

# ПОРОШКОВАЯ МЕТАЛЛУРГИЯ И КОМПОЗИЦИОННЫЕ МАТЕРИАЛЫ

---

УДК 517.9; 532; 678.8

DOI:10.34759/vst-2020-1-233-245

## К ВОПРОСУ О МОДЕЛИРОВАНИИ ПРОЦЕССА ПРОПИТКИ ПРЕФОРМЫ ПРИ ТРАНСФЕРНОМ ФОРМОВАНИИ КОМПОЗИТНЫХ ИЗДЕЛИЙ

Бодунов Н.М.<sup>\*</sup>, Халиулин В.И.<sup>\*\*</sup>, Сидоров И.Н.<sup>\*\*\*</sup>, Костин В.А.<sup>\*\*\*\*</sup>

*Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева — КАИ,  
КНИТУ-КАИ, ул. К. Маркса, 10, Казань, 420111, Россия*

<sup>\*</sup> *e-mail: bodunov\_nm@mail.ru*

<sup>\*\*</sup> *e-mail: pla.kai@mail.ru*

<sup>\*\*\*</sup> *e-mail: tpmm@kai.ru*

<sup>\*\*\*\*</sup> *e-mail: VAKostin@kai.ru*

Статья поступила в редакцию 15.08.2019

---

Рассматривается аналитический подход к моделированию процессов трансферного формования применительно к производству изделий из композитов на основе соотношений Навье—Стокса—Бринкмана. Для решения системы уравнений, описывающей плоское течение вязкой несжимаемой жидкости с соответствующими граничными условиями, предложен численно-аналитический метод, основанный на аппроксимации искомого решения для компонент скорости потока жидкости линейной комбинацией полиномиальных базисных функций. Новизна метода состоит в выборе обобщенных независимых переменных и нахождении базисных функций, удовлетворяющих тождественно исходным уравнениям и части граничных условий. Найдены частные решения уравнений Навье—Стокса без учета инерционных сил, которые могут быть использованы для описания медленного течения вязкой жидкости через пористую среду. Полученные решения опробованы на примерах решения двух тестовых задач: задачи обтекания пластинки и задачи Куэтта о движении жидкости, расположенной между двумя плоскостями, под действием перепада давления. Результаты расчетов показали приемлемую точность полученных решений.

*Ключевые слова:* уравнения Навье—Стокса—Бринкмана, пористая среда, обтекание пластинки, полиномиальные функции.

---

### Введение

Решение задач течения жидкости в последнее время стало востребованным в связи с интенсивным развитием методов трансферного формования в композитных технологиях [1—6]. В частно-

сти, в авиастроении применяются безавтоклавные технологии изготовления деталей из полимерных композиционных материалов: технология пропитки под давлением (RTM), инфузионная пропитка под вакуумом (VARTM), пропитка пленочным

связующим (RFI). Определение характера течения связующего через преформу является ответственной задачей. От достоверности ее решения зависит качество изделия и вероятность получения брака в виде непропитанных зон. Для расчета параметров процесса трансфера сейчас используют специальное программное обеспечение (ПО), основанное на применении методов конечного элемента. Наиболее распространенным расчетным комплексом является ПО PAM-RTM (ESI Group). В то же время, несмотря на высокий технический уровень данного программного обеспечения, целесообразно проведение расчетов другими методами. Это позволяет удостовериться в правильности определения параметров процесса. Таким образом, развитие аналитических методов остается актуальным. В этом случае для описания течения вязкой несжимаемой жидкости сквозь пористую среду часто используют систему уравнений Навье—Стокса [7—10], модифицированную Бринкманом (система уравнений Навье—Стокса—Бринкмана) [11—14].

**Основная часть**

Общего аналитического решения уравнений Навье—Стокса не получено, и для их решения используются соответствующие численные методы [7, 15—19 и др.]. На практике широкое применение нашли различные приближения уравнений Навье—Стокса (например, уравнения пограничного слоя), и было получено ограниченное число их точных решений [8, 20—24]. Обзор решений уравнений Навье—Стокса приведен в ряде работ [7—10]. Поиск новых аналитических решений уравнений Навье—Стокса, в том числе и линеаризованных уравнений, способствует лучшему пониманию качественных особенностей течения вязкой жидкости. Они позволяют оценить область применимости упрощенных гидродинамических моделей и применяются для тестирования соответствующих численных методов. Данная работа посвящена поиску определенного класса аналитических решений уравнений Навье—Стокса (Навье—Стокса—Бринкмана).

Нестационарное плоское течение несжимаемой вязкой жидкости с постоянными свойствами в отсутствие массовых сил сквозь пористую среду в замкнутой ограниченной области

$$G = \{x, y : l_1 \leq x \leq l_2, b_1 \leq y \leq b_2\}$$

описывается системой уравнений Навье—Стокса—Бринкмана, которая в безразмерном виде записывается как

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \tau} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \eta^2} - \bar{\alpha} \bar{u};$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial \tau} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \xi} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \eta^2} - \bar{\alpha} \bar{v};$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta} = 0.$$

Здесь

$$\bar{u} = \frac{u}{u_*}; \quad \bar{v} = \frac{v}{u_*}; \quad \xi = \frac{x u_*}{v}; \quad \eta = \frac{y u_*}{v};$$

$$\tau = \frac{t u_*^2}{v}; \quad \bar{p} = \frac{p}{\rho u_*^2}; \quad \bar{\alpha} = \frac{v^2}{K u_*^2},$$

где  $u, v$  — проекции скорости на оси выбранной прямоугольной системы координат;  $u_*$  — любая произвольно заданная скорость (или скорость потока на бесконечном расстоянии от тела, если решается внешняя задача);  $p$  — давление;  $v$  — кинематический коэффициент вязкости;  $\rho$  — плотность среды;  $K$  — коэффициент проницаемости.

Модель фильтрации Бринкмана [11] является обобщением модели Дарси для случая умеренных и больших значений коэффициента проницаемости пористой среды. При малых значениях этой величины она переходит в модель Дарси, а при больших (отсутствие твердой фазы) — в уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости. Использование модели Бринкмана позволяет, в случае необходимости, так же точно записать граничные условия на межфазной поверхности «пористый слой — свободная вязкая жидкость», а если пористая среда ограничена твердой непроницаемой стенкой, то и условия прилипания [12, 14, 17, 18, 25].

В практических задачах решение системы уравнений (1), (2) должно удовлетворять соответствующим начальным и граничным условиям [7, 8, 15, 20]. Например, в вязкой жидкости в качестве граничных условий на неподвижной непроницаемой границе  $\Gamma$  принимается требование обращения в нуль вектора скорости (условие прилипания):  $\bar{u}|_{\Gamma} = 0, \quad \bar{v}|_{\Gamma} = 0$ .

Для решения системы уравнений (1), (2) для плоских стационарных и нестационарных течений в пористой среде в ограниченной области с соответствующими начальными и граничными условиями воспользуемся численно аналитическим методом решения, основанным на аппроксимации искомого решения для продольной и поперечной

компоненты скорости в виде линейной комбинации базисных функций.

В нестационарном случае, дифференцируя первое уравнение системы (1) по  $\xi$  и  $\eta$ , второе уравнение дважды по  $\xi$  и вычитая второе уравнение из первого, с учетом уравнения (2) получим после исключения давления преобразованную систему уравнений:

$$\begin{aligned} &-\frac{\partial}{\partial \tau}(\Delta \bar{v}) + \frac{\partial}{\partial \xi}(\bar{v} \Delta \bar{u} - \bar{u} \Delta \bar{v}) = \\ &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial \Delta \bar{u}}{\partial \eta} - \frac{\partial \Delta \bar{v}}{\partial \xi} \right) - \bar{\alpha} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial \xi} \right); \\ &\frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

В стационарном случае ( $\partial \bar{u} / \partial \tau = \partial \bar{v} / \partial \tau = 0$ ), дифференцируя первое уравнение системы (1) по  $\eta$ , второе по  $\xi$ , вычитая второе уравнение из первого, с учетом уравнения (2) после исключения давления получим преобразованную систему уравнений:

$$\begin{aligned} \bar{v} \Delta \bar{u} - \bar{u} \Delta \bar{v} &= \left( \frac{\partial \Delta \bar{u}}{\partial \eta} - \frac{\partial \Delta \bar{v}}{\partial \xi} \right) - \bar{\alpha} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial \xi} \right); \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta} &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Выпишем выражения для продольной и поперечной компоненты скорости потока жидкости при нестационарном течении, тождественно удовлетворяющие системе уравнений (3), в виде линейной комбинации полиномиальных базисных функций [25].

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \sum_{\beta=0}^N A_{\beta} \tau^{\beta} Q_1^{\beta}(\xi, \eta) = A_0 - A_1 \xi \tau + 2 A_2 \xi \eta \tau^2 - \\ &-\frac{A_3}{3} (\xi^3 - 3 \eta^2 \xi) \tau^3 + 4 A_4 (\xi^3 \eta - \eta^3 \xi) \tau^4 - \frac{A_5}{5} \times \\ &\times (\xi^5 - 10 \xi^3 \eta^2 + 5 \eta^4 \xi) \tau^5 + \dots + A_N Q_1^N(\xi, \eta) \tau^N; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \sum_{\beta=0}^N A_{\beta} \tau^{\beta} Q_2^{\beta}(\xi, \eta) = A_0 + A_1 \eta \tau + A_2 (\xi^2 - \eta^2) \tau^2 + \\ &+\frac{A_3}{3} \left( \xi^2 \eta - \frac{\eta^3}{3} \right) \tau^3 + A_4 (\xi^4 - 6 \eta^2 \xi^2 + \eta^4) \tau^4 + \\ &+ A_5 \left( \xi^4 \eta - 2 \xi^2 \eta^3 + \frac{\eta^5}{5} \right) \tau^5 + \dots + A_N Q_2^N(\xi, \eta) \tau^N. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь  $Q_i^{\beta}(\xi, \eta)$  — полиномы;  $A_{\beta}$  — произвольные коэффициенты, подлежащие определению.

В работах [25, 26] приведены другие базисные функции, которые могут быть использованы для решения системы (1), (2).

Механическое состояние системы полностью определяется заданием координат и скоростей. С математической точки зрения это значит, что задание всех координат и скоростей в некоторый момент времени однозначно определяет также и значения ускорений этих точек в этот момент времени, т.е. предсказывает дальнейшее движение. Подставив выражения (5) и (6) в первые два уравнения системы (1), найдем распределение давления:

$$-\frac{\partial \bar{p}_1}{\partial \xi} = F_1(\xi, \eta); \quad -\frac{\partial \bar{p}_2}{\partial \eta} = F_2(\xi, \eta). \quad (7)$$

Проинтегрировав выражения (7), получим

$$\begin{aligned} -\bar{p}_1(\xi, \eta, \tau) &= \int F_1(\xi, \eta, \tau) d\xi + f_1(\eta, \tau) + \varphi(\tau) + C; \\ -\bar{p}_2(\xi, \eta, \tau) &= \int F_2(\xi, \eta, \tau) d\eta + f_2(\xi, \tau) + \varphi(\tau) + C, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $f_1(\eta, \tau)$ ,  $f_2(\xi, \tau)$ ,  $\varphi(\tau)$  — функции интегрирования;  $C$  — константа интегрирования.

За счет соответствующего выбора функций  $f_1(\eta, \tau)$  и  $f_2(\xi, \tau)$  после целого ряда преобразований найдем однозначное выражение для давления:

$$\begin{aligned} -\bar{p}(\xi, \eta, \tau) &= -\bar{p}_1(\xi, \eta, \tau) \equiv -\bar{p}_2(\xi, \eta, \tau) = \frac{A_1}{2} (\eta^2 - \xi^2) + \\ &+ 2 A_2 \left( \xi^2 \eta - \frac{\eta^3}{3} \right) \tau + A_0 A_1 (\eta - \xi) \tau + \frac{A_1^2}{2} (\xi^2 + \eta^2) \tau^2 - \\ &- A_1 A_2 (\xi^2 \eta + \eta^3) \tau^3 + A_0 A_2 (\xi^2 + 2 \xi \eta - \eta^2) \tau^2 + \\ &+ \frac{A_2^2}{2} (\xi^2 + \eta^2)^2 \tau^4 + \dots + \bar{\alpha} \left[ A_0 (\xi + \eta) + A_1 \frac{(\eta^2 - \xi^2) \tau}{2} + \right. \\ &+ A_2 \left( \xi^2 \eta - \frac{\eta^3}{3} \right) \tau^2 + \frac{A_3}{2} \left( \xi^2 \eta^2 - \frac{\xi^4}{6} - \frac{\eta^4}{6} \right) \tau^3 + \dots \left. \right] + \dots + \\ &+ \varphi(\tau) + C. \end{aligned} \quad (9)$$

Правильность решений (5), (6) и (9) можно проверить их подстановкой в систему уравнений

(1), (2). Отметим, что для нестационарного случая решение можно представить также в виде

$$\bar{u} = \varphi(\tau) \left[ A_0 - A_1 \xi + 2A_2 \xi \eta - \frac{A_3}{3} (\xi^3 - 3\eta^2 \xi) + 4A_4 (\xi^3 \eta - \eta^3 \xi) + \dots + A_N Q_1^N (\xi, \eta) \right]; \quad (10)$$

$$\bar{v} = \varphi(\tau) \left[ A_0 + A_1 \eta + A_2 (\xi^2 - \eta^2) + A_3 \left( \xi^2 \eta - \frac{\eta^3}{3} \right) + A_4 (\xi^4 - 6\eta^2 \xi^2 + \eta^4) + \dots + A_N Q_2^N (\xi, \eta) \right], \quad (11)$$

где  $\varphi(\tau)$  — произвольная функция, например  $\varphi(\tau) = k(1 - e^{-a\tau})$ .

Для данного случая имеем следующее выражение для определения давления:

$$\begin{aligned} -\bar{p} = & A_0 (\xi + \eta) \varphi'(\tau) + \frac{A_1}{2} (\eta^2 - \xi^2) \varphi'(\tau) + \\ & + A_2 \left( \xi^2 \eta - \frac{\eta^3}{3} \right) \varphi'(\tau) + \varphi^2(\tau) \left[ A_0 A_1 (\eta - \xi) + \frac{A_1^2}{2} (\xi^2 + \eta^2) - \right. \\ & - A_1 A_2 (\xi^2 \eta + \eta^3) + A_0 A_2 (\xi^2 + 2\xi \eta - \eta^2) + \\ & \left. + \frac{A_2^2}{2} (\xi^2 + \eta^2)^2 + \dots \right] + \varphi(\tau) \bar{\alpha} \left[ A_0 (\xi + \eta) + A_1 \frac{(\eta^2 - \xi^2)}{2} + \right. \\ & + A_2 \left( \xi^2 \eta - \frac{\eta^3}{3} \right) + \frac{A_3}{2} \left( \xi^2 \eta^2 - \frac{\xi^4}{6} - \frac{\eta^4}{6} \right) + \dots + \left. \right] + \\ & + \varphi(\tau) + C. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь  $\varphi'(\tau)$  — производная по времени  $\tau$ .

Без учета инерционных членов вместо выражения (9) получим

$$\begin{aligned} -\bar{p} = & \frac{A_1}{2} (\eta^2 - \xi^2) + 2A_2 \left( \xi^2 \eta - \frac{\eta^3}{3} \right) \tau + \\ & + \frac{3A_3}{2} \left( \xi^2 \eta^2 - \frac{\xi^4}{6} - \frac{\eta^4}{6} \right) \tau^2 + \dots + \bar{\alpha} \left[ A_0 (\xi + \eta) + \right. \\ & + A_1 \frac{(\eta^2 - \xi^2)}{2} + A_2 \left( \xi^2 \eta - \frac{\eta^3}{3} \right) \tau^2 + \\ & \left. + \frac{A_3}{2} \left( \xi^2 \eta^2 - \frac{\xi^4}{6} - \frac{\eta^4}{6} \right) \tau^3 + \dots \right] + \dots + \varphi(\tau) + C. \end{aligned} \quad (13)$$

Для стационарного случая решение системы уравнений (4) имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{u} = & A_0 - A_1 \xi + 2A_2 \xi \eta - \\ & - \frac{A_3}{3} (\xi^3 - 3\eta^2 \xi) + 4A_4 (\xi^3 \eta - \eta^3 \xi) - \\ & - \frac{A_5}{5} (\xi^5 - 10\xi^3 \eta^2 + 5\eta^4 \xi) + \dots + A_N Q_1^N (\xi, \eta); \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \bar{v} = & A_0 + A_1 \eta + A_2 (\xi^2 - \eta^2) + \\ & + A_3 \left( \xi^2 \eta - \frac{\eta^3}{3} \right) + A_4 (\xi^4 - 6\eta^2 \xi^2 + \eta^4) + \\ & + A_5 \left( \xi^4 \eta - 2\xi^2 \eta^3 + \frac{\eta^5}{5} \right) + \dots + A_N Q_2^N (\xi, \eta); \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} -\bar{p} = & A_0 A_1 (\eta - \xi) + \frac{A_1^2}{2} (\xi^2 + \eta^2) - A_1 A_2 (\xi^2 \eta + \eta^3) + \\ & + A_0 A_2 (\xi^2 + 2\xi \eta - \eta^2) + \frac{A_2^2}{2} (\xi^2 + \eta^2)^2 + \frac{A_1 A_3}{3} (\xi^4 - \eta^4) + \\ & + A_0 A_3 \left( \xi^2 \eta + \xi \eta^2 - \frac{\xi^3}{3} - \frac{\eta^3}{3} \right) + \\ & + \frac{A_3^2}{6} \left( \xi^4 \eta^2 + \xi^2 \eta^4 + \frac{\eta^6}{3} + \frac{\xi^6}{3} \right) + \\ & + \frac{A_2 A_3}{3} (2\xi^2 \eta^3 + \xi^4 \eta + \eta^5) + \dots + \\ & + \bar{\alpha} \left[ A_0 (\xi + \eta) + A_1 \frac{(\eta^2 - \xi^2)}{2} + A_2 \left( \xi^2 \eta - \frac{\eta^3}{3} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{A_3}{2} \left( \xi^2 \eta^2 - \frac{\xi^4}{6} - \frac{\eta^4}{6} \right) + \dots \right] + C. \end{aligned} \quad (16)$$

Для стационарного случая без учета инерционных сил вместо выражения (16) имеем

$$\begin{aligned} -\bar{p} = & \bar{\alpha} \left[ A_0 (\xi + \eta) + A_1 \frac{(\eta^2 - \xi^2)}{2} + A_2 \left( \xi^2 \eta - \frac{\eta^3}{3} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{A_3}{2} \left( \xi^2 \eta^2 - \frac{\xi^4}{6} - \frac{\eta^4}{6} \right) + \dots \right] + C. \end{aligned} \quad (17)$$

Если в выражениях (9), (12)–(16) положить  $\bar{\alpha} = 0$ , получим решения уравнений Навье—Сто-

кса для рассматриваемых случаев. Входящие в решения (5), (6), (9)–(17) неизвестные коэффициенты  $A_\beta$  определяются из соответствующих начальных и граничных условий методом коллокации или методом взвешенных невязок. Количество коэффициентов  $A_\beta$  зависит от выбора метода решения граничной задачи и оценки точности приближенного решения. Функция  $\varphi(\tau)$  и константа  $C$  определяются из решения конкретной прикладной задачи.

Приближенное решение системы уравнений (1), (2) можно записать в виде

$$\bar{u} = \left[ -A \sum_{\beta=1}^N \frac{c_0}{(c_1 \xi + c_0 \eta + d_{1\beta})^\beta} - B \sum_{\beta=1}^N \frac{c_1}{(c_0 \xi + c_1 \eta + d_{2\beta})^\beta} \right] \times \varphi(\tau) + \psi(\tau), \quad (18)$$

$$\bar{v} = \left[ A \sum_{\beta=1}^N \frac{c_1}{(c_1 \xi + c_0 \eta + d_{1\beta})^\beta} + B \sum_{\beta=1}^N \frac{c_0}{(c_0 \xi + c_1 \eta + d_{2\beta})^\beta} \right] \times \varphi(\tau) + \lambda(\tau). \quad (19)$$

Здесь  $\varphi(\tau)$ ,  $\psi(\tau)$ ,  $\lambda(\tau)$  — произвольные функции;  $\beta$  — целые числа;  $A$ ,  $B$  — внешние параметры;  $c_0$ ,  $c_1$ ,  $d_{1\beta}$ ,  $d_{2\beta}$  — внутренние параметры.

При условии  $\beta > 0$  выражения (18), (19) могут быть использованы для решения внешних задач, когда необходимо удовлетворить граничным условиям на бесконечности, а при условии  $\beta < 0$  для решения внутренних задач, когда имеется замкнутая область, например для моделирования плоской задачи фильтрации несжимаемой жидкости сквозь пористую среду. Нетрудно проверить, что решение (18), (19) тождественно удовлетворяет уравнению неразрывности (2). Внешние параметры  $A$  и  $B$  определяются из граничных условий, внутренние параметры  $c_0$ ,  $c_1$ ,  $d_{1\beta}$ ,  $d_{2\beta}$  выбираются из математических, физических соображений, а также из сравнения теории с экспериментальными данными или другими точными решениями.

Покажем, что если решение системы уравнений (1) представить в виде (18), (19) удовлетворяющее тождественно уравнению неразрывности (2) и соответствующим граничным условиям, то давление можно найти из уравнений (1) путем интегрирования уже линейных уравнений. Рассмотрим стационарное решение  $\varphi(\tau) = 1$ ,  $\psi(\tau) = 1$ ,  $\lambda(\tau) = 0$ ,

которое в случае обтекания произвольных плоских тел должно удовлетворять следующим граничным условиям:

$$\bar{u}|_\Gamma = 0, \quad \bar{v}|_\Gamma = 0, \quad \bar{u}|_{\eta \rightarrow \infty} = 1, \quad \bar{v}|_{\eta \rightarrow \infty} = 0. \quad (20)$$

Найдем параметры  $A$  и  $B$  при значении  $\beta = 1$  на границе  $\Gamma$ . Используем первые два условия (20). Для нахождения  $A$  умножим первое уравнение на  $c_0$ , второе — на  $c_1$  и сложим. Для нахождения  $B$  умножим первое уравнение на  $c_1$ , второе — на  $c_0$  и сложим. В результате на границе  $\Gamma$  имеем

$$A = -\frac{c_0(c_1 \xi_\Gamma + c_0 \eta_\Gamma + d_1)}{-c_0^2 + c_1^2},$$

$$B = -\frac{c_1(c_0 \xi_\Gamma + c_1 \eta_\Gamma + d_1)}{-c_1^2 + c_0^2}. \quad (21)$$

Подставим выражения (21) в стационарное решение (18), (19). Очевидно, что на границе  $\Gamma$  условия прилипания (первые два условия (20)) удовлетворяются тождественно. Также нетрудно видеть, что и на бесконечности (последние два условия (20)) граничные условия выполняются.

*Пример 1.* Запишем квазистационарное решение (18), (19) при  $\beta = 1$  для задачи об обтекании пластинки длины  $L$  и единичной ширины (такая подстановка дана в работе [20]) в следующем виде ( $\eta > 0$ ,  $0 \leq \xi \leq \xi_L$ ):

$$\bar{u} = \frac{c_0^2(c_1 \xi_\Gamma + c_0 \eta_\Gamma + d_1)}{(c_1 \xi + c_0 \eta + d_1)(-c_0^2 + c_1^2)} + \frac{c_1^2(c_0 \xi_\Gamma + c_1 \eta_\Gamma + d_2)}{(c_0 \xi + c_1 \eta + d_2)(-c_1^2 + c_0^2)} + 1; \quad (22)$$

$$\bar{v} = -\frac{c_0 c_1(c_1 \xi_\Gamma + c_0 \eta_\Gamma + d_1)}{(c_1 \xi + c_0 \eta + d_1)(-c_0^2 + c_1^2)} - \frac{c_0 c_1(c_0 \xi_\Gamma + c_1 \eta_\Gamma + d_2)}{(c_0 \xi + c_1 \eta + d_2)(-c_1^2 + c_0^2)}, \quad (23)$$

где

$$0 \leq \xi_\Gamma \leq \xi_L, \quad \eta = \eta_\Gamma = 0, \quad \xi_L = \frac{Lu_*}{v}, \quad \bar{u}|_\Gamma = \bar{v}|_\Gamma = 0, \quad c_0 \neq c_1.$$

Блазиусом была предложена приближенная постановка задачи об обтекании пластинки вязким потоком несжимаемой жидкости, допускающая удовлетворительное решение всюду, кроме областей вблизи передней и задней кромок пла-

стинки, и позволяющая с достаточной точностью найти сопротивление пластинки [8, 20]. Найдем решение этой задачи, используя выражения (22), (23). Заметив, что напряжения трения на пла-

стинке определяются по формуле  $\tau_\Gamma = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}$  ( $\mu$  — коэффициент динамической вязкости), получим

$$\tau_\Gamma = \mu \frac{u_*^2}{\nu} \left[ -\frac{c_0^3}{(-c_0^2 + c_1^2)(c_1 \xi_\Gamma + d_1)} + \frac{c_1^3}{(-c_0^2 + c_1^2)(c_0 \xi_\Gamma + d_2)} \right]_{\eta_\Gamma=0} \quad (24)$$

Положив в решении (24)  $d_1 = c_0^3$ ,  $d_2 = c_1^3$ , получим, что в точке  $\xi_\Gamma = \eta = 0$  трение  $\tau_\Gamma = 0$ . В решении Блазиуса в этой точке трение стремится к бесконечности. При  $\xi_\Gamma \rightarrow \infty$  трение стремится к нулю. Найдем местный коэффициент трения ( $\eta = 0$ ):

$$c_f = \frac{\tau_\Gamma}{(\rho u_*^2 / 2)} = 2 \left[ -\frac{c_0^3}{(-c_0^2 + c_1^2)(c_1 \xi_\Gamma + c_0^3)} + \frac{c_1^3}{(-c_0^2 + c_1^2)(c_0 \xi_\Gamma + c_1^3)} \right] \quad (25)$$

Полное сопротивление трения пластинки длины  $L$ , смоченной с двух сторон:

$$W_f = 2 \int_0^L \tau_\Gamma dx = 2\mu u_* \left[ \frac{c_0^3}{(c_0^2 - c_1^2)c_1} \ln \left| \frac{c_1 \text{Re} + c_0^3}{c_0^3} \right| - \frac{c_1^3}{(c_0^2 - c_1^2)c_0} \ln \left| \frac{c_0 \text{Re} + c_1^3}{c_1^3} \right| \right] \quad (26)$$

где  $\text{Re} = \xi_L$  — местное число Рейнольдса.

Коэффициент полного сопротивления трения запишется так:

$$C_f = \frac{W_f}{(\rho u_*^2 / 2)S} = 2 \int_0^L \tau_\Gamma dx = \frac{2}{\text{Re}} \left[ \frac{c_0^3}{(c_0^2 - c_1^2)c_1} \times \left[ \ln \left| \frac{c_1 \text{Re} + c_0^3}{c_0^3} \right| - \frac{c_1^3}{(c_0^2 - c_1^2)c_0} \ln \left| \frac{c_0 \text{Re} + c_1^3}{c_1^3} \right| \right] \right] \quad (27)$$

где  $S = 2L \cdot 1$  — смоченная поверхность [20].

Для уменьшения количества параметров и упрощения особенностей, положим в (27)  $c_1 = \sqrt{2}c_0$ . Тогда имеем

$$C_f = \left( \frac{2}{\text{Re}} \right) \times \left[ \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \ln \left| 1 + \frac{\sqrt{2} \text{Re}}{c_0^2} \right| + 2\sqrt{2} \ln \left| 1 + \frac{\text{Re}}{2\sqrt{2}c_0^2} \right| \right] \quad (28)$$

Уточним полученное решение для пластинки, воспользовавшись следующей формулой:

$$\tau_\Gamma = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{y=0} = \mu \frac{u_*^2}{\nu} \left( \frac{c_0}{c_1 \xi_\Gamma + d_1} + \frac{c_1}{c_0 \xi_\Gamma + d_2} \right)_{\eta_\Gamma=0} \quad (29)$$

Положив в решении (29)  $d_1 = c_0$ ,  $d_2 = -c_1$ , получим, что в точке  $\xi_\Gamma = \eta = 0$  трение  $\tau_\Gamma = 0$ . Полное сопротивление трения пластинки вычисляется по формуле

$$W_f = 2\mu u_* \left( \frac{c_0}{c_1} \ln \left| \frac{c_1 \text{Re} + 1}{c_0} \right| + \frac{c_1}{c_0} \ln \left| 1 - \frac{c_0}{c_1} \text{Re} \right| \right) \quad (30)$$

Для уменьшения количества параметров, положим  $c_1 = mc_0$ . Тогда коэффициент полного сопротивления трения для пластинки запишется в виде

$$C_f = \frac{2}{\text{Re}} \left( \frac{1}{m} \ln |m \text{Re} + 1| + m \ln \left| 1 - \frac{1}{m} \text{Re} \right| \right) \quad (31)$$

Проведем анализ полученных формул. В работах [8, 20] приведена формула Блазиуса по расчету коэффициента полного сопротивления трения для пластинки  $C_f = \frac{1,328}{\sqrt{\text{Re}}}$ . Более точной формулой,

которая лучше согласуется с опытными данными при числах  $\text{Re} > 10$ , является формула, выведенная Го-Юн-хуаем [20]:  $C_f = \frac{1,328}{\sqrt{\text{Re}}} + \frac{4,18}{\text{Re}}$ . Сравним

ее с формулами (28) и (31). Внутренние параметры  $c_0$  и  $m$ , входящие в эти формулы, найдем из равенства значений формул при числе  $\text{Re} = 4$ . В результате имеем  $c_0 = 0,451$  и  $m = 0,2245$ . На рис. 1 приведены зависимости  $C_f(\text{Re})$ , вычисленные по различным формулам. Численный анализ показы-



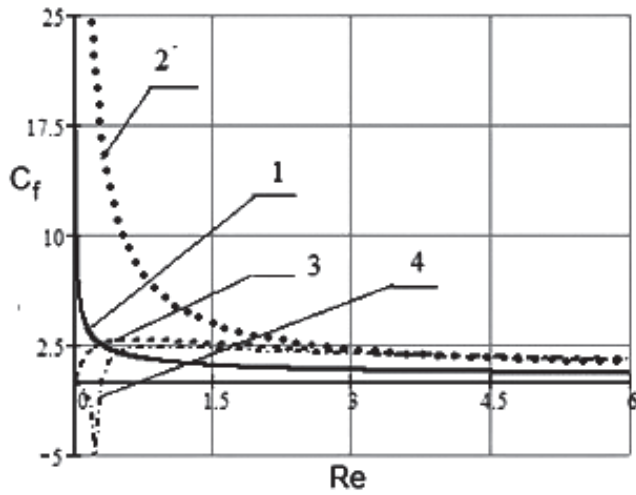


Рис. 1. Зависимость коэффициента полного сопротивления трения от числа Re, рассчитанные по разным формулам: 1 — по формуле Блазиуса; 2 — по формуле Го-Юн-хуая; 3 — по формуле (28); 4 — по формуле (31)

ваит, что разница в значениях коэффициента  $C_f$ , рассчитанных по различным формулам, уже при числах  $Re > 2$  составляет менее 1%. Формула (31) имеет особенность при очень малых числах  $Re$ , и параметр  $m$ , входящий в нее, нужно выбирать при равенстве значений формул при числах  $Re > 3,5$ . Формула (28) не имеет никаких особенностей, по сравнению с другими формулами во всем диапазоне, но параметр  $c_0$  желательно выбирать из равенства значений формул при малых числах  $Re$ .

На рис. 2 показано распределение безразмерного трения по пластинке, вычисленного по формуле (24). Данная зависимость не имеет никаких особенностей, в отличие от решения Блазиуса и от решения (29) (особенность проявляется в точке  $\xi = m$ ).

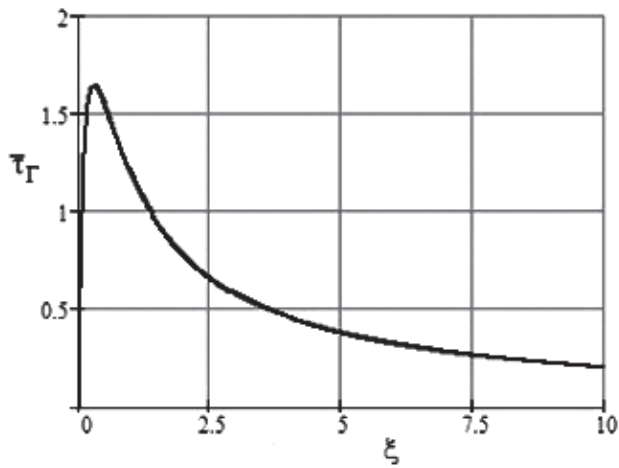


Рис. 2. Распределение безразмерного трения по пластинке

Отметим, что допущения, положенные в основу вывода уравнений Навье—Стокса, являются эмпирическими, поэтому получаемые аналитические решения нуждаются в проверке, которая может быть только экспериментальной. Нетрудно показать, что при использовании решения (18), (19) вихревая напряженность

$$\omega = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \neq 0.$$

Найдем решение линеаризованных уравнений Навье—Стокса в безразмерном виде:

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \eta^2};$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \eta^2}; \tag{32}$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta} = 0.$$

Если принять функцию течения  $\psi(\xi, \eta)$  в форме  $\bar{u} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta}$ ;  $\bar{v} = -\frac{\partial \psi}{\partial \xi}$ , то уравнение неразрывности выполняется тождественно. Дифференцируя первое уравнение системы (32) по  $\eta$ , второе уравнение по  $\xi$  и вычитая второе уравнение из первого, получим в области

$$G = \{ \xi, \eta : \xi_1 \leq \xi \leq \xi_2; \eta_1 \leq \eta \leq \eta_2 \}$$

после исключения давления уравнение

$$\frac{\partial^4 \psi}{\partial \xi^4} + 2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial \eta^4} = 0.$$

Выпишем полиномиальное решение данного уравнения [25]:

$$\begin{aligned} \psi(\xi, \eta) = & A_0 + A_1 (c_{01} \xi + c_{11} \eta) + A_2 [c_{02} (\xi^2 + \eta^2) + c_{12} \xi \eta] + \\ & + A_3 (c_{03} \xi^3 + c_{13} \xi^2 \eta + c_{23} \xi \eta^2 + c_{33} \eta^3) + \\ & + A_4 \left[ c_{04} (\xi^4 - \eta^4) + c_{14} \xi^3 \eta + c_{24} \left( \xi^2 \eta^2 - \frac{\eta^4}{3} \right) + c_{34} \xi \eta^3 \right] + \\ & + \dots + A_N \psi_N (c_{0N}, c_{1N}, c_{2N}, c_{3N}, \xi, \eta). \end{aligned} \tag{33}$$

Здесь  $A_i$  — произвольные коэффициенты, подлежащие определению;  $c_{0N}, c_{1N}, c_{2N}, c_{3N}$  — произвольные внутренние параметры.

Выражения для продольной и поперечной компоненты скорости имеют вид:

$$\begin{aligned} \bar{u}(\xi, \eta) = & A_1 c_{11} + A_2 (2c_{02}\eta + c_{12}\xi) + \\ & + A_3 (c_{13}\xi^2 + 2c_{23}\xi\eta + 3c_{33}\eta^2) + \\ & + A_4 \left[ -4c_{04}\eta^3 + c_{14}\xi^3 + 2c_{24} \left( \xi^2\eta - \frac{2\eta^3}{3} \right) + 3c_{34}\xi\eta^2 \right] + \\ & + \dots + A_N u_N (c_{0N}, c_{1N}, c_{2N}, c_{3N}, \xi, \eta); \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \bar{v}(\xi, \eta) = & -A_1 c_{01} - A_2 (2c_{02}\xi + c_{12}\eta) - \\ & - A_3 (3c_{03}\xi^2 + 2c_{13}\xi\eta + c_{23}\eta^2) - \\ & - A_4 [4c_{04}\xi^3 + 3c_{14}\xi^2\eta + 2c_{24}\xi\eta^2 + c_{34}\eta^3] - \\ & - \dots - A_N v_N (c_{0N}, c_{1N}, c_{2N}, c_{3N}, \xi, \eta). \end{aligned} \quad (35)$$

Для определения распределения давления воспользуемся приведенным выше алгоритмом. В результате получим однозначное выражение для давления:

$$\begin{aligned} \bar{p}(\xi, \eta) = & 2A_3 [(c_{13} + 3c_{33})\xi - (3c_{03} + c_{23})\eta] + \\ & + A_4 [-4(6c_{04} + c_{24})\xi\eta + 3(c_{14} + c_{34})(\xi^2 - \eta^2)] + \\ & + \dots + A_N p_N (c_{0N}, c_{1N}, c_{2N}, c_{3N}, \xi, \eta) + C. \end{aligned} \quad (36)$$

Входящие в решение (34)–(36) неизвестные коэффициенты  $A_i$  и константа  $C$  определяются из соответствующих граничных условий. Внутренние параметры  $c_{0i}, c_{1i}, c_{2i}, c_{3i}$  расширяют класс решений внутри области  $G$ . Например, при выполнении условий

$$c_{33} = -\frac{c_{13}}{3}, \quad c_{23} = -3c_{03}, \quad c_{24} = -6c_{04}, \quad c_{34} = -c_{14}$$

и т.д. решение (34)–(36) описывает потенциальное течение ( $\Delta u = 0, \Delta v = 0$ , где  $\Delta$  — двумерный оператор Лапласа). Данное решение также может быть использовано для описания течения вязкой жидкости через пористую среду без учета инерционных сил.

**Пример 2.** Рассмотрим течение несжимаемой вязкой жидкости под действием постоянного про-

дольного перепада давления между двумя параллельными стенками, одна из которых (нижняя) покоится, а другая (верхняя) движется с постоянной скоростью в своей плоскости (течение Куэтта) [8]. Воспользуемся решением (34), (35) при следующих значениях:

$$A_1 = A_5 = A_6 = A_7 = \dots = 0;$$

$$c_{01} = c_{11} = 0; \quad c_{02} = 0; \quad c_{12} = -1; \quad c_{03} = -\frac{1}{3}; \quad c_{13} = -\frac{\delta p}{2A_3};$$

$$c_{23} = 1; \quad c_{33} = 0; \quad c_{04} = 0; \quad c_{14} = -\frac{1}{3}; \quad c_{24} = 0; \quad c_{34} = \frac{1}{3}.$$

Здесь  $\delta p$  — безразмерный перепад давления,  $\delta p = \delta p / dx$ . При данных условиях поперечный перепад давления отсутствует:  $\partial p / \partial y = 0$ .

Решение рассматриваем в произвольном сечении, например  $\xi_1 = 4$ . Неизвестные коэффициенты  $A_2, A_3, A_4$  определяем методом коллокации из граничных условий:

$$\bar{u}(\xi_1, \eta)|_{\eta=\eta_1} = 0, \quad \bar{v}(\xi_1, \eta)|_{\eta=\eta_1} = 0, \quad \bar{u}(\xi_1, \eta)|_{\eta=\eta_2} = 1,$$

где  $\eta_1 = 2, \eta_2 = 4$  — координаты нижней и верхней стенок.

Результаты сравнения решения (34), (35) с классическим решением Куэтта

$$\bar{u}(\eta) = \frac{\delta p}{2} \left[ \eta(\eta - (\eta_1 + \eta_2)) + \eta_1 \eta_2 \right] + \frac{\eta - \eta_1}{\eta_2 - \eta_1}$$

приведены для  $A_2 = 10,55; A_3 = 1,03; A_4 = -0,323$  на рис. 3 и для  $A_2 = -11,05; A_3 = -1,13; A_4 = 0,398$  на

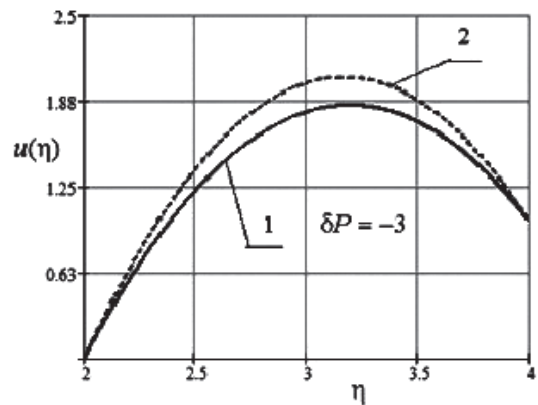


Рис. 3. Типовой профиль продольной компоненты скорости при падении давления в направлении движения верхней стенки: 1 — решение (34), (35); 2 — классическое решение Куэтта



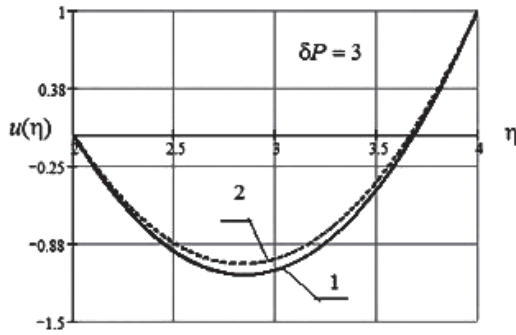


Рис. 4. Типовой профиль продольной компоненты скорости при повышении давления в направлении движения верхней стенки: 1 — решение (34), (35); 2 — классическое решение Куэтта

рис. 4. Если выбрать другое сечение, то, решая ту же краевую задачу, найдем другие значения искомых коэффициентов  $A_2, A_3, A_4$ . Как показывают расчеты, найденное новое решение мало отличается от классического решения в разных сечениях.

Ограничение решения: приемлемая точность обеспечивается только при условии  $\xi > 0$ . Некоторое различие результатов вычислений объясняется тем, что решение (34), (35) получено для плоскопараллельного течения. Оно тождественно удовлетворяет уравнению неразрывности. Классическое решение Куэтта описывает одномерное течение вязкой жидкости.

Отметим, что задача может быть решена с учетом инерционных членов (т.е. при высоких числах Рейнольдса), если использовать методику расчета, приведенную выше. В этом случае искомые параметры определяются из решения системы нелинейных алгебраических уравнений.

Приведем несколько видоизмененный подход к нахождению решений системы уравнений (32). Дифференцируя первое из них по  $\xi$ , второе по  $\eta$  и вычитая второе уравнение из первого, получим

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial \eta^2}. \quad (37)$$

Введем функцию  $\psi(\xi, \eta) = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta}$ . Тогда уравнение (37) примет вид

$$\Delta \psi = F(\xi, \eta), \quad (38)$$

где  $F(\xi, \eta) = \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial \eta^2}$ .

Решение уравнения (38) представляется суммой общего решения однородного уравнения (уравнения Лапласа [25, 26]) и частного решения неоднородного уравнения  $\Phi(\xi, \eta)$ :

$$\psi(\xi, \eta) = A_0 + A_1 (c_{01}\xi + c_{11}\eta) + A_2 [c_{02}(\xi^2 - \eta^2) + c_{12}\xi\eta] + A_3 [c_{03}(\xi^3 - 3\xi\eta^2) + c_{13}(\xi^2\eta - \frac{\eta^3}{3})] + \dots + \Phi(\xi, \eta). \quad (39)$$

Конкретный вид функции  $\Phi(\xi, \eta)$  зависит от того, какой функцией аппроксимируется давление. Из совместного решения уравнения неразрывности и уравнения (37) и соответствующего интегрирования, получим

$$\begin{aligned} \bar{u}(\xi, \eta) = & \frac{1}{2} \left\{ A_0 \xi + A_1 \left( c_{01} \frac{\xi^2}{2} + c_{11} \xi \eta \right) + \right. \\ & + A_2 \left[ c_{02} \left( \frac{\xi^3}{3} - \xi \eta^2 \right) + c_{12} \frac{\xi^2 \eta}{2} \right] + \\ & + A_3 \left[ c_{03} \left( \frac{\xi^4}{4} - \frac{3\xi^2 \eta^2}{2} \right) + c_{13} \left( \frac{\xi^3 \eta}{3} - \frac{\xi \eta^3}{3} \right) \right] + \dots \left. \right\} + \\ & + \frac{1}{2} \int \Phi(\xi, \eta) d\xi + \varphi_1(\eta) + C_1; \quad (40) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{v}(\xi, \eta) = & -\frac{1}{2} \left\{ A_0 \eta + A_1 \left( c_{01} \xi \eta + c_{11} \frac{\eta^2}{2} \right) + \right. \\ & + A_2 \left[ c_{02} \left( \xi^2 \eta - \frac{\eta^3}{3} \right) + c_{12} \frac{\xi \eta^2}{2} \right] + \\ & + A_3 \left[ c_{03} (\xi^3 \eta - \xi \eta^3) + c_{13} \left( \frac{\xi^2 \eta^2}{2} - \frac{\eta^4}{12} \right) \right] + \dots \left. \right\} - \\ & - \frac{1}{2} \int \Phi(\xi, \eta) d\eta + \varphi_2(\xi) + C_2, \quad (41) \end{aligned}$$

где  $\varphi_1(\eta), \varphi_2(\xi)$  — функции интегрирования;  $C_1, C_2$  — константы интегрирования.

Нетрудно убедиться, что выражения (40), (41) тождественно удовлетворяют уравнению неразрывности. Подстановка этих выражений в первые два уравнения системы (32) позволяет найти конкретные выражения для функций интегрирования:

$$\begin{aligned} \varphi_1(\eta) &= -A_1c_{01} \frac{\eta^2}{4} - A_2c_{12} \frac{\eta^3}{12} + A_3c_{03} \frac{\eta^4}{8} + \dots + C_3\eta; \\ \varphi_2(\xi) &= A_1c_{11} \frac{\xi^2}{4} + A_2c_{12} \frac{\xi^3}{12} + A_3c_{13} \frac{\xi^4}{24} + \dots + C_4\xi, \end{aligned} \quad (42)$$

где  $C_3, C_4$  — константы интегрирования.

При этом функция  $\Phi(\xi, \eta)$  должна удовлетворять следующим уравнениям:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \xi \partial \eta^2} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial \xi}, \quad -\frac{1}{2} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \xi^2 \partial \eta} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial \eta}. \quad (43)$$

В ряде случаев, задавая закон распределения давления (например, градиент давления, под действием которого происходит движение жидкости в плоском канале), получим конечные формулы для выражений (40), (41) с учетом (42) и (43).

Алгоритм решения задачи следующий. Отыскиваем решение  $\Phi(\xi, \eta)$  в форме полиномов  $B_k \xi^i \eta^j$  с неизвестными коэффициентами  $B_k$ . Выбирая полиномы различных степеней и подбирая для них соответствующие коэффициенты, получим целый ряд аналитических решений уравнений Стокса. При известном выражении для давления  $\bar{p}(\xi, \eta)$  в форме полиномов надо подставить функцию  $\Phi(\xi, \eta)$  в систему уравнений (43) и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях  $\xi^i \eta^j$ . В качестве примера рассмотрим несколько случаев.

*Случай 1.*  $\bar{p}(\xi, \eta) = a\xi + b\eta + c$ . Здесь  $a, b, c$  — коэффициенты, которые могут быть как заданными, так и неизвестными. В этом случае они определяются из граничных условий для давления. Получим  $\Phi(\xi, \eta) = 2(a\xi - b\eta)$ .

*Случай 2.* Для давления

$$\bar{p}(\xi, \eta) = a_1\xi^2 + a_2\xi + b_1\eta^2 + b_2\eta + d\xi\eta + c$$

получим выражение

$$\Phi(\xi, \eta) = \frac{(a_1 - b_1)(\xi^2 + \eta^2)}{2} + 2(a_2\xi - b_2\eta).$$

При этом возникают ограничения:  $b_1 = -a_1, d = 0$ .

*Случай 3.* Пусть

$$\bar{p}(\xi, \eta) = a_1\xi^3 + a_2\xi^2 + a_3\xi + b_1\eta^3 + b_2\eta^2 + b_3\eta + d\xi\eta + c.$$

Получим

$$\begin{aligned} \Phi(\xi, \eta) &= \frac{(a_2 - b_2)(\xi^2 + \eta^2)}{2} + 2(a_1\xi^3 - b_1\eta^3) + \\ &+ 2(a_3\xi - b_3\eta) + 6(b_1\xi^2\eta - a_1\xi\eta^2). \end{aligned}$$

Ограничения:  $b_2 = -a_2, d = 0$ .

Правильность найденных решений легко проверить подстановкой их в исходные уравнения (32).

### Выводы

В заключение отметим, что получены новые аналитические решения уравнений Навье—Стокса (Навье—Стокса—Бринкмана). Они могут быть использованы в практических задачах аэрогидродинамики, и в том числе в задачах фильтрации жидкости в пористых средах для создания композиционных материалов и различных фильтрующих устройств. При этом в ряде случаев (решения (5), (6), (9)—(17), (34)—(36)) существенно сокращается размерность алгебраической системы уравнений относительно неизвестных коэффициентов, так как строится аппроксимация решения только на границе. Имея аналитическое решение (например, (22), (23), (40), (41)) и граничные условия, за счет внутренних параметров можно исключить особенности, связанные с решением системы алгебраических уравнений. Решения представляются в аналитическом виде, поэтому упрощаются постановка и решение задач параметрической идентификации и обратных задач.

### Библиографический список

1. *Richardson M.* Bombardier spreads its wings // Aerospace manufacturing. 2010, pp. 278-296. URL: <https://www.aero-mag.com/bombardier-spreads-its-wings/>
2. *Nedanov P., Advani S.G.* A method to determine 3D permeability of fibrous reinforcement // Journal of Composite Materials. 2002. Vol. 36. No. 2, pp. 241-254. DOI: 10.1177/0021998302036002462
3. *Loos A.C., MacRae J.D.* A process simulation model for the manufacture of a blade-stiffened panel by the resin film infusion process // Composites Science and Technology. 1996. Vol. 56. No. 3, pp. 273-289. DOI: 10.1016/0266-3538(96)80008-X
4. *Батраков В.В., Халиулин В.И., Константинов Д.Ю.* Технология производства изделий из композитов. Трансферные методы формования: Учеб. пособие. — Казань: Изд-во КНИТУ-КАИ, 2018. — 184 с.
5. *Воробей В.В., Логинов В.Е.* Современный подход к разработке конструкций из композиционных материалов // Вестник Московского авиационного института. 2002. Т. 9. № 1. С. 66-72.

6. Белов О.А., Бердникова Н.А., Бабкин А.В., Козлов М.В., Белов Д.А. Композитная формообразующая оснастка // Вестник Московского авиационного института. 2017. Т. 24. № 2. С. 115-122.
7. Темам Р. Уравнения Навье—Стокса: Теория и численный анализ / Пер. с англ. В.А. Новикова, А.М. Франка. — М.: Мир, 1981. — 408 с.
8. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. — М.: Наука, 1974. — 711 с.
9. Пухначев В.В. Симметрии в уравнениях Навье—Стокса // Успехи механики. 2006. Т. 4. № 1. С. 6–76.
10. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. — М.: Наука, 1970. — 288 с.
11. Brinkman H.C. On the permeability of media consisting of closely packed porous particles // Flow, Turbulence and Combustion. 1949, pp. 81–86. DOI: 10.1007/bf02120318
12. Auriault J.L. On the domain of validity of Brinkman's equation // Transport in Porous Media. 2009. Vol. 79. No. 2, pp. 215–223. DOI: 10.1007/s11242-008-9308-7
13. Бабкин В.А. Исследование относительных движений вязкой жидкости и пористой среды с использованием уравнения Бринкмана // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2002. №4. С. 90–97.
14. Леонтьев Н.Е. Течение в пористой среде вокруг цилиндра и сферы в рамках уравнения Бринкмана с граничными условиями Навье пластинами // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2014. № 2. С.107–112.
15. Пейре Р., Тейлор Т.Д. Вычислительные методы в задачах механики жидкости / Пер. с англ. и ред. Н.Е. Вольцингера, Л.В. Руховца, Б.Е. Шнеерова. — Л.: Гидрометеиздат, 1986. — 352 с.
16. Wang C.Y. Exact solutions of the Steady-State Navier-Stokes equations // Annual Review of Fluid Mechanics. 1991. Vol. 23, pp. 159-177.
17. Rajagopal K.R. On a hierarchy of approximate models for flows of incompressible fluids through porous solids // Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. 2007. Vol. 17. No. 2, pp. 215–252. DOI: 10.1142/S0218202507001899
18. Tam C.K.W. The drag on a cloud of spherical particles in low Reynolds number flow // Journal of Fluid Mechanics. 1969. Vol. 38. No. 3, pp. 537–546. DOI: 10.1017/S0022112069000322
19. Fefferman C.L. Existence and Smoothness of the Navier-Stokes equation. The Millennium Prize Problems, Clay Mathematics Institute, Cambridge. 2006, pp. 57-67.
20. Лойцянский Л.Г. Ламинарный пограничный слой. — М.: Физматгиз, 1962. — 480 с.
21. Краев В.М. Современное состояние исследований нестационарных турбулентных течений // Вестник Московского авиационного института. 2016. Т. 23. № 4. С. 61-67.
22. Никитин Н.Б., Махров В.П. Расчет аэрогидродинамических характеристик решетчатого оперения методом численного решения уравнений Навье—Стокса, осредненных по Рейнольдсу // Вестник Московского авиационного института. 2009. Т. 16. № 1. С. 136-140.
23. Даниленко Н.В., Киренчев А.Г. Вихреобразование стоковых течений // Вестник Московского авиационного института. 2018. Т. 25. № 4. С. 28-36.
24. Артамонова Л.Г., Радциг А.Н., Рыжов Ю.А., Семенчиков Н.В., Тархов Е.Л., Чернов Г.Ф., Яковлевский О.В. Исследования МАИ в области отрывных и струйных течений вблизи элементов ЛА и их полных компоновок // Вестник Московского авиационного института. 2005. Т. 12. № 2. С. 31-48.
25. Дружинин Г.В., Закиров И.М., Бодунов Н.М. Базисные функции в приближенных решениях краевых задач. — Казань: Фэн, 2000. — 376 с.
26. Дружинин Г.В., Бодунов Н.М. Решение прикладных задач авиационной техники на основе симметрии дифференциальных уравнений в частных производных: Учебное пособие. — Казань: Изд-во КГТУ, 2012. — 288 с.

## ON PREFORM IMPREGNATION PROCESS SIMULATION WHILE TRANSFER MOLDING OF COMPOSITE PRODUCTS

**Bodunov N.M.\* , Khaliulin V.I.\*\* , Sidorov I.N.\*\*\* , Kostin V.A.\*\*\*\***

*Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev – KAI,  
KNRTU-KAI, 10, K. Marx str., Kazan, Tatarstan, 420111, Russia*

\* e-mail: bodunov\_nm@mail.ru

\*\* e-mail: pla.kai@mail.ru

\*\*\* e-mail: tpmm@kai.ru

\*\*\*\* e-mail: VAKostin@kai.ru

### Abstract

This article envisages an analytical approach to transfer molding simulation as applied to production of articles from composite materials. Navier-Stokes equations, modified by Brinkman, with corresponding initial and boundary conditions are used to describe the flow of incompressible liquid through porous media for two-dimensional unsteady and steady flows. The authors suggest a numerical-analytical method based on the sought solution approximation by linear combination of polynomial basic functions for the flow velocity components. This method novelty consists in selection of generalized variables and finding concrete basic functions, which in some cases allow obtaining analytical solutions, identically satisfying the initial equations, and reducing non-linear boundary problems in other cases. The unknown coefficients contained in the found solutions are determined from the corresponding initial and boundary conditions by the collocation method, or weighted residuals method while solving concrete applied problem.

Partial analytical solutions of Navier–Stokes equations, describing a slow flat flow of a viscous liquid, which basis is formed by the polynomial solution of the linear bi-harmonic equation, were found without accounting for the inertial forces. The external parameters included into solutions are being determined from boundary conditions by the collocation method, or weighted residuals method, while internal parameters, expanding the class of solutions, are selected from mathematical and physical reasons, as well as comparing theory with experimental data and other exact solutions. These solutions can be employed for describing slow flow of a viscous liquid through the porous medium. Approbation of the obtained partial analytical solutions was performed on the examples of solving two test problems, i.e. the problem of a plate flow-around, and Couette problem on liquid flow movement located between two planes under the impact of the pressure difference, whereas

one plane is immovable, and the other moves at constant speed. Computational results demonstrated acceptable accuracy of the obtained solutions.

**Keywords:** Navier-Stokes-Brinkman equations, porous medium, plate flow-around, polynomial basis functions.

### References

1. Richardson M. Bombardier spreads its wings. *Aerospace manufacturing*, 2010, pp. 278–296. URL: <https://www.aero-mag.com/bombardier-spreads-its-wings/>
2. Nedanov P., Advani S.G. A method to determine 3D permeability of fibrous reinforcement. *Journal of Composite Materials*, 2002, vol. 36, no. 2, pp. 241–254. DOI: 10.1177/0021998302036002462
3. Loos A.C., MacRae J.D. A process simulation model for the manufacture of a blade-stiffened panel by the resin film infusion process. *Composites Science and Technology*, 1996, vol. 56, no. 3, pp. 273–289. DOI: 10.1016/0266-3538(96)80008-X
4. Batrakov V.V., Khaliulin V.I., Konstantinov D.Yu. *Tekhnologiya proizvodstva izdelii iz kompozitov. Transferynye metody formovaniya* (Production technique of products from composites. Transfer molding technique), Kazan, KNITU-KAI, 2018, 184 p.
5. Vorobey V.V., Loginov V.E. A modern approach to composite material structures design. *Aerospace MAI Journal*, 2002, vol. 9, no. 1, pp. 66–72.
6. Belov O.A., Berdnikova N.A., Babkin A.V., Kozlov M.V., Belov D.A. Composite shape-generating tool set for spacecraft antennae reflector manufacturing. *Aerospace MAI Journal*, 2017, vol. 24, no. 2, pp. 115–122.
7. Temam R. *Navier–Stokes equations: theory and numerical analysis*. Amsterdam New York, NorthHolland Publishing Company, 1977, 454 p.
8. Shlikhting G. *Teoriya pogranichnogo sloya* (Boundary layer theory), Moscow, Nauka, 1974, 711 p.
9. Pukhnachev V.V. *Uspekhi mekhaniki*, 2006, vol. 4, no. 1, pp. 6–76.
10. Ladyzhenskaya O.A. *Matematicheskie voprosy dinamiki vyazkoi neszhimaemoi zhidkosti* (Mathematical issues of viscous incompressible liquid dynamics), Moscow, Nauka, 1970, 288 p.

11. Brinkman H.C. On the permeability of media consisting of closely packed porous particles. *Flow, Turbulence and Combustion*, 1949, pp. 81–86. DOI: 10.1007/bf02120318
12. Auriault J.L. On the domain of validity of Brinkman's equation. *Transport in Porous Media*, 2009, vol. 79, no. 2, pp. 215–223. DOI: 10.1007/s11242-008-9308-7
13. Babkin V.A. *Izvestiya RAN. Mekhanika zhidkosti i gaza*, 2002, no. 4, pp. 90–97.
14. Leont'ev N.E. *Izvestiya RAN. Mekhanika zhidkosti i gaza*, 2014, no. 2, 107–112.
15. Peyret R., Taylor T.D. *Computational Methods for Fluid Flow*. Springer - Verlag, New York, Heidelberg Berlin.
16. Wang C.Y. Exact solutions of the Steady-State Navier-Stokes equations. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 1991, vol. 23, pp. 159–177.
17. Rajagopal K.R. On a hierarchy of approximate models for flows of incompressible fluids through porous solids. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 2007, vol. 17, no. 2, pp. 215–252. DOI: 10.1142/S0218202507001899
18. Tam C.K.W. The drag on a cloud of spherical particles in low Reynolds number flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 1969, vol. 38, no. 3, pp. 537–546. DOI: 10.1017/S0022112069000322
19. Fefferman C.L. *Existence and Smoothness of the Navier-Stokes equation*. The Millennium Prize Problems, Clay Mathematics Institute, Cambridge. 2006, pp. 57–67.
20. Loitsyanskii L.G. *Laminarnyi pogranchnyi sloi* (Laminar boundary layer), Moscow, Fizmatgiz, 1962, 480 p.
21. Kraev V.M. Present condition of unsteady turbulent flows study. *Aerospace MAI Journal*, 2016, vol. 23, no. 4, pp. 61–67.
22. Nikitin N.B., Makhrov V.P. Aerohydrodynamic characteristics estimation for a grid fin by means of numerical solving of Reynolds-averaged Navier-Stokes equations. *Aerospace MAI Journal*, 2009, vol. 16, no. 1, pp. 136–140.
23. Danilenko N.V., Kirenchev A.G. Vortex formation of gravity flows. *Aerospace MAI Journal*, 2018, vol. 25, no. 4, pp. 28–36.
24. Artamonova L.G., Radtsig A.N., Ryzhov Yu.A., Semenchikov N.V. et al. Research carried out at the MAI in the field of separated and jet flows around aircraft and their parts. *Aerospace MAI Journal*, 2005, vol. 12, no. 2, pp. 31–48.
25. Druzhinin G.V., Zakirov I.M., Bodunov N.M. *Bazisnye funktsii v priblizhennykh resheniyakh kraevykh zadach* (Basic functions in approximate solutions of boundary value problems), Kazan, Fən, 2000, 376 p.
26. Druzhinin G.V., Bodunov N.M. *Reshenie prikladnykh zadach aviatsionnoi tekhniki na osnove simmetrii differentsial'nykh uravnenii v chastnykh proizvodnykh* (Solution of applied problems in aircraft engineering based on the symmetry of partial differential equations), Kazan, KGTU, 2012, 288 p.

Редакторы *М.С. Винниченко, Е.Л. Мочина*  
Художественное оформление *В.И. Володиной, И.В. Романовой*  
Компьютерная верстка *О.Г. Лавровой*

Сдано в набор 18.12.19. Подписано в печать 02.03.20.  
Бумага писчая. Формат 60×84 1/8. Печать офсетная.  
Усл. печ. л. 28,60. Уч.-изд. л. 30,75. Тираж 103 экз. Заказ 1090/786.

Издательство МАИ  
(МАИ), Волоколамское ш., д. 4, Москва, А-80, ГСП-3 125993  
Типография Издательства МАИ  
(МАИ), Волоколамское ш., д. 4, Москва, А-80, ГСП-3 125993