

УДК 004.023

## **Метод построения оптимального плана расхода топлива маневренного самолета**

**Курьянский М.К.<sup>1\*</sup>, Лолаев С.Г.<sup>2\*\*</sup>, Пащенко О.Б.<sup>1\*\*\*</sup>, Романова Т.Н.<sup>2\*\*\*\*</sup>**

<sup>1</sup>*Российская самолётостроительная корпорация „МиГ“, 1-ый Боткинский проезд,  
7, 125284, Москва, Россия*

<sup>2</sup>*Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана 2-я  
Бауманская ул., 5, Москва, 105005. Россия*

*\*e-mail: [kuriyanskiy\\_mk@bk.ru](mailto:kuriyanskiy_mk@bk.ru)*

*\*\*e-mail: [simon.lolaev@gmail.com](mailto:simon.lolaev@gmail.com)*

*\*\*\*e-mail: [alexandoleg@post.ru](mailto:alexandoleg@post.ru)*

*\*\*\*\*e-mail: [rtn@bmstu.ru](mailto:rtn@bmstu.ru)*

### **Аннотация**

В данной работе описан метод управления расходом топлива маневренного самолета с учетом следующих критериев: количество переключений между разными топливными баками, изменения координат центра тяжести в процессе расхода топлива, общий объем потребленного топлива. Предложен новый эвристический метод для решения поставленной задачи. На основе предложенного метода разработана программа, которая может быть использована как блок поддержки принятия решений в процессе проектирования топливной конфигурации маневренных самолетов.

**Ключевые слова:** комбинаторная оптимизация, многокритериальная оптимизация, расход топлива, топливная конфигурация.

## Введение

В современных маневренных самолетах используется распределенная топливная конфигурация, состоящая из нескольких топливных баков, распределенных по всей конструкции самолета. Схематический пример такой конфигурации представлен на рисунке 1. В процессе расхода топлива масса топлива в используемом в данный момент баке будет уменьшаться, следовательно, общий центр тяжести самолета так же будет изменяться [1]. Центр тяжести самолета изменяется относительно продольной и поперечной осей, а это приводит к изменению моментов крена и тангажа.

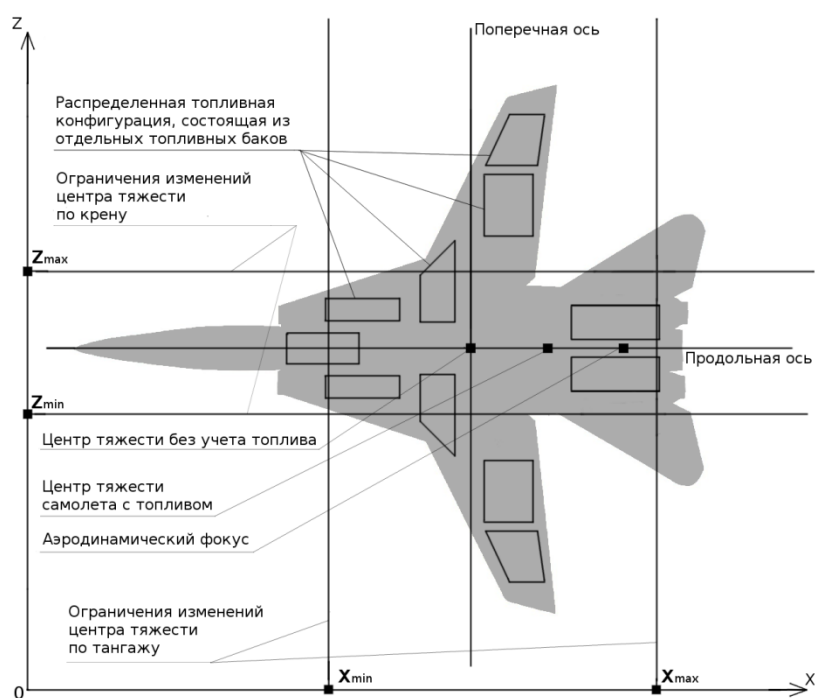


Рис. 1 – Схематическая модель самолета в рамках рассматриваемой задачи

Задача управления расходом топлива состоит в том, чтобы центр тяжести самолета изменялся в пределах заданных ограничений, с целью минимизации изменений указанных моментов. Так как топливная конфигурация является

распределенной, добиться этого можно изменяя порядок использования топливных баков и количество топлива, потребляемое из одного бака за одно переключение. Для решения задачи управления расходом топлива маневренного самолета необходимо разработать новый метод нахождения топливного плана для заданной топливной конфигурации, удовлетворяющего следующим условиям:

- изменение центра тяжести относительно поперечной и продольной осей должно происходить в заданных границах;
- использовать как можно меньшее количество переключений между баками;
- топливный план должен использовать как можно большую массу топлива.

Актуальность данной работы заключается в автоматизации процесса подбора оптимального топливного плана, удовлетворяющего указанным условиям. Для решения этой задачи был разработан эвристический метод многокритериальной комбинаторной оптимизации, а также программная реализация этого метода, позволяющая для заданной топливной конфигурации получить оптимальный план за приемлемое время.

## **1. Постановка задачи**

*Топливным планом* будем называть последовательный список шагов, на каждом из которых указано, сколько топлива из какого бака следует выработать в данный момент. В выходных данных количество топлива на каждом шаге будем указывать в процентах относительно максимальной массы топлива в баке. В качестве входных данных будем принимать следующие параметры:

1. Общая масса самолета с учетом полезной нагрузки и без учета топлива  $G_0$ .
2. Координаты центра тяжести самолета без учета топлива  $x_0$  и  $z_0$ .
3. Координата аэродинамического фокуса  $x_F$ .
4. Длина средней аэродинамической хорды  $ba$ .

5. Ограничения изменения центра тяжести относительно поперечной оси, задающиеся в виде значений момента тангажа  $M_{max}$  и  $M_{min}$ . На основе этих параметров будут получены значения  $x_{max}$  и  $x_{min}$ , определяющие минимальное и максимальное значение координаты центра тяжести вдоль продольной оси  $ox$ . На рисунке 1 приведен схематический пример данных ограничений в виде вертикальных линий.

6. Ограничения изменения центра тяжести относительно продольной оси,  $z_{max}$  и  $z_{min}$ , аналогичные  $x_{max}$  и  $x_{min}$  для поперечной оси  $oz$ , схематично представлены на рисунке 1 в виде вертикальных линий.

Входными данными также является топливная конфигурация самолета, указанная в отдельном файле. Топливная конфигурация представлена набором из  $n$  топливных баков, которые пронумерованы в порядке чтения из файла. По умолчанию изначально все баки заполнены максимально. Для каждого бака определены следующие параметры:

1. Максимальная масса топлива в  $i$ -том баке  $M_i$ .
2. Текущая масса топлива в  $i$ -том баке  $m_i$ .
3. Координаты бака относительно координатных осей,  $x_i$  и  $z_i$ .

Так как топливные баки могут быть произвольной формы, координата центра тяжести может зависеть от текущей массы топлива. Зависимость задается в виде дискретных пар (масса топлива; координата  $x$ ), промежуточные значения вычисляются с помощью линейной интерполяции.

## 2. Математическая постановка

Будем считать, что на каждом шаге процесса расхода топлива из выбранного на данный момент топливного бака вырабатывается топливо массой, равняющейся значению шага выработки. Значение шага выработки остается постоянным на протяжении всего процесса, поэтому общий конечный результат не зависит от конкретного значения. Таким образом весь процесс состоит из конечного числа состояний, каждое из которых отличается от остальных суммарным количеством топлива в топливных баках и значением центра тяжести. Общий центр тяжести самолета по оси  $ox$  вычисляется по формуле, которая основывается на классической формуле нахождения центра масс [2]:

$$x_{\text{цт}} = \frac{G_0 * x_0 + \sum_{i=1}^n x_i m_i}{G_0 + \sum_{i=1}^n m_i}, \quad (1)$$

где  $x_{\text{цт}}$  – координата центра тяжести самолета относительно поперечной оси,  $x_0$  и  $G_0$  – координата центра тяжести и масса самолета без топлива,  $x_i$  и  $m_i$  – координата центра тяжести и масса топлива  $i$ -ого бака,  $n$  – количество топливных баков. Для координаты по оси  $oz$  формула аналогична. По условию задачи для центра тяжести существуют ограничения. Для изменения по оси  $z$  ограничения

заданы в виде входных параметров  $z_{\min}$  и  $z_{\max}$ . Для оси  $x$  граничные значения выводятся из входных ограничений момента тангажа по следующей формуле:

$$x = X_F - M * ba, \quad (2)$$

где  $x$  – искомая координата центра тяжести,  $M$  – соответствующее значение момента тангажа,  $X_F$  - координата аэродинамического фокуса.

Пусть  $P$  – некоторый топливный план, определяющий упорядоченную последовательность шагов. Пусть  $s_i$  –  $i$ -ый шаг топливного плана  $P$ , тогда  $s_i^j$  – номер топливного бака, из которого на  $i$ -ом шаге берется топливо. Пусть множество  $A(P)$  – множество всех шагов плана  $P$ , для которых выполняется условие  $\{s_i^j \neq s_{i+1}^j\}$ . Тогда обозначим следующую зависимость:

$$f_s(P) = |A(P)|, \quad (3)$$

где  $f_s(P)$  - количество переключений между разными топливными баками для топливного плана  $P$ . Область определения  $f_s(P)$  задается интервалом  $[n-1; 3n]$ , где нижняя граница соответствует топливному плану, где каждый бак используется один раз, а верхняя граница обусловлена предметной областью. Массу топлива, выработанную при выполнении топливного плана  $P$ , обозначим  $M(P)$ . Областью определения  $M(P)$  будет интервал  $[0; \sum_{i=1}^n M_i]$ . Массу выработанного топлива будем вычислять по следующей формуле:

$$M(P) = \sum_{i=1}^n M_i - \sum_{i=1}^n m_i, \quad (4)$$

где  $M_i$  – полученная из входных данных максимальная масса топлива в  $i$ -ом баке,  $m_i$  – масса топлива в  $i$ -ом баке после выполнения топливного плана  $P$ ,  $n$  – количество топливных баков.

Необходимо найти такой топливный план  $P$ , при котором масса выработанного топлива будет максимальна:

$$M(P) \rightarrow \sum_{i=1}^n M_i, \max; \quad (5)$$

каждый топливный бак должен использоваться хотя бы один раз и при этом количество переключений должно быть минимально:

$$f_s(P) \rightarrow n - 1, \min; \quad (6)$$

В соответствии с физической постановкой значения координат центра тяжести самолета меняются на каждом шаге. Определим упорядоченные последовательности  $x(P)$  и  $z(P)$ , которые содержат промежуточные координаты  $x$  и  $z$ , вычисленные по формуле (1), которые принимает центр тяжести самолета при выполнении топливного плана  $P$ . Тогда ограничения математической модели будут иметь следующий вид:

$$\forall x \in x(P), x_{\min} \leq x \leq x_{\max} \quad (7)$$

$$\forall z \in z(P), z_{\min} \leq z \leq z_{\max}$$

Так как в модели присутствует больше одного критерия, задача является многокритериальной. Максимальное количество шагов в произвольном топливном плане ограничено значением шага выработки и суммарной массой топлива, поэтому

существует конечное множество решений, размер которого определяется как количество перестановок максимального числа шагов. Задача поиска оптимального плана в конечном множестве решений является задачей комбинаторной оптимизации [3,4].

### 3. Эвристический метод решения задачи

Для решения конфликта между разными критериями было предложено вместо единого оптимального решения выполнить поиск множества решений [5], построенного по следующим правилам:

1. Найти начальное решение при фиксации [6] критерия (5) на максимальное значение. Обозначим количество переключений между баками для этого решения как  $f_s^{max}$ .

2. Далее обозначить интервал  $[n-1; f_s^{max}]$  как область допустимых значений для критерия (6).

3. Найти множество решений, фиксируя критерий (6) на каждое значение из интервала.

4. Убрать из полученного множества решений все решения, если в множестве присутствует их однозначно лучший аналог.

Таким образом поочередно фиксируя оба критерия многокритериальной комбинаторной оптимизации, итоговым решением будет множество оптимальных решений [. Так как в полученном множестве улучшение одного параметра будет



приводить к ухудшению другого, можно говорить о том, что искомое множество решений должно быть оптимальным по Парето[7].

#### 4. Описание алгоритма

Введем понятие блока. Блок выработки топлива – упорядоченная последовательность шагов выработки топлива, что во всех шагах используется один и тот же топливный бак.

Предлагаемый эвристический [8] алгоритм содержит следующие шаги:

1. Фиксируя критерий (6) на минимальное значение, найти начальное приближение, не обязательно удовлетворяющее условиям (7).
2. Из начального приближения получить эталонное оптимальное решение.
3. Полученное начальное приближение поместить в стек.
4. Верхнее решение из стека сравнивается с эталоном и списком полученных решений. Если решение бесперспективно, оно отбрасывается.
5. Если решение удовлетворяет всем ограничениям из (7), то оно помещается в список найденных решений.
6. Если решение не удовлетворяет ограничениям из (7), то на его основе выполняется генерация следующих решений, затем решение отбрасывается.
7. Шаги 4-6 выполняются, пока стек не опустеет. После этого метод возвращает список допустимых решений.

## 5. Скалярная оценка эффективности топливного плана

Для того чтобы иметь возможность оценивать и сравнивать промежуточные топливные планы между собой, необходимо ввести функцию оценки топливного плана.

Пусть  $P$  – некоторый топливный план из  $N$  последовательных шагов,  $x(P)$  и  $z(P)$  – упорядоченные последовательности, содержащие все промежуточные координаты центра тяжести. Теперь введем критерий  $opt(P)$ , вычисляющую на основе найденных последовательностей  $x(P)$  и  $z(P)$  оценку топливного плана.  $Opt(P)$  учитывает удаленность промежуточных значений центра тяжести от границ и вычисляется по следующей формуле (8):

$$opt(P) = \sum_{i=1}^N k_x \left| x(P)_i - \frac{|x_{max} - x_{min}|}{2} \right| + \sum_{i=1}^N k_z \left| z(P)_i - \frac{|z_{max} - z_{min}|}{2} \right|$$

$$k_x = \begin{cases} 1, & x_{min} \leq x(P)_i \leq x_{max} \\ 1000 & \end{cases}$$

$$k_z = \begin{cases} 1, & z_{min} \leq z(P)_i \leq z_{max} \\ 1000 & \end{cases}$$

где  $N$  – количество шагов топливного плана  $P$ ;  $x(P)_i$  и  $z(P)_i$  – координаты центра тяжести после выполнения  $i$ -ого шага;  $k_x, k_z$  – весовые коэффициенты.

Введение весового коэффициента  $k$  необходимо для того, чтобы топливный план, не нарушающий граничные условия, считался более выгодным чем тот, который нарушает граничные условия, даже если второй план более выгоден по удаленности от границ. Полученное в результате значение  $opt(P)$  является

безразмерным положительным числом и используется для сравнения топливных планов между собой. Лучшим из двух топливных планов считается тот, у кого значение  $\text{opt}(P)$  меньше.

## **6. Получение начального приближения и его улучшение**

Первым шагом алгоритма является получения начального приближения. В качестве начального приближения берется топливный план из  $n$  блоков, где каждый бак используется только один раз. Для  $x(P)$  и  $z(P)$  из входных данных известны начальные и конечные точки. Идеальной траекторией изменения центра тяжести будет прямая от начального центра тяжести до  $(x_0; z_0)$ , но так как задача рассматривается в дискретном пространстве, то графиком изменения центра тяжести будет ломаная, каждое звено которой соответствует выполнению блока топливного плана. Начальное приближение сортируется с помощью жадного алгоритма [9]: для каждого блока вычисляются координаты, которые займет центр тяжести после выполнения блока. После этого для начального приближения выбирается блок, центр тяжести после которого наименее отдален от идеальной прямой. Процесс повторяется  $n$  раз, пока не будет получена новая последовательность из  $n$  блоков.

Таким образом начальное приближение строится исходя из начальных и конечных значений центра тяжести. Для оптимизации начального приближения относительно граничных условий полученная последовательность блоков разбивается на конечное множество последовательностей меньшего размера [10]. С

помощью средств распараллеливания, небольшая последовательность блоков может быть оптимизирована методом перебора [11] за достаточно малое время [12, 13]. После оптимизации всех подпоследовательностей они объединяются в новый топливный план, для которого вычисляется критерий  $opt(P)$ . Если в результате выполненных действий значение  $opt(P)$  уменьшилось, то процесс повторяется, иначе полученный топливный план считается начальным приближением алгоритма. Пример начального приближения приведен на рисунке 1.

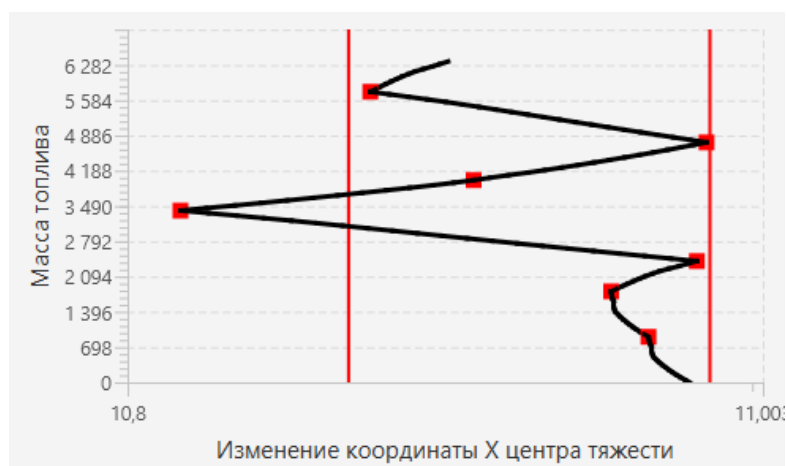


Рисунок 2. – Начальное приближение на графике отношения суммарной массы топлива к  $x(P)$ . Вертикальными линиями обозначены ограничения  $x_{\min}$  и  $x_{\max}$ .

Маркерами на графиках обозначены переключения между баками.

## 7. Получение эталонного решения

Как видно из рисунка 2, топливный план, полученный как начальное приближение, не удовлетворяет ограничениям из (7). С помощью оптимизации тех блоков, что нарушают граничные условия, получается эталонное решение. Полученный эталон использует максимальную массу топлива, удовлетворяет

условиям (7) и используется как верхняя граница для метода ветвей и границ [14]. Так все решения, которые используют столько же количество переключений, как и эталонное, будут отброшены. Если в процессе работы будут найдены решения, однозначно лучше, чем эталон, эталон будет заменен.

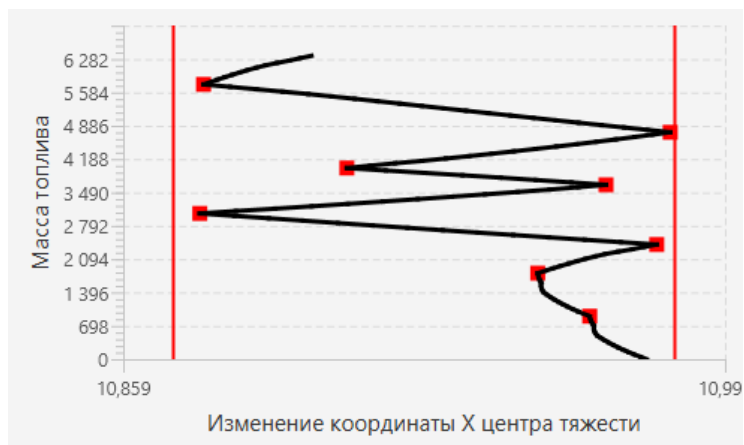


Рисунок 3. – Эталонное решение.

## 8. Получение промежуточных решений

Для работы алгоритма создается стек [15, 16], куда помещается начальное приближение, а также список найденных допустимых решений. Далее алгоритм описывается следующими шагами:

1. Для верхнего решения из стека вычисляются значения (3), (4), (8).
2. Решение отбрасывается, если уже найден топливный план лучше.
3. Если решение удовлетворяет ограничениям (7), оно добавляется в список найденных решений.
4. Если решение не удовлетворяет ограничениям (7), выполняется поиск блоков, нарушающих граничные условия. Для каждого из таких найденных блоков

генерируется по два новых решения [17, 18]: одно состоит в уменьшении размера выбранного блока на один шаг, другое состоит в разбиении блока на две равные части.

5. Все сгенерированные решения оптимизируются аналогично начальному приближению и помещаются в стек. После верхнее решение отбрасывается.

6. Если в стеке не осталось больше решений, алгоритм прекращает работу.

Результатом работы алгоритма является список допустимых решений. Список гарантированно не будет пустым, потому что изначально содержит эталонное решение. После выполнения алгоритма выполняется оптимизация списка, когда из него удаляются решения, попадающие под следующие ограничения:

- в списке есть решение с таким же количеством переключений, но с большей массой выработанного топлива;
- в списке есть решение с такой же или большей массой топлива для выработки и меньшим количеством переключений;
- в списке есть решение с таким же количеством переключений и с такой же массой выработанного топлива, но с более выгодным значением  $opt(P)$ .

После удаления всех лишних решений, среди тех, что остались, не будет решений с одинаковым количеством переключений. Пример решения задачи для минимального количества переключений, полученное из начального приближения на рисунке 2, представлен на рисунке 4.



Рис. 4 – Решение с минимальным количеством переключений.

## 9. Преимущества и недостатки метода

Среди преимуществ рассматриваемого эвристического метода можно выделить следующие:

- всегда будет найдено хоть одно допустимое решение;
- метод возвращает множество решений для разных значений количества переключений, что позволяет оценить заданную топливную конфигурацию;
- метод избегает решений, когда топливных бак используется неравномерно.

Одновременно у предлагаемого алгоритма существуют следующие недостатки:

- алгоритм является эвристическим, то есть не гарантируется нахождение абсолютно лучшего решения [19];
- большая асимптотическая сложность алгоритма.

## **Выводы**

В данной работе рассматривается задача получения оптимального топливного плана для заданной конфигурации топливных баков маневренного самолета. В процессе работы была выполнена постановка задачи многокритериальной комбинаторной оптимизации и предложен эвристический метод ее решения. Разработанный метод был реализован в виде программы, которая может быть использована в процессе проектирования топливной конфигурации маневренного самолета. В дальнейшем метод можно улучшить с целью снижения времени вычисления и асимптотической сложности алгоритма [20]. Этого предлагается достичь путем замены элементов алгоритма, использующих метод перебора.

## **Библиографический список**

1. Долгов О.С., Куприков Н.М., Лякишев М.А. Согласование облика системы управления и моментоинерционных характеристик самолета при изменении массы целевой нагрузки и выработке топлива // Труды МАИ. 2010. № 41. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=23771>
2. Журавлёв В.Ф. Основы теоретической механики. - М.: Физматлит, 2001. - 320 с.
3. Кини Р.Л., Райфа Х. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения. - М: Радио и связь, 1981. - 560 с.
4. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р., Штайн К. Алгоритмы: построение и анализ. - М.: Вильямс, 2005. - 1296 с.
5. Matthias Ehrgott. Multicriteria Optimization, Springer, 2005, 328 p.



6. Abraham P. Punnen, Y. P. Aneja. Minmax combinatorial optimization // European Journal of Operational Research, 1995, vol., no. 3, pp. 634 - 643.
7. Heiner Ackermann, Alantha Newman, Heiko Roglin, Berthold Vocking. Decision-making based on approximate and smoothed Pareto curves // Theoretical Computer Science, 2007, vol. 378, no. 3, pp. 253 - 270.
8. Pavel Kopecek. Selected Heuristic Methods Used in Industrial Engineering // Procedia Engineering, 2014, vol. 69, pp. 622 - 629.
9. Curtis S.A. The classification of greedy algorithms // Science of Computer Programming, 2003, vol. 49, no. 1–3, pp. 125 - 157.
10. Tibor Jordan, Tamas Kis, Silvano Martello. Computational advances in combinatorial optimization // Discrete Applied Mathematics, 2018, vol. 242, pp. 1 - 3.
11. Карпенко А.П. Современные алгоритмы поисковой оптимизации. Алгоритмы, вдохновленные природой. - М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2014. - 446 с.
12. Michael Muller. Java Lambdas and Parallel Streams, Springer, 2016, 87 p.
13. Richard Warburton. Java 8 Lambdas: Functional Programming For The Masses, O'Reilly Media, 2014, 182 p.
14. Blair Archibald, Patrick Maier, Ciaran McCreesh, Robert Stewart, Phil Trinder. Replicable parallel branch and bound search // Journal of Parallel and Distributed Computing, 2018, vol. 113, pp. 92 - 114.
15. Роберт Круз. Структуры данных и проектирование программ. – М.: Бином, Лаборатория знаний, 2017. - 768 с.

16. Роберт Лафоре. Структуры данных и алгоритмы в Java. Классика Computers Science. - СПб.: Питер, 2013. - 704 с.
17. Rafael Marti, Manuel Laguna, Fred Glover. Principles of scatter search // European Journal of Operational Research, 2006, vol. 169, no. 2, pp. 359 - 372.
18. Matthias Ehrgott. Approximation algorithms for combinatorial multicriteria optimization problems // International Transactions in Operational Research, 2000, vol. 7, no. 1, pp. 5 – 31.
19. Schandl B., Klamroth K., Wiecek M.M. Norm-based approximation in multicriteria programming // Computers & Mathematics with Applications, 2002, vol. 44, no. 7, pp. 925 - 942.
20. Carraway R.L., Morin T.L. Theory and applications of generalized dynamic programming: An overview // Computers & Mathematics with Applications, 1988, vol. 16, no. 10–11, pp. 779 - 788.