

*На правах рукописи*



**Орлов Александр Александрович**

**ОПТИМИЗАЦИЯ СЛОЖНЫХ СХЕМ ПЕРЕЛЁТА КА С  
ЭЛЕКТРОРАКЕТНЫМИ ДВИГАТЕЛЯМИ ПРИ ГРАНИЧНЫХ  
УСЛОВИЯХ СМЕШАННОГО ТИПА**

Специальность 05.07.09

«Динамика, баллистика, управление движением летательных аппаратов»

**Автореферат**

диссертации на соискание ученой степени

кандидата технических наук

Москва – 2018

Работа выполнена на кафедре 601 «Космические системы и ракетостроение» федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)».

Научный руководитель: **Константинов Михаил Сергеевич,**

доктор технических наук, профессор кафедры 601 «Космические системы и ракетостроение» Московского авиационного института (национального исследовательского университета)

Официальные оппоненты: **Улыбышев Юрий Петрович**

доктор технических наук, заместитель руководителя научно-технического центра ОАО "РКК "Энергия", член-корреспондент Российской академии космонавтики им. К.Э. Циолковского, профессор кафедры "Системы автоматического управления космическими аппаратами" МГТУ им. Н.Э. Баумана.

**Заплетин Максим Петрович**

кандидат технических наук, доцент кафедры «Общие проблемы управления» Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова.

Ведущая организация: Акционерное общество «Научно-производственное объединение им. С.А.Лавочкина».

Защита состоится « 1 » ноября 2018 года в 16:00 на заседании диссертационного совета Д 212.125.12 в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (МАИ) по адресу: 125993, Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, д. 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (МАИ) по адресу: 125993, Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, д. 4, а также на сайте института по адресу [https://mai.ru/events/defence/index.php?ELEMENT\\_ID=92092](https://mai.ru/events/defence/index.php?ELEMENT_ID=92092)

Отзывы, заверенные печатью, просим направлять по адресу: 125993, Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, д. 4, Ученый совет МАИ.

Автореферат разослан « \_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2018 года.

Ученый секретарь диссертационного совета

Д 212.125.12, кандидат технических наук, доцент

Старков А. В.

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Диссертационная работа посвящена рассмотрению комплекса вопросов, связанных с оптимизацией траекторий межпланетных перелётов КА с малой тягой. В частности, разработана методика оптимизации траекторий, включающих гравитационные манёвры, которая не требует решения вспомогательных задач и, при этом, обладает хорошей сходимостью используемых итерационных процедур. Преимуществом предлагаемой методики является сравнительно не сильное увеличение порядка краевой задачи при усложнении схемы перелёта путем добавления гравитационных манёвров (ГМ), что обеспечивает повышение скорости расчёта.

При использовании не прямых методов оптимизации траектории КА целесообразно использовать необходимые условия оптимальности (условия трансверсальности) ГМ. Для траекторий с ГМ особенность использования этих условий состоит в том, что их вид зависит от высоты пролётной гиперболы при ГМ. Если высота пролётной гиперболы больше минимально заданной, то используется один вид условий трансверсальности в точке ГМ. Если эта высота равна минимальной, то вид условий трансверсальности меняется. Таким образом, при оптимизации траекторий с ГМ необходимо рассмотреть серию краевых задач, для которых в каждой точке ГМ фиксируется один из двух случаев, когда высота пролётной гиперболы больше или равна минимальной. Такой подход позволяет последовательно рассмотреть все возможные комбинации условий трансверсальности в точках ГМ и выбрать лучшее решение в соответствии с критерием оптимизации. Количество рассматриваемых комбинаций зависит от количества ГМ. При одном ГМ необходимо рассмотреть две задачи оптимизации, при двух гравитационных манёврах нужно найти решение четырёх оптимизационных задач, при трёх - уже восемь и т.д. Нетрудно заметить, что подобный подход приводит к существенному росту объёма необходимых вычислений.

Анализ условий трансверсальности в точке ГМ показывает, что в общем случае, когда высота пролётной гиперболы больше или равна минимальной, граничные условия краевой задачи имеют вид равенств и неравенств (смешанный тип граничных условий). В работе предлагается методика решения оптимизационных задач с ограничениями смешанного типа (равенства и неравенства), которая позволяет существенно сократить время, затрачиваемое на поиск оптимальной траектории при межпланетных перелётах с ГМ. Такая возможность появляется за счёт отказа от решения серии оптимизационных задач с ограничениями типа равенства и переходе к решению одной задачи оптимизации, учитывающей все возможные комбинации условий трансверсальности в точках ГМ и, соответственно, использующей граничные условия смешанного типа.

Ещё одним важным преимуществом разработанной методики является то, что она обладает сходимостью, не хуже, чем при решении оптимизационных задач с ограничениями типа равенств и позволяет в процессе поиска решения плавно переходить с одной экстремали на другую при условии, что новая экстремаль лучше предыдущей в соответствии с критерием оптимизации.

Указанные преимущества достигаются за счёт использования дополнительных ослабляющих переменных, позволяющих сводить ограничения типа неравенств к ограничениям типа равенств.

В данной работе проанализированы различные схемы перелёта, как прямые, так и с ГМ, в том числе, от Земли к Юпитеру. При этом используется новая постановка задачи оптимизации, отличающаяся тем, что вводится зависимость величины тяги солнечной электроракетной двигательной установки (СЭРДУ) от гелиоцентрического удаления КА. Предполагается, что СЭРДУ включает несколько двигателей, причём количество одновременно работающих двигателей зависит от доступной для питания СЭРДУ

мощности. По мере того, как гелиоцентрическое расстояние КА увеличивается, доступная для питания СЭРДУ мощность падает и двигатели начинают последовательно отключаться. Таким образом, вводится ступенчатая зависимость тяги КА от гелиоцентрического расстояния.

В качестве объектов исследования используются траектории межпланетных перелётов КА с электроракетными двигательными установками (ЭРДУ), в том числе с ГМ.

Предметом исследования являются математические модели КА с ЭРДУ при межпланетных перелётах.

Актуальность данной работы определяется следующими основными факторами:

- возрастающим интересом к применению ЭРДУ для перспективных межпланетных космических миссий, что связано с тем, что ЭРДУ по ряду технических характеристик (прежде всего расходу топлива) обладают существенным преимуществом над химическими ракетными двигателями;
- необходимостью разработки устойчивых методов оптимизации межпланетных траекторий;
- в значительной части межпланетных миссий используются один или несколько ГМ, что существенно усложняет задачу оптимизации траекторий для таких полётов и требует разработки эффективных алгоритмов поиска оптимальных траекторий с гравитационными маневрами.

Целью диссертационной работы является повышение эффективности транспортных космических систем при реализации межпланетных траекторий КА. Для достижения этой цели, в частности, были поставлены и решены следующие задачи:

- разработка новой методики оптимизации межпланетных траекторий с ГМ при использовании ЭРДУ, позволяющей получать оптимальные решения, не требующей решения вспомогательных задач и обладающей высокой скоростью сходимости;
- разработка подхода, позволяющего решать краевые задачи с ограничениями смешанного типа в виде равенств и неравенств на основе использования дополнительных ослабляющих переменных с целью уменьшения трудоёмкости вычислений;
- апробация разработанных методик, в частности, проведения проектно-баллистического анализа полета к Юпитеру различных схем перелёта, как прямого, так и с использованием ГМ.

В работе используются теоретические методы исследования. В частности, используется принцип максимума Понтрягина, который сводит задачу оптимизации к краевой задаче. Краевая задача решается с помощью метода продолжения по гравитационному параметру (ППП), при этом была проведена его модификация с целью увеличения автоматизации и скорости вычислений. Для решения краевой задачи с ограничениями смешанного типа применялся метод, основанный на использовании дополнительных ослабляющих переменных. Для численного расчёта частных производных использовался метод центральных разностей. Интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений движения КА (внутреннее интегрирование) проводилось с помощью метода Рунге-Кутты 7(8)-го порядка точности (метод Дормандса-Принса). Интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений модифицированного метода PPP (внешнее интегрирование) осуществлялось с помощью алгоритма ODE45, основанного на методе Рунге-Кутта переменного порядка точности, входящего в программный пакет MATLAB.

**Достоверность полученных результатов** определяется адекватной постановкой задачи оптимизации, использованием корректных математических моделей, применением хорошо изученных и обоснованных методов, использованием полного набора необходимых условий оптимальности, совпадением численных результатов, полученных при решении тестовых задач, с результатами других авторов.

**Соответствие паспорту специальности.** Работа соответствует паспорту специальности 05.07.09 – «Динамика, баллистика, управление движением летательных аппаратов». В качестве объекта исследования в работе непосредственно рассматриваются межпланетные траектории КА с двигателями малой тяги. Основная часть проведённой работы заключалась в поиске оптимальных программ управления вектором тяги и построении оптимальных траекторий движения КА, а также в проведении их качественного и количественного анализа. Диссертация имеет прикладной характер и относится к области технических наук.

**Научная новизна работы** состоит в:

- разработке метода продолжения траектории пассивного движения КА в оптимальную траекторию для двигателя ограниченной тяги (ОТ);
- развитии метода ППП для случая многоточечных краевых задач;
- разработке новой методики оптимизации межпланетных траекторий КА с ЭРДУ, использующих гравитационные манёвры;
- развитие разработанной методики для решения краевых задач с ограничениями смешанного типа на основе использования дополнительных ослабляющих переменных;
- предоставлении численных результатов анализа перелёта Земля-Юпитер, как для случая прямого перелёта, так и с одним и двумя ГМ при использовании новой постановки оптимизационной задачи.

**Практическая значимость** работы состоит в разработке устойчивого алгоритма оптимизации межпланетных траекторий, в том числе с ГМ, разработке программного обеспечения, реализующего данный алгоритм и получении решений для ряда схем межпланетных перелётов.

**Основные научные положения и результаты, выносимые на защиту:**

- методика оптимизации межпланетных траекторий КА, оснащенных ЭРДУ, при использовании ГМ;
- методика решения краевых задач межпланетных перелётов с ограничениями смешанного типа;
- программно-математический комплекс, предназначенный для решения задач оптимизации траекторий межпланетных КА, оснащенных ЭРДУ, в том числе с использованием ГМ;
- результаты анализа перелёта Земля-Юпитер, как для случая прямого перелёта, так и с одним и двумя ГМ при использовании ступенчатой зависимости тяги КА от гелиоцентрического расстояния.

**Апробация результатов работы** проводилась:

- на Научно-Технической конференции студентов и аспирантов Аэрокосмического факультета МАИ, май 2008;
- на XLVII научных чтениях памяти К.Э. Циолковского, Калуга, сентябрь 2012;
- на XLVIII научных чтениях памяти К.Э. Циолковского, Калуга, сентябрь 2013;
- на семинаре “Механика космического полёта в МАИ”, июнь 2016, февраль 2018.

Все результаты, которые приведены в данной диссертационной работе, **получены лично автором**. Наиболее существенные положения изложены в научных работах, изданных в трёх журналах из списка рецензируемых научных журналов ВАК или входящих в международные базы данных (МБР) [1-3]. Статья [1] была переведена и напечатана в одном англоязычном журнале [4], входящем в МБР.

### **Структура и объём работы**

Диссертация включает введение, три главы, заключение и список литературы. Объём работы составляет 155 страниц, 61 рисунок и 27 таблиц. Список литературы включает 115 источников.

## **СОДЕРЖАНИЕ**

Во **введении** показана актуальность выбранной темы диссертационной работы, указаны цели проведения исследований, объекты и предметы исследования, приведены методы исследования, сформулированы научная новизна работы и положения, которые выносятся на защиту. Так же приводится обоснование достоверности полученных результатов, соответствие паспорту специальности, практическая значимость. Приведена информация об апробации результатов диссертации, её структуре и объёме.

В **первой главе** представлена математическая модель, описывающая оптимальный межпланетный перелет КА с ЭРДУ. Проведён краткий обзор метода продолжения по параметру, введено сглаживание функции включения-выключения двигателя. Сделан краткий обзор метода продолжения ППП и проведен его анализ. Представлен, разработанный автором модифицированный метод ППП и приведено обоснование его использования. Представлен способ ускорения проведения расчётов в программном пакете Matlab при использовании программ, написанных на Fortran. Представлен ряд численных примеров, показывающих эффективность предложенной модификации метода ППП

При этом математическая модель движения КА использует ряд допущений:

- удельный импульс и тяга ЭРДУ постоянны на всех активных участках (рассматривается модель двигателя ограниченной тяги(ОТ));
- нет ограничений на направление вектора тяги ЭРДУ;
- гравитационные поля планет и Солнца описываются моделью Ньютона;

В качестве инерциальной декартовой системы координат в расчётах использовалась гелиоцентрическая эклиптическая система координат ICRF (International Celestial Reference Frame) для эпохи J2000.0. Положения и скорости планет определялись с помощью эфемерид JPL (Jet Propulsion Laboratory) DE405. Для уменьшения погрешности интегрирования использовались уравнения движения КА в безразмерном виде.

Математическая модель движения КА представлена следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \mathbf{V}, \\ \frac{d\mathbf{V}}{dt} &= -\frac{1}{r^3} \cdot \mathbf{r} + \frac{\delta \cdot P_0}{m} \cdot \mathbf{e}, \\ \frac{dm}{dt} &= -\frac{\delta \cdot P_0}{w_0}, \end{aligned} \right\}$$

где  $\mathbf{r}$  – вектор положения КА,  $\mathbf{V}$  – вектор скорости КА,  $\delta$  – функция включения-выключения ЭРДУ ( $\delta \in [0, 1]$ ),  $\mathbf{e}$  – орт, задающий направление вектора тяги КА,  $w_0$  – величина скорости истечения двигателей КА;  $P_0$  – тяга КА;  $m$  – масса КА.

Задача оптимизации межпланетной траектории КА состоит в отыскании оптимальных программ управления вектором тяги  $\mathbf{e}$  и функцией включения-выключения двигателя  $\delta$ , обеспечивающих выполнение рассматриваемой миссии. В качестве критерия оптимизации рассматривается максимизация конечной массы КА, т.е. рассматривается функционал следующего вида:

$$J = m(t_k) \rightarrow \max$$

Для сведения задачи оптимизации к краевой применяется принцип максимума Понтрягина. Составляется функция Гамильтона:

$$H = \mathbf{p}_r^T \cdot \mathbf{V} + \mathbf{p}_V^T \cdot \left( -\frac{1}{r^3} \cdot \mathbf{r} + \frac{\delta \cdot P_0}{m} \cdot \mathbf{e} \right) - p_m \cdot \frac{\delta \cdot P_0}{w_0},$$

где  $\mathbf{p}_r^T = [p_{rx}, p_{ry}, p_{rz}]$ ,  $\mathbf{p}_V^T = [p_{Vx}, p_{Vy}, p_{Vz}]$ ,  $p_m$  – сопряжённые переменные к радиус-вектору, вектору скорости и массе КА соответственно. При этом дифференциальные уравнения оптимального движения КА определяются по следующим соотношениям:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_r}, & \frac{d\mathbf{V}}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_V}, & \frac{dm}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_m}, \\ \frac{d\mathbf{p}_r}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}}, & \frac{d\mathbf{p}_V}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{V}}, & \frac{dp_m}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial m} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Оптимальные законы управления  $\delta(t)$  и  $\mathbf{e}(t)$  находятся из условия максимума гамильтониана Н:

$$\mathbf{e}^{opt} = \frac{\mathbf{p}_V}{p_V}, \quad p_V = |\mathbf{p}_V|, \quad \delta^{opt} = \begin{cases} 1, & \text{если } \psi > 0; \\ 0, & \text{если } \psi \leq 0, \end{cases} \quad \psi = \frac{p_V}{m} - \frac{p_m}{w_0}.$$

Уравнения движения КА (1) дополняются краевыми условиями. Значения гелиоцентрических радиуса вектора и вектора скорости КА в начальной точке гелиоцентрической траектории определяются датой старта  $t_0$ , при этом, исходя из условий трансверсальности, вектор начального гиперболического избытка скорости (ГИС)  $\mathbf{V}_\infty(t_0)$  направлен по базис-вектору Лоудена  $\mathbf{p}_v$ . Начальные условия для анализа гелиоцентрической траектории полёта имеют вид:

$$\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0, \quad \mathbf{V}(t_0) = \mathbf{V}_0 + \mathbf{V}_\infty(t_0) \cdot \frac{\mathbf{p}_v(t_0)}{p_v(t_0)}, \quad (2)$$

где  $\mathbf{r}_0$  – вектор положения планеты отправления в начальный момент времени,  $\mathbf{V}_0$  – вектор скорости планеты отправления в начальный момент времени. Здесь и далее  $V_\infty = |\mathbf{V}_\infty|$  – модуль вектора ГИС в соответствующий момент времени.

Значения радиуса вектора и вектора скорости КА в конечной точке траектории зависят от времени прибытия  $t_k$  и определяют конечные условия для задачи сопровождения:

$$\mathbf{r}(t_k) = \mathbf{r}_k, \quad \mathbf{V}(t_k) = \mathbf{V}_k,$$

для задачи пролёта:

$$\mathbf{r}(t_k) = \mathbf{r}_k, \quad \mathbf{p}_V(t_k) = 0,$$

где  $\mathbf{r}_k, \mathbf{V}_k$  - векторы положения и скорости планеты назначения соответственно в конечный момент времени.

Если постановка задачи предполагает, что КА располагает химической ДУ для маневрирования в окрестностях планеты назначения (одноимпульсного торможения в перицентре подлётной гиперболы для перехода на околопланетную орбиту с заданными параметрами), то можно воспользоваться условиями трансверсальности для задачи подлёта к планете с оптимальным гиперболическим избытком скорости. Конечные условия для такой задачи примут вид:

$$\mathbf{r}(t_k) = \mathbf{r}_k, \quad \mathbf{p}_V(t_k) = \frac{-m(t_k) \cdot \exp\left(\frac{-\Delta V_k}{w_{XPБк}}\right)}{\sqrt{\frac{2 \cdot \mu_{плк}}{r_\pi} + V_\infty(t_k)^2}} \mathbf{V}_\infty(t_k),$$

где  $m(t_k)$  – конечная масса КА на орбите планеты назначения,  $\Delta V_k$  - импульс скорости, который надо сообщить КА при подлёте к планете назначения, чтобы выйти на орбиту вокруг планеты с заданными параметрами (радиусами перицентра  $r_\pi$  и апоцентра  $r_\alpha$ ),  $\mu_{плк}$  – гравитационный параметр планеты назначения,  $w_{XPБк}$  – скорость истечения химической ДУ,  $\mathbf{V}_\infty(t_k)$  - вектор ГИС при подлёте КА к планете назначения.

Исходя из принципа максимума Понтрягина, в конечной точке траектории должно выполняться условие  $p_m(t_k) \geq 0$ , в соответствии с этим запишем граничное условие:

$$p_m(t_k) = 1,$$

где  $t_k$  – время прибытия КА к цели.

Значения сопряжённых переменных в начальной точке являются неизвестными параметрами рассматриваемых краевых задач:

$$\mathbf{p}_r(t_0), \mathbf{p}_V(t_0), p_m(t_0).$$

Условие оптимальности для даты старта  $t_0$  при фиксированном общем времени перелёта имеет вид:

$$\delta(t_k) \cdot \left( \frac{w_0 \cdot p_V(t_k)}{m(t_k)} - p_m(t_k) \right) \cdot \frac{P_0}{w_0} - \delta(t_0) \cdot \left( \frac{w_0 \cdot p_V(t_0)}{m(t_0)} - p_m(t_0) \right) \cdot \frac{P_0}{w_0} - \frac{V_\infty(t_0)}{p_V(t_0)} \cdot \mathbf{p}_r(t_0)^T \cdot \mathbf{p}_V(t_0) = 0.$$

- условие трансверсальности для начальной величины ГИС  $V_\infty(t_0)$ :

$$\mathbf{p}_V(t_0) + p_m(t_0) \cdot \frac{\partial m_0}{\partial V_{\infty 0}} = 0.$$

Данные условия могут быть добавлены к граничным условиям краевой задачи, а к варьируемому переменным, соответственно, добавятся дата старта  $t_0$  и величина вектора начального ГИС  $V_\infty(t_0)$ :

$$t_0, \mathbf{V}_\infty(t_0).$$

Краевая задача решается методом ПГП. В качестве основы используется метод продолжения по параметру. Дифференциальное уравнение метода продолжения образует внешний цикл интегрирования и имеет вид:



$$\frac{dz}{d\tau} = -\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^{-1} \left(\mathbf{b} + \frac{\partial f}{\partial \tau}\right), \quad (3)$$

где  $f$  - вектор невязок, составленный из граничных условий в конечный момент времени,  $z$  - вектор неизвестных начальных значений сопряжённых переменных  $p(t_0)$ ,  $\mathbf{b}$  - вектор начальных невязок краевой задачи ( $f(\mathbf{z}_0) = \mathbf{b}$ ),  $\tau$  - параметр продолжения.

Интегрирование уравнения (3) предполагает существование и невырожденность матрицы частных производных  $\partial f / \partial z$ , что накладывает ограничение на гладкость правых частей дифференциальных уравнений движения и краевых условий. В связи с этим вводится сглаживание функции включения-выключения:

$$\delta(\psi, \tau) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\psi}{1 - \tau + \tau \cdot |\psi| + \varepsilon(\tau)} + 1 \right],$$

где  $\varepsilon(\tau) = (1 - \tau) \cdot \varepsilon_0 + \tau \cdot \varepsilon_k$ , параметр  $\tau$  обеспечивает плавное продолжение степени сглаживания от  $\varepsilon_0$  до  $\varepsilon_k$ , которые являются задаваемыми параметрами.

На рисунке 1 показано изменение степени сглаживания функции  $\delta$  по параметру продолжения  $\tau$ . Показанная на рисунке зависимость соответствует одному из вариантов перелёта Земля – Марс. Чем темнее кривые функции  $\delta$ , тем ближе параметр продолжения  $\tau$  к единице. Самая светлая кривая соответствует  $\tau=0$ , самая тёмная  $\tau=1$ . Здесь и далее все величины на графиках показаны в безразмерном виде. На указанном графике и в дальнейшем будем использовать следующие значения степени сглаживания функции включения-выключения:  $\varepsilon_0=10^{-4}$  и  $\varepsilon_k=10^{-6}$ .

Множество экстремумов, образующих семейства решений располагаются изолированно относительно друг друга и при прохождении поиска решения вблизи точек ветвления решений матрица частных производных  $\partial f / \partial z$  становится плохо обусловленной, что может приводить к отказу метода продолжения. В соответствии с идеями метода ППП для уменьшения вероятности вырождения этой матрицы вводится фиксация угловой дальности перелёта КА с целью поиска решения в рамках одной экстремали (см. рисунок 2), поскольку в большинстве случаев многоэкстремальность краевой задачи межпланетных перелётов связана с количеством целых витков, которые совершает КА вокруг Солнца. В качестве начального приближения используется пассивное движение КА по орбите планеты отправления и, соответственно, неизвестные значения сопряжённых переменных равны нулю, а, следовательно, отсутствует необходимость их подбора, что является весьма трудоёмким и трудно формализуемым процессом.

Автором предлагается модификация метода ППП, заключающаяся в оптимизации траектории для двигателя ограниченной тяги на первом же этапе расчёта, в отличие от оригинального метода, в котором проводилась оптимизация сначала траектории для двигателя ограниченной мощности (ОМ) и полученное решение использовалось в качестве начального приближения для оптимизации траектории с двигателем ОТ. По оценкам, приведённым в диссертационной работе такой простой приём позволяет сократить время, затрачиваемое на расчёт примерно на 30% без уменьшения размеров области сходимости решения.

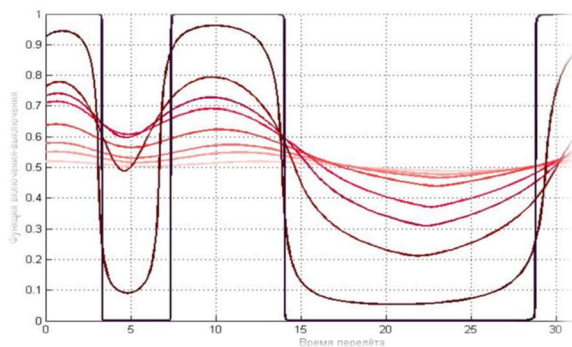


Рисунок 1. Зависимость функции включения-выключения  $\delta$  от времени перелёта и параметра продолжения  $\tau$ .

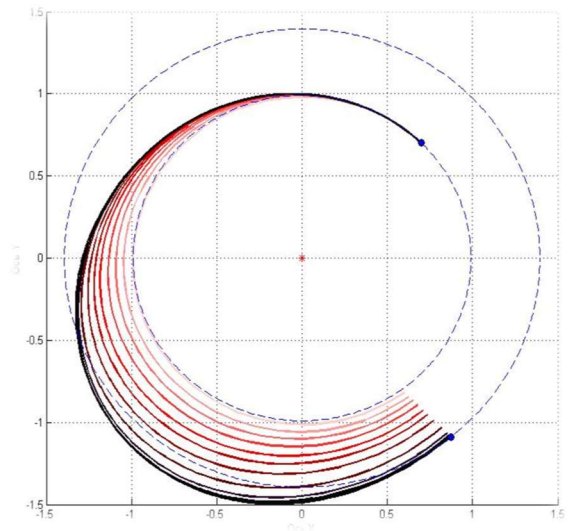


Рисунок 2. Процесс поиска решения для перелёта Земля-Марс при использовании метода ПМП.

При таком подходе, в связи с тем, что начальное приближение для начальных значений сопряжённых переменных в такой постановке равны нулю, то в правых частях дифференциальных уравнений движения КА для задачи ОТ (1) и в граничных условиях (2) для начальной скорости КА в начале процесса продолжения возникает неопределённость в виде деления на ноль. Эту неопределённость можно убрать путём ввода в дифференциальные уравнения и граничные условия для скорости КА регуляризующего слагаемого  $k$ , такого, что при  $\tau=0$ , он равен единице, а при  $\tau=1$ , коэффициент равен нулю и, соответственно, мы получаем решение в строгом соответствии с постановкой задачи ОТ:  $k(\tau) = 1 - \tau$ . В итоге, система уравнений оптимального движения КА и граничные условия принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \mathbf{V}, \\ \frac{d\mathbf{V}}{dt} &= -\frac{\mathbf{r} \cdot \mu(\tau)}{r^3} + \frac{\delta \cdot P}{m} \cdot \frac{\mathbf{p}_V}{|\mathbf{p}_V| + k(\tau)}, \\ \frac{dm}{dt} &= -\frac{\delta \cdot P}{w}, \\ \frac{d\mathbf{p}_r}{dt} &= \frac{\mathbf{p}_V \cdot \mu(\tau)}{r^3} - \frac{3 \cdot \mathbf{r} \cdot (p_{Vx} \cdot x + p_{Vy} \cdot y + p_{Vz} \cdot z)}{r^5}, \\ \frac{d\mathbf{p}_V}{dt} &= -\mathbf{p}_r, \\ \frac{dp_m}{dt} &= \delta \cdot \frac{P \cdot |\mathbf{p}_V|}{m^2}, \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \mathbf{r}(t_0) &= \mathbf{r}_0, \quad \mathbf{V}(t_0) = \mathbf{V}_0 \cdot \sqrt{\mu(\tau)} + \mathbf{V}_\infty(t_0) \cdot \frac{p_V(t_0)}{p_V(t_0) + k(\tau)}, \\ \mathbf{r}(t_k) &= \mathbf{r}_k, \quad \mathbf{V}(t_k) = \mathbf{V}_k \cdot \sqrt{\mu(\tau)}. \end{aligned}$$

Синим цветом выделены переменные, которые вводятся в правые части уравнений движения в соответствии с методом ПМП ( $\mu(\tau)$ ) и его модификацией (дополнительный ввод  $k(\tau)$ ). Конечные граничные условия для задачи пролёта и задачи подлёта с оптимальным гиперболическим избытком скорости остаются без изменений.

Далее в главе рассматривается ряд численных примеров траекторий прямых межпланетных перелётов. Транспортная система состоит из ракеты-носителя Ангара-А5, химического разгонного блока (ХРБ) КВТК и ЭРДУ с двигателями малой тяги РИТ-22.

Во **второй главе** диссертационной работы представлена математическая модель движения КА в поле тяготения планеты, в окрестности которой совершается ГМ. Представлены условия трансверсальности в точке ГМ. Проведён анализ двух существующих методик оптимизации траекторий с ГМ, входящих в ряд наиболее эффективных. Представлена модернизация методики фиксации угловой дальности межпланетного перелёта КА, позволяющая использовать метод ППП или его модификацию для решения многоточечных краевых задач. Предложена новая методика оптимизации траекторий с ГМ, отличающаяся сравнительно малой трудоёмкостью при проведении расчётов и обладающая хорошей сходимостью. Проведено объединение двух случаев в точке ГМ, когда  $\beta < \beta_{max}$  или  $\beta = \beta_{max}$  на основе предложенной новой методики расчёта ГМ и использования ослабляющих переменных и, как следствие, представлена методика оптимизации траекторий с ГМ с ограничениями смешанного типа. Проведён анализ работы алгоритма оптимизации траекторий межпланетных перелётов при решении краевой задачи с ограничениями смешанного типа. Представлены примеры оптимизации траекторий межпланетного перелёта к Юпитеру с гравитационным манёвром у Земли и Меркурию с гравитационным манёвром у Венеры, показывающие эффективность предложенной методики оптимизации траекторий с ГМ.

Гравитационные маневры рассматриваются пассивными, то есть при их выполнении не предполагается включение двигательной установки. Минимально возможная высота, на которой КА облетает планету при гравитационном маневре задаётся. Данная модель движения КА должна быть дополнена условиями оптимальности при подлёте и отлёте от планеты, в окрестностях которой будет совершаться ГМ.

Исходя из метода грависфер нулевой протяжённости при пассивном ГМ вектор гелиоцентрической скорости КА изменяется мгновенно из-за того, что вектора ГИС под действием сил гравитации планеты поворачивается на некоторый угол, максимальная величина которого задаётся минимальной высотой гиперболы пролёта. Разворот вектора ГИС происходит в некоторой плоскости, которая задаётся гиперболическими избытками скорости при подлёте и отлёте и называется плоскостью ГМ (см. рисунок 3).

Плоскость ГМ может разворачиваться на произвольный угол вокруг оси  $x$  за счёт выбора положения точки пересечения траектории КА с картинной плоскостью пролёта планеты. Угол между векторами подлетного  $V_{\infty-}$  и отлетного  $V_{\infty+}$  ГИС при ГМ определяется следующим соотношением:

$$\beta = 2 \cdot \arcsin \left( \frac{1}{1 + \frac{r_p \cdot |V_{\infty}|^2}{\mu_{pl}}} \right) \leq \beta_{max} = 2 \cdot \arcsin \left( \frac{1}{1 + \frac{r_{pmin} \cdot |V_{\infty}|^2}{\mu_{pl}}} \right).$$

где  $|V_{\infty}|$  - модуль вектора ГИС,  $r_p$  - радиус перицентра пролетной гиперболы,  $\mu_{pl}$  - гравитационный параметр планеты. Учитывая, что есть ограничение на минимальный радиус пролёта планеты  $r_{pmin}$ , то угол поворота вектора ГИС не может быть больше  $\beta_{max}$ .

Абсолютная величина ГИС при ГМ остаётся неизменной:

$$|V_{\infty-}| = |V_{\infty+}|. \quad (4)$$

В равенстве (4) и далее индекс “-” обозначает значение какой-либо величины до ГМ, индекс “+” после.

При этом в точке ГМ нужно удовлетворить ряду необходимых условий оптимальности, вид которых меняется в зависимости от того равен угол поворота ГИС максимальному  $\beta = \beta_{max}$  или меньше  $\beta < \beta_{max}$ .

В случае, если угол поворота ГИС меньше максимального  $\beta < \beta_{max}$ , необходимые условия оптимальности принимают вид:

- базис-векторы (векторы, сопряженные векторам гелиоцентрической скорости КА) при подлёте и отлёте от планеты, в окрестности которой проводится ГМ должны быть коллинеарны векторам подлётного и отлётного ГИС соответственно:

$$p_{V-} \parallel V_{\infty-}, \quad p_{V+} \parallel V_{\infty+}, \quad (5)$$

- модули базис-векторов при подлёте к планете и отлёте от неё после ГМ равны:

$$|p_{V-}| = |p_{V+}|. \quad (6)$$

В случае, если угол поворота ГИС равен максимальному  $\beta = \beta_{max}$ , необходимые условия оптимальности принимают вид:

- базис-векторы при подлёте и отлёте от планеты, в окрестности которой проводится ГМ  $p_{V-}$  и  $p_{V+}$  принадлежат плоскости ГМ, образованной векторами подлётного  $V_{\infty-}$  и отлётного  $V_{\infty+}$  гиперболических избытков скорости:

$$p_{V-} \in \Pi_{V_{\infty-}V_{\infty+}}, \quad p_{V+} \in \Pi_{V_{\infty-}V_{\infty+}},$$

Для ввода остальных условий оптимальности ГМ введём в рассмотрение по две компоненты каждого из двух рассматриваемых базис-векторов (см. рисунок 3).

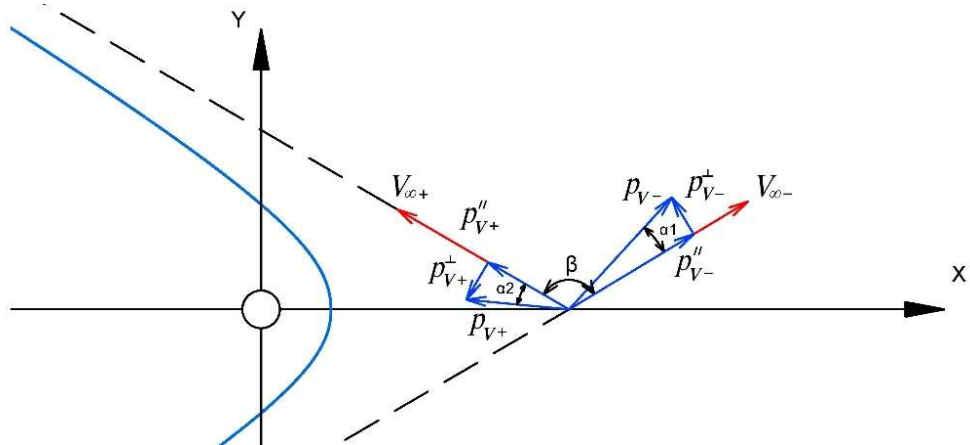


Рисунок 3. Геометрическая интерпретация необходимых условий оптимальности гравитационного маневра для случая  $\beta = \beta_{max}$ .

Одна из этих компонент есть проекция базис-вектора на направление вектора ГИС, назовем её коллинеарной компонентой  $p_{V}^{\parallel}$ . Вторая компонента  $p_{V}^{\perp}$ , назовем её перпендикулярной компонентой, перпендикулярна вектору ГИС и лежит в плоскости ГМ.

Условие оптимальности ГМ предусматривают следующие ограничения на введённые компоненты:

- величина перпендикулярной компоненты базис-вектора при подлёте к планете равна величине перпендикулярной компоненты при отлёте от планеты, и они всегда направлены в сторону гравитационного центра:

$$p_{V-}^{\perp} = p_{V+}^{\perp}, \quad (7)$$

- величины параллельных компонент базис-векторов при подлёте к планете и отлёте от планеты связаны следующим скалярным равенством:

$$p_{V+}^{\parallel} = p_{V-}^{\parallel} + A \cdot p_{V-}^{\perp}, \quad (8)$$

где  $A = 4 \cdot \tan\left(\frac{\beta}{2}\right) \cdot \left(1 - \sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\right)$ .

Предлагается следующий способ расчёта точки ГМ, разработанный автором и не требующий решения вспомогательной задачи и сравнительно несильно увеличивающий порядок краевой задачи.

Проведём анализ межпланетного перелёта, включающего один ГМ. Условно разобьём траекторию точки ГМ на два участка. Первый участок от планеты старта до планеты, в окрестности которой совершается ГМ, второй участок от планеты ГМ до планеты назначения.

После расчёта первого участка траектории нам становятся известны компоненты вектора ГИС подлёта к промежуточной планете  $V_{\infty-}$ . Зная величину и направление  $V_{\infty-}$  можно однозначно определить величину и направление  $V_{\infty+}$  путём ввода двух параметров ГМ: угла поворота ГИС  $\beta$  и угла поворота плоскости пролётной гиперболы  $\gamma$  относительно произвольной, например, эклиптической системы координат. При этом  $\beta \in [0, \beta_{\max}]$ ,  $\gamma \in [0, 2 \cdot \pi]$ . На рисунке 4 показана плоскость гравитационного манёвра, которой принадлежат векторы  $V_{\infty-}$  и  $V_{\infty+}$ . Линия пересечения картинной плоскости с плоскостью эклиптики X-Y обозначена l, линия пересечения картинной плоскости с плоскостью ГМ обозначена m. Анализируемый угол  $\gamma$  есть угол между l и m, отсчитываемый от l к m против часовой стрелки, если смотреть с конца вектора  $V_{\infty-}$ , (он перпендикулярен картинной плоскости, в которой расположены l и m).

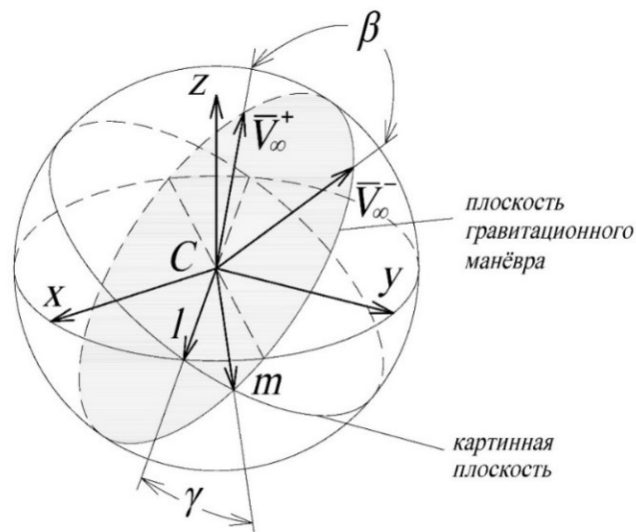


Рисунок 4. Графическое изображение углов  $\beta$  и  $\gamma$ .

Компоненты вектора  $\mathbf{V}_{\infty+}$  определяются из следующего соотношения:

$$\mathbf{V}_{\infty+} = \begin{pmatrix} V_{\infty-x} & \frac{-V_{\infty-y} \cdot |\mathbf{V}_{\infty-}|}{\sqrt{V_{\infty-x}^2 + V_{\infty-y}^2}} & \frac{-V_{\infty-x} \cdot V_{\infty-z}}{\sqrt{V_{\infty-x}^2 + V_{\infty-y}^2}} \\ V_{\infty-y} & \frac{V_{\infty-x} \cdot |\mathbf{V}_{\infty-}|}{\sqrt{V_{\infty-x}^2 + V_{\infty-y}^2}} & \frac{-V_{\infty-y} \cdot V_{\infty-z}}{\sqrt{V_{\infty-x}^2 + V_{\infty-y}^2}} \\ V_{\infty-z} & 0 & \sqrt{V_{\infty-x}^2 + V_{\infty-y}^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\beta) \\ \sin(\beta) \cdot \cos(\gamma) \\ \sin(\beta) \cdot \sin(\gamma) \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где  $V_{\infty-x}, V_{\infty-y}, V_{\infty-z}$  - компоненты вектора ГИС при подлёте к планете для ГМ.

Аналогичным образом, зная компоненты подлётного базис-вектора  $\mathbf{p}_{V-}$  и величины углов  $\beta$  и  $\gamma$ , можно однозначно определить компоненты вектора  $\mathbf{p}_{V+}$ .

В случае, если  $\beta < \beta_{max}$  компоненты вектора  $\mathbf{p}_{V+}$  определяются из следующего соотношения:

$$\mathbf{p}_{V+} = \begin{pmatrix} p_{V-x} & \frac{-p_{V-y} \cdot |\mathbf{p}_{V-}|}{\sqrt{p_{V-x}^2 + p_{V-y}^2}} & \frac{-p_{V-x} \cdot p_{V-z}}{\sqrt{p_{V-x}^2 + p_{V-y}^2}} \\ p_{V-y} & \frac{p_{V-x} \cdot |\mathbf{p}_{V-}|}{\sqrt{p_{V-x}^2 + p_{V-y}^2}} & \frac{-p_{V-y} \cdot p_{V-z}}{\sqrt{p_{V-x}^2 + p_{V-y}^2}} \\ p_{V-z} & 0 & \sqrt{p_{V-x}^2 + p_{V-y}^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\beta) \\ \sin(\beta) \cdot \cos(\gamma) \\ \sin(\beta) \cdot \sin(\gamma) \end{pmatrix}, \quad (10)$$

где  $p_{V-x}, p_{V-y}, p_{V-z}$  - компоненты базис - вектора при подлёте к планете для ГМ.

В рассматриваемом случае необходимо выполнить необходимые условия оптимальности (5), (6) и условие (4). Условия (4) и (6) согласно (9) и (10) выполняются автоматически.

Математическая модель ГМ однозначно связывает условия коллинеарности (5) через матрицы поворота векторов (9) и (10). Из этого следует, что достаточно выполнить одно из двух необходимых условий оптимальности в (5) и второе условие выполнится автоматически.

Таким образом, в точке ГМ для случая  $\beta < \beta_{max}$  получаем:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}_{nli}(t_i) &= 0, \\ p_{V+y}^i \cdot \mathbf{V}_{\infty+x}^i - p_{V+x}^i \cdot \mathbf{V}_{\infty+y}^i &= 0, \\ p_{V+z}^i \cdot \mathbf{V}_{\infty+x}^i - p_{V+x}^i \cdot \mathbf{V}_{\infty+z}^i &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

где  $\mathbf{r}(t_i)$  - радиус-вектор КА,  $t_i$  - момент времени совершения ГМ,  $i = 1, \dots, n$ , где  $n$  - количество ГМ,  $p_{V+x}^i, p_{V+y}^i, p_{V+z}^i$  - компоненты базис-вектора  $\mathbf{p}_{V+}^i$ ,  $\mathbf{V}_{\infty+x}^i, \mathbf{V}_{\infty+y}^i, \mathbf{V}_{\infty+z}^i$  -

компоненты вектора  $V_{\infty+}^i$ . Всего получается 5 граничных условий. Неизвестными параметрами в точке ГМ являются:

$$p_r(t_i), \beta_i, \gamma_i.$$

Всего получается 5 неизвестных параметров.

Последние два слагаемые в (11) отвечают за выполнение второго условия из (5). Многочисленные практические расчёты показали, что это обеспечивает гораздо лучшую сходимость поиска решения краевой задачи по сравнению с выбором первого условия из (5).

Теперь рассмотрим случай, когда  $\beta = \beta_{max}$ . Так же как и для случая  $\beta < \beta_{max}$ , компоненты вектора  $V_{\infty+}$  определяются из соотношения (9). Теперь нужно найти компоненты вектора  $p_{V+}$ , удовлетворяющие необходимым условиям оптимальности. Вектор  $p_{V-}$  считается известным после расчёта участка траектории до ГМ. По соотношениям (12) найдем перпендикулярную  $p_{V-}^{\perp}$  и коллинеарную  $p_{V-}^{\parallel}$  компоненты подлётного базис-вектора.

$$p_{V_{\pm}}^{\perp} = p_{V_{\pm}}^T \cdot e_{\pm}^{\perp}, \quad p_{V_{\pm}}^{\parallel} = p_{V_{\pm}}^T \cdot e_{\pm}^{\parallel}, \quad (12)$$

$$\text{где } e_{\pm}^{\parallel} = \frac{V_{\infty}^{\pm}}{|V_{\infty}^{\pm}|}, \quad e^b = \frac{V_{\infty}^{-} \times V_{\infty}^{+}}{|V_{\infty}^{-} \times V_{\infty}^{+}|}, \quad e_{\pm}^{\perp} = \frac{e^b \times V_{\infty}^{\pm}}{|e^b \times V_{\infty}^{\pm}|}.$$

Используя (7) и (8) найдём перпендикулярную  $p_{V+}^{\perp}$  и коллинеарную  $p_{V+}^{\parallel}$  компоненты отлётного базис-вектора  $p_{V+}$  и вычислим модули базис-векторов  $p_{V-}$  и  $p_{V+}$  по следующему соотношению:

$$|p_{V_{\pm}}| = \sqrt{p_{V_{\pm}}^{\parallel} + p_{V_{\pm}}^{\perp}}. \quad (13)$$

Таким образом, мы определили абсолютные величины векторов  $p_{V-}$  и  $p_{V+}$ . Как известно, любой вектор — это величина, которая характеризуется своим абсолютным значением и направлением. В соответствии с этим, нам осталось определить направление базис-вектора  $p_{V+}$  и его компоненты станут нам известны.

Введём вспомогательные углы  $\alpha 1$  и  $\alpha 2$ , характеризующие угловое положение подлётного и отлётного базис-векторов относительно подлётного и отлётного гиперболических избытков скорости соответственно (см. рисунок 3). Найдём углы  $\alpha 1$  и  $\alpha 2$  по следующим соотношениям:

$$\alpha 1 = \arctan\left(\frac{p_{V-}^{\perp}}{p_{V-}^{\parallel}}\right), \quad \alpha 2 = \arctan\left(\frac{p_{V+}^{\perp}}{p_{V+}^{\parallel}}\right), \quad \alpha = \alpha 2 - \alpha 1.$$

Находится угол  $\alpha$ , характеризующий разницу в угловом положении подлётного и отлётного базис-векторов относительно соответствующих им гиперболических избытков скорости.

Повернём вектор  $\mathbf{p}_{V-}$  на углы  $\beta + \alpha$  и  $\gamma$ , тем самым определив направление вектора  $\mathbf{p}_{V+}$  и умножим полученную величину на отношение модуля отлётного базис-вектора к модулю подлётного базис-вектора:

$$\mathbf{p}_{V+} = \begin{pmatrix} p_{V-x} & \frac{-p_{V-y} \cdot |\mathbf{p}_{V-}|}{\sqrt{p_{V-x}^2 + p_{V-y}^2}} & \frac{-p_{V-x} \cdot p_{V-z}}{\sqrt{p_{V-x}^2 + p_{V-y}^2}} \\ p_{V-y} & \frac{p_{V-x} \cdot |\mathbf{p}_{V-}|}{\sqrt{p_{V-x}^2 + p_{V-y}^2}} & \frac{-p_{V-y} \cdot p_{V-z}}{\sqrt{p_{V-x}^2 + p_{V-y}^2}} \\ p_{V-z} & 0 & \sqrt{p_{V-x}^2 + p_{V-y}^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\beta + \alpha) \\ \sin(\beta + \alpha) \cdot \cos(\gamma) \\ \sin(\beta + \alpha) \cdot \sin(\gamma) \end{pmatrix} \cdot \frac{|\mathbf{p}_{V+}|}{|\mathbf{p}_{V-}|}.$$

Таким образом, в точке ГМ для случая, когда угол поворота ГИС  $\beta = \beta_{max}$ , мы имеем следующие условия:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}_{nli}(t_i) &= 0, \\ \mathbf{p}_{V+i}^T \cdot [\mathbf{V}_{\infty-i} \times \mathbf{V}_{\infty+i}] &= 0, \\ \beta_{max i} - \beta_i &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

где  $i = 1, \dots, n$ ,  $n$  – количество ГМ. Всего получается 5 граничных условий.

Выше были рассмотрены два отдельных случая в точке ГМ, когда  $\beta < \beta_{max}$  и  $\beta = \beta_{max}$ . Представляется целесообразным объединить эти случаи, что позволит заметно снизить трудоёмкость оптимизации траекторий, включающих ГМ.

Перепишем условия коллинеарности базис-вектора и вектора ГИС КА для случая  $\beta < \beta_{max}$  (два последних равенства в (11)) в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{p}_{V+i}^T \cdot [\mathbf{V}_{\infty-i} \times \mathbf{V}_{\infty+i}] &= 0, \\ p_{V+}^\perp &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

В самом деле, если отлётный базис-вектор  $\mathbf{p}_{V+}$  и отлётный вектор ГИС  $\mathbf{V}_{\infty+}$  лежат в одной плоскости и при этом  $p_{V+}^\perp = 0$ , то эти векторы коллинеарны. Таким образом, для общего случая  $\beta \leq \beta_{max}$  мы имеем 4 граничных условия в точке ГМ типа равенства – первое векторное равенство в (11) или в (14) и первое равенство в (15) или второе в (14).

При этом в общем случае перпендикулярная компонента базис-вектора  $p_{V+}^\perp$  должна удовлетворять неравенству:

$$p_{V+}^\perp \geq 0, \quad (16)$$

а угол поворота  $\beta$  при ГМ должен удовлетворять условию:

$$\beta_{max} - \beta \geq 0 \quad (17)$$

В итоге, в общем случае в точке ГМ мы имеем два граничных условия типа неравенства (16) и (17). Воспользуемся приёмом ввода в граничные условия и неизвестные параметры краевой задачи дополнительных ослабляющих переменных. В соответствии с этим методом преобразуем граничные условия в виде неравенств в граничные условия



равенства путём добавления к каждому из них неотрицательной ослабляющей переменной  $b_j^2$ , ( $j=1,\dots,2$ ):

$$\left. \begin{aligned} \beta_{\max i} - \beta_i - b_{1i}^2 &= 0, \\ p_{V+}^\perp - b_{2i}^2 &= 0, \end{aligned} \right\}$$

где  $i = 1, \dots, n$ ,  $n$  – количество ГМ.

При этом согласно условиям трансверсальности, в точке ГМ или  $b_{1i}=0$  или  $b_{2i}=0$ . В соответствии с этим запишем ещё одно граничное условие:

$$b_{1i} \cdot b_{2i} = 0.$$

В итоге в точке ГМ для общего случая  $\beta \leq \beta_{\max}$  должны выполняться следующие граничные условия:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}_{ni}(t_i) &= 0, \\ \mathbf{p}_{V+i}^T \cdot [\mathbf{V}_{\infty-i} \times \mathbf{V}_{\infty+i}] &= 0, \\ \beta_{\max i} - \beta_i - b_{1i}^2 &= 0, \\ p_{V+}^\perp - b_{2i}^2 &= 0, \\ b_{1i}^2 \cdot b_{2i}^2 &= 0, \end{aligned} \right\}$$

где  $i = 1, \dots, n$ ,  $n$  – количество ГМ. Всего получается 7 граничных условий. Незвестных параметров в точке ГМ тоже 7:

$$\mathbf{p}_r(t_i), \beta_i, \gamma_i, b_{1i}, b_{2i}$$

При проведении оптимизации траекторий с ГМ в работе использовались необходимые условия оптимальности для дат проведения ГМ  $t_i$ :

$$\mathbf{p}_{r+}^i(t_i)^T \mathbf{V}_{\infty+}^i - \mathbf{p}_{r-}^i(t_i)^T \mathbf{V}_{\infty-}^i = 0.$$

Далее рассматриваются модельные задачи, демонстрирующие возможности предлагаемой методики на примерах перелёта от Земли к Юпитеру с гравитационным манёвром у Земли и перелёта от Земли к Меркурию с гравитационным манёвром у Венеры.

В **третьей главе** диссертационной работы был проведён анализ транспортной системы с СЭРДУ для различных вариантов мощности энергоустановки. Проведена оптимизация перелёта Земля-Юпитер как прямого, так и с одними и двумя ГМ у Земли в новой постановке с ступенчатой зависимостью функции тяги от гелиоцентрического расстояния КА. Рассматривается случай подлёта к Юпитеру с некоторой оптимальной величиной ГИС.

Величины и направления ГИС при отлёте от Земли и при подлёте к Юпитеру являются выбираемыми параметрами, так же, как и дата старта и даты проведения ГМ. Общее время перелёта фиксируется и является одинаковым для всех рассматриваемых схем. Закон включения - выключения двигателя и программа ориентации вектора тяги оптимизируются по критерию максимизации конечной массы КА. Математическая модель ГМ использует ослабляющие переменные, что даёт возможность использовать ограничения типа неравенств.

Транспортная система включает ракету-носитель среднего класса «Союз-2.1б», ХРБ «Фрегат» и СЭРДУ. Общее время перелёта выбрано равным 6 годам (2191 суток) для всех анализируемых схем. Рассматривается эпоха старта с 1 января до 31 декабря 2026 года.

Масса КА, выводимого на низкую околоземную орбиту (круговая орбита высотой 200 км), считается равной  $M_0=8200$  кг. Из материалов НПО им. Лавочкина следует, что ХРБ «Фрегат» в одном из вариантов имеет следующие характеристики:

- максимальная масса рабочего запаса топлива 5750 кг (допускается неполная заправка баков ХРБ);
- конечная масса ХРБ, включая массу адаптера разгонного блока с КА,  $m_{сyx}=1050$  кг;
- удельная тяга его двигателя 333,2 сек.

Химическая двигательная установка с запасом топлива для маневрирования КА в окрестности Юпитера (перевода КА на орбиту вокруг Юпитера) имеет удельный импульс  $w_k=310$  с.

Рассматриваются варианты энергоустановок с входной мощностью от 5 до 15 кВт с шагом в 5 кВт для ЭРДУ на расстоянии 1.25 а.е. от Солнца. На больших расстояниях или не предполагается работа двигательной установки или один, или несколько двигателей отключаются. Считается, что один двигатель потребляет 5 кВт электрической мощности. Рассматриваются варианты удельной массы СЭРДУ 15 и 25 кг/кВт.

Ориентируясь на ионные двигательные установки типа RIT-22, RITA-150, RIT-2x полагаем, что удельный импульс используемых двигателей 4500 с. Общий КПД ЭРДУ принят равным 0.8. При этом тяга одного электроракетного двигателя равна 0.15 Н.

Максимальное расстояние КА от Солнца  $r_{max}$ , на котором работает указанное число двигателей, определялось по следующему соотношению:

$$r_{max} = r_0 \cdot \left( \frac{N_0}{N_{max}} \right)^{\frac{1}{\alpha}},$$

где  $\alpha$  - параметр, характеризующий зависимость мощности солнечных батарей от гелиоцентрического удаления КА, принят равным 1.7,  $N_0$  - электрическая мощность, вырабатываемая солнечной энергетической установкой для ЭРДУ на расстоянии  $r_0=1$  а.е. от Солнца,  $N_{max}$  - электрическая мощность, которая нужна для обеспечения работы максимального количества двигателей ЭРДУ в зависимости от рассматриваемого варианта (15 кВт – для трех, 10 кВт – для двух и 5 кВт – для одного двигателя). Модель, определяющая число работающих двигателей, приведена в табл. 1.

Маневры КА в окрестности Юпитера рассматриваются в следующей постановке. В перицентре гиперболы подлета КА к Юпитеру (его радиус принимается равным 900 тыс. км) дается тормозной импульс скорости, переводящий КА на эллиптическую орбиту с радиусом апоцентра 20 млн. км. Критерием оптимальности принимается масса КА на эллиптической орбите около Юпитера после первого тормозного импульса скорости.

Таблица 1. Модель работы ЭРДУ как функции мощности энергетической установки и расстояния КА от Солнца.

$N_0$ , кВт	Максимальное количество двигателей $n_{max}$	$N_{max}$ , кВт	Максимальное расстояние КА от Солнца $r_{max}$ , на котором работает указанное число двигателей, а.е.		
			3	2	1
21.920	3	15	1.25	1.587	2.385
14.613	2	10		1.25	1.879
7.307	1	5			1.25

Для того чтобы избежать разрывов правых частей дифференциальных уравнений оптимального движения КА в моменты изменения количества работающих двигателей, вводится сглаживание зависимости величины тяги от гелиоцентрического расстояния:

$$P = \frac{P_o}{2 \cdot n_{\max}} \cdot \sum_{i=1}^n \left( \frac{r_i - r(t)}{|r_i - r(t)| + \varepsilon(\tau)} + 1 \right),$$

где  $\varepsilon(\tau) = (1-\tau) \cdot \varepsilon_o + \tau \cdot \varepsilon_k$ ;  $\tau$  - параметр продолжения;  $\varepsilon_o$  и  $\varepsilon_k$  - параметры сглаживания.

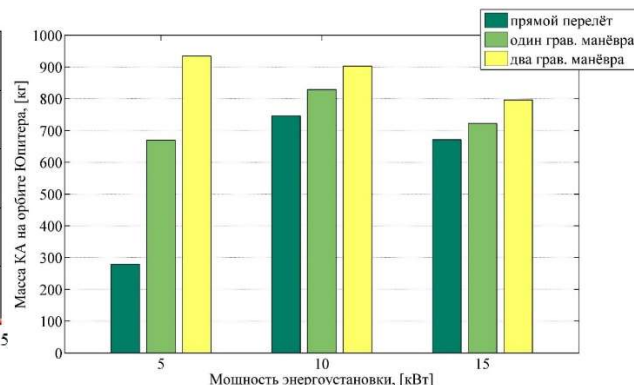
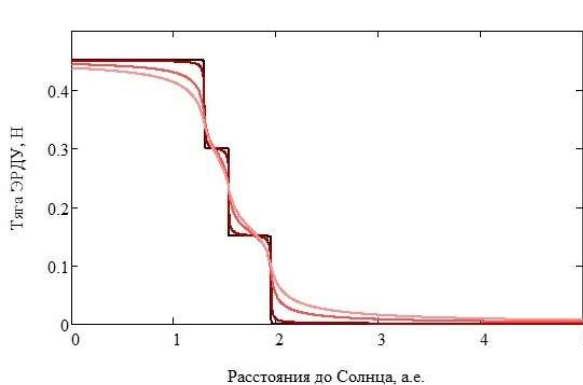


Рис. 5. Зависимость тяги ЭРДУ от расстояния КА от Солнца и параметра продолжения. Вариант энергетической установки 15 кВт,  $\varepsilon_o = 10^{-2}$ ,  $\varepsilon_k = 10^{-4}$ .

Рис. 6. зависимость конечной массы КА от располагаемой бортовой мощности для разных схем перелёта при  $\gamma_{ЭРДУ} = 25 \text{ кг/кВт}$ .

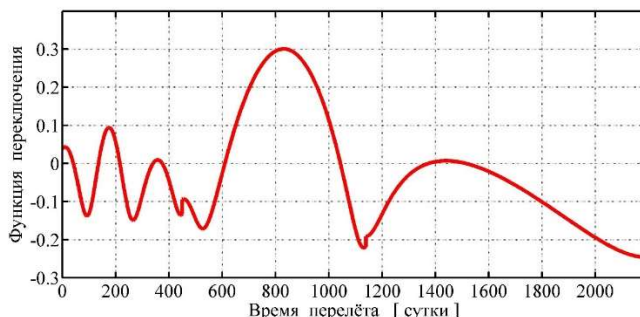
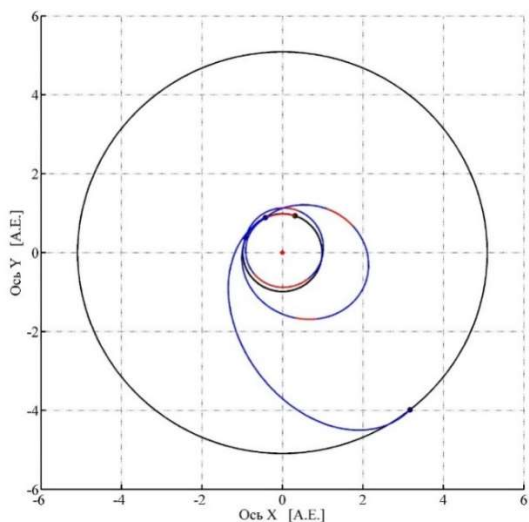


Рис. 7. Проекция на плоскость эклиптики гелиоцентрической траектории перелёта КА по маршруту Земля-Земля-Земля- Юпитер.

Рис. 8. Зависимость функции переключения КА от времени по маршруту Земля-Земля-Земля-Юпитер.

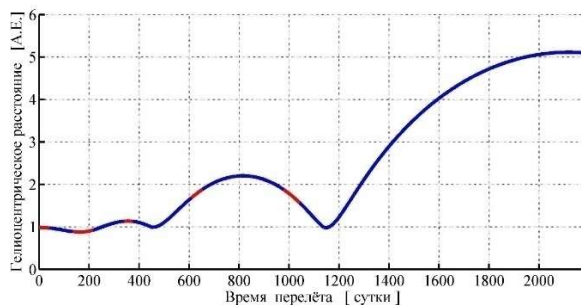
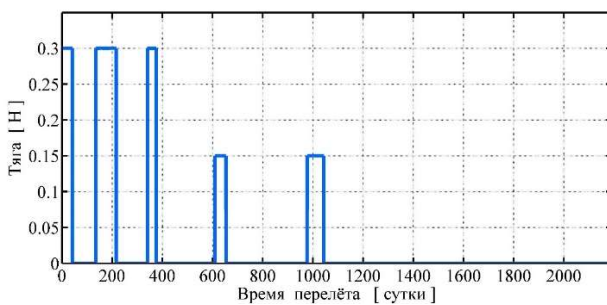


Рис. 9. Зависимость тяги КА от времени.

Рис. 10. Изменение расстояния КА от Солнца в зависимости от времени перелёта.

На рис.5 показана сглаженная зависимость тяги от расстояния КА до Солнца для энергоустановки мощностью 15 кВт, зависящая от параметра продолжения и обеспечивающая работу трёх двигателей на расстоянии КА от Солнца до 1.25 а.е. При параметре продолжения  $\tau=0$  степень сглаживания максимальна, а при  $\tau=1$  функция тяги близка к ступенчатой. Для  $\varepsilon_o$  и  $\varepsilon_k$  принимались значения  $10^{-2}$  и  $10^{-4}$  соответственно. На рисунке представлена зависимость тяги от расстояния КА от Солнца для четырёх значений параметра продолжения  $\tau$ : 0, 0.5, 0.95 и 1. Чем светлее цвет, тем меньше значение  $\tau$ .

Проведённый анализ показал, что добавление ГМ в схему перелёта смещает значение оптимальной мощности СЭРДУ в сторону меньших значений. Для удельной массы ЭРДУ  $\gamma_{ЭРДУ}=25\text{кг/кВт}$  при прямом перелёте и перелёте с одним гравитационным манёвром оптимальной оказалась мощность 10 кВт, для схемы с двумя ГМ 5 кВт. Чем меньше мощность СЭРДУ, тем больший выигрыш можно получить от ГМ. Итоговые результаты оптимизации рассматриваемых схем перелёта для  $\gamma_{ЭРДУ}=25\text{кг/кВт}$  представлены на рисунке 6.

На рисунке 7 приведена проекция на плоскость эклиптики гелиоцентрической траектории перелёта КА на маршруте Земля–Земля–Земля–Юпитер для мощности СЭРДУ 10 кВт для  $\gamma_{ЭРДУ}=15\text{кг/кВт}$ . Траектория КА имеет 5 активных и 5 пассивных участков. Траектория после второго ГМ полностью пассивная, что определяется программой функционирования СЭРДУ, несмотря на то, что функция переключения допускает наличие одного активного участка (см. рисунок 8). Так же следует отметить, что при первом и втором гравитационных манёврах оптимальным оказался случай  $\beta=\beta_{max}$ .

На рисунке 9 видно, что максимальная тяга СЭРДУ составляет 0.3 Н, что соответствует двум работающим двигателям для варианта мощности СЭРДУ 10 кВт. На рисунке 10 представлено изменение расстояния КА от Солнца в зависимости от времени перелёта.

## ВЫВОДЫ ПО РАБОТЕ

В работе рассмотрена проблема оптимизации межпланетных траекторий КА с ЭРДУ, в том числе с использованием ГМ. Проведён анализ ряда существующих эффективных методик оптимизации межпланетных траекторий, включающих гравитационные манёвры.

Основными результатами работы являются:

- модифицированный метод ППП, позволяющий получать решение для двигателя ОТ уже на первом этапе расчёта;
- метод ППП (или предложенная автором его модификация) развит для возможности его использования при решении многоточечных краевых задач, таких как межпланетные перелёты с ГМ.
- новая методика оптимизации сложных схем межпланетных перелётов, включающих гравитационные манёвры, не требующая решения вспомогательных задач, обладающая хорошей сходимостью и высокой скоростью расчёта за счёт относительно небольшого увеличения порядка краевой задачи при добавлении ГМ;
- новый подход, использующий дополнительные ослабляющие переменные и позволяющий решать краевые задачи с ограничениями смешанного типа;
- анализ ряда численных примеров как прямых перелётов, так и перелётов с ГМ, полученных с помощью предложенных автором модифицированного метода ППП и методики оптимизации траекторий с ГМ с ограничениями смешанного типа;

- подробный анализ перелёта от Земли к Юпитеру с СЭРДУ для разных схем перелёта – прямого, с одним гравитационным манёвром у Земли и с двумя ГМ у Земли при новой постановке краевой задачи, отличающейся введением ступенчатой зависимости величины тяги от гелиоцентрического расстояния КА;
- программное обеспечение для оптимизации межпланетных перелётов, реализующее указанные выше наработки автора.

## ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

*В изданиях из перечня ВАК Минобрнауки РФ или входящих в МБД:*

1. Константинов М.С., Орлов А.А. «Оптимизация траектории перелёта космического аппарата с малой тягой для исследования Юпитера с использованием гравитационного манёвра у Земли.» Вестник ФГУП «НПО им. С.А. Лавочкина». 2013. Т. 21, №5. С. 42-46.
2. Константинов М.С., Орлов А.А. «Оптимизация траектории к Юпитеру космического аппарата с малой тягой с использованием двух гравитационных манёвров у Земли» Журнал «Вестник МАИ». 2014. Т. 21. № 1. С 58-69.
3. Константинов М.С., Орлов А.А., Тейн М. «Анализ влияния мощности солнечной энергетической установки на характеристики перелёта космического аппарата с солнечной электроракетной двигательной установкой к Юпитеру». Известия РАН. Энергетика. № 3, 2017, с. 97-113.
4. Konstantinov M. S., Orlov A. A. «Optimization of the Transfer Path of a Low Thrust Spacecraft for Research of Jupiter Using an Earth Gravity Assist Maneuver.» *Sol. Syst. Res, 2014, Vol. 48, No. 7, pp. 605–610.*
5. Орлов А.А. Автоматизация выбора начального приближения для решения краевой задачи оптимизации траекторий космических аппаратов с двигателем малой тяги. Идеи К.Э. Циолковского: прошлое, настоящее, будущее. Материалы XLVII научных чтений памяти К.Э. Циолковского, с. 171, 2012.
6. Константинов М.С., Орлов А.А. Оптимизация траектории перелёта космического аппарата с двигательной установкой малой тяги для исследования Юпитера с использованием гравитационного манёвра у Земли. Сравнение с траекторией космического аппарата без гравитационного манёвра. К.Э. Циолковский и инновационное развитие космонавтики. Материалы XLVIII научных чтений памяти К.Э. Циолковского, с. 114, 2013.