

*На правах рукописи*



Сафронов Павел Андреевич

**ОПИСАНИЕ ПРОЦЕССА ДЕФОРМИРОВАНИЯ ИЗГИБАЕМЫХ  
ЭЛЕМЕНТОВ ИЗ СПЛАВА С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ С УЧЕТОМ  
РАЗНОСОПРОТИВЛЯЕМОСТИ МАТЕРИАЛА**

Специальность 01.02.04  
«Механика деформируемого твердого тела»

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата технических наук

Москва, 2019 г.

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (МАИ)

---

**Научный руководитель:** Доктор физико-математических наук, профессор **МОВЧАН Андрей Александрович.**

**Официальные оппоненты:** **ВОЛКОВ Александр Евгеньевич**, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры «Теории упругости» Санкт-Петербургского государственного университета (СПбГУ), г. Санкт-Петербург;

**НУШТАЕВ Дмитрий Владимирович**, кандидат технических наук, менеджер по моделированию клиентских процессов дирекции по техническому развитию и качеству АО «Северсталь Менеджмент», г. Москва.

**Ведущая организация:** ОАО «Национальный Институт Авиационных Технологий», г. Москва.

Защита диссертации состоится «05» июня 2019 г. в 16:30 на заседании диссертационного совета Д 212.125.05 в Московском авиационном институте (национальном исследовательском университете) по адресу: 125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, д.4.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке ФГБОУ ВО МАИ (НИУ) и на сайте [https://mai.ru/upload/iblock/0d2/Dissertatsiya\\_SafronovPA\\_s\\_podpisyu.pdf](https://mai.ru/upload/iblock/0d2/Dissertatsiya_SafronovPA_s_podpisyu.pdf)

Автореферат разослан «\_\_» апреля 2019 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета



Федотенков Г.В.

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы исследования** обусловлена высокими темпами развития современной авиационной и космической промышленности и необходимостью внедрения все более легких, прочных и безотказных устройств в конструкцию изделия. Отмеченным современным требованиям отвечают устройства, содержащие активные элементы из сплава с памятью формы (СПФ), благодаря уникальным свойствам которых, конструкция обладает широкими функциональными и кинематическими возможностями, а отсутствие механически подвижных частей делает ее более надежной.

Причина уникальных свойств этих материалов заключается в возможности протекания в них твердотельных термоупругих фазовых превращений и структурных переходов при выполнении ряда условий. В простейшем случае считается, что СПФ типа никелида титана может находиться в одном из двух фазовых состояний – аустенитном или мартенситном. Первое можно охарактеризовать как высокотемпературное фазовое состояние с высокосимметричной объемно-центрированной кубической кристаллической решеткой, в то время как последнее является низкотемпературным, характеризуется втрое меньшим модулем упругости, а структура кристаллической решетки – моноклинная, с искажениями. Термоупругий фазовый переход из аустенитного в мартенситное фазовое состояние при охлаждении образца из СПФ принято называть прямым фазовым переходом (ПФП). Если ПФП происходит в отсутствии внешних механических нагрузок, то в результате такого ПФП получится полностью сдвойникованный мартенсит, осредненная деформация представительного объема которого по отношению к исходному аустенитному состоянию равна нулю. Если ПФП происходит под действием не нулевых внешних механических нагрузок, то будут накапливаться фазовые деформации, девиатор которых соосен с девиатором действующего напряжения, а материал образца приобретет структуру раздвойникового ориентированного мартенсита. При этом, накапливаемая деформация ПФП может достигать величины 8%-10% для некоторых СПФ. Если нагреть образец из СПФ через интервал температур обратного фазового превращения (ОФП), то деформации ПФП полностью или частично снимаются, а образец «вспоминает» первоначальную форму. Помимо ПФП при ненулевых внешних нагрузках, задать начальную форму образцу из СПФ возможно путем его изотермического нагружения в мартенситном фазовом состоянии – явление мартенситной неупругости (МН). Данный процесс заключается в существенно нелинейном характере деформирования образца с самого начала его нагружения, обусловленном раздвойникованием и переориентацией мартенситных мезоэлементов.

Для проектирования устройства с активным элементом из СПФ необходимо предварительно решить соответствующие задачи, моделирующие термомеханическое поведение этих изделий в процессе их эксплуатации. На поведение рабочего тела из СПФ значительное влияние оказывает температурный режим, при котором происходит эксплуатация изделия. Происходящие в рабочем теле процессы могут быть условно разделены на 2 класса: изотермические и неизотермические. К первому можно отнести явление МН. Если предположить, что температура образца за счет теплообмена с окружающей средой не меняется в процессе его нагружения, то явление сверхупругости также можно отнести к классу изотермических процессов. К неизотермическому классу задач следует отнести явления прямого и обратного ФП, а также явление сверхупругости в общей постановке, учитывающей выделение и поглощение латентного тепла ФП. В свою очередь, решение задач о прямом и обратном ФП можно разделить на три группы. В простейшей постановке считается, что зависимости между напряжениями и характерными температурами ФП нет. Такая постановка задачи считается несвязной. Напротив, связанная постановка учитывает повышение характерных температур ФП вследствие роста механических напряжений, однако не учитывается обратное влияние фазовых переходов и структурных превращений на температурный режим изделия из СПФ. Такой подход правомерен в случае достаточно медленных процессов, когда температурные эффекты

фазовых и структурных превращений нивелируются за счет теплообмена с окружающей средой. Наконец, наиболее полной считается дважды связная термомеханическая постановка. Здесь, дополнительно учитывается и возможность поглощения или выделения латентного тепла ФП, а также диссипативные свойства СПФ.

Экспериментально установлено, что изотропные поликристаллические СПФ являются разносопротивляющимися материалами. Так, при одноосном нагружении образца из таких СПФ растягивающей и сжимающей нагрузкой, диаграммы деформирования будут демонстрировать значительное качественное и количественное различие как в случае МН, так и при ПФП. Помимо этого, характерные температуры ФП также оказываются чувствительными к виду напряженного состояния. Учитывая вышеизложенное, проектирование устройства с рабочим телом из СПФ, работающим на изгиб, требует решения соответствующих задач с учетом явления разносопротивляемости. Игнорирование данного свойства приведет к серьезным ошибкам при оценке напряженно-деформированного состояния (НДС) элемента, актуальных температур ФП, и в конечном счете может стать причиной неправильной работы или разрушения изделия. При этом, определяющие соотношения, позволяющие качественно и количественно верно устанавливать связь между основными переменными материала, такими как напряжения, деформации, параметр фазового состава и температура, дополнительно усложняются необходимостью учета явления разносопротивляемости. Таким образом, не только постановка, но и разработка подходов и алгоритмов поиска решения задач изгиба элементов из СПФ с учетом разносопротивляемости является актуальной проблемой механики деформируемого твердого тела.

#### **Степень разработки темы исследования**

Достаточно большое количество работ посвящено моделированию термомеханического поведения простейших элементов конструкций из СПФ, работающих на изгиб. При этом, явление разносопротивляемости учитывается крайне редко, а многие из этих работ посвящены моделированию поведения образцов из монокристаллических СПФ, для которых характерна анизотропия механических свойств, влияние которой в разы превосходит влияние разносопротивляемости на диаграммы деформирования.

Экспериментальному исследованию и теоретическому моделированию влияния параметров вида напряженного состояния на термомеханическое поведение изотропных СПФ посвящены работы Sittner P., Novak V., Liu Y., Xie Z., Van Humbeeck J., Delaey L., Gall K., Sechitoglu H., Chumlyakov Y.I. Kireeva I.V., Orgeas L., Favier D., Lim T.J., McDowell D.L., Lexcelent Ch., Boubakar M.L., Bouvet Ch., Calloch S., Lagoudas D.C., Auricchio F., Волкова А.Е., Емельяновой Е.В., Евард М.Е., Тихомировой К.А., Рогового А.А., Мишустина И.В., Мовчана А.А., Казариной С.А., Сильченко А.Л. и др.

Моделированию термомеханического поведения балок и пластинок из изотропных поликристаллических СПФ с учетом разносопротивляемости, а также их возможной потери устойчивости в состоянии сжатия посвящены работы Auricchio F., Sacco E., Morganti S., Flor D.L.S., Urbina C., Ferrando F., Young-Jin K., Chang-Ho L., Joung-Hun K., Reza M., Redginald D.R., Arash Y., Ken G., Жаворонка С.И., Нуштаева Д.В., Семенова В.Н., Сильченко Л.Г. и других. Большинство представленных решений демонстрируют отклик активного элемента конструкции при его изотермическом нагружении в рамках явления сверхупругости, при этом, для учета явления разносопротивляемости предполагается использование аналогов теории пластического течения, что приводит к возникновению серьезных ограничений на моделирование явления накопления деформаций ПФП.

#### **Цели и задачи работы**

1. Постановка задач механики для СПФ с учетом их разносопротивляемости на случай изгиба в рамках модели нелинейного деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях.

2. Разработка методик анализа НДС активных элементов конструкций, выполненных из разносопротивляющихся СПФ.

3. Анализ влияния разносопротивляемости, разномодульности и неоднородности упрочнения мартенситной части представительного объема СПФ на решение рассматриваемых задач.

4. Численно - аналитическое решение задач об изотермическом нагружении в мартенситном фазовом состоянии и о ПФП в процессе охлаждения под действием постоянной внешней нагрузки в рамках положений об активных процессах пропорционального нагружения (АППН) для балок сплошного прямоугольного сечения и пластинок малой постоянной толщины из СПФ с учетом разносопротивляемости.

5. Численное решение задачи о прямом термоупругом мартенситном превращении в балке из СПФ с учетом разносопротивляемости этих материалов в связанной термомеханической постановке.

### **Научная новизна**

1. Разработаны алгоритмы анализа НДС активных элементов конструкций, выполненных из СПФ и работающих на изгиб. Представленные алгоритмы могут быть использованы при решении задач о ПФП в связанной термомеханической постановке в балках и пластинках из СПФ с учетом разносопротивляемости этих материалов.

2. Впервые на основе модели нелинейного деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях с учетом свойства разносопротивляемости получено численное решение задач об изотермическом нагружении балок и пластинок монотонно возрастающим изгибающим моментом в режиме МН. Выполнен учет явления разносопротивляемости растяжению и сжатию для СПФ, решение получено как с учетом, так и без учета упругой составляющей полных деформаций, исследовано влияние упругой разномодульности на полученное решение.

3. Впервые на основе той же модели поведения СПФ получено решение задач о ПФП в пластинке и балке под действием постоянного изгибающего момента в рамках положений об АППН. Выполнен учет свойства разносопротивляемости этих материалов, показано влияние упругой разномодульности на полученное решение.

4. На основе той же модели получено численное решение задачи о ПФП в балке в связанной термомеханической постановке. Выполнен учет явления разносопротивляемости этих материалов, в том числе выполнен учет влияния вида НДС на характерные температуры ФП. Установлено влияние неоднородности упрочнения мартенситной части представительного объема разносопротивляющегося СПФ.

### **Теоретическая и практическая значимость работы**

Полученные в рамках настоящего диссертационного исследования решения задач учитывают чрезвычайно широкий круг наиболее актуальных явлений и свойств, характерных для СПФ, в том числе разносопротивляемость и неоднородное упрочнение мартенситной части представительного объема материала. Практическое значение работы связано с тем, что полученные в диссертации результаты позволяют:

1. Устанавливать рекомендуемый и допускаемый уровни внешних термомеханических нагрузок при переводе в активное состояние элемента конструкции из разносопротивляющегося СПФ;

2. Устанавливать актуальную кривизну (перемещения) на этапе холостого хода активного элемента из разносопротивляющегося СПФ;

3. Рационально выбирать материал и геометрические параметры активного элемента будущего устройства исходя из необходимости обеспечения потребных величин прочности и жесткости, а также массово-габаритных характеристик конечного изделия.

Настоящее диссертационное исследование выполнено в том числе при поддержке РФФИ, проект №17-01-00216.

Полученные в ходе диссертационного исследования результаты позволили разработать методику, содержащую общие рекомендации и указания по разработке и внедрению в существующие конструкции воздухозаборников турбореактивных двигателей, устройства саморегулирования формы входной части воздухозаборника, способного адаптироваться как к штатным, так и нештатным режимам полета летательного аппарата (ЛА), а также значительно повышать эффективность работы силовой установки на больших скоростях. Данное положение подтверждается Актом о внедрении результатов диссертационного исследования на предприятии ПАО «Компания «Сухой» «ОКБ Сухого».

#### **Методология и методы исследования**

1. Модель нелинейного деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях, дополненная учетом разнородности СПФ и неоднородности упрочнения мартенситной части представительного объема СПФ.

2. Аналитические методы решения задач механики СПФ, основанные на положении об АППН.

3. Явные и неявные схемы пошагового численного решения связанных задач механики СПФ в приращениях.

#### **Положения, выносимые на защиту:**

1. Постановка задач изгиба для активных элементов конструкций, выполненных из СПФ с учетом разнородности этого материала на основе модели нелинейного деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях.

2. Разработанные алгоритмы анализа НДС активных элементов конструкций из разнородных СПФ в связанной и несвязанной термомеханических постановках.

3. Решение задач о чистом/ цилиндрическом изотермическом изгибе балок/ пластинок из СПФ с учетом разнородности в мартенситном состоянии под действием монотонно возрастающей нагрузки.

4. Решение задач о ПФП в балке/ пластинке из разнородного СПФ под действием постоянного изгибающего момента в рамках положений об АППН.

5. Решение задачи о ПФП в балке из разнородного СПФ под действием постоянного изгибающего момента в связанной термомеханической постановке, с учетом неоднородности упрочнения представительного объема материала балки в процессе ФП.

**Степень достоверности и апробация результатов работы.** Достоверность результатов, полученных в рамках диссертационного исследования, подтверждается следующими положениями:

1. Решение всех задач настоящей диссертационной работы выполнено в рамках современной нелинейной модели деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях. Используемая модель позволяет качественно и количественно верно описывать широкий класс явлений, характерных для адаптивных материалов. Данное положение подтверждается многократной апробацией данной модели при решении краевых задач термомеханики СПФ, а полученные результаты отвечают соответствующим экспериментальным данным.

2. При численном моделировании явлений мартенситной неупругости и прямого мартенситного фазового превращения в рамках положения об АППН, дифференциальное соотношение для неупругих деформаций сходится к конечному алгебраическому уравнению. В результате, система разрешающих соотношений представлена нелинейными алгебраическими уравнениями. Решение такой системы легко проверяется.

3. Достоверность решения задачи о ПФП в балке связанной термомеханической постановке подтверждается использованием многократно апробированного метода пошагового интегрирования Эйлера в неявной форме, а также установленной сходимостью

в предельном случае полученного численного решения к точному решению аналогичной задачи, полученному в рамках положений об АППН.

Основные результаты диссертационной работы апробированы на:

XI Всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Казань, 20-24 августа 2015г.; 5-й Всероссийской научной конференции с международным участием «Механика композиционных конструкций, сложных и гетерогенных сред». Москва, 15-17 декабря 2015г.; 6-й Всероссийской научной конференции с международным участием «Механика композиционных конструкций, сложных и гетерогенных сред» имени И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского. Москва, 16-18 ноября 2016г.; XLIV Международной молодежной научной конференции «Гагаринские чтения». Москва, 17-20 апреля 2018г.; 3-й Международной конференции «Деформирование и разрушение композиционных материалов и конструкций», посвященной 80-летию ИМАШ РАН. Москва, 23-25 октября 2018г.; 8-й Всероссийской научной конференции с международным участием «Механика композиционных конструкций, сложных и гетерогенных сред» имени И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского. Москва, 18-19 декабря 2018г.

**Публикации.** По результатам диссертационной работы опубликовано 12 работ, в том числе 5 в рецензируемых изданиях из перечня ВАК РФ и 1 входящая в базу Scopus.

**Структура и объем диссертационной работы.** Диссертационная работа изложена на 121 странице. Состоит из введения, трех глав, заключения и списка используемой литературы из 118 наименований из Российских и зарубежных источников. Иллюстрирована 65 рисунками и содержит 9 таблиц.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обосновывается актуальность диссертационной работы, проводится анализ состояния рассматриваемых вопросов, определяется цель и задачи диссертационного исследования, научная новизна, теоретическая и практическая значимость, а также положения, выносимые на защиту.

Глава 1 настоящего диссертационного исследования посвящена литературному обзору явления разносопротивляемости СПФ и моделей, способных предсказывать термомеханическое поведение этих материалов. В данной главе выявлен существенно различный уровень влияния свойства разносопротивляемости на основные механизмы накопления неупругих деформаций – фазовый и структурный. Показано, что свойство разносопротивляемости характерно для изотропных СПФ с поликристаллической микроструктурой, в то время как описание термомеханического поведения монокристаллических СПФ прежде требует учета анизотропии механических свойств. Представлен краткий обзор актуальных моделей поведения СПФ, а также показаны наиболее удачные модификации этих моделей для учета свойства разносопротивляемости. Подробно рассмотрены модели и модификации следующих авторов: Qidwai M. A., Lagoudas, Lexcellent C., Bouvet C., Lubliner J., Auricchio F., Taylor R. L., Gillet Y., Patoor E., Rapięski V., которые наиболее часто используются при решении краевых задач изгиба элементов из СПФ с учетом разносопротивляемости. В представленных работах учет явления разносопротивляемости основан на внедрении понятия потенциала неупругих деформаций. Таким образом, для описания процесса накопления фазово-структурных деформаций образцов из СПФ с учетом разносопротивляемости используются аналоги теории пластического течения, которые не позволяют правильно учитывать некоторые принципиально важные явления, характерные для процессов деформирования, сопровождающих фазовые переходы в СПФ, например, ориентированного превращения. В качестве альтернативы рассматривается модель нелинейного деформирования СПФ при

фазовых и структурных превращениях, способная качественно и количественно верно описывать чрезвычайно широкий круг процессов, характерных для данных материалов. Более того, простейшая модификация данной модели позволила выполнить учет свойства разносопротивляемости, причем удалось реализовать как различную степень влияния данного явления на процессы накопления фазовых и структурных деформаций, так и влияние на характерные температуры ФП.

Глава 2 посвящена решению задач о изотермическом чистом/ цилиндрическом изгибе балок/ пластинок из СПФ с учетом разносопротивляемости этого материала в мартенситном фазовом состоянии.

Параграф 2.1 посвящен решению задачи о чистом изгибе балки сплошного прямоугольного сечения из СПФ с учетом свойства разносопротивляемости.

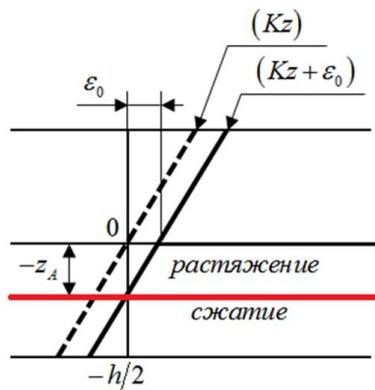


Рис. 1. Положение НП

Принимаются кинематические гипотезы Бернулли-Эйлера. В силу разносопротивляемости СПФ, положение нейтральной плоскости (НП, на которой отсутствуют полные продольные осевые деформации) не совпадает с плоскостью геометрической симметрии балки, рис. 1, а гипотеза плоских сечений (ГПС) принимает вид:

$$\varepsilon = y\xi + \varepsilon_0, \quad \varepsilon_0 = ua. \quad (1)$$

Здесь,  $y, \xi$  - безразмерная кривизна и безразмерная поперечная координата ( $y = kh, \xi = z/h$ ),  $a$  - безразмерная координата положения НП.

За положительное значение ( $a > 0$ ) принято смещение НП в сторону сжатых волокон.

В рассматриваемой постановке задачи упругие деформации полагаются малыми по отношению к структурным и не учитываются, а процесс нагружения балки является активным и пропорциональным. Таким образом, справедливы положения об АППН из которого получаются следующие выражения для деформаций:

$$\varepsilon = \begin{cases} \rho_t \varphi_t(s), & s > 0, \\ \rho_c \varphi_c(ss_{ic}), & s < 0, \end{cases}; \quad \rho_d = \begin{cases} \rho_t, & s > 0, \\ \rho_c, & s < 0, \end{cases}; \quad \sigma_0 = \begin{cases} \sigma_{0t}, & s > 0, \\ \sigma_{0c}, & s < 0, \end{cases}; \quad \alpha = \begin{cases} \alpha_t, & s > 0, \\ \alpha_c, & s < 0. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь и далее по тексту, величины, обозначенные нижним индексом «t» - относятся к растяжению, индексом «c» - к сжатию. Приняты следующие безразмерные обозначения:  $s = \sigma/\sigma_{0t}$  - безразмерные продольные напряжения,  $\varphi(s) = 1 - \exp(-s^\alpha)$ ,  $s \geq 0$  - безразмерная функция распределения интенсивности микронапряжений (ФРИМ), которая доопределяется нечетным образом на случай отрицательного аргумента ( $\varphi_c(x) = -\varphi_c(|x|), x < 0$ ),  $\rho_d, \sigma_0, \alpha$  - параметры материала, определяемые непосредственно из эксперимента на МН,  $s_{ic} = \sigma_{0t}/\sigma_{0c}$  - безразмерный параметр. В рамках одномерной по напряжениям постановки, вид напряженного состояния при переходе через НП меняется скачкообразно, а в пределах верхней и нижней частей сечения не меняется вовсе. Поэтому, зависимость параметров материала от вида напряженного состояния правомерно представить в виде кусочно-постоянной зависимости (2). Выражая из (2) безразмерные значения напряжений как функции поперечной координаты

$$s = \begin{cases} \varphi_t^{-1}(y(\xi + a)/\rho_t), & 0.5 \geq \xi \geq -a, \\ -s_{ic}^{-1} \varphi_c^{-1}(-y(\xi + a)/\rho_c), & -0.5 \leq \xi < -a \end{cases} \quad (3)$$

и подставляя полученные выражения в уравнения равновесия для осевой силы и момента, получаем два алгебраических уравнения, позволяющие для каждого безразмерного значения момента  $\mu$  найти значения двух неизвестных  $y$  и  $a$ , определяющие кривизну и положение нейтральной плоскости.

$$\begin{cases} \mu = \int_{-a}^{0.5} \phi_t^{-1} \left( \frac{y(\xi+a)}{\rho_t} \right) \xi d\xi - \frac{1}{s_{ts}} \int_{-0.5}^{-a} \phi_c^{-1} \left( -\frac{y(\xi+a)}{\rho_c} \right) \xi d\xi, \\ s_{tc} \int_{-a}^{0.5} \phi_t^{-1} \left( \frac{y(\xi+a)}{\rho_t} \right) d\xi - \int_{-0.5}^{-a} \phi_c^{-1} \left( -\frac{y(\xi+a)}{\rho_c} \right) d\xi = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь, функции  $\phi_t^{-1}, \phi_c^{-1}$  обратные к  $\phi_t, \phi_c$ ,  $\mu = M/\sigma_{0t}bh^2$  - безразмерный изгибающий момент. Последнее уравнение блока (4) имеет особенность при малых значениях напряжений. Исследование данного уравнения в области  $s \rightarrow 0$  с использованием представления ФРИМ в виде ряда Тейлора позволило установить положение НП в начальный момент нагружения балки:

$$a = \begin{cases} 0,5 \text{ при } \bar{\alpha}_t > \bar{\alpha}_c, (\alpha_t < \alpha_c), \\ 0,5 \frac{1-\bar{D}}{1+\bar{D}}, \text{ при } \bar{\alpha}_t = \bar{\alpha}_c, (\alpha_t = \alpha_c), \bar{D} = \left( s_{tc} \left( \frac{\rho_c}{\rho_t} \right)^{1/\alpha} \right)^{\alpha/(\alpha+1)}, \\ -0,5 \text{ при } \bar{\alpha}_t < \bar{\alpha}_c, (\alpha_t > \alpha_c). \end{cases} \quad (5)$$

Здесь,  $(1/\alpha_c) = \bar{\alpha}_c$ ,  $(1/\alpha_t) = \bar{\alpha}_t$ . Результаты решения рассматриваемой задачи приведены ниже и представляют собой кривые  $\mu - y$ , рис. 2, и положение НП  $a - y$ , рис. 3. Здесь, кривые 1 и 6 построены с учетом и без учета явления разнсопротивляемости (материалы 1 и 6). Материал 1 предполагает  $\rho_t = 0.0286$ ,  $\rho_c = 0.0132$ ,  $\sigma_{0t} = 144.7 \text{ МПа}$ ,  $\sigma_{0c} = 216.6 \text{ МПа}$ ,  $\alpha_t = 3.847$ ,  $\alpha_c = 4.88$  и соответствует равноатомному никелиду-титана, материал 6 отвечает  $\rho_c = \rho_t = 0.0286$ ,  $\sigma_{0c} = \sigma_{0t} = 144.7 \text{ МПа}$ ,  $\alpha_t = \alpha_c = 3.847$ . Кривые 2-4 показывают степень влияния каждого из параметров материала  $\rho, \sigma_0, \alpha$  на решение задачи. Им соответствуют материалы 2-4, отвечающие разнсопротивляющемуся материалу 1 за исключением одного из параметров:  $\rho_c = 0.0209$  - для материала 2,  $\sigma_{0c} = 180.65 \text{ МПа}$  - для 3-го и  $\alpha_c = 4.2635$  - для 4-го. Материал 5 отвечает парам  $\rho_t = 0.0286, \rho_c = 0.019$ ,  $\sigma_{0t} = 144.7 \text{ МПа}, \sigma_{0c} = 190.6 \text{ МПа}$ ,  $\alpha_t = 3.847, \alpha_c = 2.2$  и соответствует разнсопротивляющемуся СПФ, у которого наблюдается пересечение диаграмм МН в области малых деформаций.

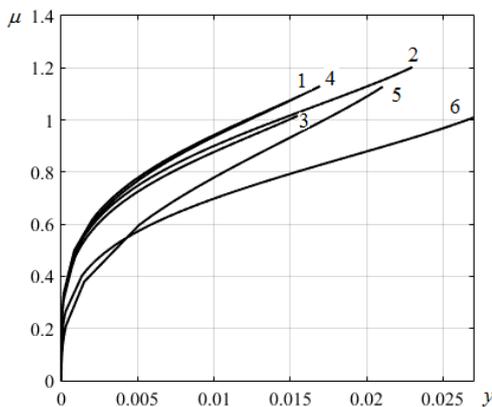


Рис. 2. Кривые  $\mu - y$

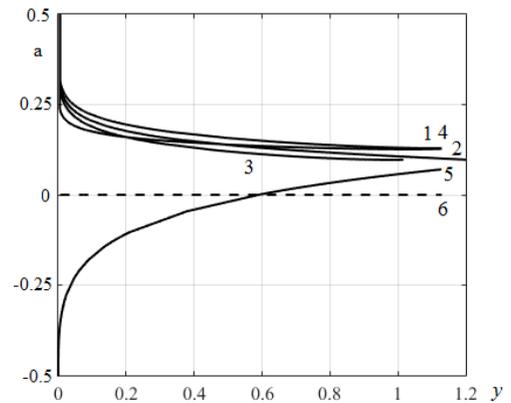


Рис. 3. Кривые  $a - y$

Таким образом, разница в кривых 1 и 6 показывает, что явление разнсопротивляемости оказывает значительное влияние на податливость и,

соответственно, на кривизну балки в процессе ее изгиба в режиме МН. При этом, положение нейтральной плоскости сильно отклоняется от плоскости симметрии балки (до 15% по высоте сечения). В рамках рассматриваемой постановки задачи установлено, что положение НП в начальный момент стремится к одной из границ поперечного сечения балки и определяется соотношением показателей степени в распределении Вэйбулла, (5).

Параграф 2.2 посвящен решению задачи о чистом и консольном изгибе балки из СПФ с учетом свойства разнсопротивляемости в режиме МН. Все гипотезы, принятые в предыдущем параграфе справедливы и здесь, кроме одной: учитывается упругая составляющая полных продольных деформаций:

$$\varepsilon = (s/e_{mi}) + \rho_i \varphi_i(s), s > 0; \quad \varepsilon = (s/e_{mc}) + \rho_c \varphi_c(ss_{tc}), s < 0. \quad (6)$$

Здесь  $e_{mi} = E_{Mi}/\sigma_{0i}$ ,  $e_{mc} = E_{Mc}/\sigma_{0i}$  - безразмерные значения модулей Юнга в мартенситном фазовом состоянии, а ФРИМ вновь доопределяется нечетным образом на случай отрицательного аргумента ( $\varphi_c(x) = -\varphi_c(|x|), x < 0$ ). Параметры материала предполагают кусочно-постоянное представление (2). Система разрешающих соотношений включает в себя ГПС (1), соотношения для полных продольных деформаций (6) и два уравнения: для изгибающего момента и равновесия в проекции на продольную ось. Последние два получаются простым интегрированием продольных напряжений по соответствующим областям сечения балки. При решении данной задачи удобно использовать «обратный» алгоритм. Задается массив значений безразмерной кривизны  $y = \{0..y_{\max,\varepsilon}\}$  (величина  $y_{\max,\varepsilon}$  отвечает достижению  $\varepsilon = \rho_i$  или  $\varepsilon = \rho_c$  на верхней или нижней границе сечения). Определяется  $\varepsilon_j$  на основе ГПС (1) для старой  $a_{j-1}$ . Из (6) находим  $s_j(\xi)$ . Уточняем положение НП  $a_j$  согласно уравнению равновесия, иницируем итерационный процесс начиная с определения  $\varepsilon_j$  до  $a_j$ , пока разница  $|a_{j,i} - a_{j,i-1}|$  не станет малой величиной. Только тогда следует определять изгибающий момент  $\mu_j$  и переходить к следующему  $y_{j+1}$ .

На рис. 4 показаны зависимости  $y - \mu$ . Кривая 1 соответствует разнсопротивляющемуся СПФ из предыдущего параграфа, пунктирная кривая – решение без учета разнсопротивляемости. Кривые 2-4 демонстрируют влияние каждого из параметров материала на решение задачи и соответствуют материалам 2-4 из предыдущего параграфа. Установлено, что максимальное отличие в кривизне балок при чистом изгибе достигает 40-70% (большие значения соответствуют большей величине  $\mu$ ) в случае одинаково- и разнсопротивляющегося материала.

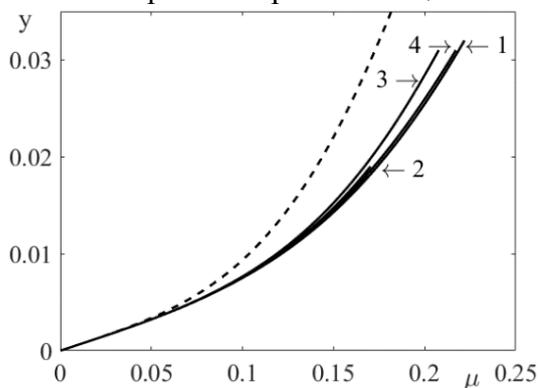


Рис. 4. Кривые  $y - \mu$

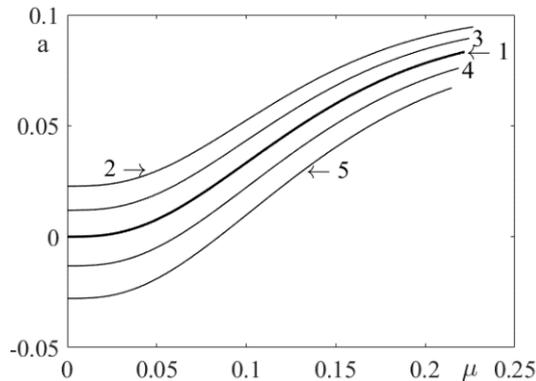


Рис. 5. Кривые  $a - \mu$

На рис. 5 показано положение НП в процессе нагружения балки. Кривые 1-5 построены для  $e = 1; 1.2; 1.1; 0.9; 0.8$  соответственно, и отвечают разнсопротивляющемуся материалу 1 из предыдущего параграфа. Установлено, что положение НП в начальный момент нагружения определяется отношением модулей упругости

$$a_0 = 0.5(\sqrt{e} - 1)/(\sqrt{e} + 1), \quad e = e_{mc} / e_{mt}, \quad (7)$$

что подтверждается результатами анализа уравнения равновесия при  $s \rightarrow 0$ . Таким образом, не учет упругих деформаций, а также разномодульности СПФ при рассмотрении задач изгиба приведет к неверным заключениям о НДС активных элементов конструкций.

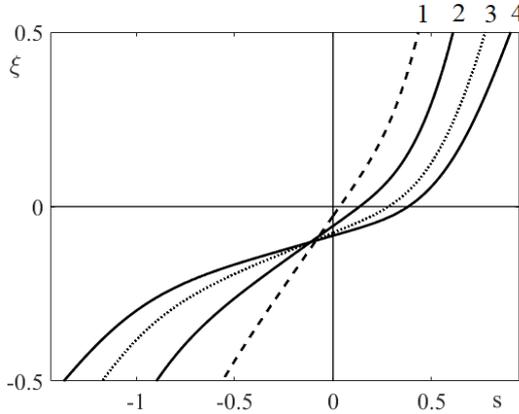


Рис. 6. Кривые  $s - \xi$ ,  $\mu = (0.2, 0.4, 0.7, 1)\mu_{\max}$

На рис. 6 показаны эпюры безразмерных напряжений 1-4 с учетом асимметрии кривых деформирования СПФ (материал 1, без разномодульности) в различные моменты нагружения  $\mu = (0.2, 0.4, 0.7, 1)\mu_{\max}$  соответственно. Установлено, что эпюра нормальных продольных напряжений в сечении балки демонстрирует значительную асимметрию даже для малых  $\mu = 0,2\mu_{\max}$  со смещением плоскости  $s(\xi) = 0$  в нижнюю часть сечения балки, в сторону сжатых волокон.

Параграф 2.3 посвящен решению задачи о цилиндрическом изгибе пластинки из СПФ с учетом свойства разносопротивляемости в режиме МН. Принимается набор гипотез Крихгофа-Лява, а также учитываются упругие деформации.

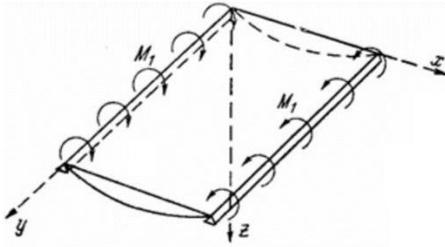


Рис. 7. Цилиндрический изгиб пластинки

Принимается плоское деформированное состояние (ПДС) в поперечном направлении (ось Y, рис. 7):

$$\varepsilon_y = \varepsilon_y^e + \varepsilon_y^{phst} = 0. \quad (8)$$

Уравнение (9) устанавливает вид полных продольных деформаций, а соотношения (8) позволяют записать выражение для  $s_y$  в неявном виде:

$$\varepsilon_x = \begin{cases} \left( (s_{xt} - \nu s_{yt}) / e_t \right) + 0,5 \rho_t \left( (2s_{xt} - s_{yt}) / s_{it} \right) \varphi_t(s_{it}), s_{it} = \sqrt{\sigma_{xt}^2 + \sigma_{yt}^2 - \sigma_{xt} \sigma_{yt}} / \sigma_{0t}, s_x > 0, \\ \left( (s_{xc} - \nu s_{yc}) / e_c \right) + 0,5 \rho_c \left( (2s_{xc} - s_{yc}) / s_{ic} \right) \varphi_c(s_{ic}), s_{ic} = \sqrt{\sigma_{xc}^2 + \sigma_{yc}^2 - \sigma_{xc} \sigma_{yc}} / \sigma_{0t}, s_x < 0, \end{cases} \quad (9)$$

$$s_y = \begin{cases} s_{xt} \left( (\nu + 0,5 B_{1t} e_t) / (1 + B_{1t} e_t) \right), B_{1t} = \rho_t \varphi_t(s_{it}) (1/s_{it}), s_x > 0, \\ s_{xc} \left( (\nu + 0,5 B_{1c} e_c) / (1 + B_{1c} e_c) \right), B_{1c} = \rho_c \varphi_c(s_{ic}) (1/s_{ic}), s_x < 0. \end{cases}$$

Система разрешающих соотношений включает в себя ГПС (1), соотношения для  $\varepsilon_x$  и  $s_y$  (9) и два уравнения: для изгибающего момента и равновесия в проекции на продольную ось, которые получаются простым интегрированием продольных напряжений  $s_x$  по соответствующим областям сечения пластинки. Алгоритм решения данной системы очень схож с алгоритмом, представленным в предыдущем параграфе. Отличие заключается лишь на этапе определения  $s_{x,j}(\xi)$ : необходимо организовать итерационный процесс определения  $s_{x,j}(\xi)$  и  $s_{y,j}(\xi)$  до тех пор, пока разница для очередного приближения  $|s_{x,j}(\xi) - s_{x,j-1}(\xi)|$  не станет малой величиной. В данной задаче, величине  $y_{\max}$  разрешено превышать  $y_{\max,\varepsilon}$  (соответствует достижению  $\varepsilon^{st} = \rho_t$  или  $\varepsilon^{st} = \rho_c$  на верхней или нижней границе сечения). Таким образом, использовано следующее соотношение  $y_{\max} = 1,2 y_{\max,\varepsilon}$ .

На рис. 8 показаны кривые  $y - \mu$ . Как и при решении предыдущих задач о изгибе балки, установлено значительное влияние разнсопротивляемости на податливость пластинки (кривая 1) по отношению к одинаково сопротивляющемуся материалу (кривая 5). Кривые 2-4 показывают степень влияния каждого из параметров материала  $\rho, \sigma_0, \alpha$  на решение задачи. На рис. 9 показана история изменения положения НП в процессе нагружения пластинки. Кривые 1-3 отвечают  $e = 1.2; 1; 0.8$ . В ходе численного решения задачи, а также в результате исследования уравнения равновесия при  $s_x \rightarrow 0$  установлено, что положение НП в начальный момент нагружения вновь определяется отношением модулей упругости материала в мартенситном фазовом состоянии, (7). Штрихпунктирная кривая 4 демонстрирует изменение положения НП в балке при прочих равных.

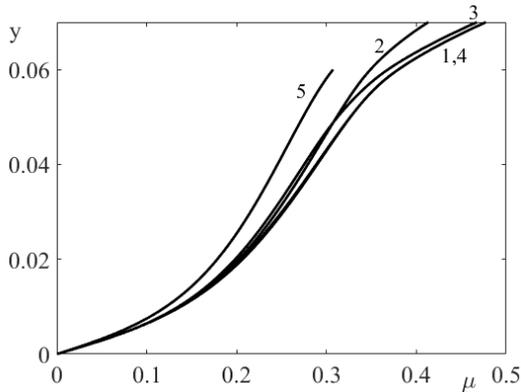


Рис. 8. Кривые  $y - \mu$

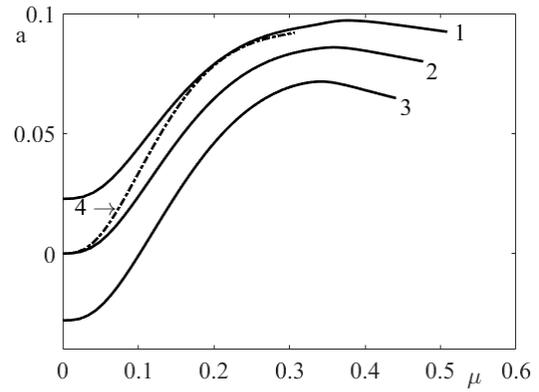


Рис. 9. Кривые  $a - \mu$

На рис. 10 показано отношение  $s_y/s_x$  в сечении пластинки для  $\mu = 0, 2\mu_{\max}$  (штриховая кривая) и  $\mu = \mu_{\max} = 0.4772$  (сплошная кривая). Установлено, что для разнсопротивляющегося СПФ отношение компонент тензора напряжений зависит от соотношения упругих и структурных деформаций в представительном объеме СПФ и изменяется в диапазоне  $0,3 \leq s_y/s_x < 0,5$ , а также значительно отличается от классического  $s_y = \nu s_x$  для упругих материалов (кроме единственной точки – на НП).

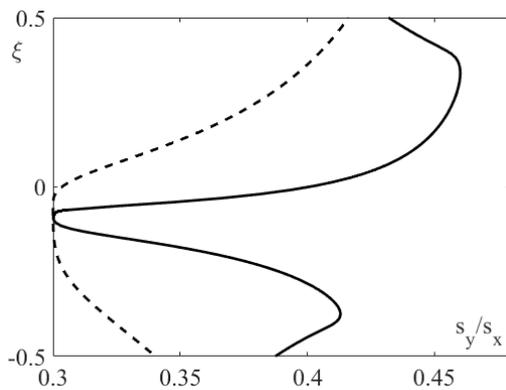


Рис. 10. Кривые  $(s_y/s_x) - \xi$ .  $\mu = 0, 2\mu_{\max}$  (---),  
 $\mu = \mu_{\max} = 0.4772$  (—)

Исследование нижнего блока уравнений (9) при  $s_x \rightarrow 0$  позволило выявить отношение  $s_y/s_x$  в окрестности НП:

$$\lim_{s_x \rightarrow +0} (s_y/s_x) = \lim_{s_x \rightarrow -0} (s_y/s_x) = \nu, \quad (10)$$

где  $\nu$  - коэффициент Пуассона. При этом, параметр вида девиатора напряжений (ПВДН) имеет различные пределы при стремлении к НП со стороны сжатых и растянутых волокон:

$$\lim_{s_x \rightarrow 0} \mu_\sigma = \text{sign}(s_x) \frac{3}{2} \frac{\nu(2\nu^2 - 5\nu + 2)}{(\nu^2 - \nu + 1)^{3/2}}. \quad (11)$$

Помимо этого, отмечено незначительное изменение ПВДН в растянутой и сжатой частях сечения пластинки, допускается процедура осреднения ПВДН в данных зонах. В связи с этим,  $\rho, \sigma_0, \alpha$  вновь принимают кусочно-постоянный вид (2).

Глава 3 посвящена моделированию накопления неупругих деформаций ПФП в балках и пластинках из СПФ с учетом разнсопротивляемости данного материала. Рассматриваются несвязная и связная термомеханические постановки. В рамках первой установлено, что система разрешающих соотношений состоит из нелинейных

алгебраических уравнений. В рамках связной постановки система разрешающих соотношений имеет сложный дифференциальный вид и требует применения численных методов решения входящих в нее дифференциальных уравнений.

Параграф 3.1 посвящен решению задачи о ПФП в балке из СПФ с учетом разнсопротивляемости под действием постоянного изгибающего момента  $\mu_0$ . Принимается набор гипотез Бернулли-Эйлера. Упругие деформации полагаются малыми по отношению к структурным. Принимается несвязная постановка задачи, таким образом справедливы положения об АППН, а фазовые деформации могут быть получены по приведенным ниже конечным соотношениям:

$$\varepsilon = \begin{cases} q\rho_t\varphi_t(s), \varphi_t(\sigma/\sigma_{0t}) = F_{1t}(\sigma), s > 0, \\ q\rho_c\varphi_c(ss_{1c}), \varphi_c(\sigma/\sigma_{0c}) = F_{1c}(\sigma), s < 0, \end{cases}; \rho_d = \begin{cases} \rho_t, s > 0, \\ \rho_c, s < 0, \end{cases}; \sigma_0 = \begin{cases} \sigma_{0t}, s > 0, \\ \sigma_{0c}, s < 0. \end{cases} \quad (12)$$

Здесь, в качестве ФРИМ используется нормальное распределение  $F_1(\sigma) = erf(\sigma/\sqrt{2})$ ,

$\rho_d, \sigma_0$  - параметры материала, определяемые непосредственно из экспериментов на ПФП. Зависимость параметров материала от вида напряженного состояния правомерно представляется кусочно-постоянной зависимостью (12), поскольку сам вид напряженного состояния меняется скачкообразно при переходе через НП. Система разрешающих соотношений включает в себя ГПС (1), соотношения для продольных деформаций  $\varepsilon$  (12) и два уравнения: для изгибающего момента и равновесия в проекции на продольную ось, которые получаются простым интегрированием продольных напряжений  $s$  по соответствующим областям сечения балки. В рамках рассматриваемой постановки задачи с применением положений об АППН и положением о малости упругих деформаций, удалось установить явный линейный характер зависимости кривизны балки от параметра фазового состава  $y = q\lambda(\mu)$ . Таким образом, напряжения и положение НП в процессе ПФП в рамках рассматриваемой постановки не меняются. Материал балки в начальный момент находится в аустенитном фазовом состоянии, а кривизна  $y_0 = 0$ , поскольку не учитываются упругие деформации. Поскольку  $y_0 = 0$ , уравнение равновесия в проекции на продольную ось требует дополнительного исследования, из которого удалось установить начальное положение НП, которое определяется только параметрами материала  $\rho_t, \rho_c, \sigma_{0t}, \sigma_{0c}$ :

$$a = 0,5(1 - \sqrt{D_1}) / (1 + \sqrt{D_1}), \quad D_1 = (\sigma_{0t}\rho_c) / (\sigma_{0c}\rho_t). \quad (13)$$

При решении данной задачи используется простой алгоритм: параметр фазового состава выступает в качестве параметра процесса и представляется в виде массива  $q_j = \{0..1\}$ , и, на основании  $y = q\lambda(\mu)$ , определяется актуальная кривизна балки  $y_j$ . Параметр  $\lambda(\mu)$  определяется из уравнения для изгибающего момента при условии, что положение НП в начальный момент определяется формулой (13) и не меняется в процессе охлаждения балки, а величина внешнего изгибающего момента  $\mu_0$  известна.

На рис. 11,12 показана кривизна балки  $y$  и положение НП  $a$  на момент окончания ПФП под действием момента  $\mu$ . Важно понимать, что каждая точка данных диаграмм представляет отдельный процесс ПФП под действием изгибающего момента  $\mu$ . Материал 4 предполагает  $\rho_t = 0.56, \rho_c = 0.0465, \sigma_{0t} = 169\text{МПа}, \sigma_{0c} = 189\text{МПа}$  и соответствует равноатомному никелиду-титана, материал 2 отвечает  $\rho_c = \rho_t = 0.56, \sigma_{0c} = \sigma_{0t} = 169\text{МПа}$ . Кривая 1 отвечает  $\rho_t = 0.56, \rho_c = 0.0465$  и  $\sigma_{0c} = \sigma_{0t} = 169\text{МПа}$  - материала 1, кривая 3 -  $\rho_c = \rho_t = 0.56$  и  $\sigma_{0t} = 169\text{МПа}, \sigma_{0c} = 189\text{МПа}$  - материала 3.

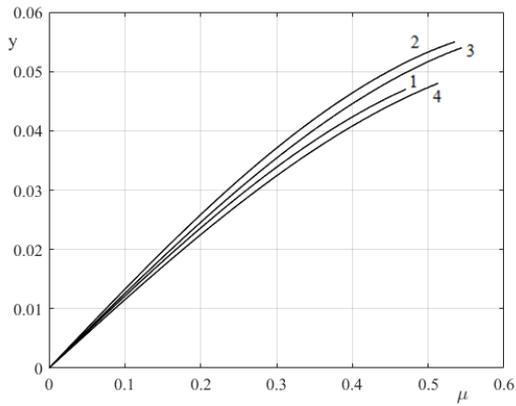


Рис. 11. Кривые  $y - \mu$

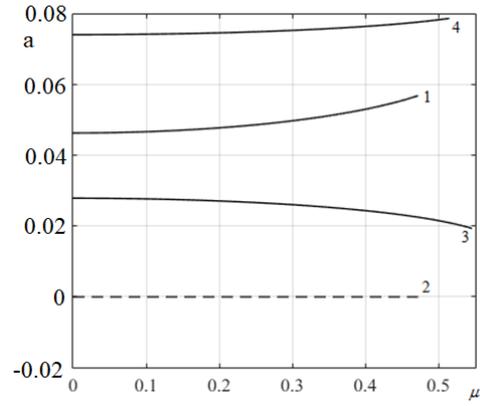


Рис. 12. Кривые  $a - \mu$

Таким образом, разница в кривых 4 и 2 показывает, максимальное отличие в кривизне балок на момент окончания ПФП под действием постоянного изгибающего момента, которое достигает 10-20% (большие значения соответствуют большей величине  $\mu$ ) в случае одинаково- и разносопротивляющегося материала. При этом, положение нейтральной плоскости значительно отклоняется от плоскости симметрии балки (до 16% от полувысоты сечения). Также установлено, что положение НП и распределение продольных напряжений не меняются в процессе ПФП в рамках жестко-фазово-структурного анализа.

Параграф 3.2 посвящен решению задачи о ПФП в балке из СПФ с учетом разносопротивляемости под действием постоянного изгибающего момента  $\mu_0$ . Набор гипотез принимается аналогичным предыдущему параграфу, кроме одной: учитывается упругая составляющая полных деформаций. С учетом данного положения, уравнения для полных продольных деформаций имеет вид:

$$\varepsilon = \begin{cases} (s_t/e_t(q)) + q\rho_t\varphi_t(s_t), e_t(q) = (E_t(q)/\sigma_{0t}), s > 0, \\ (s_c/e_c(q)) + q\rho_c\varphi_c(s_c), e_c(q) = (E_c(q)/\sigma_{0c}), s < 0, \end{cases}; \frac{1}{E_{t,c}(q)} = \frac{q}{E_{Mt,c}} + \frac{1-q}{E_{At,c}}. \quad (14)$$

Здесь предполагается осреднение по Рейсу для модуля упругости  $E(q)$  через параметр фазового состава и модули Юнга  $E_M, E_A$  в мартенситном и аустенитном фазовых состояниях соответственно. Параметры материала предполагают кусочно-постоянное представление (12) ввиду актуальности положений из предыдущего параграфа. Система разрешающих соотношений включает в себя ГПС (1), соотношения для полных продольных деформаций (14) и два уравнения: для изгибающего момента и равновесия в проекции на продольную ось, получение которых описано в параграфе 2.2. В отличие от предыдущей задачи, здесь, установить в явном виде зависимость  $y - q$  не удалось, однако, в процессе численного решения задачи установлен линейный характер данного соотношения. В начальный момент процесса материал балки находится в аустенитном фазовом состоянии и нагружается изгибающим моментом  $\mu$ . Удобно задавать начальное условие для  $\mu_0$  через  $\varepsilon_{00t}(\xi = 0,5)$  - начальную деформацию крайнего волокна балки ( $\varepsilon_{00t} = (0,1, 0,2, 0,5, 1)\%$ ):

$$\mu_0 = \varepsilon_{00t} (1/12) \cdot (2a_0^2 (e_{mt} - e_{mc}) - a_0 (e_{mt} + e_{mc}) + (e_{mc} - e_{mt})). \quad (15)$$

Установлено, что положение НП вновь определяется отношением модулей упругости (7). Распределение напряжений и деформаций в начальный момент процесса определяются из решения советующей упругой задачи ( $q_0 = 0, E(q_0) = E_A$ ). Предлагается следующий алгоритм решения задачи. Параметр фазового состава выступает в качестве параметра процесса и представляется в виде массива  $q_j = \{0..1\}$ . Задается малая величина  $\Delta y_j > 0$ , при этом  $y_j = y_{j-1} + \Delta y_j$ . Определяется  $\varepsilon_j$  на основе ГПС (1) для старой  $a_{j-1}$ . Из (14) находим

$s_j(\xi)$ . Уточняем положение НП  $a_j$  согласно уравнению равновесия, иницилируем итерационный процесс начиная с определения  $\varepsilon_j$  до  $a_j$ , пока разница  $|a_{j,i} - a_{j,i-1}|$  не станет малой величиной. Только тогда следует определять изгибающий момент  $\mu_j$  и сравнить с заданным  $\mu_0$ . На основании этого сравнения происходит коррекция малой величины  $\Delta\mu_j > 0$  и организуется итерационный процесс, пока разница  $|\mu_j - \mu_0|$  не станет малой величиной. Только тогда следует переходить к следующему шагу по  $q_{j+1}$ .

На рис. 13 показана зависимость  $y-q$ , которая оказалась линейной. Аналогично обозначениям предыдущего параграфа, кривые 4 и 2 демонстрируют различие в кривизне балок на случай учета и не учета явления разносопротивляемости соответственно.

На рис. 14 показана история изменения положения НП в процессе охлаждения балки для разносопротивляющегося СПФ (материал 4 из предыдущего параграфа). Эффект разномодульности не учитывается. Кривые 1-4 построены для  $\varepsilon_{00i} = (0.1, 0.2, 0.5, 1)\%$  соответственно. Установлено, что для больших значений изгибающего момента ( $\mu_0 = 0,4142$  и  $0,8284$ ) упругие деформации достигают тех же порядков, что и фазовые, вследствие чего НП стремится вернуться к плоскости симметрии балки, (кривые 3 и 4).

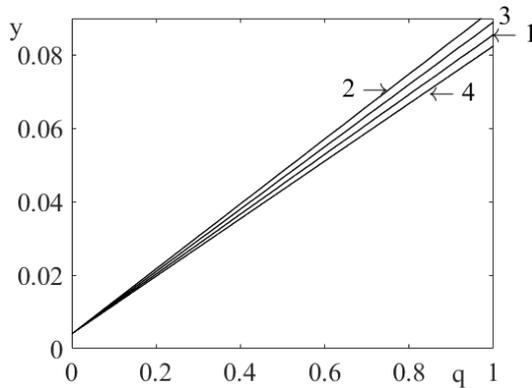


Рис. 13. Прямые  $y-q$

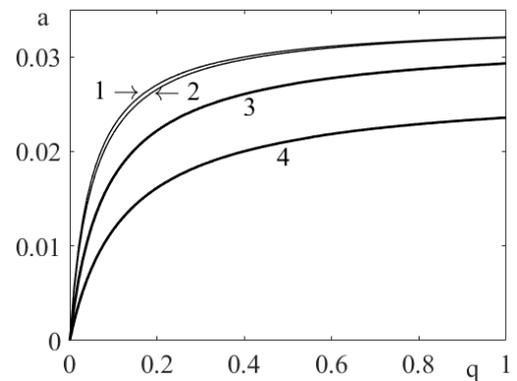


Рис.14 Кривые  $a-q$ ,  $\varepsilon_{00i} = (0.1, 0.2, 0.5, 1)\%$

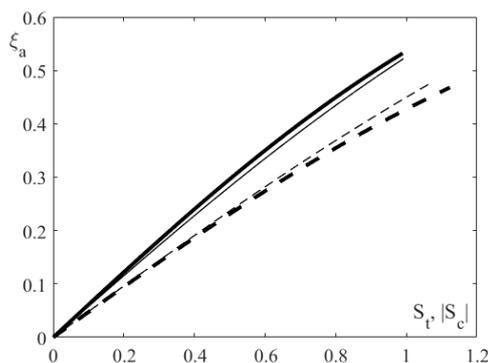


Рис. 15. Кривые  $s-\xi_a$ . (-)  $s_t$ , (--)  $s_c$ .

Жирные кривые -  $q=1$ , тонкие -  $q=0,1$

положение НП и распределение нормальных напряжений по сечению балки теперь являются функциями параметра фазового состава, а рассматриваемую задачу необходимо решать в связной термомеханической постановке.

Параграф 3.3 посвящен решению задачи о ПФП в пластинке из СПФ с учетом разносопротивляемости под действием постоянного изгибающего момента  $\mu_0$ , рис. 7. Принимается набор гипотез Крихгофа-Лява, а также учитываются упругие деформации. Блок (16) устанавливает вид полных продольных деформаций, а также в неявном виде выражение для  $s_y$  при условии ПДС в поперечном направлении:

$$\varepsilon_x = \begin{cases} \left( (s_{xt} - \nu s_{yt})/e_t(q) \right) + 0,5q\rho_t \left( (2s_{xt} - s_{yt})/s_{it} \right) \varphi_t(s_{it}), & s_x > 0, \\ \left( (s_{xc} - \nu s_{yc})/e_c(q) \right) + 0,5q\rho_c \left( (2s_{xc} - s_{yc})/s_{ic} \right) \varphi_c(s_{ic}, s_{tc}), & s_x < 0, \end{cases} \quad (16)$$

$$s_y = \begin{cases} s_{xt} \left( (\nu + 0,5B_{1t}e_t(q))/(1+B_{1t}e_t(q)) \right), & B_{1t} = q\rho_t\varphi_t(s_{it})(1/s_{it}), & s_x > 0, \\ s_{xc} \left( (\nu + 0,5B_{1c}e_c(q))/(1+B_{1c}e_c(q)) \right), & B_{1c} = q\rho_c\varphi_c(s_{ic}, s_{tc})(1/s_{ic}), & s_x < 0. \end{cases}$$

Система разрешающих соотношений включает в себя ГПС (1), соотношения для  $\varepsilon_x$  и  $s_y$  (16) и два уравнения равновесия для изгибающего момента и продольной силы, получение которых описано в параграфе 2.3. В начальный момент процесса материал пластинки находится в аустенитном состоянии и нагружен моментом  $\mu_0$ :

$$\mu_0 = \varepsilon_{00t} \left( 12(1-\nu^2) \right)^{-1} \cdot \left( 2a_0^2(e_{mt} - e_{mc}) - a_0(e_{mt} + e_{mc}) + (e_{mc} - e_{mt}) \right). \quad (17)$$

При этом, положение НП вновь определяется отношением модулей упругости (7). Распределение продольных и поперечных напряжений и деформаций в начальный момент процесса определяются из решения советующей упругой задачи (при  $q_0 = 0$ ,  $E(q_0) = E_A$ ,  $s_y = \nu s_x$ ). Алгоритм решения данной системы очень схож с алгоритмом, представленным в предыдущем параграфе 3.2. Отличие заключается лишь на этапе определения  $s_{x,j}(\xi)$ : необходимо организовать итерационный процесс определения  $s_{x,j}(\xi)$  и  $s_{y,j}(\xi)$  до тех пор, пока разница для очередного приближения  $|s_{x,j}(\xi) - s_{x,j-1}(\xi)|$  не станет малой величиной.

На рис. 16, 17 показаны зависимости  $y-q$  и  $a-q$  для разносопротивляющегося СПФ из параграфа 3.1. Кривые 1-4 построены для  $\varepsilon_{00t} = (0.1, 0.2, 0.5, 1)\%$ . В процессе численного решения установлен слабовыраженный нелинейный характер зависимости  $y-q$  (кривая 4 не совпадает с пунктирной линией). Для больших значений изгибающего момента ( $\mu_0 = 0,41; 0,83$ ) упругие деформации в сечении пластинки достигают тех же порядков, что и фазовые, вследствие чего НП стремится к плоскости симметрии (кривые 3 и 4).

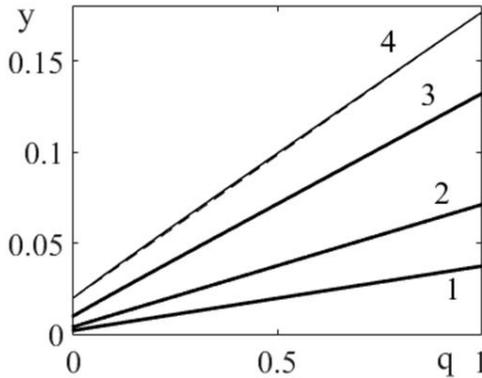


Рис.16 Кривые  $y-q$ ,  $\varepsilon_{00t} = (0.1, 0.2, 0.5, 1)\%$

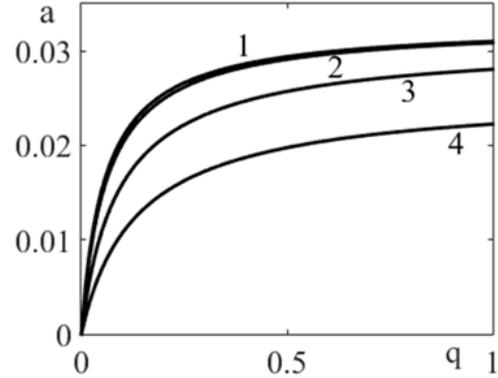


Рис.17 Кривые  $a-q$ ,  $\varepsilon_{00t} = (0.1, 0.2, 0.5, 1)\%$

На рис. 18 показана эпюра  $s-\xi$  для разносопротивляющегося СПФ из параграфа 3.1. Наборы кривых 1-3 построены для  $\varepsilon_{00t} = (0.2, 0.5, 1)\%$  соответственно. Штриховые линии – решение упругой задачи в начальный момент, сплошные – на момент окончания ПФП. Таким образом, в процессе ПФП, продольные напряжения в пластинке меняются немонотонно, а для средних и больших значений  $\varepsilon_{00t} = (0.5, 1)\%$  отмечена сильная перегрузка крайних волокон. На рис. 19 показано отношение  $s_y/s_x$  в различные моменты процесса ПФП: группы кривых 1-5 соответствуют  $q = 0.2; 0.4; 0.6; 0.8$  и 1.

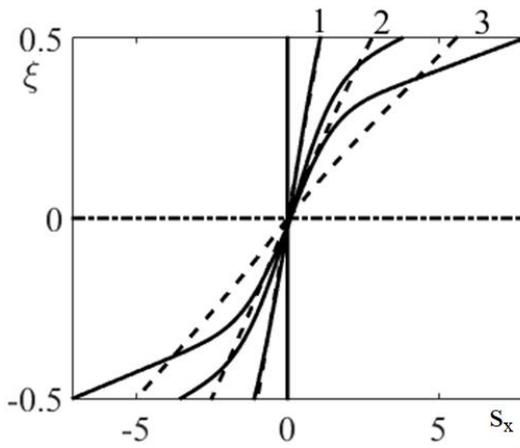


Рис. 18. Кривые  $s - \xi$ . (-)  $q=1$ , (--)  $q_0 = 0$ ,  
 $\mu_0 = 0,18; 0,46; 0,91$ .

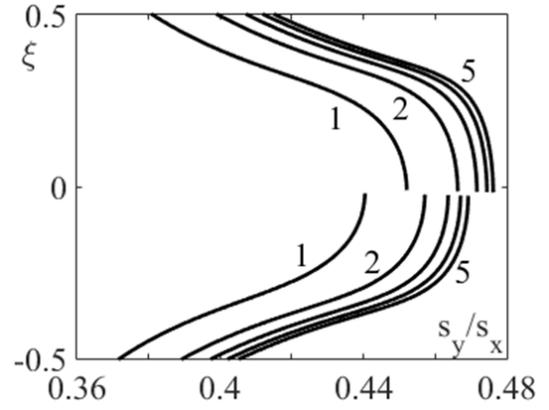


Рис. 19. Кривые  $(s_y/s_x) - \xi$ ,  
 $q = 0.2; 0.4; 0.6; 0.8; 1$

В процессе численного решения, а также путем исследования нижнего блока (16) при  $s_x \rightarrow 0$  установлено, что  $s_y/s_x$  претерпевает разрыв первого рода при переходе через НП:

$$\lim_{s_x \rightarrow +0} \left( \frac{s_y}{s_x} \right) = \frac{\nu\sqrt{\pi} + e_t(q)\rho_t q}{\sqrt{\pi} + 2e_t(q)\rho_t q} = \beta_t, \quad \lim_{s_x \rightarrow -0} \left( \frac{s_y}{s_x} \right) = \frac{\nu\sqrt{\pi} + e_c(q)\rho_c q s_{tc}}{\sqrt{\pi} + 2e_c(q)\rho_c q s_{tc}} = \beta_c. \quad (18)$$

В связи с чем, исследовано поведение ПВДН в области НП:

$$\lim_{s_x \rightarrow \pm 0} \mu_\sigma = \text{sign}(s_x) (3/2) \beta \left( (2\beta^2 - 5\beta + 2) / (\beta^2 - \beta + 1)^{3/2} \right). \quad (19)$$

В рамках рассматриваемой постановки ПВДН претерпевает разрыв первого рода при переходе через НП, а также отмечено его незначительное изменение в растянутой и сжатой частях сечения пластинки. В связи с этим, для  $\rho, \sigma_0$  справедливы соотношения (12).

Параграф 3.4 посвящен решению задачи о ПФП в балке из СПФ с учетом разносопротивляемости под действием постоянного изгибающего момента. Рассматривается связанная термомеханическая постановка – учитывается влияние действующих напряжений на характерные температуры ФП. Процесс охлаждения балки считается медленным - отсутствует градиент температур в сечении. Ввиду одномерности постановки задачи, зависимость параметров материала от вида НДС вновь принимается кусочно-постоянной (3,12). Причем, параметры  $\rho_{1d}, \sigma_{01}$  и функция  $\varphi_1$  отвечают за накопление фазовых деформаций, а  $\rho_{2d}, \sigma_{02}, \alpha$  и  $\varphi_2$  - структурных, что позволяет учесть различное влияние разносопротивляемости на эти механизмы неупругого деформирования. Дифференциальные соотношения для параметра фазового состава с учетом разносопротивляемости имеют вид:

$$\begin{cases} dq = a_1^+ d|s| + b_1 dt_0, a_1^+ = \frac{\pi\rho_{1t}\sqrt{1-q^2}}{2\delta S} (\varphi_{1t}(|s|) + |s|\varphi'_{1t}(|s|)), s > 0, b_1 = \frac{\pi\sqrt{1-q^2}}{2}, \\ dq = a_1^- d|s| + b_1 dt_0, a_1^- = \frac{\pi\rho_{1c}\sqrt{1-q^2}}{2\delta S} (\varphi_{1c}(|s|s_{tc}) + |s|s_{tc}\varphi'_{1c}(|s|s_{tc})), s < 0. \end{cases} \quad (20)$$

Здесь,  $\delta S = \Delta S_0 \Delta M^0 / \sigma_{01}^t$  - безразмерный скачок объёмной плотности энтропии при переходе из аустенитного фазового состояния в мартенситное при отсчетной температуре  $T$ ,  $t_0 = (M_s^0 - T) / \Delta M^0$  - безразмерный параметр температуры. Аддитивное представление полных деформаций позволяет отдельно представить соотношения для фазовых, структурных и упругих деформаций:

$$d\varepsilon^{ph} = \begin{cases} \rho_{1r} \varphi_{1r} (|s|) dq = \omega^+ dq, & s > 0, dq > 0, \\ -\rho_{1c} \varphi_{1c} (|s| s_{ic}^-) dq = \omega^- dq, & s < 0, dq > 0, \end{cases}; \quad d\varepsilon^e = \frac{ds}{e(q)} + s \frac{\Delta e}{e_A e_m} dq, \quad (21)$$

$$d\varepsilon^{st} = \begin{cases} \rho_{2r} q_{st} \varphi'_{2r} (|s| s_{ic}^t) s_{ic}^t ds = r_1^+ ds, & s > 0, q > 0, \\ \rho_{2c} q_{st} \varphi'_{2c} (|s| s_{ic}^c) s_{ic}^c ds = r_1^- ds, & s < 0, q > 0, \end{cases}; \quad \left. \begin{array}{l} e_A = E_A / \sigma_{01}^t, \\ e_m = E_m / \sigma_{01}^t, \end{array} \right\}; \quad \Delta e = e_A - e_m.$$

Здесь  $s_{ic}^t = (\sigma_{01}^t / \sigma_{02}^t)$ ,  $s_{ic}^c = (\sigma_{01}^t / \sigma_{02}^c)$ . В выражении для структурных деформаций присутствует величина  $q_{st}$ , позволяющая учесть неоднородность упрочнения представительного объема СПФ при ФП и может быть вычислена, как сумма объемных долей всех мартенситных ячеек  $q_{st} = \sum_i dq_i \leq q$ , зародившихся при  $\sigma_1$ , для которых справедливо равенство:

$$\sigma_2 = \sigma_{02} \left\{ -\ln \left( 1 - \operatorname{erf} \left( \sigma_1 / \sqrt{2} \sigma_{01} \right) \right) \right\}^{1/\alpha}. \quad (22)$$

Если положить  $q_{st} = q$ , то неоднородность упрочнения не учитывается, а в структурном переходе участвуют все мартенситные ячейки представительного объема. Наконец, если положить  $q_{st} = 0$ , структурное превращение вообще не учитывается. Применение ГПС к (21) позволяет записать выражение для напряжений (23). В общем случае, поперечное сечение балки содержит 5 границ, рис. 20, положение которых заранее неизвестно и определяется в процессе численного решения задачи.

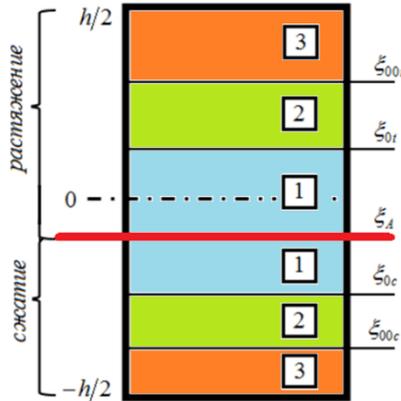


Рис. 20. Границы ФП в сечении балки

Среди них:  $\xi_a$  - положение НП,  $\xi_{0r}, \xi_{0c}$  - границы начала и  $\xi_{00r}, \xi_{00c}$  - границы окончания ФП.

$$\begin{cases} ds = \xi c_1^+ dy + c_1^+ d\varepsilon_0 - c_2^+ dt_0, & s > 0, \\ ds = \xi c_1^- dy + c_1^- d\varepsilon_0 - c_2^- dt_0, & s < 0, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} d_1^+ &= s(\Delta e / e_A e_m) + \omega^+, & c_2^+ &= d_1^+ d_1 c_1^+, \\ d_1^- &= s(\Delta e / e_A e_m) + \omega^-, & c_2^- &= d_1^- b_1 c_1^-, \end{aligned} \quad (23)$$

$$1/c_1^+ = (1/e(q)) + d_1^+ a_1^+ + r_1^+,$$

$$1/c_1^- = (1/e(q)) - d_1^- a_1^- + r_1^- s_{ic}.$$

Уравнения для изгибающего момента и равновесия в проекции на продольную ось записаны в виде (24) и получены путем интегрирования напряжений (23) по соответствующим зонам 1-3, рис. 20, поперечного сечения балки.

$$dy = dt_0 (a_{13} a_{22} - a_{23} a_{12}) / (a_{11} a_{22} - a_{12}^2); \quad d\varepsilon_0 = dt_0 (a_{11} a_{23} - a_{12} a_{13}) / (a_{11} a_{22} - a_{12}^2). \quad (24)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\begin{cases} a_{11} = \int_{-0.5}^{\xi_{00c}} \xi^2 c_3^- d\xi + \int_{\xi_{00c}}^{\xi_{0c}} \xi^2 c_1^- d\xi + \int_{\xi_{0c}}^{\xi_{0r}} \xi^2 e_A d\xi + \int_{\xi_{0r}}^{\xi_{00r}} \xi^2 c_1^+ d\xi + \int_{\xi_{00r}}^{0.5} \xi^2 c_3^+ d\xi, \\ a_{12} = a_{21} = \int_{-0.5}^{\xi_{00c}} \xi c_3^- d\xi + \int_{\xi_{00c}}^{\xi_{0c}} \xi c_1^- d\xi + \int_{\xi_{0c}}^{\xi_{0r}} \xi e_A d\xi + \int_{\xi_{0r}}^{\xi_{00r}} \xi c_1^+ d\xi + \int_{\xi_{00r}}^{0.5} \xi c_3^+ d\xi, \\ a_{22} = \int_{-0.5}^{\xi_{00c}} c_3^- d\xi + \int_{\xi_{00c}}^{\xi_{0c}} c_1^- d\xi + \int_{\xi_{0c}}^{\xi_{0r}} e_A d\xi + \int_{\xi_{0r}}^{\xi_{00r}} c_1^+ d\xi + \int_{\xi_{00r}}^{0.5} c_3^+ d\xi, \\ a_{13} = \int_{\xi_{00c}}^{\xi_{0c}} \xi c_2^- d\xi + \int_{\xi_{0c}}^{\xi_{0r}} \xi c_2^+ d\xi, \quad a_{23} = \int_{\xi_{00c}}^{\xi_{0c}} c_2^- d\xi + \int_{\xi_{0c}}^{\xi_{0r}} c_2^+ d\xi. \end{cases} \quad (25)$$

Поскольку в задаче не учитывается упругая разномодульность СПФ, начальная температура балки, при которой начнется ПФП в крайнем волокне, запишется в виде:

$$t_{00r,c} = -\frac{|\varepsilon_{00}| e_A \rho_{1r,c} \varphi_1(e_A |\varepsilon_{00}|)}{\delta S}; \quad \rho_{1r,c} = \begin{cases} \rho_{1r}, & \text{при } \xi_0 = +0,5, \\ \rho_{1c}, & \text{при } \xi_0 = -0,5. \end{cases} \quad (26)$$

Здесь  $\varepsilon_{00}$  - деформация крайнего волокна балки в начальном упругом состоянии.

Алгоритм решения задачи следующий. Первоначально решается упругая задача о изгибе балки в аустенитном состоянии. Поскольку разномодульность не учитывается,  $\xi_{a0} = 0$ . Начальная температура  $t_{00}$  определяется из условия  $t_{00} = \max(t_{00r}, t_{00c})$  и (26). Дальнейшие рассуждения основаны на неявном методе пошагового интегрирования Эйлера. Положим, на некотором шаге охлаждения балки под действием постоянного изгибающего момента известны величины:  $t_0, q(\xi), s(\xi), y, \varepsilon_0, \xi_{0r}, \xi_{0c}, \xi_{00r}, \xi_{00c}, \xi_A$ .

1. Выполняется малый шаг по температуре  $dt_0 > 0, (dT < 0)$ . Вычисляем новое значение температуры  $t_0 = t_0 + dt_0$ .

2. Для старых значений  $q(\xi), s(\xi), y, \varepsilon_0, \xi_{0r}, \xi_{0c}, \xi_{00r}, \xi_{00c}, \xi_A$  и новой температуры  $t_0$  определяются значения  $q_{st}(\xi)$  для каждой точки поперечного сечения балки согласно (22).

3. Для новых значений  $t_0$  и  $q_{st}(\xi)$  определяем приращение безразмерной кривизны  $dy$  и  $d\varepsilon_0$  согласно (24).

4. Для старых значений границ  $\xi_{0r}, \xi_{0c}, \xi_{00r}, \xi_{00c}, \xi_A$  и новых значений  $t_0, q_{st}(\xi), y, \varepsilon_0$  определяем приращений безразмерных продольных напряжений согласно (23). На данном этапе определяется новое положение нейтральной плоскости  $\xi_A$  путем поиска точки, в которой происходит смена знака эпюры безразмерных напряжений  $s(\xi)$ .

5. Для новых значений  $t_0, s(\xi), y, \varepsilon_0, \xi_{0r}, \xi_{0c}, \xi_{00r}, \xi_{00c}, \xi_A, q_{st}$  находим приращение параметра фазового состава согласно (20).

6. Затем необходимо обновить положения границ окончания ФП  $\xi_{00r}, \xi_{00c}$  путем исключения той области сечения балки, где в результате предыдущего шага получилось  $q^{new} = q^{old} + dq \geq 1$ . Новые положения границ начала ФП  $\xi_{0r}, \xi_{0c}$  определяются из условий

$$\begin{cases} e_A |y \xi_{0c} + \varepsilon_0| \rho_{1c} \varphi_{1c}(e_A |y \xi_{0c} + \varepsilon_0|) = -t_0 \delta S, & \xi_{0c} \leq \xi_A, \\ e_A |y \xi_{0r} + \varepsilon_0| \rho_{1r} \varphi_{1r}(e_A |y \xi_{0r} + \varepsilon_0|) = -t_0 \delta S, & \xi_{0r} \geq \xi_A. \end{cases} \quad (27)$$

7. Организуется итерационный процесс: повторяются шаги 3-6 до тех пор, пока очередное приближение приращения  $dy$  не станет малым, по отношению к значению этой же величины на прошлом шаге итерационного процесса. При выполнении критерия сходимости возможен переход к пункту 1 и новому шагу по температуре  $dt_0$ . Охлаждение балки продолжается до тех пор, пока обе границы окончания ФП  $\xi_{00r}, \xi_{00c}$  не достигнут положения НП  $\xi_A$ . При этом, температура на момент окончания ПФП должна удовлетворять условию  $T \geq M_f^0$  (поскольку в сечении балки есть плоскость, где продольные напряжения равны 0).

При численном решении задачи о ПП в балке из СПФ под действием постоянного изгибающего момента приняты следующие значения параметров:  $\sigma_{01}^i = 169 \text{ МПа}$ ,  $\sigma_{01}^c = 189 \text{ МПа}$ ,  $\sigma_{02}^i = 242 \text{ МПа}$ ,  $\sigma_{02}^c = 290 \text{ МПа}$ ,  $\alpha_i = 2$ ,  $\alpha_c = 2,2$ ,  $\rho_{1r} = 0,056$ ,  $\rho_{1c} = 0,0465$ ,  $\rho_{2r} = 0,056$ ,  $\rho_{2c} = 0,047$ ,  $\Delta S_0 = 0,43 \text{ МПа} / K$ ,  $E_M = 28000 \text{ МПа}$ ,  $E_A = 84000 \text{ МПа}$ . В работе рассмотрены 4 постановки: без учета структурных превращений и разнотемпературности;

с учетом только разнсопротивляемости; с учетом обоих явлений; и последняя, с учетом обоих явлений и неравномерности упрочнения – модели 1-4 соответственно.

На рис. 21, 22 показано распределение напряжений в сечении балки в процессе ПФП под действием постоянного изгибающего момента  $\mu_0 = 0.166$ , ( $\varepsilon_{00} = 0.002$ ) в рамках модели 4. Отмечено немонотонное изменение напряжений в процессе охлаждения от упругого решения 1 до некоторой температуры  $t_0^*$  - кривая 2, а также от  $t_0^*$  до момента окончания ПФП во всех точках сечения, кривая 3. Температура  $t_0^*$  соответствует моменту, когда обе границы начала ФП впервые достигли НП. Пунктирные кривые отвечают промежуточным этапам охлаждения балки.

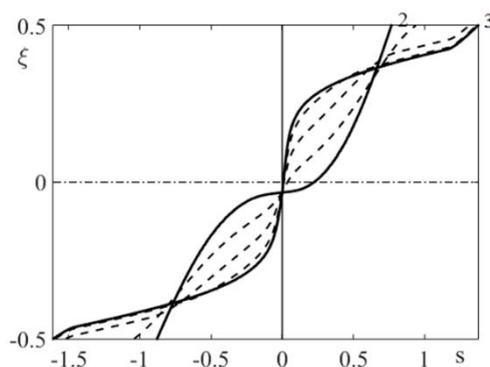
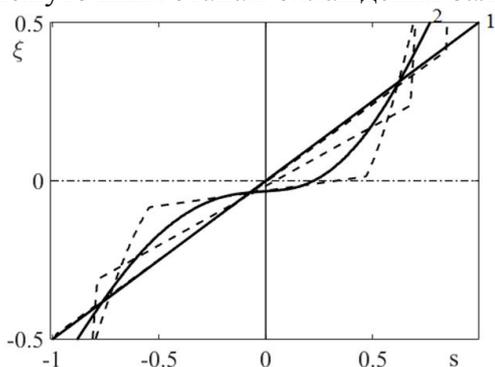


Рис. 21. Кривые  $s = s(\xi)$ ,  $\mu_0 = 0.166$ ,  $t_0 \leq t_0^*$     Рис. 22. Кривые  $s = s(\xi)$ ,  $\mu_0 = 0.166$ ,  $t_0 \geq t_0^*$

На рис. 23 показано распределение параметра фазового состава в десяти равноотстоящих точках процесса охлаждения балки. Установлено, что ПФП гораздо раньше начинается на растянутой границе сечения балки, а минимальное значение параметра фазового состава достигается на НП. На рис. 24 показаны эпюры напряжений на момент окончания ПФП для моделей 1-4, при этом 5 – упругое решение. Установлено, что не учет структурного перехода приводит к сильной перегрузке крайних волокон балки, а не учет неравномерности упрочнения – наоборот, к чрезмерной релаксации в тех же зонах.

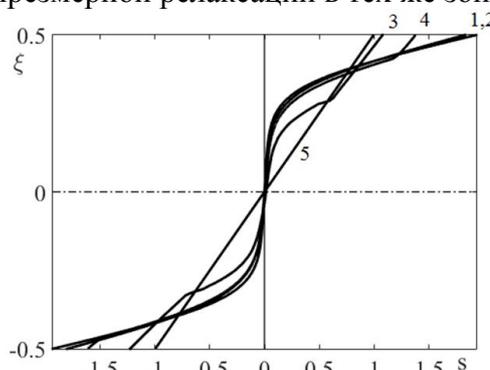
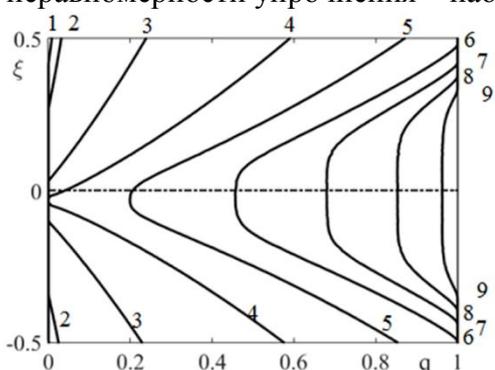


Рис. 23. Кривые  $q = q(\xi)$  для различных  $t_0$  с шагом  $\Delta t_0 = 0.1744$

Рис. 24. Кривые  $s = s(\xi)$ ,  $\mu_0 = 0.166$ , модели 1-4. Упругое решение – 5

На рис. 25 показана история изменения кривизны балки в процессе ПФП. Группы кривых 1-4 отвечают  $\mu_0 = 0.166, 0.249, 0.414, 0.828$  ( $\varepsilon_{00} = (0.1, 0.2, 0.5, 1)\%$ ) соответственно. Сплошные кривые отвечают модели 4, пунктирные – модели 2. Отмечено, что учет неравномерности упрочнения СПФ наиболее актуален для средних значений  $\mu_0 = 0.249$  и  $0.414$ . На рис. 26 показана история движения границ начала и окончания ФП, а также НП (кривая ABCDE) для модели 4. Рассмотрим движение последней более подробно. В начальный момент (точка А), НП лежит на плоскости симметрии балки (ПСБ) ввиду отсутствия упругой разномодульности. На участке АВ, НП стремится отдалиться от ПСБ ввиду наличия ПФП, для которого разнсопротивляемость учитывается. Кроме того, качественно верно удалось описать влияние вида НДС на характерные температуры ФП –

процесс прямого мартенситного превращения в сжатой части сечения начался гораздо позже, чем в растянутой. На участке ВС, положение НП не меняется, поскольку все сечение балки участвует в ФП. На участке CD, НП смещается к ПСБ, поскольку в крайних волокнах балки закончился ФП, а напряжения недостаточны для инициации процесса структурного перехода – в этих зонах происходит деформирование по упругому закону. Начиная от точки D, НП вновь стремится отдалиться от ПСБ, поскольку действующие напряжения позволяют активировать структурный переход с учетом неравномерности упрочнения и разнсопротивляемости СПФ.

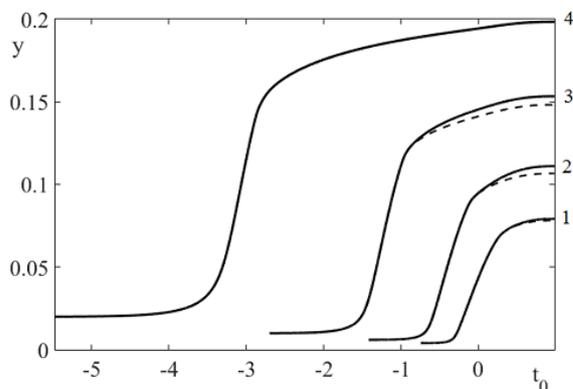


Рис. 25. Кривые  $y = y(t_0)$ , модели 2(-- и 4(-),  $\mu_0 = 0.166, 0.249, 0.414, 0.828$

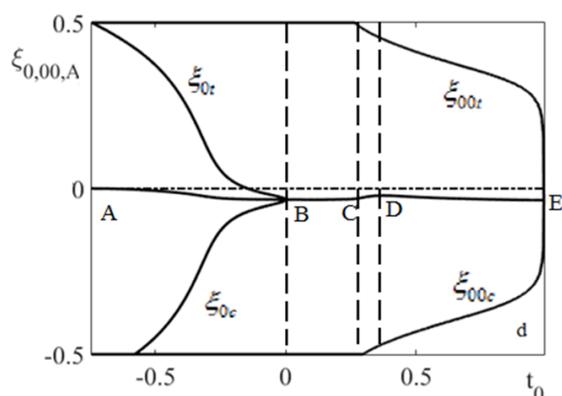


Рис. 26. Границы ФП,  $\xi_{0r}, \xi_{0c}, \xi_{00r}, \xi_{00c}$ , положение нейтральной плоскости  $\xi_A$

Установлено отсутствие напряжений на НП, что подтверждает факт одновременного достижения границ начала и окончания ФП положения НП. Достоверность приведенных в данном параграфе результатов подтверждается сходимость полученного решения к решению аналогичной задачи в рамках АППН при снижении уровня термомеханической связности постановки.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Проектирование конструкций, рабочее тело которых выполнено из СПФ и работает на изгиб требует учета свойства разнсопротивляемости, и, по необходимости упругой разномодульности, при решении задач, направленных на качественно и количественно верное описание термомеханического поведения этих устройств в процессе эксплуатации.

2. В процессе ПФП под действием постоянного изгибающего момента, а также при изотермическом изгибе элементов в режиме МН отмечено значительное отклонение НП от плоскости симметрии. Данное положение необходимо учитывать при проектировании высокоточных устройств, в частности на этапах поиска оси изгиба рабочего тела.

3. В процессе ПФП под действием постоянного изгибающего момента установлено, что ФП начинается раньше в растянутой части сечения элемента, в то время как границы начала и окончания ФП одновременно достигают положения НП.

4. При моделировании явлений ПФП и МН для элементов конструкций из разнсопротивляющихся СПФ установлено, что положения НП в начальный момент термомеханического нагружения определяется отношением модулей упругости – при наличии упругой разномодульности у материала, в противном случае НП совпадает с плоскостью геометрической симметрии сечения.

5. При рассмотрении задач о ПФП и явлении МН в одномерной и двумерной в пространстве напряжений постановках установлено наличие разрыва первого рода в значениях параметра вида девиатора напряжений при переходе через НП. При этом, отношение напряжений  $s_y/s_x$  значительно отличается от классического представления  $s_y = \nu s_x$  (для упругих материалов) и принадлежит диапазону  $0,3 \leq s_y/s_x < 0,5$ .

## СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

### Статьи в журналах из списка ВАК РФ (1-5) и базы Scopus (6):

1. Мовчан А.А., Казарина С.А., Машихин А.Е., Мишустин И.В., Саганов Е.Б., Сафронов П.А. Краевые задачи механики для сплавов с памятью формы // Ученые записки Казанского университета. Серия Физ.-Мат. науки. 2015. Т. 157. № 3. С. 97-110.
2. Сафронов П.А. Учет разнсопротивляемости сплавов с памятью формы при решении задач о мартенситной неупругости и прямом превращении в балке, находящейся под действием изгибающего момента // Механика композиционных материалов и конструкций. 2016. Т. 22. № 1. С. 114-127.
3. Сафронов П.А. Решение задач о мартенситной неупругости и прямом фазовом превращении в балке из сплава с памятью формы с учетом упругих деформаций и разнсопротивляемости этих сплавов // Механика композиционных материалов и конструкций. 2017. Т. 23. № 1. С. 69-89.
4. Сафронов П.А. Цилиндрический изгиб пластинок из сплава с памятью формы с учетом разнсопротивляемости этого материала // Механика композиционных материалов и конструкций. 2018. Т. 24. № 2. С. 186-206.
5. Сафронов П.А. Решение связной задачи о прямом превращении в балке из сплава с памятью формы с учетом разнсопротивляемости материала // Механика композиционных материалов и конструкций. 2019. Т. 24. № 4. С. 597-615.
6. Safronov P.A. Tension-compression asymmetry and elastic strain incorporating into the solution of the problem of martensitic nonelasticity and direct martensitic transition in beams from a shape memory alloy undergoing bending // Composites: Mechanics, Computations, Applications. 2018. Vol. 9. № 2. Pp. 119-139.

### Прочие публикации по тематике диссертационной работы:

7. Сафронов П.А. Моделирование механического поведения балки из сплава с памятью формы с учетом разнсопротивляемости этого материала // Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред. Сборник трудов. 2015. С. 281-284. (Москва, ИПРИМ РАН, 15-17 декабря 2015г.)
8. Сафронов П.А. Решение задач о мартенситной неупругости и прямом фазовом превращении в балке из сплава с памятью формы с учетом упругих деформаций и разнсопротивляемости этого материала // Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред. Сборник трудов. 2016. С. 77-78. (Москва, ИПРИМ РАН, 16-18 декабря 2016г.)
9. Мовчан А.А., Казарина С.А., Машихин А.Е., Мишустин И.В., Саганов Е.Б., Сафронов П.А. Краевые задачи механики для сплавов с памятью формы // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Сборник докладов. 2015. С. 2601-2604. (Казань, КФУ, 20-24 августа 2015г.)
10. Сафронов П.А. Цилиндрический изгиб пластинки из сплава с памятью формы с учетом разнсопротивляемости этого материала. Мартенситная неупругость // Международная молодежная научная конференция «XLIV Гагаринские чтения». Сборник трудов. 2018. С. 132-133. (Москва, ИПМех РАН, 17-20 апреля 2018г.)
11. Сафронов П.А. Решение задач изгиба для элементов из сплавов с памятью формы с учетом разнсопротивляемости этих материалов // Третья международная конференция «Деформирования и разрушение композиционных материалов и конструкций», посвященной 80-летию ИМАШ РАН. Сборник трудов. 2018. С. 114-115. (Москва, ИМАШ РАН, 23-25 октября 2018г.)
12. Сафронов П.А. Учет разнсопротивляемости сплавов с памятью формы при решении задачи о прямом превращении в балке в связной постановке // Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред. Тезисы докладов. 2018. С. 54. (Москва, ИПРИМ РАН, 18-19 декабря 2018г.)