УДК 517.927

Об одной краевой задаче для дробного дифференциального уравнения адвекции-диффузии

Алероев Т.С.*, Хасамбиев М.В., Исаева Л.М.*****

Московский государственный строительный университет, МГСУ,

Ярославское шоссе, 26, Москва, 129337, Россия

**e-mail: aleroev@mail.ru*

***e-mail: hasambiev@mail.ru*

****e-mail: l.m.isaeva@mail.ru*

Аннотация

В данной работе рассматриваются некоторые аспекты применения дробного исчисления в исследовании массопереноса в средах с фрактальными свойствами. Решена задача для стационарного уравнения переноса вещества в режимах супер диффузии и аномальной адвекции. Изучены свойства решения краевой задачи для одномерного уравнения адвекции-диффузии дробного порядка.

Ключевые слова: уравнение дробного порядка, дробная производная, функция Миттаг-Леффлера, собственные значения, собственные функции, коэффициенты Фурье.

Введение

Настоящая работа посвящена исследованию краевой задачи для уравнения диффузии дробного порядка:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = D_{0+}^{\alpha} u(x,t), & (1) \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & (2) \\ u(x,0) = \delta(x), & (3) \end{cases}$$

где $D_{0+}^{\alpha} u(x,t) = \dfrac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} \int\limits_0^x \dfrac{u(z,t)dz}{(x-z)^{\alpha-1}}$ – производная дробного порядка (в смысле Римана-Лиувилля) $1 < \alpha < 2$ [1]. Такие краевые задачи возникают при описании физических процессов стохастического переноса, при изучении фильтрации жидкости в сильно пористой фрактальной среде.

Дифференциальное уравнение диффузии дробного порядка $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = D_{0+}^{\alpha} u(x,t)$ описывает эволюцию некоторой физической системы с потерями, причем показатель α дробной производной $D_{0+}^{\alpha} u(x,t)$ указывает на долю состояний системы, сохраняющихся за все время эволюции.

Такие системы могут быть классифицированы как системы с «остаточной памятью», занимающие промежуточное положение между системами, обладающими «полной памятью», с одной стороны и Марковскими системами, с другой.

Развитие дробного исчисления способствовало разработке фрактальной теории переноса, что привело к созданию нового математического аппарата для описания диффузионных процессов [1], [2]. С его использованием в данной работе изучается краевая задача для уравнения (1).

Постановка задачи

Рассматривается краевая задача (1), (2), (3). Имеют место следующие теоремы:

Теорема 1. Функция $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \exp\{\lambda_n t\} x^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda_n x^{\alpha})$ является решением задачи (1), (2), (3). Здесь $E_{\alpha,\alpha}(\lambda_n x^{\alpha}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda_n x^{\alpha})^k}{\Gamma(\alpha + \alpha k)}$ – известная функция Миттаг-Леффлера [3], а φ_n – соответствующие коэффициенты Фурье.

Теорема 2. Решение $u(x;t)$ краевой задачи (1), (2), (3) удовлетворяет условиям: а) $\lim_{t\to+\infty} u(x,t) = 0$, б) $\lim_{t\to\infty} u_t(x,t) = 0$.

Приведем доказательства этих теорем.

Доказательство теоремы 1. Найдем непрерывное в замкнутой области $(0 \le x \le 1,\ 0 \le t \le T)$ решение однородного дробного дифференциального уравнения

$$u_t(x,t) = D_x^{\alpha} u(x,t)\,, \tag{1}$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u(x,0) = \varphi(x)\,; \qquad 0 \le x \le 1 \tag{3}$$

и однородным граничным условиям

$$u(0,t) = 0\,, \quad u(1,t) = 0\,; \quad 0 \le t \le T\,. \tag{2}$$

Для решения этой задачи рассмотрим, как принято в методе разделения переменных [4], сначала основную вспомогательную задачу:

найти решение уравнения

$$u_t(x,t) = D_x^{\alpha} u(x,t)\,, \tag{1}$$

не равное тождественно нулю, удовлетворяющее однородным граничным условиям

$$u(0,t) = 0\,, \quad u(1,t) = 0 \tag{2}$$

и представимое в виде

$$u(x,t) = \omega(x)\,\rho(t)\,, \tag{4}$$

где $\omega(x)$ – функция только переменного x, $\rho(t)$ – функция только переменного t.

Подставляя предполагаемую форму решения (4) в уравнение (1) и производя деление обеих частей равенства на $\omega(x)\,\rho(t)$, получим:

$$\frac{\rho'(t)}{\rho(t)} = \frac{D_x^{\alpha}\omega(x)}{\omega(x)} = \lambda\,, \tag{5}$$

где $\lambda = \mathrm{const}$, так как левая часть равенства зависит только от t, а правая – только от x.

Из (5) следует, что

$$D_x^{\alpha}\omega(x)=\lambda\omega(x), \tag{6.1}$$

$$\rho'(t)=\lambda\rho(t). \tag{6.2}$$

Граничные условия (3) дают:

$$\omega(0)=0, \quad \omega(1)=0. \tag{7}$$

Таким образом, для определения функции $\omega(x)$ мы получили задачу о собственных значениях (задачу Штурма-Лиувилля)

$$D_x^{\alpha}\omega(x)=\lambda\omega(x), \quad \omega(0)=0, \quad \omega(1)=0, \tag{8}$$

изученную в работах [5], [6], [7]. В этих работах было показано, что только для собственных значений λ_n, являющихся нулями функции $E_{\alpha,\alpha}(\lambda)$, существуют собственные функции задачи (8), равные

$$\omega_n=x^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda_n x^{\alpha}). \tag{9}$$

Этим собственным значениям λ_n, очевидно, соответствуют решения уравнения (6.2)

$$\rho_n=\varphi_n\exp\{\lambda_n t\},$$

где δ_n – неопределенные пока коэффициенты.

Возвращаясь к основной вспомогательной задаче, видим, что функции

$$u_n(x,t)=\omega_n(x)\rho_n(t)=\varphi_n\exp\{\lambda_n t\}x^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda_n x^{\alpha})$$

являются частными решениями уравнения (1), удовлетворяющими нулевым граничным условиям.

Обратимся теперь к решению задачи (1), (2), (3). Формально составим ряд

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n \exp\{\lambda_n t\}x^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda_n x^{\alpha}). \qquad (10)$$

Функция $u(x,t)$ удовлетворяет граничным условиям, так как им удовлетворяют все члены ряда. Требуя выполнения начальных условий, получаем:

$$\varphi(x)=u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n x^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda_n x^{\alpha}). \qquad (11)$$

В [8] было показано, что система функций $\omega_n=\{x^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda_n x^{\alpha})\}_{n=1}^{\infty}$ образует базис в $L_2(0,1)$. Так как базис $\omega_n=\{x^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda_n x^{\alpha})\}_{n=1}^{\infty}$ не ортогональный, то вместе с системой ω_n будем рассматривать систему $z_n=\{(1-x)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda_n(1-x)^{\alpha})\}_{n=1}^{\infty}$ – биортогональную к системе ω_n [9]. Вообще говоря, система $z_n=\{(1-x)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda_n(1-x)^{\alpha})\}_{n=1}^{\infty}$ – это система собственных функций сопряженной задачи [10].

Теперь неизвестные коэффициенты φ_n можно определить с помощью системы функций $z_n=\{(1-x)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda_n(1-x)^{\alpha})\}_{n=1}^{\infty}$:

$$\varphi_n=(\varphi(x),z_n), \qquad (12)$$

где $(\varphi(x),z_n)$ – скалярное произведение функций $\varphi(x)$ и z_n.

Рассмотрим теперь ряд (10) с коэффициентами φ_n, определяемыми по формуле (12) и покажем, что этот ряд удовлетворяет всем условиям задачи (1), (2), (3). Для этого нужно доказать, что функция, определяемая рядом (10) дифференцируема, удовлетворяет уравнению (1) в области $0<x<1$, $t>0$ и непрерывна в точках границы этой области (при $t=0$, $x=0$, $x=1$).

Так как уравнение (1) линейно, то в силу принципа суперпозиции ряд, составленный из частных решений, также будет решением, если он сходится и его можно дифференцировать почленно один раз по t и дважды по x $(1<\alpha<2)$.

Докажем, что для любых $0\le x\le 1$ и $0\le t\le T$ ряд (10) сходится абсолютно. Так как достаточно большие по модулю нули λ_n функции $E_{\alpha,\alpha}(\lambda_n x^\alpha)$ находятся вне замкнутого угла $\left\{\lambda_n : \left|\arg\left(\lambda_n\right)\right| \le \frac{\alpha\pi}{2}\right\}$, то $\arg(\lambda_n) > \frac{\pi}{2}$ [11]. В этом случае справедливы следующие соотношения [11]:

$$|\exp\{\lambda_n t\}|<1, \tag{13}$$

$$|E_{\alpha,\beta}(\lambda_n)| \le \frac{1}{1+|\lambda_n|}. \tag{14}$$

Для достаточно больших (по абсолютной величине) нулей λ_n функции $E_{\alpha,\alpha}(\lambda_n)$ также справедливо следующее соотношение [11]:

$$\lambda_n^{\frac{1}{\alpha}} = 2n\pi i-(1+\alpha)\left[\ln(2n\pi)+\frac{\pi}{2}i\right]+\ln\frac{\alpha}{\Gamma(-\alpha)}+O(1)=$$
$$=\left[-(1+\alpha)\ln(2n\pi)+\ln\frac{\alpha}{\Gamma(-\alpha)}+O(1)\right]+\left[2n\pi-\frac{\pi}{2}(1+\alpha)\right]i,$$

откуда следует, что $|\lambda_n^{\frac{1}{\alpha}}|^2=\left[-(1+\alpha)\ln(2n\pi)+\ln\frac{\alpha}{\Gamma(-\alpha)}+O(1)\right]^2+\left[2n\pi-\frac{\pi}{2}(1+\alpha)\right]^2 \approx$

$$\approx \left[(1+\alpha)\ln(2n\pi)\right]^2+(2n\pi)^2 \approx O(n^2).$$

Таким образом,

$$|\lambda_n| \sim O(n^{\alpha}). \tag{15}$$

С учетом (13), (14) для ряда (10), получаем:

$$|\varphi_n \exp\{\lambda_n t\} x^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda_n x^{\alpha})| \le |\varphi_n| \cdot |E_{\alpha,\alpha}(\lambda_n x^{\alpha})| \le |\varphi_n| \frac{1}{1+|\lambda_n| x^{\alpha}} \le |\varphi_n| \frac{1}{|\lambda_n| x^{\alpha}}.$$

Рассмотрим теперь мажорирующий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_n|}. \tag{16}$$

Воспользовавшись эквивалентностью (15), мажоранту (16) запишем в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}, \quad (1 < \alpha < 2). \tag{17}$$

Как видно, ряд (17) является сходящимся обобщенным гармоническим рядом, из чего следует абсолютная сходимость ряда (10) для любых $0 \le x \le 1$ и $0 \le t \le T$.

Покажем теперь, что при $t \ge \overline{t} \ge 0$ ($\overline{t}$ – любое вспомогательное число) ряды производных

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n(x;t)}{\partial t} \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n^2(x;t)}{\partial x^2}$$

сходятся равномерно. Сформулируем дополнительные требования, которым должна удовлетворять функция $\varphi(x)$. Предположим сначала, что $\varphi(x)$ ограничена, $|\varphi(x)| < M$; тогда

$$|\varphi_n| = 2\left|\int_0^1 \varphi(\xi) z_n(\xi) d\xi\right| < 2M,$$

откуда следует, что $\left|\dfrac{\partial u_n(x,t)}{\partial t}\right| < 2M\,|\lambda_n \exp\{\lambda_n \overline{t}\} x^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda_n x^{\alpha})| <$

$$< 2M\,|\lambda_n| \frac{1}{1+|\lambda_n|} < 2M\,|\lambda_n| \frac{1}{|\lambda_n|} < 2M \text{ для } t \ge \overline{t}\,.$$

и аналогично, учитывая что $\left(\dfrac{d}{dz}\right)^m \left[z^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(z^{\alpha}) \right] = z^{\beta-m-1} E_{\alpha,\beta-m}(z^{\alpha})$,

$$\left|\frac{\partial^2 u_n(x,t)}{\partial x^2}\right| = 2M \left| \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \left[x^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda_n x^{\alpha}) \right] \exp\{\lambda_n \overline{t}\} \right| =$$

$$= 2M\,|x^{\alpha-3} E_{\alpha,\alpha-2}(\lambda_n x^{\alpha})|\,|\exp\{\lambda_n \overline{t}\}| < 2M \quad \text{для } t \ge \overline{t}\,.$$

Отсюда следует, что при $t > 0$ ряд (10) представляет собой функцию, дифференцируемую почленно один раз по t и два раза по x, а значит, имеющую производную порядка α, так как $1 < \alpha < 2$.

Если функция $\varphi(x)$ непрерывна, имеет кусочно-непрерывную производную и удовлетворяет условиям $\varphi(0) = 0$ и $\varphi(1) = 0$, то ряд (10) определяет непрерывную функцию при $t \ge 0$.

Действительно, из неравенства

$$|u(x,t)| < |\varphi_n| \qquad (\text{при } t \ge 0,\ 0 \le x \le 1)$$

сразу же следует равномерная сходимость ряда (10) при $t \ge 0$, $0 \le x \le 1$, что и доказывает справедливость сделанного выше утверждения, если учесть, что для непрерывной и кусочно-гладкой функции $\varphi(x)$ ряд из модулей коэффициентов Фурье сходится, если $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$.

Таким образом, краевая задача для дробного дифференциального уравнения адвекции-диффузии решена полностью.

Доказательство теоремы 2.

Докажем соотношение (a) $\lim_{t\to+\infty} u(x,t)=0$. Известно, что решение задачи (1), (2), (3) имеет вид

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\delta_n \exp\{\lambda_n t\} x^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda_n x^{\alpha}).$$

Найдем оценку сверху для абсолютной величины решения $u(x;t)$:

$$|u(x,t)| \le \sum_{n=1}^{\infty}|\delta_n| \exp\{\lambda_n t\} x^{\alpha-1} |E_{\alpha,\alpha}(\lambda_n x^{\alpha})|.$$

Как известно [11], для достаточно больших по модулю нулей функции $E_{\alpha,\alpha}(\lambda_n x^{\alpha})$ справедлива оценка:

$$|E_{\alpha,\alpha}(\lambda_n x^{\alpha})| \le \frac{1}{1+|\lambda_n|\cdot x^{\alpha}}.$$

Если $0<x\le 1$, то

$$|u(x,t)| \le \sum_{n=1}^{\infty}|\delta_n| \exp\{\lambda_n t\}\cdot \frac{x^{\alpha-1}}{1+|\lambda_n| x^{\alpha}} \le \sum_{n=1}^{\infty}|\delta_n| \exp\{\lambda_n t\}.$$

Также известно [11], что $|\lambda_n| \sim O(n^{\alpha})$ и $|\arg(\lambda_n)| \le \frac{\alpha\pi}{2}$, тогда для достаточно

большого n

$$|\exp\{\lambda_n t\}| = |\exp\{|\lambda_n t|(\cos(\arg(\lambda_n t)) + i\sin(\arg(\lambda_n t)))\}| =$$

$$= \exp\{|\lambda_n t|\cos(\arg(\lambda_n t))\} = \exp\left\{|\lambda_n t|\cos\frac{\alpha\pi+\varepsilon}{2}\right\} = \exp\left\{O(n^{\alpha}t)\cos\frac{\alpha\pi+\varepsilon}{2}\right\}.$$

Отсюда следует, что

$$|u(x,t)| \le \sum_{n=1}^{\infty}|\delta_n|\exp\left\{O(n^{\alpha}t)\cos\frac{\alpha\pi+\varepsilon}{2}\right\} \le \sum_{n=1}^{\infty} O\left(\frac{1}{\exp\{O(n^{\alpha}t)\}}\right) \le$$

$$\le \sum_{n=1}^{\infty} O\left(\frac{1}{\exp\{O(n^{\alpha})\}\exp\{O(t)\}}\right) = \frac{1}{\exp\{O(t)\}}\sum_{n=1}^{\infty} O\left(\frac{1}{\exp\{O(n^{\alpha})\}}\right) \to 0 \ \text{ при } t \to \infty.$$

Проводя вышеуказанное доказательство, мы можем получить, что

$\lim\limits_{t\to+\infty} u(x,t) = 0$.

Докажем соотношение (б) $\lim\limits_{t\to\infty} u_t(x,t) = 0.$

Очевидно, что

$$u_t'(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\delta_n\lambda_n \exp\{\lambda_n t\}x^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda_n x^{\alpha})$$

Пусть для достаточно большого t

$$\left|\delta_n\lambda_n \exp\{\lambda_n t\}\cdot x^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda_n x^{\alpha})\right| \le |\delta_n|\cdot\exp\{\lambda_n t\}\cdot\frac{|\lambda_n|x^{\alpha-1}}{1+|\lambda_n|x^{\alpha}}.$$

Если $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{O(n^{2\alpha t})}{\exp\{O(n^{\alpha t})\}} = 0$, то

$$\left|\delta_n\lambda_n \exp\{\lambda_n t\}\cdot x^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda_n x^{\alpha})\right| \le |\delta_n|\cdot\frac{O(n^{\alpha})}{O(\exp\{O(n^{\alpha}t)\})}\cdot\frac{x^{\alpha-1}}{1+|\lambda_n|x^{\alpha}} \le \frac{O(n^{\alpha})}{O(n^{2\alpha t})} \le O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\cdot\frac{1}{n^{t}}\right).$$

Пусть $\sum O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right)$ сходится, тогда из вышеуказанных неравенств следует $\lim\limits_{t\to\infty} u_t(x,t)=0.$

Таким образом, в данной работе доказано, что решение краевой задачи для дробного дифференциального уравнения адвекции-диффузии $u_t(x,t)=D_{0+}^{\alpha}u(x,t)$, с заданными краевыми условиями $u(0+,t)=u(1,t)=0$, $u(x,0)=\delta(x)$, удовлетворяет условиям $\lim\limits_{t\to+\infty} u(x,t)=0$, $\lim\limits_{t\to\infty} u_t(x,t)=0.$

Заключение

В данной работе полностью решена задача и изучены свойства решения задачи для стационарного уравнения переноса вещества в условиях супер диффузии и аномальной адвекции. Полученные результаты могут быть использованы в теории фильтрации жидкости и газов в средах с фрактальной структурой, а также при моделировании изменения температуры в нагретом стержне.

Библиографический список

1. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. – М.: Физматлит, 2003. – 272 с.
2. Джрбащян М.М. Краевая задача для дифференциального оператора типа Штурма-Лиувилля дробного порядка // Известия АН Армянской ССР. Серия: Математика. 1970. Т. 5. № 2. С. 71-96.

3. Джрбащян М.М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. - М.: Наука, 1966. – 672 с.
4. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Издательство МГУ, 1999. – 799 с.
5. Aleroev T.S., Kirane M., Y.-F. Tang. Boundary-value problems for differential equations of fractional order. // Journal of Mathematical Sciences. Nov. 2013, Volume 194, Issue 5, pp. 499-512.
6. Самко С.Г., Килбасс А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск, Наука и техника, 1987. – 688 с.
7. Aleroev T. S., Aleroeva H. T. A problem on the zeros of the Mittag-Leffler function and the spectrum of a fractional-order differential operator /// Electron. J. Qual. Theory Diff. Equ., № 25, 18 p. (2009).
8. Хасамбиев М.В., Алероев Т.С. Краевая задача для одномерного дробного дифференциального уравнения адвекции-диффузии // Вестник МГСУ. №6. 2014. С. 71-76.
9. Aleroev T.S., Kirane M., Malik S.A. Determination of a source term for a time fractional diffusion equation with an integral type over-determining condition. // Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2013 (2013), No. 270, pp. 1–16. ISSN: 1072-6691. //URL: htpp://ejde.math.txstate.edu

10. Алероев Т.С., Алероева Х.Т. Об одном классе несамосопряженных операторов, сопутствующих дифференциальным уравнениям дробного порядка. // Известия ВУЗов. Математика. 2014. №10. С. 3-12.
11. Попов А.Ю., Седлецкий А.М. Распределение корней функций Миттаг-Леффлера // Современная математика. Фундаментальные направления. РУДН. Т. 40. 2011. С. 3-171.