

Научная статья  
УДК 62.752, 621.534, 629.4.015, 51-74, 517.442  
URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=179676>

## ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ В ОЦЕНКЕ УПРУГИХ И РЫЧАЖНЫХ СВЯЗЕЙ В ДИАДЕ МЕХАНИЧЕСКОЙ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

Андрей Владимирович Елисеев<sup>1✉</sup>, Николай Константинович Кузнецов<sup>2</sup>,  
Артем Сергеевич Миронов<sup>3</sup>

<sup>1,2</sup>Иркутский национальный исследовательский технический университет,  
Иркутск, Россия

<sup>3</sup>Иркутский государственный университет путей сообщения,  
Иркутск, Россия

<sup>1</sup>[eavsh@ya.ru](mailto:eavsh@ya.ru) ✉

<sup>2</sup>[knik@istu.edu](mailto:knik@istu.edu)

<sup>3</sup>[art.s.mironov@mail.ru](mailto:art.s.mironov@mail.ru)

*Аннотация.* В рамках проблемы изменения динамических свойств технических объектов, находящихся в условиях вибрационных нагрузений, рассматриваются задачи оценки, формирования и коррекции динамических состояний структурных образований механических колебательных систем. В качестве структурного образования рассматривается диада – изолированная система из двух массоинерционных элементов, соединенных пружиной с учетом дополнительных связей, включающих устройства для преобразования движений или демпфер.

Цель разрабатываемого методологического подхода заключается в формировании динамических состояний диад и оценке их динамических свойств в условиях вибрационных нагружений на основе обобщенных энергетических отношений, учитывающих рычажные и упругие связи.

Используются методы теоретической механики, теории дифференциальных уравнений, интегральных преобразований, системного анализа и структурного математического моделирования, основанного на сопоставлении механическим колебательным системам, используемым в качестве расчетных схем технических объектов, структурных схем, эквивалентных в динамическом отношении системам автоматического управления.

Разработана научно-методологическая основа оценки, формирования и коррекции динамических состояний диады, рассматриваемой в качестве эталонного элемента, использующая энергетические характеристики, учитывающие рычажные отношения и упругие связи между парциальными системами и внешними возмущениями.

**Ключевые слова:** механическая колебательная система, рычажная связь, структурная математическая модель, передаточная функция, связность внешних возмущений, частотная энергетическая функция, функция демпфирования

**Для цитирования:** Елисеев А.В., Кузнецов Н.К., Миронов А.С. Энергетические характеристики в оценке упругих и рычажных связей в диаде механической колебательной системы // Труды МАИ. 2024. № 135. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=179676>

Original article

# ENERGY CHARACTERISTICS IN THE EVALUATION OF ELASTIC AND LEVER TIES IN THE DYAD OF A MECHANICAL OSCILLATORY SYSTEM

Andrey V. Eliseev<sup>1</sup> , Nikolay K. Kuznetsov<sup>2</sup>, Artem S. Mironov<sup>3</sup>

<sup>1,2</sup>Irkutsk National Research Technical University, Irkutsk, Russia

<sup>3</sup>Irkutsk State Transport University, Irkutsk, Russia

<sup>1</sup>[eavsh@ya.ru](mailto:eavsh@ya.ru) 

<sup>2</sup>[knik@istu.edu](mailto:knik@istu.edu)

<sup>3</sup>[art.s.mironov@mail.ru](mailto:art.s.mironov@mail.ru)

**Abstract.** Vibrational effects are, on the one hand, of great significance in realizing the processes of the parts hardening, the granular mixtures unmixing, ores transportation, granule materials dosing executed by technological units in various industrial brunches. On the other hand, they should be accounted for while creating vibration protection systems of transport and technological machines of various purposes including vibration machines and equipment.

The purpose of the developed scientific and methodological approach is the formation of dynamic states of dyads and the assessment of their dynamic properties under conditions of vibration loads based on generalized energy ratios that take into account lever and elastic bonds.

The methods of theoretical mechanics, theory of differential equations, integral transformations, system analysis and structural mathematical modeling based on comparison of mechanical oscillatory systems used as calculation schemes of technical

objects, structural schemes equivalent in dynamic terms to automatic control systems are used.

A scientific and methodological basis has been developed for evaluating, forming and correcting the dynamic states of the dyad, considered as a reference element, using energy characteristics that account for the lever relationships and elastic connections between partial systems and external disturbances.

It is shown that a number of dynamic features of the dyad significantly depend on the frequency of the external disturbance and the characteristics of the device for converting motion. The properties of the dyad are established, reflecting the dependence of partial and natural frequencies, for the analysis of which frequency energy functions are introduced, reflecting the features of accounting for potential and kinetic energies in the system depending on interpartial connections.

**Keywords:** mechanical oscillatory system, lever coupling, structural mathematical model, transfer function, connectivity of external disturbances, frequency energy function, damping function

**For citation:** Eliseev A.V., Kuznetsov N.K., Mironov A.S. Energy characteristics in the evaluation of elastic and lever ties in the dyad of a mechanical oscillatory system. Trudy MAI, 2024, no. 135. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=179676>

## **Введение**

Возрастание требований к эффективности, надежности и безопасности функционирования современных машин технологического и транспортного

назначения, включая авиационный и железнодорожный транспорт, приводят к ужесточению требований к уровню динамических расчетов, вызывая необходимость учета вибрационных нагрузений исполнительных механизмов, агрегатов, приборов и аппаратуры [1]. Интенсивные вибрационные воздействия способны существенно изменять динамические свойства указанных элементов в рамках тенденций проявления положительных и отрицательных эффектов [2-5].

К положительным эффектам вибрационных взаимодействий, находящих применение в химической, машиностроительной, горнодобывающей, перерабатывающей и др. отраслях промышленности могут быть отнесены эффекты вибрационного перемещения, дозировки и сортировки сыпучих, гранулированных или комковых материалов и вибрационного упрочнения поверхностей деталей машин [6,7].

С другой стороны, увеличение скоростей движения и нагрузок современных машин усиливает негативное влияние вибраций на состояние человека и технических объектов. К негативным факторам могут быть отнесены существенные увеличения амплитуд колебаний деталей машин и механизмов при резонансе или эффекты раскрытия контактных соединений, которые приводят к снижению эффективности, надежности и ресурса работы машин и оборудования и даже их отказам и разрушениям [8-10].

В этой связи значительный интерес вызывают работы, связанные с развитием способов и средств управления динамическими состояниями технических объектов, находящихся в условиях вибрационных нагрузений, посредством варьирования

параметров отдельных элементов. В частности, практическое применение находят возможности изменения вязкоупругих свойств за счет начального поджатия в амортизаторах, включающих в свой состав цельнометаллические подушки [11, 12]. Практическое значение имеют и задачи синтеза свойств амортизаторов и демпферов, обеспечивающих выходные величины с заданными требованиями [13]. Ключевым фактором динамических особенностей в условиях вибрационных перемещений объектов являются частоты колебаний [14]. Наравне с элементами колебательной системы, свойства которых зависят от частоты, интерес могут представлять и элементы, свойства которых слабо зависят от частоты внешних возмущений [15]. Распространены методы коррекции динамических состояний посредством использования присоединенных масс [16,17]. Настройка форм траекторий движений точек рабочих органов вибрационных технологических машин может проводиться за счет выбора направления возмущающих сил [18], а коррекция жесткости многокорпусных конструкций вибрационных машин – регулированием натяга болтовых соединений [8].

Особое значение приобретают проблемы оценки динамических состояний объектов железнодорожного транспорта. Распространение вибраций от железнодорожных поездов по городской инфраструктуре зависит от жесткости балластного верхнего строения пути [19-22]. Рост скоростей и масс перевозимых грузов способен приводить к выходу из строя амортизаторов в основной подвеске железнодорожных транспортных средств. При оценке динамического состояния подвески существенное значение имеет симметрия характеристик амортизаторов и

расположения точек измерения [9]. В условиях интенсивных нагрузений возможны нарушение контакта скользящей головки пантографа с контактным проводом [10]. Вибрационные нагрузки на элементы механической колебательной системы обеспечивают направленное движение вибротранспортных средств [23].

Представленные примеры, связанные с задачами моделирования динамических взаимодействий технических объектов в области транспортных средств, виброизоляции и вибрационной защиты, вибрационных технологий обработки изделий, материалов и сырья, обладают определенной общностью, проявляющейся в том, что формирование динамических состояний системы в условиях вибрационных возмущений со стороны внешних источников кинематической или силовой природы определяется выбором объекта, структура и динамическое состояние которого представлены системой типовых элементов с учетом небольшого количества настроечных параметров.

Основная особенность объекта, динамическое состояние которого оценивается и, который одновременно служит средством регулирования этого состояния системы в целом, заключается в том, что он обладает структурой, состоящей из типовых звеньев, и при этом является достаточно простым для настройки, то есть количество звеньев должно быть достаточным для выполнения необходимых функций в составе системы.

В рамках рассмотренных особенностей динамических взаимодействий научно-практический интерес представляют возможности управления динамическим состоянием колебательной системы посредством структурного образования,

представляющего собой достаточно простую механическую систему, которая может быть рассмотрена как отдельно от объекта, так и в условиях связи с системой или с подобными элементами [24, 25].

Проблемы изменения динамических свойств в условиях вибрационных нагрузений определяют развитие методов математического моделирования, оценки, формирования и коррекции динамических свойств, а также форм проявления вибрационных эффектов на всех стадиях жизненного цикла проектирования, создания и эксплуатации технических объектов [26-28].

Научной основой построения моделей вибрационных взаимодействий элементов технологических машин является теоретическая механика, теория колебаний, теория автоматического управления [1-4,24-25,29-31].

В настоящее время разработан широкий арсенал частных математических моделей, учитывающих отдельные факторы, определяющие характер вибрационных взаимодействий. В разработке математических моделей вибрационных процессов существенное место занимают энергетические подходы, основанные на использовании отношения Релея [32].

Широкое распространение получили методы структурного математического моделирования, основанные на электромеханических аналогиях, теории механических цепей, теории виброзащитных систем [27,31,33]. В рамках структурного подхода расчетным схемам в виде механических колебательных систем сопоставляются структурные схемы, эквивалентные в динамическом отношении системам автоматического управления [30, 34,35].



Структурный подход для линейных систем с сосредоточенными параметрами, совершающих малые колебания, обеспечивает возможность качественного и количественного анализа широкого круга вибрационных эффектов и явлений на основе развития обобщенных представлений об установившихся формах динамического взаимодействия элементов механических колебательных систем с учетом дополнительных связей [34, 36, 37]

Методологическая основа структурного подхода, определяющего эффективность моделирования динамических взаимодействий элементов механических колебательных систем, представляется следующими инструментами: базой типовых элементов, отображающих свойства звеньев механизмов технических объектов; совокупностью передаточных функций, описывающих физические характеристики реакций системы на внешние возмущения; множеством эквивалентных преобразований, позволяющих выражать свойства объектов, динамические состояния которых оцениваются [36-38].

Для анализа динамических состояний структурных образований в виде диад, представляющих собой автономные цепные системы масса-пружина-масса, разработаны методы частотных энергетических функций [39] и функции демпфирования [40], развивающие представления об отношении Релея в рамках структурного подхода [32].

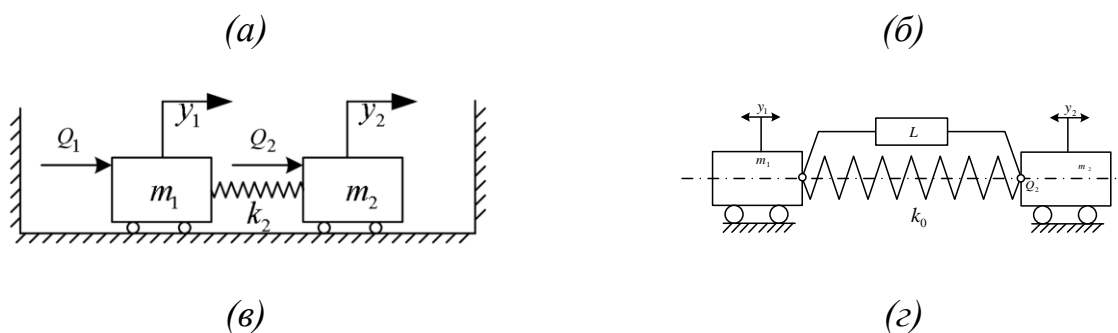
Вместе с тем, разрабатываемые теоретические основы изменения динамических состояний системы с помощью структурных образований не завершены и не обладают цельностью и единством представлений. В частности, не

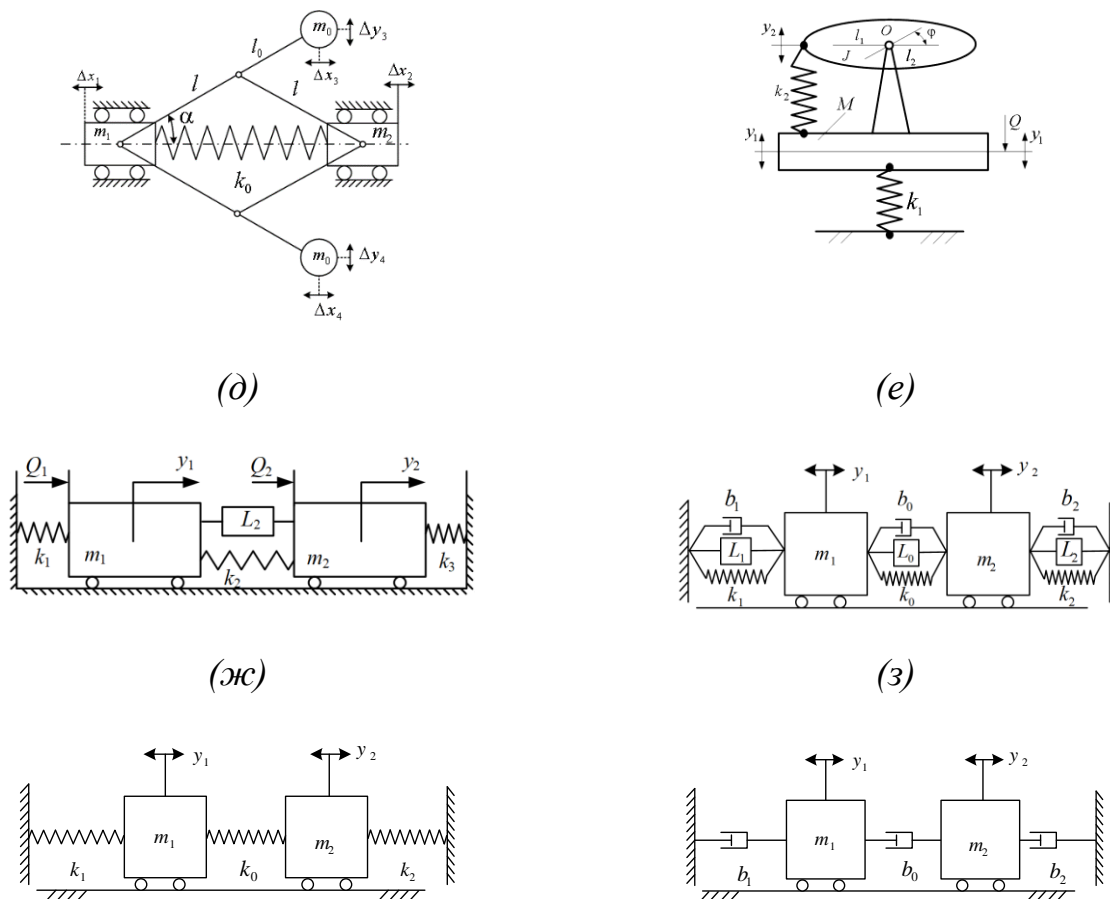
сформированы представления об обобщенном массоинерционном элементе, обладающим свойствами, которые могут быть использованы для образования механических колебательных систем и сравнения их динамических свойств между собой в условиях различных форм взаимодействий или внешних нагружений.

Статья посвящена развитию представлений о формировании динамических состояний структурных образований в виде диад на основе обобщенных энергетических отношений, учитывающих рычажные и упругие связи в механических колебательных системах с сосредоточенными параметрами.

### I. Основные положения. Постановка задачи исследования

Рассматривается диада - структурное образование в виде двух массоинерционных элементов, находящихся во взаимодействии друг с другом или с опорными поверхностями с учетом упругих и дополнительных связей, реализующихся с помощью устройств преобразования движений (рис.1) [41-43].





**Рис.1.** Расчетные схемы диад: *а)* базовая схема; *б)* с учетом упруго-инерционной связи; *в)* с учетом инерционно-упругой связи, образованной плоским рычажным механизмом; *г)* образованная разнородными парциальными системами; *д)* обладающая связью с опорной поверхностью; *е)* образованная упруго-инерционными связями с учетом сил вязкого трения; *ж)* с учетом только упругих связей; *з)* с учетом только сил вязкого трения; где  $Q_1, Q_2$  – внешние силовые возмущения;  $y_1, y_2$  – обобщенные координаты

Базовой расчетной схемой диады является механическая колебательная система из двух массоинерционных элементов  $m_1$  и  $m_2$ , соединенных между собой пружиной  $k_2$ , изолированная от опорных поверхностей (рис.1*а*). Диада под действием внешних силовых гармонических возмущений совершает малые вынужденные колебания относительно некоторой неподвижной или равномерно движущейся точки.

Базовая схема диады может быть изменена путем исключения и дополнения связей между массоинерционными элементами и опорными поверхностями, путем замены сосредоточенных масс на твердые тела, совершающие поступательные или вращательные колебания, а также путем введения устройства для преобразования движений, представляющего собой типовой элемент, физически реализуемый с помощью винтовой несамотормозящейся пары или рычажного механизма.

Основой подхода в оценке динамических состояний диад служит детализированный учет установившихся форм малых вынужденных колебаний, вызванных воздействием силовых или кинематических возмущений.

Задача заключается в разработке метода построения математических моделей для учета, оценки и формирования динамических состояний и эффектов, реализующихся в диадах, состоящих из двух массоинерционных элементов, связь между которыми определяется параметрами устройств преобразования движения, а также параметрами упругих, массоинерционных и демпфирующих элементов механической колебательной системы, находящейся в условиях вибрационного нагружения.

## II. Математические модели диады

В рамках традиционного подхода детализированное представление о движениях элементов диады (рис.1а) может быть получено на основе решения системы дифференциальных уравнений Лагранжа 2-ого рода [39]:

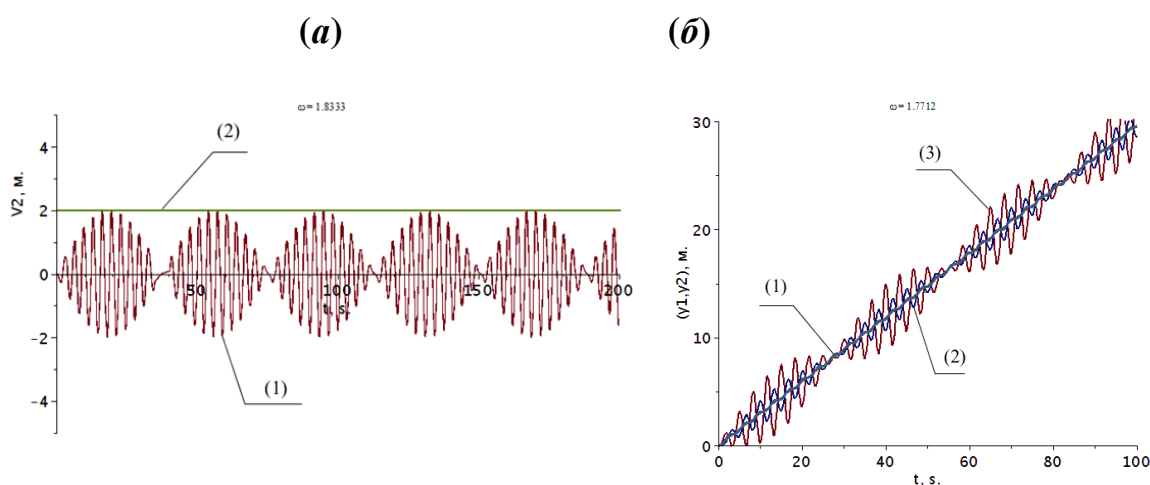
$$\begin{cases} m_1 \ddot{y}_1 + k_2 y_1 - k_2 y_2 = Q_1, \\ m_2 \ddot{y}_2 + k_2 y_2 - k_2 y_1 = Q_2. \end{cases} \quad (1)$$

С учетом условий в начальный момент времени:

$$\begin{cases} y_1(0) = y_{10}, \dot{y}_1(0) = y_{11}, \\ y_2(0) = y_{20}, \dot{y}_2(0) = y_{21}. \end{cases} \quad (2)$$

аналитическое решение системы дифференциальных уравнений (1) может быть найдено методами теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Примером движений диады служат эффекты биений, являющиеся результатом сложения свободных и вынужденных колебаний с близкими частотами. Биения могут реализовываться относительно неподвижной точки, выполняющей роль узла колебаний, или относительно точки, равномерно движущейся по прямой. Как неподвижные, так и равномерно движущиеся по прямой точки диады могут быть рассмотрены как своеобразные характерные точки, играющие ключевую роль в анализе динамических состояний структурных образований (рис.2а,б).



**Рис.2.** Движение диады во временной области. а) колебания относительно неподвижной точки; (б) колебания относительно равномерно движущейся точки

Вместе с тем, для ряда задач оценки, формирования и коррекции динамических состояний технических объектов существенными характеристиками движений является исключительно амплитуды установившихся форм колебаний обобщенных

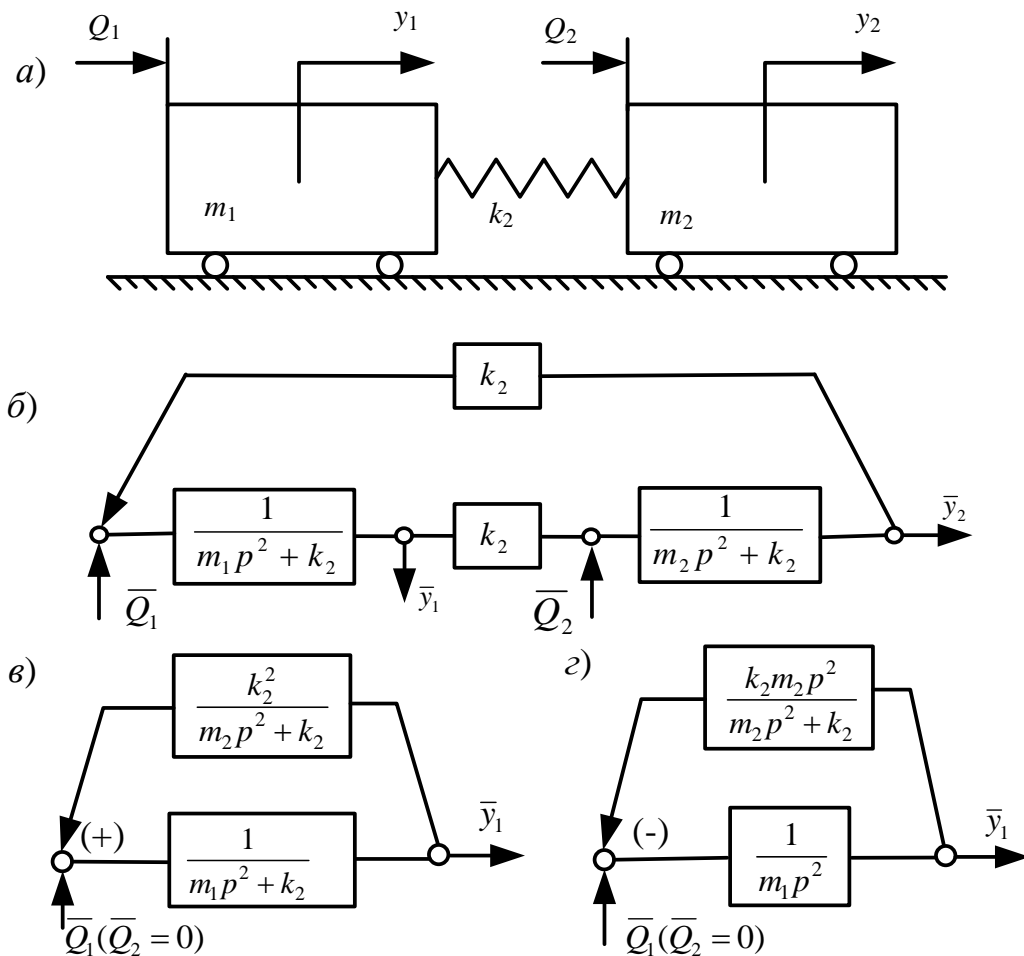
координат. Для определения амплитуд установившихся колебаний достаточно использовать структурный подход, основанный на преобразовании Лапласа системы дифференциальных уравнений в систему алгебраических уравнений с учетом нулевых начальных условий [34].

В таких задачах нет необходимости решать системы дифференциальных уравнений с различными начальными условиями, а достаточно использовать структурные подходы, использующие преобразование Лапласа для замены системы дифференциальных уравнений системой алгебраических уравнений в предположении о нулевых начальных условиях:

$$\begin{cases} (m_1 p^2 + k_2) \bar{y}_1 - k_2 \bar{y}_2 = \bar{Q}_1, \\ -k_2 \bar{y}_1 + (m_2 p^2 + k_2) \bar{y}_2 = \bar{Q}_2, \end{cases} \quad (3)$$

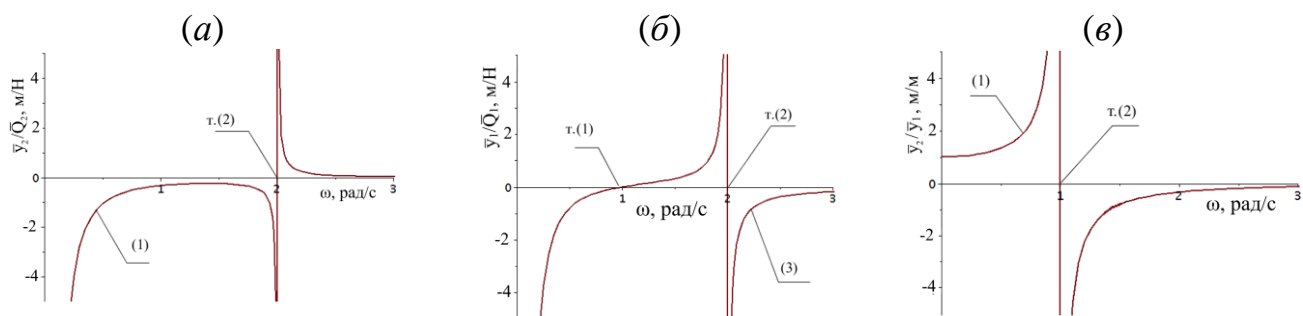
где  $p = j\omega$  – комплексная переменная  $j = \sqrt{-1}$ , значок  $\bar{\cdot}$  над переменной означает преобразование по Лапласу [44].

В рамках структурного подхода алгебраической системе уравнений в изображениях Лапласа сопоставляется структурная схема, отображающая входные и выходные сигналы, а также блоки, характеристики которых зависят от частот внешних возмущений (рис.3). Представления о динамических особенностях диад (рис.3, а) могут быть получены на основе передаточных функций структурных схем, а также на основе структурных схем с выделенным объектом, динамические состояния которого оцениваются (рис.3б, рис.3в) [45].



**Рис.3.** Структурное образование в виде диады: а) принципиальная схема; б) структурная схема; в) структурная схема с исключенной координатой  $\bar{y}_2$  при  $\bar{Q}_2 = 0$ ; г) – структурная схема с выделением объектом  $m_1$ , охваченным контуром обратной связи

На основе структурных схем могут быть построены амплитудно-частотные характеристики передаточных функций системы (рис.4а, рис.4б) или передаточных функций межпарциальных связей (рис.4в), отображающих такие динамические особенности диады, как динамические податливости (рис.4а, рис.4б) [46] или рычажные отношения (рис.4в) [47].



**Рис.4.** Динамические характеристики диады: *а)* амплитудно-частотная характеристика передаточной функции диады без режима динамического гашения колебаний; *б)* амплитудно-частотная характеристика передаточной функции диады с учетом режима динамического гашения колебаний; *в)* амплитудно-частотная характеристика передаточной функции межпарциальных связей диады

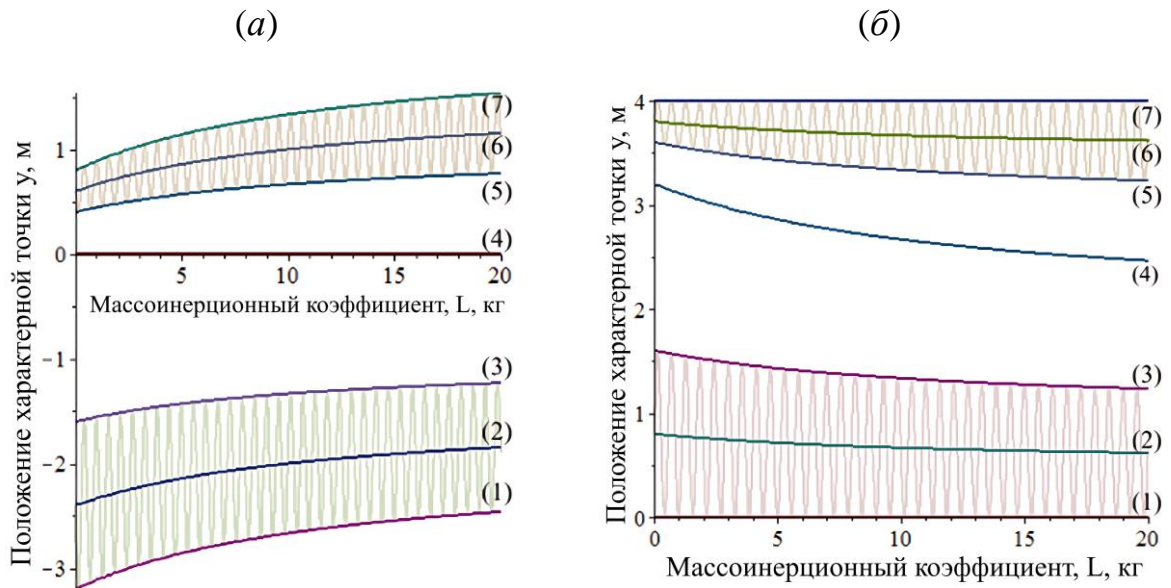
Частоты, являющиеся корнями многочлена, находящегося в числителе амплитудно-частотной характеристики, отображают режимы динамического гашения колебаний координаты диады при условии, что частота входного сигнала отлична от собственной частоты. В автономном или изолированном от опорных поверхностей состоянии диада обладает одной ненулевой собственной частотой.

В случае присоединения диады к опорной поверхности динамические характеристики диады меняются. Отдельного внимания требуют условия, когда совокупности частот динамического гашения колебаний координат диады предельно сближаются с собственными частотами. Результатом предельного сближения частот динамического гашения колебаний с собственными частотами служат специфические динамические режимы, определяющие амплитудно-частотными характеристикам, которые являются результатом раскрытия неопределенностей.



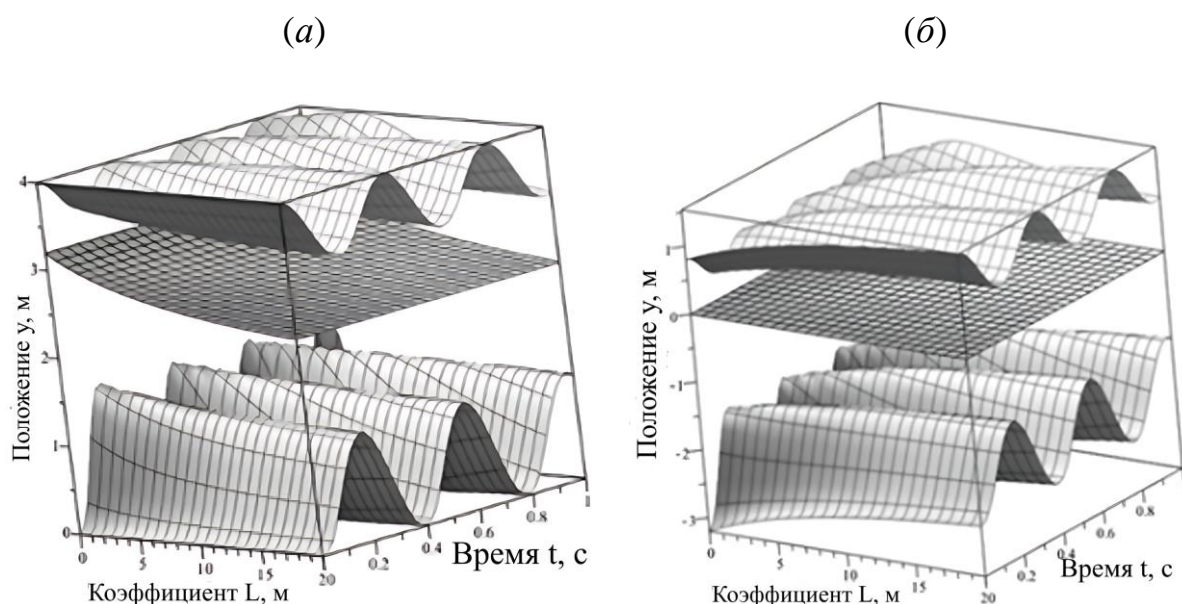
### III. Оценка динамических состояний диады

Передаточные функции системы и передаточные функции межпарциальных связей могут быть использованы для установления особенностей динамических свойств диады, к примеру, характерных точек, удовлетворяющих системе условий. В качестве характерных точек диады могут служить неподвижные точки, или точки, которые двигаются равномерно и прямолинейно, а также точки, относительно которых суммы динамических реакций равны нулю. Координаты характерных точек могут зависеть и от частот внешних возмущений, и от параметров связей между массоинерционными элементами [48]. Условия формирования характерных точек зависят от дополнительных связей, отображающих особенности устройств для преобразования движений, например, в виде несамотормозящейся винтовой пары (см. рис.5). Устройство для преобразования движения является звеном двойного дифференцирования с передаточной функцией  $Lp^2$  и характеризуется массоинерционным коэффициентом  $L$ [36]. Увеличение массоинерционных коэффициентов устройств преобразования движения способствует смещению характерной точки в направлении средней координаты диады (рис.5а-б, рис.6а-б).



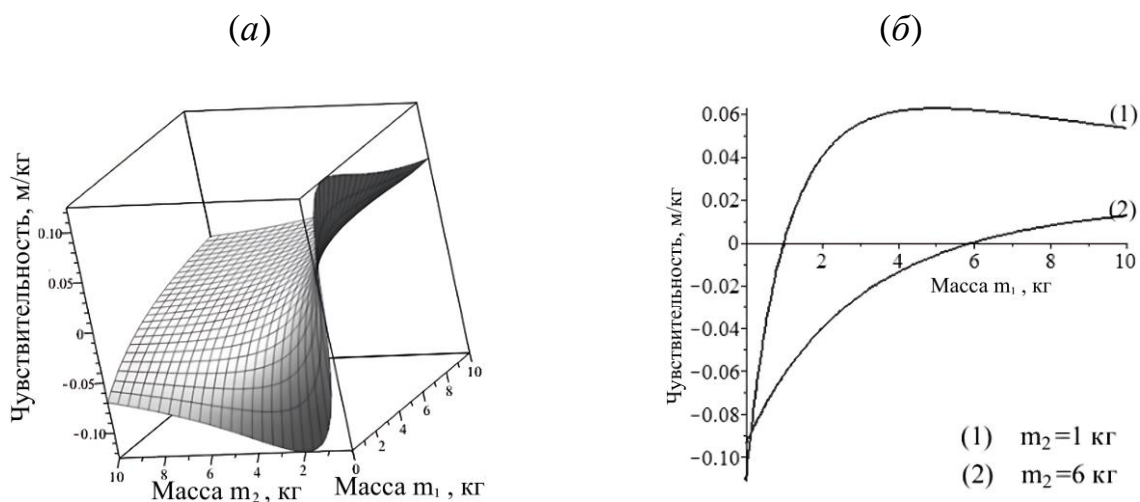
**Рис.5.** Положение характерных точек диады в зависимости от массоинерционного параметра  $L$  устройства преобразования движения ( $m_1 < m_2$ ): а) приведение семейства диад к фиксированному положению неподвижной характерной точки; б) приведение диады к фиксированному пространственному интервалу

В свою очередь, характер зависимости положения характерной точки от параметра  $L$  определяется значением массоинерционных элементов  $m_1$  и  $m_2$  диады. Для оценки характера зависимости положения характерной точки от массоинерционного коэффициента  $L$ , может быть использовано понятие чувствительности, представляющее величину изменения положения характерной точки при изменении коэффициента  $L$ . Чувствительность важна при разработке способов и устройств, использующих коэффициент  $L$  в качестве настроечного параметра.



**Рис.6.** Координаты массоинерционных элементов диады и положения характерной точки в зависимости от параметра  $L$  и момента времени  $t$ : а) семейство диад приведено к общему пространственному интервалу, б) семейство диад приведено к общей характерной точке

Чувствительность параметров характерных точек диады с учетом параметра устройства преобразования движения  $L$  существенным образом зависит от асимметрии значений массоинерционных элементов диады (рис.7) [49]. Чувствительность положения характерной точки к коэффициенту  $L$  может быть рассчитана как производная положения характерной точки  $L$ , рассматриваемому в виде независимой переменной.



**Рис. 7.** Чувствительность положения характерной точки диады ( $l = 1$  м.): а) график чувствительности в зависимости от масс диады при фиксированном параметре  $L=1$  кг, б) график чувствительности на интервале  $m_1 \in [0..10]$ , линия (1)  $m_2=1$  кг., линия (2)  $m_2=6$  кг.

Представления о диаде, обладающей характерными точками, координаты которых зависят от частот внешних нагрузжений, могут быть отображены в рамках рычажных связей, которые зависят от частоты и структуры внешних возмущений.

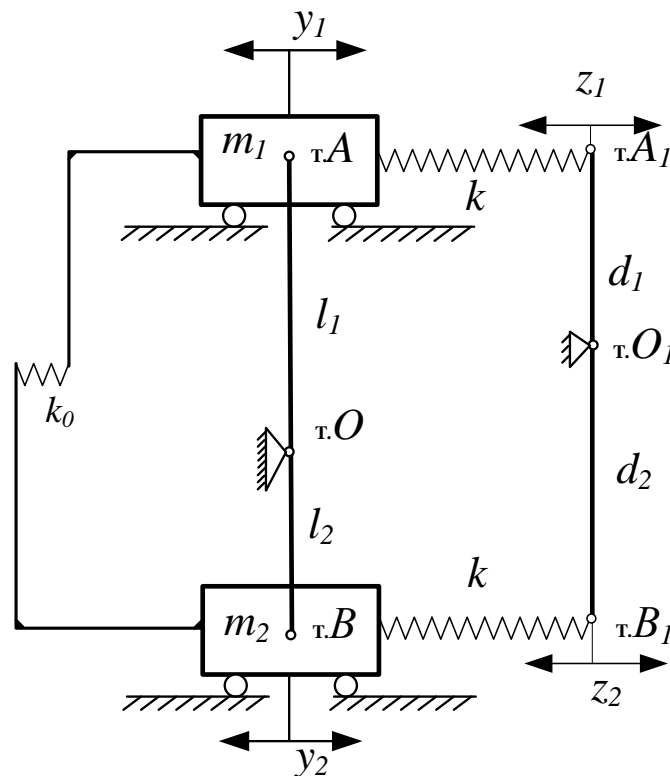
#### IV. Оценка динамических особенностей диады в рамках представлений о рычажных связях

Для наглядного отображения динамических взаимодействий элементов диады с помощью рычажных связей могут быть рассмотрены эквивалентные в динамическом отношении системы, отношение амплитуд колебаний элементов которых на фиксированных частотах представляются явными рычагами с фиксированными точками опоры.

1. Рассматривается механическая колебательная система, образованная двумя массоинерционными элементами и совокупностью упругих связей (рис.8). Предполагается, что система совершает вынужденные движения в условиях связанных синфазных гармонических возмущений  $z_1$  и  $z_2$  кинематической природы:

$$z_2 = \gamma_1 z_1, \quad (4)$$

где  $\gamma_1$  - коэффициент связности внешних кинематических возмущений.



**Рис.8.** Расчетная схема структурного образования

Система дифференциальных уравнений движений структурного образования (рис.8) может быть построена в рамках формализма уравнений Лагранжа 2-ого рода на основе кинетической и потенциальной энергии:

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}_2^2, \quad (5)$$

$$\Pi_1 = \frac{1}{2}k_0(y_1 - y_2)^2 + \frac{1}{2}k_0(y_1 - z_1)^2 + \frac{1}{2}k(y_2 - y_2)^2. \quad (6)$$

С помощью интегральных преобразований Лапласа система дифференциальных уравнений движений с учетом нулевых начальных условий приводится к системе алгебраических уравнений относительно изображений:

$$\begin{pmatrix} m_1 p^2 + k_0 + k & -k_0 \\ -k_0 & m_2 p^2 + k_0 + k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k\bar{z}_1 \\ k\bar{z}_2 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

С учетом условий

$$\bar{y}_2 = \alpha_1 \bar{y}_1 \quad (8)$$

и

$$\bar{y}_1 = \beta_1 \bar{z}_1 \quad (9)$$

система алгебраических уравнений (4) будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix} m_1 p^2 + k_0 + k & -k_0 \\ -k_0 & m_2 p^2 + k_0 + k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \alpha_1 \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ k\gamma_1 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

где  $\alpha_1$  – коэффициент форм колебаний координат диады,  $\beta_1$  – коэффициент рычажных связей между амплитудами входных кинематическим возмущений и амплитудами колебаний координаты диады,  $p = \omega j$ ,  $j = \sqrt{-1}$  – мнимая единица,  $\omega$  – частота внешнего гармонического возмущения.

Замена алгебраической системы (7) относительно изображений, на систему (10), относительно коэффициентов связности, представляет собой переход от анализа динамических состояний в терминах координат или амплитуд колебаний к анализу динамических состояний в терминах связей рычажного и упругого характера.

На основе коэффициента связности внешних кинематических возмущений  $\gamma_1$

(4) могут быть определены коэффициент связности форм парциальных систем  $\alpha_1$ (8):

$$\alpha_1 = \frac{\begin{vmatrix} -m_1\omega^2 + k_0 + k & k \\ -k_0 & k\gamma_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k & -k_0 \\ k\gamma_1 & -m_2\omega^2 + k_0 + k \end{vmatrix}} \quad (11)$$

и коэффициент рычажной связи  $\beta_1$  между внешним возмущением и амплитуд колебаний парциальной системы:

$$\beta_1 = \frac{\begin{vmatrix} k & -k_0 \\ k\gamma_1 & -m_2\omega^2 + k_0 + k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -m_1\omega^2 + k_0 + k & -k_0 \\ -k_0 & -m_2\omega^2 + k_0 + k \end{vmatrix}}. \quad (12)$$

Коэффициент  $\beta_1$  может быть определен на основе выражения:

$$\beta_1 = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} k \\ k\gamma_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix} -m_1\omega^2 + k_0 + k & -k_0 \\ -k_0 & -m_2\omega^2 + k_0 + k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} \right\rangle}, \quad (13)$$

где  $\alpha_1 = \alpha_1(\gamma_1)$  (11) рассматривается как функция коэффициента связности  $\gamma_1$ , а знаменатель выражения (13) в виде скалярного произведения равен величине

$$\frac{\left( \frac{1}{2} k_0 (\bar{y}_1 - \bar{y}_2)^2 + \frac{1}{2} k \bar{y}_1^2 + \frac{1}{2} k \bar{y}_2^2 \right) - \left( \frac{1}{2} m_1 \omega^2 \bar{y}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \omega^2 \bar{y}_2^2 \right)}{\frac{1}{2} \bar{y}_1^2}, \quad (14)$$

которая представляет собой энергетическую характеристику системы, пропорциональную разнице между максимальной потенциальной и кинетической энергиями.

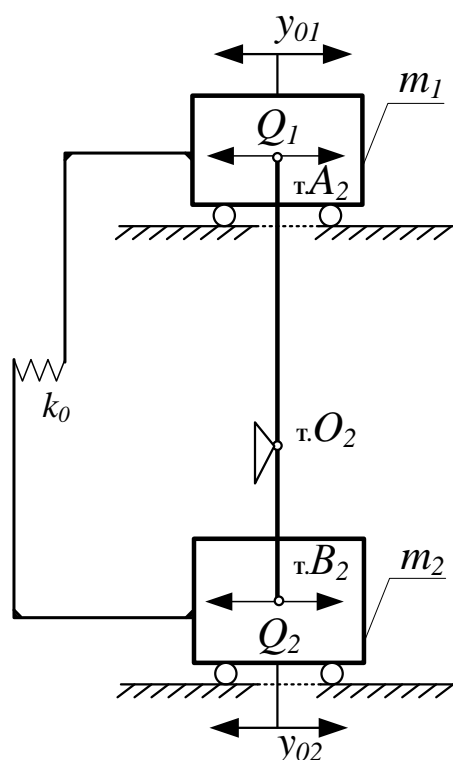
Можно полагать, что динамическое состояние системы характеризуется совокупностью трех типов рычажных связей: отношением внешних возмущений,

отношением парциальных систем и отношением между внешним кинематическим возмущением и колебанием координаты парциальной системы.

2. Наравне с механической колебательной системой (рис.8), совершающей вынужденные колебания в условиях кинематических возмущений, может быть рассмотрена диада, совершающая вынужденные колебания в условиях связанных силовых возмущений:

$$Q_2 = \gamma_2 Q_1, \quad (15)$$

где  $\gamma_2$  – коэффициент связности внешних силовых возмущений. Для наглядного отображения рычажного характера связей между амплитудой колебаний обобщенных координат диада может быть представлена в виде виртуального рычага  $A_2B_2$  с точной опоры  $O_2$  (рис.9).



**Рис.9.** Расчетная схема диады в виде виртуального рычага



Соответствующие кинетическая и потенциальная энергии имеют вид:

$$T_2 = \frac{1}{2}m_1\dot{y}_{01}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{y}_{02}^2, \quad (16)$$

$$\Pi_2 = \frac{1}{2}k_0(y_{01} - y_{02})^2. \quad (17)$$

После интегральных преобразований Лапласа система дифференциальных уравнений с учетом начальных условий приводится к виду системы алгебраических уравнений относительно комплексной переменной  $p$ :

$$\begin{pmatrix} m_1 p^2 + k_0 & -k_0 \\ -k_0 & m_2 p^2 + k_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{y}_{01} \\ \bar{y}_{02} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{Q}_1 \\ \bar{Q}_2 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

После введения коэффициентов динамической податливости  $\beta_2$ :

$$\bar{y}_{01} = \beta_2 \bar{Q}_1 \quad (19)$$

и межпарциальных связей  $\alpha_2$ :

$$\bar{y}_{02} = \alpha_2 \bar{y}_{01}. \quad (20)$$

алгебраическая система (18) получит вид:

$$\begin{pmatrix} -m_1 \omega^2 + k_0 & -k_0 \\ -k_0 & -m_2 \omega^2 + k_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_2 \\ \alpha_2 \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Замена системы алгебраических уравнений в координатах диады на систему уравнений относительно коэффициентов связности означает переход к математическим моделям, отображающих учет рычажных и упругих связей.

На основе известного коэффициента связности внешних силовых возмущений  $\gamma_2$  (15) может быть определен коэффициент связности форм  $\alpha_2$ :

$$\alpha_2 = \frac{\begin{vmatrix} -m_1\omega^2 + k_0 & 1 \\ -k_0 & \gamma_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -k_0 \\ \gamma_2 & -m_2\omega^2 + k_0 \end{vmatrix}} \quad (22)$$

и так же коэффициент динамической податливости  $\beta_2$ :

$$\beta_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -k_0 \\ \gamma_2 & -m_2\omega^2 + k_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -m_1\omega^2 + k_0 & -k_0 \\ -k_0 & -m_2\omega^2 + k_0 \end{vmatrix}}. \quad (23)$$

Вместе с тем, коэффициент динамической податливости  $\beta_2$  может быть представлен в виде

$$\beta_2 = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix} -m_1\omega^2 + k_0 & -k_0 \\ -k_0 & -m_2\omega^2 + k_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \right\rangle}, \quad (24)$$

где коэффициент  $\alpha_2 = \alpha_2(\gamma_2)$  рассматривается как зависимая функция (22), а знаменатель дроби (24) равен величине:

$$\frac{\frac{1}{2}k_0(\bar{y}_1 - \bar{y}_2)^2 - \left( \frac{1}{2}m_1\omega^2\bar{y}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\omega^2\bar{y}_2^2 \right)}{\frac{1}{2}\bar{y}_1^2}, \quad (25)$$

которая представляет собой энергетическую характеристику, пропорциональную разнице потенциальной и кинетической энергий.

Совокупность выражений (21)-(25) представляет собой переход к оценке динамических состояний диад на основе рычажных связей кинематической и силовой природы с помощью энергетических представлений (25).

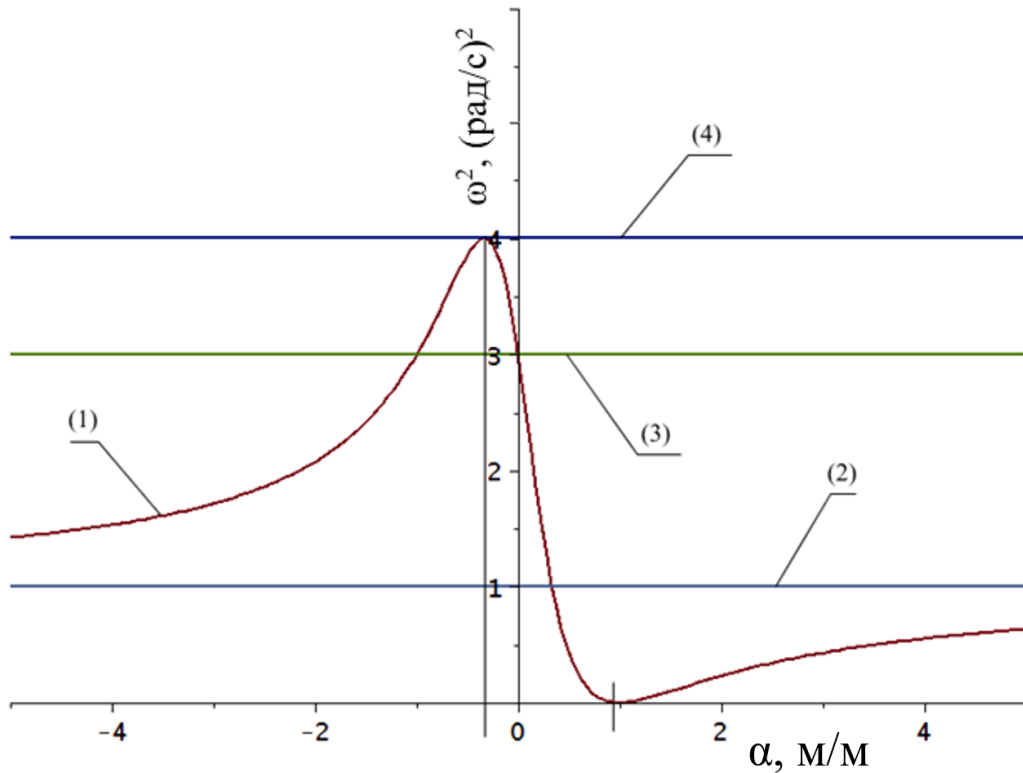
## V. Рычажные связи в формировании энергетических характеристик

### диады

Для оценки специфики динамических состояний диады в рамках энергетических представлений используется отношение Релея [32], устанавливающее связь между собственными частотами системы и экстремальными значениями отношения потенциальной и кинетической энергий. В рамках структурного подхода аналогом отношения Релея является частотная энергетическая функция, которая может быть получена на основе приравнивания энергетических характеристик (14), (25) к нулю, представляющая собой выражение частоты  $\omega^2$  в зависимости от коэффициента  $\alpha_2$  связности парциальных систем, отображающего рычажную связь:

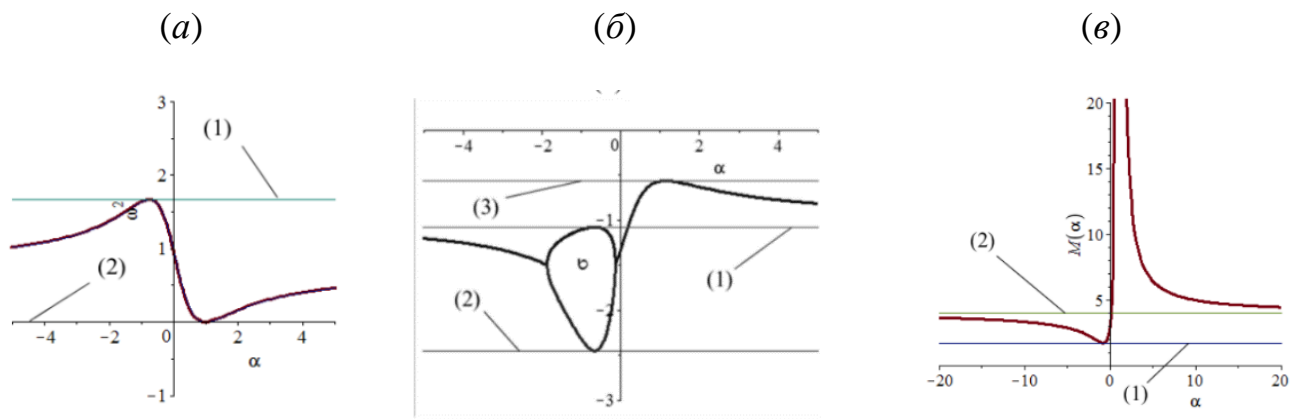
$$\omega^2(\alpha_2) = \frac{k_0(1-\alpha_2)^2}{m_1 + m_2\alpha_2^2}. \quad (26)$$

Частотная энергетическая функция, объединяющая представления о собственных и парциальных частотах, достигаемых в экстремальных и критических значениях коэффициентов связности форм, рассматривается как обобщенная характеристика диады (рис.10).



**Рис.10.** Особенности частотной энергетической функции в системе координат  $y_1, y_2$ : 1 – частотная энергетическая функция, 2 – асимптота частотной энергетической функции при  $\alpha \rightarrow \infty$ , равная парциальной частоте  $\omega_{01}$ , 3 – парциальная частота  $\omega_{02}$ , соответствующая нулевой форме, 4 – собственная частота диады, отличная от нулевой

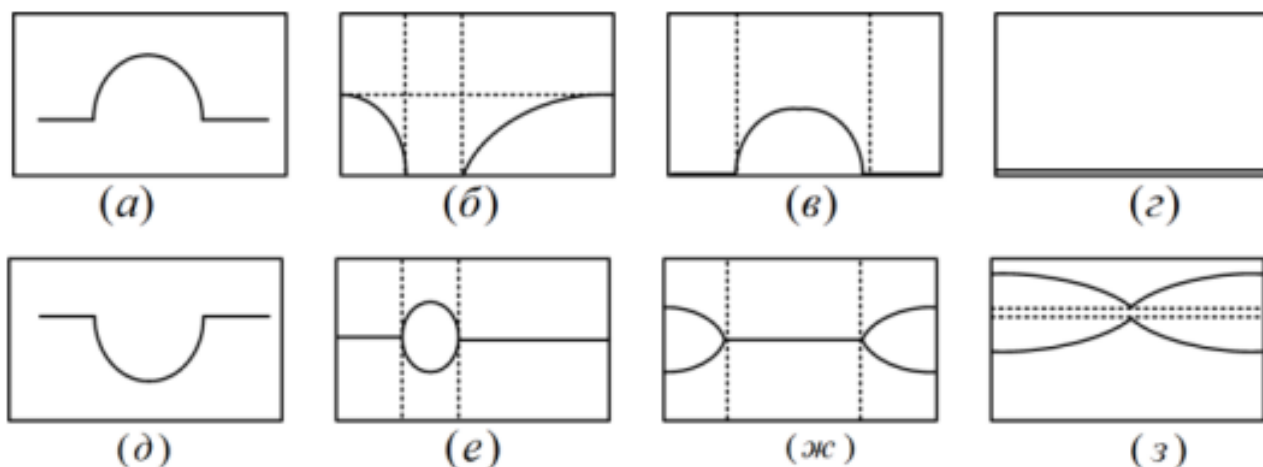
Учет особенностей сил трения, оказывающих воздействия на формы свободных колебаний диад, может быть реализован с помощью введения в рассмотрение специальных функций демпфирования, которые в своих экстремальных значениях передают представления о характере свободных колебаний или аperiodических формах движения (рис.11) [40].



**Рис.11.** Функции для анализа динамических особенностей структурных образований. а) частотная энергетическая функция; б) функция демпфирования; в) параметризующая функция

Включение в диadu демпфирующего звена приводит к включению в частотную энергетическую функцию параметров трения и задания функции демпфирования.

Многообразие частотных энергетических функций с учетом трения и функций демпфирования может быть охарактеризовано с помощью параметризующих функций (рис.11в), позволяющих определять все возможные для данной системы характерные варианты частотных энергетических функций (рис.11а) и функций демпфирования (рис.11б). Множество пар, образованных из частотной энергетической функции и функции демпфирования, может быть разбито на классы с одинаковыми топологическими особенностями их графиков (рис.12).



**Рис. 12.** Топологические особенности графических представлений частотных энергетических функций и функций демпфирования: (а)-(г) — существенные характеристики частотных энергетических функций; (д)-(з)— существенные характеристики функций демпфирования

Совокупность частотных энергетических функций и функций демпфирования, зависящих от аргумента коэффициента форм, может рассматриваться как обобщенная функция динамических состояний, характеризуемых отношением амплитуд колебаний координат элементов диады.

Разработанная система представлений может быть использована для создания способов и средств диагностики и регулирования характеристик вибрационных полей технологических объектов [50,51].

### Заключение

Внешние вибрационные нагрузки на технические объекты обладают возможностями существенного изменения динамических свойств, в общем случае представляющих собой как полезные, так и вредные эффекты.

Рассматривается гипотеза о том, что динамические состояния технических объектов могут быть изменены с помощью структурных образований, обладающих совокупностью настроечных параметров.

В рамках развития системного подхода к решению задач оценки, формирования и коррекции динамических состояний технических объектов в условиях вибрационных нагрузений предложена концепция эталонного элемента, потенциально рассматриваемого как средство управления динамическими состояниями системы в виде диады – открытой механической цепи, включающей две массы и пружину. При этом структура диады расширена включением устройства преобразования движения и демпфирующего устройства параллельно пружине, а ее движение проявляется в реализации поступательных и вращательных колебаниях парциальных систем.

Динамические свойства парциальных систем определяются значениями массы, жесткости упругого элемента, массоинерционного коэффициента устройства для преобразования движения и коэффициента демпфирующего устройства, рассматриваемых в качестве настроечных параметров.

Показано, что в качестве обобщенных динамических особенностей диады выступают характерные точки, в частности, представляющие собой приведенные центры масс, которые зависят от массоинерционных характеристик устройств для преобразования движения, частоты внешних возмущений силовой или кинематической природы, и характерные режимы колебаний, которые отображают безударные режимы движения, определяющие границы физической реализации

диады, которые могут быть оценены на основе передаточных функций системы и межпарциальных связей и коэффициентов связности.

Установлено, что от задач оценки динамических состояний с помощью передаточных функций может быть совершен переход к анализу систем с помощью энергетических характеристик, учитывающих рычажные и упругие связи между парциальными системами и внешними возмущениями силовой и кинематической природы. Основной энергетической характеристикой является частотная энергетическая функции аргумента коэффициента форм колебаний системы, в экстремальных и критических значениях достигающая собственных и парциальных частот. Вспомогательной энергетической характеристикой, учитывающей силы вязкого трения, является функция демпфирования, обладающая аналогичными экстремальными свойствами, распространяющимися на коэффициенты затухания колебаний движений парциальных систем.

Совокупность полученных результатов может быть использована в качестве научно-методологической основы для разработки детализированного подхода в рамках методологии структурного математического моделирования к оценке, формированию и коррекции динамических состояний технических объектов, находящихся в условиях вибрационных нагрузений, отличающегося учетом связей между энергетическими соотношениями и совокупностью рычажных и упругих характеристик структурного образования механической колебательной системы.

Полученные теоретические зависимости могут быть использованы для разработки математических моделей для оценки, формирования и коррекции



динамических состояний технологических и транспортных машин и оборудования различного назначения, подверженных вибрационным воздействиям.

### **Список источников**

1. Clarence W. de Silva. Vibration. Fundamentals and Practice, Boca Raton, London, New York, Washington, D.C.: CRC Press, 2000, 957 p.
2. Ден-Гартог Д.П. Механические колебания. - М.: Физматгиз, 1960. - 574 с.
3. Цзе Ф.С., Морзе И.Е., Хинкл Р.Т. Механические колебания. – М.: Машиностроение, 1966. - 508 с.
4. Rocard Y. General Dynamics of Vibrations, Paris, Masson, 1949, 458 p.
5. Зоммерфельд А. Механика. - М.-Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2001. - 368 с.
6. Пановко Г.Я. Динамика вибрационных технологических процессов. - М.-Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика. Институт компьютерных технологий, 2006. - 176 с.
7. Копылов Ю.Р. Динамика процессов виброударного упрочнения.– Воронеж: Научная книга, 2011. – 568 с.
8. Krot Pavlo, Hamid Shiri, Przemysław Dąbek, Radosław Zimroz. Diagnostics of Bolted Joints in Vibrating Screens Based on a Multi-Body Dynamical Model // Materials, 2023, vol. 16, no. 17, pp. 5794. DOI: [10.3390/ma16175794](https://doi.org/10.3390/ma16175794)

9. Dumitriu Madalina, Apostol Ioana. Influence of Interference between Vertical and Roll Vibrations on the Dynamic Behaviour of the Railway Bogie // *Vibration*, 2022, vol. 5, pp. 659-675. DOI: [10.3390/vibration5040039](https://doi.org/10.3390/vibration5040039)
10. Chu, Song Yang. Study on Dynamic Interaction of Railway Pantograph–Catenary Including Reattachment Momentum Impact // *Vibration*, 2020, vol. 3, pp. 18-33. DOI: [10.3390/vibration3010003](https://doi.org/10.3390/vibration3010003)
11. Антипов В.А. Подавление вибрации агрегатов и узлов транспортных систем. - М.: Маршрут, 2006. - 264 с.
12. Rieß Sebastian, Kaal William, Herath, Kristian. Frequency-Adaptable Tuned Mass Damper Using Metal Cushions // *Vibration*, 2021, vol. 4, pp. 77-90. DOI: [10.3390/vibration4010007](https://doi.org/10.3390/vibration4010007)
13. Максимов С.А., Наумченко В.П., Илюшин П.А., Пикунов Д.Г., Соловьёв А.В. Анализ системы амортизации и демпфирования бесплатформенного инерциального измерительного прибора // Труды МАИ. 2023. № 129. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=173032>. DOI: [10.34759/trd-2023-129-20](https://doi.org/10.34759/trd-2023-129-20)
14. Vellingiri Vishwa, Sadasivam Udhayakumar. Effect of Vibrator Parameters and Physical Characteristics of Parts on Conveying Velocity // *Strojniški vestnik - Journal of Mechanical Engineering*, 2023, vol. 69, pp. 352-363. DOI: [10.5545/sv-jme.2022.510](https://doi.org/10.5545/sv-jme.2022.510)
15. Kletschkowski T. Theoretical and Non-Dimensional Investigations into Vibration Control Using Viscoelastic and Endochronic Elements // *Vibration*, 2023, vol. 6 (4), pp. 1030-1047. DOI: [10.5545/sv-jme.2022.510](https://doi.org/10.5545/sv-jme.2022.510)

16. Tophøj Laust, Grathwol Nikolaj, Hansen Svend. Effective Mass of Tuned Mass Dampers // *Vibration*, 2018, vol. 1, pp. 192-206. DOI: [10.3390/vibration1010014](https://doi.org/10.3390/vibration1010014)
17. Сысоев О.Е., Добрышкин А.Ю., Нейн С.Н. Аналитическое и экспериментальное исследование свободных колебаний разомкнутых оболочек из сплава д19, несущих систему присоединенных масс // *Труды МАИ*. 2018. № 98. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=90079>
18. Korendiy V., Kachur O., Predko R., Kotsiumbas O., Stotsko R., Ostashuk M. Generating rectilinear, elliptical, and circular oscillations of a single-mass vibratory system equipped with an enhanced twin crank-type exciter // *Vibroengineering Procedia*, 2023, vol. 51, pp. 8-14. DOI: [10.21595/vp.2023.23657](https://doi.org/10.21595/vp.2023.23657)
19. Moueddeb Maryam, Louf François, Boucard Pierre-Alain, Dadié Franck, Saussine Gilles, Sorrentino Danilo. An Efficient Numerical Model to Predict the Mechanical Response of a Railway Track in the Low-Frequency Range // *Vibration*, 2022, vol. 5, pp. 326-343. DOI: [10.3390/vibration5020019](https://doi.org/10.3390/vibration5020019)
20. Sehner Michael, Nava Luis, Seidl-Nigsch Markus, Loy Harald. Vibration Mitigation: Under-Ballast Mats in Heavy-Haul Applications // *Practice Periodical on Structural Design and Construction*, 2023, vol. 28, pp. 05023004. DOI: [10.1061/PPSCFX.SCENG-1258](https://doi.org/10.1061/PPSCFX.SCENG-1258)
21. Zhao Zhenhang, Gao Ying, Li Chenghui. Research on the Vibration Characteristics of a Track's Structure Considering the Viscoelastic Properties of Recycled Composite Sleepers // *Applied Sciences*, 2020, vol. 11, pp. 150. DOI: [10.3390/app11010150](https://doi.org/10.3390/app11010150)

22. Zou Yu, Wen Yongpeng, Sun Qian. Study on the Urban Rail Transit Sleeper Spacing Considering Vehicle System // MATEC Web of Conferences, 2019, vol. 296, pp. 01008. DOI: [10.1051/matecconf/201929601008](https://doi.org/10.1051/matecconf/201929601008)
23. Korendiy Vitaliy, Volodymyr Gursky, Oleksandr Kachur, Petro Dmyterko, Oleh Kotsiumbas, Oleksandr Havrylchenko. Mathematical Model and Motion Analysis of a Wheeled Vibro-Impact Locomotion System // Vibroengineering PROCEDIA, 2022, vol. 41, pp. 77–83. DOI: [10.21595/vp.2022.22422](https://doi.org/10.21595/vp.2022.22422)
24. Банах Л.Я. Методы декомпозиции при исследовании колебаний механических систем. - Москва-Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2016. - 292 с.
25. Banakh L., Kempner M. Vibrations of Mechanical Systems with Regular Structure, Berlin, Heidelberg, Springer, 2010, 262 p.
26. Гальперин И.И. Автоматика как односторонняя механика. - М.: Энергия, 1964. - 264 с.
27. Фролов К.В., Фурман Ф.А. Прикладная теория виброзащитных систем. - М.: Машиностроение, 1985. – 286 с.
28. Тарасик В.П. Математическое моделирование технических систем. - Минск: Дизайн ПРО, 2004. - 640 с.
29. Ганиев Р.Ф., Кононенко В.О. Колебания твердых тел. - М.: Наука, 1976. - 432 с.
30. Коловский М.З. Автоматическое управление виброзащитными системами. - М.: Наука, 1976. - 320 с.
31. Дружинский И.А. Механические цепи. - Л.: Машиностроение, 1977. - 240 с.
32. Рэлей Д.В. Теория звука. Т. 1. – М.: - Л.: Гостехтеоретиздат, 1940. - 500 с.

33. Ленк А. Электромеханические системы. Системы с сосредоточенными параметрами. - М.: Мир, 1978. - 288 с.
34. Елисеев С.В. Прикладной системный анализ и структурное математическое моделирование (динамика транспортных и технологических машин: связность движений, вибрационные взаимодействия, рычажные связи): монография. – Иркутск: ИрГУПС, 2018. – 692 с.
35. Белокобыльский С.В., Елисеев С.В., Кашуба В.Б. Прикладные задачи структурной теории виброзащитных систем. - СПб.: Политехника, 2013. – 363 с.
36. Eliseev S.V., Eliseev A.V. Theory of Oscillations. Structural Mathematical Modeling in Problems of Dynamics of Technical Objects. Series: Studies in Systems, Decision and Control, vol. 252, Springer International Publishing, Cham, 2020, 521 p.
37. Eliseev A.V. Structural Mathematical Modeling Applications in Technological Machines and Transportation Vehicles. Hershey, PA: IGI Global, 2023. DOI: [10.4018/978-1-6684-7237-8](https://doi.org/10.4018/978-1-6684-7237-8)
38. Karnovsky I.A., Lebed E. Theory of Vibration Protection, Springer International Publishing, Switzerland, 2016, 708 p.
39. Елисеев А.В., Елисеев С.В. Диада как основа формирования механических колебательных систем // Системы. Методы. Технологии. 2017. № 4 (36). С. 25-38. DOI: [10.18324/2077-5415-2017-4-25-38](https://doi.org/10.18324/2077-5415-2017-4-25-38)
40. Елисеев А.В. Частотная функция и функция демпфирования в оценке динамических процессов в механических колебательных системах с симметрией // Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don). 2020. Т. 20. № 4. С. 360-369.

41. Елисеев А.В. Динамические свойства диады с разнородными парциальными системами // Вестник Иркутского государственного технического университета. 2017. Т. 21. № 5 (124). С. 32-53. DOI: [10.21285/1814-3520-2017-5-32-53](https://doi.org/10.21285/1814-3520-2017-5-32-53)
42. Елисеев С.В., Орленко А.И., Нгуен Д.Х. Устройства для преобразования движения в структуре диады механической колебательной системы // Вестник Донского государственного технического университета. 2017. Т. 17. № 3 (90). С. 46-59.
43. Елисеев А.В., Миронов А.С. Особенности формирования инерционно-упругих связей в структуре диады // XVIII Международная научно-практическая конференция «Кулагинские чтения: техника и технологии производственных процессов» (Чита, 28–30 ноября 2018): сборник статей. - Чита: Забайкальский государственный университет, 2018. С. 220-225.
44. Лурье А.И. Операционное исчисление и применение в технических приложениях. – М.: Наука, 1959. – 368 с.
45. Елисеев С.В., Орленко А.И., Елисеев А.В. Структурные образования в механических колебательных системах: диады, их свойства, возможности изменения динамических состояний // Транспорт Урала. 2017. № 3 (54). С. 56-63. DOI: [10.20291/1815-9400-2017-3-56-63](https://doi.org/10.20291/1815-9400-2017-3-56-63)
46. Елисеев А.В., Елисеев С.В. Особенности динамических свойств диады в подходах с позиций мезомеханики // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2019. Т. 62. № 2. С. 23–33. DOI: [10.26731/1813-9108.2019.2\(62\).23–33](https://doi.org/10.26731/1813-9108.2019.2(62).23-33)

47. Елисеев А.В., Николаев А.В., Миронов С.В. Диады в механических колебательных системах: модель формирования динамических взаимодействий // Седьмая международная научная конференция «Проблемы механики современных машин» (Улан-Удэ, 25–30 июня 2018): сборник трудов. - Улан-Удэ: Изд-во Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления. 2018. Т. 1. С. 33-40.
48. Николаев А.В., Елисеев А.В. Математическое моделирование: особенности динамических свойств структурных образований в составе механических колебательных систем // Автоматизированное проектирование в машиностроении. 2018. № 6. С. 63-65.
49. Елисеев А.В., Кузнецов Н.К., Николаев А.В. Характерные особенности распределения амплитуд в свободных колебаниях механических систем: введение дополнительных связей, структурные образования // Материалы международной научно-практической конференции «Машиностроение: инновационные аспекты развития» (Санкт-Петербург, 15 марта 2019): сборник трудов. – СПб.: Санкт-Петербургский филиал Научно-исследовательского центра «МашиноСтроение», 2019. Т. 2. С. 50-57. DOI: [10.26160/2618-6810-2019-2-50-57](https://doi.org/10.26160/2618-6810-2019-2-50-57)
50. Елисеев А.В., Выонг К.Ч. Некоторые возможности управления одномерным вибрационным полем технологической машины // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2016. № 1 (49). С. 33-41.

51. Елисеев А.В., Мамаев Л.А., Ситов И.С. Некоторые подходы к обоснованию схемы инерционного возбуждения в технологических вибрационных машинах // Системы. Методы. Технологии. 2015. № 4 (28). С. 15-24.

## References

1. Clarence W. de Silva. *Vibration. Fundamentals and Practice*, Boca Raton, London, New York, Washington, D.C.: CRC Press, 2000, 957 p.
2. Den-Gartog D.P. *Mekhanicheskie kolebaniya* (Mechanical vibrations), Moscow, Fizmatgiz, 1960, 574 p.
3. Tsze F.S., Morze I.E., Khinkl R.T. *Mekhanicheskie kolebaniya* (Mechanical vibrations), Moscow, Mashinostroenie, 1966, 508 p.
4. Rocard Y. *General Dynamics of Vibrations*, Paris, Masson, 1949, 458 p.
5. Zommerfel'd A. *Mekhanika* (Mechanics), Moscow-Izhevsk, NITs Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika, 2001, 368 p.
6. Panovko G.Ya. *Dinamika vibratsionnykh tekhnologicheskikh protsessov* (Dynamics of vibration technological processes), Moscow-Izhevsk, Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika, Institut komp'yuternykh tekhnologii, 2006, 176 p.
7. Kopylov Yu.R. *Dinamika protsessov vibroudarnogo uprochneniya* (Dynamics of vibration shock hardening processes), Voronezh, Nauchnaya kniga, 2011, 568 p.
8. Krot Pavlo, Hamid Shiri, Przemysław Dąbek, Radosław Zimroz. Diagnostics of Bolted Joints in Vibrating Screens Based on a Multi-Body Dynamical Model, *Materials*, 2023, vol. 16, no. 17, pp. 5794. DOI: [10.3390/ma16175794](https://doi.org/10.3390/ma16175794)



9. Dumitriu Madalina, Apostol Ioana. Influence of Interference between Vertical and Roll Vibrations on the Dynamic Behaviour of the Railway Bogie, *Vibration*, 2022, vol. 5, pp. 659-675. DOI: [10.3390/vibration5040039](https://doi.org/10.3390/vibration5040039)
10. Chu, Song Yang. Study on Dynamic Interaction of Railway Pantograph–Catenary Including Reattachment Momentum Impact, *Vibration*, 2020, vol. 3, pp. 18-33. DOI: [10.3390/vibration3010003](https://doi.org/10.3390/vibration3010003)
11. Antipov V.A. *Podavlenie vibratsii agregatov i uzlov transportnykh sistem* (Vibration suppression of aggregates and nodes of transport systems), Moscow, Marshrut, 2006, 264 p.
12. Rieß Sebastian, Kaal William, Herath, Kristian. Frequency-Adaptable Tuned Mass Damper Using Metal Cushions, *Vibration*, 2021, vol. 4, pp. 77-90. DOI: [10.3390/vibration4010007](https://doi.org/10.3390/vibration4010007)
13. Maksimov S.A., Naumchenko V.P., Ilyushin P.A., Pikunov D.G., Solov'ev A.V. *Trudy MAI*, 2023, no. 129. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=173032>. DOI: [10.34759/trd-2023-129-20](https://doi.org/10.34759/trd-2023-129-20)
14. Vellingiri Vishwa, Sadasivam Udhayakumar. Effect of Vibrator Parameters and Physical Characteristics of Parts on Conveying Velocity, *Strojniški vestnik - Journal of Mechanical Engineering*, 2023, vol. 69, pp. 352-363. DOI: [10.5545/sv-jme.2022.510](https://doi.org/10.5545/sv-jme.2022.510)
15. Kletschkowski T. Theoretical and Non-Dimensional Investigations into Vibration Control Using Viscoelastic and Endochronic Elements, *Vibration*, 2023, vol. 6 (4), pp. 1030-1047. DOI: [10.5545/sv-jme.2022.510](https://doi.org/10.5545/sv-jme.2022.510)

16. Tophøj Laust, Grathwol Nikolaj, Hansen Svend. Effective Mass of Tuned Mass Dampers, *Vibration*, 2018, vol. 1, pp. 192-206. DOI: [10.3390/vibration1010014](https://doi.org/10.3390/vibration1010014)
17. Sysoev O.E., Dobryshkin A.Yu., Nein S.N. *Trudy MAI*, 2018, no. 98. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=90079>
18. Korendiy V., Kachur O., Predko R., Kotsiumbas O., Stotsko R., Ostashuk M. Generating rectilinear, elliptical, and circular oscillations of a single-mass vibratory system equipped with an enhanced twin crank-type exciter, *Vibroengineering Procedia*, 2023, vol. 51, pp. 8-14. DOI: [10.21595/vp.2023.23657](https://doi.org/10.21595/vp.2023.23657)
19. Moueddeb Maryam, Louf François, Boucard Pierre-Alain, Dadié Franck, Saussine Gilles, Sorrentino Danilo. An Efficient Numerical Model to Predict the Mechanical Response of a Railway Track in the Low-Frequency Range, *Vibration*, 2022, vol. 5, pp. 326-343. DOI: [10.3390/vibration5020019](https://doi.org/10.3390/vibration5020019)
20. Sehner Michael, Nava Luis, Seidl-Nigsch Markus, Loy Harald. Vibration Mitigation: Under-Ballast Mats in Heavy-Haul Applications, *Practice Periodical on Structural Design and Construction*, 2023, vol. 28, pp. 05023004. DOI: [10.1061/PPSCFX.SCENG-1258](https://doi.org/10.1061/PPSCFX.SCENG-1258)
21. Zhao Zhenhang, Gao Ying, Li Chenghui. Research on the Vibration Characteristics of a Track's Structure Considering the Viscoelastic Properties of Recycled Composite Sleepers, *Applied Sciences*, 2020, vol. 11, pp. 150. DOI: [10.3390/app11010150](https://doi.org/10.3390/app11010150)
22. Zou Yu, Wen Yongpeng, Sun Qian. Study on the Urban Rail Transit Sleeper Spacing Considering Vehicle System, *MATEC Web of Conferences*, 2019, vol. 296, pp. 01008. DOI: [10.1051/matecconf/201929601008](https://doi.org/10.1051/matecconf/201929601008)

23. Korendiy Vitaliy, Volodymyr Gursky, Oleksandr Kachur, Petro Dmyterko, Oleh Kotsiumbas, Oleksandr Havrylchenko. Mathematical Model and Motion Analysis of a Wheeled Vibro-Impact Locomotion System, *Vibroengineering PROCEDIA*, 2022, vol. 41, pp. 77–83. DOI: [10.21595/vp.2022.22422](https://doi.org/10.21595/vp.2022.22422)
24. Banakh L.Ya. *Metody dekompozitsii pri issledovanii kolebaniy mekhanicheskikh sistem* (Decomposition methods in the study of vibrations of mechanical systems), Moscow-Izhevsk, *Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika*, 2016, 292 p.
25. Banakh L., Kempner M. *Vibrations of Mechanical Systems with Regular Structure*, Berlin, Heidelberg, Springer, 2010, 262 p.
26. Gal'perin I.I. *Avtomatika kak odnostoronnyaya mekhanika* (Automation as one-sided mechanics), Moscow, Energiya, 1964, 264 p.
27. Frolov K.V., Furman F.A. *Prikladnaya teoriya vibrozashchitnykh sistem* (Applied theory of vibration protection systems), Moscow, Mashinostroenie, 1985, 286 p.
28. Tarasik V.P. *Matematicheskoe modelirovanie tekhnicheskikh sistem* (Mathematical modeling of technical systems), Minsk, Dizain PRO, 2004, 640 p.
29. Ganiev R.F., Kononenko V.O. *Kolebaniya tverdykh tel* (Vibrations of solids), Moscow, Nauka, 1976, 432 p.
30. Kolovskii M.Z. *Avtomaticheskoe upravlenie vibrozashchitnymi sistemami* (Automatic control of vibration protection systems), Moscow, Nauka, 1976, 320 p.
31. Druzhinskii I.A. *Mekhanicheskie tsepi* (Mechanical chains), Leningrad, Mashinostroenie, 1977, 240 p.

32. Relei D.V. *Teoriya zvuka. T. 1* (Theory of sound. Vol. 1), Moscow-Leningrad, Gostekhteorizdat, 1940, 500 p.
33. Lenk A. *Elektromekhanicheskie sistemy. Sistemy s sosredotochennymi parametrami* (Electromechanical systems. Systems with concentrated parameters), Moscow, Mir, 1978, 288 p.
34. Eliseev S.V. *Prikladnoi sistemnyi analiz i strukturnoe matematicheskoe modelirovanie (dinamika transportnykh i tekhnologicheskikh mashin: svyaznost' dvizhenii, vibratsionnye vzaimodeistviya, rychazhnye svyazi)* (Applied system analysis and structural mathematical modeling (dynamics of transport and technological machines: connectivity of movements, vibrational interactions, lever connections)) Irkutsk, IrGUPS, 2018, 692 p.
35. Belokobyl'skii S.V., Eliseev S.V., Kashuba V.B. *Prikladnye zadachi strukturnoi teorii vibrozashchitnykh sistem* (Applied problems of the structural theory of vibration protection systems), Saint Petersburg, Polytechnic, 2013, 363 p.
36. Eliseev S.V., Eliseev A.V. *Theory of Oscillations. Structural Mathematical Modeling in Problems of Dynamics of Technical Objects. Series: Studies in Systems, Decision and Control*, vol. 252, Springer International Publishing, Cham, 2020, 521 p.
37. Eliseev A.V. *Structural Mathematical Modeling Applications in Technological Machines and Transportation Vehicles*. Hershey, PA: IGI Global, 2023. DOI: [10.4018/978-1-6684-7237-8](https://doi.org/10.4018/978-1-6684-7237-8)
38. Karnovsky I.A., Lebed E. *Theory of Vibration Protection*, Springer International Publishing, Switzerland, 2016, 708 p.

39. Eliseev A.V., Eliseev S.V. *Sistemy. Metody. Tekhnologii*, 2017, № 4 (36), pp. 25-38.  
DOI: [10.18324/2077-5415-2017-4-25-38](https://doi.org/10.18324/2077-5415-2017-4-25-38)
40. Eliseev A.V. Chastotnaya funktsiya i funktsiya dempfirovaniya v otsenke dinamicheskikh protsessov v mekhanicheskikh kolebatel'nykh sistemakh s simmetriei, *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don)*, 2020, vol. 20, no. 4, pp. 360-369.
41. Eliseev A.V. *Vestnik Irkutskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*, 2017, vol. 21, no. 5 (124), pp. 32-53. DOI: [10.21285/1814-3520-2017-5-32-53](https://doi.org/10.21285/1814-3520-2017-5-32-53)
42. Eliseev S.V. Orlenko A.I., Nguen D.Kh. *Vestnik Donskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*, 2017, vol. 17, no. 3 (90), pp. 46-59.
43. Eliseev A.V., Mironov A.S. XVIII Mezhdunarodnaya nauchno-prakticheskaya konferentsiya «Kulaginskie chteniya: tekhnika i tekhnologii proizvodstvennykh protsessov»: sbornik statei. Chita, Zabaikal'skii gosudarstvennyi universitet, 2018, pp. 220-225.
44. Lur'e A.I. *Operatsionnoe ischislenie i primenenie v tekhnicheskikh prilozheniyakh*. (Operational calculus and application in technical applications), Moscow, Nauka, 1959, 368 p.
45. Eliseev S.V., Orlenko A.I., Eliseev A.V. *Transport Urala*, 2017, no. 3 (54), pp. 56-63.  
DOI: [10.20291/1815-9400-2017-3-56-63](https://doi.org/10.20291/1815-9400-2017-3-56-63)
46. Eliseev A.V., Eliseev S.V. *Sovremennye tekhnologii. Sistemnyi analiz. Modelirovanie*, 2019, vol. 62, no. 2, pp. 23–33. DOI: [10.26731/1813-9108.2019.2\(62\).23–33](https://doi.org/10.26731/1813-9108.2019.2(62).23–33)
47. Eliseev A.V., Nikolaev A.V., Mironov S.V. Sed'maya mezhdunarodnaya nauchnaya konferentsiya «Problemy mekhaniki sovremennykh mashin»: sbornik trudov. Ulan-Ude, Izd-

vo Vostochno-Sibirskii gosudarstvennyi universitet tekhnologii i upravleniya, 2018, vol. 1, pp. 33-40.

48. Nikolaev A.V., Eliseev A.V. *Avtomatizirovannoe proektirovanie v mashinostroenii*, 2018, no. 6, pp. 63-65.

49. Eliseev A.V., Kuznetsov N.K., Nikolaev A.V. *Materialy mezhdunarodnoi nauchno-prakticheskoi konferentsii «Mashinostroenie: innovatsionnye aspekty razvitiya»*: sbornik trudov. Saint Petersburg, Sankt-Peterburgskii filial Nauchno-issledovatel'skogo tsentra «MashinoStroenie», 2019, vol. 2, pp. 50-57. DOI: [10.26160/2618-6810-2019-2-50-57](https://doi.org/10.26160/2618-6810-2019-2-50-57)

50. Eliseev A.V., Vyong K.Ch. *Sovremennye tekhnologii. Sistemnyi analiz. Modelirovanie*. 2016, no. 1 (49), pp. 33-41.

51. Eliseev A.V., Mamaev L.A., Sitov I.S. *Sistemy. Metody. Tekhnologii*. 2015, no. 4 (28), pp. 15-24.

Статья поступила в редакцию 12.02.2024

Одобрена после рецензирования 20.03.2024

Принята к публикации 26.04.2024

The article was submitted on 12.02.2024; approved after reviewing on 20.03.2024; accepted for publication on 26.04.2024