

На правах рукописи

Sarjit

**СИДХУ Джуниор Саржит Сингх**

**ВОЛНОВОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ КАНАЛОВ СЛОЖНЫХ ФОРМ  
С РОМБИЧЕСКОЙ РЕЛЬЕФНОЙ СТРУКТУРОЙ ПОВЕРХНОСТИ**

Специальность 05.07.05  
«Тепловые, электроракетные двигатели и энергоустановки  
летательных аппаратов»

**АВТОРЕФЕРАТ**  
диссертации на соискание ученой степени  
кандидата технических наук

Москва - 2018

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)».

Научный руководитель:

доктор технических наук, профессор  
**Семенов Василий Васильевич**

Официальные оппоненты:

**Мартыненко Сергей Иванович**, доктор физико-математических наук, Государственный научный центр Федеральное государственное унитарное предприятие «Центральный институт авиационного моторостроения имени П.И. Баранова», научный сотрудник.

**Гапонов Валерий Дмитриевич**, кандидат технических наук, АО «НПО Энергомаш имени академика В.П. Глушко», начальник сектора.

Ведущая организация:


Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук.

Защита состоится 25 декабря 2018 г. в 13:00 часов на заседании диссертационного совета Д 212.125.08, созданного на базе Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» по адресу 125993, Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, д. 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)»: [https://mai.ru/upload/iblock/0d1/Dissertatsiya\\_Sidhu\\_J.S.S.pdf](https://mai.ru/upload/iblock/0d1/Dissertatsiya_Sidhu_J.S.S.pdf)

Автореферат разослан « \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2018 г.

Ученый секретарь диссертационного  
совета Д 212.125.08  
доктор технических наук, профессор

 Зуев Юрий Владимирович

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

### Актуальность темы:

Как известно, реактивное сопло ракетного двигателя 1-ой ступени из-за фиксированной геометрической степени расширения большую часть траектории полета работает на нерасчетных режимах (в разреженной атмосфере), в результате чего оно имеет на высоте существенные потери тяги из-за недорасширения газа (не хватает стенки сопла).

Использование в двигателях первых ступеней ракет-носителей двухконтурных сопел, состоящих из земного сопла и высотного круглого насадка, может улучшить их тяговые характеристики.

При штатной работе ракетного двигателя с двухконтурным соплом неизбежно наступает режим обтекания высотного насадка сверхзвуковым потоком продуктов сгорания с высокой энтальпией торможения. При этом, если обтекаемые стенки насадка сделаны из композитного материала, то после превышения предела его термостойкости начинается абляция, при которой на композитных стенках образуются структуры перемежающихся выступов и впадин, похожие на ромбические рельефы.

После появления рельефов на изначально гладких стенках высотного насадка его вклад в тягу двигателя уменьшается на величину, равную силе волнового сопротивления его рельефных стенок. При последующей абляции материала высоты выступов и глубины впадин увеличиваются. Вследствие этого, потери тяги, вызванные волновым сопротивлением рельефных стенок, продолжают расти и, в итоге, они могут существенно уменьшить весь полезный эффект использования высотного насадка. Из вышесказанного следует актуальность изучения полей сверхзвукового обтекания ромбических рельефов стенки соплового насадка.

За рубежом возникновение ромбического рельефа на поверхности аблирующих конусов исследовали Вильямс, Ингер, Шток, Лаганелли, Тобак, Кубота и другие.

В России рельефные структуры на стенках сопел с теплозащитным покрытием, которые возникали при их огневых стендовых испытаниях, обнаружили и детально исследовали Грязнов В.П. и Сергиенко А.А в Центре им. М.В. Келдыша. В МАИ Семенов В.В. выполнил экспериментальные исследования волновых сопротивлений сопловых насадков с двоякопериодическими рельефами стенок, а также аналогичных пластин. Он обнаружил существование нескольких кризисов обтекания рельефных поверхностей, в результате которых резко увеличиваются волновые потери, а также выявил, что наступление кризиса течения зависит не только от скорости потока – числа Маха, но и от отношения длин волн двоякопериодического рельефа стенки.

В настоящее время строгая нелинейная теория обтекания рельефных стенок сопел и их волнового сопротивления отсутствует. Поэтому все без исключения теоретические результаты по волновому сопротивлению рельефных стенок сопел получены в рамках акустического приближения, т. е. с помощью приближенных моделей обтекания, в которых используются точные решения краевых задач, но для линеаризованных уравнений газовой динамики с линеаризованными граничными условиями. При этом, однако, большинство из указанных теоретических результатов относятся к частному случаю сверхзвукового обтекания бесконечных пластин с периодическими или двоякопериодическими рельефами.

### **Целью работы является:**

Разработка методики расчета коэффициентов волнового сопротивления, возникающего при сверхзвуковом обтекании стенок сопловых насадков с ромбическим рельефом.

### **Задачи работы:**

1. Обосновать в рамках линейной теории формулу для аналитической зависимости полных коэффициентов волнового сопротивления конечных плоских периодических рельефов стенки соплового насадка от их параметров подобия.
2. Строго решить краевую задачу обтекания однородным потоком трехмерных рельефов стенок сопловых насадков, заданных суммами плоских синусоидальных волн. Для нестрогих оценок полных коэффициентов волнового сопротивления конечных ромбических рельефов стенки соплового насадка применить строгие решения, найденные для бесконечных аналогов изучаемых ромбических рельефов.
3. Используя CFD-продукт ANSYS, численно смоделировать эксперименты, в которых путем обдува сжатым воздухом на дифференциальной установке соплового насадка измерена сила волнового сопротивления его стенки с ромбическим рельефом при различных углах ромба.

### **Научная новизна:**

1. Аналитическим путем получены формулы, описывающие зависимость полных коэффициентов волнового сопротивления конечных периодических плоских рельефов стенки соплового насадка от параметров их подобия. Доказано, что конечный периодический плоский рельеф стенки насадка с дробным значением волнового числа имеет один неполный период, вклад которого в полный коэффициент волнового сопротивления рельефа сопла может быть как отрицательным, так и положительным.
2. Впервые в рамках линейной теории математически точно решена стационарная краевая задача трехмерного обтекания потоком пластины – элемента стенки сопла, у которой ромбический рельеф ее обтекаемой поверхности задан в виде суммы плоских синусоидальных волн, характерных для сопловых насадков.
3. Доказано, что поле обтекания ромбического рельефа с критическим значением его угла ромба нельзя определить в рамках линейной теории из-за деления на ноль, которую называют кризисом сверхзвукового обтекания стенки соплового насадка.

### **Теоретическая и практическая значимость результатов работы:**

Коэффициенты волнового сопротивления, возникающего при обтекании сверхзвуковым потоком стенки соплового насадка с ромбическим рельефом, могут быть использованы при проектировании двухконтурных реактивных сопел двигателей и других элементов летательного аппарата.

### **Достоверность результатов работы обеспечена:**

- использованием современных математических методов и сертифицированной программы ANSYS для решения прикладных задач газовой динамики (номер лицензии № 632255).
- удовлетворительным согласованием результатов численного моделирования с экспериментальными данными испытаний сопловых плоских насадков с ромбическим рельефом на дифференциальной установке.

### **Личный вклад автора:**

Все результаты, представленные в работе, получены либо лично автором, либо при его непосредственном участии. Так, выбор программ расчета и математических моделей, построение рабочей сетки для трехмерного численного моделирования обтекания стенки соплового насадка с ромбическим рельефом, обработка полученных результатов, а также сравнение расчетных данных с экспериментальными данными выполнены лично соискателем.

### **Публикации, отражающие полноту изложения материалов диссертации:**

Основные результаты диссертационной работы в полном объеме опубликованы в 5 научных работах, 2 из которых являются статьями в рецензированных научных изданиях.

### **Апробация результатов работы:**

Основные результаты диссертационной работы докладывались на следующих конференциях, которые являются международными:

1. XLII Международная молодёжная научная конференция «Гагаринские чтения», Москва, 12–15 апреля 2016.
2. XX Юбилейная Международная конференция по Вычислительной механике и современным прикладным программным системам, Алушта, 24–31 мая 2017.
3. 16-я Международная конференция «Авиация и космонавтика», Москва, 20 – 24 Ноябрь 2017.

### **Структура и объём работы:**

Диссертация состоит из введения, 4 глав с выводами по главам и общих выводов, списка использованных источников. Объём диссертации составляет 115 страницы машинописного текста, в том числе 48 рисунков и 7 таблиц. Библиография диссертации: 68 наименования.

### **Автор защищает следующие основные положения работы:**

- аналитическим путем полученные формулы, описывающие зависимость полных коэффициентов волнового сопротивления конечных периодических плоских рельефов стенки соплового насадка от параметров их подобия.
- метод расчета сверхзвукового обтекания газовым потоком пластины – элемента стенки сопла, у которой ромбический рельеф ее обтекаемой поверхности задан в виде суммы плоских синусоидальных волн, позволяющий получить в рамках линейной теории точные формулы для определения коэффициентов волнового сопротивления ромбического рельефа стенки соплового насадка.
- результаты вычислительных исследований сверхзвукового обтекания газовым потоком стенок сопловых плоских насадков, имеющих ромбические рельефы с различными углами ромба.

## **ОСНОВНЫЕ ТЕЗИСЫ РАБОТЫ**

**В первой главе** проведен обзор научной информации по исследованию обтекания потоком рельефной поверхности головной части летательного аппарата. Показано, что за рубежом значительное внимание уделяется выявлению основных механизмов возникновения рельефной поверхности. Появление такого рельефного рисунка отме-

чалось на поверхности разнообразных материалов в условиях переходного или турбулентного пограничного слоя. Была выявлена связь между изменением длины волны рельефной поверхности и давлением потока, а также изменением шага рельефной сетки и поверхностным трением. Было установлено, что для образования рельефной поверхности необходимо существование сверхзвукового течения и турбулентного пограничного слоя.

Для оценки требования существования сверхзвукового потока были испытаны конусы из люсита с различными углами при вершине, что позволяло получать число Маха на границе пограничного слоя как больше, так и меньше единицы (рис. 1.1).

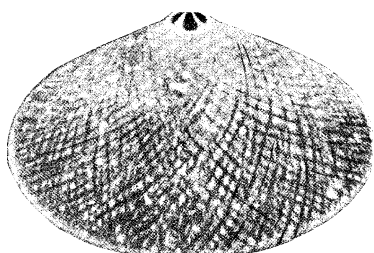


Рис. 1.1 Конус из люсита

Конус с углом при вершине  $50^\circ$  имел после испытаний рельефную структуру (рис. 1.1). Однако на поверхности конуса с углом при вершине  $55^\circ$  рельефная сетка не возникала. Таким образом, было установлено, что для образования рельефной структуры на поверхности необходимо существование сверхзвукового течения потока газа. Было установлено, что существования сверхзвукового потока и турбулентного пограничного слоя являются необходимым, но недостаточным условием для образования рельефной структуры.

Было также установлено, что механизм процесса определяется ударными волнами, которые порождаются возмущениями давления и вызывают неравномерную абляцию поверхности, что и создает рельефный рисунок (рис. 1.2, 1.3). Было установлено, что у поверхности модели существуют системы стоячих волн, из чего следовал вывод о невозможности возникновения рельефной структуры на поверхности тел при обтекании их дозвуковым потоком.

В работе Семенова В.В. (МАИ, Россия) приведено расчетно-экспериментальное исследование обтекания сверхзвуковым потоком оболочек реактивного сопла с ромбическими рельефными поверхностями (Рис. 1.4). Результаты испытаний сопловых насадков с рельефной поверхностью сравниваются с расчетно-теоретическими по величине волнового сопротивления.

В работе обнаружено существование нескольких максимумов потерь тяги, которые объясняются тем, что при сверхзвуковом обтекании выступов потоком наступает несколько кризисов течения. Перестроения течения повторяются каждый раз, когда наступает кризис течения  $\beta_i = \alpha$ , где  $\beta_i$  – угол расположения выступов,  $\alpha$  – угол Маха. Аналогичные результаты получены при испытании сопловых насадков с ромбической и шахматной рельефными структурами поверхности.

Максимумы волновых сопротивлений ромбических рельефов, исследованных в работах Сергиенко А.А. и Семенова В.В., достигались при их критических режимах сверхзвукового обтекания.

В работах Сергиенко А.А. и Семенова В.В. при решении краевых задач Блохинцева Д.И. в случае трехмерных рельефов, сводимых к суммам плоских синусоидальных волн, использовали методы суперпозиции граничных условий и разделения переменных.



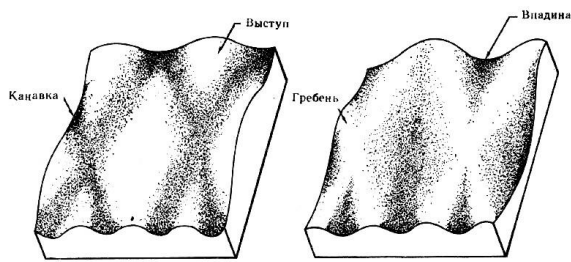


Рис. 1.2 Типы ромбических рельефов

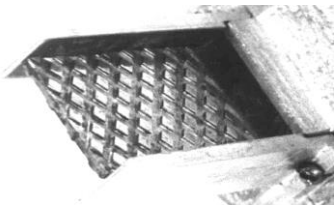


Рис. 1.4 Ромбическое расположение выступов

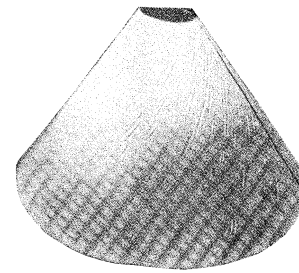


Рис. 1.3 Ромбические рельефы при абляции

Однако в работах Черного Г.Г. и Волкова В.А., Квона М.Ч. в которых получили математически строгие решения задач обтекания плоских рельефов, доказали, что при сверхзвуковых режимах обтекания потоком газа стандартный метод разделения переменных не гарантирует единственность решения, а для того чтобы ее обеспечить, необходимо применять еще отсутствие любых возмущений в натекающем сверхзвуковом

однородном потоке.

Для определения коэффициентов волнового сопротивления рельефных стенки соплового насадка сначала решали задачу их обтекания однородным потоком с применением двух методов.

Первый из них применяли в работах Волкова В.А., Квона М.Ч. и Черного Г.Г., где в рамках линейной теории плоских течений получали аналитические решения линейризованных задач плоского сверхзвукового обтекания произвольных конечных рельефов. Преимущество данного метода – корректное описание вкладов передней и задней кромок, всегда имеющих у реальных стенок сопловых насадков, а недостаток – невозможность его обобщения на случай трехмерных обтеканий.

Второй метод применялся в работах Блохинцева Д.И. и Сергиенко А.А., Семенова В.В. В них задачу обтекания бесконечной пластины с периодическим или двоякопериодическим синусоидальным рельефом (характерной для сопловых насадков) сводили к линейным краевым задачам, а их аналитические решения находили с помощью методов декомпозиции граничных условий и разделения переменных. Преимущество второго метода – это частично реализованная возможность его обобщения на случай трехмерных обтеканий, а недостаток – его возможная приближенность из-за отсутствия в нем передней и задней кромок, имеющих у реальных стенок сопловых насадков.

**Во второй главе** приведены формулы, полученные аналитическим путем, для описания зависимости полных коэффициентов волнового сопротивления периодических плоских рельефов стенок сопловых насадков от параметров их подобия.

Линейные задачи трехмерного обтекания бесконечных рельефов, задаваемых в виде сумм плоских синусоидальных волн, решают методом суперпозиции граничных условий и разделения переменных. Однако в нем пренебрегают всеми краевыми эффектами, в связи с чем возникает вопрос, насколько отличаются между собой коэф-

фициенты волнового сопротивления конечных и бесконечных пластин, имитирующих стенки соплового насадка и имеющих одинаковые периодические рельефы. Исчерпывающий ответ на заданный вопрос обоснован теоретически в данной главе.

### Волновое сопротивление конечных плоских рельефов

Рассмотрим стационарное плоское обтекание сверхзвуковым потоком линейчатой поверхности, конечная полоса которой, имеющая длину  $L$ , изображена на рис. 2.1. На нем скорость натекающего потока  $\vec{U}$  параллельна оси  $x$  и перпендикулярна образующим линейчатой полосы. Эта полоса, включая ее переднюю и заднюю кромки, изображены на рис. 2.1 в виде отрезков прямых линий, параллельных оси  $z$ . Введем обозначения, с помощью которых запишем все принятые допущения

$$p' = p + \delta p, \quad \rho' = \rho + \delta \rho, \quad u' = U + \delta u, \quad v' = \delta v, \quad w' = \delta w, \quad \delta w = 0, \quad (2.1)$$

$$\{p, \rho, U, \kappa\} = const, \quad \Psi = \delta p / \kappa p, \quad E = \delta \rho / \rho, \quad \Phi = \delta u / U, \quad \Theta = \delta v / U$$

Здесь  $\kappa$  – показатель адиабаты газа. Изучаемое поле течения является плоским. В нем возмущения  $z$  компоненты скорости –  $\delta w$  равны нулю, а все ненулевые возмущения: давления –  $\delta p$ , плотности –  $\delta \rho$  и  $x, y$  компонент скорости –  $\delta u, \delta v$ , созданные рельефом обтекаемой поверхности, не зависят от координаты  $z$  и поэтому являются функциями только двух координат  $x, y$ .

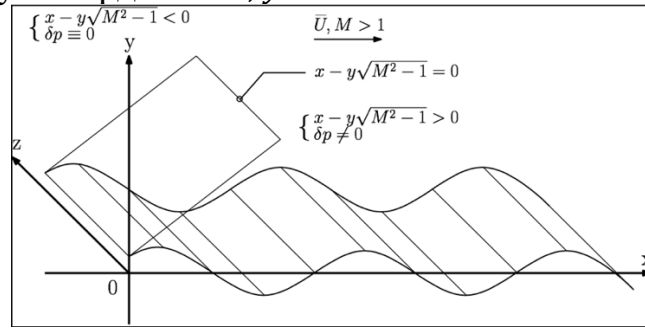


Рис. 2.1 Плоское сверхзвуковое обтекание конечной линейчатой поверхности

Общее уравнение семейства линейчатых поверхностей записывают в виде

$$y_w = \xi(x), \quad x \in [0, L] \quad (2.2)$$

На непрерывную функцию (2.2) и ее производные налагают ограничения

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \xi(x + \varepsilon) = \xi(x), \quad |\xi(x)| \ll L, \quad |\xi'(x)| \ll 1, \quad x \in [0, L] \quad (2.3)$$

Если все допущения (2.1) и ограничения (2.3) выполнены, то безразмерные возмущения  $\Psi, E, \Phi, \Theta$  вида (2.1), как правило, являются одновременно малыми

$$|\Psi| \ll 1, \quad |E| \ll 1, \quad |\Phi| \ll 1, \quad |\Theta| \ll 1 \quad (2.4)$$

Если неравенства (2.4) выполнены, то в системе уравнений все те члены, которые являются квадратичными или кубическими относительно возмущений, заведомо малы по сравнению с линейными членами. Поэтому, оставив во всех уравнениях только линейные члены, получают линеаризованную систему.

Аналогичным способом получают линеаризованное граничное условие безотрывного обтекания поверхности (2.2), которое при этом задают его не на ней самой, а на плоскости  $y = 0$

$$\Theta|_{y=0} = \xi'(x) \quad (2.5)$$

В работе Блохинцева Д.И. линеаризованную систему и граничное условие (2.5), свели к линейной задаче для поля безразмерных возмущений давления  $\Psi(x, y)$

$$(M^2 - 1) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y} \Big|_{y=0} = -M^2 \xi''(x), \quad x \in [0, L], \quad y \geq 0 \quad (2.6)$$



Здесь  $M$  – число Маха натекающего потока,  $M^2 = \rho U^2 / \kappa p$ . В работе Черного Г.Г. ту же самую линеаризованную пару свели к краевой задаче для потенциала  $\Pi(x, y)$  возмущений скорости, а поле  $\Psi(x, y)$  определили с помощью линейного аналога интеграла Бернулли

$$(M^2 - 1) \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial y} \Big|_{y=0} = U \xi'(x), \quad \Psi \equiv -\frac{M^2}{U} \frac{\partial \Pi}{\partial x}, \quad x \in [0, L], \quad y \geq 0 \quad (2.7)$$

В работах Черного Г.Г., Волкова В.А., Квона М.Ч. и Семенова В.В., используя очевидное условие – отсутствие любых возмущений в натекающем однородном потоке, получили в случае  $M > 1$  точные решения краевых задач (2.6) и (2.7), в которых оба поля  $\Psi(x, y)$  имеют одинаковый вид

$$\Psi(x, y) = M^2 \xi'(x - y\sqrt{M^2 - 1}) / \sqrt{M^2 - 1}, \quad 0 < x - y\sqrt{M^2 - 1} < L, \quad y \geq 0 \quad (2.8)$$

Они доказали, что если углы излома контура рельефа во всех точках разрыва его производной  $\xi'(x)$  являются малыми, то формула (2.8) остается точной.

Коэффициенты давления –  $c_p$ , а также местных –  $c_{px}$  и полных –  $c_{pL}$  волновых сопротивлений получают

$$c_p = 2 \xi'(x) / \sqrt{M^2 - 1}, \quad c_{px} = c_p \xi'(x) \rightarrow c_{px} = 2 \xi'^2(x) / \sqrt{M^2 - 1}$$

$$c_{pL} = \frac{2}{L\sqrt{M^2 - 1}} \int_0^L \xi'^2(x) dx, \quad \bar{\xi}'^2_L = \frac{1}{L} \int_0^L \xi'^2(x) dx \rightarrow c_{pL} = \frac{2}{\sqrt{M^2 - 1}} \bar{\xi}'^2_L \quad (2.9)$$

Первую формулу (2.9) получил Аккерет. Третью и шестую формулы (2.9) также называют общей формулой Аккерета, и применяют ее, как для местных –  $c_{px}$ , так и для полных –  $c_{pL}$  коэффициентов волнового сопротивления рельефов, у которых имеются  $\bar{\xi}'^2_L$  согласно (2.9). Нижний индекс у среднего значения  $\bar{\xi}'^2_L$  имеет физический смысл – это длина, по которой усредняют. Поэтому, для того чтобы у бесконечного рельефа имелось конечное среднее значение  $\bar{\xi}'^2_\infty$ , достаточно существование пре-

$$\text{дела} \quad \bar{\xi}'^2_\infty = \lim_{L \rightarrow \infty} \bar{\xi}'^2_L \quad (2.10)$$

Согласно справочнику Корна Г. по математике предел (2.10) существует, если функция  $\xi'^2(x)$  является периодической с наименьшим периодом  $\lambda > 0$ , а также имеет непрерывную первообразную  $\mathcal{E}(x)$  вида

$$\xi'^2(x + \lambda) = \xi'^2(x), \quad L/2 > \lambda > 0, \quad \mathcal{E}(x) = \int_0^x \xi'^2(x) dx, \quad x \in [0, L] \quad (2.11)$$

Любую неправильную дробь можно представить в виде суммы ее целой части и дробной доли. Скобки обозначают его целую часть. Поэтому имеем

$$L/\lambda = [m] + m - [m], \quad k_m = m - [m] \rightarrow 0 \leq k_m < 1, \quad m = [m] + k_m \quad (2.12)$$

$$L = [m]\lambda + k_m\lambda \rightarrow \int_0^L \xi'^2(x) dx = \int_0^{[m]\lambda} \xi'^2(x) dx + \int_{[m]\lambda}^{[m]\lambda + k_m\lambda} \xi'^2(x) dx \quad (2.13)$$

Из приведенных выше формул (2.9 – 2.13) и выкладок следует, что замкнутая цепочка формул для расчета полного коэффициента волнового сопротивления конечного периодического рельефа типа (2.2, 2.11) имеет вид

$$\bar{\xi}'^2_\lambda = \mathcal{E}(\lambda) / \lambda, \quad c_{p\infty} = 2 \bar{\xi}'^2_\lambda / \sqrt{M^2 - 1}, \quad m = L/\lambda, \quad k_m = m - [m],$$

$$k_I = \mathcal{E}(k_m\lambda) / \mathcal{E}(\lambda), \quad D = k_I - k_m, \quad c_{pL} = c_{p\infty} (1 + D/m) \quad (2.14)$$

Из формул (2.14) следует, что у всякого рельефа типа (2.2, 2.11) может реализоваться один из трех взаимоисключающих случаев:

$$\text{либо } \{k_m = 0 \rightarrow k_I = 0 \rightarrow D = 0 \rightarrow c_{pL} = c_{p\infty}\},$$

$$\text{либо } \{k_m \neq 0, \quad k_I = k_m \rightarrow D = 0 \rightarrow c_{pL} = c_{p\infty}\}, \quad (2.15)$$

либо  $\{k_m \neq 0, k_l \neq k_m \rightarrow D \neq 0 \rightarrow c_{pL} \neq c_{p\infty}\}$ .

Согласно (2.15) равенство  $D = 0$  имеет место, не только при любых целых, но и при некоторых дробных числах  $m$ , а неравенство  $D \neq 0$  – только при дробных  $m$ . Поэтому параметр  $D$  можно назвать дефектом «дробных» периодических рельефов.

### Особые плоские рельефы и их уникальные свойства

Рельефы (2.2, 2.11), у которых при любых значениях  $m \in (0, \infty)$  дефект  $D \equiv 0$ , назовем особыми. Согласно (2.15) при любом  $k_m \in [0,1]$  у периодических особых плоских рельефов должно выполняться равенство  $k_l \equiv k_m \rightarrow \mathcal{E}(k_m\lambda)/\mathcal{E}(\lambda) \equiv k_m$ . Дифференцируя его по  $k_m$  и используя формулы (2.11) и (2.14), в итоге получим

$$\frac{d}{dk_m} \frac{\mathcal{E}(k_m\lambda)}{\mathcal{E}(\lambda)} \equiv \frac{\lambda \xi'^2(k_m\lambda)}{\mathcal{E}(\lambda)} \equiv \frac{\xi'^2(k_m\lambda)}{\bar{\xi}'^2_\lambda} \equiv 1 \rightarrow \xi'^2(k_m\lambda) \equiv \bar{\xi}'^2_\lambda, \quad k_m \in [0,1] \quad (2.16)$$

Равенство (2.16) выполняется у тех периодических кусочно-гладких рельефов (2.2, 2.11), у которых их функция  $\xi(x)$  и ее производная  $\xi'(x)$  являются периодическими, а квадрат производной  $\xi'^2(x)$  всюду, где она определена, равен общей константе  $\xi'^2(x) \equiv \bar{\xi}'^2_\lambda$  всего рельефа. Рельефы, у которых свойство периодичности производной  $\xi'(x)$  вырождается при возведении ее в квадрат, являются периодическими особыми рельефами (2.2, 2.11). Всякая функция  $\xi'(x)$  меняет знак в каждой своей точке разрыва. Поэтому функция  $\xi(x)$  имеет в каждой такой точке локальный экстремум. При этом максимумы и минимумы функции  $\xi(x)$ , также как и знаки ее производной  $\xi'(x)$ , перемежаются. Поэтому график функции  $\xi(x)$  является ломаной линией, состоящей из отрезков прямых, соединяющих пары соседних экстремумов, в которых углы излома графика равны по модулю и отличаются знаком.

У всех особых рельефов их первообразная  $\mathcal{E}(x)$  типа (2.11) имеет вид

$$\mathcal{E}(x) = \int_0^x \xi'^2(x) dx = x \bar{\xi}'^2, \quad x \in [0, L] \quad (2.17)$$

Для конечной части всякого бесконечного особого рельефа типа (2.2, 2.11), как периодического, так и общего вида, в любом случае согласно (2.17) всегда имеем

$$\bar{\xi}'^2_L = \bar{\xi}'^2, \quad L \in (0, \infty) \rightarrow \bar{\xi}'^2_\infty = \lim_{L \rightarrow \infty} \bar{\xi}'^2_L = \bar{\xi}'^2 \rightarrow D = 0 \quad (2.18)$$

Вышеописанные свойства особых рельефов наглядно иллюстрирует рис. 2.2, где представлены графики функций  $\xi(x)$  и  $\xi'(x)$  трех особых рельефов, которые не являются геометрически подобными, но имеют одинаковые значения  $\bar{\xi}'^2 = 0,01$ .

Любой плоский рельеф является либо обычным, либо особым. У особых рельефов дефект  $D = 0$  по определению.

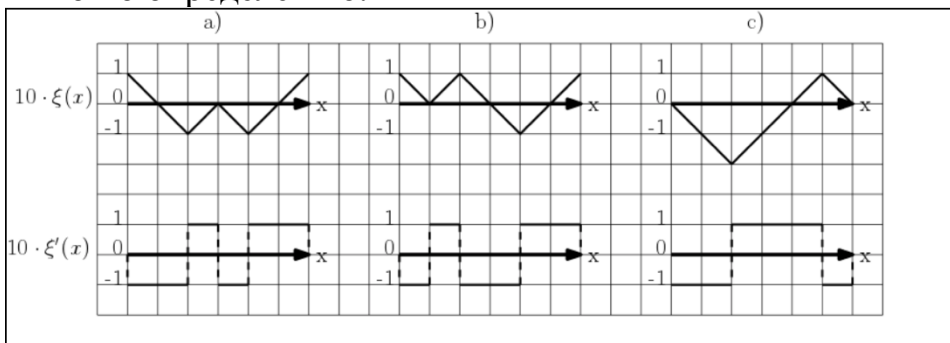


Рис. 2.2 Особые периодические плоские рельефы  $\bar{\xi}'^2 = 0,01$ ,  $\lambda = 6l$

### Параметры подобия конечных периодических плоских рельефов

Общее уравнение семейства периодических плоских рельефов запишем в виде

$$y_w = \xi(x) = AF(\tilde{\varphi}(x)), \quad \tilde{\varphi}(x) = \tau x/\lambda + \varphi, \quad x \in [0, L]$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(\tilde{\varphi} + \varepsilon) = F(\tilde{\varphi}), \quad F'^2(\tilde{\varphi} + \tau) = F'^2(\tilde{\varphi}), \quad \tilde{\varphi} \in [-\infty, \infty] \quad (2.19)$$

Здесь  $F(\tilde{\varphi})$  – безразмерная периодическая функция,  $\tilde{\varphi}$  – ее безразмерный аргумент, называемый фазой,  $A$  – размерный множитель, называемый амплитудой,  $\tau$  – наименьший период квадрата производной  $F'^2(\tilde{\varphi})$ ,  $\lambda$  – наименьшая длина волны функции  $F'^2(\tilde{\varphi}(x))$ ,  $\varphi \in [0, \tau)$  – начальная фаза, т. е. значение фазы  $\tilde{\varphi}$  на передней кромке рельефа, где  $x = 0$ .

Два рельефа вида (2.19) являются геометрически подобными только в том случае, если выполняется система равенств

$$\alpha = A_1/\lambda_1 = A_2/\lambda_2, \quad m = L_1/\lambda_1 = L_2/\lambda_2 \quad \varphi = \varphi_1 = \varphi_2, \quad \tau = \tau_1 = \tau_2 \quad (2.20)$$

После нескольких преобразований в итоге получим

$$\overline{\xi'^2}_\lambda = \varepsilon(\lambda)/\lambda = \tau A^2/\lambda^2 \int_\varphi^{\varphi+\tau} F'^2(\tilde{\varphi}) d\tilde{\varphi} = \tau^2 \alpha^2 \overline{F'^2}_\tau, \quad \overline{F'^2}_\tau = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau F'^2(\tilde{\varphi}) d\tilde{\varphi} \quad (2.21)$$

$$D = \frac{\varepsilon(k_m \lambda)}{\varepsilon(\lambda)} - k_m = \frac{1}{\tau \overline{F'^2}_\tau} \int_\varphi^{\varphi+\tau k_m} F'^2(\tilde{\varphi}) d\tilde{\varphi} - k_m \quad (2.22)$$

Согласно (2.21) средний квадрат  $\overline{F'^2}_\tau$  зависит только от значения  $\tau$ . При этом согласно (2.21, 2.22) средний квадрат  $\overline{\xi'^2}_\lambda$  любого конечного рельефа вида (2.19) зависит только от значений  $\alpha$  и  $\tau$ , а его дефект  $D$  – только от значений  $\tau, k_m, \varphi$ .

С помощью (2.21) преобразуем правую часть (2.22) к эквивалентному виду

$$D = \frac{1}{\tau \overline{F'^2}_\tau} \int_\varphi^{\varphi+\tau k_m} (F'^2(\tilde{\varphi}) - \overline{F'^2}_\tau) d\tilde{\varphi} = D_\tau(k_m, \varphi), \quad (k_m, \varphi) \in R_\tau$$

$$\{(k_m, \varphi) \in R_\tau\} \ni \{k_m \in [0, 1] \cap \varphi \in [0, \tau]\} \quad (2.23)$$

Согласно (2.23) рельеф (2.19) является особым, если выполняется равенство, аналогичное (2.16) и имеющее вид

$$F'^2(\tilde{\varphi}) \equiv \overline{F'^2}_\tau \equiv \overline{F'^2} \quad (2.24)$$

Отображение (2.19) оси  $x$  на ось фазы  $\tilde{\varphi}$  является линейным, и поэтому обратимым  $x \leftrightarrow \tilde{\varphi}$ . Тогда, у особых рельефов (2.19) функции  $F(\tilde{\varphi})$ ,  $F'(\tilde{\varphi})$  обладают теми же свойствами, что и функции  $\xi(x)$ ,  $\xi'(x)$  у особых рельефов (2.2, 2.11).

Согласно (2.21) в случае особых периодических рельефов (2.19) имеем  $\overline{\xi'^2} = (\tau\alpha)^2 \overline{F'^2}$ . А при особых непериодических, но конечных рельефов (2.19), их период  $\tau$  и длина волны  $\lambda$  в (2.19) не определены. Тогда, для них нельзя применить формулу (2.21). Однако если в ней положить  $\lambda = L, \tau = 1$ , то это уже можно сделать.

### Дефект периодических плоских рельефов

Согласно (2.21 – 2.23) дефект плоского рельефа (2.19) не зависит от целой части его волнового числа  $[m]$ . Т.к. у всех рельефов (2.19) с функцией  $F(\tilde{\varphi})$  значение  $\tau$  фиксировано, то зависимость их дефектов от дробной части –  $k_m$  и от их начальной фазы –  $\varphi$  описывается функцией  $D_\tau(k_m, \varphi)$  вида (2.23), которая определена и непрерывна в области  $(k_m, \varphi) \in R_\tau$  и где она достигает свои экстремальные значения.

Согласно (2.14) заведомо выполняются два неравенства вида

$$D_{\tau, \min} \leq D_\tau(k_m, \varphi) \leq D_{\tau, \max} \rightarrow c_{p\infty}(1 + D_{\tau, \min}/m) \leq c_{pL} \leq c_{p\infty}(1 + D_{\tau, \max}/m) \quad (2.25)$$

где  $D_{\tau, \max}$  и  $D_{\tau, \min}$  – максимальное и минимальное значения функции вида (2.23)  $D_\tau(k_m, \varphi)$  в ее области определения  $(k_m, \varphi) \in R_\tau$ .

Также согласно (2.14) в паре неравенств (2.25) нижнее является очевидным

следствием верхнего. Поэтому формула (2.25) является исчерпывающе полным ответом на вопрос, заданный в начале главы 2.

Таким образом, полные коэффициенты волнового сопротивления бесконечного периодического рельефа и такого же рельефа стенок соплового насадка конечной длины отличаются величиной дефекта.

У обычных периодических рельефов (2.19) дефект  $D_\tau$  зависит, как от дробной части  $k_m$  их волнового числа  $m$ , так и от параметра подобия  $\varphi$ , т. е. от значения фазы, задаваемого на передней кромке обтекаемого рельефа (2.19). На рис. 2.3 – 2.4 представлены графики, которые на примере конкретных дробных рельефов типа (2.19) наглядно иллюстрируют двухпараметрическую зависимость дефекта  $D_\tau(k_m, \varphi)$  от параметров  $k_m, \varphi$  при фиксированном значении  $\tau$ .

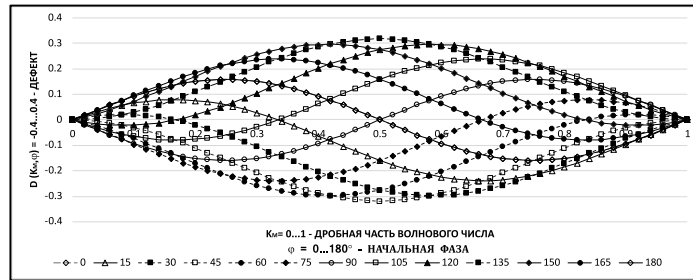


Рис. 2.3 Параметрическое семейство  $D = D_\pi(k_m, \varphi)$

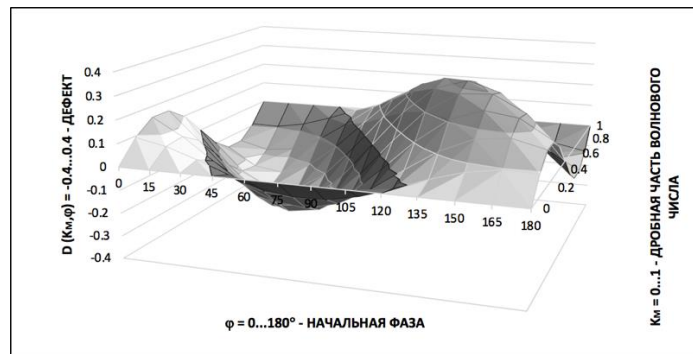


Рис. 2.4 Трехмерная поверхность зависимости  $D = D_\pi(k_m, \varphi)$

**В третьей главе** предложен метод, с помощью которого получено математически строгое решение краевой задачи Д.И. Блохинцева в случае обтекания при  $0 < M < \infty$  трехмерных рельефов стенки соплового насадка, сводимых к суммам синусоидальных волн.

Стационарное обтекание потоком рельефных поверхностей стенок соплового насадка, уравнение которых записывают в общем виде

$$y_w = \xi(x, z) \tag{3.1}$$

На функцию (3.1) и ее частные производные налагают ограничения

$$\lim_{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_z^2 \rightarrow 0} \xi(x + \varepsilon_x, z + \varepsilon_z) = \xi(x, z);$$

$$|\xi(x, z)| \ll h; \quad |\xi'_x(x, z)| \ll 1; \quad |\xi'_z(x, z)| \ll 1 \tag{3.2}$$

Здесь  $x, y, z$  – декартовы координаты. Плоскость  $y = 0$  называется базовой, а рельеф трактуют как малые возмущения базовой плоскости  $|\xi(x, z)| \ll h$ .

Введем обозначения, с помощью которых запишем принятые допущения,

$$\{p, \rho, U, \kappa\} = \text{const}; \quad \tilde{p} = p + \delta p; \quad \tilde{\rho} = \rho + \delta \rho;$$

$$\tilde{u} = U + \delta u; \quad \tilde{v} = \delta v; \quad \tilde{w} = \delta w \tag{3.3}$$

Здесь  $p, \rho, U, \kappa$  – давление, плотность, модуль скорости и показатель адиабаты газа в натекающем однородном потоке;  $\tilde{p}, \tilde{\rho}, \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}$  – параметры поля обтекания рельефной поверхности (3.1, 3.2), которые удовлетворяют системе нелинейных уравнений идеальной газовой динамики;  $\delta p, \delta \rho, \delta u, \delta v, \delta w$  – возмущения, которые обычно выражают через их безразмерные аналоги  $\Psi, E, \Phi, \Theta, \Omega \rightarrow \delta p, \delta \rho, \delta u, \delta v, \delta w$  по формулам

$$\delta p = \Psi \kappa \rho, \quad \delta \rho = E \rho, \quad \delta u = \Phi U, \quad \delta v = \Theta U, \quad \delta w = \Omega U. \quad (3.4)$$

Если ограничения (3.2) и допущения (3.3) выполнены, то безразмерные возмущения вида (3.4) являются, как правило, одновременно малыми:

$$|\Psi| \ll 1; \quad |E| \ll 1; \quad |\Phi| \ll 1; \quad |\Theta| \ll 1; \quad |\Omega| \ll 1 \quad (3.5)$$

Если система (3.5) выполнена, то оставив в каждом уравнении только линейные члены, получают линеаризованную систему

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Theta}{\partial y} + \frac{\partial \Omega}{\partial z} &= 0, & M^2 \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial x} &= 0, \\ M^2 \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} &= 0, & M^2 \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Все уравнения (3.6) – аналоги уравнения неразрывности (первое уравнение), а прочие три – аналоги проекций на оси  $x, y, z$  векторного уравнения движения.

В линейной теории линеаризованное граничное условие обтекания рельефной поверхности (3.1, 3.2) задают не на ней самой, а на базовой плоскости  $y=0$

$$\Theta|_{y=0} = \xi'_x(x, z) \quad (3.7)$$

В работе Сергиенко А.А. систему (3.6) с граничным условием (3.7) свели к линейной краевой задаче Д.И. Блохинцева для поля безразмерных возмущений давления  $\Psi(x, y, z)$

$$\Theta|_{y=0} = \frac{\partial \xi(x, z)}{\partial x}, \quad M^2 \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0 \rightarrow \frac{\partial \Psi}{\partial y} \Big|_{y=0} = -M^2 \frac{\partial^2 \xi(x, z)}{\partial x^2} \quad (3.8)$$

$$M^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \quad (3.9)$$

Здесь  $M$  – число Маха натекающего потока  $M^2 = \rho U^2 / \kappa p$ .

В работах Волкова В.А. и Квона М.Ч. систему (3.6) с граничным условием (3.7) свели к линейной краевой задаче для потенциала безразмерных возмущений скорости  $\Pi(x, y, z)$ , а поле  $\Psi(x, y, z)$  находили, используя линейный аналог интеграла Бернулли

$$\Theta|_{y=0} = \frac{\partial \xi(x, z)}{\partial x}, \quad \Theta U = \frac{\partial \Pi}{\partial y} \rightarrow \frac{\partial \Pi}{\partial y} \Big|_{y=0} = U \frac{\partial \xi(x, z)}{\partial x} \quad (3.10)$$

$$M^2 \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2}, \quad \Psi = -M^2 / U \frac{\partial \Pi}{\partial x} \quad (3.11)$$

### Метод суперпозиции автомодельных частных решений

Ниже описан метод решения краевой задачи (3.8, 3.9), предложенный в данной работе. Он является математически строгим обобщением двух своих прототипов.

Функция  $\xi(x, z)$  является суммой плоских синусоидальных волн

$$\xi(x, z) = \sum \xi_n(x, z), \quad \xi_n(x, z) = A_n \cos(f_n(x, z) + \delta_n), \quad f_n(x, z) = k_{nx}x + k_{nz}z, \\ k_{nx} = k_n \cos \alpha_n, \quad k_{nz} = k_n \sin \alpha_n \rightarrow f_n(x, z) = k_n(x \cos \alpha_n + z \sin \alpha_n), \quad k_n \geq 0 \quad (3.12)$$

$$\text{Граничное условие} \quad \frac{\partial \Psi_n(x, y, z)}{\partial y} \Big|_{y=0} = -M^2 \frac{\partial^2 \xi_n(x, z)}{\partial x^2} \quad (3.13)$$

Подставим функции  $\xi_n(x, z)$  вида (3.12) в правые части граничных условий (3.13) и, выполнив в них требуемое дифференцирование, в итоге получим

$$\partial \Psi_n(x, y, z) / \partial y|_{y=0} = A_n [k_n M \cos \alpha_n]^2 \cos(f_n + \delta_n) \quad (3.14)$$

Согласно (3.14) решения частных краевых задач (3.9, 3.14) можно искать в виде функций  $\Psi_n(f_n, y)$ , зависящих только от двух аргументов  $f_n, y$ . Согласно (3.12) множество  $f_n \in R$  является линейным отображением плоскости декартовых координат  $x, z$  на ось значений автомодельной фронтальной координаты  $f_n$  на полуплоскости  $f_n \in R, y \geq 0$ .  $\Psi_n(x, y, z) = \Psi_n(f_n(x, z), y) \rightarrow \partial \Psi_n(f_n, y) / \partial y|_{y=0} =$

$$= A_n [k_n M \cos \alpha_n]^2 \cos(f_n + \delta_n) \quad (3.15)$$

Уравнение (3.9) выполняется, если функция  $\Psi_n(f_n, y)$  удовлетворяет на всей полуплоскости  $f_n \in R, y \geq 0$  дифференциальному уравнению вида

$$\frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial f_n^2} \Lambda_n, \quad \Lambda_n = k_n^2 [M^2 \cos^2 \alpha_n - 1] \quad (3.16)$$

### Аналитические решения автомодельных частных краевых задач

Вместо параметра  $\Lambda_n$  определим  $k_{ny} = \sqrt{|\Lambda_n|} \geq 0$  и согласно (3.16) получим

$$k_{ny} = k_n \sqrt{|M^2 \cos^2 \alpha_n - 1|}, \quad \Lambda_n = \begin{cases} -k_{ny}^2 & \text{если } \cos^2 \alpha_n < 1/M^2 \\ k_{ny}^2 & \text{если } \cos^2 \alpha_n > 1/M^2 \end{cases} \quad (3.17)$$

Если  $k_{ny} = 0$ , то краевая задача (3.15, 3.16) не имеет такого решения, которое было бы ограничено на полуплоскости  $f_n \in R, y \geq 0$ .

#### Дозвуковой случай $\cos^2 \alpha_n < 1/M^2$

В данном случае согласно (3.17) уравнение (3.16) имеет вид

$$\frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial y^2} + k_{ny}^2 \frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial f_n^2} = 0, \quad f_n \in R, \quad y \geq 0 \quad (3.18)$$

Эллиптическая краевая задача (3.15, 3.18) с граничным условием Неймана (3.15) имеет на полуплоскости  $f_n \in R, y \geq 0$  единственное ограниченное решение, которое находят методом разделения переменных (Сергиенко А.А.).

Из граничных условий (3.15) следует, что искомое поле  $\Psi_n(f_n, y)$  может иметь

$$\Psi_n = Y_n(y) \cos(f_n + \delta_n) \quad (3.19)$$

После нескольких преобразований в итоге, получим

$$\Psi_n(f_n, y) = -(A_n/k_{ny}) [k_n M \cos \alpha_n]^2 \exp(-yk_{ny}) \cos(f_n + \delta_n) \quad (3.20)$$

#### Сверхзвуковой случай $\cos^2 \alpha_n > 1/M^2$

В данном случае согласно (3.17) уравнение (3.16) имеет вид

$$\frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial y^2} - k_{ny}^2 \frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial f_n^2} = 0, \quad f_n \in R, \quad y \geq 0 \quad (3.21)$$

Если натекающий поток однородный, то краевая задача (3.15, 3.21) с граничным условием Неймана (3.15) на полуплоскости  $f_n \in R, y \geq 0$  имеет единственное решение. Найдем его с помощью формулы Даламбера, который доказал, что общее решение уравнения (3.21) имеет вид

$$\Psi_n = \Psi_n^+(f_n + yk_{ny}) + \Psi_n^-(f_n - yk_{ny}) \quad (3.22)$$

Характеристиками уравнения (3.21) на полуплоскости  $f_n \in R, y \geq 0$  называют два семейства прямых линий, вдоль которых выполняются равенства

$$f_n \pm yk_{ny} = C^\pm = \text{const} \rightarrow df_n \pm k_{ny} dy = 0 \quad (3.23)$$



Слагаемое в правой части (3.22), которое описывает возмущения, приносимые на стенку вдоль характеристик, приходящих на нее из натекающего потока, должно равняться нулю. Вопрос: – характеристики какого семейства (3.23) приходят на стенку из натекающего потока. Ответ зависит от знака частной производной  $\partial f_n / \partial x$

$$\partial f_n / \partial x = U k_n \cos \alpha_n \quad (3.24)$$

Если  $\cos \alpha_n \geq 0$ , то координата  $f_n$  возрастает / убывает в направлении натекающего потока. При этом на приходящей характеристике выполняется система  $\{df_n \geq 0, dy < 0\}$ , что возможно только на характеристике  $d(f_n \pm y k_{ny}) = 0$ . Поэтому условие отсутствия любых возмущений в натекающем потоке имеет вид:

$$\text{если } \cos \alpha_n \geq 0, \text{ то } \Psi_n^\pm(f_n \pm y k_{ny}) \equiv 0 \quad (3.25)$$

Из равенств (3.22) и (3.25) следует, что решение уравнения (3.21), удовлетворяющее условию отсутствия возмущений в натекающем потоке, имеет вид

$$\Psi_n = \Psi_n^\pm(f_n \pm y k_{ny}) \quad \text{если } \cos \alpha_n \leq 0 \quad (3.26)$$

После некоторых преобразований получим

$$\pm k_{ny} \Psi_n'^\pm(f_n) = A_n [k_n M \cos \alpha_n]^2 \cos(f_n + \delta_n) \quad \text{если } \cos \alpha_n \leq 0 \quad (3.27)$$

Из равенств (3.27) следует, что решение краевой задачи (3.15, 3.21), удовлетворяющее условию отсутствия возмущений в натекающем потоке, имеет вид

$$\Psi_n(f_n, y) = \pm \frac{A_n k_n^2 M^2}{k_{ny}} \cos^2 \alpha_n \sin(f_n \pm y k_{ny} + \delta_n) \quad \text{если } \cos \alpha_n \leq 0 \quad (3.28)$$

### Сравнение результатов расчета с экспериментом

Ромбические рельефы, выполненные в виде синусоидальных волн, имеют вид  $\xi(f^+, f^-) = B(1 + \cos f^+) = B[1 + \cos f^+ + \cos f^- + \cos f^+ \cos f^-] = B + B \cos f^+ + B \cos f^- + 0,5B \cos(f^+ + f^-) + 0,5B \cos(f^+ - f^-)$  (3.29)

Здесь  $f^+$  и  $f^-$  – фронтальные координаты, являющиеся линейными функциями декартовых координат  $x, z$ .

В работе Семенова В.В. представлены данные измерений волновых сопротивлений сопловых насадков, выполненных в виде цилиндра, у которых на внутренних обтекаемых поверхностях имелись ромбические рельефы, симметричные относительно оси цилиндра (рис. 3.1). Силу волнового сопротивления сопловых насадков измеряли путем их продувки сжатым воздухом ( $M=3$ ) на дифференциальной установке.

По ходу серии варьировали только угол ромба. В результате была получена дискретно-точечная экспериментальная зависимость силы волнового сопротивления сопловых насадков от углов ромба их ромбических рельефов (5 жирных точек на рис. 3.1). Однако ромбические рельефы, испытанные в работе Семенова В.В., три из которых изображены на рис. 3.1, отличаются от теоретических рельефов тем, что они описываются не формулой (3.29), а её ступенчатым аналогом

$$\begin{aligned} \xi(f^+, f^-) &= B(1 + \text{sign}[\cos f^+])(1 + \text{sign}[\cos f^-]) = \\ &= B + B \text{sign}[\cos f^+] + B \text{sign}[\cos f^-] + B \text{sign}[\cos f^+] \text{sign}[\cos f^-] \\ \text{sign}[C] &= \{-1, \text{если } C < 0 \rightarrow \text{иначе } 1, \text{если } C > 0 \rightarrow \text{иначе } 0\} \end{aligned} \quad (3.30)$$

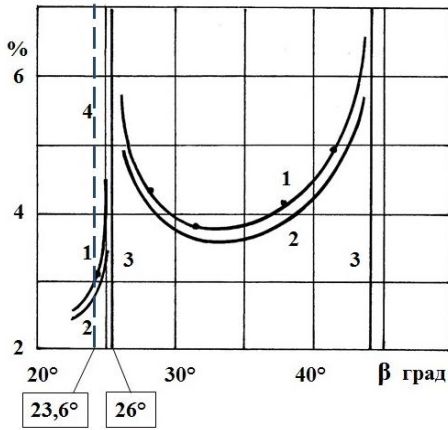


Рис. 3.1. Сравнение с экспериментальными данными работы [Семенов В.В.]

1 – эксперимент; 2 – расчет

3 – критический режим в эксперименте

4 – критический режим в линейной теории

### Строгое решение задачи Д.И. Блохинцева для ромбических рельефов

Подставим в сумму плоских синусоидальных волн, к которой сводится рельеф (3.29), фронтальные координаты, и выполнив требуемые действия, в итоге получим

$$\xi_a(x, z) = B + B\cos(k[x\cos\omega_a + z\sin\omega_a]) + B\cos(k[x\cos\omega_a - z\sin\omega_a]) + 0,5B\cos(2kx\cos\omega_a) + 0,5B\cos(2kz\sin\omega_a), \quad \omega_a \in (0, \pi/2) \quad (3.31)$$

$$\xi_b(x, z) = B + B\cos(k[x\cos\beta_b + z\sin\beta_b]) + B\cos(-k[x\cos\beta_b - z\sin\beta_b]) + 0,5B\cos(2kx\cos\beta_b) + 0,5B\cos(2kz\sin\beta_b), \quad \beta_b \in (0, \pi/2) \quad (3.32)$$

Суммы (3.31 – 3.32) отличаются только геометрическим смыслом углов  $\omega_a$  и  $\beta_b$ .

Поэтому их можно записать в единообразном виде, если всюду ниже полагать, что параметры  $\omega_a$  и  $\beta_b$  являются компонентами вектор - параметра  $\alpha$

$$\xi(x, z) = B + B\cos(k[x\cos\alpha + z\sin\alpha]) + B\cos(k[x\cos\alpha - z\sin\alpha]) + 0,5B\cos(2kx\cos\alpha) + 0,5B\cos(2kz\sin\alpha), \quad \alpha \in (0, \pi/2), \quad \alpha = \{\omega_a, \beta_b\} \quad (3.33)$$

Сумма (3.33) имеет вид (3.12). Первое и последнее слагаемые в сумме (3.33) называют вырожденной и поперечной волнами. Обе они имеют общее свойство – правые части их краевых условий (3.15) равны нулю. В этом частном случае линейная краевая задача (3.15, 3.16) является однородной, и единственное её решение, удовлетворяющее условию отсутствия возмущений в натекающем однородном потоке, является тривиальным, т. е тождественно равным нулю. В связи с этим, первое и последнее слагаемые в суммах (3.33), всюду ниже даже не упоминаются.

Остальные слагаемые в сумме (3.33) являются плоскими волнами, которые дают ненулевые вклады в совокупное поле возмущений давления. Вторую и третью волны в сумме (3.33) называют косыми (наклонными), а четвертую (3.33) – продольной. Для того чтобы привести их к стандартному виду (3.12), положим

$$A_1 = B, k_1 = k, \alpha_1 = \alpha, \delta_1 = 0 \rightarrow f_1(x, z) = k[x\cos\alpha + z\sin\alpha] \quad (3.34)$$

$$A_2 = B, k_2 = k, \alpha_2 = -\alpha, \delta_2 = 0 \rightarrow f_2(x, z) = k[x\cos\alpha - z\sin\alpha] \quad (3.35)$$

$$A_3 = B/2, k_3 = 2k\cos\alpha, \alpha_3 = 0, \delta_3 = 0 \rightarrow f_3(x) = 2kx\cos\alpha \quad (3.36)$$

Решения частных краевых задач (3.15, 3.16) для плоских волн (3.34 – 3.36) имеют вид:



Рис. 3.2 Цилиндрические сопловые насадки с ромбической рельефной поверхностью

### Косые (наклонные) волны

Согласно (3.17) косые волны (3.34, 3.35) имеют одинаковое значение параметра  $k_y$

$$k_y = k\sqrt{|M^2 \cos^2 \alpha - 1|} \quad (3.37)$$

Если  $\cos^2 \alpha < 1/M^2$ , то дозвуковая ветвь решения

$$\left. \begin{array}{l} \Psi_1(f_1, y) \\ \Psi_2(f_2, y) \end{array} \right\} = -(B/k_y)(kM \cos \alpha)^2 \exp(-yk_y) \begin{cases} \cos(f_1) \\ \cos(f_2) \end{cases} \quad (3.38)$$

Если  $\cos^2 \alpha > 1/M^2$ , то сверхзвуковая ветвь решения

$$\left. \begin{array}{l} \Psi_1(f_1, y) \\ \Psi_2(f_2, y) \end{array} \right\} = -(B/k_y)(kM \cos \alpha)^2 \begin{cases} \sin(f_1 - yk_y) \\ \sin(f_2 - yk_y) \end{cases} \quad (3.39)$$

### Продольная волна

Согласно (3.17) продольная волна (3.36) имеет значение  $k_y$  вида

$$k_y = 2k \cos \alpha \sqrt{|M^2 - 1|} \quad (3.40)$$

Если  $M < 1$ , то дозвуковая ветвь решения

$$\Psi_3(f_3, y) = -(0.5B/k_y)(2k \cos \alpha M)^2 \exp(-yk_y) \cos(f_3) \quad (3.41)$$

Если  $M > 1$ , то сверхзвуковая ветвь решения

$$\Psi_3(f_3, y) = -(0.5B/k_y)(2k \cos \alpha M)^2 \sin(f_3 - yk_y) \quad (3.42)$$

### **Местные и полные коэффициенты волнового сопротивления трехмерных рельефов, представимых суммами плоских синусоидальных волн.**

Коэффициенты давления  $c_p$ , а также местных  $c_{px}$ ,  $c_{pz}$  и полных  $c_{pL_x}$ ,  $c_{pL_z}$  волновых сопротивлений выражают через значения функции  $\Psi(x, y, z)_{y=0}$  согласно формулам:

$$\Psi(x, 0, z) = \Psi_w(x, z) \quad c_p = \delta p|_{y=0} / \left( \frac{1}{2} \rho U^2 \right) = 2 \Psi_w(x, z) / M^2,$$

$$c_{pq} = c_p \frac{\partial y_w}{\partial q} = 2 / M^2 \Psi_w(x, z) \frac{\partial \xi(x, z)}{\partial q}, \quad q = \{x, z\} \quad (3.43)$$

$$c_{pL_q n} = \frac{2}{M^2} \iint_{0; -0,5L_z}^{L_x; 0,5L_z} \Psi_{wn}(x, z) \frac{\partial \xi(x, z)}{\partial q} \frac{dx dz}{L_x L_z}, \quad q = \{x, z\}$$

Записав функцию  $\Psi(x, z)$  в виде суммы (3.13), получим

$$\Psi_w(x, z) = \sum_{n=1}^{n=N} \Psi_{wn}(x, z) \quad (3.44)$$

Подставив сумму (3.44) в формулы (3.43), в итоге получим

$$c_{pq} = \sum_{n=1}^{n=N} c_{pqn}, \quad c_{pqn} = 2 / M^2 \Psi_{wn}(x, z) \frac{\partial \xi(x, z)}{\partial q}, \quad q = \{x, z\} \quad (3.45)$$

$$c_{pL_q} = \sum_{n=1}^{n=N} c_{pL_q n}, \quad c_{pL_q n} = \frac{2}{M^2} \iint_{0; -0,5L_z}^{L_x; 0,5L_z} \Psi_{wn}(x, z) \frac{\partial \xi(x, z)}{\partial q} \frac{dx dz}{L_x L_z}, \quad q = \{x, z\}$$

Согласно (3.20, 3.28) Стеночные значения дозвуковой (3.20) и сверхзвуковой (3.28) ветвей частных решений формулы (3.45), получим

$$\Psi_{wn}(f_n) = -(A_n / k_{ny}) [k_n M \cos \alpha_n]^2 \cos(f_n + \delta_n), \quad \cos^2 \alpha_n < 1/M^2$$

$$\Psi_{wn}(f_n) = \pm \frac{A_n k_n^2 M^2}{k_{ny}} \cos^2 \alpha_n \sin(f_n + \delta_n) \quad \text{если } \cos \alpha_n \leq 0, \cos^2 \alpha_n > 1/M^2 \quad (3.46)$$

**В четвертой главе** приведены результаты вычислительных исследований волнового сопротивления пластины, которая представляет собой элемент стенки сопла. Она имеет с обеих сторон одинаковые ромбические рельефы, наветренную острую кромку и боковые бортики и обтекается сверхзвуковым потоком газа.

Рельефы на стенке сопла возникают, когда они деформируются при изготовлении или испытаниях, разгораются и искажаются в процессе эксплуатации. В этом случае могут возникнуть еще и дополнительные потери тяги из-за волнового сопротивления, возникающего при сверхзвуковом обтекании потоком газа стенки сопла с рельефной поверхностью.

Модели для расчетов имели следующие размеры: длина  $L = 50$  мм, ширина  $B = 29$  мм, толщина  $s = 3$  мм. Высота ромба -  $\delta = 0,5$  мм. Кроме того, пластина со стороны обдува имела острую кромку под углом  $7^\circ$  и боковые стенки (рис. 4.1).

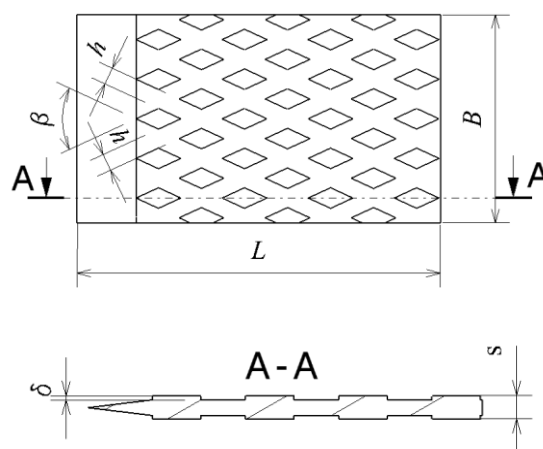
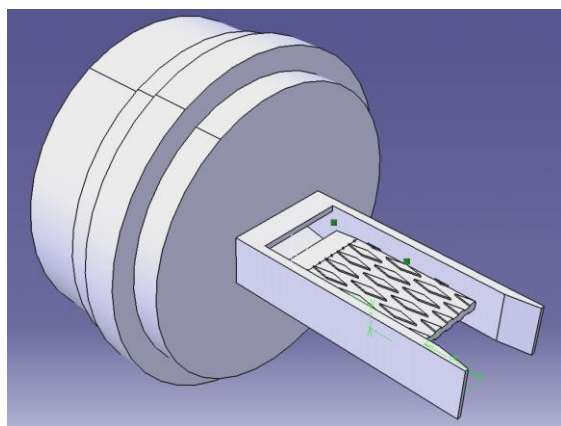


Рис. 4.1 Пластина с ромбическим рельефом (модель)

Расчет обтекания сверхзвуковым потоком газа плоских сопловых насадков с ромбическим рельефом проводился с помощью сертифицированного CFD-продукта ANSYS CFX с использованием системы уравнений Навье-Стокса, осредненных по Рейнольдсу, а в качестве модели турбулентности – Shear Stress Transport (SST), которая сочетает в себе лучшие свойства двух моделей:  $k - \varepsilon$  и  $k - \omega$ .

Исходными данными для расчета являлись: течение газа: трехмерное; модель вязкости: К-омега SST, влияние сжимаемости (2- уравнение); давление газа на входе в плоский канал: 4,0 МПа; давление на выходе из плоского канала: 0,1 МПа; рабочее тело: воздух. Для воздуха:  $\mu_0 = 1.716 \cdot 10^{-5}$  Н.с/м<sup>2</sup>,  $T_s = 122$  К при  $T_0 = 273$  К.

С целью уменьшения вычислительного ресурса для расчета обтекания исследуемых сопловых насадков была построена расчетная сетка, состоящая из 1/4 части плоского сопла и пластины с ромбическим рельефом, которая была снабжена боковыми стенками (рис. 4.2). Длина расчетной области составляет  $11.4L$ , ширина  $4.2S$ , где  $L$  и  $S$  характерная длина и ширина плоского соплового насадка соответственно. Общее количество ячеек составляет от 1700499 до 1823966 в зависимости от угла ромба рельефа.

В качестве примера, на рис. 4.3 приведены поля обтекания (изолинии чисел Маха  $M = 3$ ) плоского соплового насадка, состоящего из пластины с одинаковым ромбическим рельефом на обеих сторонах, наветренную острую кромку и боковые стенки.

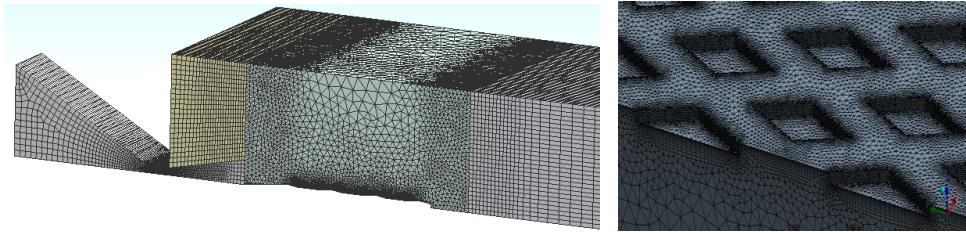


Рис. 4.2 Расчетная сетка

Были проведены расчеты трехмерного течения потока газа в плоском сопле, рассчитанном на число Маха  $M = 3$ , с углом на срезе  $\beta_a = 12^\circ$ . К соплу пристыковывался плоский сопловый насадок, стенки которого имели ромбический рельеф.

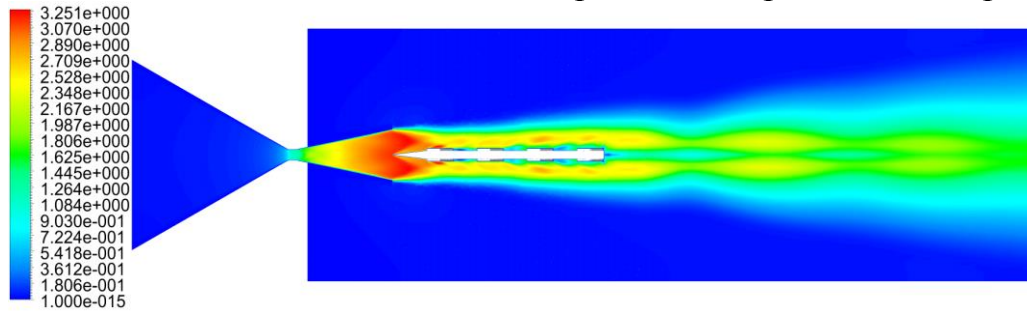


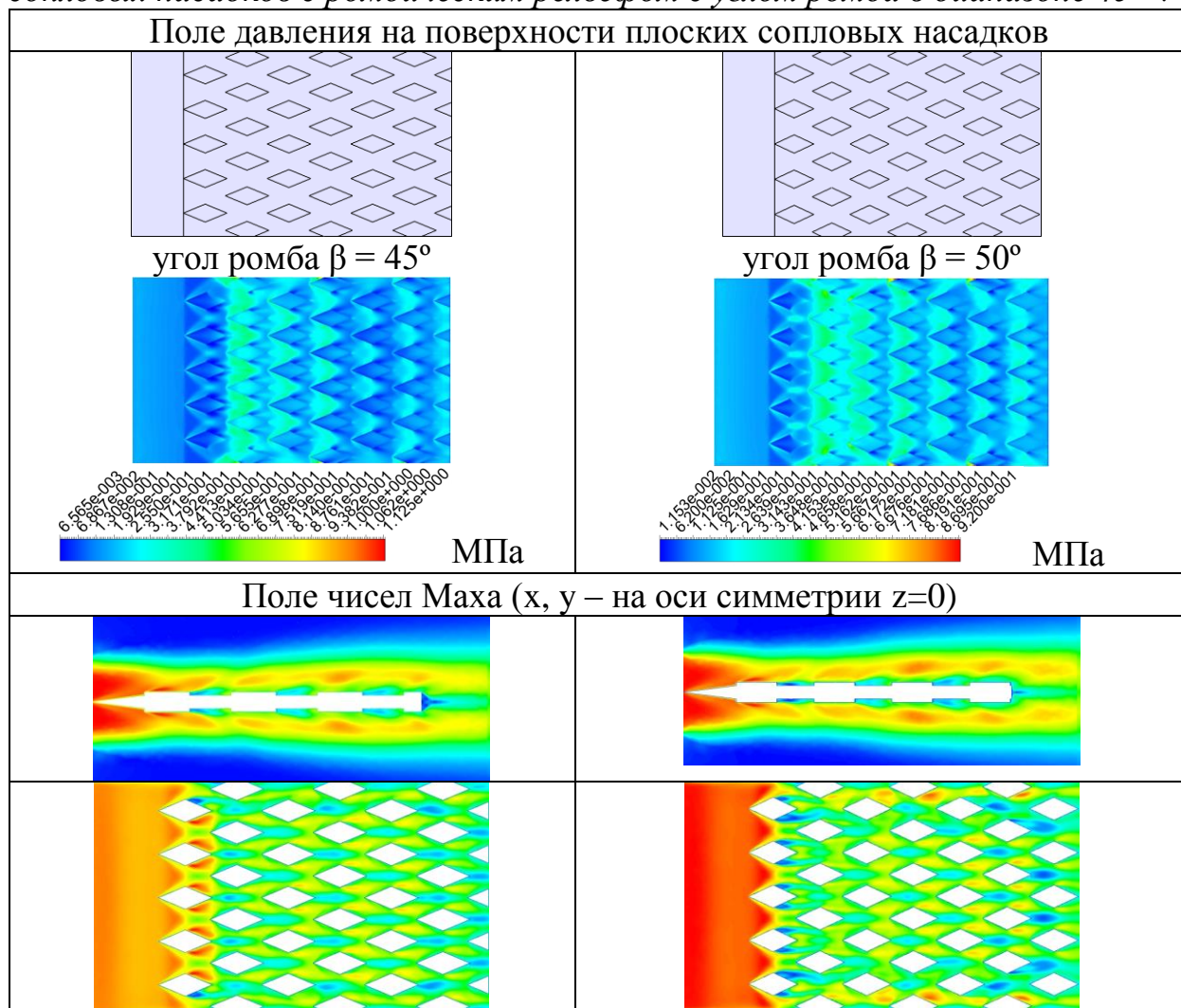
Рис. 4.3 Течение газа в плоском сопле с пластиной с ромбическим рельефом

Результаты расчетов полей давления и изолинии чисел Маха вдоль плоского соплового насадка с ромбическим рельефом при разных углах ромба разделены на 3 группы. В группе 1 приведены результаты расчетов, полученных при обтекании плоских сопловых насадков с ромбическими выступами, имеющими малые углы ромба в диапазоне  $6^\circ \div 14^\circ$ ; в группе 2 – результаты расчетов при средних углах ромба в диапазоне  $16^\circ \div 24^\circ$ ; в группе 3 – результаты при обтекании плоских сопловых насадков с большими углами ромба в диапазоне:  $35^\circ \div 50^\circ$ . Результаты расчетов, полученных при обтекании сверхзвуковым потоком газа со скоростью  $M = 3$  плоских сопловых насадков с ромбическими выступами с углами ромба  $45^\circ \div 50^\circ$  (группа 3) представляют наибольший интерес, так как по сравнению с предыдущей группой ромбических выступов на длину плоского соплового насадка укладывается наибольшее количество рядов ромбических выступов ( $5 \div 7$  рядов).

В качестве примера в таблице 4.1 приведены поля давления и изолинии чисел Маха при сверхзвуковом обтекании ( $M = 3$ ) плоских сопловых насадков с ромбическим рельефом с углом ромба в диапазоне  $45^\circ \div 50^\circ$ . Видно, что в этом случае происходит существенное понижение давления при обтекании 1-го ряда выступов, а начиная со 2-го ряда наблюдается периодическое распределение давления: повышение давления происходит в сужающихся канавках, а понижение давления – в расширяющихся канавках. Максимальное давление  $p = 0,95$  МПа достигается в зонах, расположенных между рельефными выступами 2-го ряда и боковыми стенками, в результате чего, видимо, происходит несовпадение результатов расчетов с экспериментальными данными. Замечено, что при угле ромба  $50^\circ$  достигалось гораздо более равномерное распределение давления в виде синусоиды: в сужающихся канавках – повышение давления, а в расширяющихся канавках – понижение давления.



Таблица 4.1 Поля давления и изолинии чисел Маха при сверхзвуковом обтекании сопловых насадков с ромбическим рельефом с углом ромба в диапазоне  $45^\circ \div 50^\circ$



### Анализ результатов расчетов

При сверхзвуковом обтекании ромбических рельефов стенок соплового насадка появляется дополнительное сопротивление, называемое волновым. В настоящее время отсутствуют как строгая теория возникновения волнового сопротивления рельефных стенок соплового насадка, так и соответствующие экспериментальные данные по ним.

Результаты расчетов показали, что величина силы волнового сопротивления, возникающая при сверхзвуковом обтекании плоских сопловых насадков с ромбическим рельефом при разных углах ромба, составила от 13,1 до 30,2 Н.

Видно также, что характер кривой волнового сопротивления для каждой группы угла ромба обладает свойством периодичности (имеются максимумы и минимумы). Так, сила волнового сопротивления, возникающая при сверхзвуковом обтекании плоских сопловых насадков с ромбическими выступами с малым углом ромба ( $6^\circ \div 14^\circ$ ), составила от 12,58 до 13,61 Н (рис. 4.4). При этом наибольшая сила волнового сопротивления приходится при углах ромба  $6^\circ - 13.09944$  Н и  $10^\circ - 13.63292$  Н, а минимальное значение – при углах ромба  $8^\circ - 12.57596$  Н,  $12^\circ - 12.75852$  Н и  $14^\circ - 12.65512$  Н.



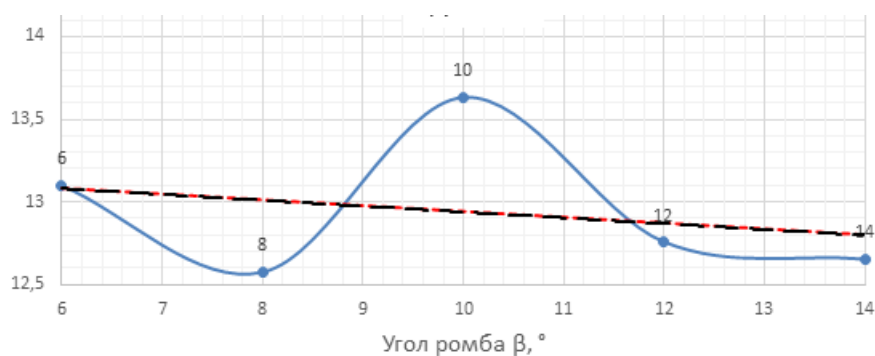


Рис. 4.4 Зависимость силы волнового сопротивления от угла ромба (группа 1)

При обтекании плоских сопловых насадков с ромбическими выступами со средним углом ромба ( $16^\circ \div 24^\circ$ ) сила волнового сопротивления составила от 14,53Н до 17,14Н (рис. 4.5), а при обтекании плоских сопловых насадков с большими углами ромба ( $35^\circ \div 50^\circ$ ) – от 23,70Н до 30,51Н (рис. 4.6). При этом наибольшая сила волнового сопротивления приходится при обтекании плоских сопловых насадков с углами ромба  $18^\circ$  – 15,97Н,  $24^\circ$  – 17,14Н, а минимальное значение силы волнового сопротивления при обтекании плоских сопловых насадков с углами ромба  $16^\circ$ ,  $20^\circ$ , и  $22^\circ$ . Для третьей группы максимальное значение силы волнового сопротивления достигается при углах и  $45^\circ$  – 30,5Н, а минимальное значение при угле ромба  $35^\circ$ .

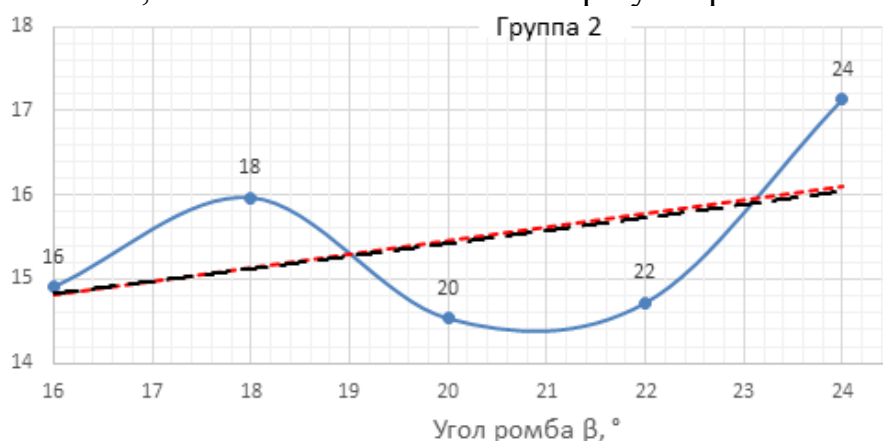


Рис. 4.5 Зависимость силы волнового сопротивления от угла ромба (группа 2)

Из рис. 4.6 видно, что при обтекании плоских сопловых насадков с ромбическими выступами с большим углом ромба в диапазоне  $35^\circ \div 50^\circ$  сила волнового сопротивления резко возрастает по сравнению с меньшими углами ромба более чем в два раза. Это объясняется тем, что с увеличением угла ромба увеличивается и количество рядов ромбических выступов ( $5 \div 7$  рядов), укладываемых на длину соплового насадка, которые и приводят к повышению силы волнового сопротивления.

На рис. 4.7 приведено сравнение результатов расчета волнового сопротивления с экспериментальными данными (построен график зависимости потерь тяги,  $\zeta$  при сверхзвуковом обтекании плоских сопловых насадков с ромбическим рельефом).

Из рис. 4.7 видно, что потери тяги, возникающие при сверхзвуковом обтекании сопловых насадков с ромбическими выступами с небольшими углами ромба ( $6^\circ \div 22^\circ$ ), составили  $\zeta = 6,2 \div 7,9 \%$ . Как видно из рисунка, результаты расчетов совпадают по характеру кривой с экспериментальными данными. Видно, что имеет место некоторое расхождение в характере потерь при малых углах ромба (в эксперименте максимум потерь возникает при угле ромба  $8^\circ$ , а в расчетах – при угле ромба  $10^\circ$ ).

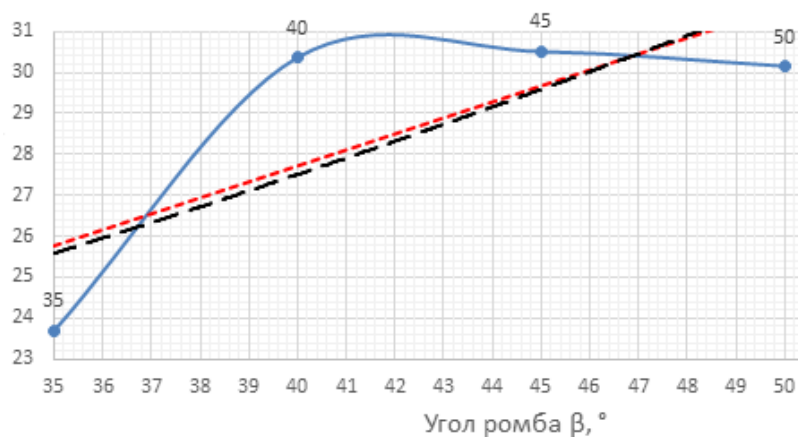


Рис. 4.6 Зависимость силы волнового сопротивления от угла ромба (группа 3)

Это расхождение можно объяснить тем, что у экспериментальной модели была спилена под углом  $7^\circ$  начальная часть ромбических выступов (рис. 4.8 и 4.9). Из-за отсутствия начальной части ромбических выступов на пластине образуется гладкая поверхность по всей ширине плоского соплового насадка, в результате чего не наступает понижения давления на входе в сужающиеся впадины, образованные между ромбическими выступами, и кризис сверхзвукового обтекания потоком газа плоского соплового насадка с ромбическими выступами наступает раньше.

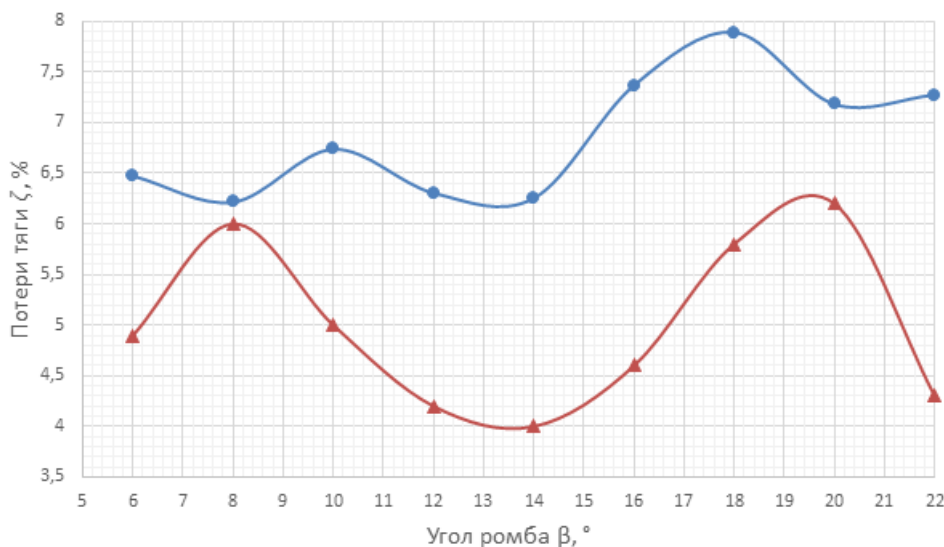


Рис. 4.7 Зависимость потери тяги  $\zeta$ , % от угла ромба

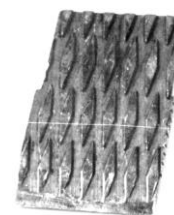


Рис. 4.8 Опытная модель

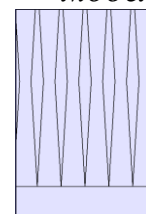


Рис. 4.9 Расчетная модель

### Заключение

1. Аналитическим путем получены формулы, описывающие зависимость полных коэффициентов волнового сопротивления плоских периодических рельефов стенки соплового насадка от параметров их подобия. Показано, что полные коэффициенты волнового сопротивления бесконечного периодического рельефа и такого же рельефа конечной длины отличаются величиной дефекта. Доказано, что при дробном волновом числе вклад его неполного периода в полный коэффициент волнового сопротивления рельефа сопла может быть как отрицательным, так и положительным.
2. В рамках линейной теории точно решена стационарная краевая задача трехмерного обтекания потоком бесконечной пластины – элемента стенки сопла, у которой ромбический рельеф ее обтекаемой поверхности задан в виде суммы плоских синусоидальных волн. Проведено сравнение критических значений углов ромба, полученных

автором с помощью линейной теории, с экспериментальными данными работ других авторов, в которых представлены результаты измерений волновых сопротивлений сопловых насадков, имевших ромбические рельефы с различными углами ромба. Некоторое расхождение теоретических и экспериментальных критических значений угла ромба, а также наличие в эксперименте второго максимума и его отсутствие в линейной теории объясняются тем, что в данной работе были изучены насадки бесконечной длины с рельефом в виде плоских синусоидальных волн, а в эксперименте были испытаны цилиндрические насадки, которые имели конечные размеры и ступенчатые ромбические рельефы с острыми кромками.

3. Проведено вычислительное исследование с использованием CFD-продукт ANSYS волнового сопротивления, возникающего при сверхзвуковом обтекании ромбической рельефной поверхности стенки соплового насадка при различных углах ромба. Показано, что результаты расчетов удовлетворительно согласуются с данными экспериментов, в которых путем обдува сжатым воздухом на дифференциальной установке соплового насадка с ромбическим рельефом измерена сила его волнового сопротивления.

#### **Основные положения диссертационной работы опубликованы:**

##### **Публикации в рецензируемых научных изданиях:**

1. Семенов В. В., Волков В. А., Квон М. Ч. и др. Дефект волнового сопротивления при плоском обтекании периодических рельефов // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. 2016. № 2. С. 51 – 56.
2. Волков В. А., Семенов В. В., Сидху Д. С. С. Волновое сопротивление периодических плоских рельефов // Труды МАИ. 2017. № 93. URL: [http://trudymai.ru/upload/iblock/73e/volkov\\_semenov\\_sidkhu\\_rus.pdf](http://trudymai.ru/upload/iblock/73e/volkov_semenov_sidkhu_rus.pdf) (дата обращения: 20.09.2018).

##### **Публикации в других изданиях:**

1. Сидху Д. С. С. Критические режимы сверхзвукового обтекания ромбического рельефа. // Гагаринские чтения – 2016: сб. труд. XLII Международная молодежная научная конференция «Гагаринские чтения» (Москва, 12–15 апреля 2016). – Москва: Изд-во МАИ, 2016, – Т. 3. – С. 701 – 702 (750 с.)
2. Сидху Д. С. С., Волков В. А., Семенов В. В. Волновое сопротивление рельефных поверхностей каналов сложных форм // ВМСППС – 2017: сб. труд. XX Юбилейная Международная конференция по Вычислительной механике и современным прикладным программным системам (Алушта, 24–31 мая 2017). – Москва: Изд-во МАИ, 2017, – С. 544 – 545 (816 с.)
3. Сидху Д. С. С., Волков В. А., Семенов В. В. Волновое сопротивление при сверхзвуковом обтекании ромбических рельефов // Авиация и космонавтика – 2017: сб. труд. 16-я Международная конференция «Авиация и космонавтика». (Москва 20 – 24 Ноябрь 2017). – Москва: Изд-во МАИ, 2017. – С. 124 – 125 (727 с.)