamma}_4^1(y) = h_1 + h_3 - \frac{y}{2}$$

$$\gamma_5^1(y) = h_1 + h_3 + h_4 + \frac{y}{2} \quad \bar{\gamma}_5^1(y) = h_1 + h_2 - \frac{y}{2}$$

$$\gamma_6^1(y) = h_1 + h_3 + \frac{y}{2} \quad \bar{\gamma}_6^1(y) = h_1 + h_2 + h_4 - \frac{y}{2}$$

$$\gamma_-^1(y) = h_1 + h_2 + 3 + h_4 - y \quad \gamma_+^1(y) = h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + y$$

$$\begin{aligned}
\gamma_1^2(y) &= h_1 + h_2 + h_3 + h_4 - \frac{y}{2} & \bar{\gamma}_1^2(y) &= \frac{y}{2} \\
\gamma_2^2(y) &= h_1 + h_2 + h_3 - \frac{y}{2} & \bar{\gamma}_2^2(y) &= h_4 + \frac{y}{2} & \gamma_3^2(y) &= h_1 + h_2 + h_4 - \frac{y}{2} & \bar{\gamma}_3^2(y) &= h_3 + \frac{y}{2} \\
\gamma_4^2(y) &= h_1 + h_2 - \frac{y}{2} & \bar{\gamma}_4^2(y) &= h_3 + h_4 + \frac{y}{2} & \gamma_5^2(y) &= h_1 + h_3 + h_4 + \frac{y}{2} & \bar{\gamma}_5^2(y) &= h_1 + h_2 - \frac{y}{2} \\
\gamma_6^2(y) &= 3h_1 + h_2 + h_3 + h_4 - y & \bar{\gamma}_6^2(y) &= 3h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + y \\
\gamma_-^2(y) &= 2h_1 + h_2 + h_3 + h_4 - y & \gamma_-^2(y) &= 2h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + y \\
\gamma_1^3(y) &= (h_1 + h_2 + h_3 + h_4 - \frac{y}{2}) & \bar{\gamma}_1^3(y) &= \frac{y}{2} \\
\gamma_2^3(y) &= (h_1 + h_2 + h_3 - \frac{y}{2}) & \bar{\gamma}_2^3(y) &= h_4 + \frac{y}{2} \\
\gamma_3^3(y) &= h_1 + h_2 + h_3 + h_4 - y & \bar{\gamma}_3^3(y) &= h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + y \\
\gamma_4^3(y) &= h_1 + h_2 + h_3 + h_4 - y & \bar{\gamma}_4^3(y) &= h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + y \\
\gamma_5^3(y) &= 3h_1 + h_2 + h_3 + h_4 - y & \bar{\gamma}_5^3(y) &= h_1 - h_2 + h_3 + h_4 + y \\
\gamma_6^3(y) &= -h_1 - h_2 + h_3 + h_4 + y & \bar{\gamma}_6^3(y) &= 3h_1 + 3h_2 + h_3 + h_4 - y \\
\gamma_0^4(y) &= (h_1 + h_2 + h_3 + h_4 - y) & \bar{\gamma}_0^4(y) &= h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + y \\
\gamma_1^4(y) &= 3h_1 + 3h_2 + 3h_3 + h_4 - y & \bar{\gamma}_1^4(y) &= h_1 - h_2 - h_3 + h_4 + y \\
\gamma_2^4(y) &= h_1 + 3h_2 + 3h_3 + h_4 - y & \bar{\gamma}_2^4(y) &= h_1 - h_2 - h_3 + h_4 + y \\
\gamma_3^4(y) &= h_1 - h_2 + h_3 + h_4 + y & \bar{\gamma}_3^4(y) &= 3h_1 + 3h_3 + h_2 + h_4 - y \\
\gamma_4^4(y) &= h_1 + h_2 - h_3 + h_4 + y & \bar{\gamma}_4^4(y) &= h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + y \\
\gamma_5^4(y) &= h_1 - h_2 + h_3 + h_4 + y & \bar{\gamma}_5^4(y) &= h_1 + 3h_2 + h_3 + h_4 - y \\
\gamma_6^4(y) &= h_1 + 3h_3 + h_2 + h_4 - y & \bar{\gamma}_6^4(y) &= h_1 + h_2 - h_3 + h_4 + y \\
\gamma_7^4(y) &= 3h_1 + h_2 + h_3 + h_4 - y & \bar{\gamma}_7^4(y) &= h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + y \\
\gamma_8^4(y) &= y & \bar{\gamma}_8^4(y) &= 2h_1 + 2h_2 + 2h_3 + 2h_4 - y
\end{aligned} \tag{A.4}$$

$$\gamma_0^1 = \gamma_1^1 = \gamma_2^1 = \gamma_3^1 = \gamma_4^1 = \gamma_5^1 = \gamma_6^1 = \frac{1}{2}$$

$$\bar{\gamma}_0^1 = \bar{\gamma}_1^1 = \bar{\gamma}_2^1 = \bar{\gamma}_3^1 = \bar{\gamma}_4^1 = \bar{\gamma}_5^1 = \bar{\gamma}_6^1 = -\frac{1}{2}$$

$$\gamma_-^1 = -1 \quad \gamma_+^1 = 1$$

$$\gamma_1^2 = \gamma_2^2 = \gamma_3^2 = \gamma_3^2 = \gamma_3^2 = \gamma_3^2 = \gamma_4^2 = -\frac{1}{2}$$

$$\gamma_5^2 = \frac{1}{2} \quad \bar{\gamma}_5^2 = -\frac{1}{2}$$

$$\bar{\gamma}_1^2 = \bar{\gamma}_2^2 = \bar{\gamma}_3^2 = \bar{\gamma}_4^2 = \frac{1}{2}$$

$$\gamma_6^2 = \gamma_-^2 = -1 \quad \gamma_+^2 = \bar{\gamma}_6^2 = 1$$

$$\gamma_1^3 = \gamma_2^3 = -\frac{1}{2} \quad \gamma_3^3 = \gamma_4^3 = \gamma_5^3 = -1$$

$$\bar{\gamma}_1^3 = \bar{\gamma}_2^3 = \frac{1}{2} \quad \bar{\gamma}_3^3 = \bar{\gamma}_4^3 = \bar{\gamma}_5^3 = 1$$

$$\gamma_-^3 = \gamma_6^3 = 1 \quad \gamma_+^3 = \bar{\gamma}_6^3 = -1$$

$$\gamma_0^4 = \gamma_1^4 = \gamma_2^4 = \gamma_6^4 = \gamma_7^4 = -1 \quad \gamma_3^4 = \gamma_4^4 = \gamma_5^4 = \gamma_8^4 = 1$$

$$\bar{\gamma}_0^4 = \bar{\gamma}_1^4 = \bar{\gamma}_2^4 = \bar{\gamma}_4^4 = \bar{\gamma}_6^4 = \bar{\gamma}_7^4 = 1 \quad \bar{\gamma}_3^4 = \bar{\gamma}_5^4 = \bar{\gamma}_8^4 = -1$$

$$\Psi_0^{11} \left( \frac{e^{-\alpha_0^{11} \sqrt{s}}}{s} \right) = \sum_{i=0}^6 2g_i \frac{e^{-2\gamma_i^1(h_1)\sqrt{s}} - e^{-2\bar{\gamma}_i^1(h_1)\sqrt{s}}}{s} - \sum_{i=1}^4 2g_i \frac{e^{-2\gamma_i^2(h_2)\sqrt{s}} - e^{-2\bar{\gamma}_i^2(h_2)\sqrt{s}}}{s} \quad (\text{A.6})$$

$$\Psi_1^{11} \left( \frac{e^{-\alpha_1^{11} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) = -4g_8^4 \frac{e^{-\gamma_8^4(h_4)\sqrt{s}} + e^{-\bar{\gamma}_8^4(h_4)\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}}$$

$$\Psi_2^{11} \left( \frac{e^{-\alpha_2^{11} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) = \left[ 2g_7 \frac{e^{-\gamma_-^1(h_1)\sqrt{s}} + e^{-\bar{\gamma}_+^1(h_1)\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} - 4g_5^2 \frac{e^{-\gamma_-^2(h_2)\sqrt{s}} + e^{-\bar{\gamma}_+^2(h_2)\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} - \right. \\ \left. - 4g_6^2 \frac{e^{-\gamma_6^2(h_2)\sqrt{s}} - e^{-\bar{\gamma}_6^2(h_2)\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} - \sum_{i=0}^7 g_i^4 \frac{e^{-\gamma_i^4(h_4)\sqrt{s}} - e^{-\bar{\gamma}_i^4(h_4)\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right]$$

$$\Psi_3^{11} \left( \frac{e^{-\alpha_3^{11} \sqrt{s}}}{s} \right) = 2 \sum_{i=1}^4 g_i \frac{e^{-2\gamma_i^2(h_2)\sqrt{s}} - e^{-2\bar{\gamma}_i^2(h_2)\sqrt{s}}}{s}$$

(A.5);

$$\Psi_4^{11} \left( \frac{e^{-\alpha_4^{11} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) = -4g_8^4 \frac{e^{-\gamma_8^4(h_4)\sqrt{s}} + e^{-\bar{\gamma}_8^4(h_4)\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}}$$

$$\Psi_5^{11} \left( \frac{e^{-\alpha_5^{11} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) = 4g_5^2 \frac{e^{-\gamma_5^2(h_2)\sqrt{s}} + e^{-\bar{\gamma}_5^2(h_2)\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} + 4g_6^2 \frac{e^{-\gamma_6^2(h_2)\sqrt{s}} - e^{-\bar{\gamma}_6^2(h_2)\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} - \sum_{i=0}^7 g_i^4 \frac{e^{-\gamma_i^4(h_4)\sqrt{s}} - e^{-\bar{\gamma}_i^4(h_4)\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}}$$

$$\Psi_6^{11} \left( \frac{e^{-\alpha_6^{11} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) = 4g_8^4 \frac{e^{-\gamma_8^4(h)\sqrt{s}} + e^{-\bar{\gamma}_8^4(h)\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \quad \Psi_7^{11} \left( \frac{e^{-\alpha_7^{11} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) = \sum_{i=0}^7 g_i^4 \frac{e^{-\gamma_i^4(h)\sqrt{s}} - e^{-\bar{\gamma}_i^4(h)\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}}$$

$$\Psi_8^{11} \left( \frac{e^{-\alpha_8^{11} \sqrt{s}}}{s} \right) = 2 \sum_{i=0}^6 g_i \frac{e^{-2\gamma_i^1(0)\sqrt{s}} - e^{-2\bar{\gamma}_i^1(0)\sqrt{s}}}{s} \quad \Psi_9^{11} \left( \frac{e^{-\alpha_9^{11} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) = 2g_7 \frac{e^{-\gamma_7^1(0)\sqrt{s}} + e^{-\bar{\gamma}_7^1(0)\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}}$$

$$\Psi_{10}^{11} \left( \frac{e^{-\alpha_{10}^{11} \sqrt{s}}}{s} \right) = \sum_{i=0}^6 g_i \frac{e^{-2\gamma_i^1(y)\sqrt{s}} - e^{-2\bar{\gamma}_i^1(y)\sqrt{s}}}{s} \quad \Psi_{11}^{11} \left( \frac{e^{-\alpha_{11}^{11} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) = g_7 \frac{e^{-\gamma_7^1(y)\sqrt{s}} + e^{-\bar{\gamma}_7^1(y)\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}}$$

$$\Psi_0^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_0^{21} \sqrt{s}}}{s} \right) = \sum_{i=0}^6 g_i \frac{e^{-2\gamma_i^1(0)\sqrt{s}} - e^{-2\bar{\gamma}_i^1(0)\sqrt{s}}}{s} \quad \Psi_1^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_1^{21} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) = g_7 \frac{e^{-\gamma_7^1(0)\sqrt{s}} + e^{-\bar{\gamma}_7^1(0)\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}}$$

$$\Psi_2^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_2^{21} \sqrt{s}}}{s} \right) = 2 \sum_{i=1}^4 g_i \frac{e^{-2\gamma_i^2(h_2)\sqrt{s}} - e^{-2\bar{\gamma}_i^2(h_2)\sqrt{s}}}{s} - 2 \sum_{i=0}^6 g_i \frac{e^{-2\gamma_i^1(h_1)\sqrt{s}} - e^{-2\bar{\gamma}_i^1(h_1)\sqrt{s}}}{s} \Big]$$

$$\Psi_3^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_3^{21} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) = 4g_8^4 \frac{\left( e^{-\gamma_8^4(h_4)\sqrt{s}} + e^{-\bar{\gamma}_8^4(h_4)\sqrt{s}} \right)}{s\sqrt{s}}$$

$$\Psi_4^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_4^{21} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) = 4g_5^2 \frac{e^{-\gamma_5^2(h_2)\sqrt{s}} + e^{-\bar{\gamma}_5^2(h_2)\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} + 4g_6^2 \frac{e^{-\gamma_6^2(h_2)\sqrt{s}} - e^{-\bar{\gamma}_6^2(h_2)\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} +$$

$$+ \sum_{i=0}^7 g_i^4 \frac{\left( e^{-\gamma_i^4(h_4)\sqrt{s}} - e^{-\bar{\gamma}_i^4(h_4)\sqrt{s}} \right)}{s\sqrt{s}} - 2g_7 \frac{e^{-\gamma_7^1(h_1)\sqrt{s}} + e^{-\bar{\gamma}_7^1(h_1)\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}}$$

$$\Psi_5^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_5^{21} \sqrt{s}}}{s} \right) = -2 \sum_{i=1}^4 g_i \frac{e^{-2\gamma_i^2(h_2)\sqrt{s}} - e^{-2\bar{\gamma}_i^2(h_2)\sqrt{s}}}{s}$$

$$\Psi_6^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_6^{21} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) = 4g_8^4 \frac{\left( e^{-\gamma_8^4(h_4)\sqrt{s}} + e^{-\bar{\gamma}_8^4(h_4)\sqrt{s}} \right)}{s\sqrt{s}}$$

$$\Psi_7^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_7^{21} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) = \sum_{i=0}^7 g_i^4 \frac{\left( e^{-\gamma_i^4(h_4)\sqrt{s}} - e^{-\bar{\gamma}_i^4(h_4)\sqrt{s}} \right)}{s\sqrt{s}} +$$

$$+ 4g_5^2 \frac{e^{-\gamma_-^2(h_2)\sqrt{s}} + e^{-\bar{\gamma}_+^2(h_2)\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} + 4g_6^2 \frac{e^{-\gamma_6^2(h_2)\sqrt{s}} - e^{-\bar{\gamma}_6^2(h_2)\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}}$$

$$\Psi_8^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_8^{21} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) = 4g_8^4 \frac{\left( e^{-\gamma_8^4(h)\sqrt{s}} + e^{-\bar{\gamma}_8^4(h)\sqrt{s}} \right)}{s\sqrt{s}}$$

$$\Psi_9^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_9^{21} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) = \sum_{i=0}^7 g_i^4 \frac{\left( e^{-\gamma_i^4(h)\sqrt{s}} - e^{-\bar{\gamma}_i^4(h)\sqrt{s}} \right)}{s\sqrt{s}}$$

$$\Psi_{10}^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_{10}^{21} \sqrt{s}}}{s} \right) = 2 \sum_{i=1}^4 g_i \frac{e^{-2\gamma_i^2(h_2)\sqrt{s}} - e^{-2\bar{\gamma}_i^2(h_2)\sqrt{s}}}{s}$$

$$\Psi_{11}^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_{11}^{21} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) = 4g_8^4 \frac{\left( e^{-\gamma_8^4(h_4)\sqrt{s}} + e^{-\bar{\gamma}_8^4(h_4)\sqrt{s}} \right)}{s\sqrt{s}}$$

$$\Psi_{12}^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_{12}^{21} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) = \sum_{i=0}^7 g_i^4 \frac{\left( e^{-\gamma_i^4(h_4)\sqrt{s}} - e^{-\bar{\gamma}_i^4(h_4)\sqrt{s}} \right)}{s\sqrt{s}} - 4g_5^2 \frac{e^{-\gamma_-^2(h_2)\sqrt{s}} + e^{-\bar{\gamma}_+^2(h_2)\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}}$$

$$- 4g_6^2 \frac{e^{-\gamma_6^2(h_2)\sqrt{s}} - e^{-\bar{\gamma}_6^2(h_2)\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}}$$

$$\Psi_{13}^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_{13}^{21} \sqrt{s}}}{s} \right) = \sum_{i=0}^6 g_i \frac{e^{-2\gamma_i^1(y)\sqrt{s}} - e^{-2\bar{\gamma}_i^1(y)\sqrt{s}}}{s} \quad \Psi_{14}^{21} \left( \frac{e^{-\alpha_{14}^{21} \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) = g_7 \frac{e^{-\gamma_-^1(y)\sqrt{s}} + e^{-\bar{\gamma}_+^1(y)\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}}$$

$$\Phi_m = e^{-s\lambda_m} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ e^{-s[2(h_1+h_2)+\lambda_m k]} - e^{-s(2h_1+\lambda_m k)} + e^{-s(2h_2+\lambda_m k)} + 2e^{-s[4(h_1+h_2)+\lambda_m k]} \right]^k$$



$$\begin{aligned}
\lambda_1^1 &= h_1 - y; \quad \lambda_2^1 = h_1 + h_2 + 2h_3 - y; \quad \lambda_3^1 = 3h_1 + 2h_2 + 2h_3 - y; \quad \lambda_4^1 = h_1 + h_2 + h_3 - y; \\
\lambda_5^1 &= 2h_1 - y; \quad \lambda_6^1 = 2(h_1 + h_2) - y; \quad \lambda_7^1 = 3h_1 + 2h_2 + h_3 - y; \quad \lambda_8^1 = y; \quad \lambda_9^1 = 2h_2 + y; \\
\lambda_{10}^1 &= h_1 + 2h_4 + y; \quad \lambda_{11}^1 = 3h_1 + 2h_2 + 2h_3 + y; \quad \lambda_{12}^1 = 2h_1 + 2h_2 + y; \\
\lambda_{13}^1 &= 2h_1 + 4h_2 + 2h_3 + y; \quad \lambda_{14}^1 = h_1 + 4h_2 + 2h_3 + y; \quad \lambda_{15}^1 = 3h_1 + 4h_2 + 2h_3 + y \\
\lambda_1^2 &= 2h_1 + 5h_2 + 2h_3 - y; \quad \lambda_2^2 = 5h_1 + 5h_2 + 2h_3 - y; \quad \lambda_3^2 = 4h_1 + 5h_2 + 2h_3 - y; \quad \lambda_4^2 = 2h_1 + 3h_2 - y; \\
\lambda_5^2 &= -2h_1 + 2h_2 + 3h_3 + 2h_4 - y; \quad \lambda_6^2 = 2h_1 - y; \quad \lambda_7^2 = 3h_2 - y; \quad \lambda_8^2 = 5h_1 + 5h_2 + 2h_3 - y; \\
\lambda_9^2 &= h_1 + 2h_2 + h_3 - y; \quad \lambda_{10}^2 = 3h_1 + 2h_2 + h_3 - y; \quad \lambda_{11}^2 = 4h_1 + 3h_2 + 2h_3 - y; \quad \lambda_{12}^2 = 2h_1 + 3h_2 + 2h_3 - y; \\
\lambda_{13}^2 &= h_1 + y; \quad \lambda_{14}^2 = 2h_2 + y; \quad \lambda_{15}^2 = 2h_1 + y; \quad \lambda_{16}^2 = 3h_1 + 2h_2 + h_3 + y; \quad \lambda_{17}^2 = 4h_1 + 3h_2 + 2h_3 + y. \\
\lambda_1^3 &= 2h_1 + 5h_2 + 2h_3 - y \quad \lambda_2^3 = 3h_1 + 5h_2 + 2h_3 - y \quad \lambda_3^3 = 4h_1 + 5h_2 + 2h_3 - y \quad \lambda_4^3 = 2h_1 + 3h_2 - y \\
\lambda_5^3 &= h_2 - y \quad \lambda_6^3 = 2h_1 + 2h_2 - y \quad \lambda_7^3 = 3h_2 - y \quad \lambda_8^3 = 3h_1 + 4h_2 + h_3 - y \quad \lambda_9^3 = h_1 + 2h_2 + h_3 - y \\
\lambda_{10}^3 &= 3h_1 + 2h_2 + h_3 - y \quad \lambda_{11}^3 = 4h_1 + 3h_2 + 2h_3 - y \quad \lambda_{12}^3 = 2h_1 + 3h_2 + 2h_3 - y \\
\lambda_{13}^3 &= 2h_1 - h_3 + y \quad \lambda_{14}^3 = -2h_3 + y \quad \lambda_{15}^3 = h_1 + 2h_2 - h_3 + y \quad \lambda_{16}^3 = 2h_2 - h_3 + y \\
\lambda_{17}^3 &= 2h_1 + 2h_2 - h_3 + y \quad \lambda_{18}^3 = 3h_1 + 3h_2 + y \quad \lambda_{19}^3 = 4h_1 + 4h_2 + 3h_3 + y
\end{aligned} \tag{A.7}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_1^4 &= h_1 - y; \quad \lambda_2^4 = h_1 + h_2 + 2h_3 - y; \quad \lambda_3^4 = 3h_1 + 2h_2 + 2h_3 - y; \quad \lambda_4^4 = h_1 + h_2 + h_3 - y; \\
\lambda_5^4 &= 2h_1 - y; \quad \lambda_6^4 = 2(h_1 + h_2) - y; \quad \lambda_7^4 = 3h_1 + 2h_2 + h_3 - y; \quad \lambda_8^4 = y; \quad \lambda_9^4 = 2h_2 + y; \\
\lambda_{10}^4 &= h_1 + 2h_4 + y; \quad \lambda_{11}^4 = 3h_1 + 2h_2 + 2h_3 + y; \quad \lambda_{12}^4 = 2h_1 + 2h_2 + y; \\
\lambda_{13}^4 &= 2h_1 + 4h_2 + 2h_3 + y; \quad \lambda_{14}^4 = h_1 + 4h_2 + 2h_3 + y; \quad \lambda_{15}^4 = 3h_1 + 4h_2 + 2h_3 + y.
\end{aligned}$$

Трансформанты (A.8):

$$\begin{aligned}
&\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s} \frac{1}{2(s-1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} \frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)}{4} - \\
&\frac{\operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)}{2} + \frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)}{4} = Q_1^1(t, y, \lambda, \alpha)
\end{aligned}$$

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \frac{1}{2(s-1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} \frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)}{4} -$$

$$-\frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)}{4} + \frac{\operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) a}{2} - \sqrt{\frac{t-\lambda}{\pi}} e^{-\frac{a^2}{4(t-\lambda)}} = Q_2^1(t, y, \lambda, \alpha)$$

$$\frac{s-2}{2\gamma s(s-1)} \frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} -\frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)}{4\gamma} -$$

$$-\frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)}{4\gamma} - \frac{\sqrt{\frac{t-\lambda}{\pi}} \alpha e^{-\frac{(\alpha)^2}{4(t-\lambda)}}}{\gamma} +$$

$$+ \frac{\operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) \left((\alpha)^2 + \gamma + 2(t-\lambda) + 1\right)}{2\gamma} = Q_3^1(t, y, \lambda, \alpha)$$

$$\frac{s-2}{2\gamma s(s-1)} \frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} \frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)}{4\gamma} -$$

$$-\frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)}{4\gamma} - \frac{\operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) \alpha \left((\alpha)^2 + 6(t-\lambda) + 3\right)}{6\gamma} +$$

$$+ \frac{\sqrt{\frac{t-\lambda}{\pi}} \alpha e^{-\frac{(\alpha)^2}{4(t-\lambda)}} \left((\alpha)^2 + 4(t-\lambda) + 3\right)}{3\gamma} = Q_4^1(t, y, \lambda, \alpha)$$

$$\frac{2+s(\gamma-1)}{2\gamma(s-1)} \frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} -\frac{\operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)}{\gamma} +$$

$$+ \frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) (\gamma+1)}{4\gamma} + \frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) (\gamma+1)}{4\gamma} = Q_5^1(t, y, \lambda, \alpha)$$

$$\frac{2 + s(\gamma - 1)}{2\gamma(s - 1)} \frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} \frac{\operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)a}{\gamma} - \frac{2\sqrt{\frac{t-\lambda}{\pi}} e^{-\frac{a^2}{4(t-\lambda)}}}{\gamma} +$$

$$+ \frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma+1)}{4\gamma} - \frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma+1)}{4\gamma} = Q_6^1(t, y, \lambda, \alpha)$$

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s} \xrightarrow{\text{invLaplace}} \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) = Q_7^1(t, y, \lambda, \alpha)$$

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \xrightarrow{\text{invLaplace}} -\alpha \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) + 2\sqrt{\frac{t-\lambda}{\pi}} e^{-\frac{a^2}{4(t-\lambda)}} = Q_8^1(t, y, \lambda, \alpha)$$

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s} \frac{2 + (\gamma - 1)s}{2\gamma s(s - 1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} \frac{\sqrt{\frac{t-\lambda}{\pi}} \alpha e^{-\frac{(\alpha)^2}{4(t-\lambda)}}}{\gamma} +$$

$$+ \frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma+1)}{4\gamma} + \frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma+1)}{4\gamma} -$$

$$\frac{\operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)\left((\alpha)^2 + \gamma + 2(t-\lambda) + 1\right)}{2\gamma} = Q_1^2(t, y, \lambda, \alpha)$$

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \frac{2 + (\gamma - 1)s}{2\gamma s(s - 1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} \frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma+1)}{4\gamma} +$$

$$+ \frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma+1)}{4\gamma} + \frac{\operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)a\left((\alpha)^2 + 3\gamma + 6(t-\lambda) + 3\right)}{6\gamma} -$$

$$\frac{\sqrt{\frac{t-\lambda}{\pi}} e^{-\frac{a^2}{4(t-\lambda)}}\left((\alpha)^2 + 3\gamma + 4(t-\lambda) + 3\right)}{3\gamma} = Q_2^2(t, y, \lambda, \alpha)$$

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s} \frac{4s\gamma}{2\gamma s(s-1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) - 2\operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) +$$

$$+ e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) = Q_3^2(t, y, \lambda, \alpha)$$

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \frac{4s\gamma}{2\gamma s(s-1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} -e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) +$$

$$+ e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) + 2a \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) - 4\sqrt{\frac{t-\lambda}{\pi}} a e^{-\frac{a^2}{4(t-\lambda)}} = Q_4^2(t, y, \lambda, \alpha)$$

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s} \frac{(3+\gamma)s-6}{2\gamma s(s-1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} -\frac{3\sqrt{\frac{t-\lambda}{\pi}} a e^{-\frac{a^2}{4(t-\lambda)}}}{\gamma} +$$

$$+ \frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma-3)}{4\gamma} + \frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma-3)}{4\gamma} +$$

$$+ \frac{\operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(3(\alpha)^2 - \gamma + 6(t-\lambda) + 3)}{2\gamma} = Q_5^2(t, y, \lambda, \alpha)$$

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \frac{(3+\gamma)s-6}{2\gamma s(s-1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} -\frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma-3)}{4\gamma} -$$

$$- \frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma-3)}{4\gamma} - \frac{\operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)a((\alpha)^2 - \gamma + 6(t-\lambda) + 3)}{2\gamma} +$$

$$+ \frac{\sqrt{\frac{t-\lambda}{\pi}} a e^{-\frac{a^2}{4(t-\lambda)}} ((\alpha)^2 - \gamma + 4(t-\lambda) + 3)}{\gamma} = Q_6^2(t, y, \lambda, \alpha)$$

$$\begin{aligned} & \frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s} \frac{2-s(\gamma+1)}{2\gamma s(s-1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} \frac{\sqrt{\frac{t-\lambda}{\pi}} a e^{-\frac{a^2}{4(t-\lambda)}}}{\gamma} + \\ & + \frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma-1)}{4\gamma} - \frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma-1)}{4\gamma} - \\ & - \frac{\operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)\left((\alpha)^2 - \gamma + 2(t-\lambda) + 1\right)}{2\gamma} = Q_7^2(t, y, \lambda, \alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \frac{2-s(\gamma+1)}{2\gamma s(s-1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} - \frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma-1)}{4\gamma} + \\ & + \frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma-1)}{4\gamma} + \frac{\operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) a \left((\alpha)^2 + 3\gamma - 6(t-\lambda) + 3\right)}{6\gamma} - \\ & - \frac{\sqrt{\frac{t-\lambda}{\pi}} a e^{-\frac{a^2}{4(t-\lambda)}} \left((\alpha)^2 - 3\gamma + 4(t-\lambda) + 3\right)}{3\gamma} = Q_8^2(t, y, \lambda, \alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \frac{(s-2)}{2\gamma s(s-1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} \frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)}{4\gamma} + \\ & + \frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)}{4\gamma} - \frac{\operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) a \left((\alpha)^2 + 6(t-\lambda) + 3\right)}{6\gamma} + \\ & + \frac{\sqrt{\frac{t-\lambda}{\pi}} a e^{-\frac{a^2}{4(t-\lambda)}} \left((\alpha)^2 + 4(t-\lambda) + 3\right)}{3\gamma} = Q_9^2(t, y, \lambda, \alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s} \frac{1}{s-1} \xrightarrow{\text{invLaplace}} -\operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) + \\ & + \frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)}{2} + \frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)}{2} = Q_{10}^2(t, y, \lambda, \alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s} \frac{2+(\gamma-1)s}{2\gamma s(s-1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} \frac{\sqrt{\frac{t-\lambda}{\pi}} \alpha e^{-\frac{(\alpha)^2}{4(t-\lambda)}}}{\gamma} + \\ & + \frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma+1)}{4\gamma} + \frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma+1)}{4\gamma} - \\ & - \frac{\operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)\left((\alpha)^2 + \gamma + 2(t-\lambda) + 1\right)}{2\gamma} = Q_1^3(t, y, \lambda, \alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \frac{2+(\gamma-1)s}{2\gamma s(s-1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} \frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma+1)}{4\gamma} + \\ & + \frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma+1)}{4\gamma} + \frac{\operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)a\left((\alpha)^2 + 3\gamma + 6(t-\lambda) + 3\right)}{6\gamma} - \\ & - \frac{\sqrt{\frac{t-\lambda}{\pi}} e^{-\frac{a^2}{4(t-\lambda)}}\left((\alpha)^2 + 3\gamma + 4(t-\lambda) + 3\right)}{3\gamma} = Q_2^3(t, y, \lambda, \alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s} \frac{4s\gamma}{2\gamma s(s-1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) - 2\operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) + \\ & + e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) = Q_3^3(t, y, \lambda, \alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \frac{4s\gamma}{2\gamma s(s-1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} -e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) + \\ & + e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) + 2a\operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) - \\ & - 4\sqrt{\frac{t-\lambda}{\pi}} a e^{-\frac{a^2}{4(t-\lambda)}} = Q_4^3(t, y, \lambda, \alpha) \end{aligned}$$

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s} \frac{(3+\gamma)s}{2\gamma s(s-1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} \frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(3+\gamma)}{4\gamma} +$$

$$+ \frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(3+\gamma)}{4\gamma} - \frac{\operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(3+\gamma)}{2\gamma} = Q_5^3(t, y, \lambda, \alpha)$$

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \frac{(3+\gamma)s}{2\gamma s(s-1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} -\frac{\sqrt{\frac{t-\lambda}{\pi}} a e^{-\frac{a^2}{4(t-\lambda)}} (3+\gamma)}{\gamma} +$$

$$+ \frac{\operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) a (3+\gamma)}{2\gamma} + \frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(3+\gamma)}{4\gamma} -$$

$$- \frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(3+\gamma)}{4\gamma} = Q_6^3(t, y, \lambda, \alpha)$$

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \frac{(\gamma-1)s}{2\gamma s(s-1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} -\frac{\sqrt{\frac{t-\lambda}{\pi}} e^{-\frac{a^2}{4(t-\lambda)}} (\gamma-1)}{\gamma} +$$

$$+ \frac{\operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) a (\gamma-1)}{2\gamma} + \frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma-1)}{4\gamma} -$$

$$- \frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma-1)}{4\gamma} = Q_7^3(t, y, \lambda, \alpha)$$

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s} \frac{(\gamma+1)s}{2\gamma s(s-1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} \frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma+1)}{4\gamma} + \frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma+1)}{4\gamma} - \frac{\operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma+1)}{2\gamma} = Q_8^3(t, y, \lambda, \alpha)$$

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \frac{(\gamma+1)s}{2\gamma s(s-1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} -\frac{\sqrt{\frac{t-\lambda}{\pi}} a e^{-\frac{a^2}{4(t-\lambda)}} (\gamma+1)}{\gamma} + \frac{\operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma+1)}{2\gamma} + \frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma+1)}{4\gamma} - \frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma+1)}{4\gamma} = Q_9^3(t, y, \lambda, \alpha)$$

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) = Q_{10}^3(t, y, \lambda, \alpha)$$

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} -\alpha \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) + 2\sqrt{\frac{t-\lambda}{\pi}} e^{-\frac{a^2}{4(t-\lambda)}} = Q_{11}^3(t, y, \lambda, \alpha)$$

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s} \frac{2-s(\gamma+1)}{2\gamma s(s-1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} \frac{\sqrt{\frac{t-\lambda}{\pi}} a e^{-\frac{a^2}{4(t-\lambda)}}}{\gamma} + \frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma-1)}{4\gamma} - \frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma-1)}{4\gamma} - \frac{\operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)\left((\alpha)^2 - \gamma + 2(t-\lambda) + 1\right)}{2\gamma} = Q_{12}^3(t, y, \lambda, \alpha)$$



$$\begin{aligned}
& \frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \frac{2-s(\gamma+1)}{2\gamma s(s-1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} \frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma-1)}{4\gamma} + \\
& + \frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma-1)}{4\gamma} + \frac{\operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) a\left((\alpha)^2 + 3\gamma - 6(t-\lambda) + 3\right)}{6\gamma} - \\
& - \frac{\sqrt{\frac{t-\lambda}{\pi}} a e^{-\frac{a^2}{4(t-\lambda)}} \left((\alpha)^2 - 3\gamma + 4(t-\lambda) + 3\right)}{3\gamma} = Q_{13}^3(t, y, \lambda, \alpha)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \frac{(s-2)}{2\gamma s(s-1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} \frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)}{4\gamma} + \\
& + \frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)}{4\gamma} - \frac{\operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) a\left((\alpha)^2 + 6(t-\lambda) + 3\right)}{6\gamma} + \\
& + \frac{\sqrt{\frac{t-\lambda}{\pi}} a e^{-\frac{a^2}{4(t-\lambda)}} \left((\alpha)^2 + 4(t-\lambda) + 3\right)}{3\gamma} = Q_{14}^3(t, y, \lambda, \alpha)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{e^{-\alpha\sqrt{s}} (s(\gamma+1)+2)}{s \quad 2\gamma s(s-1)} \xrightarrow{\text{invLaplace}} \frac{\sqrt{\frac{t-\lambda}{\pi}} e^{-\frac{a^2}{4(t-\lambda)}}}{\gamma} + \\
& + \frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma+3)}{4\gamma} + \frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma+3)}{4\gamma} - \\
& - \frac{\operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)\left((\alpha)^2 + \gamma + 2(t-\lambda) + 3\right)}{2\gamma} = Q_{15}^3(t, y, \lambda, \alpha) \\
& \frac{e^{-\alpha\sqrt{s}} (s(\gamma+1)+2)}{s\sqrt{s} \quad 2\gamma s(s-1)} \xrightarrow{\text{invLaplace}} \frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma+3)}{4\gamma} - \\
& - \frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma+3)}{4\gamma} + \frac{\operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)\alpha\left((\alpha)^2 + 3\gamma + 6(t-\lambda) + 9\right)}{6\gamma} - \\
& - \frac{\sqrt{\frac{t-\lambda}{\pi}} e^{-\frac{a^2}{4(t-\lambda)}}\left((\alpha)^2 + 3\gamma + 4(t-\lambda) + 9\right)}{3\gamma} = Q_{16}^3(t, y, \lambda, \alpha) \\
& \frac{e^{-\alpha\sqrt{s}} (s-2)}{s \quad 2\gamma s(s-1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} \frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)}{4\gamma} - \\
& - \frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)}{4\gamma} - \frac{4\sqrt{\frac{t-\lambda}{\pi}} e^{-\frac{a^2}{4(t-\lambda)}}}{4\gamma} + \\
& + \frac{\operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)\left((\alpha)^2 + 2(t-\lambda) + 1\right)}{2\gamma} = Q_{17}^3(t, y, \lambda, \alpha)
\end{aligned}$$

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s} \frac{1}{s-1} \xrightarrow{\text{invLaplace}} -\operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) + \frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)}{2} +$$

$$+ \frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)}{2} = Q_{18}^3(t, y, \lambda, \alpha)$$

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \frac{1}{(s-1)} \xrightarrow{\text{invLaplace}} a\operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) \alpha - 2\sqrt{\frac{t-\lambda}{\pi}} a e^{-\frac{a^2}{4(t-\lambda)}} -$$

$$- \frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)}{2} + \frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)}{2} = Q_{19}^3(t, y, \lambda, \alpha)$$

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s} \frac{2+(\gamma-1)s}{2\gamma s(s-1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} \frac{\sqrt{\frac{t-\lambda}{\pi}} \alpha e^{-\frac{(\alpha)^2}{4(t-\lambda)}}}{\gamma} +$$

$$+ \frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) (\gamma+1)}{4\gamma} + \frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) (\gamma+1)}{4\gamma} -$$

$$- \frac{\operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) \left((\alpha)^2 + \gamma + 2(t-\lambda) + 1\right)}{2\gamma} = Q_1^4(t, y, \lambda, \alpha)$$

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \frac{2+(\gamma-1)s}{2\gamma s(s-1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} \frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) (\gamma+1)}{4\gamma} +$$

$$+ \frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) (\gamma+1)}{4\gamma} + \frac{\operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) a \left((\alpha)^2 + 3\gamma + 6(t-\lambda) + 3\right)}{6\gamma} -$$

$$- \frac{\sqrt{\frac{t-\lambda}{\pi}} e^{-\frac{a^2}{4(t-\lambda)}} \left((\alpha)^2 + 3\gamma + 4(t-\lambda) + 3\right)}{3\gamma} = Q_2^4(t, y, \lambda, \alpha)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \frac{(3\gamma+1)s-2}{2\gamma s(s-1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} \frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma+3)}{4\gamma} - \\
& \frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma+3)}{4\gamma} - \frac{\operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)\alpha\left((\alpha)^2-9\gamma+6(t-\lambda)-3\right)}{6\gamma} + \\
& + \frac{\sqrt{\frac{t-\lambda}{\pi}} e^{-\frac{a^2}{4(t-\lambda)}} \left((\alpha)^2-9\gamma+4(t-\lambda)-9\right)}{3\gamma} = Q_3^4(t, y, \lambda, \alpha)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s} \frac{s(\gamma+1)+2}{2\gamma s(s-1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} \frac{\sqrt{\frac{t-\lambda}{\pi}} e^{-\frac{a^2}{4(t-\lambda)}}}{\gamma} + \\
& + \frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma+3)}{4\gamma} + \frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma+3)}{4\gamma} - \\
& - \frac{\operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)\left((\alpha)^2+\gamma+2(t-\lambda)+3\right)}{2\gamma} = Q_4^4(t, y, \lambda, \alpha)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \frac{s(\gamma+1)+2}{2\gamma s(s-1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} \frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma+3)}{4\gamma} - \\
& - \frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma+3)}{4\gamma} + \frac{\operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)\alpha\left((\alpha)^2+3\gamma+6(t-\lambda)+9\right)}{6\gamma} - \\
& - \frac{\sqrt{\frac{t-\lambda}{\pi}} e^{-\frac{a^2}{4(t-\lambda)}} \left((\alpha)^2+3\gamma+4(t-\lambda)+9\right)}{3\gamma} = Q_5^4(t, y, \lambda, \alpha)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \frac{(s-2)}{2\gamma s(s-1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} \frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)}{4\gamma} + \\
& + \frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)}{4\gamma} - \frac{\operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) a \left( (\alpha)^2 + 6(t-\lambda) + 3 \right)}{6\gamma} + \\
& + \frac{\sqrt{\frac{t-\lambda}{\pi}} a e^{-\frac{a^2}{4(t-\lambda)}} \left( (\alpha)^2 + 4(t-\lambda) + 3 \right)}{3\gamma} = Q_6^4(t, y, \lambda, \alpha)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s} \frac{4s\gamma}{2\gamma s(s-1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) - 2\operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) + \\
& + e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) = Q_7^4(t, y, \lambda, \alpha)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \frac{4s\gamma}{2\gamma s(s-1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} -e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) + \\
& + e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) + 2a \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) - \\
& - 4\sqrt{\frac{t-\lambda}{\pi}} a e^{-\frac{a^2}{4(t-\lambda)}} = Q_8^4(t, y, \lambda, \alpha)
\end{aligned}$$

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} -\alpha \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) + 2\sqrt{\frac{t-\lambda}{\pi}} e^{-\frac{a^2}{4(t-\lambda)}} = Q_9^4(t, y, \lambda, \alpha)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \frac{1}{(s-1)} \xrightarrow{\text{invLaplace}} a \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) \alpha - 2\sqrt{\frac{t-\lambda}{\pi}} a e^{-\frac{a^2}{4(t-\lambda)}} - \\
& - \frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)}{2} + \frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)}{2} = Q_{10}^4(t, y, \lambda, \alpha)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s} \frac{2 + (\gamma - 1)s}{2\gamma s(s-1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} \frac{\sqrt{\frac{t-\lambda}{\pi}} \alpha e^{-\frac{(\alpha)^2}{4(t-\lambda)}}}{\gamma} + \\
& + \frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma+1)}{4\gamma} + \frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma+1)}{4\gamma} - \\
& - \frac{\operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)\left((\alpha)^2 + \gamma + 2(t-\lambda) + 1\right)}{2\gamma} = Q_1^4(t, y, \lambda, \alpha)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \frac{2 + (\gamma - 1)s}{2\gamma s(s-1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} \frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma+1)}{4\gamma} + \\
& + \frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma+1)}{4\gamma} + \frac{\operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)a\left((\alpha)^2 + 3\gamma + 6(t-\lambda) + 3\right)}{6\gamma} - \\
& - \frac{\sqrt{\frac{t-\lambda}{\pi}} e^{-\frac{a^2}{4(t-\lambda)}}\left((\alpha)^2 + 3\gamma + 4(t-\lambda) + 3\right)}{3\gamma} = Q_2^4(t, y, \lambda, \alpha)
\end{aligned}$$

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \frac{(3\gamma+1)s-2}{2\gamma s(s-1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} \frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma+3)}{4\gamma} -$$

$$\frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma+3)}{4\gamma} - \frac{\operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)\alpha\left((\alpha)^2-9\gamma+6(t-\lambda)-3\right)}{6\gamma} +$$

$$+ \frac{\sqrt{\frac{t-\lambda}{\pi}} e^{-\frac{a^2}{4(t-\lambda)}} \left((\alpha)^2-9\gamma+4(t-\lambda)-9\right)}{3\gamma} = Q_3^4(t, y, \lambda, \alpha)$$

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s} \frac{s(\gamma+1)+2}{2\gamma s(s-1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} \frac{\sqrt{\frac{t-\lambda}{\pi}} e^{-\frac{a^2}{4(t-\lambda)}}}{\gamma} +$$

$$+ \frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma+3)}{4\gamma} + \frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma+3)}{4\gamma} -$$

$$- \frac{\operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)\left((\alpha)^2+\gamma+2(t-\lambda)+3\right)}{2\gamma} = Q_4^4(t, y, \lambda, \alpha)$$

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \frac{s(\gamma+1)+2}{2\gamma s(s-1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} \frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma+3)}{4\gamma} -$$

$$\frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma+3)}{4\gamma} + \frac{\operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)\alpha\left((\alpha)^2+3\gamma+6(t-\lambda)+9\right)}{6\gamma} -$$

$$- \frac{\sqrt{\frac{t-\lambda}{\pi}} e^{-\frac{a^2}{4(t-\lambda)}} \left((\alpha)^2+3\gamma+4(t-\lambda)+9\right)}{3\gamma} = Q_5^4(t, y, \lambda, \alpha)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \frac{(s-2)}{2\gamma s(s-1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} \frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)}{4\gamma} + \\
& + \frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)}{4\gamma} - \frac{\operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) a \left( (\alpha)^2 + 6(t-\lambda) + 3 \right)}{6\gamma} + \\
& + \frac{\sqrt{\frac{t-\lambda}{\pi}} a e^{-\frac{a^2}{4(t-\lambda)}} \left( (\alpha)^2 + 4(t-\lambda) + 3 \right)}{3\gamma} = Q_6^4(t, y, \lambda, \alpha)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s} \frac{4s\gamma}{2\gamma s(s-1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) - 2\operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) + \\
& + e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) = Q_7^4(t, y, \lambda, \alpha)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \frac{4s\gamma}{2\gamma s(s-1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} -e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) + \\
& + e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) + 2a \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) - \\
& - 4\sqrt{\frac{t-\lambda}{\pi}} a e^{-\frac{a^2}{4(t-\lambda)}} = Q_8^4(t, y, \lambda, \alpha)
\end{aligned}$$

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} -\alpha \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) + 2\sqrt{\frac{t-\lambda}{\pi}} e^{-\frac{a^2}{4(t-\lambda)}} = Q_9^4(t, y, \lambda, \alpha)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \frac{1}{(s-1)} \xrightarrow{\text{invLaplace}} a \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) \alpha - 2\sqrt{\frac{t-\lambda}{\pi}} a e^{-\frac{a^2}{4(t-\lambda)}} - \\
& - \frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)}{2} + \frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)}{2} = Q_{10}^4(t, y, \lambda, \alpha)
\end{aligned}$$



$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s} \frac{\gamma s}{2(s-1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} \frac{\gamma e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)}{4} +$$

$$+ \frac{\gamma e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)}{4} = P_1^1(t, y, \lambda, \alpha)$$

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \frac{\gamma s}{2(s-1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} \gamma \frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)}{4} -$$

$$- \gamma \frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)}{4} = P_2^1(t, y, \lambda, \alpha)$$

$$\frac{s-2}{2(s-1)} \frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} - \frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)}{4} -$$

$$- \frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)}{4} + \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) = P_3^1(t, y, \lambda, \alpha)$$

$$\frac{s-2}{2(s-1)} \frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} - \frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)}{4} -$$

$$- \frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)}{4} - \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) \alpha + 2\sqrt{\frac{t-\lambda}{\pi}} \alpha e^{-\frac{(\alpha)^2}{4(t-\lambda)}} = P_4^1(t, y, \lambda, \alpha)$$

$$\frac{(2+s(\gamma-1))s}{2(s-1)} \frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} - \frac{\operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)}{\gamma} -$$

$$- \frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma-1)}{4\gamma} - \frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma-1)}{4\gamma} = P_5^1(t, y, \lambda, \alpha)$$

$$\begin{aligned} & \frac{(2+s(\gamma-1))s}{2(s-1)} \frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} \frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma-1)}{4\gamma} + \\ & + \frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma-1)}{4\gamma} + \frac{\operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)a(\alpha^2-3\gamma+6(t-\lambda)+3)}{6\gamma} - \\ & - \frac{\sqrt{\frac{t-\lambda}{\pi}} e^{-\frac{a^2}{4(t-\lambda)}} (\alpha^2-3\gamma+4(t-\lambda)+3)}{3\gamma} = P_6^1(t, y, \lambda, \alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\gamma}{s-1}-1\right) \frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s} \xrightarrow{\text{invLaplace}} \frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)\gamma}{2} - \frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)\gamma}{2} - \\ & - \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma+1) = P_7^1(t, y, \lambda, \alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\gamma}{s-1}-1\right) \frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \xrightarrow{\text{invLaplace}} \frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)\gamma}{2} - \frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)\gamma}{2} - \\ & - 2\sqrt{\frac{t-\lambda}{\pi}} e^{-\frac{a^2}{4(t-\lambda)}} (\gamma+1) + \alpha \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma+1) = P_8^1(t, y, \lambda, \alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s} \frac{2+(\gamma-1)s}{2(s-1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} -\operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) + \\ & + \frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma+1)}{4} + \\ & + \frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma+1)}{4} = P_1^2(t, y, \lambda, \alpha) \end{aligned}$$

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \frac{2+(\gamma-1)s}{2(s-1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} a \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) - 2\sqrt{\frac{t-\lambda}{\pi}} e^{\frac{a^2}{4(t-\lambda)}} +$$

$$+ \frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma+1)}{4} - \frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma+1)}{4} = P_2^2(t, y, \lambda, \alpha)$$

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s} \frac{2s\gamma}{(s-1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}}$$

$$\gamma \left[ e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) + e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) \right] = P_3^2(t, y, \lambda, \alpha)$$

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \frac{2s\gamma}{(s-1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}}$$

$$\gamma \left[ e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) - e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) \right] = P_4^2(t, y, \lambda, \alpha)$$

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s} \frac{(3+\gamma)s-6}{2(s-1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} 3 \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) +$$

$$+ \frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma-3)}{4} +$$

$$+ \frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma-3)}{4} = P_5^2(t, y, \lambda, \alpha)$$

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \frac{(3+\gamma)s-6}{2(s-1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} -3a \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) +$$

$$+ 6\sqrt{\frac{t-\lambda}{\pi}} a e^{\frac{a^2}{4(t-\lambda)}} + \frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma-3)}{4} -$$

$$- \frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma-3)}{4} = P_6^2(t, y, \lambda, \alpha)$$

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s} \frac{2-s(\gamma+1)}{2(s-1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} -\operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) -$$

$$\frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma-1)}{4} -$$

$$\frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma-1)}{4} = P_7^2(t, y, \lambda, \alpha)$$

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \frac{2-s(\gamma+1)}{2(s-1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) a -$$

$$-2\sqrt{\frac{t-\lambda}{\pi}} a e^{-\frac{a^2}{4(t-\lambda)}} - \frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma-1)}{4} +$$

$$+ \frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma-1)}{4} = P_8^2(t, y, \lambda, \alpha)$$

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \frac{(s-2)}{2(s-1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} -\frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)}{4} +$$

$$+ \frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)}{4} - \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) a + 2\sqrt{\frac{t-\lambda}{\pi}} a e^{-\frac{a^2}{4(t-\lambda)}} = P_9^2(t, y, \lambda, \alpha)$$

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s} \left(\frac{\gamma}{s-1} - 1\right) \xrightarrow{\text{invLaplace}} \frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)}{2} +$$

$$+ \frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)}{2} - \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma+1) = P_{10}^2(t, y, \lambda, \alpha)$$

$$-erfc\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) + \frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma+1)}{4} +$$

$$+ \frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma+1)}{4} = P_1^3(t, y, \lambda, \alpha)$$

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \frac{2+(\gamma-1)s}{2(s-1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} a \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) -$$

$$- 2\sqrt{\frac{t-\lambda}{\pi}} e^{\frac{a^2}{4(t-\lambda)}} + \frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma+1)}{4} -$$

$$- \frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma+1)}{4} = P_2^3(t, y, \lambda, \alpha)$$

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s} \frac{2s\gamma}{(s-1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}}$$

$$\gamma \left[ e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) + e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) \right] = P_3^3(t, y, \lambda, \alpha)$$

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \frac{2s\gamma}{(s-1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} \gamma - \left[ e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) -$$

$$- e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) \right] = P_4^3(t, y, \lambda, \alpha)$$

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s} \frac{(3+\gamma)s}{2(s-1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} \frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(3+\gamma)}{4} +$$

$$+ \frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(3+\gamma)}{4} = P_5^3(t, y, \lambda, \alpha)$$

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \frac{(3+\gamma)s}{2(s-1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} \frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) (3+\gamma)}{4} -$$

$$- \frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) (3+\gamma)}{4} = P_6^3(t, y, \lambda, \alpha)$$

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \frac{(\gamma-1)s}{2(s-1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} \frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) (\gamma-1)}{4} -$$

$$- \frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) (\gamma-1)}{4} = P_7^3(t, y, \lambda, \alpha)$$

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s} \frac{(\gamma+1)s}{2(s-1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} \frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) (\gamma+1)}{4} +$$

$$+ \frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) (\gamma+1)}{4} = P_8^3(t, y, \lambda, \alpha)$$

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \frac{(\gamma+1)s}{2(s-1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} \frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) (\gamma+1)}{4\gamma} -$$

$$- \frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) (\gamma+1)}{4\gamma} = P_9^3(t, y, \lambda, \alpha)$$

$$\gamma s \frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} \frac{\gamma \alpha e^{-\frac{a^2}{4(t-\lambda)}}}{2\sqrt{\pi}(t-\lambda)^{3/2}} = P_{10}^3(t, y, \lambda, \alpha)$$

$$\gamma s \frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} \frac{\gamma e^{-\frac{a^2}{4(t-\lambda)}}}{\sqrt{\pi}(t-\lambda)} = P_{11}^3(t, y, \lambda, \alpha)$$

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s} \frac{2-s(\gamma+1)}{2(s-1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} -\operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) -$$

$$\frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma-1)}{4} -$$

$$\frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma-1)}{4} = P_{12}^3(t, y, \lambda, \alpha)$$

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \frac{2-s(\gamma+1)}{2(s-1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) a -$$

$$-2\sqrt{\frac{t-\lambda}{\pi}} a e^{-\frac{a^2}{4(t-\lambda)}} - \frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma-1)}{4} +$$

$$+ \frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma-1)}{4} = P_{13}^3(t, y, \lambda, \alpha)$$

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \frac{(s-2)}{2(s-1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} -\frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)}{4} +$$

$$+ \frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)}{4} - \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) a + 2\sqrt{\frac{t-\lambda}{\pi}} a e^{-\frac{a^2}{4(t-\lambda)}} = P_{14}^3(t, y, \lambda, \alpha)$$

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s} \frac{(s(\gamma+1)+2)}{2(s-1)} \xrightarrow{\text{invLaplace}} -\operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) +$$

$$+ \frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma+3)}{4} + \frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma+3)}{4} = P_{15}^3(t, y, \lambda, \alpha)$$

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \frac{(s(\gamma+1)+2)}{2(s-1)} \xrightarrow{\text{invLaplace}} \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) \alpha - 2\sqrt{\frac{t-\lambda}{\pi}} e^{-\frac{a^2}{4(t-\lambda)}} +$$

$$+ \frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma+3)}{4} - \frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma+3)}{4} = P_{16}^3(t, y, \lambda, \alpha)$$

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s} \frac{(s-2)}{2(s-1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} -\frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)}{4} -$$

$$-\frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)}{4} + \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) = P_{17}^3(t, y, \lambda, \alpha)$$

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s} \left(\frac{\gamma}{s-1} - 1\right) \xrightarrow{\text{invLaplace}} \frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)}{2} +$$

$$+ \frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)}{2} - \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma+1) = P_{18}^3(t, y, \lambda, \alpha)$$

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \left(\frac{\gamma}{s-1} - 1\right) \xrightarrow{\text{invLaplace}} \frac{\gamma e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)}{2} -$$

$$-\frac{\gamma e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)}{2} - 2\sqrt{\frac{t-\lambda}{\pi}} a e^{-\frac{a^2}{4(t-\lambda)}} (\gamma+1) +$$

$$+ a \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma+1) = P_{19}^3(t, y, \lambda, \alpha)$$

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s} \frac{2+(\gamma-1)s}{2(s-1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} -\operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) +$$

$$+ \frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma+1)}{4} +$$

$$+ \frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma+1)}{4} = P_1^4(t, y, \lambda, \alpha)$$



$$\begin{aligned} & \frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \frac{(3\gamma+1)s-2}{2(s-1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} -\alpha \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) + \\ & + 2\sqrt{\frac{t-\lambda}{\pi}} e^{-\frac{a^2}{4(t-\lambda)}} + \frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma+1)}{4} - \\ & - \frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma+1)}{4} = P_3^4(t, y, \lambda, \alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s} \frac{s(\gamma+1)+2}{2(s-1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} -\operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) + \\ & + \frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma+3)}{4} + \\ & + \frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma+3)}{4} = P_4^4(t, y, \lambda, \alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \frac{s(\gamma+1)+2}{2(s-1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) \alpha - \\ & - 2\sqrt{\frac{t-\lambda}{\pi}} e^{-\frac{a^2}{4(t-\lambda)}} + \frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma+3)}{4} - \\ & - \frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma+3)}{4} = P_5^4(t, y, \lambda, \alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \frac{(s-2)}{2(s-1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} -\frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)}{4} + \\ & + \frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)}{4} - \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) a + \\ & + 2\sqrt{\frac{t-\lambda}{\pi}} a e^{-\frac{a^2}{4(t-\lambda)}} = P_6^4(t, y, \lambda, \alpha) \end{aligned}$$

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s} \frac{2s\gamma}{(s-1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}}$$

$$\gamma \left[ e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc} \left( -\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}} \right) + e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc} \left( \frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}} \right) \right] = P_7^4(t, y, \lambda, \alpha)$$

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \frac{2s\gamma}{(s-1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}}$$

$$\gamma \left[ e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc} \left( -\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}} \right) - e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc} \left( \frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}} \right) \right] = P_8^4(t, y, \lambda, \alpha)$$

$$s\gamma \frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} \frac{\gamma e^{-\frac{a^2}{4(t-\lambda)}}}{\sqrt{\pi(t-\lambda)}} = P_9^4(t, y, \lambda, \alpha)$$

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \frac{s\gamma}{(s-1)} \xrightarrow{\text{invLaplace}} \frac{\gamma e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc} \left( -\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}} \right)}{2} -$$

$$\frac{\gamma e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc} \left( \frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}} \right)}{2} = P_{10}^4(t, y, \lambda, \alpha)$$

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \left( \frac{\gamma}{(s-1)} - 1 \right) \xrightarrow{\text{invLaplace}} -\frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc} \left( \frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}} \right) \gamma}{2} +$$

$$+\frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc} \left( -\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}} \right) \gamma}{2} - 2\sqrt{\frac{t-\lambda}{\pi}} a e^{-\frac{a^2}{4(t-\lambda)}} (\gamma+1) +$$

$$+ a \operatorname{erfc} \left( \frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}} \right) (\gamma+1) = P_{11}^4(t, y, \lambda, \alpha)$$

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s} \frac{s}{2(s-1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} \frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)}{4} +$$

$$+ \frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)}{4} = R_1^1(t, y, \lambda, \alpha)$$

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \frac{s}{2(s-1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} -\frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)}{4} -$$

$$-\frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)}{4} = R_2^1(t, y, \lambda, \alpha)$$

$$\frac{s-2}{2\gamma(s-1)} \frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} -\alpha \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) +$$

$$+ 2\sqrt{\frac{t-\lambda}{\pi}} e^{-\frac{a^2}{4(t-\lambda)}} - \frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)}{4\gamma} + \frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)}{4\gamma} =$$

$$= R_3^1(t, y, \lambda, \alpha)$$

$$\frac{s-2}{2\gamma(s-1)} \frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} -\frac{\operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) a}{\gamma} -$$

$$-\frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)}{4\gamma} + \frac{2\sqrt{\frac{t-\lambda}{\pi}} a e^{-\frac{a^2}{4(t-\lambda)}}}{\gamma} +$$

$$+ \frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)}{4\gamma} = R_4^1(t, y, \lambda, \alpha)$$

$$\begin{aligned} & \frac{(2+s(\gamma-1))s e^{-\alpha\sqrt{s}}}{2\gamma(s-1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} \\ & \frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma+1)}{4\gamma} + \frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma+1)}{4\gamma} + \\ & + \frac{e^{-\frac{a^2}{4(t-\lambda)}} \alpha(\gamma-1)}{4\sqrt{\pi}(t-\lambda)^{3/2} \gamma} = R_5^1(t, y, \lambda, \alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{(2+s(\gamma-1))s e^{-\alpha\sqrt{s}}}{2\gamma(s-1)} \frac{e^{-s\lambda}}{s\sqrt{s}} \xrightarrow{\text{invLaplace}} \frac{e^{-\frac{a^2}{4(t-\lambda)}}(\gamma-1)}{2\sqrt{\pi}(t-\lambda)\gamma} + \frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma+1)}{4\gamma} - \\ & - \frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma+1)}{4\gamma} = R_6^1(t, y, \lambda, \alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{2-s}{s-1} \frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s} \xrightarrow{\text{invLaplace}} -\frac{\operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)a}{\gamma} - \frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)}{4\gamma} + \\ & + \frac{2\sqrt{\frac{t-\lambda}{\pi}} a e^{-\frac{a^2}{4(t-\lambda)}}}{\gamma} + \frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)}{4\gamma} = R_7^1(t, y, \lambda, \alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{2-s}{s-1} \frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \xrightarrow{\text{invLaplace}} \frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)}{2} + 2a \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) \alpha - \\ & - 4\sqrt{\frac{t-\lambda}{\pi}} a e^{-\frac{a^2}{4(t-\lambda)}} - \frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)}{2} = R_8^1(t, y, \lambda, \alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s} \frac{2 + (\gamma - 1)s}{2\gamma(s - 1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} \frac{-\operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t - \lambda}}\right)}{\gamma} + \\ & + \frac{e^{t - \lambda - \alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t - \lambda) - \alpha}{2\sqrt{t - \lambda}}\right) (\gamma + 1)}{4\gamma} + \\ & + \frac{e^{t - \lambda + \alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t - \lambda) + \alpha}{2\sqrt{t - \lambda}}\right) (\gamma + 1)}{4\gamma} = R_1^2(t, y, \lambda, \alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \frac{2 + (\gamma - 1)s}{2\gamma(s - 1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} \frac{a \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t - \lambda}}\right)}{\gamma} - \frac{2\sqrt{\frac{t - \lambda}{\pi}} e^{\frac{a^2}{4(t - \lambda)}}}{\gamma} + \\ & + \frac{e^{t - \lambda - \alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t - \lambda) - \alpha}{2\sqrt{t - \lambda}}\right) (\gamma + 1)}{4\gamma} - \\ & - \frac{e^{t - \lambda + \alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t - \lambda) + \alpha}{2\sqrt{t - \lambda}}\right) (\gamma + 1)}{4\gamma} = R_2^2(t, y, \lambda, \alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s} \frac{2s}{(s - 1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} e^{t - \lambda - \alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t - \lambda) - \alpha}{2\sqrt{t - \lambda}}\right) + \\ & + e^{t - \lambda + \alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t - \lambda) + \alpha}{2\sqrt{t - \lambda}}\right) = R_3^2(t, y, \lambda, \alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \frac{2s\gamma}{(s - 1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} e^{t - \lambda - \alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t - \lambda) - \alpha}{2\sqrt{t - \lambda}}\right) - \\ & - e^{t - \lambda + \alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t - \lambda) + \alpha}{2\sqrt{t - \lambda}}\right) = R_4^2(t, y, \lambda, \alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s} \frac{(3+\gamma)s-6}{2\gamma(s-1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} \frac{3\text{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)}{\gamma} + \\ & + \frac{e^{t-\lambda-\alpha}\text{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma-3)}{4\gamma} + \\ & + \frac{e^{t-\lambda+\alpha}\text{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma-3)}{4\gamma} = R_5^2(t, y, \lambda, \alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \frac{(3+\gamma)s-6}{2\gamma(s-1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} -\frac{3a\text{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)}{\gamma} + \frac{6\sqrt{\frac{t-\lambda}{\pi}}ae^{-\frac{a^2}{4(t-\lambda)}}}{\gamma} + \\ & + \frac{e^{t-\lambda-\alpha}\text{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma-3)}{4\gamma} - \\ & - \frac{e^{t-\lambda+\alpha}\text{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma-3)}{4\gamma} = R_6^2(t, y, \lambda, \alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s} \frac{2-s(\gamma+1)}{2\gamma(s-1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} -\frac{\text{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)}{\gamma} - \\ & - \frac{e^{t-\lambda-\alpha}\text{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma-1)}{4\gamma} - \frac{e^{t-\lambda+\alpha}\text{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma-1)}{4\gamma} = R_7^2(t, y, \lambda, \alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \frac{2-s(\gamma+1)}{2\gamma(s-1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} \frac{\text{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)a}{\gamma} - \frac{2\sqrt{\frac{t-\lambda}{\pi}}ae^{-\frac{a^2}{4(t-\lambda)}}}{\gamma} - \\ & - \frac{e^{t-\lambda-\alpha}\text{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma-1)}{4\gamma} + \frac{e^{t-\lambda+\alpha}\text{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma-1)}{4\gamma} = R_8^2(t, y, \lambda, \alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \frac{(s-2)}{2\gamma(s-1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} \frac{-\operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)a}{\gamma} - \frac{e^{t-\lambda-\alpha}\operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)}{4\gamma} + \\ & + \frac{2\sqrt{\frac{t-\lambda}{\pi}}ae^{-\frac{a^2}{4(t-\lambda)}}}{\gamma} + \frac{e^{t-\lambda+\alpha}\operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)}{4\gamma} = R_9^2(t, y, \lambda, \alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s} \left(\frac{2-s}{s-1}\right) \xrightarrow{\text{invLaplace}} \frac{e^{t-\lambda-\alpha}\operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)}{2} - 2\operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) + \\ & + \frac{e^{t-\lambda+\alpha}\operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)}{2} = R_{10}^2(t, y, \lambda, \alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s} \frac{2+(\gamma-1)s}{2\gamma(s-1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} \\ & -\frac{\operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)}{\gamma} + \frac{e^{t-\lambda-\alpha}\operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma+1)}{4\gamma} + \\ & + \frac{e^{t-\lambda+\alpha}\operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma+1)}{4\gamma} = R_1^3(t, y, \lambda, \alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \frac{2+(\gamma-1)s}{2\gamma(s-1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} \frac{a\operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)}{\gamma} - \frac{2\sqrt{\frac{t-\lambda}{\pi}}e^{-\frac{a^2}{4(t-\lambda)}}}{\gamma} + \\ & + \frac{e^{t-\lambda-\alpha}\operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma+1)}{4\gamma} - \frac{e^{t-\lambda+\alpha}\operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma+1)}{4\gamma} = R_2^3(t, y, \lambda, \alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s} \frac{2s}{(s-1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} e^{t-\lambda-\alpha}\operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) + \\ & + e^{t-\lambda+\alpha}\operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) = R_3^3(t, y, \lambda, \alpha) \end{aligned}$$

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \frac{2s}{(s-1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) -$$

$$-e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) = R_4^3(t, y, \lambda, \alpha)$$

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s} \frac{(3+\gamma)s}{2\gamma(s-1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} \frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(3+\gamma)}{4} +$$

$$+ \frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(3+\gamma)}{4} = R_5^3(t, y, \lambda, \alpha)$$

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \frac{(3+\gamma)s}{2\gamma(s-1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} \frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(3+\gamma)}{4} -$$

$$- \frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(3+\gamma)}{4} = R_6^3(t, y, \lambda, \alpha)$$

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \frac{(\gamma-1)s}{2\gamma(s-1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} \frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma-1)}{4\gamma} -$$

$$- \frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma-1)}{4\gamma} = R_7^3(t, y, \lambda, \alpha)$$



$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s} \frac{(\gamma+1)s}{2\gamma(s-1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} \frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma+1)}{4\gamma} +$$

$$+ \frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma+1)}{4\gamma} = R_8^3(t, y, \lambda, \alpha)$$

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \frac{(\gamma+1)s}{2\gamma(s-1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} \frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma+1)}{4\gamma} -$$

$$- \frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma+1)}{4\gamma} = R_9^3(t, y, \lambda, \alpha)$$

$$s \frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} \frac{\alpha e^{-\frac{a^2}{4(t-\lambda)}}}{2\sqrt{\pi}(t-\lambda)^{\frac{3}{2}}} = R_{10}^3(t, y, \lambda, \alpha)$$

$$s \frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} \frac{e^{-\frac{a^2}{4(t-\lambda)}}}{\sqrt{\pi}(t-\lambda)} R_{11}^3(t, y, \lambda, \alpha)$$

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s} \frac{2-s(\gamma+1)}{2\gamma(s-1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} -\frac{\operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)}{\gamma}$$

$$-\frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma-1)}{4\gamma} - \frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma-1)}{4\gamma} = R_{12}^3(t, y, \lambda, \alpha)$$

$$\begin{aligned} & \frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \frac{2-s(\gamma+1)}{2\gamma(s-1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} \frac{\operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)a}{\gamma} - \\ & \frac{2\sqrt{\frac{t-\lambda}{\pi}} a e^{-\frac{a^2}{4(t-\lambda)}}}{\gamma} - \frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma-1)}{4\gamma} + \\ & + \frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma-1)}{4\gamma} = R_{13}^3(t, y, \lambda, \alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \frac{(s-2)}{2\gamma(s-1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} \frac{\operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)a}{\gamma} - \frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)}{4\gamma} + \\ & + \frac{2\sqrt{\frac{t-\lambda}{\pi}} a e^{-\frac{a^2}{4(t-\lambda)}}}{\gamma} + \frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)}{4\gamma} = R_{14}^3(t, y, \lambda, \alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s} \frac{(s(\gamma+1)+2)}{2\gamma(s-1)} \xrightarrow{\text{invLaplace}} \frac{\operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)}{\gamma} + \frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma+3)}{4\gamma} + \\ & + \frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma+3)}{4\gamma} = R_{15}^3(t, y, \lambda, \alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \frac{(s(\gamma+1)+2)}{2\gamma(s-1)} \xrightarrow{\text{invLaplace}} \frac{\operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)}{\gamma} - \frac{2\sqrt{\frac{t-\lambda}{\pi}} e^{-\frac{a^2}{4(t-\lambda)}}}{\gamma} + \\ & + \frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma+3)}{4\gamma} - \frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma+3)}{4\gamma} = R_{16}^3(t, y, \lambda, \alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s} \frac{(s-2)}{2\gamma(s-1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} -\alpha \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) + 2\sqrt{\frac{t-\lambda}{\pi}} e^{-\frac{a^2}{4(t-\lambda)}} - \\ & - \frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)}{4\gamma} + \frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)}{4\gamma} = R_{17}^3(t, y, \lambda, \alpha) \end{aligned}$$

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s} \frac{2-s}{s-1} \xrightarrow{\text{invLaplace}} -\frac{\operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)a}{\gamma} - \frac{e^{t-\lambda-\alpha}\operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)}{4\gamma} +$$

$$+ \frac{2\sqrt{\frac{t-\lambda}{\pi}}ae^{-\frac{a^2}{4(t-\lambda)}}}{\gamma} + \frac{e^{t-\lambda+\alpha}\operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)}{4\gamma} = R_{18}^3(t, y, \lambda, \alpha)$$

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \frac{2-s}{s-1} \xrightarrow{\text{invLaplace}} \frac{e^{t-\lambda-\alpha}\operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)}{2} + 2a\operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)\alpha -$$

$$- 4\sqrt{\frac{t-\lambda}{\pi}}ae^{-\frac{a^2}{4(t-\lambda)}} - \frac{e^{t-\lambda+\alpha}\operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)}{2} = R_{19}^3(t, y, \lambda, \alpha)$$

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s} \frac{2+(\gamma-1)s}{2\gamma(s-1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} -\frac{\operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)}{\gamma} +$$

$$+ \frac{e^{t-\lambda-\alpha}\operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma+1)}{4\gamma} +$$

$$+ \frac{e^{t-\lambda+\alpha}\operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma+1)}{4\gamma} = R_{1}^4(t, y, \lambda, \alpha)$$

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \frac{2+(\gamma-1)s}{2\gamma(s-1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} \frac{a\operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)}{\gamma} - \frac{2\sqrt{\frac{t-\lambda}{\pi}}e^{-\frac{a^2}{4(t-\lambda)}}}{\gamma} +$$

$$+ \frac{e^{t-\lambda-\alpha}\operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma+1)}{4\gamma} - \frac{e^{t-\lambda+\alpha}\operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma+1)}{4\gamma} = R_{2}^4(t, y, \lambda, \alpha)$$

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \frac{(3\gamma+1)s-2}{2(s-1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} -\alpha \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) + 2\sqrt{\frac{t-\lambda}{\pi}} e^{-\frac{a^2}{4(t-\lambda)}} +$$

$$+ \frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma+1)}{4} - \frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma+1)}{4} = R_3^4(t, y, \lambda, \alpha)$$

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s} \frac{s(\gamma+1)+2}{2\gamma(s-1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} -\frac{\operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)}{\gamma} +$$

$$+ \frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma+3)}{4\gamma} + \frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma+3)}{4\gamma} = R_4^4(t, y, \lambda, \alpha)$$

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \frac{s(\gamma+1)+2}{2\gamma(s-1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} -\frac{\operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)}{\gamma} - \frac{2\sqrt{\frac{t-\lambda}{\pi}} e^{-\frac{a^2}{4(t-\lambda)}}}{\gamma} +$$

$$+ \frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma+3)}{4\gamma} - \frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)(\gamma+3)}{4\gamma} = R_5^4(t, y, \lambda, \alpha)$$

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \frac{(s-2)}{2\gamma(s-1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} -\frac{\operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)a}{\gamma} - \frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)}{4\gamma} +$$

$$+ \frac{2\sqrt{\frac{t-\lambda}{\pi}} a e^{-\frac{a^2}{4(t-\lambda)}}}{\gamma} + \frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)}{4\gamma} = R_6^4(t, y, \lambda, \alpha)$$

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s} \frac{2s}{(s-1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) +$$

$$+ e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) = R_7^4(t, y, \lambda, \alpha)$$

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \frac{2s}{(s-1)} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) -$$

$$- e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) = R_8^4(t, y, \lambda, \alpha)$$

$$\frac{2}{\gamma(s-1)} \frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} e^{-s\lambda} \xrightarrow{\text{invLaplace}} \frac{2\alpha \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)}{\gamma} + \frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t-\lambda)-\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)}{\gamma} -$$

$$\frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t-\lambda)+\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) - 4\sqrt{\frac{t-\lambda}{\pi}} e^{-\frac{a^2}{4(t-\lambda)}}}{\gamma} = R_9^4(t, y, \lambda, \alpha)$$

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \frac{s}{(s-1)} \xrightarrow{\text{invLaplace}} \frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t)-\alpha}{2\sqrt{t}}\right)}{2} - \frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t)+\alpha}{2\sqrt{t}}\right)}{2} = R_{10}^4(t, y, \lambda, \alpha)$$

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \frac{2-s}{(s-1)} \xrightarrow{\text{invLaplace}} \frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(-\frac{2(t)-\alpha}{2\sqrt{t}}\right)}{2} + 2\alpha \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right) \alpha -$$

$$-4\sqrt{\frac{t}{\pi}} a e^{-\frac{a^2}{4(t)}} - \frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(t)+\alpha}{2\sqrt{t}}\right)}{2} = R_{11}^4(t, y, \lambda, \alpha)$$