

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

*На правах рукописи*



**ПАК СОНГИ**

**СТАТИЧЕСКАЯ И ДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ  
ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ, СОДЕРЖАЩИХ ЖИДКОСТЬ**

Специальность 1.1.8 «Механика деформируемого твердого тела»

Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук

Научный руководитель  
доктор технических наук  
Григорьев В.Г.

Москва 2023

## Оглавление

Введение.....	4
Глава 1. Обзор литературных источников.....	10
Глава 2. Постановка задачи и программное обеспечение расчета динамических характеристик упругих тел, взаимодействующих с ограниченными объемами идеальной несжимаемой жидкости, при действии однородного гравитационного поля.....	15
2.1. Вариационная постановка задачи о колебаниях упругого тела, взаимодействующего с ограниченным объемом жидкости, при действии однородного гравитационного поля.....	15
2.2. Колебания осесимметричных тонкостенных конструкций, взаимодействующих с ограниченными объемами жидкостей, при действии однородного гравитационного поля.....	22
2.3. Конечно-элементное моделирование колебаний осесимметричных тонкостенных конструкций, взаимодействующих с ограниченными объемами жидкостей.....	40
2.4. Программа расчета динамических характеристик осесимметричных тонкостенных конструкций, взаимодействующих с ограниченными объемами жидкостей, реализованная в табличном процессоре Excel.....	52
2.5. Примеры расчета динамических характеристик осесимметричных тонкостенных конструкций, взаимодействующих с ограниченными объемами жидкостей, и сопоставление с известными результатами.....	60
Глава 3. Методика исследования статической устойчивости осесимметричных тонкостенных конструкций, контактирующих с объёмами несжимаемой жидкости, при действии гравитационного поля и осесимметричных силовых факторов.....	66
3.1. Теоретические основы метода пространственного Фурье-анализа спектра осесимметричной тонкостенной конструкции, и алгоритм исследования	

статической устойчивости .....	66
3.2. Программная надстройка для автоматизации процесса исследования спектра статически нагруженной конструкции.....	69
3.3. Примеры исследования статической устойчивости осесимметричных конструкций, взаимодействующих с ограниченными объемами жидкостей.....	79
Глава 4. Методика исследования динамической устойчивости гармонических колебаний осесимметричных тонкостенных конструкций, контактирующих с объёмами несжимаемой жидкости, возбуждаемых продольным периодическим воздействием.....	99
4.1. Параметрический резонанс в осесимметричных конструкциях как результат взаимодействия осесимметричных колебаний с подспектрами неосесимметричных форм колебаний.....	100
4.2. Анализ динамической потери устойчивости вынужденных гармонических осесимметричных колебаний с использованием метода гармонического баланса .....	108
4.3. Исследование процесса динамической потери устойчивости вынужденных гармонических осесимметричных колебаний методом численного интегрирования.....	125
Заключение.....	135
Список используемой литературы.....	137

## Введение

### **Характеристика исследований, связанных с подготовкой диссертационной работы**

В настоящее время многие технические устройства, системы и сооружения, работающие в условиях динамических нагрузок, в своем составе имеют тонкостенные упругие ёмкости, частично или полностью заполненные жидкими компонентами, оказывающими существенное влияние на динамические характеристики конструкций. При этом значительный вклад в особенности поведения конструкции в условиях эксплуатации вносят различные резонансные эффекты, параметрические и комбинационные резонансы, последствия которых могут оказать нежелательное влияние на ее несущую способность как в плане допустимых напряжений в материале, так и в части возможных проявлений статической и динамической неустойчивости.

Исследование по устойчивости тонкостенных конструкций развивалось в течение многих десятилетий, и его развитие продолжается и сегодня. В начале исследования фокусировались на простых формах и структурах оболочек, таких как плоские панели. Со временем исследования расширились, включая более сложные формы и структуры, таких как шарообразные и эллиптические оболочки и др. В целом, развитие исследований по устойчивости тонкостенных конструкций привело к более точным и эффективным методам проектирования и конструирования оболочек, которые более безопасны и надежны в различных условиях эксплуатации.

Данные конструкции, такие как топливные баки летательных аппаратов, глубоководные хранилища топлива для подводных аппаратов, питательные баки в сложных технических системах, резервуары в котельном оборудовании и т.д., широко применяются в условиях динамических нагрузок, в связи с чем большое значение имеет исследование их динамических характеристик. Резонансные эффекты могут привести к возможным проявлениям статической и динамической неустойчивости. В настоящее время исследование устойчивости тонкостенных конструкций также включает в себя исследование новых материалов и технологий

для производства конструкций. Оно также включает в себя исследование влияния внешних факторов, таких как ветер, землетрясения и гидро- и аэродинамические силы, на устойчивость конструкций.

Такое исследование может использоваться в различных отраслях, таких как авиационная и космическая индустрия, строительство, автомобилестроение, а также в медицине и электронике. Например, в авиационной индустрии, исследование устойчивости самолетов и вертолетов при различных условиях полета. В строительстве, это может использоваться для оценки устойчивости зданий и мостов при сильных ветрах и землетрясениях. В медицине, исследование устойчивости конструкций может использоваться для разработки имплантов и эндопротезов, которые необходимо надежно закрепить в теле пациента.

В настоящее время, вопрос статической и динамической устойчивости тонкостенных конструкций, содержащих жидкость, является важным предметом исследования в области механики строительных конструкций. Устойчивость тонкостенных конструкций с жидкостью относится к области механики сплошных сред и исследуется с целью оценки поведения конструкций под действием внутренних и внешних сил. Это может включать в себя анализ устойчивости баков для хранения жидкостей, таких как нефть или вода, а также устойчивость корпусов судов под действием волн. Это приводит к вопросу об их долговечности и безопасности в условиях статической и динамической нагрузки. Особое внимание уделяется изучению динамических характеристик таких конструкций, включая собственную частоту. Необходимость в понимании динамических процессов, возникающих в тонкостенных конструкциях, содержащих жидкость, является ключевым фактором для улучшения дизайна и безопасности. Таким образом **Актуальностью** данной работы является обеспечение надежного функционирования конструкций указанного типа в течение всего срока службы.

**Целью** работы является разработка методики исследования статической и динамической устойчивости осесимметричных тонкостенных упругих оболочечных конструкций, полости которых могут содержать идеальную несжимаемую жидкость.

**Основные задачи, решаемые в диссертации:**

- Анализ существующих подходов в исследовании статической и динамической устойчивости осесимметричных тонкостенных упругих оболочечных конструкций, содержащих идеальную несжимаемую жидкость.

- Разработка математической модели колебаний тонкостенной упругой конструкции, содержащей жидкость, в операторном выражении.

- Разработка дискретной конечномерной математической модели колебаний тонкостенной упругой конструкции, содержащей жидкость, на основе метода конечных элементов.

- Разработка методики исследования запасов статической устойчивости тонкостенной упругой конструкции, содержащей жидкость, при действии многофакторных нагрузок, основанной на методе пространственного Фурье-анализа спектра осесимметричной конструкции.

- Разработка математической модели на основе дифференциальных уравнений для описания потери динамической устойчивости стационарного колебательного режима тонкостенной конструкции, содержащей жидкость.

- Разработка программного обеспечения для проведения численных исследований потери устойчивости стационарного отклика системы на заданные режимы гармонических воздействий.

- Исследование различных конфигураций тонкостенных конструкций, содержащих жидкость, на предмет потери устойчивости стационарного отклика системы на заданные режимы гармонических воздействий.

Методы решения данных задач основываются на вариационных принципах механики с использованием метода конечных элементов.

**Научная новизна**

1. Разработана уточненная методика пространственного Фурье-анализа спектра осесимметричной тонкостенной конструкции, контактирующей с объёмами несжимаемой жидкости, для исследования статической устойчивости при действии гравитационного поля и осесимметричных силовых факторов.

2. Предложен метод прямого интегрирования нелинейных динамических уравнений для построения областей параметрического возбуждения неосесимметричных колебаний осесимметричной тонкостенной конструкции при продольном динамическом воздействии. На основе этого метода разработана методика исследования динамической устойчивости гармонических колебаний осесимметричных тонкостенных конструкций, контактирующих с объемами несжимаемой жидкости, возбуждаемых продольным периодическим воздействием, в среде табличного процессора Excel.

3. Разработана и реализована в среде табличного процессора Excel конечно-элементная модель, позволяющая в рамках линейной теории исследовать статическую и динамическую устойчивость тонкостенных конструкций, содержащих жидкость, при действии гравитационного поля и осесимметричных силовых факторов, а также учитывать их влияние на величины собственных частот.

4. Впервые построена математическая модель, позволяющая численным интегрированием исследовать переходные процессы колебаний системы как в области динамической неустойчивости параметров воздействия, так и вне ее. Показан параметрический характер неосесимметричных колебаний тонкостенной конструкции, контактирующей с объемами несжимаемой жидкости, при осесимметричном воздействии. Получены границы областей параметрических резонансов как основного (1-го порядка), так и резонансов более высоких порядков.

5. На основе разработанной математической модели исследования спектра статически нагруженной конструкции и предложенных алгоритмов автоматизации процесса вычислений в среде табличного процессора Excel определены критические величины толщины оболочек, частично заполненных жидкостью, и «мнимых частот», наличие которых характеризует потерю статической устойчивости нагруженной конструкции.

### **Практическая значимость**

1. Разработанные методики и алгоритмы расчета позволяют повысить надежность эксплуатации изделий, включающих осесимметричные тонкостенные упругие конструкции, содержащие идеальную несжимаемую жидкость.

2. Приведены тестовые примеры вычисления собственных частот оболочечных конструкций из алюминиевых и титановых сплавов различной геометрической формы, заполненных жидкостью, с учетом разнообразных видов закрепления торцовых поверхностей и условий нагружения.

3. Результаты, полученные на основе теоретических и численных исследований, могут быть использованы на этапе проектирования баллонов и резервуаров специального назначения при оценке прочности и долговечности конструкций расчетными и экспериментальными методами.

4. Разработана и апробирована версия программы расчета динамических характеристик осесимметричных тонкостенных упругих конструкций, содержащих объемы идеальной несжимаемой жидкости, с использованием метода конечных элементов, реализованная в среде офисной программы Excel на языке программирования Visual Basic for Applications (VBA) и позволяющая проводить исследования без использования дорогостоящих специализированных программно-аппаратных комплексов.

5. Материалы диссертации также могут быть использованы в учебных процессах студентов, обучающихся по направлению механики деформируемого твердого тела.

**Достоверность полученных результатов** основывается на корректности математических моделей и строгости математических решений. Достоверность следует из сравнения с известными аналитическими и численными решениями, полученными для конструкций, содержащих жидкость, а также экспериментальными данными.

#### **Апробация результатов работы и публикации**

Основные материалы и результаты исследований по теме диссертационной работы были доложены и обсуждались на международных конференциях и научном чтении.

По теме диссертационной работы было опубликовано 9 работы. В том числе две работы опубликованы в изданиях, входящих в перечень ведущих рецензируемых научных журналов, рекомендованных ВАК РФ и две входят в



перечень Scopus.

### **Объем и структура работы**

Диссертационная работа состоит из введения, 4 глав, заключения и списка используемой литературы. Общий объем диссертации составляет 144 страниц.

## Глава 1. Обзор литературных источников

Исследование устойчивости тонкостенных конструкций с жидкостью имеет долгую историю, которая ведется со времен античности. Одним из первых записей об этом вопросе является труд Архимеда из Сиракуз, выдающегося математика, физика и инженера Древнего Мира, в котором он исследовал устойчивость сосудов, заполненных жидкостью [68].

С течением времени это исследование продолжало развиваться и в XVIII веке математики, такие как Леонард Эйлер и Д'Аламбер [69, 70, 74], начали применять математические методы для исследования устойчивости тонкостенных конструкций. В XIX веке исследования в этой области продолжились с развитием новых математических методов и методов экспериментальной механики.

С ростом интереса к устойчивости тонкостенных конструкций в науке и технике, исследования по этой теме продолжают развиваться. Научные работы постоянно выходят в свет, а технологии для анализа устойчивости конструкций становятся все более сложными и точными. Развитие исследования устойчивости тонкостенных конструкций с жидкостью в последние годы происходило в рамках нескольких научных дисциплин, таких как механика жидкостей и газов, механика композитных материалов, аэродинамика и гидродинамика. В этой области исследований был достигнут значительный прогресс в разработке математических моделей для прогнозирования устойчивости тонкостенных конструкций с жидкостью, а также в разработке экспериментальных методов для их исследования. Научные достижения в этой области используются в ряде практических областей, таких как проектирование баков, контейнеров, нефтяных резервуаров и других объектов, которые должны выдерживать давление жидкости.

Современные исследования по устойчивости тонкостенных конструкций с жидкостью включают в себя применение компьютерных технологий и современных математических методов для моделирования и анализа динамики движения жидкости внутри конструкций. С развитием компьютерных технологий и математических методов исследование устойчивости тонкостенных конструкций стало более детальным и точным. Например, возможность моделирования

позволяет исследователем выявлять и анализировать факторы, влияющие на устойчивость конструкций, и улучшать их проектирование. Эти исследования также включают влияние различных факторов, таких как температура, давление, скорость и текучесть. Это значит, что исследователи могут использовать более передовые компьютерные программы и математические методы, чтобы создавать более точные модели и проводить более точные расчеты, оценить устойчивость тонкостенных конструкций с жидкостью при различных условиях. В будущем, можно ожидать дальнейшего развития в этой области.

Существует несколько методов расчета устойчивости, включая линейный анализ устойчивости, нелинейный анализ устойчивости, экспериментальное тестирование и т.д.

Линейный анализ устойчивости – это математический метод определения устойчивости системы на основе малых возмущений. Этот метод предполагает, что реакция системы на малые возмущения является линейной и предсказуемой. Линейный анализ устойчивости может быть выполнен с использованием анализа собственных значений, который определяет критические условия устойчивости, находя собственные значения и собственные векторы линеаризованных уравнений системы.

Нелинейный анализ устойчивости, с другой стороны, является более продвинутым методом, чем линейный анализ устойчивости, поскольку он учитывает нелинейное поведение системы. В отличие от линейного анализа устойчивости, который предполагает, что отклик системы на малые возмущения является линейным, нелинейный анализ устойчивости учитывает влияние больших возмущений, которые могут привести к нелинейности в отклике системы.

Нелинейный анализ устойчивости важен для систем, которые проявляют значительное нелинейное поведение, как турбулентность, хаотическое поведение или большие деформации. Здесь нелинейный анализ устойчивости обеспечивает более точное понимание поведения системы.

Экспериментальное тестирование – это еще один метод определения устойчивости. Он включает в себя наблюдение реакции системы на возмущения с

целью определения ее устойчивости. Этот метод часто используется для сложных систем, где теоретические методы невозможны, или для подтверждения результатов теоретических методов.

Кроме того, существует различные численные методы, которые могут быть использованы для анализа устойчивости динамических систем, такие как метод Рунге-Кутты, метод Ньюмарка [73] и метод Уилсона [84]. Эти методы включают численное интегрирование уравнений движения для получения отклика системы во времени. Эти методы полезны для анализа систем, которые подвергаются большим деформациям или нелинейному поведению. Каждый из этих методов имеет свои преимущества и ограничения, и выбор метода зависит от конкретных требований проблемы.

Теория упругости и устойчивость тонкостенных конструкций представлены в некоторых классических работах. Тимошенко [60] в своей работе посвятил главу вопросу устойчивости тонкостенных конструкций. Книга была первоначально издана в 1975 году и в последующих изданиях была дополнена новым материалом. Рассматриваются различные методы и подходы к анализу устойчивости тонкостенных конструкций, включая методы Эйлера, Лагранжа и Релея. В качестве примеров, автор приводит анализ устойчивости цилиндрических оболочек, дуговых балок и т.д. В работе Койтера [76] автор исследовал устойчивость равновесия упругих систем. В работе особое внимание уделяется линейному анализу устойчивости упругих систем, а также вводится концепция точки бифуркации как способа, характеризующего перехода от устойчивого равновесия к неустойчивому. В другой работе Койтера [77] автор исследовал устойчивость критического состояния тонкостенного цилиндра при осевом сжатии. Работы Койтера оказали значительный вклад в исследование тонкостенных конструкций, и его методология до сих пор широко используется при анализе сложных систем. Кроме того, указанные вопросы рассмотрены в работах А.С. Вольмира, Л.С. Лейбензона и др. [12, 15, 16, 30, 39, 41, 48]. В.З. Власов, А.Л. Гольденвейзер, В.В. Новожилов, А.С. Вольмир и другие внесли значительный вклад в развитие теории оболочек. [14, 15, 20, 49].

В данной работе используется метод конечных элементов, и в его развитии участвовали многие авторы, среди которых были Н. Бате, Е. Вилсон, О. Зенкевич, В.А. Постнов и др. [4, 31, 54]. А также рассматривается метод гармонического баланса, который проводили в работах [1, 16, 50, 51, 75].

Общие вопросы нелинейной теории упругости представлены в работах [5, 13, 43, 45, 47, 55, 59, 63]. Работы Власова, Ильгамова, Шмакова и других авторов повысили уровень разработки решений задач о колебаниях оболочек [14, 17, 20, 32, 38, 44, 61, 64, 78]. Исследования устойчивости тонкостенных конструкций, содержащих жидкость, представлены в работах [6, 7, 10, 11, 17, 22, 23, 27, 35, 57, 64].

Было бы правильным сказать, что к настоящему времени было опубликовано значительное количество работ, посвященных расчету динамических характеристик оболочек, заполненных жидкостью. Среди них, отметим те, которые посвящены различным формам оболочек с жидкостью – в работах [8, 9, 18, 40, 42, 46, 52, 53, 58, 64, 65, 67, 79, 80], различным видам нагружения [2, 33, 62, 81], влиянию других параметров на устойчивости [19, 36, 66, 71].

Несмотря на продвижения в изучении устойчивости тонкостенных конструкций с жидкостью, существует ряд открытых вопросов и проблем, таких как:

- разработка более точных методов расчета устойчивости тонкостенных конструкций, учитывающих нелинейные эффекты, такие как большие деформации, неоднородность и несимметричность материала, а также взаимодействие между конструкцией и жидкостью,

- учет динамических нагрузок, таких как воздействие волн, при расчете устойчивости конструкций, которые содержат жидкость,

- изучение поведения тонкостенных конструкций, содержащих жидкость, при наличии неоднородностей в материале, например, при наличии сварных соединений,

- разработка новых методов и технологий, которые позволят эффективно предсказывать и контролировать устойчивость тонкостенных конструкций с

жидкостью в реальных условиях эксплуатации,

- изучение влияния различных параметров на устойчивость тонкостенных конструкций, содержащих жидкость, таких как форма конструкции, свойства материала, размеры конструкции, уровень напряжений и др.

## **Глава 2. Постановка задачи и программное обеспечение расчета динамических характеристик упругих тел, взаимодействующих с ограниченными объемами идеальной несжимаемой жидкости, при действии однородного гравитационного поля**

В данной главе сформулированы основные уравнения, описывающие совместные колебания упругого тела и находящегося в контакте с ним ограниченного объема жидкости. Жидкость при этом считается идеальной и несжимаемой, а вся система находится под действием однородного гравитационного поля. Направление вектора гравитации определяет положение свободной поверхности жидкости в состоянии покоя. Колебания полагаются малыми, так что уравнения колебаний получаются линейными. Для учета влияния начальной статической деформации на резонансные частоты рассматриваемой системы используются нелинейные геометрические уравнения теории упругости, которые линеаризуются в окрестности статического напряженно-деформированного состояния упругого тела, так что малые колебания нагруженной статически системы описываются линейными соотношениями. В системе учитываются также гравитационная энергия колебаний свободной поверхности жидкости и связанная с ней гравитационная энергия контактного взаимодействия жидкости со смоченной поверхностью упругого тела. Трехмерная пространственная инвариантная вариационная формулировка задачи в общей постановке приведена в разделе 2.1.

### **2.1. Вариационная постановка задачи о колебаниях упругого тела, взаимодействующего с ограниченным объемом жидкости, при действии однородного гравитационного поля**

Рассмотрим малые колебания упругой конструкции с полостью, частично заполненной жидкостью (рис. 2.1). Колебания упругого тела описываются геометрическими, физическими соотношениями и граничными условиями. Жидкость полаг

ается идеальной и несжимаемой.

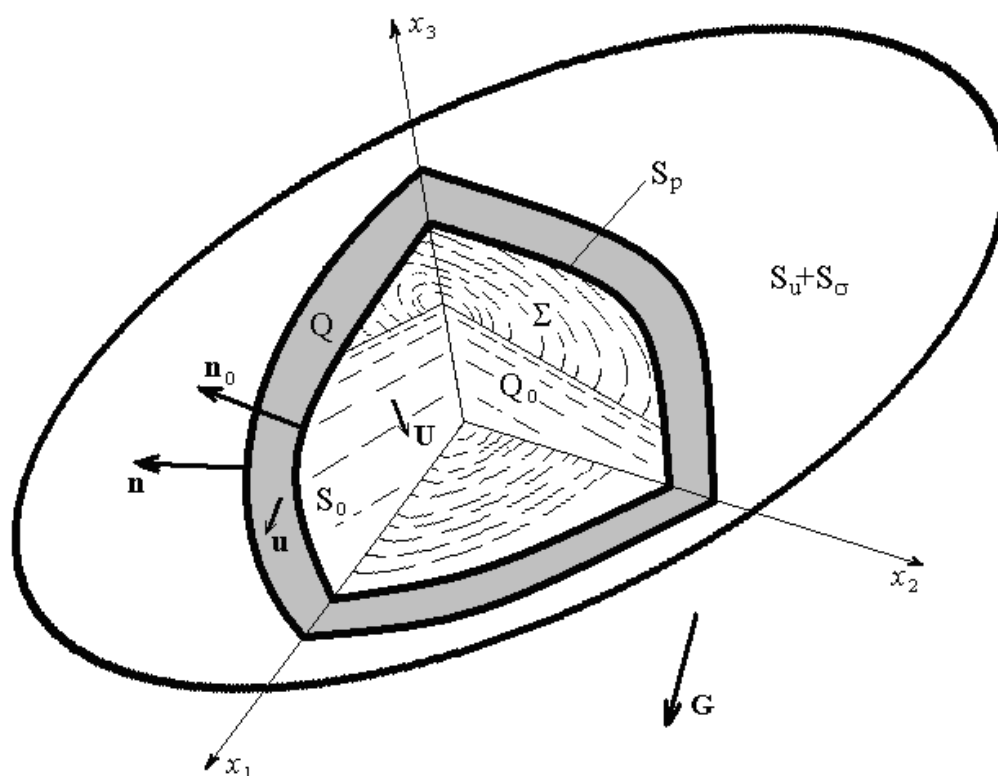


Рис. 2.1. Сечение упругого тела, содержащего жидкость, и обозначения.

Для полноты системы следует упомянуть уравнения равновесия, которые замыкают формулировку краевой задачи. Однако в рамках вариационной постановки эта группа уравнений не участвует, являясь следствием условия равенства нулю вариации функционала, называемого действием, который равен интегралу лагранжиана системы. Кроме того, в результате дискретизации задачи посредством метода конечных элементов уравнения равновесия представляются системой линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

Второе предварительное замечание касается соответствия понятий «содержащее жидкость» и «взаимодействующее с ограниченным объемом жидкости». Первое понятие характеризуется представлением о том, что жидкость полностью находится внутри упругого тела (см. рис. 2.1). Можно представить ситуацию, когда упругое тело соприкасается лишь с частью границы, удерживающей жидкость, а остальная часть границы полагается жесткой недеформируемой (пример – упругая дамба, удерживающая воду в водохранилище



от вытекания). Этот вариант охватывается предложенной в работе методикой в отличие от ситуации колебаний упругой конструкции (например, корабля или баржи), плавающей на поверхности теоретически неограниченной жидкой массы. В последнем случае потребуются иные методы расчета в связи с принципиально отличающимся характером проблемы.

На рис. 2.1 показаны обозначения, введенные для описания задачи:  $Q$  и  $Q_0$  – объемы, занятые упругим телом и жидкостью,  $S$  – поверхность упругого тела,  $S_0$  – поверхность полости, смоченная жидкостью объема  $Q_0$ ,  $S_p$  – поверхность полости, подверженная действию избыточного внутреннего давления газов  $p_0$ ,  $S_u$  и  $S_\sigma$  – участки поверхности, на которых заданы кинематические и динамические граничные условия. Область над поверхностью жидкости не именуется, поскольку динамика газов, создающих избыточное статическое давление, в рассматриваемом низкочастотном диапазоне не учитывается. Границу жидкой массы составляют свободная поверхность  $\Sigma$  и контактная поверхность  $S_0$ . Введены векторы  $\vec{u}$  и  $\vec{U}$ , обозначающие смещения точек упругого тела и жидкости,  $\vec{G}$  – вектор ускорения гравитационных сил,  $\vec{n}_0$  – вектор нормали к поверхности  $S_0$ . Перемещения точек упругого тела описываются векторным полем  $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x})$ , определенным в области  $Q$ , а перемещения частиц жидкости описываются полем  $\vec{U} = \vec{U}(\vec{x})$  в области  $Q_0$ .

Конструкция находится в однородном гравитационном поле с вектором ускорения свободного падения  $\vec{G}$ , который ортогонален свободной поверхности жидкости в невозмущенном состоянии:

$$\vec{G} = -G\vec{n}_0 \text{ на } \Sigma.$$

В соответствии с формулировкой работы [27] поле малых перемещений частиц жидкости представлено градиентом скалярного поля:

$$\vec{U} = \nabla\Phi \text{ в } Q_0, \quad (2.1)$$

где  $\Phi$  - потенциал смещений. Граничное условие на смоченной поверхности имеет вид условия не протекания:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = (\vec{u}, \vec{n}_0) \text{ на } S_0. \quad (2.2)$$

Из условия не сжимаемости следует уравнение Лапласа для потенциала смещений:

$$\Delta\Phi = 0 \text{ в } Q_0. \quad (2.3)$$

На свободной поверхности жидкости должны быть выполнены условия:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = \eta \text{ на } \Sigma, \quad (2.4)$$

$$\ddot{\Phi} + G\eta = 0 \text{ на } \Sigma, \quad (2.5)$$

где  $\eta$  – нормальные смещения точек свободной поверхности,  $G = |\vec{G}|$ .

Давление в жидкости определяется как сумма гидростатической составляющей  $P_0$  и малой вариации  $p$ :

$$P = P_0 + p, \quad P_0 = p_0 + \rho_0(\vec{G} \cdot \vec{x} - \vec{x}_0) = p_0 + P_g, \quad (2.6)$$

где  $\vec{x}_0$  – произвольная точка свободной поверхности жидкости,  $\rho_0$  – плотность жидкости,  $p_0$  – статическое давление газов над поверхностью жидкости, а  $P_g$  – составляющая, связанная с весом жидкости в гравитационном поле и пропорциональная глубине.

Физическое уравнение материала упругого тела полагаем линейным и запишем в виде:

$$\sigma = \mathbf{D}\varepsilon, \quad (2.7)$$

где  $\sigma$  – вектор компонент тензора напряжений,  $\varepsilon$  – вектор компонент тензора деформаций, а  $\mathbf{D}$  – матрица модулей упругости, вид которой зависит от упругих свойств материала тела.

Для описания деформации упругого тела используем нелинейные геометрические соотношения [34, 47], записанные в квадратичном приближении в виде:

$$\varepsilon(\vec{u}) = \varepsilon^L(\vec{u}) + \varepsilon^{NL}(\vec{u}, \vec{u}), \quad (2.8)$$

где  $\varepsilon^L$  – линейный дифференциальный оператор,  $\varepsilon^{NL}$  – билинейный симметричный дифференциальный оператор, а компоненты деформаций представлены векторами-столбцами.

Полное перемещение точек упругого тела запишем в виде суммы статической и динамической составляющих следующим образом:

$$\mathbf{u}^{полн.}(t) = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}(t). \quad (2.9)$$

Подставляя сумму малой динамической составляющей и (вообще говоря, не малой) статической составляющей (2.9) в уравнение (2.8), можно с учетом свойств обозначенных выше дифференциальных операторов переписать (2.8) в виде:

$$\varepsilon(\vec{\mathbf{u}}_0 + \vec{\mathbf{u}}) = \varepsilon^L(\vec{\mathbf{u}}_0) + \varepsilon^L(\vec{\mathbf{u}}) + \varepsilon^{NL}(\vec{\mathbf{u}}_0, \vec{\mathbf{u}}_0) + 2\varepsilon^{NL}(\vec{\mathbf{u}}_0, \vec{\mathbf{u}}) + \varepsilon^{NL}(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{u}}). \quad (2.10)$$

Выражение для полной потенциальной энергии деформации имеет вид:

$$V_Q^{полн} = \frac{1}{2} \int_Q \boldsymbol{\varepsilon}(\vec{\mathbf{u}}_0 + \vec{\mathbf{u}})^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}(\vec{\mathbf{u}}_0 + \vec{\mathbf{u}}) dV, \quad (2.11)$$

Полагая статическую составляющую поля перемещений заданной (предварительно вычисленной), после подстановки (2.10) в (2.11) и раскрытия всех скобок с целью формулирования задачи о собственных формах колебаний (около этой статической компоненты) оставляем в выражении (2.11) только члены второго порядка, зависящие от времени. В результате получается формула для потенциальной энергии колебаний упругого тела:

$$V_Q = \frac{1}{2} \int_Q \left\{ \left[ \left( \boldsymbol{\varepsilon}^L(\vec{\mathbf{u}}) + 2\boldsymbol{\varepsilon}^{NL}(\vec{\mathbf{u}}_0, \vec{\mathbf{u}}) \right) \right]^T \mathbf{D} \left[ \left( \boldsymbol{\varepsilon}^L(\vec{\mathbf{u}}) + 2\boldsymbol{\varepsilon}^{NL}(\vec{\mathbf{u}}_0, \vec{\mathbf{u}}) \right) \right] + \right. \\ \left. + 2\boldsymbol{\varepsilon}(\vec{\mathbf{u}}_0)^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}^{NL}(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{u}}) \right\} dV. \quad (2.12)$$

В целом колебания рассматриваемого типа конструкции описывается совокупностью трех функций, каждая из которых определена на своей поверхности или в области пространства. Это векторное поле перемещений точек упругого тела  $\vec{\mathbf{u}}$ , скалярное поле потенциала смещений частиц жидкости  $\Phi$  и поле вертикальных перемещений частиц на поверхности жидкости  $\eta$ .

В работах [26, 28] показано, что потенциальная энергия колебаний гидроупругой системы состоит из потенциальной энергии деформации упругого тела, потенциальной энергии колебаний свободной поверхности жидкости и потенциалов сил контактного взаимодействия тела с жидкостью, нагруженной гравитационными силами, и давлением газа, находящегося в полости:

$$V = V_Q + V_\Sigma + V_G + V_P. \quad (2.13)$$

Потенциальная энергия жидкости, связанная с изменением формы свободной поверхности, вычисляется по формуле [37] :

$$V_\Sigma = \frac{1}{2} \int_\Sigma \rho_0 G \eta^2 dS. \quad (2.14)$$

Потенциал сил контактного взаимодействия тела с жидкостью определяется формулой:

$$V_G = -\frac{1}{2} \int_{S_0} \left\{ P_g \left( \vec{u} \cdot \left[ \vec{r}_\alpha \times \frac{\partial \vec{u}}{\partial \beta} - \vec{r}_\beta \times \frac{\partial \vec{u}}{\partial \alpha} \right] \right) + \right. \\ \left. + \rho_0 (\vec{G}, \vec{u}) (\vec{u}, \vec{r}_\alpha \times \vec{r}_\beta) \right\} d\alpha d\beta, \quad (2.15)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  – координаты на контактной поверхности (в общем случае не ортогональные),  $\vec{r} = \vec{r}(\alpha, \beta)$  – радиус-вектор точки на поверхности и касательные к координатным линиям векторы  $\vec{r}_\alpha = \partial \vec{r} / \partial \alpha$ ,  $\vec{r}_\beta = \partial \vec{r} / \partial \beta$ . Здесь гидростатическое давление на смоченную поверхность  $P_g = \rho_0 (\vec{G}, \vec{r} - \vec{x}_0)$ , где  $\vec{x}_0$  – произвольная точка свободной поверхности жидкости.

Потенциал давления газа равен

$$V_P = -\frac{1}{2} \int_{S_0 \cup S_p} p_0 \left( \vec{u} \cdot \left[ \vec{r}_\alpha \times \frac{\partial \vec{u}}{\partial \beta} - \vec{r}_\beta \times \frac{\partial \vec{u}}{\partial \alpha} \right] \right) d\alpha d\beta, \quad (2.16)$$

где область интегрирования включает смоченную жидкостью поверхность в соответствии с законом Паскаля.

Кинетическая энергия гидроупругой системы может быть вычислена по формуле:

$$T = \frac{1}{2} \int_Q \rho \dot{\vec{u}}^2 dV + \frac{1}{2} \int_{Q_0} \rho_0 (\vec{\nabla} \Phi)^2 dV. \quad (2.17)$$

Однако при попытке использовать функционал Лагранжа в виде  $L = T - V$  для конечно-элементного моделирования собственных колебаний конструкции и вычисления ее собственных частот возникнут трудности с обеспечением выполнения кинематических ограничений, налагаемых уравнениями (2.2), (2.3) и

(2.4).

В работах [24, 26] предложена модификация лагранжиана, в которой изменено выражение кинетической энергии в виде:

$$T^* = \frac{1}{2} \int_Q \rho \dot{\mathbf{u}}^2 dV - \frac{1}{2} \int_{Q_0} \rho_0 (\vec{\nabla} \Phi)^2 dV + \int_{S_0} \rho_0 \dot{\Phi} (\dot{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{n}}_0) dS + \int_{\Sigma} \rho_0 \dot{\Phi} \dot{\eta} dS. \quad (2.18)$$

Выражение (2.18) в точности равно кинетической энергии конструкции, если присутствующие в нем поля удовлетворяют указанным ограничениям. В то же время, численные решения, полученные с использованием модифицированной формулы лагранжиана

$$L^* = T^* - V, \quad (2.19)$$

автоматически этим ограничениям удовлетворяют.

Вычислив вариацию функционала (2.19), получим из условия его стационарности уравнения колебаний конструкции вместе с условиями:

$$\begin{aligned} \Delta \ddot{\Phi} &= 0 \quad \text{в } Q, \\ \frac{\partial \ddot{\Phi}}{\partial n} &= \ddot{w} \quad \text{на } S_0, \end{aligned}$$

а если для жидкости учтено влияние поверхностных волн, то и соотношение:

$$\frac{\partial \ddot{\Phi}}{\partial n} = \ddot{\eta} \quad \text{на } \Sigma.$$

Эти уравнения являются дважды продифференцированными по времени соотношениями (2.2), (2.3), (2.4). Такое отличие не принципиально, поскольку в уравнениях колебаний упругой части конструкции присутствует лишь вторая производная по времени потенциала смещений.

В работе [29] показано, что дискретизация сформулированной задачи возможна в трехмерной постановке с использованием конечных элементов четырех типов в соответствии с природой членов сумм в формулах (2.13) и (2.18). Это трехмерные элементы жидкости элементы упругого тела, а также двумерные элементы контактных поверхностей упругого тела с жидкостью и газом и элементы свободной поверхности жидкости. В случае, когда статическая деформация упругого тела относительно невелика, она достаточно точно вычисляется из

линейной задачи, что существенно облегчает построение вычислительного алгоритма.

## **2.2. Колебания осесимметричных тонкостенных конструкций, взаимодействующих с ограниченными объемами жидкостей, при действии однородного гравитационного поля**

В технических приложениях часто встречаются упругие тонкостенные конструкции, для описания поведения которых можно использовать уравнения теории упругих оболочек. Если конструкция составлена из оболочек вращения, оси которых совпадают, вектор гравитации действует параллельно этим осям и объемы жидкостей, с которыми взаимодействует конструкция, также имеют осевую симметрию относительно той же оси, то в целом колебательная система является осесимметричной, и ее колебания можно рассматривать в цилиндрической системе координат  $Or\beta z$  (см. рис. 2.2а). Разложение параметров колебаний в ряд Фурье по окружной координате  $\beta$  позволяет разбить спектр собственных частот системы на совокупность подспектров, каждый из которых соответствует определенному числу волн по окружности в собственной форме. Нулевой член ряда Фурье соответствует симметричным (продольно-радиальным и крутильным) формам колебаний. Следующий член соответствует антисимметричным формам, что в случае удлиненных вдоль оси конструкций характеризует изгибные колебания. Собственные частоты форм с числом волн по окружности 1 и более имеют кратность 2, при этом две линейно независимые собственные формы одной частоты различаются лишь сдвигом по окружности на четверть волны.

Благодаря указанной особенности исключается необходимость при численном решении задачи о собственных частотах и формах колебаний осуществлять дискретизацию системы в окружном направлении. Для каждого заданного числа волн по окружности подразумевается аналитическая функциональная зависимость параметров деформации от окружной координаты. Из этого следует, что одна из трех координат исключается из рассмотрения, и

трехмерная задача расчета собственных частот и форм сводится к набору двумерных задач. Геометрической основой этих задач оказывается двумерная область, представляющая половину продольного сечения конструкции (рис. 2.2б).

Предположение о тонкостенности упругих компонент конструкции позволяет применить к описанию их поведения гипотез теории тонких оболочек [49]. Следствием этого оказывается необходимость геометрического совмещения поверхности контакта жидкости и упругой конструкции с частью срединной поверхности соответствующей тонкой оболочки. Это не вносит в результаты расчетов погрешность, превышающую погрешность, вносимую указанными гипотезами.

При реализации метода конечных элементов двумерность базовой области, вращение которой вокруг оси симметрии образует трехмерную конструкцию, дает возможность аппроксимировать сечение упругой стенки одномерными двумя-узловыми конечными элементами [31]. Сечение объема жидкости в данной работе аппроксимируется трех-узловыми треугольными конечными элементами.

Для обеспечения более широкого диапазона применения вычислительной программы предполагается, что конструкция может содержать несколько ограниченных объемов различных жидкостей (или взаимодействовать с несколькими объемами).

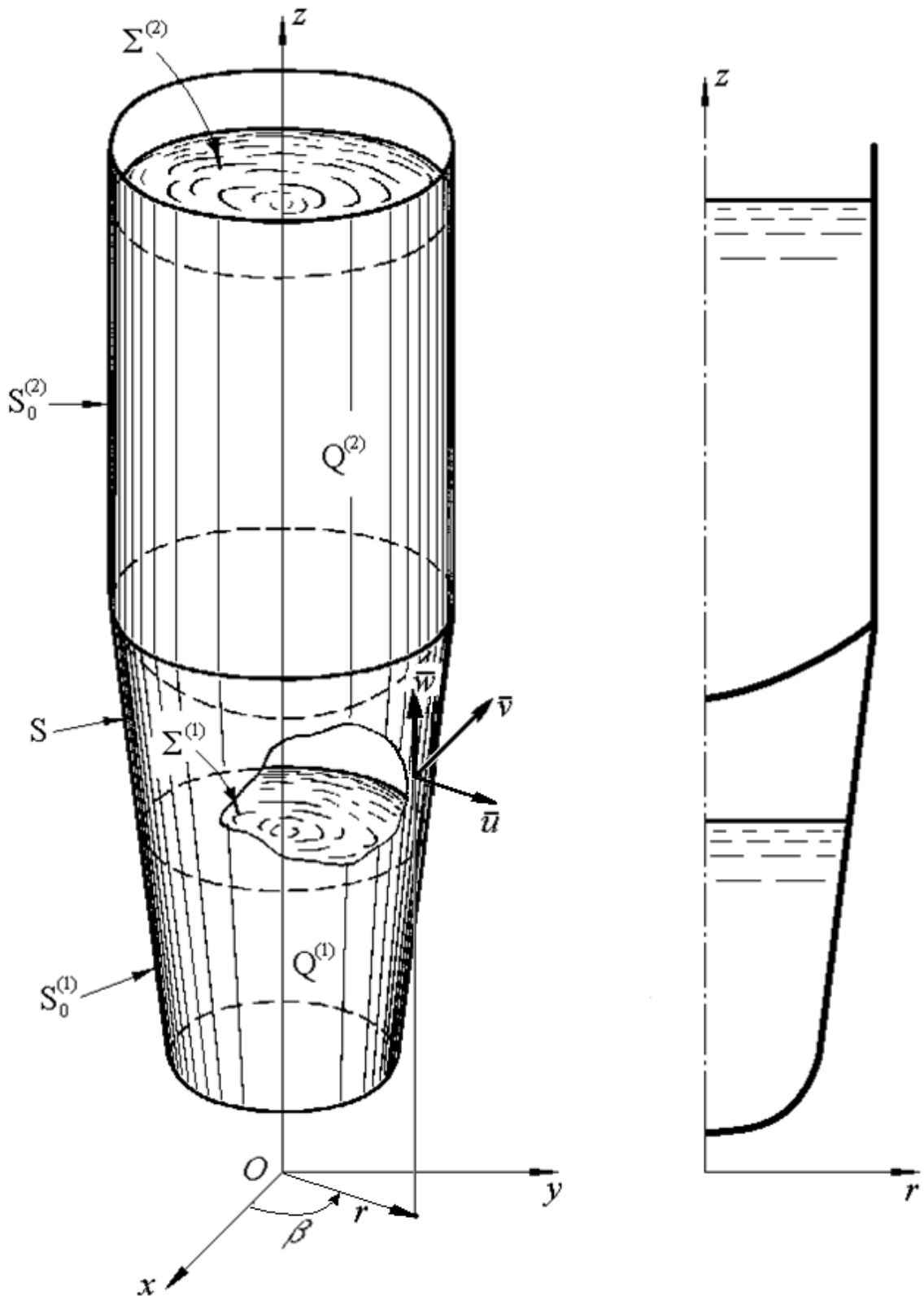


Рис. 2.2. Осесимметричная конструкция и ее продольное сечение

Составляющие конструкцию оболочки вращения могут соединяться при помощи упругих шпангоутов. Оболочки считаются тонкими упругими и могут быть подкреплены набором несимметричных относительно срединной поверхности



часто расположенных продольных и кольцевых ребер. Упругие шпангоуты представляют собой тонкие кольца, размеры поперечных сечений которых малы по сравнению с их радиусами. Жидкость считается идеальной и несжимаемой, движение жидкости безвихревое. Конструкция находится в однородном поле гравитационных сил с ускорением, направленным вдоль оси симметрии конструкции, так что в невозмущенном состоянии свободная поверхность жидкости перпендикулярна этой оси.

В дальнейших формулах введены следующие обозначения:

$S$  – срединная поверхность оболочки,

$N_c$  – число не связанных между собой объемов жидкости,

$Q^{(k)}$  – область, занятая  $k$ -м объемом жидкости,

$S_0^{(k)}$  – поверхность оболочки, смоченная жидкостью  $k$ -го объема,

$\Sigma^{(k)}$  – свободная поверхность жидкости  $k$ -го объема,

$\rho_0^{(k)}$  – плотность жидкости в  $k$ -ом объеме,

$p_0^{(k)}$  – давление газов над поверхностью  $k$ -го объема жидкости,

$E, \nu, \rho, h$  – модуль упругости, коэффициент Пуассона и плотность материала, а также толщина оболочки,

$N_s$  – число упругих шпангоутов,

$E_k, \nu_k, \rho_k$  – механические параметры материала  $k$ -го шпангоута,

$F_k, J_k^r, J_k^z, J_k^{rz}$  – геометрические параметры  $k$ -го шпангоута: площадь поперечного сечения и моменты инерции поперечного сечения относительно его центра тяжести,

$\vec{G}$  – вектор ускорения гравитационных сил,

$\vec{u}$  – вектор смещения точек конструкции.

$r, \beta$  – радиальная и окружная координаты,

$\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$  – перемещения точек в радиальном, окружном и осевом направлениях,

$\alpha, \beta$  – криволинейные координаты на поверхности оболочки ( $\alpha$  отсчитывается вдоль образующей),

$A_\alpha, A_\beta$  – параметры Ламе,

$R_\alpha, R_\beta$  – радиусы кривизны поверхности,

$u$  ,  $v$  ,  $w$  – касательные (вдоль образующей и направляющей) и нормальное перемещения точек срединной поверхности оболочки,

$\vec{n}$  – на оболочке вектор единичной нормали, определяющий положительное направление прогиба  $w$ , а на поверхностях  $\Sigma^{(k)}$  – внешняя нормаль,

$\vec{n}^{(k)}$  ( $k = 1, \dots, N_c$ ) – векторы внешних (по отношению к  $Q^{(k)}$ ) нормалей к поверхностям  $S_0^{(k)}$  ( $\vec{n}$  и  $\vec{n}^{(k)}$  либо совпадают, либо противоположны по направлению),

$z_0^{(k)}$  – осевая координата точек свободной поверхности  $\Sigma^{(k)}$ .

Движение жидкости в полостях конструкции описывается при помощи потенциалов смещений  $\Phi^{(k)}$  ( $k = 1, \dots, N_c$ ), для которых выполнены соотношения:

$$\vec{u} = \nabla \Phi^{(k)} \quad \text{в } Q^{(k)}, \quad (2.20)$$

условие не сжимаемости жидкости дает уравнение:

$$\Delta \Phi^{(k)} = 0 \quad \text{в } Q^{(k)}, \quad (2.21)$$

на границах областей  $Q^{(k)}$  выполнены условия:

$$\frac{\partial \Phi^{(k)}}{\partial n} = w \quad \text{на } S_0^{(k)}, \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial \Phi^{(k)}}{\partial n} = \eta^{(k)} \quad \text{на } \Sigma^{(k)}, \quad (2.23)$$

на свободной поверхности жидкости должно удовлетворяться условие:

$$\ddot{\Phi}^{(k)} + G\eta^{(k)} = 0 \quad \text{на } \Sigma^{(k)}. \quad (2.24)$$

Если по условиям задачи пренебрегается влиянием поверхностных волн в жидкости, то вместо (2.24) должно удовлетворяться:

$$\Phi^{(k)} = 0 \quad \text{на } \Sigma^{(k)}. \quad (2.24a)$$

Для возможности учета влияния статического напряженно-деформированного состояния оболочек на спектральные характеристики конструкции используются нелинейные геометрические соотношения в виде [34, 47]:

$$\begin{aligned}
E_\alpha &= \varepsilon_\alpha + \frac{1}{2}\theta_\alpha^2, \quad E_\beta = \varepsilon_\beta + \frac{1}{2}\theta_\beta^2, \quad E_{\alpha\beta} = \Omega_\alpha + \Omega_\beta + \theta_\alpha\theta_\beta, \\
K_\alpha &= -\frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial\theta_\alpha}{\partial\alpha}, \quad K_\beta = -\frac{1}{A_\beta} \frac{\partial\theta_\beta}{\partial\beta} - \frac{1}{A_\alpha A_\beta} \frac{\partial A_\beta}{\partial\alpha} \theta_\alpha, \\
K_{\alpha\beta} &= \tau_\alpha + \frac{1}{R_\alpha} \Omega_\beta = \tau_\beta + \frac{1}{R_\beta} \Omega_\alpha,
\end{aligned} \tag{2.25}$$

где

$$\begin{aligned}
\varepsilon_\alpha &= \frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial u}{\partial\alpha} + \frac{w}{R_\alpha}, \quad \varepsilon_\beta = \frac{1}{A_\beta} \frac{\partial v}{\partial\beta} + \frac{1}{A_\alpha A_\beta} \frac{\partial A_\beta}{\partial\alpha} u + \frac{w}{R_\beta}, \\
\Omega_\alpha &= \frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial v}{\partial\alpha}, \quad \Omega_\beta = \frac{1}{A_\beta} \frac{\partial u}{\partial\beta} - \frac{1}{A_\alpha A_\beta} \frac{\partial A_\beta}{\partial\alpha} v, \\
\theta_\alpha &= \frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial w}{\partial\alpha} - \frac{u}{R_\alpha}, \quad \theta_\beta = \frac{1}{A_\beta} \frac{\partial w}{\partial\beta} - \frac{v}{R_\beta}, \\
\tau_\alpha &= -\frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial\theta_\beta}{\partial\alpha}, \quad \tau_\beta = -\frac{1}{A_\beta} \frac{\partial\theta_\alpha}{\partial\beta} + \frac{1}{A_\alpha A_\beta} \frac{\partial A_\beta}{\partial\alpha} \theta_\beta.
\end{aligned} \tag{2.25a}$$

Здесь обозначено:

$E_\alpha$ ,  $E_\beta$ ,  $E_{\alpha\beta}$  – параметры, характеризующие удлинения и сдвиг срединной поверхности,

$K_\alpha$ ,  $K_\beta$ ,  $K_{\alpha\beta}$  – параметры, характеризующие изменение кривизны и кручение срединной поверхности.

Аналогично (2.8) разделим линейную и квадратичную части соотношений (2.25):

$$\{\varepsilon(\bar{\mathbf{u}})\} = \begin{Bmatrix} E_\alpha \\ E_\beta \\ E_{\alpha\beta} \\ K_\alpha \\ K_\beta \\ K_{\alpha\beta} \end{Bmatrix} = \{\varepsilon^L(\bar{\mathbf{u}})\} + \{\varepsilon^{NL}(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{u}})\}, \tag{2.26}$$

где

$$\{\varepsilon^L(\bar{\mathbf{u}})\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_\alpha \\ \varepsilon_\beta \\ \Omega_\alpha + \Omega_\beta \\ K_\alpha \\ K_\beta \\ K_{\alpha\beta} \end{Bmatrix}, \quad \{\varepsilon^{NL}(\bar{\mathbf{u}}_1, \bar{\mathbf{u}}_2)\} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \theta_\alpha(\bar{\mathbf{u}}_1)\theta_\alpha(\bar{\mathbf{u}}_2) \\ \theta_\beta(\bar{\mathbf{u}}_1)\theta_\beta(\bar{\mathbf{u}}_2) \\ \theta_\alpha(\bar{\mathbf{u}}_1)\theta_\beta(\bar{\mathbf{u}}_2) + \theta_\alpha(\bar{\mathbf{u}}_2)\theta_\beta(\bar{\mathbf{u}}_1) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (2.27)$$

Физические соотношения запишем в виде:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} T_\alpha \\ T_\beta \\ S \\ M_\alpha \\ M_\beta \\ 2H \end{Bmatrix} = [D][\varepsilon], \quad (2.28)$$

где  $T_\alpha$ ,  $T_\beta$ ,  $S$ ,  $M_\alpha$ ,  $M_\beta$ ,  $H$  – внутренние усилия и моменты, а  $[D]$  – матрица упругости, в соответствии с [34] имеющая вид:

$$[D] = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 & A_{11} & A_{12} & 0 \\ B_{21} & B_{22} & 0 & A_{21} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{33} & 0 & 0 & 2A_{33} \\ A_{11} & A_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 & D_{21} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 2A_{33} & 0 & 0 & 4D_{33} \end{bmatrix}. \quad (2.29)$$

Модуль упругости зависит от свойств оболочки. Если оболочки изотропные, компоненты матрицы равны:

$$\begin{aligned} B_{11} = B_{22} &= \frac{Eh}{1-\nu^2}, \quad B_{12} = B_{21} = \nu B_{11}, \quad B_{33} = \frac{1-\nu}{2} B_{11}, \\ D_{11} = D_{22} &= \frac{h^2}{12} B_{11}, \quad D_{12} = D_{21} = \nu D_{11}, \quad D_{33} = \frac{1-\nu}{2} D_{11}, \\ A_{11} = A_{12} = A_{21} = A_{22} = A_{33} &= 0. \end{aligned} \quad (2.30)$$

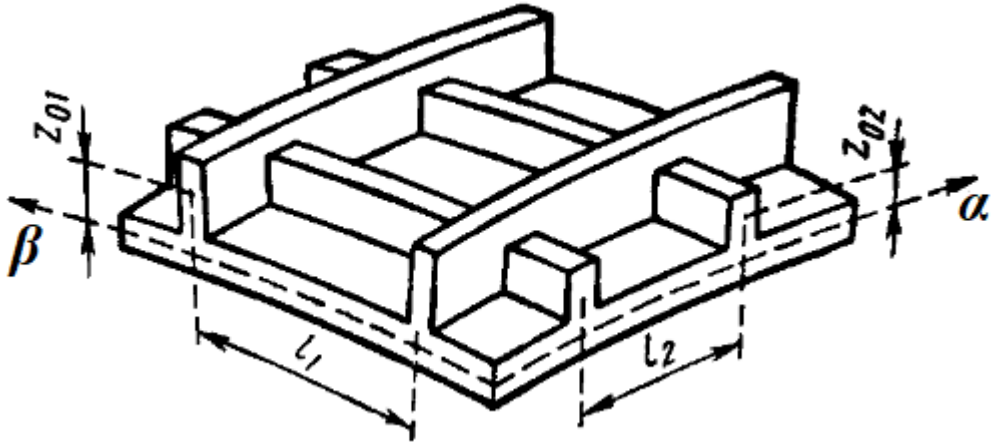


Рис. 2.3. Эксцентричное подкрепление тонкой оболочки

Если же вдоль осей координат  $\alpha$  и  $\beta$  имеется эксцентричное подкрепление в виде ребер (рис. 2.3), то в соответствии с работой [34] при помощи гипотезы “размазывания” получаются добавки к компонентам матрицы упругости, вычисляемые по формулам:

$$\begin{aligned}
 B_{ii}^0 &= \frac{E_i^0 F_i}{l_i} \quad (i = 1, 2), & B_{12}^0 &= B_{21}^0 = B_{33}^0 = 0, \\
 A_{ii}^0 &= \frac{E_i^0 S_i}{l_i} \quad (i = 1, 2), & A_{12}^0 &= A_{21}^0 = A_{33}^0 = 0, \\
 D_{ii}^0 &= \frac{E_i^0 J_i}{l_i} \quad (i = 1, 2), & D_{12}^0 &= D_{21}^0 = D_{33}^0 = 0,
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

где для подкрепляющего ребра, направленного вдоль соответствующей оси, обозначено:

$F_i$  – площадь поперечного сечения ребра,

$S_i$ ,  $J_i$  – статический момент и момент инерции поперечного сечения ребра относительно оси, проходящей через срединную поверхность оболочки,

$l_i$  – среднее расстояние между подкрепляющими ребрами,

$E_i^0$  – модуль упругости материала (предполагается, что  $\nu_i^0 = 0$ ).

При этом величины  $S_i$  и  $J_i$  вычисляются по формулам:

$$S_i = F_i z_{0i}, \quad J_i = J_{0i} + z_{0i}^2 F_i, \tag{2.32}$$

где  $z_{0i}$  – расстояние от центра тяжести поперечного сечения подкрепляющего ребра

до срединной поверхности ( $z_{0i} > 0$ , если ребро расположено на внешней стороне оболочки),  $J_{0i}$  – собственный момент инерции поперечного сечения ребра.

Шпангоут считается кольцом, радиус которого значительно больше размеров его поперечного сечения. При описании движения шпангоута используется гипотеза плоских сечений, состоящая в том, что поперечные сечения кольца остаются при движении плоскими, недеформированными и ортогональными к линии их центров тяжести.

Для  $k$ -го шпангоута, включенного в конструкцию, обозначим:

$r_k$  – расстояние от оси  $Oz$  до центра тяжести поперечного сечения недеформированного кольца,

$\bar{u}_k, \bar{v}_k, \bar{w}_k$  – перемещения точек линии центров тяжести,

$\theta_k$  – угол поворота сечения.

В системе координат  $O_k\xi\beta\eta$ , связанной с центром тяжести сечения  $\Omega_k$  (рис. 2.4), можно записать:

$$\begin{aligned}\bar{u} &= \bar{u}_k(\beta) + \eta\theta_k(\beta) , \\ \bar{v} &= \bar{v}_k(\beta) + \xi\varphi_k(\beta) + \eta\psi_k(\beta) , \\ \bar{w} &= \bar{w}_k(\beta) - \xi\theta_k(\beta) ,\end{aligned}\tag{2.33}$$

и тогда из условия ортогональности сечений и линии центров тяжести получаются выражения для  $\varphi_k$  и  $\psi_k$ :

$$\varphi_k = -\frac{1}{r_k} \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial \beta} + \frac{\bar{v}_k}{r_k} , \quad \psi_k = -\frac{1}{r_k} \frac{\partial \bar{w}_k}{\partial \beta} .$$

Соотношения (2.33) запишем в виде:

$$\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}}_k^s(\mathbf{Y}_k) ,\tag{2.34}$$

где

$$\mathbf{Y}_k = \left\{ \begin{array}{c} \bar{u}_k \\ \bar{v}_k \\ \bar{w}_k \\ \theta_k \end{array} \right\} .$$

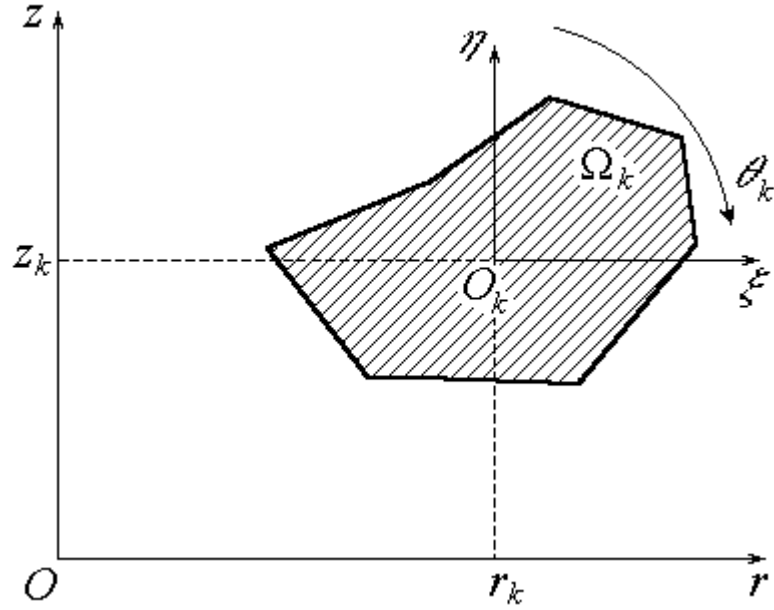


Рис. 2.4. Продольное сечение шпангоута

Отсюда получаются выражения для компонент тензора деформаций (в цилиндрической системе координат):

$$\varepsilon_{\beta\beta} = \frac{1}{r} \left\{ \bar{u}_k + \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial \beta} + \frac{\xi}{r_k} \left( \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial \beta} - \frac{\partial^2 \bar{u}_k}{\partial \beta^2} \right) + \eta \left( \theta_k - \frac{1}{r_k} \frac{\partial^2 \bar{w}_k}{\partial \beta^2} \right) \right\} ,$$

$$\gamma_{r\beta} = 2\varepsilon_{r\beta} = \frac{\eta}{r} \left\{ \frac{1}{r_k} \frac{\partial \bar{w}_k}{\partial \beta} + \frac{\partial \theta_k}{\partial \beta} \right\} , \quad (2.35)$$

$$\gamma_{\beta z} = 2\varepsilon_{\beta z} = -\frac{\xi}{r} \left\{ \frac{1}{r_k} \frac{\partial \bar{w}_k}{\partial \beta} + \frac{\partial \theta_k}{\partial \beta} \right\} ,$$

$$\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{rz} = 0 ,$$

которые запишем в виде:

$$\left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\beta\beta} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{r\beta} \\ \gamma_{\beta z} \\ \gamma_{rz} \end{array} \right\} = \{\varepsilon_k^s(\mathbf{Y}_k)\} . \quad (2.36)$$

На основе физических соотношений теории упругости для изотропного материала шпангоута получаем выражения компонент тензора деформаций в виде:

$$\left\{ \begin{array}{c} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\beta\beta} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{r\beta} \\ \sigma_{\beta z} \\ \sigma_{rz} \end{array} \right\} = [D_k] \{\varepsilon_k^s(\mathbf{Y}_k)\} , \quad (2.37)$$

где

$$[D_k] = E_k^0 \begin{bmatrix} 1 & 1-2\nu_k^0 & 1-2\nu_k^0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 1-2\nu_k^0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \nu_k^0 & 0 & 0 \\ & \text{symm} & & & \nu_k^0 & 0 \\ & & & & & \nu_k^0 \end{bmatrix} ,$$

$$E_k^0 = \frac{E_k(1-\nu_k)}{(1+\nu_k)(1-2\nu_k)} , \quad \nu_k^0 = \frac{1-2\nu_k}{2(1-\nu_k)} ,$$

причем «*symm*» означает, что элементы ниже главной диагонали равны симметричным им элементам выше диагонали.

Таким образом, деформация шпангоута описывается при помощи столбца  $\mathbf{Y}_k$ . Рассматривая шпангоут как тонкое кольцо в составе конструкции, можно пренебречь размерами его поперечного сечения, аппроксимируя это сечение точкой. При этом полагаем, что в этой точке на оболочке выполнены условия:

$$\bar{u} = \bar{u}_k , \quad \bar{v} = \bar{v}_k , \quad \bar{w} = \bar{w}_k , \quad \theta_\alpha = \theta_k . \quad (2.38)$$

Условия (2.38) представляют собой кинематические условия в месте



крепления шпангоута к оболочке.

В дальнейшем совокупность функций, описывающих движение конструкции, будет обозначаться:

$$\mathbf{U} = \left\{ u, v, w, \{ \mathbf{Y}_k, k = 1, \dots, N_s \}, \{ \Phi^{(k)}, \eta^{(k)}, k = 1, \dots, N_c \} \right\}, \quad (2.39)$$

или, соответственно, для случая, когда гравитационными эффектами пренебрегается:

$$\mathbf{U} = \left\{ u, v, w, \{ \mathbf{Y}_k, k = 1, \dots, N_s \}, \{ \Phi^{(k)}, k = 1, \dots, N_c \} \right\}. \quad (2.39a)$$

Теперь, действуя по аналогии с предыдущим разделом, можно сформулировать для тонкостенной конструкции рассматриваемого типа выражение лагранжиана, как функционала на множестве движений  $\mathbf{U}$ .

С использованием выведенных выше соотношений (2.21), (2.22), (2.24), (2.25), (2.28) выражения для кинетической и потенциальной энергии можно записать в виде:

$$\begin{aligned} T(\mathbf{U}) = & \frac{1}{2} \int_S \rho h (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) dS + \sum_{k=1}^{N_s} \frac{1}{2} \int_{\Omega_k} \int_0^{2\pi} \rho_k [\bar{\mathbf{u}}_k^s(\dot{\mathbf{Y}}_k)]^2 r d\beta d\Omega + \\ & + \sum_{k=1}^{N_c} \frac{1}{2} \int_{Q^{(k)}} \rho_0^{(k)} (\nabla \dot{\Phi}^{(k)})^2 dV \end{aligned} \quad (2.40)$$

$$\begin{aligned} V(\mathbf{U}) = & \frac{1}{2} \int_S \{ \varepsilon(\bar{\mathbf{u}}) \}^T [D] \{ \varepsilon(\bar{\mathbf{u}}) \} dS + \sum_{k=1}^{N_s} \frac{1}{2} \int_{\Omega_k} \int_0^{2\pi} \{ \varepsilon_k^s(\mathbf{Y}_k) \}^T [D_k] \{ \varepsilon_k^s(\mathbf{Y}_k) \} r d\beta d\Omega + \\ & + \sum_{k=1}^{N_c} \frac{1}{2} \left[ \int_{\Sigma^{(k)}} \rho_0^{(k)} G \eta^{(k)2} dS - \int_{S_0^{(k)}} \sigma^{(k)} \left\{ P_0^{(k)} [w(\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta) - u\theta_\alpha - v\theta_\beta] + \rho_0^{(k)} (\vec{\mathbf{G}} \cdot \bar{\mathbf{u}}) w \right\} dS \right] - \\ & - \int_S (q_\alpha u + q_\beta v + q_n w) dS - \sum_{k=1}^{N_c} \frac{1}{2} \int_{S_0^{(k)}} (\bar{\mathbf{n}} \cdot \bar{\mathbf{n}}^{(k)}) P_0^{(k)} w dS \end{aligned} \quad (2.41)$$

Здесь функции  $\sigma^{(k)}$  равны:

$$\sigma^{(k)}(\alpha, \beta) = \begin{cases} (\bar{\mathbf{n}} \cdot \bar{\mathbf{n}}^{(k)}) & , (\alpha, \beta) \in S_0^{(k)} \\ 0 & , (\alpha, \beta) \notin S_0^{(k)} \end{cases}.$$

Для обеспечения выполнения условий (2.21), (2.22), (2.23) как следствий

стационарности функционала действия преобразуем выражение кинетической энергии по аналогии с предыдущим разделом к виду:

$$T^*(\mathbf{U}) = T(\mathbf{U}) + \sum_{k=1}^{N_c} \left\{ - \int_{Q^{(k)}} \rho_0^{(k)} (\nabla \dot{\Phi}^{(k)})^2 dV + \int_{S_0^{(k)}} \rho_0^{(k)} \sigma^{(k)} \dot{\Phi}^{(k)} dS + \int_{\Sigma^{(k)}} \rho_0^{(k)} \dot{\eta}^{(k)} \dot{\Phi}^{(k)} dS \right\}, \quad (2.42)$$

соответственно, если не учитываются гравитационные эффекты:

$$T^*(\mathbf{U}) = T(\mathbf{U}) + \sum_{k=1}^{N_c} \left\{ - \int_{Q^{(k)}} \rho_0^{(k)} (\nabla \dot{\Phi}^{(k)})^2 dV + \int_{S_0^{(k)}} \rho_0^{(k)} \sigma^{(k)} \dot{\Phi}^{(k)} dS \right\}. \quad (2.42a)$$

Функционал действия при этом приобретает вид:

$$S^*(\mathbf{U}) = \int_0^t (T^*(\mathbf{U}) - V(\mathbf{U})) dt. \quad (2.43)$$

Для удобства дальнейших преобразований квадратичная часть выражение потенциальной энергии преобразуется к симметричной форме следующим образом:

$$V(\mathbf{U}) = \frac{1}{2} \int_S \{ \varepsilon^L(\bar{\mathbf{u}}) \}^T [D] \{ \varepsilon^L(\bar{\mathbf{u}}) \} dS + \sum_{k=1}^{N_s} \frac{1}{2} \int_{\Omega_k} \int_0^{2\pi} \{ \varepsilon_k^s(\mathbf{Y}_k) \}^T [D_k] \{ \varepsilon_k^s(\mathbf{Y}_k) \} rd\beta d\Omega + \sum_{k=1}^{N_c} \frac{1}{2} \left[ \int_{\Sigma^{(k)}} \rho_0^{(k)} G \eta^{(k)2} dS - \int_{S_0^{(k)}} \sigma^{(k)} \{ \hat{u}^+(\bar{\mathbf{u}}) \}^T [C_F^{(k)}] \{ \hat{u}^+(\bar{\mathbf{u}}) \} dS \right], \quad (2.44)$$

где введены обозначения:

$$\{ \hat{u}^+(\bar{\mathbf{u}}) \} = \left\{ \begin{array}{c} u \\ v \\ w \\ -\theta_\alpha(\bar{\mathbf{u}}) \\ -\theta_\beta(\bar{\mathbf{u}}) \\ \varepsilon_\alpha(\bar{\mathbf{u}}) + \varepsilon_\beta(\bar{\mathbf{u}}) \end{array} \right\},$$

$$[C_F^{(k)}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \rho_0^{(k)} (\vec{G} \cdot \vec{k}_\alpha) & \frac{1}{2} P_0^{(k)} & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} P_0^{(k)} & 0 \\ & & \rho_0^{(k)} (\vec{G} \cdot \vec{n}) & 0 & 0 & \frac{1}{2} P_0^{(k)} \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ \text{symm} & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} .$$

В дальнейшем собственные формы колебаний конструкции и соответствующие им собственные частоты будем обозначать  $U_k$ ,  $\omega_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ). Запишем свойства ортогональности собственных форм, следующие из формул для кинетической и потенциальной энергии. С этой целью перепишем (2.42) и (2.44) в виде:

$$T(\mathbf{U}) = \frac{1}{2} \hat{T}(\dot{\mathbf{U}}, \dot{\mathbf{U}}) \quad , \quad (2.45)$$

$$V(\mathbf{U}) = \frac{1}{2} \hat{V}(\mathbf{U}, \mathbf{U}) \quad , \quad (2.46)$$

где  $\hat{T}$  и  $\hat{V}$  – симметричные билинейные функционалы, вид которых легко определить из (2.42) и (2.44).

Тогда для собственных форм справедливы соотношения:

$$\hat{T}(\mathbf{U}_k, \mathbf{U}_l) = \mu_k \delta_{kl} \quad , \quad (2.47)$$

$$\hat{V}(\mathbf{U}_k, \mathbf{U}_l) = \omega_k^2 \mu_k \delta_{kl} \quad , \quad (2.48)$$

где  $\delta_{kl}$  – символ Кронекера.

Разложим движение конструкции в ряд Фурье по окружной координате следующим образом:

$$u = \sum_{m=0}^{\infty} (u^{m0} \cos m\beta + u^{m1} \sin m\beta),$$

$$v = \sum_{m=0}^{\infty} (v^{m0} \sin m\beta - v^{m1} \cos m\beta),$$

$$\begin{aligned}
w &= \sum_{m=0}^{\infty} (w^{m0} \cos m\beta + w^{m1} \sin m\beta), \\
\left. \begin{aligned}
\Phi^{(k)} &= \sum_{m=0}^{\infty} (\Phi^{(k)m0} \cos m\beta + \Phi^{(k)m1} \sin m\beta) \\
\eta^{(k)} &= \sum_{m=0}^{\infty} (\eta^{(k)m0} \cos m\beta + \eta^{(k)m1} \sin m\beta)
\end{aligned} \right\} k = 1, \dots, N_c, \quad (2.49) \\
\left. \begin{aligned}
\bar{u}_k &= \sum_{m=0}^{\infty} (\bar{u}_k^{m0} \cos m\beta + \bar{u}_k^{m1} \sin m\beta) \\
\bar{v}_k &= \sum_{m=0}^{\infty} (\bar{v}_k^{m0} \sin m\beta - \bar{v}_k^{m1} \cos m\beta) \\
\bar{w}_k &= \sum_{m=0}^{\infty} (\bar{w}_k^{m0} \cos m\beta + \bar{w}_k^{m1} \sin m\beta) \\
\theta_k &= \sum_{m=0}^{\infty} (\theta_k^{m0} \cos m\beta + \theta_k^{m1} \sin m\beta)
\end{aligned} \right\} k = 1, \dots, N_s,
\end{aligned}$$

и подставим это разложение в формулы (2.42) и (2.44). Тогда, выполнив интегрирование по окружной координате  $\beta$ , получим выражения вида:

$$\begin{aligned}
T^*(\mathbf{U}) &= \sum_{m=0}^{\infty} \{T_m^*(\mathbf{U}^{m0}) + T_m^*(\mathbf{U}^{m1})\}, \\
V^*(\mathbf{U}) &= \sum_{m=0}^{\infty} \{V_m(\mathbf{U}^{m0}) + V_m(\mathbf{U}^{m1})\},
\end{aligned} \quad (2.50)$$

где обозначено:

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}^{mi} &= \{u^{mi}, v^{mi}, w^{mi}, \{\mathbf{Y}_k^{mi}, k = 1, \dots, N_s\}, \{\Phi^{(k)mi}, \eta^{(k)mi}, k = 1, \dots, N_c\}\}, \\
\mathbf{Y}_k^{mi} &= \left\{ \begin{array}{l} \bar{u}_k^{mi} \\ \bar{v}_k^{mi} \\ \bar{w}_k^{mi} \\ \theta_k^{mi} \end{array} \right\}.
\end{aligned}$$

Здесь  $m = 0, 1, 2, \dots$ ,  $i = 0, 1$ , причем следует полагать, что

$$u^{01} = v^{00} = w^{01} = \Phi^{(k)01} = \eta^{(k)01} = 0, \quad \bar{u}_k^{01} = \bar{v}_k^{00} = \bar{w}_k^{01} = \theta_k^{01} = 0.$$

Соотношения (2.50) означают, что линейные уравнения свободных колебаний конструкции относительно  $\mathbf{U}^{mi}$  для различных пар индексов  $m$  и  $i$  не связаны между собой. Для собственных форм колебаний конструкции указанный

факт означает, что любая собственная форма  $\mathbf{U}_s$  может быть представлена в виде:

$$\begin{aligned}
 u_s &= \tilde{u}_s(\alpha) \cos(m_s \beta - i_s \frac{\pi}{2}), \\
 v_s &= \tilde{v}_s(\alpha) \sin(m_s \beta - i_s \frac{\pi}{2}), \\
 w_s &= \tilde{w}_s(\alpha) \cos(m_s \beta - i_s \frac{\pi}{2}), \\
 \left. \begin{aligned}
 \Phi_s^{(k)} &= \tilde{\Phi}_s^{(k)}(r, z) \cos(m_s \beta - i_s \frac{\pi}{2}) \\
 \eta_s^{(k)} &= \tilde{\eta}_s^{(k)}(r, z) \cos(m_s \beta - i_s \frac{\pi}{2})
 \end{aligned} \right\} k=1, \dots, N_c, \quad (2.51) \\
 \left. \begin{aligned}
 \bar{u}_{ks} &= \tilde{u}_{ks} \cos(m_s \beta - i_s \frac{\pi}{2}) \\
 \bar{v}_{ks} &= \tilde{v}_{ks} \sin(m_s \beta - i_s \frac{\pi}{2}) \\
 \bar{w}_{ks} &= \tilde{w}_{ks} \cos(m_s \beta - i_s \frac{\pi}{2}) \\
 \theta_{ks} &= \tilde{\theta}_{ks} \cos(m_s \beta - i_s \frac{\pi}{2})
 \end{aligned} \right\} k=1, \dots, N_s.
 \end{aligned}$$

Здесь  $m_s$  означает число волн по окружности в выражении собственной формы. Для осесимметричных форм колебаний ( $m_s = 0$ ) значение индекса  $i_s = 0$  соответствует продольно-радиальным колебаниям конструкции (в этом случае  $v_s = \bar{v}_{ks} = 0$ ), а значение индекса  $i_s = 1$  соответствует крутильным колебаниям (в этом случае отличны от нуля лишь  $v_s$  и  $\bar{v}_{ks}$ ). В случае неосесимметричных форм колебаний ( $m_s > 0$ ) каждая собственная частота является кратной (кратности 2), причем собственные формы, соответствующие одной частоте, различаются (с точностью до множителя) только сдвигом по окружности на  $\frac{\pi}{2m_s}$ , т.е. на четверть волны ( $i_s = 0$  или  $i_s = 1$ ).

Выражения функционалов  $T_m^*$  и  $V_m$  в формулах (2.50):

$$\begin{aligned}
T_m^*(\tilde{\mathbf{U}}) &= \frac{1}{2} \pi_m \int_L \rho h (\dot{\tilde{u}}^2 + \dot{\tilde{v}}^2 + \dot{\tilde{w}}^2) r A_\alpha d\alpha + \sum_{k=1}^{N_s} \frac{1}{2} \dot{\tilde{\mathbf{Y}}}_k^T [M_k^m] \dot{\tilde{\mathbf{Y}}}_k + \\
&+ \sum_{k=1}^{N_c} \left\{ -\frac{1}{2} \pi_m \int_{\Omega^{(k)}} \rho_0^{(k)} (\nabla^m \dot{\tilde{\Phi}}^{(k)})^2 r d\Omega + \pi_m \int_{L_0^{(k)}} \rho_0^{(k)} (\tilde{\mathbf{n}} \cdot \tilde{\mathbf{n}}^{(k)}) \dot{\tilde{w}} \dot{\tilde{\Phi}}^{(k)} r A_\alpha d\alpha + \right. \\
&\quad \left. + \pi_m \int_{\Lambda^{(k)}} \rho_0^{(k)} \dot{\tilde{\eta}}^{(k)} \dot{\tilde{\Phi}}^{(k)} r A_\alpha d\alpha \right\}, \tag{2.52}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_m(\tilde{\mathbf{U}}) &= \frac{1}{2} \pi_m \int_L \{ \varepsilon_m^L(\tilde{\mathbf{U}}) \}^T [D] \{ \varepsilon_m^L(\tilde{\mathbf{U}}) \} r A_\alpha d\alpha + \sum_{k=1}^{N_s} \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{Y}}_k^T [K_k^m] \tilde{\mathbf{Y}}_k \\
&+ \sum_{k=1}^{N_c} \frac{1}{2} \pi_m \left[ \int_{\Lambda^{(k)}} \rho_0^{(k)} G \tilde{\eta}^{(k)2} r dr - \int_{L_0^{(k)}} \sigma^{(k)} \{ \hat{u}_m^+(\tilde{\mathbf{U}}) \}^T [C_F^{(k)}] \{ \hat{u}_m^+(\tilde{\mathbf{U}}) \} r A_\alpha d\alpha \right], \tag{2.53}
\end{aligned}$$

где множитель  $\pi_m = \begin{cases} 2\pi, & m = 0 \\ \pi, & m > 0 \end{cases}$ ,

$L, L_0^{(k)}, \Lambda^{(k)}, \Omega^{(k)}$  – осевые сечения поверхностей  $S, S_0^{(k)}, \Sigma^{(k)}$  и областей  $Q^{(k)}$ ,

$$\left\{ \varepsilon_m^L(\tilde{\mathbf{U}}) \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \alpha} + \frac{\tilde{w}}{R_\alpha} \\ \frac{1}{A_\alpha A_\beta} \frac{\partial A_\beta}{\partial \alpha} \tilde{u} + \frac{m}{A_\beta} \tilde{v} + \frac{\tilde{w}}{R_\beta} \\ -\frac{m}{A_\beta} \tilde{u} + \frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \alpha} - \frac{1}{A_\alpha A_\beta} \frac{\partial A_\beta}{\partial \alpha} \tilde{v} \\ -\frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial \tilde{\theta}_\alpha}{\partial \alpha} \\ -\frac{m}{A_\beta} \theta_\beta^m - \frac{1}{A_\alpha A_\beta} \frac{\partial A_\beta}{\partial \alpha} \tilde{\theta}_\alpha \\ \frac{m}{A_\beta} \tilde{\theta}_\alpha + \frac{1}{A_\alpha A_\beta} \frac{\partial A_\beta}{\partial \alpha} \theta_\beta^m + \frac{1}{A_\alpha R_\beta} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \alpha} \end{array} \right\}, \tag{2.54}$$

$$\tilde{\theta}_\alpha = \frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \alpha} - \frac{\tilde{u}}{R_\alpha}, \quad \theta_\beta^m = -\frac{m}{A_\beta} \tilde{w} - \frac{\tilde{v}}{R_\beta},$$

$$[M_k^m] = \pi_m r_k \rho_k \begin{bmatrix} F_k + \frac{m^2}{r_k^2} J_k^r & \frac{m}{r_k^2} J_k^r & \frac{m^2}{r_k^2} J_k^{rz} & 0 \\ & F_k + \frac{1}{r_k^2} J_k^r & \frac{m}{r_k^2} J_k^{rz} & 0 \\ & & F_k + \frac{m^2}{r_k^2} J_k^z & 0 \\ \text{symm} & & & J_k^r + J_k^z \end{bmatrix}, \quad (2.55)$$

$$[K_k^m] = \pi_m \frac{E_k^0}{r_k} \times \begin{bmatrix} F_k + \frac{m^4}{r_k^2} J_k^r & mF_k + \frac{m^3}{r_k^2} J_k^r & \frac{m^4}{r_k^2} J_k^{rz} & \frac{m^2}{r_k} J_k^{rz} \\ & m^2 F_k + \frac{m^2}{r_k^2} J_k^r & \frac{m^3}{r_k^2} J_k^{rz} & \frac{m}{r_k} J_k^{rz} \\ & & \frac{v_k^0 m^2}{r_k^2} J_k^r + \frac{m^2(m^2 + v_k^0)}{r_k^2} J_k^z & \frac{v_k^0 m^2}{r_k} J_k^r + \frac{m^2(1 + v_k^0)}{r_k} J_k^z \\ \text{symm} & & & v_k^0 m^2 J_k^r + (1 + v_k^0 m^2) J_k^z \end{bmatrix},$$

$$\nabla^m \tilde{\Phi}^{(k)} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \tilde{\Phi}^{(k)}}{\partial r} \\ -\frac{m}{r} \tilde{\Phi}^{(k)} \\ \frac{\partial \tilde{\Phi}^{(k)}}{\partial z} \end{array} \right\}, \quad (2.56)$$

$$\{\hat{u}_m^+(\tilde{\mathbf{U}})\} = \left\{ \begin{array}{c} \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ \tilde{w} \\ -\frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \alpha} + \frac{\tilde{u}}{R_\alpha} \\ \frac{m}{A_\beta} \tilde{w} + \frac{\tilde{v}}{R_\beta} \\ \frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \alpha} + \frac{1}{A_\alpha A_\beta} \frac{\partial A_\beta}{\partial \alpha} \tilde{u} + \frac{m}{A_\beta} \tilde{v} + \left( \frac{1}{R_\alpha} + \frac{1}{R_\beta} \right) \tilde{w} \end{array} \right\}.$$

При вычислении кинетической и потенциальной энергии шпангоутов

(выражений для матриц  $[M_k^m]$  и  $[K_k^m]$ ) на основании малости размеров их поперечных сечений по сравнению с радиусами полагалось  $1/r \approx 1/r_k$  (см. формулы (2.40) и (2.41)).

Таким образом, для любого заданного числа волн по окружности  $m$  можно вычислить набор динамических характеристик: собственных частот и форм колебаний и соответствующих им обобщенных масс. При этом явная зависимость от окружной координаты позволяет перейти от трехмерной задачи к двумерной, рассматривая неизвестные функции на осевом сечении конструкции.

### **2.3. Конечно-элементное моделирование колебаний осесимметричных тонкостенных конструкций, взаимодействующих с ограниченными объемами жидкостей**

Как показано в предыдущем разделе, для осесимметричных конструкций задача расчета собственных частот и форм колебаний распадается на ряд двумерных независимых подзадач, каждая из которых характеризуется конкретным числом волн в окружном направлении, которое в данной работе обозначается в дальнейшем буквой  $m$ .

Увеличение этого числа от 0 (осесимметричные – продольно-радиальные и крутильные колебания) до 1 (изгибные или антисимметричные колебания) и более объективно ведет к усложнению геометрии собственных форм и в конечном счете росту собственных частот. Однако, для тонкостенных конструкций характерна ситуация, когда минимальной собственной частоте соответствует форма с числом  $m = 4$  и даже более. Именно низшие собственные частоты в большинстве случаев приводят к нежелательным резонансным эффектам во многих технических системах, и расчет их представляет значительный интерес.

Конечно-элементный анализ таких осесимметричных систем с применением пространственных конечных элементов (трехмерных или двумерных) связан с необходимостью дискретизации во всех направлениях, включая и окружное. Необходимость аппроксимации волнового характера низкочастотных собственных



форм в этом случае ведет к значительному росту размерности дискретных конечно-элементных моделей и неизбежной потере точности.

Исключение окружной координаты  $\beta$  посредством тригонометрических функций при расчете собственных частот, проведенное в предыдущем разделе, сводит область определения краевых задач к совокупности двумерных и одномерных областей, образующих половину осевого сечения анализируемых конструкций.

Исключение окружной координаты  $\beta$  с помощью формул (2.51) позволяет рассматривать в качестве областей определения потенциалов  $\tilde{\Phi}^{(k)}$  области  $\Omega^{(k)}$ , являющиеся осевыми сечениями областей  $Q^{(k)}$ , перемещения  $\tilde{u}$ ,  $\tilde{v}$ ,  $\tilde{w}$  считать определенными на одномерном многообразии  $L$ , являющемся осевым сечением срединной поверхности оболочки  $S$ , а вертикальные смещения  $\eta^{(k)}$  свободных поверхностей жидких объемов определять на осевых сечениях  $\Lambda^{(k)}$  свободных поверхностей  $\Sigma^{(k)}$ . Поэтому для решения задачи на плоскости  $Oxz$  будут использованы конечные элементы трех видов - двумерные для аппроксимации областей  $\Omega^{(k)}$ , одномерные для аппроксимации многообразия  $L$  и для аппроксимации многообразий  $\Lambda^{(k)}$ , а также элементы нулевой размерности для учета жесткости шпангоутов. (Это в пространстве эквивалентно аппроксимации элементами кольцевой формы.)

Для аппроксимации **осевых сечений объемов жидкости** использованы треугольные конечные элементы с тремя узловыми точками в вершинах (рис. 2.5).

Обозначим  $\Delta^e$ ,  $e = 1, \dots, N^Q$  – совокупность конечных элементов, покрывающих осевые сечения объемов жидкости, содержащихся в конструкции. Геометрия конечного элемента определяется посредством отображения в него базисного треугольного элемента  $\Delta^0$ , на котором заданы функции формы:

$$n_1(\xi, \eta) = \xi, \quad n_2(\xi, \eta) = \eta, \quad n_3(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta. \quad (2.57)$$

Отображение задает на элементе локальную систему координат по формулам:

$$\begin{aligned}
 r(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^3 r_i n_i(\xi, \eta) , \\
 z(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^3 z_i n_i(\xi, \eta) ,
 \end{aligned}
 \tag{2.58}$$

где  $r_i, z_i$  – координаты узловых точек элемента  $\Delta^e$ .

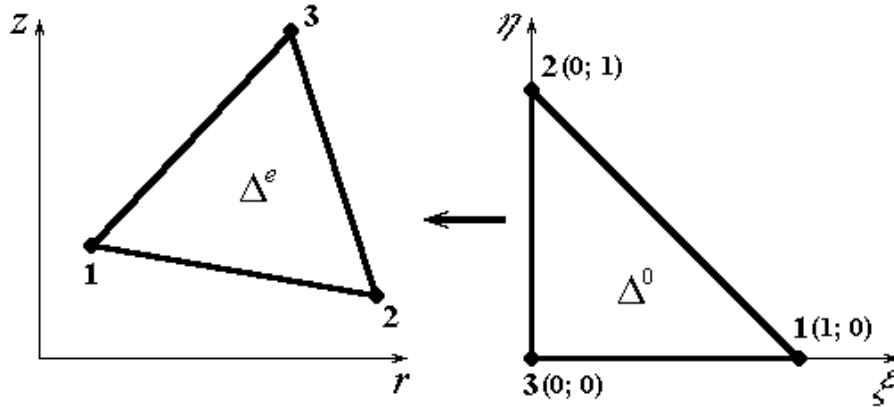


Рис. 2.5. Конечный элемент жидкости (сечение) и локальная система координат

Потенциал смещений  $\tilde{\Phi}^{(k)}$  на элементе выражается через набор узловых значений

$$\{\delta_f^e\} = \{\tilde{\Phi}_1^{(k)} \quad \tilde{\Phi}_2^{(k)} \quad \tilde{\Phi}_3^{(k)}\}^T$$

в локальных координатах при помощи матрицы функций формы

$$[N(\xi, \eta)] = \{n_1(\xi, \eta) \quad n_2(\xi, \eta) \quad n_3(\xi, \eta)\}$$

по формуле:

$$\tilde{\Phi}^{(k)}(\xi, \eta) = [N(\xi, \eta)] \{\delta_f^e\} .
 \tag{2.59}$$

Подставив теперь (2.59) в выражение (2.52) для функционала  $T_m^*$ , получим выражение для вклада элемента  $\Delta^e$  в этот функционал:

$$T_{me}^{*Q} = \frac{1}{2} \{\dot{\delta}_f^e\}^T [M_f^e] \{\dot{\delta}_f^e\} ,
 \tag{2.60}$$

где  $[M_f^e]$  – матрица масс элемента, вычисляемая по формуле:

$$[M_f^e] = -\pi_m \int_{\Delta^0} \rho_0^{(k)} [N_\nabla] [J]^{-1} [J]^{-T} [N_\nabla]^T r |\det[J]| d\xi d\eta, \quad (2.61)$$

в которой введены матрицы

$$[N_\nabla(\xi, \eta)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial n_1}{\partial \xi} & \frac{\partial n_2}{\partial \xi} & \frac{\partial n_3}{\partial \xi} \\ -\frac{m}{r} n_1 & -\frac{m}{r} n_2 & -\frac{m}{r} n_3 \\ \frac{\partial n_1}{\partial \eta} & \frac{\partial n_2}{\partial \eta} & \frac{\partial n_3}{\partial \eta} \end{bmatrix}, \quad [J(\xi, \eta)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial r}{\partial \eta} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{bmatrix}.$$

Для вычисления матрицы  $[M_f^e]$  интегрирование по  $\Delta^e$  в формуле (2.61)

можно выполнить численно, как это предлагается делать в работе [31].

**Срединную поверхность оболочки** аппроксимируем совокупностью усеченных конусов  $S^e, e = 1, \dots, N^S$ , осевые сечения которых являются отрезками прямых (рис. 2.6). Концы отрезка являются узловыми точками элемента. Элементы такого типа описаны в работе [31]. Здесь они несколько модифицированы с целью учета взаимодействия с жидкостью, чем обеспечивается совмещение функций оболочечного и контактного элемента, т.е. элемента, отражающего вклад соотношений на поверхности контакта в функционалы кинетической и потенциальной энергии. Такая возможность реализуется благодаря принятой гипотезе о совмещении контактной поверхности с участком срединной поверхности оболочки.

Обозначим  $\tilde{\Phi}^{(1)}$  и  $\tilde{\Phi}^{(2)}$  – значения потенциалов смещений с внутренней и с внешней сторон оболочки (внутренней стороной считаем находящуюся слева при движении от узла 1 к узлу 2). Это общий случай, когда жидкость находится с обеих сторон оболочки. Если с какой-либо стороны контакт с жидкостью отсутствует, то в приведенных выше формулах полагаем:  $\tilde{\Phi}^{(k)} = 0$  и  $\rho_0^{(k)} = 0$ .

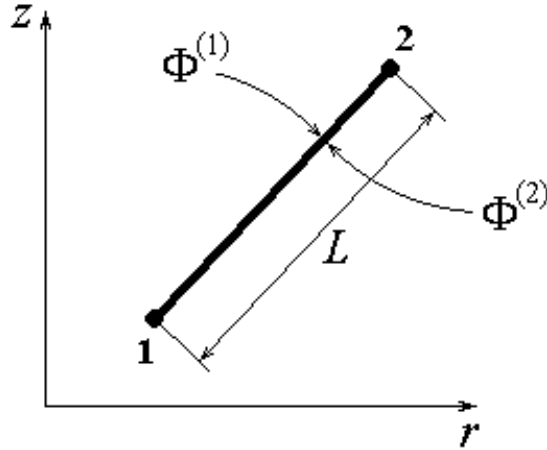


Рис. 2.6. Конечный элемент оболочки (сечение)

Введем на элементе локальную координату  $s$  ( $0 \leq s \leq 1$ ) по формулам:

$$\begin{aligned} r(s) &= r_1(1-s) + r_2s, \\ z(s) &= z_1(1-s) + z_2s, \end{aligned} \quad (2.62)$$

значения переменных  $\tilde{u}$ ,  $\tilde{v}$ ,  $\tilde{w}$ ,  $\tilde{\Phi}^{(1)}$ ,  $\tilde{\Phi}^{(2)}$  на элементе выразим через узловые значения величин  $\tilde{u}_1$ ,  $\tilde{v}_1$ ,  $\tilde{w}_1$ ,  $\tilde{\theta}_{\alpha 1}$ ,  $\tilde{\Phi}_1^{(1)}$ ,  $\tilde{\Phi}_1^{(2)}$  по формуле:

$$\left\{ \tilde{u} \quad \tilde{v} \quad \tilde{w} \quad \tilde{\Phi}^{(1)} \quad \tilde{\Phi}^{(2)} \right\}^T = [N^e(s)] \left\{ \delta_s^e \right\}, \quad (2.63)$$

где вектор-столбец  $\left\{ \delta_s^e \right\}$  равен:

$$\left\{ \delta_s^e \right\} = \left\{ \tilde{u}_1 \quad \tilde{v}_1 \quad \tilde{w}_1 \quad \tilde{\theta}_{\alpha 1} \quad \tilde{\Phi}_1^{(1)} \quad \tilde{\Phi}_1^{(2)} \quad \tilde{u}_2 \quad \tilde{v}_2 \quad \tilde{w}_2 \quad \tilde{\theta}_{\alpha 2} \quad \tilde{\Phi}_2^{(1)} \quad \tilde{\Phi}_2^{(2)} \right\}^T,$$

а матрица функций формы

$$[N^e(s)] = [N(s)] [\Lambda^e]. \quad (2.64)$$

В выражении (2.64) матрица  $[N(s)]$  равна

$$[N(s)] = \left[ \begin{array}{c|c} [N^1(s)] & [N^2(s)] \end{array} \right],$$

где

$$[N^1(s)] = \begin{bmatrix} 1-s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-3s^2+2s^3 & L(s-2s^2+s^3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-s \end{bmatrix},$$

$$[N^2(s)] = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3s^2-2s^3 & L(-s^2+s^3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s \end{bmatrix},$$

а матрица  $[\Lambda^e]$  имеет вид:

$$[\Lambda^e] = \begin{bmatrix} [\lambda^e] & [0] \\ [0] & [\lambda^e] \end{bmatrix},$$

где

$$[\lambda^e] = \begin{bmatrix} \sin \varphi & 0 & \cos \varphi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos \varphi & 0 & -\sin \varphi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Из приведенных выше формул видно, что значения  $\tilde{u}$ ,  $\tilde{v}$ ,  $\tilde{\Phi}^{(1)}$ ,  $\tilde{\Phi}^{(2)}$  аппроксимируются на элементе линейной, а  $\tilde{w}$  кубической зависимостью.

Полагая в выражении (2.54)  $\alpha = s$ , получим, что на конечном элементе

$$\frac{1}{R_\alpha} = 0, \quad \frac{1}{R_\beta} = \frac{\cos \varphi}{r}, \quad A_\alpha = L, \quad A_\beta = r, \quad \frac{\partial A_\beta}{\partial \alpha} = L \sin \varphi,$$

и следовательно:

$$\{\varepsilon_m^L(\tilde{\mathbf{U}})\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{L} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial s} \\ \frac{\sin \varphi \cdot \tilde{u} + m\tilde{v} + \cos \varphi \cdot \tilde{w}}{r} \\ -\frac{m\tilde{u} - \sin \varphi \cdot \tilde{v}}{r} + \frac{1}{L} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial s} \\ -\frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial s^2} \\ \frac{m \cos \varphi \cdot \tilde{v} + m^2 \tilde{w}}{r^2} - \frac{\sin \varphi}{rL} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial s} \\ -\frac{\sin \varphi \cos \varphi \cdot \tilde{v} + m^2 \sin \varphi \cdot \tilde{w}}{r^2} + \frac{1}{rL} \left( m \frac{\partial \tilde{w}}{\partial s} + \cos \varphi \frac{\partial \tilde{v}}{\partial s} \right) \end{array} \right\}. \quad (2.65)$$

Подставляя (2.63) в (2.65), получаем:

$$\{\varepsilon_m^L\} = [B^e(s)] \{\delta_s^e\}, \quad (2.66)$$

где

$$[B^e(s)] = [B_0^e(s)] [\Lambda^e],$$

причем матрица  $[B_0^e(s)] = [\{\varepsilon_m^L(\mathbf{N}_1)\} \quad \dots \quad \{\varepsilon_m^L(\mathbf{N}_{12})\}]$ , где  $\mathbf{N}_1, \dots, \mathbf{N}_{12}$  – столбцы матрицы  $[N(s)]$ . Заметим, что столбцы 5, 6, 11, 12 матрицы  $[B_0^e(s)]$  оказываются нулевыми, поскольку значения потенциалов смещений жидкости в выражения для параметров деформации оболочки не входят.

В случае, когда в постановке задачи учитываются гравитационные эффекты, матрица жесткости элемента при наличии контакта с жидкостью (или избыточного давления) изменяется в соответствии с вкладом, определяемым формулой для потенциальной энергии (2.53).

Аналогично выполненным выше преобразованиям, используя формулу для вектора параметров деформации смоченной поверхности:

$$\{\hat{u}_m^+(\tilde{\mathbf{U}})\} = \left\{ \begin{array}{c} \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ \tilde{w} \\ -\frac{1}{L} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial s} \\ \frac{m}{r} \tilde{w} + \frac{\cos \varphi}{r} \tilde{v} \\ \frac{1}{L} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial s} + \frac{\sin \varphi}{r} \tilde{u} + \frac{m}{r} \tilde{v} + \frac{\cos \varphi}{r} \tilde{w} \end{array} \right\},$$

получим выражение

$$\{\hat{u}_m^+\} = [F^e(s)] \{\delta_s^e\}, \quad (2.67)$$

где

$$[F^e(s)] = [F_0^e(s)] [\Lambda^e],$$

$$[F_0^e(s)] = \left[ \{\hat{u}_m^+(\mathbf{N}_1)\} \quad \dots \quad \{\hat{u}_m^+(\mathbf{N}_{12})\} \right].$$

Подставляя теперь (2.63), (2.66) и (2.67) в (2.52), (2.53), получаем формулы для вкладов элемента  $S^e$  в кинетическую и потенциальную энергию:

$$T_{me}^{*S} = \frac{1}{2} \{\dot{\delta}_s^e\}^T [M_s^e] \{\dot{\delta}_s^e\}, \quad (2.68)$$

$$V_{me}^S = \frac{1}{2} \{\delta_s^e\}^T [K_s^e] \{\delta_s^e\}, \quad (2.69)$$

в которых  $[M_s^e]$  и  $[K_s^e]$  – матрица масс и матрица жесткостей элемента, вычисляемые по формулам:

$$[M_s^e] = \pi_m L \int_0^1 [N^e(s)]^T [C] [N^e(s)] r(s) ds, \quad (2.70a)$$

$$[K_s^e] = \pi_m L \int_0^1 \left( [B^e(s)]^T [D] [B^e(s)] - [F^e(s)]^T [C_F] [F^e(s)] \right) r(s) ds, \quad (2.70b)$$

где матрицы  $[C]$  и  $[C_F]$  имеют вид:

$$[C] = \begin{bmatrix} \rho h & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \rho h & 0 & 0 & 0 \\ & & \rho h & \rho_0^{(1)} & -\rho_0^{(2)} \\ & & & 0 & 0 \\ & & & & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix},$$

$$[C_F^{(k)}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{(\rho_0^{(1)} - \rho_0^{(2)})G \cos \varphi}{2} & \frac{P_0^{(1)} - P_0^{(2)}}{2} & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & \frac{P_0^{(1)} - P_0^{(2)}}{2} & 0 \\ & & (\rho_0^{(1)} - \rho_0^{(2)})G \sin \varphi & 0 & 0 & \frac{P_0^{(1)} - P_0^{(2)}}{2} \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}.$$

Для численного интегрирования в формулах (2.70а) и (2.70б) используется метод Гаусса. При отсутствии контакта с жидкостью с какой-либо стороны, как уже отмечалось, полагаем соответствующее  $\rho_0^{(k)} = 0$ , и следовательно, получаем нулевые соответствующие строки и столбцы в матрице  $[M_s^e]$ .

**Свободная поверхность жидкости** представляется совокупностью кольцевых элементов  $\Sigma^e$ ,  $e = 1, \dots, N^\Sigma$ , имеющих прямолинейное осевое сечение и две узловые точки (рис. 2.7).

Используя локальную параметризацию осевого сечения элемента (2.62), выразим вертикальные смещения и потенциал на элементе через их узловые значения (индексы, определяющие номер объема жидкости, опускаем):

$$\begin{Bmatrix} \tilde{\Phi} \\ \tilde{\eta} \end{Bmatrix} = [N(s)] \{ \delta_\Sigma^e \},$$

где

$$\{ \delta_\Sigma^e \} = \{ \tilde{\Phi}_1 \quad \tilde{\eta}_1 \quad \tilde{\Phi}_2 \quad \tilde{\eta}_2 \}^T, \quad [N(s)] = \begin{bmatrix} 1-s & 0 & s & 0 \\ 0 & 1-s & 0 & s \end{bmatrix}.$$



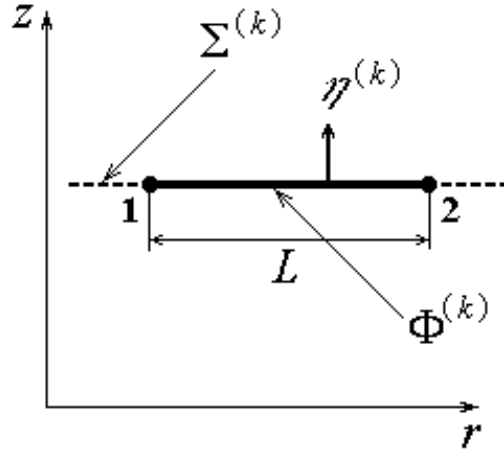


Рис. 2.7. Конечный элемент свободной поверхности жидкости

Подстановка этого соотношения в формулы (2.52), (2.53) дает выражения для матриц конечного элемента:

$$[M_{\Sigma}^e] = \pi_m L \int_0^1 [N(s)]^T [C_M] [N(s)] r(s) ds, \quad (2.71a)$$

$$[K_{\Sigma}^e] = \pi_m L \int_0^1 [N(s)]^T [C_K] [N(s)] r(s) ds, \quad (2.71b)$$

где

$$[C_M] = \begin{bmatrix} 0 & \rho_0 \\ \rho_0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [C_K] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \rho_0 G \end{bmatrix}.$$

Учет влияния статического деформированного состояния при расчете динамических характеристик конструкции может быть выполнен с использованием формул аналогичных (2.8) – (2.12) из предыдущего раздела на уровне формирования матриц жесткостей конечных элементов оболочек.

Представим деформированное состояние как сумму статической  $\mathbf{U}_0$  и динамической  $\mathbf{U}$  составляющих. Тогда из (2.26) получаем:

$$\{\varepsilon(\bar{\mathbf{u}}_0 + \bar{\mathbf{u}})\} = \{\varepsilon(\bar{\mathbf{u}}_0)\} + \{\varepsilon^L(\bar{\mathbf{u}})\} + 2\{\varepsilon^{NL}(\bar{\mathbf{u}}_0, \bar{\mathbf{u}})\} + \{\varepsilon^{NL}(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{u}})\}. \quad (2.72)$$

Потенциальная энергия деформации оболочки равна:

$$V(\mathbf{U}) = \frac{1}{2} \int_S \{\varepsilon(\bar{\mathbf{u}}_0 + \bar{\mathbf{u}})\}^T [D] \{\varepsilon(\bar{\mathbf{u}}_0 + \bar{\mathbf{u}})\} dS. \quad (2.73)$$

Пусть динамическая составляющая имеет  $m$  волн по окружности. Статическая составляющая в силу характера вызывающих ее нагрузок осесимметрична, причем  $v_0 = 0$ .

Рассмотрим теперь описанный выше оболочечный конечный элемент. Подставим выражение (2.63) в (2.73), учитывая при этом, что для динамической составляющей  $\mathbf{U}$  выполнены соотношения:

$$u = \tilde{u}(\alpha) \cos(m\beta - i \frac{\pi}{2}) ,$$

$$v = \tilde{v}(\alpha) \sin(m\beta - i \frac{\pi}{2}) ,$$

$$w = \tilde{w}(\alpha) \cos(m\beta - i \frac{\pi}{2}) ,$$

где  $i = 0$  или  $i = 1$ . Выделяя затем в полученном выражении квадратичную относительно  $\{\delta_s^e\}$  часть, получим формулу для вычисления матрицы жесткостей элемента:

$$[K_s^e] = \pi_m L \int_0^1 ([B_p^e(s)]^T [D][B_p^e(s)] + [Q_p^e(s)]) r(s) ds . \quad (2.74)$$

В этой формуле

$$[B_p^e(s)] = [B^e(s)] + [\{b_m(\mathbf{N}_1)\} \dots \{b_m(\mathbf{N}_{12})\}] [\Lambda^e] ,$$

где

$$\{b_m(\mathbf{U})\} = \begin{Bmatrix} \theta_\alpha(\mathbf{U}_0) \tilde{\theta}_\alpha(\mathbf{U}) \\ 0 \\ \theta_\alpha(\mathbf{U}_0) \theta_\beta^m(\mathbf{U}) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} ,$$

а матрица  $[Q_p^e(s)] = [\Lambda^e]^T [Q(s)] [\Lambda^e]$ ,

причем компоненты матрицы  $[Q(s)]$  равны:

$$q_{ij} = \{\varepsilon(\bar{\mathbf{u}}_0)\} [D] \{q_m(\mathbf{N}_i, \mathbf{N}_j)\} ,$$

$$\{q_m(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2)\} = \begin{pmatrix} \tilde{\theta}_\alpha(\mathbf{U}_1)\tilde{\theta}_\alpha(\mathbf{U}_2) \\ \theta_\beta^m(\mathbf{U}_1)\theta_\beta^m(\mathbf{U}_2) \\ (1 - \text{sgn}(m))[\tilde{\theta}_\alpha(\mathbf{U}_1)\theta_\beta^m(\mathbf{U}_2) + \tilde{\theta}_\alpha(\mathbf{U}_2)\theta_\beta^m(\mathbf{U}_1)] \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

При вычислении матрицы  $[K_s^e]$  значения  $u_0, v_0, w_0$  в точках, лежащих внутри конечного элемента, удобно вычислять по их узловым значениям при помощи соотношения (2.63).

Если нагрузки, вызывающие статическую деформацию, относительно невелики, так что ее можно определять из линейных уравнений, то расчет этой статической деформации удобно выполнять также методом конечных элементов.

Результаты вычисления матриц масс и жесткостей отдельных элементов объединяются в глобальные матрицы масс  $[M]$  и жесткостей  $[K]$  в соответствии с глобальной нумерацией узлов конечно-элементной модели и определением порядка узловых параметров в пределах одного узла.

Этот порядок в пределах узла с глобальным номером  $n$  представляется последовательностью возможных узловых значений:

$$\{\tilde{u}_n, \tilde{v}_n, \tilde{w}_n, \tilde{\theta}_n, \{\tilde{\Phi}_n^{(k)}, \tilde{\eta}_n^{(k)}, k=1, \dots, N_c\}\}$$

Всего в этой последовательности существует  $4+2N_c$  позиций, но для конкретного узла заполненными будут не все из них в зависимости от того, с какого типа элементами данный узел связан, и от наложенных на перемещения ограничений. Нумерация реально существующих степеней свободы производится в программе в порядке возрастания глобальных номеров узлов. Эти степени свободы конечно-элементной модели конструкции образуют полный вектор степеней свободы, который обозначим  $\{\delta\}$ . Длина этого вектора равна размерности матриц  $[M]$  и  $[K]$ , так что для определения собственных частот колебаний тонкостенной конструкции, имеющих  $t$  волн по окружности, формулируется обобщенная задача о собственных значениях:

$$([K] - \lambda [M]) \{\delta\} = 0, \quad (2.75)$$

решения которой образуют последовательность собственных значений

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots,$$

и соответствующих им собственных векторов

$$\{\delta_1\}, \{\delta_2\}, \{\delta_3\}, \dots$$

Положительные собственные значения соответствуют квадратам угловых собственных частот:

$$\lambda_k = \omega_k^2,$$

а угловые собственные частоты связаны с собственными частотами колебаний  $f_k$  соотношением:

$$\omega_k = 2\pi f_k.$$

Проблемы, связанные с возможностью отрицательных собственных значений, рассмотрены в следующей главе.

#### **2.4. Программа расчета динамических характеристик осесимметричных тонкостенных конструкций, взаимодействующих с ограниченными объемами жидкостей, реализованная в табличном процессоре Excel**

Для обеспечения выполнения расчетов динамических характеристик конструкций рассматриваемого типа при исследовании их статической и динамической устойчивости создана вычислительная программа, работающая в среде табличного процессора Excel. Программа написана на алгоритмическом языке Visual Basic for Applications (VBA), и ее возможности дополняются средствами процессора Excel, облегчающими обработку численных результатов. В данном разделе приведено краткое описание принципов ее построения и структуры исходных данных для проведения расчетов.

Программа входит в состав файла данных процессора Excel в качестве проекта, сохраняемого вместе с результатами вычислений. Файл должен иметь имя с расширением «.xlsm» (или «.xlsb»), при этом содержимое проекта копируется при простом копировании файла. Для исходного его копирования создан файл с именем

«FasanE.xlsm» (в дальнейшем проект условно именуется «FasanE», а содержащий его файл – «файл-шаблон»).

В состав проекта входят ряд программных модулей и экранных форм (см. рис. 2.8). Экранные формы предназначены для организации визуального диалога пользователя с программой. Тексты созданных процедур (подпрограмм и функций) содержатся в основном в модулях, а также по мере необходимости и в кодовых окнах экранных форм.

Пользователь, знакомый с программированием на VBA, может добавлять в проект компоненты в соответствии с индивидуальными потребностями. Однако для выполнения только расчетов динамических характеристик конструкции из системных знаний требуется лишь умение запустить на выполнение стартовый макрос с именем «Start».

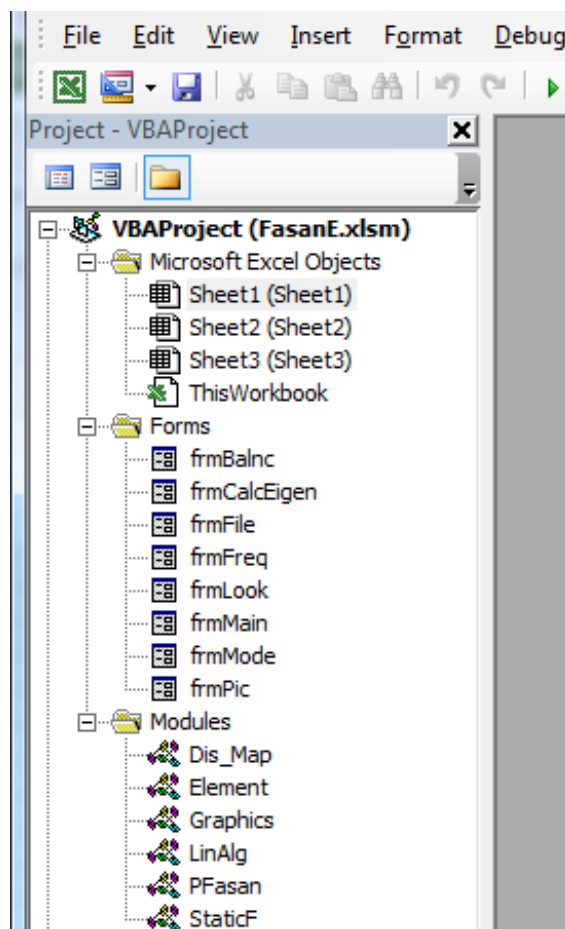


Рис. 2.8. Проект файла-шаблона

Макрос «Start» активирует главную экранную форму «frmMain». На этой форме (рис. 2.9) размещены командные кнопки, активирующие выполнение основных операций, начиная от ввода исходных данных конечно-элементной модели исследуемой конструкции, вычисления некоторых величин, характеризующих конструкцию, задания режимов счета, исследуемого частотного интервала, числа волн исследуемого подспектра, и до вычисления собственных частот и собственных форм. Если необходимо, то может быть рассчитана статическая деформация конструкции (в рамках линейной теории) и учтено ее влияние на величины собственных частот.

The screenshot shows the main window of the FASAN-E software. The window title is "FASAN-E". The interface is organized into several sections:

- Left Panel:** A vertical stack of buttons: "Ввод КЭ-массивов", "Расчет массовых характеристик конструкции", "Статическая деформация", "Формирование матриц масс и жесткостей", "Тестирование частоты", "Частотный интервал", "Собственные частоты и формы", "Файл листинга", "нет", "Препроцессор", and "Выход".
- Top Center:** A text field containing the file path "C:\Пак Сонги\Obrv2.f".
- Top Right:** Parameters: "Neq= 2821 Nh= 26 nEnv= 63925", "Neqk= 408 Nhk= 6 nEnvk= 2023".
- Right Panel:** A series of input fields for numerical values: "Точность соб. частот, Eps=" (1.e-6), "Точность соб. векторов, Eps1=" (1.e-6), "Нормировка 1/N, N=" (1.e+0), "Промежуточная нормировка, N1=" (1.e+6), "Буфер для вычислений (по 8 байт)" (1000000), and "Контрольное число итераций" (10).
- Center:** A section for "Сохранение матрицы масс" with radio buttons for "не сохранять", "в произвольном файле", and "в текущем каталоге" (selected). Below it is a checkbox "учитывать статическую деформацию при расчете собственных частот" (unchecked). A text field "Число волн по окружности" has the value "0". A checkbox "Крутильные формы" is also unchecked. A text field "Матрица масс в файле" contains "C:\Пак Сонги\Obrv2.m~~".
- Bottom Center:** A "Старт" button.
- Bottom Right:** A table showing the results of the calculation.
 

Частота	Кратность
16.5580648884039	1
48.1753814716154	1
76.0065080457746	1
98.7865398172195	1

Рис. 2.9. Главная экранная форма «frmMain»

Для исследования частотных интервалов и локализации собственных частот используется метод последовательностей Штурма, когда для каждого тестируемого значения частоты  $f$  (в Гц) вычисляется число перемен знаков в последовательности главных миноров матрицы  $\mathbf{K} - \lambda\mathbf{M}$ , где  $\lambda = (2\pi f)^2$ .

Вычисляемые собственные формы автоматически нормируются «по массе», т.е. параметры деформации собственной формы нормируются таким образом, что обобщенная масса, т.е. коэффициент  $\mu_k = 1$  в формуле (2.47). Это заметно упрощает ряд формул в исследованиях, представленных в последующих главах.

При расчете не нагруженных статическими факторами конструкций собственные значения  $\lambda_k = (2\pi f_k)^2$  неотрицательны. Однако наличие статической нагрузки может заметно изменять матрицу жесткостей (2.74) и выводить некоторые низшие собственные значения в отрицательную область. Такая ситуация соответствует потере статической устойчивости. Для ее исследования предусматривается возможность тестирования отрицательных значений  $\lambda$  посредством задания отрицательных величин в окнах для тестируемых значений  $f$ . То есть, если задано  $f < 0$ , то анализируется матрица  $\mathbf{K} - \lambda\mathbf{M}$  при  $\lambda = -(2\pi f)^2$ . По этой причине в верхнее окно при задании частотного интервала надо помещать большее по абсолютной величине значение  $f$ . При наличии в конструкции жидких компонент недопустимо задание нулевого значения  $f$ . Очевидным образом в задании интервала нижняя и верхняя границы должны иметь одинаковые знаки.

Если в процессе исследований выявляется  $f_k < 0$ , то невозможно говорить о колебательном процессе и частоте. В этом случае физический смысл имеет величина  $\tau_k = -2\pi f_k$ , характеризующая показатель экспоненты начальной скорости деформации по соответствующей собственной форме при потере устойчивости.

Двойной щелчок по выбранной из списка собственных частот, обнаруженных в заданном интервале, строке (см. рис. 2.9) вызывает вычисление параметров соответствующей собственной формы с возможным просмотром их узловых значений или графическим представлением ее на экране.

Первым этапом в решении задачи является построение конечно-элементной

модели, или иными словами, разбиение конструкции. При построении разбиения желательно обеспечить равномерное распределение узловых точек в областях простой формы и сгущение их там, где ожидаются наибольшие градиенты переменных.

Для проведения расчета в программу должна быть введена геометрическая и топологическая информация о разбиении конструкции и информация о механических параметрах составляющих элементов.

Геометрическая и топологическая информация задается массивами координат  $r$ ,  $z$  узловых точек, а также массивами номеров узловых точек жидкостных и оболочечных элементов. Сюда следует отнести также массивы, содержащие номера узловых точек, в которых прикреплены сосредоточенные массы и упругие шпангоуты. Формирование этих массивов вручную представляется весьма трудоемким процессом. С целью автоматизации этого этапа разработана специальная препроцессорная программа, основанная на кусочно-регулярном представлении конечно-элементной сетки, покрывающей продольное сечение конструкции (например, рис. 2.2б). В качестве альтернативного подхода реализована была также возможность формирования сетки в препроцессоре FEMAP с передачей информации в программу средствами пользовательского интерфейса (API) этого препроцессора.

Исходные данные для работы программы содержат полную информацию о конечно-элементном разбиении конструкции, включая координаты всех узловых точек и номера узловых точек всех жидкостных и оболочечных элементов, а также элементов свободной поверхности.

К числу механических параметров относятся плотности жидкостей в полостях конструкции, упругие константы и плотность материала оболочек, их толщины и параметры подкрепляющих ребер, а также величины сосредоточенных масс и параметры материала и геометрические характеристики упругих шпангоутов.

Все эти данные объединяются в одном текстовом файле, имя которого должно иметь расширение «.f». Порядок их размещения в файле определяется



приведенным ниже списком:

1.  $N_{nod}$  – число узловых точек разбиения.
2.  $N_s$  – число узловых точек разбиения, лежащих на оболочке.
3.  $N_{fr}$  – суммарное (по всем изолированным объемам) число узловых точек, лежащих на свободной поверхности жидкости.
4.  $N_c$  – число изолированных объемов жидкости (в частном случае может быть задан 0).
5.  $N_{elf}$  – число жидкостных конечных элементов.
6.  $N_{elfr}$  – число элементов свободных поверхностей жидкостей.
7.  $N_{els}$  – число оболочечных конечных элементов.
8.  $N_{mass}$  – число сосредоточенных масс.
9.  $N_{sp}$  – число упругих шпангоутов.
10.  $N_{ps}$  – число участков оболочки с различными механическими свойствами.
11.  $N_{fr0}$  – суммарное (по всем изолированным объемам) число узловых точек, лежащих на свободной поверхности жидкости, в которых пренебрегается влиянием волнообразования.
12.  $N_u$  – число узловых точек, закрепленных в радиальном направлении.
13.  $N_v$  – число узловых точек, закрепленных в окружном направлении.
14.  $N_w$  – число узловых точек, закрепленных в продольном направлении.
15.  $N_b$  – число узловых точек, закрепленных относительно поворота касательной к образующей оболочки.
16.  $N_{wr}$  – число узловых точек, дополнительно закрепленных в продольном направлении для расчета статической деформации (необходимо, если  $N_w = 0$  и учитывается влияние статической деформации).
17.  $GG$  – ускорение свободного падения.
18.  $R(i), Z(i), i = 1, \dots, N_{nod}$  – координаты  $r$  и  $z$   $i$ -й узловой точки.
19.  $(Numf(i,j), j = 1, 2, 3), i = 1, \dots, N_{elf}$  – номера узлов  $i$ -го жидкостного конечного элемента. Элементы перечисляются в порядке возрастания номера изолированного объема жидкости. Номера узлов перечисляются против часовой стрелки (если считать, что ось  $r$  направлена вправо, а

ось  $z$  - вверх).

20. Numfr(i,1), Numfr(i,2),  $i = 1, \dots, N_{\text{elfr}}$  – номера узлов  $i$ -го конечного элемента свободной поверхности. Элементы перечисляются в порядке возрастания номера объема жидкости.
21. Nums(i,1), Nums(i,2), Np(i), PP(i,1), PP(i,2) – номера узлов  $i$ -го оболочечного элемента, номер набора механических параметров оболочки и значения избыточного давления (без учета гидростатического) с внутренней и с внешней сторон элемента. Внутренней считается сторона, находящаяся слева при движении от первого узла ко второму. Элементы перечисляются в порядке возрастания номера внешней жидкости, а в пределах номера внешней жидкости - в порядке возрастания номера внутренней жидкости. При этом отсутствие жидкости равносильно контакту с жидкостью с нулевым номером.
22. Numm(i), Valm(i),  $i = 1, \dots, N_{\text{mass}}$  – номера узлов, в которых находятся сосредоточенные массы, и величины этих масс.
23. Numsp(i),  $i = 1, \dots, N_{\text{sp}}$  – номера узлов, в которых находятся упругие шпангоуты. Следующей строкой за каждым номером располагаются:  
Spp(i,j),  $j = 1, \dots, 7$  – параметры  $i$ -го шпангоута (см. описание в разделе 2.1).
24. Nods(i),  $i = 1, \dots, N_s + N_{\text{fr}} - N_{\text{fr}0}$  – номера узлов, лежащих на оболочке и на свободных поверхностях жидкостей (в которых учитывается волнообразование). Узлы следует перечислять в порядке, способствующем уменьшению ширины ленты упакованной матрицы жесткостей.
25. Nf(i),  $i = 1, \dots, N_c$  – число жидкостных элементов в  $i$ -ом изолированном объеме жидкости.
26. Nff(i),  $i = 1, \dots, N_c$  – число элементов свободной поверхности в  $i$ -м изолированном объеме жидкости.
27. (Nlc(i,j),  $j = 0, \dots, N_c$ ),  $i = 0, \dots, N_c$  – число элементов, контактирующих с

жидкостью  $i$ -го объема с внешней стороны и с жидкостью  $j$ -го объема с внутренней стороны (0 означает отсутствие контакта с жидкостью с соответствующей стороны).

28.  $Mfr(i)$ ,  $i = 1, \dots, Nfr$  – номера узлов, лежащих на свободной поверхности жидкости. Перечисляются в порядке возрастания номера объема.
28.  $Mfrc(i)$ ,  $i = 1, \dots, Nc$  – число узлов на свободной поверхности жидкости  $i$ -го изолированного объема.
29.  $Numu(i)$ ,  $i = 1, \dots, Nu$  – номера узловых точек, закрепленных в радиальном направлении.
30.  $Numv(i)$ ,  $i = 1, \dots, Nv$  – номера узловых точек, закрепленных в окружном направлении.
31.  $Numw(i)$ ,  $i = 1, \dots, Nw$  – номера узловых точек, закрепленных в продольном направлении.
32.  $Numb(i)$ ,  $i = 1, \dots, Nb$  – номера узловых точек, закрепленных относительно поворота касательной к образующей оболочки.
33.  $Numwr(i)$ ,  $i = 1, \dots, Nwr$  – номера узловых точек, дополнительно закрепленных в продольном направлении для расчета статической деформации.
34.  $Mfr0(i)$ ,  $i = 1, \dots, Nfr0$  – номера узлов, лежащих на свободной поверхности жидкости, в которых пренебрегается влиянием волнообразования. Перечисляются в порядке возрастания номера объема.
35.  $Mfrc0(i)$ ,  $i = 1, \dots, Nc$  – число узлов на свободной поверхности жидкости  $i$ -го изолированного объема, в которых пренебрегается влиянием волнообразования.
36.  $Po(i)$ ,  $i = 1, \dots, Nc$  – плотность жидкости в  $i$ -ом изолированном объеме. Чтобы пренебречь гравитационными эффектами в  $i$ -ом объеме, следует задать плотность с отрицательным знаком  $Po(i) < 0$  при той же абсолютной величине.
37.  $H0(i)$ ,  $i = 1, \dots, Nc$  – продольная координата  $z$  свободной поверхности жидкости в  $i$ -ом изолированном объеме.

38. (Pars(i,j),  $j = 1, \dots, 10$ ),  $i = 1, \dots, Nps$  –  $i$ -й набор механических характеристик оболочки (см. описание в разделе 2.1).

Результаты вычисления в программе собственных форм колебаний (а также статической деформации) образуют дискретный набор переменных, описывающих движение конечно-элементной дискретной модели конструкции. Этот набор состоит из значений в узловых точках радиального, окружного и продольного смещений точек оболочки ( $u, v, w$ ), поворота касательной к образующей оболочки ( $\theta$ ) и потенциалов смещений жидкости ( $\Phi^{(k)}$ ). В вектор  $\{\delta\}$  эти величины входят в указанной последовательности (если они в узловой точке определены) в порядке возрастания номеров узловых точек. Отсутствие переменных  $u, v, w$  или  $\theta$  в каких-либо точках на оболочке может быть связано с соответствующим закреплением этих точек. Во внутренних точках жидкости определена лишь одна переменная - значение потенциала  $\Phi^{(k)}$ . На свободной поверхности добавляется вертикальное смещение  $\eta^{(k)}$ . Эти параметры исключаются в точках свободной поверхности, если в расчете для данного объема жидкости используется допущение о возможности пренебречь влиянием гравитационных эффектов.

Описанные выше результаты по мере их получения доступны для просмотра в диалоге в текстовой цифровой форме с возможным их сохранением для последующего использования в файлах или на рабочих листах процессора Excel. Также они могут быть визуализированы на экране компьютера для наглядного представления характера деформаций.

## **2.5. Примеры расчета динамических характеристик осесимметричных тонкостенных конструкций, взаимодействующих с ограниченными объемами жидкостей, и сопоставление с известными результатами**

**Пример 1.** Собственные колебания усеченной конической оболочки, заполненной водой, находящейся под давлением (рис. 2.10).

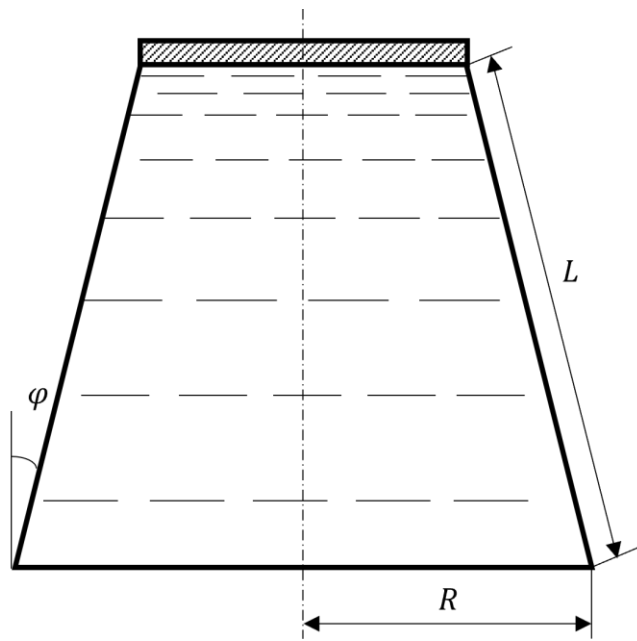


Рис. 2.10. Усеченная коническая оболочка

Нижний торец жестко закреплен, а на верхнем крае находится достаточно толстая крышка. Оболочка имеет такие параметры:  $E = 6,77 \cdot 10^{10}$  н/м<sup>2</sup> – модуль упругости,  $\nu = 0,29$  – коэффициент Пуассона,  $\rho = 2648$  кг/м<sup>3</sup> – плотность материала,  $R = 0,3$  м,  $L = 0,56$  м,  $h = 4,75 \cdot 10^{-4}$  м – толщина стенки,  $\varphi = 15^\circ$  – угол конусности.

В таблице 2.1 приведены полученные результаты исследования собственных частот при различных значениях внутреннего давления со сравнения результатов численных и экспериментальных данных работ [21, 27].

Таблица 2.1.

$p$ , атм	$m$	Собственная частота, Гц			
		Данный МКЭ	[22]	[21]	Эксп. [21]
0	3	99,24	96,34	101,0	100,0
	4	78,32	75,5	78,7	76,0
	5	64,16	61,07	63,6	-
	6	55,68	53,22	54,4	-
	7	52,52	50,12	50,8	51,0
	8	54,37	52,14	52,8	54,0

	9	60,35	58,21	-	-
0,1	3	99,85	96,95	101,8	100,6
	4	80,3	77,5	80,9	80,0
	5	68,86	66,41	68,5	70,0
	6	64,67	62,42	63,7	65,2
	7	66,77	64,62	65,5	67,0
	8	73,7	71,57	72,4	74,4
	9	83,84	81,52	-	-
0,3	3	101,07	98,14	103	101,0
	4	84,09	81,33	84,7	83,7
	5	77,36	75,03	77,2	79,0
	6	79,49	77,44	78,8	80,7
	7	88,2	86,18	87,3	89,2
	8	101,02	98,82	99,7	102,8
	9	116,13	113,6	-	-
0,5	3	102,27	99,31	104,3	101,0
	4	87,71	84,97	88,4	87,0
	5	84,94	82,7	84,9	86,0
	6	91,76	89,79	91,3	93,0
	7	104,92	102,9	104,1	106,5
	8	121,61	119,33	120,3	123,5
	9	140,23	137,63	-	-

Полученные результаты расчетов в данной работе хорошо совпадают с известными данными с погрешностью не более 3,1%.

С увеличением числа волн окружности  $m$  собственные частоты сначала уменьшаются, а затем снова увеличиваются. Кроме того, с увеличением внутреннего давления также увеличиваются собственные частоты.

## **Пример 2.** Собственные колебания тонкостенной конструкции

полусферической формы радиусом  $R = 0,133$  м и толщиной стенки  $h = 0,7 \cdot 10^{-3}$  м, полностью заполненной водой (рис. 2.11). Параметры конструкции:  $E = 4,016 \cdot 10^9$  н/м<sup>2</sup>,  $\rho = 1180$  кг/м<sup>3</sup>,  $\nu = 0,3$ .

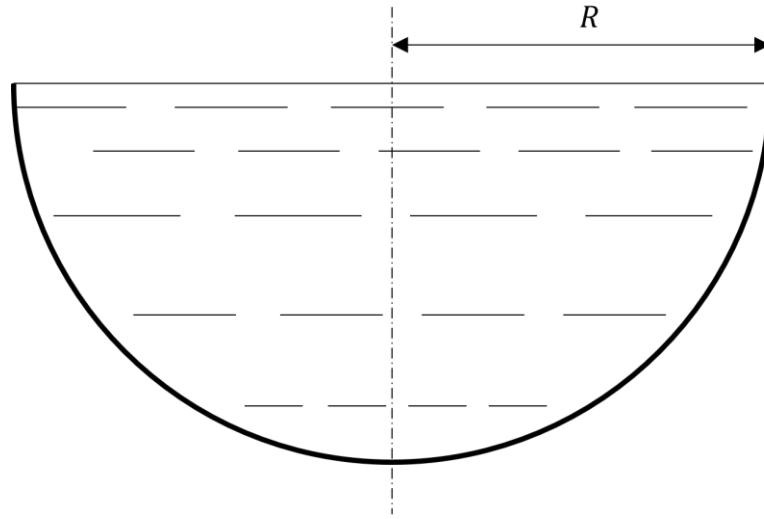


Рис. 2.11. полусферическая оболочка

В таблице 3.2 приведены полученные результаты с численными и экспериментальными данными работы [56]. В работе [56] граничные условия не указаны, поэтому были произвольно установлены три вида граничных условий и проведены вычисления:

$$\text{А: } u = 0, \quad \text{Б: } u = w = 0, \quad \text{В: } u = w = \theta_\alpha = 0.$$

Таблица 2.2.

	[56]	эксп.[56]	А	Б	В
$f_1$	185	216	206,65	208,78	210,65
$f_2$	272	305	315,48	317,16	318,15
$f_3$	350	370	392,73	393,88	394,01

Полученные результаты данной работы ближе к экспериментальным результатам чем теоретические, указанные из работы [56].

**Пример 3.** Собственные колебания цилиндрической тонкостенной конструкции. Конструкция может содержать воду (рис. 2.12, а) и боковая часть

конструкции может погружена в воду (рис. 2.12 б), изготовленная из титанового сплава ОТ4-1. Оболочка жестко закреплена с обоих торцов. Характеристики оболочки:  $E = 1,1 \cdot 10^{11}$  н/м<sup>2</sup>,  $\rho = 4400$  кг/м<sup>3</sup>,  $\nu = 0,34$ ,  $R = 0,1$  м,  $L = 0,58$  м,  $h = 0,6 \cdot 10^{-3}$  м. Уровня заполнения жидкостью  $\bar{H}$  варьировалась от 0 до 1. ( $\bar{H} = H/L$ )

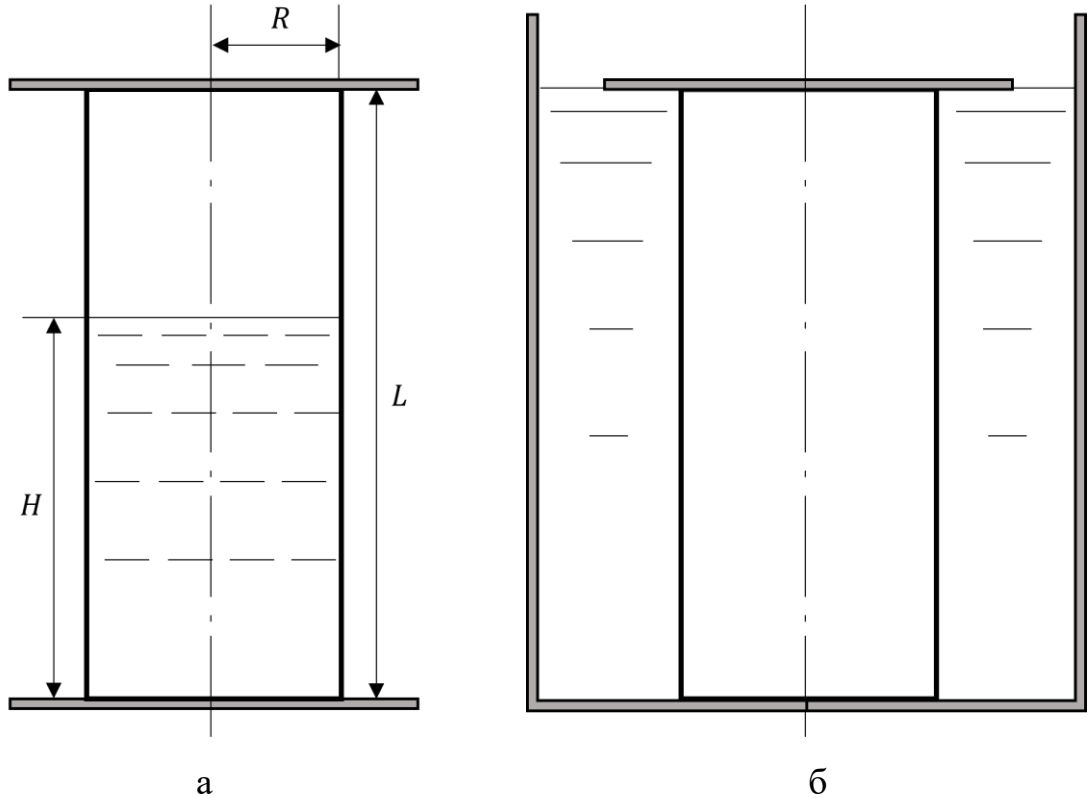


Рис. 2.12. цилиндрическая оболочка с жидкостью (а) и погруженная (б)

В таблице 2.3 приведены вычисленные значения собственных частот при различных значениях уровня заполнения  $\bar{H}$  с численными и экспериментальными данными из работы [82].

Таблица 2.3

		Эксп. [82]		Данной МКЭ	
		$m = 4$	$m = 5$	$m = 4$	$m = 5$
$\bar{H} = 0$		336,7	388,4	362,95	400,81
$\bar{H} = 0,5$	а	150,3	179,5	154,59	174,32
	б	148,5	177,4	154,37	174



$\bar{H} = 1$	а	113,3	141,6	117,54	142,51
	б	107,8	137,3	114,08	137,13

Полученные значения хорошо согласуются с экспериментальными результатами из работы [82]. При одинаковом уровне заполнения воды собственная частота конструкции с жидкостью выше, чем у погруженной конструкции.

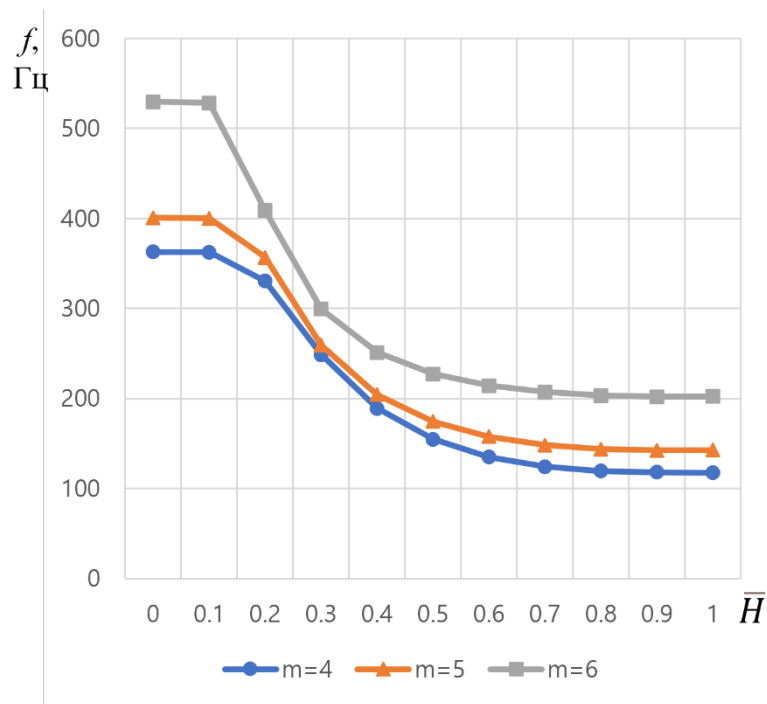


Рис. 2.13. Зависимость собственных частот колебаний от уровня заполнения жидкостью

На рис. 2.13 приведен график зависимости собственных частот колебаний от уровня заполнения жидкостью  $\bar{H}$  с шагом 0,1 для гармоник  $m = 4, 5$ . Как видно на графике, при больших значениях числа волн  $m$  собственные частоты также увеличиваются.

**Глава 3. Методика исследования статической устойчивости осесимметричных тонкостенных конструкций, контактирующих с объёмами несжимаемой жидкости, при действии гравитационного поля и осесимметричных силовых факторов**

В данной главе собственные частоты и формы колебаний конструкции не являются основным предметом изучения, но преимущественный интерес представляет характер статической нагрузки, приложенной к конструкции, при том, что в нагруженном состоянии она может совершать малые колебательные движения, как осесимметричные, так и неосесимметричные.

**3.1. Теоретические основы метода пространственного Фурье-анализа спектра осесимметричной тонкостенной конструкции, и алгоритм исследования статической устойчивости**

В данном разделе будет сформулирован алгоритм исследования устойчивости осесимметричной тонкостенной конструкции, взаимодействующей с ограниченными объемами жидкостей при действии осесимметричной нагрузки.

В основе этого алгоритма лежит процедура, целенаправленно ориентированная на осесимметричные конструкции, статически нагруженные набором осесимметричных силовых факторов, названная здесь методом пространственного Фурье-анализа спектра. Суть метода заключается в возможности представления произвольных не осесимметричных динамических деформаций конструкции на фоне статического осесимметричного отклика в виде разложения в ряд Фурье по окружной координате в цилиндрической системе координат.

Перепишем уравнение задачи о собственных частотах и формах колебаний осесимметричной конструкции (2.75), идентифицировав матрицы числом волн по окружности  $m$ , для которого выполнена конечно-элементная дискретизация:

$$\left( [K^m] - \lambda [M^m] \right) \{ \delta \} = 0 . \quad (3.1)$$

Решения задачи (3.1) представлены последовательностью собственных значений, упорядоченных по возрастанию:

$$\lambda_1(m) \leq \lambda_2(m) \leq \lambda_3(m) \leq \dots, \quad (3.2)$$

и последовательностью соответствующих им собственных векторов:

$$\{\delta_1^m\}, \{\delta_2^m\}, \{\delta_3^m\}, \dots \quad (3.3)$$

Если конструкция не нагружена предварительно статически, то все собственные значения не отрицательны, и тогда им соответствуют угловые собственные частоты  $\omega_k(m) = \sqrt{\lambda_k(m)}$  и собственные частоты колебаний

$$f_k(m) = \frac{\omega_k(m)}{2\pi} .$$

Изменение матрицы жесткостей при учете статического напряженно-деформированного состояния конструкции может привести к тому, что один или несколько членов последовательности  $\lambda_k(m)$  станут отрицательными. Рассмотрим ситуацию, когда отрицательным оказалось первое собственное значение  $\lambda_1(m)$ . Обозначим  $\tau_1 = \sqrt{|\lambda_1(m)|}$ , тогда имеет место равенство  $\lambda_1(m) = -\tau_1^2$ . В дальнейших преобразованиях для краткости будем опускать «(m)».

Уравнение свободных колебаний с  $m$  волнами по окружности имеет вид для конечно-элементной модели:

$$[M] \left\{ \frac{d^2 \delta}{dt^2} \right\} + [K] \{\delta\} = 0 . \quad (3.4)$$

Представим вектор  $\{\delta(t)\}$  в виде разложения по собственным формам задачи (3.1):

$$\{\delta(t)\} = \sum_{i=1}^n C_i(t) \{\delta_i\} \quad (3.5)$$

Подставив (3.5) в (3.4), с учетом того, что  $[K] \{\delta_i\} = \lambda_i [M] \{\delta_i\}$ , получим:

$$\sum_{i=1}^n \frac{d^2 C_i}{dt^2} [M] \{\delta_i\} + \sum_{i=1}^n C_i \lambda_i [K] \{\delta_i\} = 0. \quad (3.6)$$

Теперь, умножим (3.6) слева поочередно на  $\{\delta_k\}^T$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots, n$ . В результате получим уравнения для коэффициентов, являющихся функциями времени:

$$C_k = C_k(t).$$

Для первого коэффициента с учетом введенных выше обозначений имеет место уравнение:

$$\frac{d^2 C_1}{dt^2} - \tau_1^2 C_1 = 0, \quad (3.7)$$

решение которого имеет вид:

$$C_1(t) = a_1 e^{\tau_1 t} + b_1 e^{-\tau_1 t}, \quad (3.7a)$$

$$a_1 = \frac{(C_1(0) + \dot{C}_1(0)/\tau_1)}{2}, \quad b_1 = \frac{(C_1(0) - \dot{C}_1(0)/\tau_1)}{2}. \quad (3.7)$$

Заметим, что в пограничном случае, когда  $\tau_k = 0$ , решение имеет вид:

$$C_1(t) = a_1 t + b_1, \quad (3.7c)$$

$$a_1 = \dot{C}_1(0), \quad b_1 = C_1(0). \quad (3.7d)$$

Для остальных коэффициентов получаются уравнения вида:

$$\frac{d^2 C_k}{dt^2} + \omega_k^2 C_k = 0, \quad k = 2, 3, \dots, \quad (3.8)$$

решения которых имеют вид:

$$C_k(t) = a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t, \quad (3.8a)$$

$$a_k = C_k(0), \quad b_k = \frac{\dot{C}_k(0)}{\omega_k}. \quad (3.8b)$$

Решения уравнений (3.8) содержат члены с ограниченными по величине тригонометрическими функциями и не могут привести к резкому возрастанию амплитуд при малых начальных возмущениях.

Однако решение уравнения (3.7) содержит экспоненту, которая при ненулевых начальных условиях внесет в решение уравнения (3.4) член, характеризующий статическое состояние как неустойчивое, и вектор  $\{\delta_1^m\}$

представляет форму потери устойчивости.

В ситуации, когда несколько собственных значений  $\lambda_k(m)$  оказываются отрицательными, соответствующие векторы  $\{\delta_k^m\}$  представляют все возможные формы потери устойчивости конструкции.

Построение графиков зависимости  $\lambda_k(m)$  для конкретного набора значений параметров осесимметричной статической нагрузки представляет этап Фурье-анализа спектра нагруженной конструкции.

### 3.2. Программная надстройка для автоматизации процесса исследования спектра статически нагруженной конструкции

Если для исследуемой конструкции ставится задача определения границы области устойчивости при варьировании какого-либо параметра конструкции или компоненты статической нагрузки, то требуется выполнить целую последовательность расчетов, чтобы возможно точнее зафиксировать значение, при котором наименьшее из  $\lambda_1(m)$  достигает нулевой величины и переходит в область отрицательных чисел. Эта последовательность будет похожа на поиск корня уравнения методом бисекции, выполняемый вручную.

При варьировании одного параметра (обозначим его  $p$ ) осуществляется поиск наименьшего собственного значения  $\lambda_{\min}(p) = \min_{m \geq 0} \lambda_1(m, p)$ . Реально его выбор можно осуществить только путем перебора целых значений числа  $m$  в диапазоне от 0 до определенной величины, начиная с которой наименьшие собственные значения  $\lambda_1(m, p)$  начинают монотонно возрастать. При этом для каждого целого значения  $m$  необходимо заново формировать матрицы  $[K^m]$  и  $[M^m]$ . Цель состоит в возможно более точном определении значения  $p_0$ , при котором  $\lambda_{\min}(p_0) = 0$ . Это число обозначит границу области устойчивости на оси значений  $p$ .

Заметим, что на первый взгляд необходимость такого перебора усложняет

задачу вычисления  $\lambda_{\min}(p)$ . Однако это усложнение несопоставимо с задачей трехмерного моделирования таких конструкций, не говоря уже о том, что в трехмерной модели осесимметричной конструкции увеличение числа  $m$  неизбежно приведет к огрублению аппроксимации в пределах одной волны в окружном направлении. При этом проблемы возникнут и в связи с кратностью собственных частот неосесимметричных колебаний.

Если же ставится задача построения областей устойчивости на плоскости значений двух параметров  $p, q$  (например, нагрузка и толщина оболочки и т.п.), то объем работы умножается существенно. Это приводит к выводу о необходимости разработки вспомогательных программных средств, максимально автоматизирующих отдельные этапы исследования.

Ввиду разнообразности возможных параметров, которые могут варьироваться применительно к конкретной конструкции и условиям ее функционирования, трудно автоматизировать процесс построения областей устойчивости универсально для общего случая (хотя применительно к некоторым конкретным ситуациям не исключена такая возможность посредством дополнительного программирования в системе VBA). Однако легко выделить один рутинный этап, который всегда в предложенной методике присутствует.

Этот этап связан с ручным заданием числа волн по окружности  $m$  и командой формирования матриц  $[K^m]$  и  $[M^m]$  с последующим исследованием собственных значений задачи (3.1). Практика показывает, что варьировать это число приходится от 0 до 10 – 15. Так что автоматизация этого этапа уже может существенно сократить объем ручного труда исследователя. Средством для этого дополнен описанный выше проект VBA в файле-шаблоне «FasanES.xlsm».

На рис. 3.1 показана структура VBA-проекта, в котором добавлена экранная форма «frmStability», с помощью которой частично автоматизируется перебор значений числа волн по окружности  $m$ .

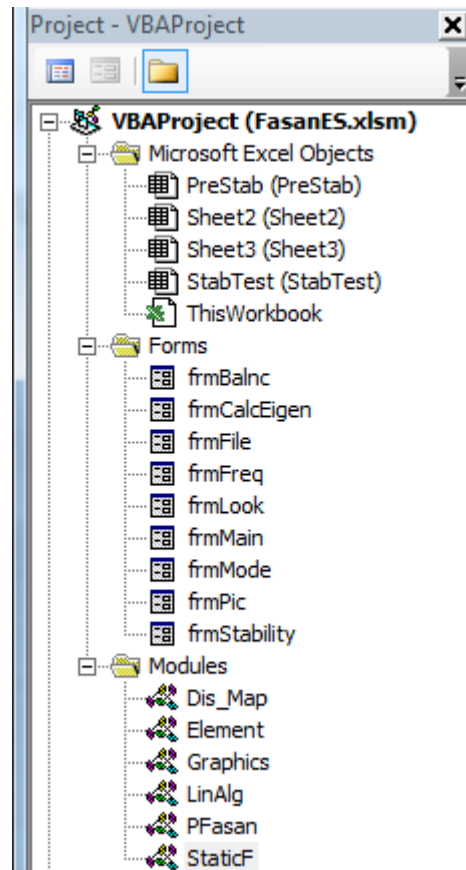


Рис. 3.1 Проект файла-шаблона FasanES.xlsm

В главную экранную форму (рис. 3.2) добавлена командная кнопка «Исследование статической устойчивости», которая активирует экранную форму «frmStability» (рис. 3.3). Предварительно средствами, представленными на главной форме, можно оценить частотные диапазоны, характерные для спектров исследуемой конструкции, но можно и сразу после загрузки исходных данных перейти к исследованию статической устойчивости.

На рис. 3.3 показан пример задания данных для вычисления собственных частот колебаний конструкции в заданном диапазоне чисел волн по окружности в собственных формах  $m$ . Для расчетов задаются два поддиапазона исследования собственных значений. Первый поддиапазон относится к частотам собственных колебаний, т.е. соответствует положительным собственным значениям  $\lambda_k(m)$  и задается для удобства пользователя в размерности Гц. Чтобы определить второй поддиапазон, как исследуемую область отрицательных собственных значений, в той же размерности, использовано условное обозначение «Мнимые частоты», при

этом подразумевается, что задаются величины  $f_{1,2}$ , соответствующие  $\lambda_{1,2} = -(2\pi f_{1,2})^2$ .

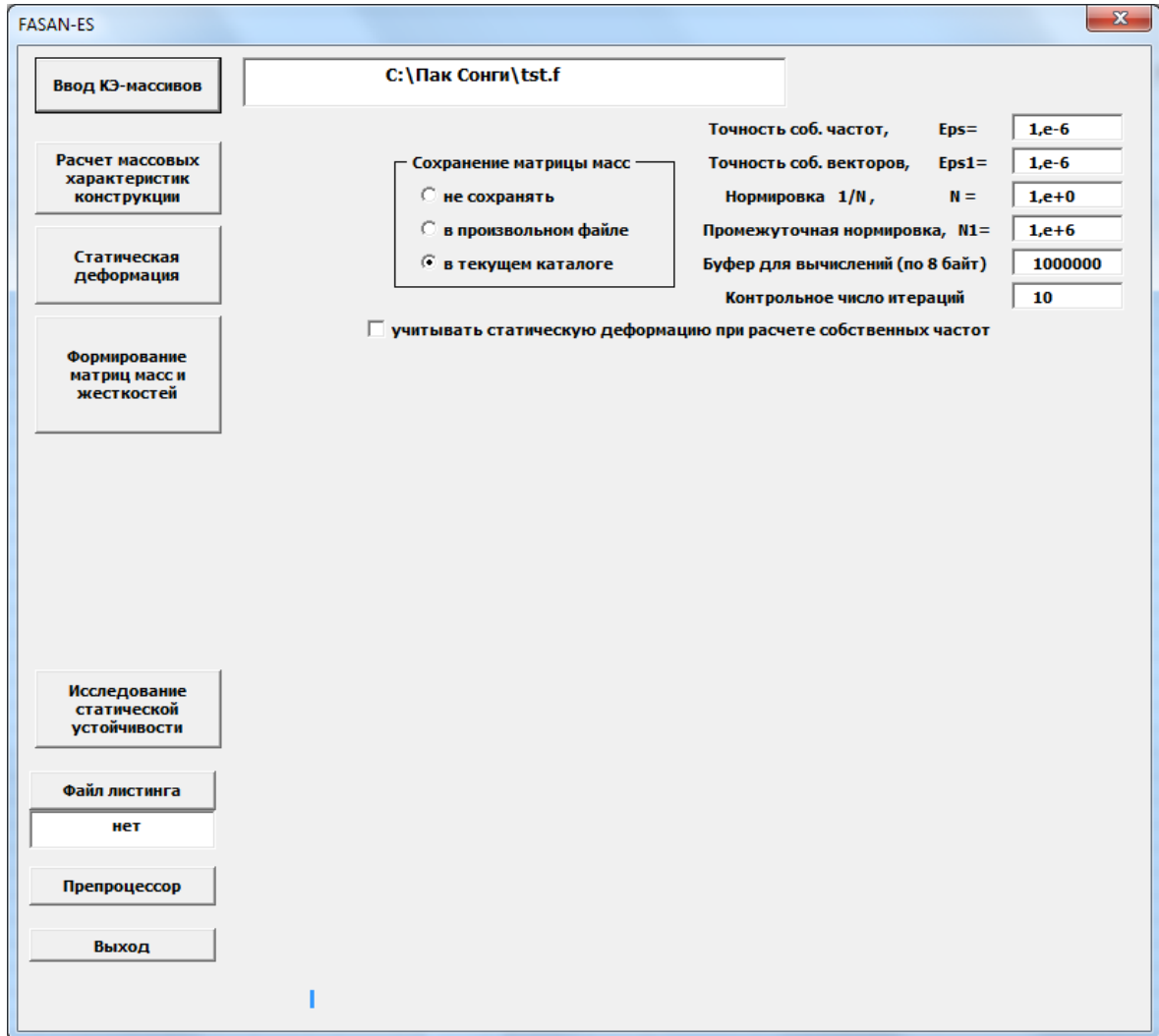


Рис. 3.2. Главное окно проекта в файле FasanES.xlsm

Кнопка «Старт» инициирует начало исследования. Если предварительно не было рассчитано статическое напряженно-деформированное состояние, то выполняется его расчет. Текстовое окно, расположенное под этой кнопкой, информирует о текущем этапе исследования.



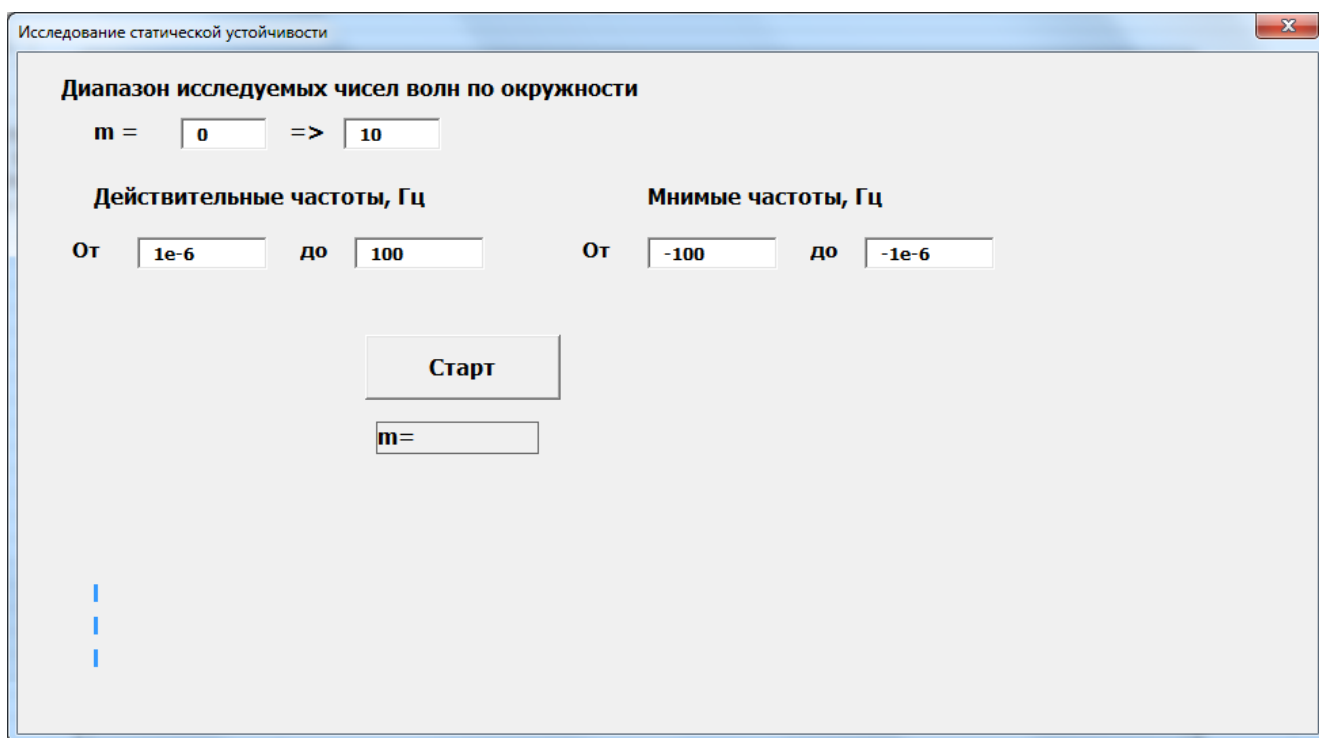


Рис. 3.3. Экранная форма для исследования статической устойчивости.

Вычисляемые значения собственных частот выводятся на активный в данный момент рабочий лист Excel в столбцы, каждый столбец соответствует очередному значению  $m$ , которое выведено в верхней ячейке столбца.

Очевидно, что каждый столбец в полученном массиве чисел содержит излишнюю информацию. Поэтому далее следует вручную от излишних чисел избавиться, чтобы остался ряд значений  $m$  и ряд минимальных в соответствующем столбце значений  $f_{\min}(m)$ , среди которых могут оказаться и отрицательные величины.

Полученные два ряда чисел можно использовать для построения графика зависимости  $f_{\min}(m)$  средствами Excel. В рамках введенной выше терминологии можно сказать, что в области отрицательных значений такого графика показаны «мнимые частоты», наличие которых характеризует потерю статической устойчивости нагруженной конструкции. Согласно формуле (3.7а), отрицательное значение  $f_{\min}(m)$  пропорционально величине  $\tau_1 = 2\pi |f_{\min}(m)|$ , являющейся коэффициентом в показателе растущей (во времени) экспоненты деформации по

соответствующей собственной форме. Посредством очевидных преобразований на рабочем листе можно построить и график  $\lambda_1(m)$ .

Описанную выше частично автоматизированную технологию можно пояснить на примере цилиндрической алюминиевой стенки, отделяющей центральную часть круглого бассейна от воды, заполняющей его внешнюю сторону (рис. 3.4).

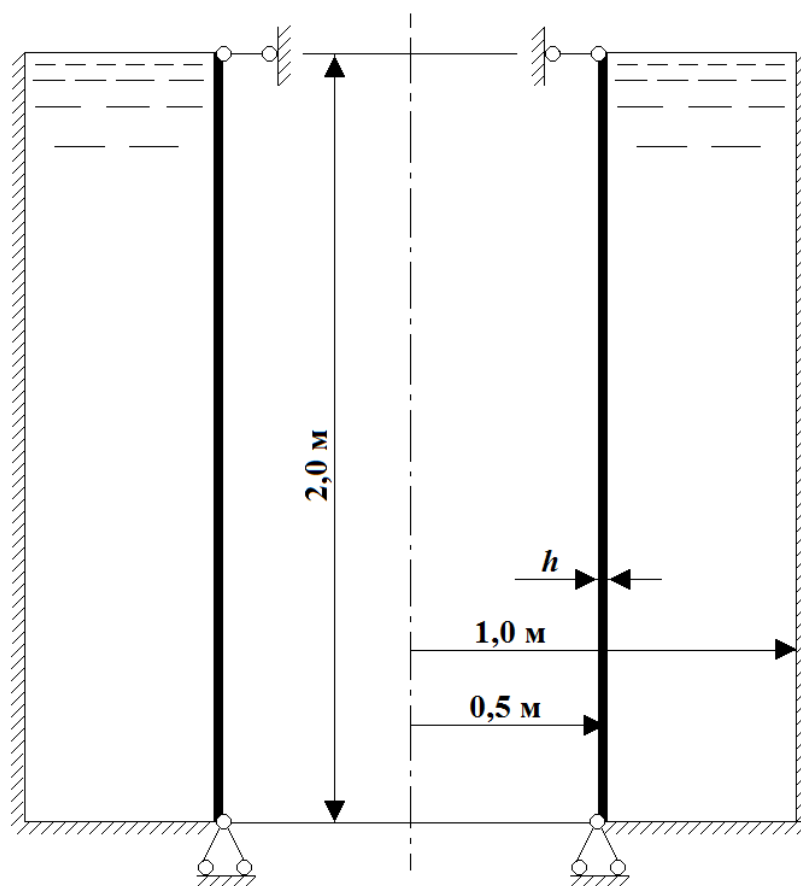


Рис. 3.4. Сечение цилиндрической алюминиевой тонкостенной стенки

Внешняя стенка и дно бассейна абсолютно жесткие. Нижний край стенки закреплен шарнирно, а верхний шарнирно оперт с подвижностью в осевом направлении. Конструкция находится под действием гравитационного поля Земли с ускорением свободного падения  $G = 9,80665 \text{ м/с}^2$ . Варьируемый параметр – толщина стенки  $h$ , модуль Юнга материала  $E = 7 \cdot 10^{10} \text{ Па}$ , коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ , плотность  $\rho = 2700 \text{ кг/м}^3$ . Задача состоит в определении критической

величины толщины  $h_{\text{крит}}$ , при которой не происходит статическая потеря устойчивости.

Для решения поставленной задачи сформирована конечно-элементная модель, показанная на рис. 3.5. Там же показана конфигурация статической деформации (в увеличенном масштабе), вычисленной при заданной толщине стенки  $h = 1,5$  мм.

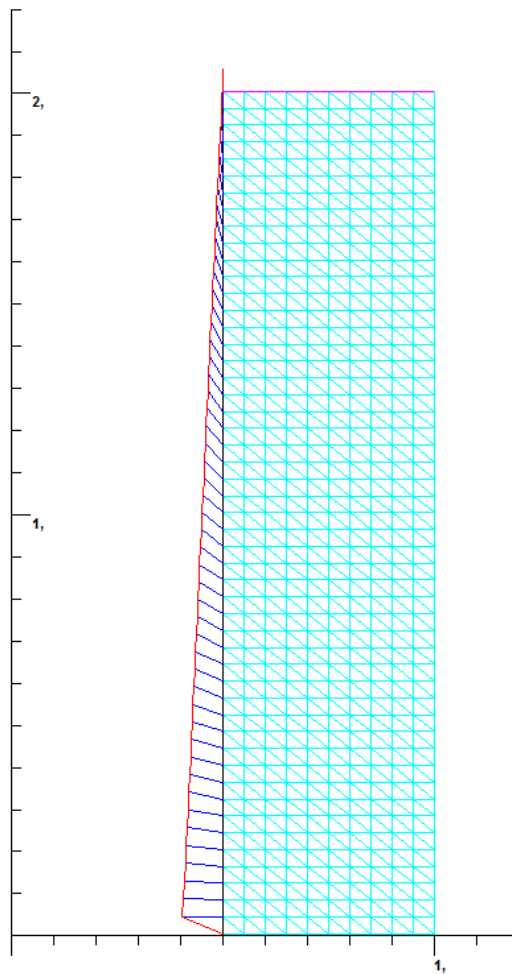


Рис. 3.5. Конечно-элементная модель и графическое изображение статической деформации

Применение представленного на рис. 3.3 инструмента привело к появлению на рабочем листе показанной на рис. 3.6 совокупности заполненных ячеек, содержащих значения собственных частот (записи «no Imag» свидетельствуют об отсутствии отрицательных собственных значений) для собственных форм с числом

волн по окружности в диапазоне от 0 до 10.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	68,05643	54,53286	34,21335	22,03792	14,49674	9,0908	5,130356	5,069294	9,41714	15,74614	23,8214
3	no lmag	no lmag	89,16817	62,10035	45,18329	34,05258	26,62253	22,51602	22,47214	26,55045	33,56706
4			no lmag	no lmag	84,33653	66,22616	53,49302	44,78402	39,82153	38,99281	42,55541
5					no lmag	no lmag	85,41187	72,29382	63,24912	58,19741	57,40647
6							no lmag	no lmag	90,73779	82,10442	77,637
7									no lmag	no lmag	no lmag

Рис. 3.6. Собственные частоты, вычисленные при  $h = 1,5$  мм.

Удалив не представляющие интереса высшие собственные частоты, получаем две строки и график (рис. 3.7), из которого видна зависимость  $f_{\min}(m)$ .

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	68,05643	54,53286	34,21335	22,03792	14,49674	9,0908	5,130356	5,069294	9,41714	15,74614	23,8214
3											

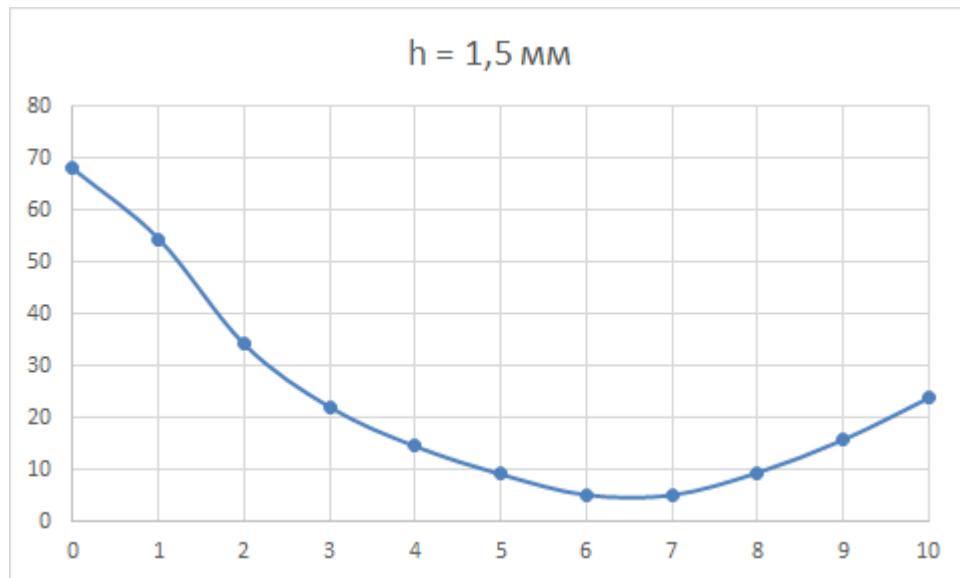


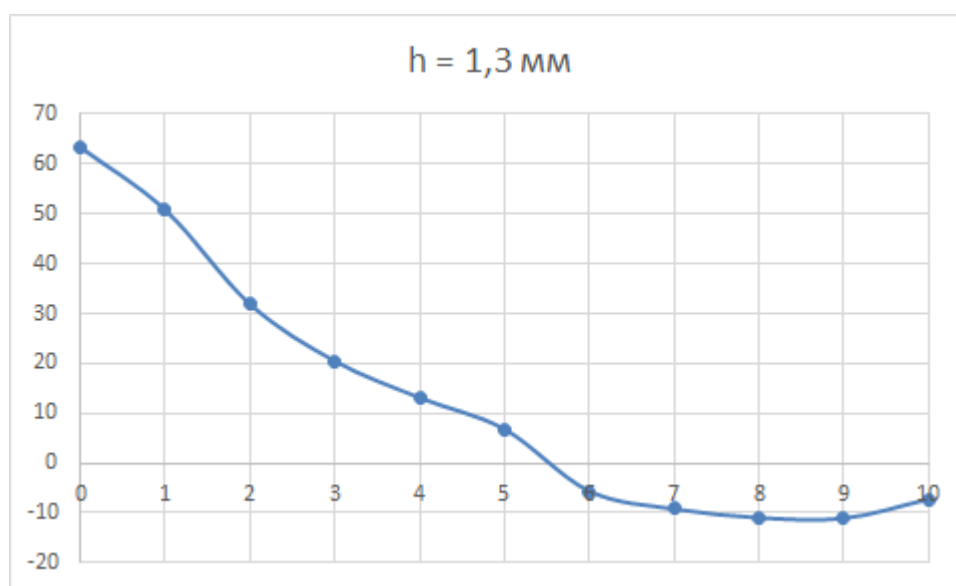
Рис. 3.7. Зависимость  $f_{\min}(m)$  при  $h = 1,5$  мм.

Аналогичные операции, выполненные при  $h = 1,3$  мм, приводят к таблице (рис. 3.8) и графику (рис. 3.9). При построении графика в этом случае задействована отрицательная полуплоскость для представления величин упомянутых выше «мнимых частот».

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	63,34929	50,80875	31,88161	20,46353	13,12164	6,80756	23,65006	18,31252	16,05671	17,61504	21,99979
3	no Imag	no Imag	83,13459	57,88759	42,01051	31,32354	49,28389	40,35285	34,30825	31,53292	32,68775
4			no Imag	no Imag	78,6178	61,5582	79,29675	66,51092	57,09138	50,82013	47,96685
5					no Imag	96,28828	-5,60795	95,85032	83,22203	73,94031	67,97768
6						no Imag		-9,19453	-10,9483	99,82147	91,18126
7										-11,0657	-7,2248
8											

Рис. 3.8. Собственные частоты, вычисленные при  $h = 1,3$  мм.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	63,34929	50,80875	31,88161	20,46353	13,12164	6,80756	-5,60795	-9,19453	-10,9483	-11,0657	-7,2248

Рис. 3.9. Зависимость  $f_{\min}(m)$  при  $h = 1,3$  мм.

На рис. 3.10 показаны шаги последовательного уточнения критического значения толщины стенки посредством бисекций исходного интервала  $[1,3 ; 1,5]$  мм. В качестве последнего уточнения можно принять  $h = 1,4575$  мм с гарантированной абсолютной погрешностью менее  $0,0005$  мм.

27	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
28	65,74479	52,70518	33,06947	21,26556	13,8202	7,993435	-2,01652	-5,71045	-4,66424	7,178223	15,44404	h = 1,4
29	66,91055	53,62717	33,64662	21,65524	14,16096	8,550671	3,276863	-2,06956	5,645095	12,11761	19,95143	h = 1,45
30	67,14128	53,80958	33,76078	21,73232	14,2285	8,659941	3,713654	1,256507	6,555243	12,90689	20,76394	h = 1,46
31	67,02601	53,71846	33,70375	21,69382	14,19475	8,605388	3,501516	-1,16638	6,11581	12,51731	20,36052	h = 1,455
32	67,07214	53,75493	33,72658	21,70923	14,20826	8,627229	3,587746	-0,43213	6,29496	12,67431	20,52255	h = 1,457
33	67,0952	53,77315	33,73798	21,71693	14,21501	8,63814	3,630157	0,633336	6,382799	12,75222	20,60323	h = 1,458

Рис. 3.10. Итерации уточнения критического значения  $h$ .

Для большей наглядности полученных результатов выполним последнее тестирование собственных частот для  $h = 1,4575$  мм и, добавив ряды из рис. 3.7 и 3.9, построим график, представленный на рис. 3.11.

1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
2	67,08367	53,76404	33,73228	21,71308	14,21163	8,632685	3,609009	0,327271	6,339019	12,71331	20,56292		$h = 1,4575$ мм
3	63,34929	50,80875	31,88161	20,46353	13,12164	6,80756	-5,60795	-9,19453	-10,9483	-11,0657	-7,2248		$h = 1,3$ мм
4	68,05643	54,53286	34,21335	22,03792	14,49674	9,0908	5,130356	5,069294	9,41714	15,74614	23,8214		$h = 1,5$ мм

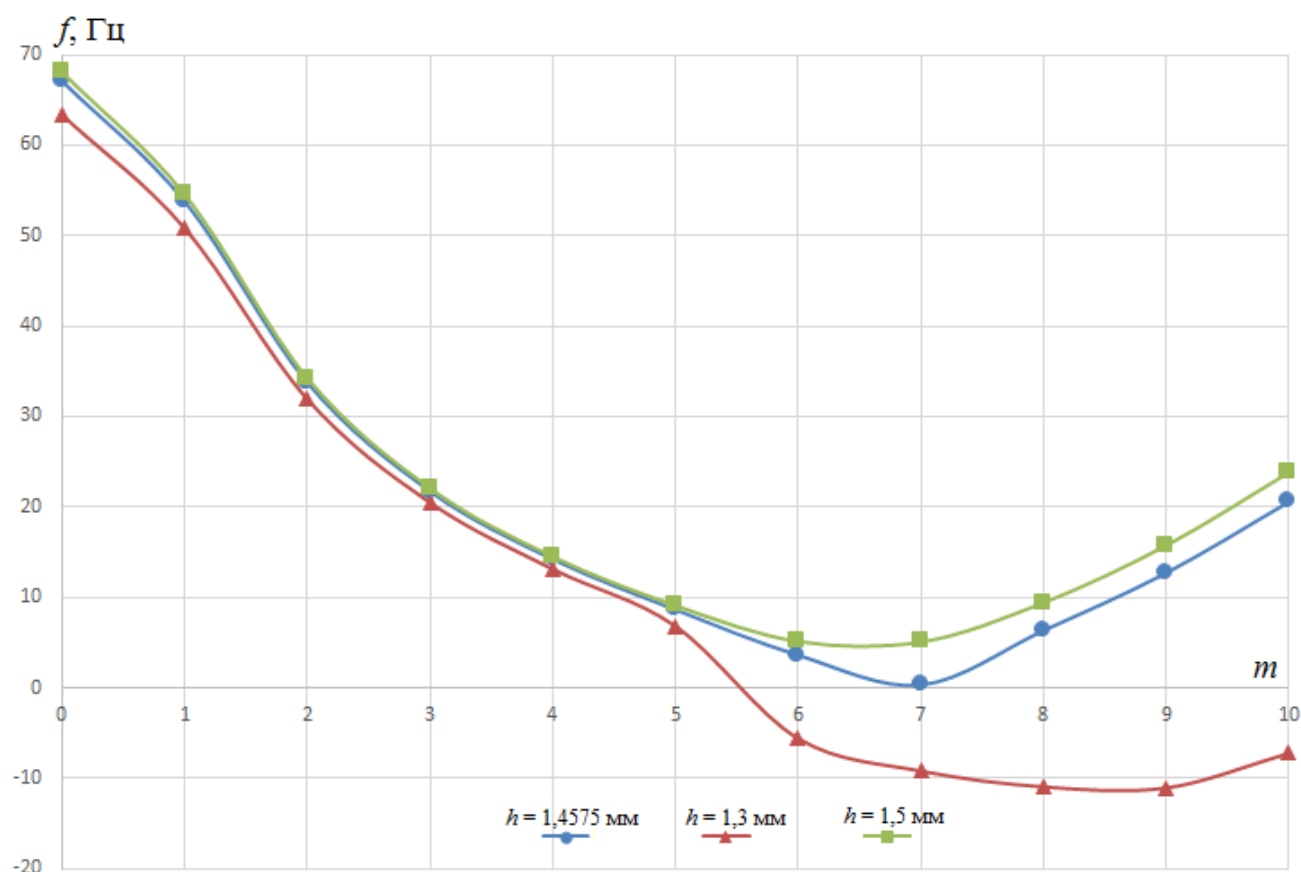


Рис. 3.11. Зависимости  $f_{\min}(m)$ .

На рис. 3.12 представлены соответствующие показанным на рис. 3.11 графики собственных значений  $\lambda_1(m)$ .

Таким образом, в данном разделе показана эффективность предложенного минимального средства автоматизации операций по исследованию минимальных собственных значений при построении областей статической устойчивости осесимметричных тонкостенных конструкций.

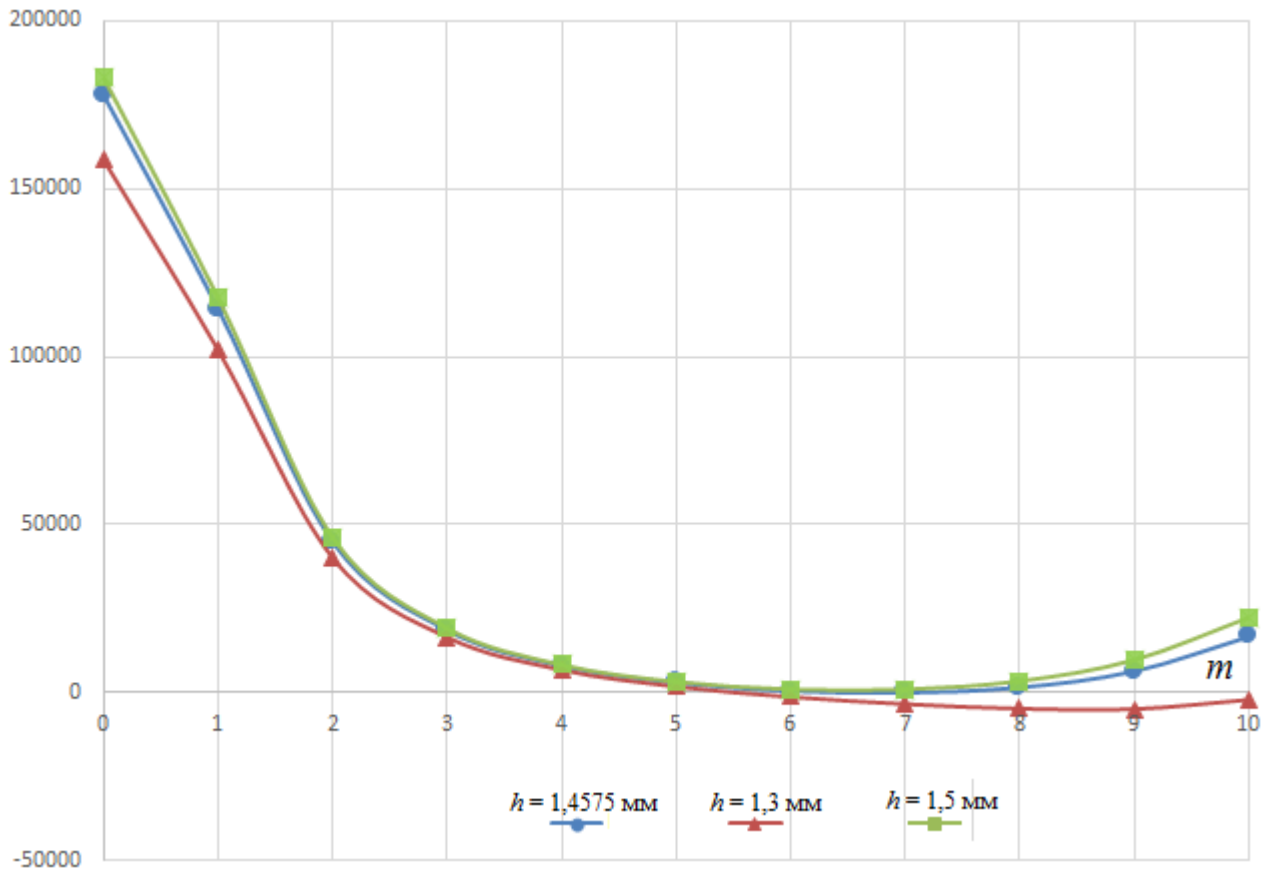


Рис. 3.12. Наименьшие собственные значения  $\lambda_1(m)$ .

### 3.3. Примеры исследования статической устойчивости осесимметричных конструкций, взаимодействующих с ограниченными объемами жидкостей

**Пример 1.** Расчет устойчивости тонкостенной осесимметричной конструкции, состоящей из двух соосных оболочек, полость между которыми заполнена жидкостью (рис. 3.13).

Параметры конструкции:  $R_1 = 0,5$  м,  $R_2 = 1$  м,  $h_1 = 0.001$  м,  $h_2 = 0.002$  м,  $H = 4$  м,  $E = 7 \cdot 10^{10}$  н/м<sup>2</sup>,  $\nu = 0,3$ ,  $\rho = 2750$  кг/м<sup>3</sup>,  $\rho_0 = 1000$  кг/м<sup>3</sup>.

Основания цилиндров жестко закреплены, верхние концы цилиндров шарнирно оперты.

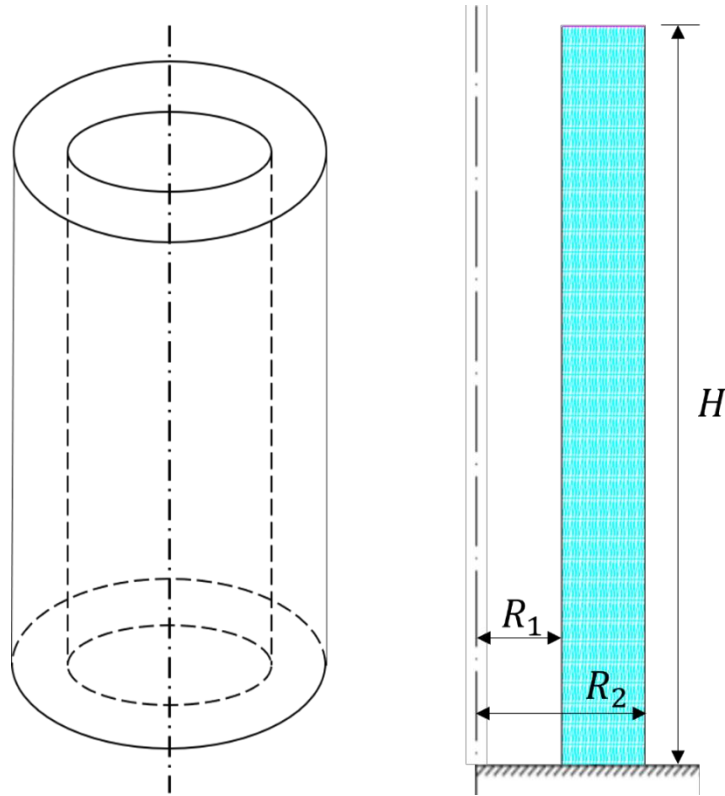


Рис. 3.13. Тонкостенная конструкция из соосных цилиндров.

В работе [3] приведены вычисленные для такой конструкции значения безразмерного частотного параметра  $\lambda = R_2 \omega \sqrt{\frac{\rho(1-\nu^2)}{E}}$  при различных значениях отношения высоты и радиуса  $\gamma = \frac{H}{R_2}$ .

Таблица 3.1

$\gamma$	Работа [27]		Данные МКЭ	
	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_1$	$\lambda_2$
4	0,01535	0,04520	0,01534	0,04514
2	0,03067	0,08561	0,03065	0,08536

В таблице 3.1 показаны безразмерные частотные параметры  $\lambda$ , приведенные в работе [3, 27] для двух низших тонов колебаний, сопоставлены с рассчитанными по МКЭ. Полученные по МКЭ результаты хорошо согласуются с результатами



работы [27].

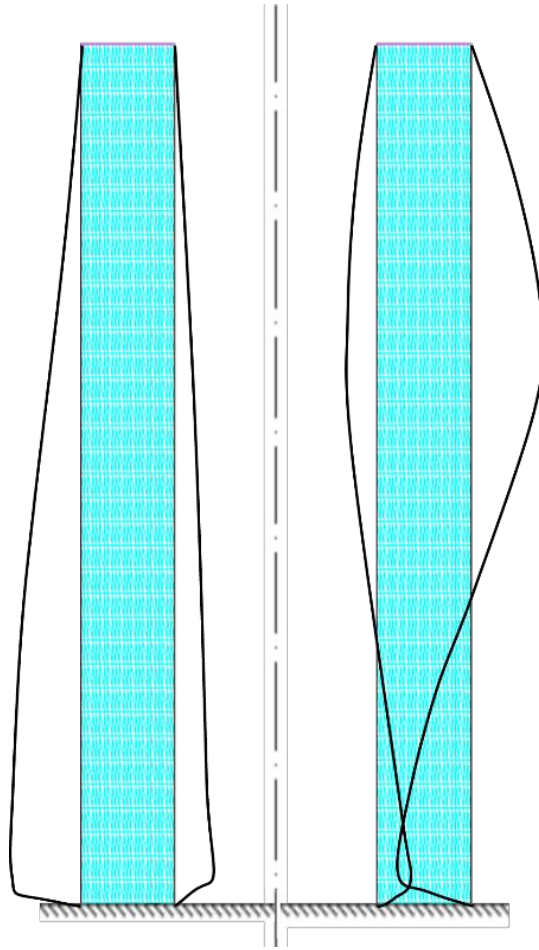


Рис. 3.14. Деформации стенок для двух низших тонов.

На рис. 3.14 показаны перемещения цилиндрических стенок, полученные в расчете по МКЭ первых двух собственных формы.

В таблице 3.2 приведены значения низших собственных частот осесимметричных колебаний ( $m = 0$ ), вычисленные при различных значениях давления на внешнюю и на внутреннюю стенки.

Давление на внутреннюю стенку имеет знак минус по причине противоположного направления действию внешнего давления.

Графики частот осесимметричных колебаний в зависимости от внутреннего и внешнего давления приведены на рис. 3.15 и 3.16.

Давление на внутреннюю стенку		Давление на внешнюю стенку	
Р [МПа]	$f$ [Гц]	Р [МПа]	$f$ [Гц]
0	81,1455	0	81,1455
-110	51,3617	130	65,2632
-115	39,4379	140	60,3728
-116	35,3105	150	54,2094
-117	30,0913	160	46,13
-118	22,9132	170	34,5774
-119	9,69	180	10,2693
-119,19	0,0191	180,81	0,007

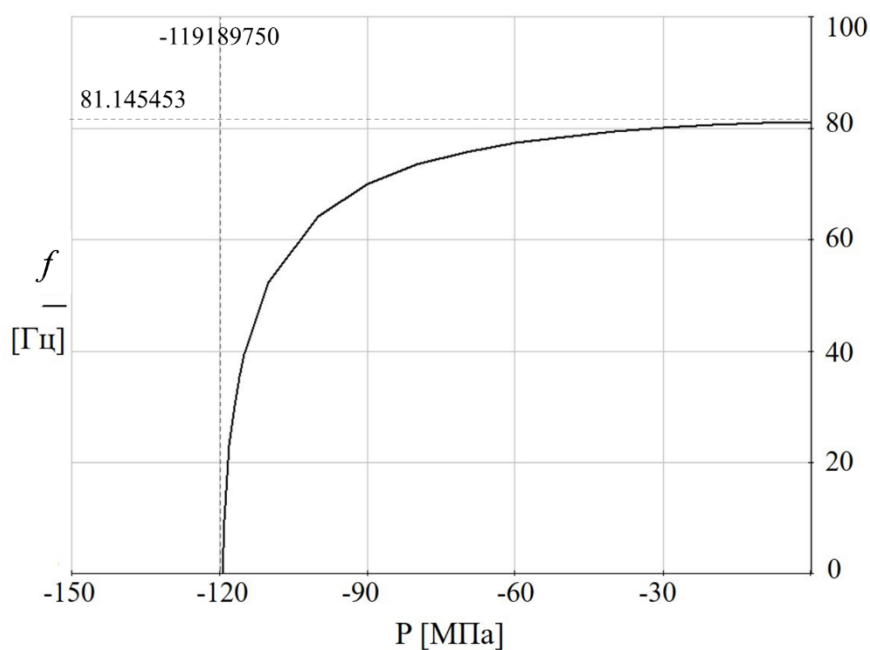


Рис. 3.15. Собственная частота осесимметричного тона в зависимости от внутреннего давления

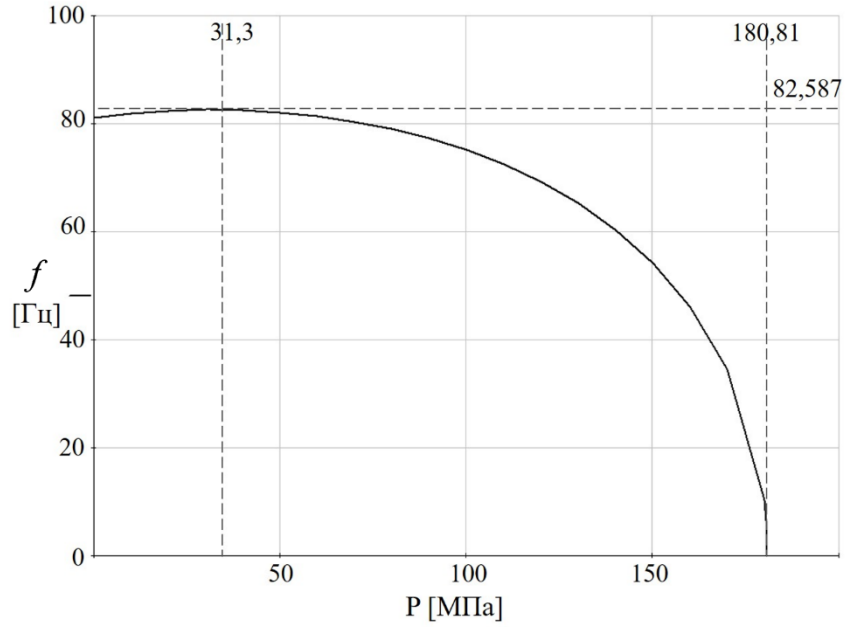


Рис. 3.16. Собственная частота осесимметричного тона в зависимости от внешнего давления.

Проведенные по описанной выше методике показали, что  $f_{\min}(m)$  достигается при  $m = 6$ . Графики зависимости низших собственных частот, формы которых имеют число волн по окружности  $m = 6$ , от внутреннего и внешнего давления показаны на рис. 3.17 и 3.18.

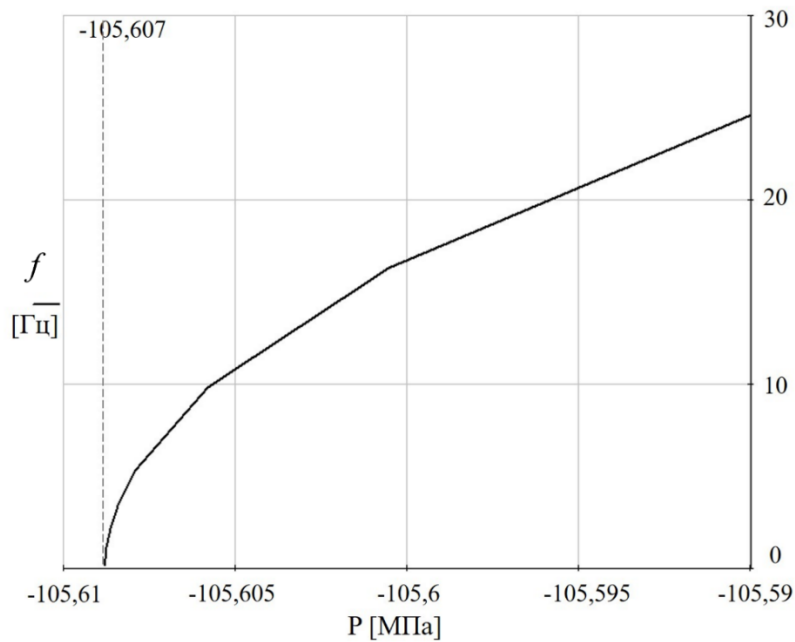


Рис. 3.17. Низшие частоты в зависимости от внутреннего давления при  $m = 6$ .

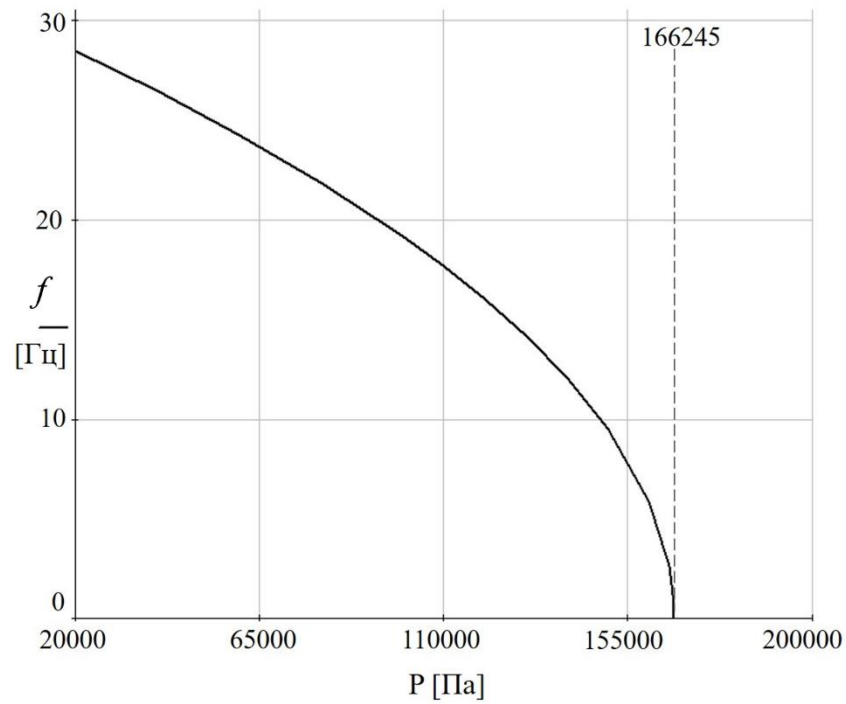


Рис. 3.18. Низшие частоты в зависимости от внешнего давления при  $m = 6$

Как можно видеть, чем выше значение давления, тем ниже собственная частота и получаются критические значения давлений потери устойчивости.

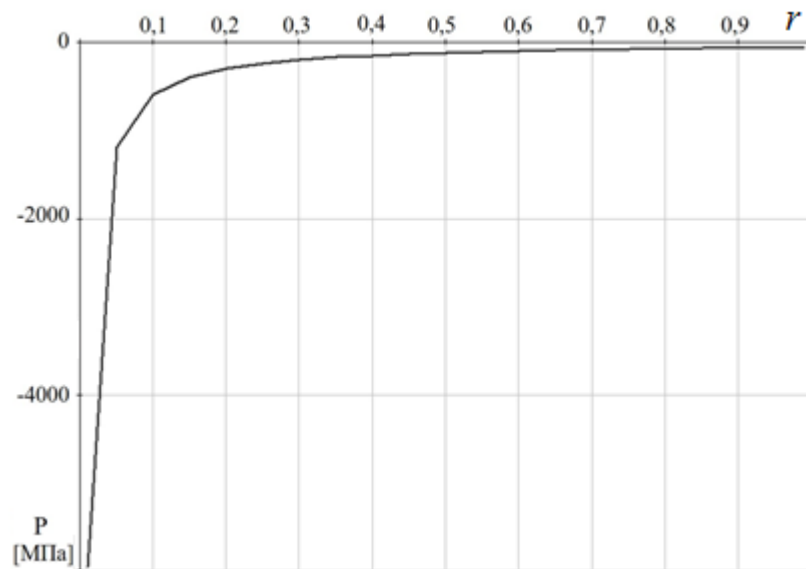


Рис. 3.19. Границы области устойчивости.

Граница области статической устойчивости, полученная в результате проведенных исследований, на плоскости ( $P_{\text{внут}} - r$ ), где  $r = R_1/R_2$ , показана на рис.

3.23. В графике видно, что сужение расстояние между стенками оболочки и повышение значения давления приводят к потере устойчивости конструкции.

**Пример 2.** Исследование устойчивости тонкостенная тороидальная полость.

Рассматривается тороидальная оболочка (рис. 3.24), шарнирно опертая по внутреннему экваторам, заполненная жидкостью наполовину. По внешнему экватору прикреплено массивное кольцо, величина его массы в процессе исследований варьировалась. Также варьировалось внешнее давление на оболочку, которое моделировалось отрицательным значением внутреннего избыточного давления в полости.

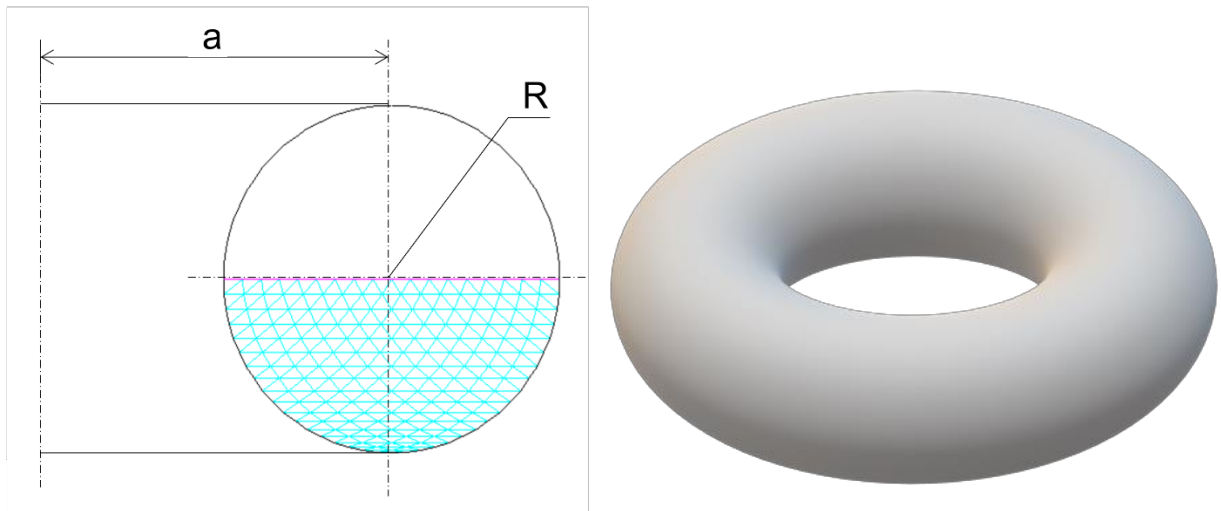


Рис. 3.20. Тороидальная оболочка

Параметры конструкции, взятые из работы [72]: расстояние от центра образующей окружности до оси вращения  $a = 1,365$  м, радиус образующей окружности  $R = 0,2921$  м, толщина оболочки  $h = 0,00159$  м,  $E = 7,375 \cdot 10^{10} \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$ ,  $\nu = 0,32$ , плотность материала  $\rho = 2850 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ , плотность жидкости  $\rho_0 = 1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ .

Результаты исследования зависимости собственных частот колебаний от числа волн при различных величинах внутреннего давления показаны в таблице 3.3.

Число волн $m$	0	1	2	3
0 Па	71,5603921	71,2709	71,62124	73,62845
100000 Па	72,1162317	71,82142	72,1599	74,27952
200000 Па	72,6624884	72,36259	72,68594	74,92013
300000 Па	73,199534	72,8948	73,19984	75,55061

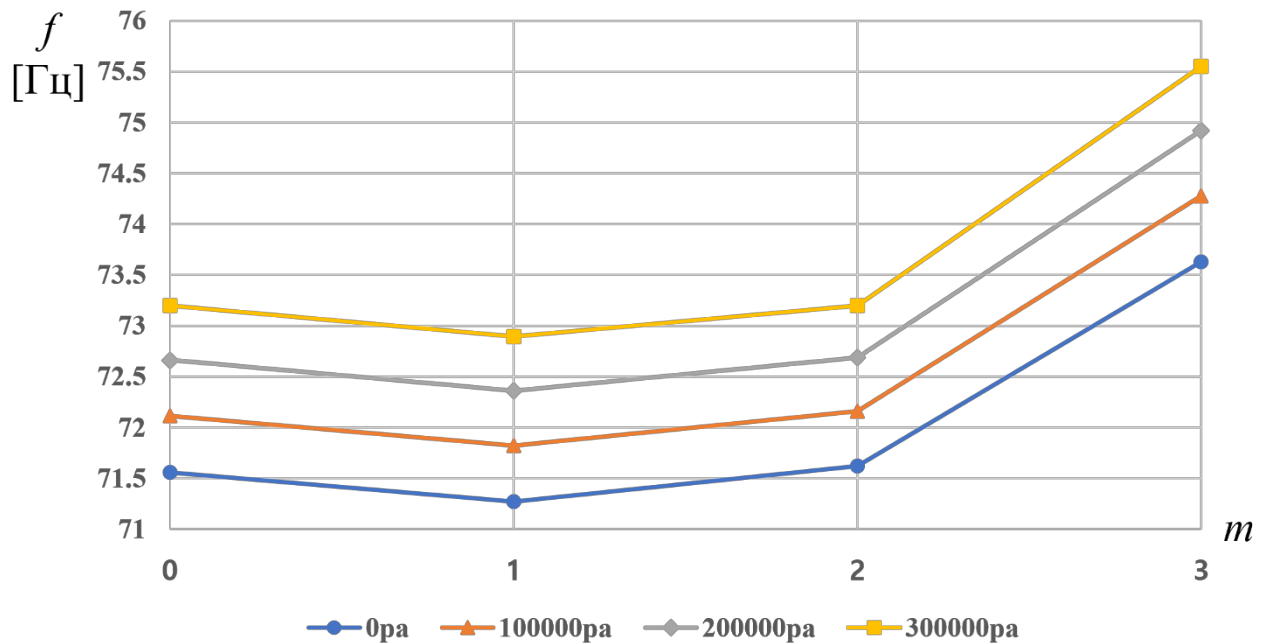


Рис. 3.21. Частоты в зависимости от числа волн при различных величинах внутреннего давления

В таблице 3.4 показана зависимость низшей собственной частоты осесимметричных колебаний конструкции от величины давления. Последний столбец этой таблицы содержит критическое значение давления для потери устойчивости по осесимметричной форме ( $m = 0$ ).

Таблица 3.4

$P$ , Па	0	-1000000	-2000000	-3000000	-4000000	-4500000	-4729020
$f$ , Гц	71,56039	65,37122	57,62779	47,2817	31,57663	18,02974	0,09711

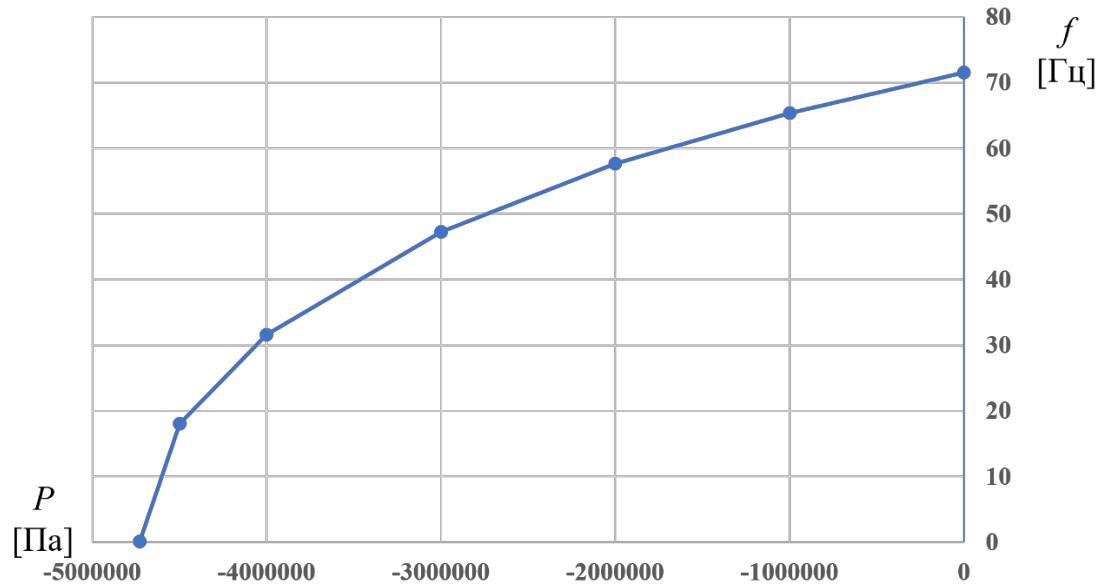


Рис. 3.22. Низшая частота осесимметричного тона в зависимости от давления

Результаты исследования зависимости низших собственных частот неосесимметричных колебаний от числа волн по окружности при различных величинах сосредоточенных масс представлены в таблице 3.5 и на рис. 3.23.

Таблица 3.5

$m$	$P$ [Па]						
	0	150	500	1000	10000	100000	130000
1	31,8	28,41597	22,86998	18,04908	6,131486	1,856632	1,6161
2	51,312	50,36	41,56677	29,7668	9,479	2,56146	2,2189
3	52,80342	52,38151	45,1545	32,20762	10,20274	3,1	2,737683

4	56,76715	56,361	47,34862	33,67175	10,67668	3,389362	3,01734
5	65,25926	64,99429	49,32785	35,05266	11,12684	3,606522	3,214467
6	75,5073	75,84975	51,17694	36,35588	11,54462	3,768668	3,35898
7	80,04224	79,94236	52,98538	37,63	11,94861	3,909715	3,48578
8	86,6	86,35482	54,766	38,885	12,34558	4,044812	3,608346

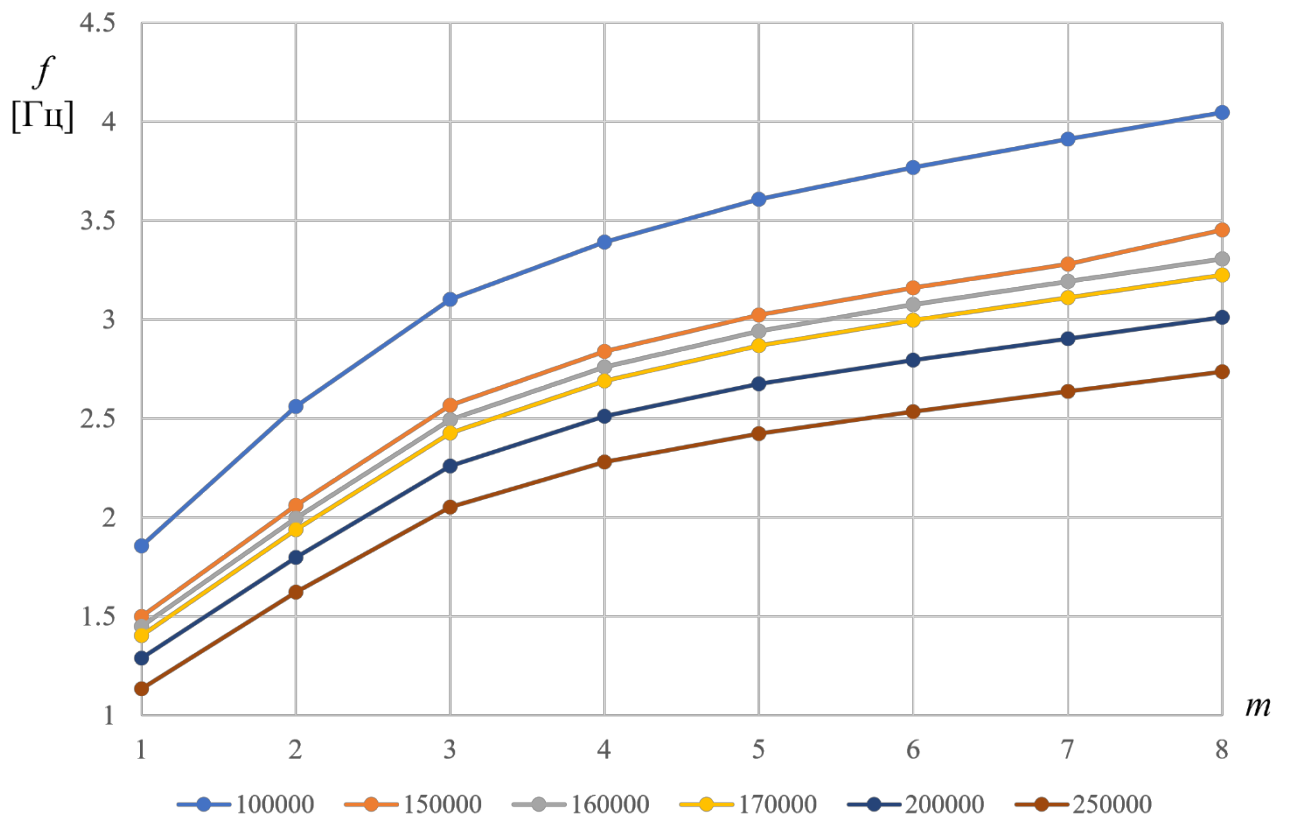


Рис. 3.23. Низшие собственные частоты в зависимости от числа волн при различных величинах сосредоточенных масс

Из рисунка 3.23 видно, что при увеличении массы собственная частота уменьшается.

**Пример 3.** Многофакторное исследование устойчивости торокольцевой тонкостенной конструкции, содержащей жидкость (рис. 3.24).



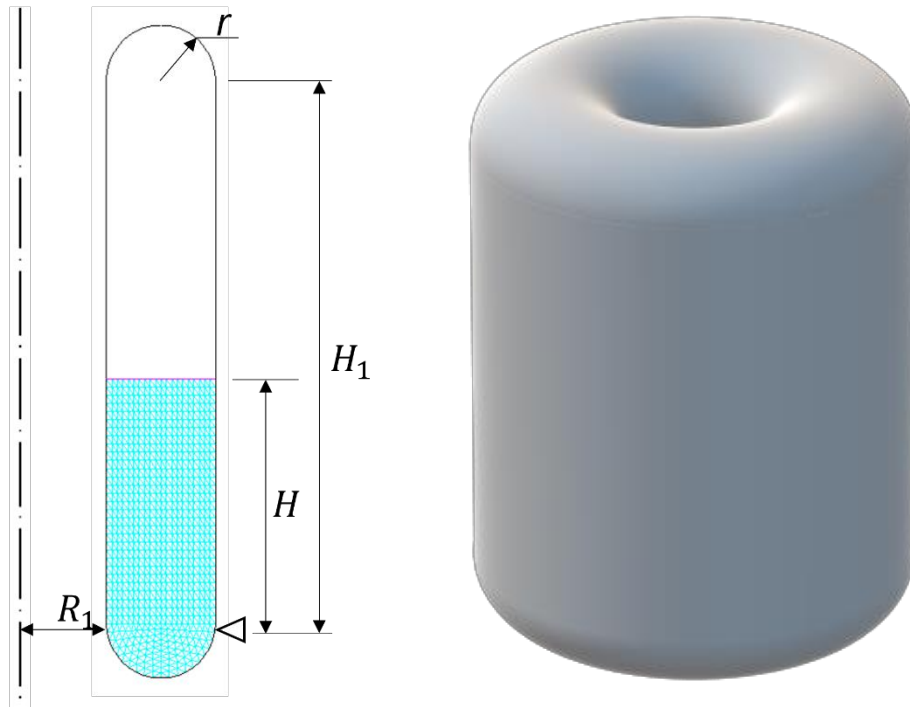


Рис. 3.24. Торокольцевая конструкция

В процессе исследования были приняты неизменными значения следующих параметров:  $R_1 = 0.6$  м ;  $r = 0.4$  м ;  $H_1 = 4$  м ; модуль Юнга  $E = 7 \cdot 10^{10}$  Па ; коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$  ; плотности материала и жидкости  $\rho = 2750 \frac{kg}{m^3}$  ;  $\rho_0 = 1000 \frac{kg}{m^3}$ . Конструкция находится в условиях гравитационного поля Земли.

Исследуется влияние на собственные частоты конструкции и возможную потерю статической устойчивости следующих параметров: толщина стенки  $h$ , внутреннее избыточное давление  $p$  и уровень заполнения конструкции жидкостью  $H$ .

Результаты расчета низших собственных частот (в Гц) с числом волн по окружности от 0 до 7 в зависимости от высоты уровня жидкости приведены в таблице 3.6.

Таблица 3.6

<i>H</i>	<i>m</i>							
	0	1	2	3	4	5	6	7
3	8.718562	8.979511	7.461447	6.133498	5.401588	7.992453	7.870504	8.620219
3.1	8.683834	8.80095	7.389668	5.93238	4.981155	7.867674	7.853348	8.643794
3.2	8.647486	8.63131	7.324288	5.740446	4.53811	7.474833	7.856972	8.68671
3.5	8.52925	8.168558	7.165378	5.20607	2.920117	5.718202	7.98189	8.92951
3.7	8.443268	7.892355	7.088924	4.871071	0.860599	4.415957	8.1514	9.18676
3.71	8.438827	7.8791	7.085687	4.85453	0.594723	4.066	8.161516	9.20161
3.715	8.4366	7.87254	7.084088	4.846264	0.40035	4.0185	8.16663	9.2091
3.718	8.435264	7.868584	7.083136	4.84131	0.210349	3.989725	8.169716	9.213618
3.719	8.434818	7.86727	7.08282	4.83965	0.074642	3.98	8.170747	9.215128
3.72	8.434372	7.865953	7.0825	4.837999	-0.18194	3.970419	8.17178	9.21664
3.73	8.4299	7.85283	7.07937	4.821479	-0.6479	3.872457	8.182189	9.231855
3.75	8.42093	7.826736	7.07327	4.788456	-1.09214	3.66872	8.203438	9.26283
3.8	8.39827	7.762376	7.05895	4.705956	-1.76739	3.101522	8.25899	9.34341

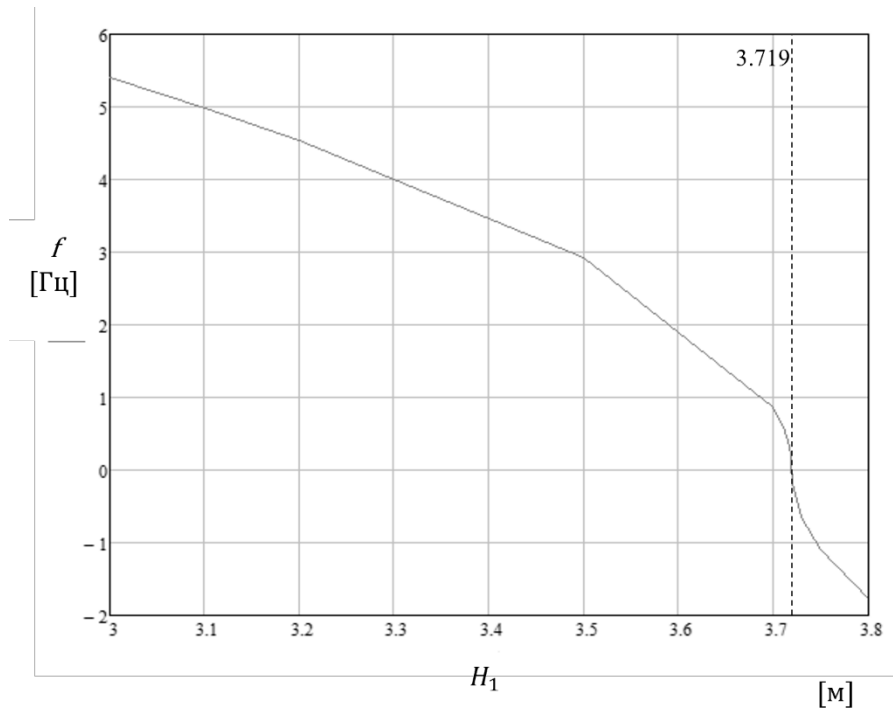


Рис. 3.25. График собственных частот в зависимости от высоты жидкости при  $m=4$

При  $h = 3$  мм получено критическое значение  $H_{cr} = 3.719$  м.

Результаты расчета собственных частот в зависимости от толщины оболочки показаны в таблице 3.7.

Таблица 3.7

$h \backslash m$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	-	-	6.811137	4.020918	-4.32267	-7.27451	-9.95157	-11.7054	-11.5073
2.1	9.559934	7.078789	6.884994	4.2578	-3.88506	-6.62823	-8.81059	-9.58543	-6.81129
2.2	9.513134	7.30044	6.95613	4.48477	-3.35544	-5.85282	-7.38217	-6.55726	6.849518
2.3	9.44521	7.5192	7.024982	4.70386	-2.67822	-4.8836	-5.43747	3.12833	8.848
2.4	9.361287	7.7352	7.091867	4.916814	-1.68145	-3.56107	-1.66117	7.89163	8.99753
2.45	9.314739	7.842207	7.124641	5.021458	-0.74477	-2.60779	3.372001	7.948	9.074258
2.5	9.26579	7.948568	7.157	5.1251	1.336337	-0.84662	5.09866	8.004895	9.152318
2.51	9.255751	0.969765	7.163418	5.145723	1.50404	0.72437	5.383462	8.016369	9.16809
2.53	9.23545	8.012082	7.176215	5.18687	1.795309	1.741453	5.92715	8.03942	9.199796
2.55	9.21487	8.0543	7.18895	5.22789	2.048237	2.360955	6.41276	8.062596	9.231717
2.6	9.162368	8.159413	7.220514	5.32997	2.583576	3.475	7.4431	8.12112	9.312465

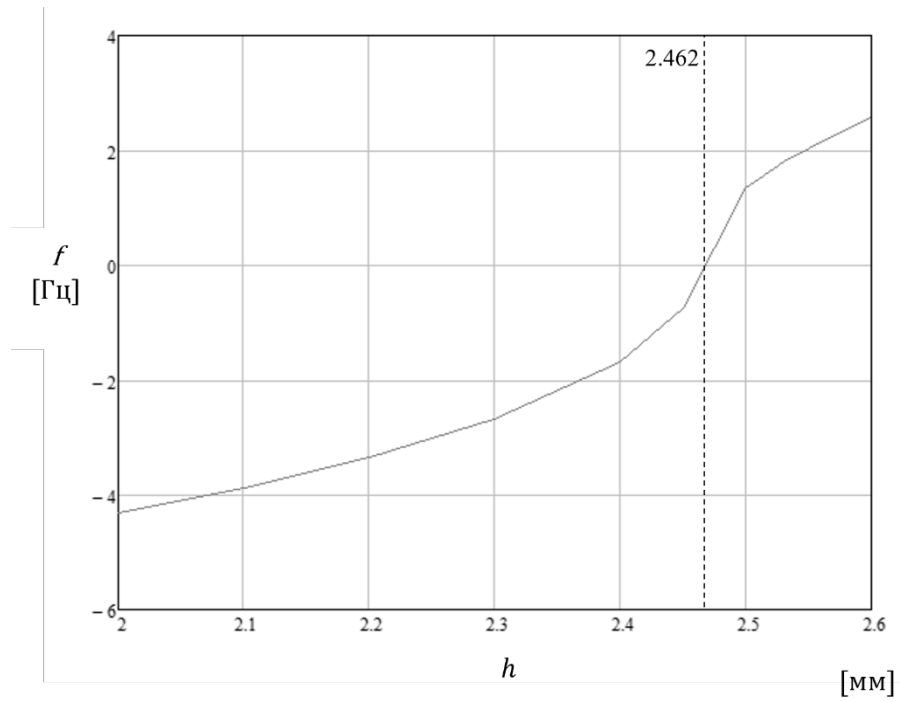


Рис. 3.26. График собственных частот в зависимости от толщины оболочки при  $m=4$

При  $H = 3$  м получено критическое значение  $h_{cr} = 2.462$  мм.

Критические значения внутреннего давления в зависимости от высоты жидкости и толщины оболочки.

Таблица 3.8.

Hh	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6	6.5	7	7.5	8	8.5	9	9.5	10
1	12639	19584	28823	40662	55461	73573	95349	121136	151280	186123	226012	271290	322301	379392	442906	513190
1.2	13120	20369	30045	42397	57782	76553	99057	125638	156636	192395	233255	279561	331655	389884	454591	526125
1.4	13759	21445	31714	44747	60896	80511	103933	131503	163560	200443	242493	290052	343466	403080	469242	542301
1.6	14568	22873	33937	47859	64988	86570	110246	139052	172425	210705	254232	303352	358411	419756	487740	562713
1.8	15567	24748	36880	51964	70354	92399	118441	148815	183860	223916	269329	320444	377612	441186	511518	588963
2	16772	27222	40809	57429	77466	101284	129229	161643	198867	241248	289133	342874	402825	469342	542783	623507
2.2	18177	30540	46155	64846	87083	113263	143749	178892	219043	264552	315774	373067	436787	507297	584956	670128
2.4	19690	35125	53638	75193	100454	129882	163869	202783	246985	296837	352698	414932	483901	559970	643505	734871
2.6	20910	41722	64504	90152	119720	153783	192778	237098	287120	343210	405739	475074	551584	635638	727604	827853

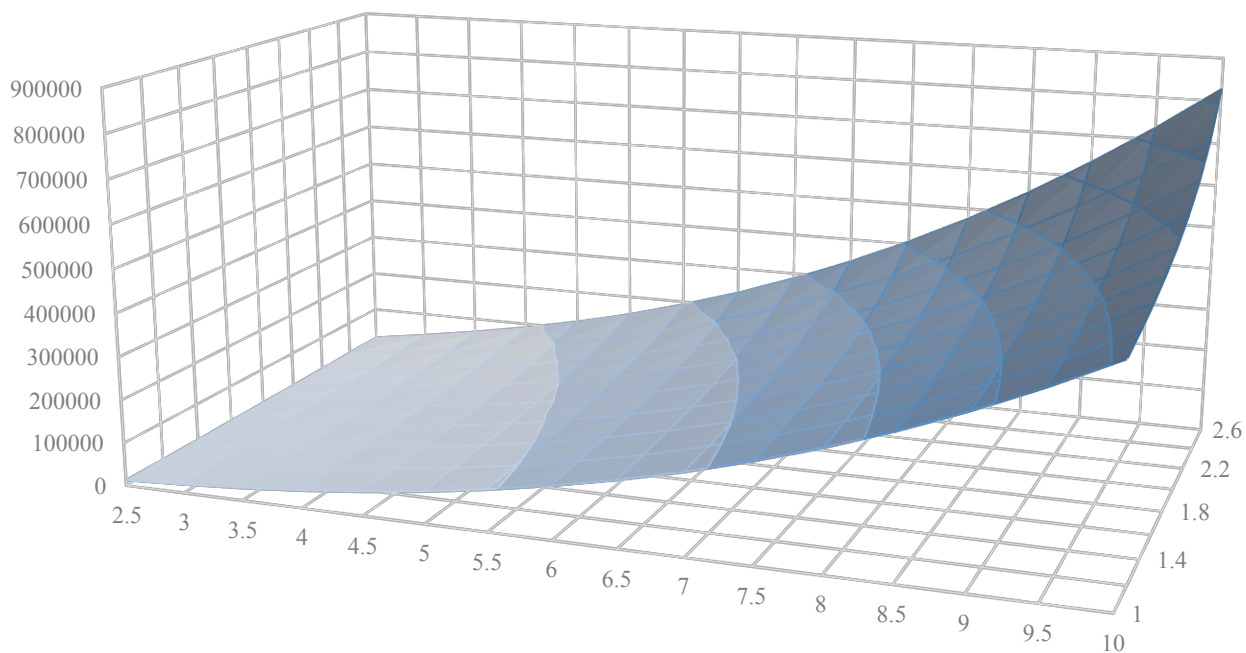


Рис. 3.27. Трехмерный график собственных частот при  $m = 4$

Построен трехмерный график собственных частот. Поверхность разделяет область устойчивости. Выше поверхности конструкция неустойчива.

**Пример 4.** Исследование устойчивости глубоководного хранилища топлива для подводных аппаратов.

Рассмотрим оболочечную конструкцию с полусферическими днищами и толщиной  $h$ , заполненную жидкостью и погруженную в воду (рис.3.32). Радиус оболочки  $R = 1$  м, высота  $H = 1$  м,  $E = 2 \cdot 10^{11}$  н/м<sup>2</sup>,  $\nu = 0,3$ ,  $\rho = 7800$  кг/м<sup>3</sup>, плотность жидкости внутри оболочки  $\rho_1 = 800$  кг/м<sup>3</sup>, глубина жидкости  $H_1 = 2$  м. Цилиндр заполнен водой вне оболочки высотой  $H_2 = 15$  м.

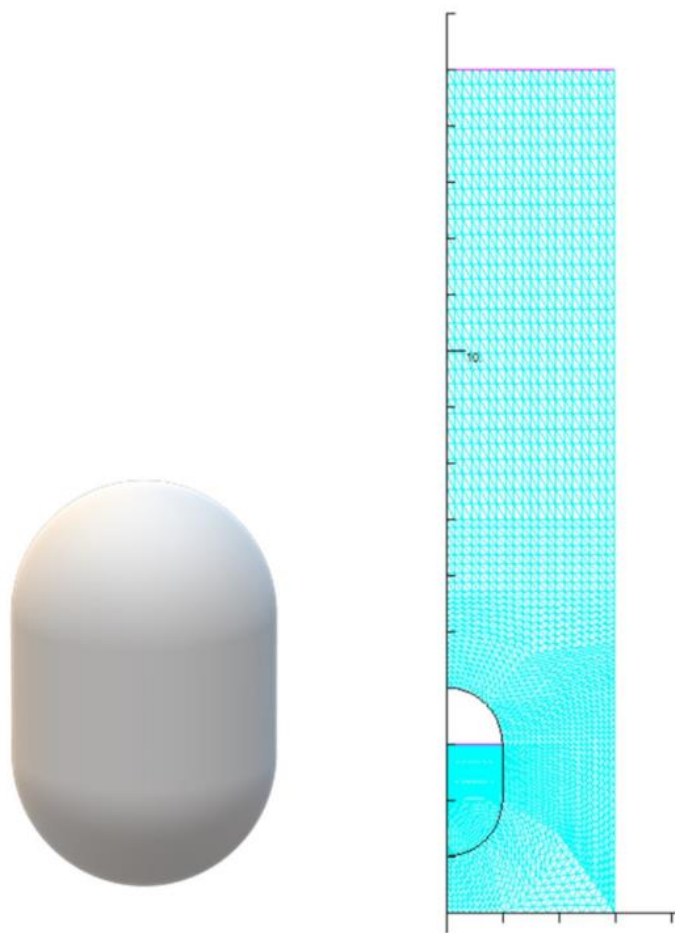


Рис. 3.28. 3D и конечно-элементная модель конструкции

Расчеты были выполнены при различных величинах внутреннего давления оболочки от 0 до 1 атм с шагом 0,1 атм. В таблицах 3.9 и 3.10 результаты расчетов для исследованных значений давления представлены в виде зависимостей собственных частот колебаний от числа волн  $m$  при различных толщинах оболочки, включая критическое значение толщины.

Таблица 3.9

m	0	1	2	3	...	10	11	12	13
h=3	52.71587	22.01488	65.33929	61.24042	...	6.192082	-14.056	-17.9291	-17.3541
h=3.1542	54.07517	22.828	67.08298	62.87377	...	14.43484	5.8222205	0.349106	12.07445
h=3.5	57.00941	24.60474	70.84371	66.39212	...	25.07276	24.77323	28.49513	35.76418

m	0	1	2	3	...	10	11	12	13
h=3	109597.9	19114.01	168371.3	147909.3	...	1512.142	-7791.87	-12677.6	-11877.4
h=3.1542	115322.8	20552.05	177477.8	155904.4	...	8217.561	1336.886	4.806556	5749.818
h=3.5	128177.7	23875.73	197934.7	173841	...	24792.68	24203.86	32022.9	50444.74

На рис. 3.29 показаны значения собственных частот  $f_1(m)$  при внутреннем давлении  $p = 0$ , где  $f_1(m)$  – низшая собственная частота для собственных форм с  $m$  волнами. На рис. 3.34 показаны соответствующие им собственные значения  $\lambda_1(m)$ . При этом, если некоторое собственное значение  $\lambda_1 < 0$ , то на графике рис.

3.29 откладывается величина  $f_1(m) = -\frac{\sqrt{|\lambda_1|}}{2\pi}$ . В этом случае однородное уравнение собственных колебаний имеет два независимых решения  $\xi e^{-at}$  и  $\xi e^{+at}$ , из которых первое реализует форму потери устойчивости.

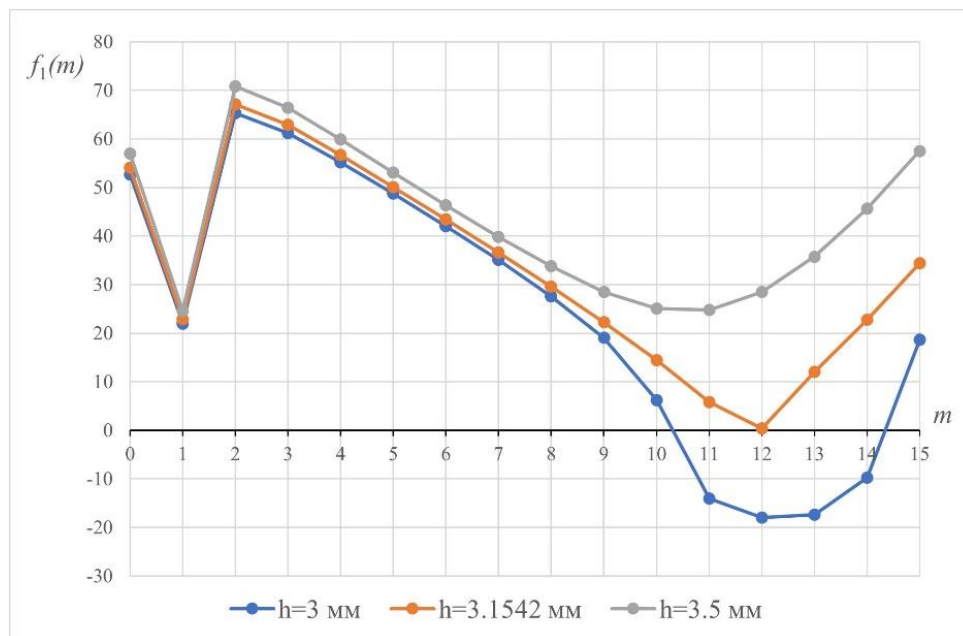


Рис. 3.29. График зависимости собственной частоты  $f_1(m)$  от количества волн  $m$  при внутреннем давлении  $p = 0$ .



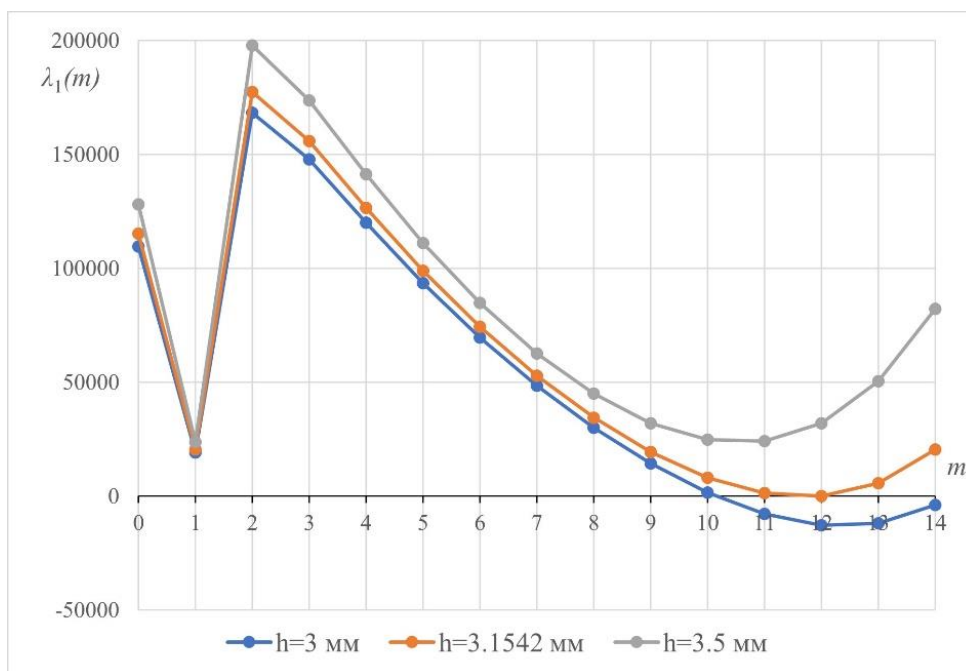


Рис. 3.30. График зависимости собственного значения  $\lambda_1(m)$  от количества волн  $m$  при внутреннем давлении  $p = 0$ .

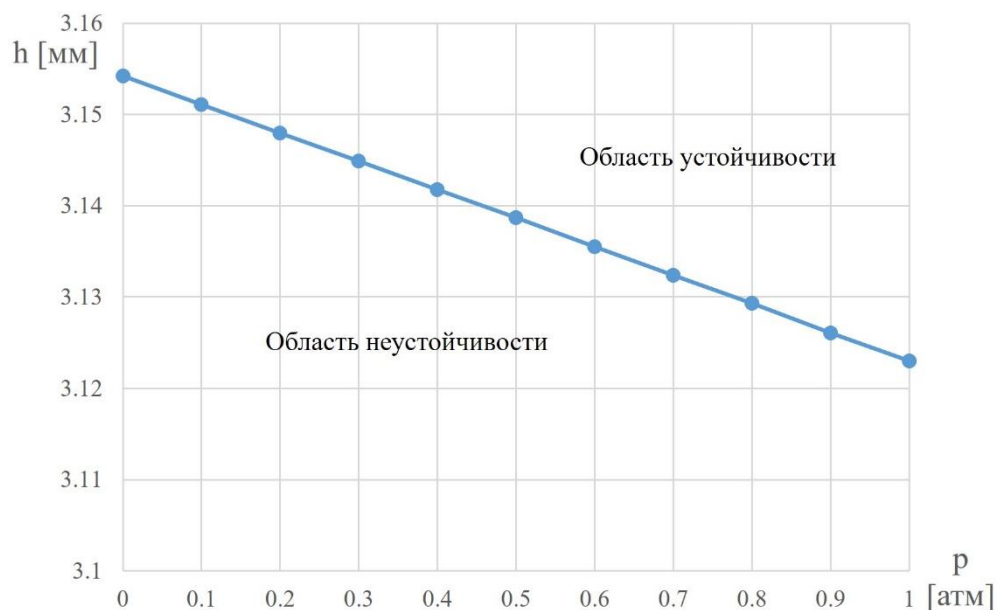


Рис. 3.31. График зависимости критической толщины оболочки  $h$  от внутреннего давления  $p$ .

Аналогично результаты получены для всех исследованных величин внутреннего давления до 1 атм и построен график критических значений толщины

оболочки (рис. 3.31). Этот график представляет собой границу области устойчивости на плоскости  $p - h$ . Ниже границы конструкция неустойчива.

#### **Глава 4. Методика исследования динамической устойчивости гармонических колебаний осесимметричных тонкостенных конструкций, контактирующих с объёмами несжимаемой жидкости, возбуждаемых продольным периодическим воздействием**

Экспериментально установлено [1], что продольное возбуждение упругой цилиндрической оболочки, заполненной жидкостью, может привести в определенных диапазонах частот к трем различным формам динамической реакции:

1. Линейным гармоническим колебаниям по осесимметричным формам, характеризующимся, в основном, большими изменениями давления внутри жидкости и при этом сопровождающимся малыми прогибами стенки.

2. Колебаниям по неосесимметричным формам, характеризующимся малыми амплитудами давления, но сравнительно большими гармоническими перемещениями стенки.

3. Колебаниям, у которых доминирующей частью реакции являются параметрические формы, когда гармонические колебания осесимметричного давления в жидкости сопровождаются субгармоническими колебаниями порядка 0,5 (т.е. с удвоенным периодом) с большой амплитудой оболочки по неосесимметричным формам. Эта нелинейная реакция может быть только результатом динамической неустойчивости линейных осесимметричных колебаний.

Отмечается, что указанные типы динамической реакции практически не зависят от движений свободной поверхности жидкости, а зависят только от форм колебаний давления в жидкости. С другой стороны, могут возбуждаться колебания свободной поверхности, которые будут взаимодействовать с колебаниями стенки таким образом, что появятся другие формы неустойчивости.

#### **4.1. Параметрический резонанс в осесимметричных конструкциях как результат взаимодействия осесимметричных колебаний с подспектрами неосесимметричных форм колебаний**

Основной причиной возникновения параметрических колебаний являются значительные периодические во времени окружные усилия в срединной поверхности оболочки, вызванные изменением гидродинамического давления при продольных колебаниях конструкции [1]. При этом определенную роль играют и осевые усилия, которыми нагружается оболочка при продольных колебаниях. Эти усилия, с одной стороны, непосредственно сами представляют параметрическую нагрузку и, с другой стороны, за счет коэффициента Пуассона вызывают дополнительные нормальные перемещения конструкции, что приводит к изменению гидродинамического давления и окружных усилий.

В качестве невозмущенного движения рассматриваются малые осесимметричные установившиеся или нестационарные колебания осесимметричной конструкции, заполненного идеальной несжимаемой жидкостью, с учетом осесимметричного деформированного состояния конструкции под действием наддува и гидростатического давления. Невозмущенное движение конструкции описывается обобщенными координатами, которые определяются из уравнений продольных колебаний всей системы или изолированной конструкции. Возмущенное движение характеризуется появлением неосесимметричных форм колебаний. Устойчивость этого движения может быть исследована на основе линеаризованных уравнений в вариациях.

Гидродинамическое давление в возмущенном движении состоит из двух частей: осесимметричного давления, соответствующего невозмущенному движению, и вариации давления, соответствующей неосесимметричным формам колебаний конструкции. В данной работе предполагается, что сжимаемость жидкости для исследуемых конструкций не играет существенной роли и не учитывается в уравнениях гидродинамики.

В связи с вышесказанным, следует детально рассмотреть структуру нелинейных уравнений в нормальных координатах, включающих как

осесимметричные, так и неосесимметричные формы собственных колебаний.

С этой целью разложим движение конструкции  $U$  по собственным формам колебаний  $U$  в ряд:

$$U = \sum_{s=1}^{\infty} q_s(t) U_s. \quad (4.1)$$

Как известно, для линеаризованной системы уравнения колебаний относительно нормальных координат  $q_s$  (уравнения в нормальных координатах) не связаны между собой. Учет нелинейности приводит к появлению нелинейных связей между этими уравнениями. В результате получаются выражения для нелинейных членов, появляющихся при этом в уравнениях в нормальных координатах. Далее исследуются связи между формами колебаний, обусловленные осевой симметричностью конструкции.

Подставим разложение (4.1) в выражение потенциальной энергии конструкции (2.41). Тогда с учетом следующих геометрических соотношений (2.26), (2.27) и условий ортогональности собственных форм (2.48) получаем выражение для полной потенциальной энергии конструкции в виде:

$$V = \frac{1}{2} \sum_p \mu_p \omega_p^2 q_p^2 + \frac{1}{2} \sum_{p,q,r} A_{pqr} q_p q_q q_r + \frac{1}{2} \sum_{p,q,r,s} B_{pqrs} q_p q_q q_r q_s - \sum_p f_p(t) q_p, \quad (4.2)$$

где  $f_p(t)$  – соответствующие координатам  $q_p$  обобщенные силы, а коэффициенты  $A_{pqr}$  и  $B_{pqrs}$  равны:

$$\begin{aligned} A_{pqr} &= 2 \int_S \{ \varepsilon^L(\mathbf{U}_p) \}^T [D] \{ \varepsilon^{NL}(\mathbf{U}_q, \mathbf{U}_r) \} dS, \\ B_{pqrs} &= \int_S \{ \varepsilon^{NL}(\mathbf{U}_p, \mathbf{U}_q) \}^T [D] \{ \varepsilon^{NL}(\mathbf{U}_r, \mathbf{U}_s) \} dS. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Полученное выражение (4.3) перепишем в ином виде:

$$V = \frac{1}{2} \sum_p \mu_p \omega_p^2 q_p^2 + \frac{1}{2} \sum_{p,q,r} A'_{pqr} q_p q_q q_r + \frac{1}{2} \sum_{p,q,r,s} B'_{pqrs} q_p q_q q_r q_s - \sum_p f_p(t) q_p, \quad (4.4)$$

где коэффициенты  $A'_{pqr}$  и  $B'_{pqrs}$  симметричны относительно произвольных перестановок индексов. С учетом свойств симметрии коэффициенты в (4.4) принимают вид:

$$A'_{pqr} = \frac{1}{3}(A_{pqr} + A_{qpr} + A_{rqp})$$

$$B'_{pqrs} = \frac{1}{3}(B_{pqrs} + B_{prqs} + B_{psqr}) \quad (4.5)$$

Уравнения Лагранжа для обобщенных координат принимают вид:

$$\mu_p (\ddot{q}_p + \omega_p^2 q_p) + \sum_{q,r} a_{pqr} q_q q_r + \sum_{q,r,s} b_{pqrs} q_q q_r q_s = f_p(t) \quad (4.6)$$

где коэффициенты равны:

$$a_{pqr} = \frac{3}{2} A'_{pqr} \quad , \quad b_{pqrs} = 2B'_{pqrs} \quad . \quad (4.7)$$

Как следствие, уравнения в результате учета нелинейности становятся связанными между собой при помощи квадратичных и кубических членов. Заметим, что в случае колебаний не закрепленной конструкции уравнения для обобщенных координат, соответствующих смещению конструкции как твердого тела (без поворота), оказываются не связанными с остальными уравнениями, так что их можно решать отдельно.

Рассеяние энергии в конструкции можно учесть путем введения в (4.6) членов, пропорциональных обобщенным скоростям. Предполагая отсутствие диссипативных связей между нормальными координатами, получим систему уравнений:

$$\mu_p (\ddot{q}_p + \varepsilon_p \dot{q}_p + \omega_p^2 q_p) + \sum_{q,r} a_{pqr} q_q q_r + \sum_{q,r,s} b_{pqrs} q_q q_r q_s = f_p(t). \quad (4.8)$$

Осевая симметричность конструкции обеспечивает явную зависимость выражений для собственных форм колебаний от окружной координаты  $\beta$ , что позволяет выполнить интегрирование по ней в формулах (4.3) и более подробно исследовать структуру систем уравнений (4.6) и (4.8) и нелинейные связи обобщенных координат.

Для удобства дальнейших построений введем диагональные матрицы:

$$[d_m^i] = \text{diag}\left\{\cos\left(m\beta - i\frac{\pi}{2}\right), \cos\left(m\beta - i\frac{\pi}{2}\right), \sin\left(m\beta - i\frac{\pi}{2}\right), \right. \\ \left. \cos\left(m\beta - i\frac{\pi}{2}\right), \cos\left(m\beta - i\frac{\pi}{2}\right), \sin\left(m\beta - i\frac{\pi}{2}\right)\right\}. \quad (4.9)$$

Затем запишем выражение для линейной части вектора параметров деформации оболочки в виде:

$$\{\varepsilon^L(\mathbf{U}_s)\} = [d_{m_s}^{i_s}] \{\varepsilon_{m_s}^L(\tilde{\mathbf{U}}_s)\}, \quad (4.10)$$

где оператор  $\{\varepsilon_m^L(\tilde{\mathbf{U}})\}$  определяется соотношением

$$\{\varepsilon_m^L(\tilde{\mathbf{U}})\} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \alpha} + \frac{\tilde{w}}{R_\alpha} \\ \frac{1}{A_\alpha A_\beta} \frac{\partial A_\beta}{\partial \alpha} \tilde{u} + \frac{m}{A_\beta} \tilde{v} + \frac{\tilde{w}}{R_\beta} \\ -\frac{m}{A_\beta} \tilde{u} + \frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \alpha} - \frac{1}{A_\alpha A_\beta} \frac{\partial A_\beta}{\partial \alpha} \tilde{v} \\ -\frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial \tilde{\theta}_\alpha}{\partial \alpha} \\ -\frac{m}{A_\beta} \theta_\beta^m - \frac{1}{A_\alpha A_\beta} \frac{\partial A_\beta}{\partial \alpha} \tilde{\theta}_\alpha \\ \frac{m}{A_\beta} \tilde{\theta}_\alpha + \frac{1}{A_\alpha A_\beta} \frac{\partial A_\beta}{\partial \alpha} \theta_\beta^m + \frac{1}{A_\alpha R_\beta} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \alpha} \end{array} \right\}.$$

Для квадратичной части после несложных преобразований получаем:

$$\{\varepsilon^{NL}(\mathbf{U}_r, \mathbf{U}_s)\} = \\ = \frac{1}{2} (-1)^{(1-i_r)i_s} [d_{m_r-m_s}^{j_{rs}}] \{\varepsilon_{m_r, m_s}^{NL1}(\tilde{\mathbf{U}}_r, \tilde{\mathbf{U}}_s)\} + \frac{1}{2} (-1)^{i_r i_s} [d_{m_r+m_s}^{j_{rs}}] \{\varepsilon_{m_r, m_s}^{NL2}(\tilde{\mathbf{U}}_r, \tilde{\mathbf{U}}_s)\}, \quad (4.11)$$

где  $j_{rs} = (i_r + i_s)(2 - i_r - i_s)$ ,

$$\{\varepsilon_{m_r, m_s}^{NL1}(\tilde{\mathbf{U}}_r, \tilde{\mathbf{U}}_s)\} = \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{c} \tilde{\theta}_\alpha(\tilde{\mathbf{U}}_r) \tilde{\theta}_\alpha(\tilde{\mathbf{U}}_s) \\ \theta_\beta^{m_r}(\tilde{\mathbf{U}}_r) \theta_\beta^{m_s}(\tilde{\mathbf{U}}_s) \\ -\tilde{\theta}_\alpha(\tilde{\mathbf{U}}_r) \theta_\beta^{m_s}(\tilde{\mathbf{U}}_s) + \theta_\beta^{m_r}(\tilde{\mathbf{U}}_r) \tilde{\theta}_\alpha(\tilde{\mathbf{U}}_s) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\},$$

$$\left\{ \varepsilon_{m_r, m_s}^{NL2}(\tilde{\mathbf{U}}_r, \tilde{\mathbf{U}}_s) \right\} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \tilde{\theta}_\alpha(\tilde{\mathbf{U}}_r) \tilde{\theta}_\alpha(\tilde{\mathbf{U}}_s) \\ -\theta_\beta^{m_r}(\tilde{\mathbf{U}}_r) \theta_\beta^{m_s}(\tilde{\mathbf{U}}_s) \\ \tilde{\theta}_\alpha(\tilde{\mathbf{U}}_r) \theta_\beta^{m_s}(\tilde{\mathbf{U}}_s) + \theta_\beta^{m_r}(\tilde{\mathbf{U}}_r) \tilde{\theta}_\alpha(\tilde{\mathbf{U}}_s) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

Подставим (4.10) и (4.11) в выражения (4.3) для коэффициентов  $A_{pqr}$  и  $B_{pqrs}$ , используя при этом очевидные соотношения:

$$\int_0^{2\pi} [d_{m_1}^{i_1}] [D] [d_{m_2}^{i_2}] d\beta = [D_{m_1 m_2}^{i_1 i_2}], \quad (4.13)$$

где

$$[D_{m_1 m_2}^{i_1 i_2}] = [0] \quad , \text{ если } |m_1| \neq |m_2| \text{ или } i_1 \neq i_2 \quad ,$$

$$[D_{00}^{00}] = 2\pi [D_s] \quad ,$$

$$[D_{00}^{11}] = 2\pi [D_t] \quad ,$$

$$[D_{mm}^{ii}] = \pi [D] \quad ,$$

$$[D_{m, -m}^{ii}] = \pi (-1)^i [D_n] \quad ,$$

заметим, что матрицы  $[D_s]$ ,  $[D_t]$  и  $[D_n]$  получаются в результате небольших модификаций матрицы  $[D]$ , а именно:

$$[D_s] = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 & A_{11} & A_{12} & 0 \\ B_{21} & B_{22} & 0 & A_{21} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{11} & A_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 & D_{21} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [D_t] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{33} & 0 & 0 & 2A_{33} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2A_{33} & 0 & 0 & 4D_{33} \end{bmatrix},$$



$$[D_n] = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 & A_{11} & A_{12} & 0 \\ B_{21} & B_{22} & 0 & A_{21} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & -B_{33} & 0 & 0 & -2A_{33} \\ A_{11} & A_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 & D_{21} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & -2A_{33} & 0 & 0 & -4D_{33} \end{bmatrix}.$$

В результате получаем выражения для коэффициентов в виде:

$$A_{pqr} = \int_L \left\{ \mathcal{E}_{m_p}^L(\tilde{\mathbf{U}}_p) \right\}^T \left( (-1)^{(1-i_q)i_r} \left[ D_{m_p, m_q - m_r}^{i_p j_{qr}} \right] \left\{ \mathcal{E}_{m_q m_r}^{NL1}(\tilde{\mathbf{U}}_q, \tilde{\mathbf{U}}_r) \right\} + \right. \\ \left. + (-1)^{i_q i_r} \left[ D_{m_p, m_q + m_r}^{i_p j_{qr}} \right] \left\{ \mathcal{E}_{m_q m_r}^{NL2}(\tilde{\mathbf{U}}_q, \tilde{\mathbf{U}}_r) \right\} \right) r(\alpha) A_\alpha d\alpha, \quad (4.14)$$

$$B_{pqrs} = \int_L \left( (-1)^{(1-i_p)i_q + (1-i_r)i_s} \left\{ \mathcal{E}_{m_p m_q}^{NL1}(\tilde{\mathbf{U}}_p, \tilde{\mathbf{U}}_q) \right\}^T \left[ D_{m_p - m_q, m_r - m_s}^{j_{pq} j_{rs}} \right] \left\{ \mathcal{E}_{m_r m_s}^{NL1}(\tilde{\mathbf{U}}_r, \tilde{\mathbf{U}}_s) \right\} + \right. \\ \left. + (-1)^{(1-i_p)i_q + i_r i_s} \left\{ \mathcal{E}_{m_p m_q}^{NL1}(\tilde{\mathbf{U}}_p, \tilde{\mathbf{U}}_q) \right\}^T \left[ D_{m_p - m_q, m_r + m_s}^{j_{pq} j_{rs}} \right] \left\{ \mathcal{E}_{m_r m_s}^{NL2}(\tilde{\mathbf{U}}_r, \tilde{\mathbf{U}}_s) \right\} + \right. \\ \left. + (-1)^{i_p i_q + (1-i_r)i_s} \left\{ \mathcal{E}_{m_p m_q}^{NL2}(\tilde{\mathbf{U}}_p, \tilde{\mathbf{U}}_q) \right\}^T \left[ D_{m_p + m_q, m_r - m_s}^{j_{pq} j_{rs}} \right] \left\{ \mathcal{E}_{m_r m_s}^{NL1}(\tilde{\mathbf{U}}_r, \tilde{\mathbf{U}}_s) \right\} + \right. \\ \left. + (-1)^{i_p i_q + i_r i_s} \left\{ \mathcal{E}_{m_p m_q}^{NL2}(\tilde{\mathbf{U}}_p, \tilde{\mathbf{U}}_q) \right\}^T \left[ D_{m_p + m_q, m_r + m_s}^{j_{pq} j_{rs}} \right] \left\{ \mathcal{E}_{m_r m_s}^{NL2}(\tilde{\mathbf{U}}_r, \tilde{\mathbf{U}}_s) \right\} \right) r(\alpha) A_\alpha d\alpha, \quad (4.15)$$

где  $j_{qr} = (i_q + i_r)(2 - i_q - i_r)$  и аналогично  $j_{pq}$  и  $j_{rs}$ .

Из (4.14), (4.5), (4.7) получаются условия неравенства нулю коэффициентов при квадратичных членах нелинейных уравнений. Коэффициент  $a_{pqr} \neq 0$ , если выполнены два условия:

$$1) \quad i_p + i_q + i_r \equiv 0 \pmod{2} \quad (4.16)$$

что реализуется на следующих сочетаниях:

$i_p$	$i_q$	$i_r$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

2) удовлетворяется одно из равенств:

$$\begin{aligned} m_p &= m_q + m_r , \\ m_q &= m_p + m_r , \\ m_r &= m_p + m_q , \end{aligned} \tag{4.17}$$

или в кратком виде:

$$m_p = m_q + m_r \quad (p \rightarrow q \rightarrow r \rightarrow p) .$$

Из (4.15), (4.5), (4.7) получаются условия неравенства нулю коэффициентов при кубичных членах нелинейных уравнений. Коэффициент  $b_{pqrs} \neq 0$ , если выполнены два условия:

$$1) \quad i_p + i_q + i_r + i_s \equiv 0 \pmod{2} \tag{4.18}$$

что реализуется на следующих сочетаниях:

$i_p$	$i_q$	$i_r$	$i_s$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

2) удовлетворяется одно из равенств:

$$\begin{aligned} m_p &= m_q + m_r + m_s , \\ m_q &= m_p + m_r + m_s , \\ m_r &= m_p + m_q + m_s , \\ m_s &= m_p + m_q + m_r , \\ m_p + m_q &= m_r + m_s , \\ m_p + m_r &= m_q + m_s , \\ m_p + m_s &= m_q + m_r , \end{aligned} \tag{4.19}$$

или кратко:

$$m_p = m_q + m_r + m_s \quad (p \rightarrow q \rightarrow r \rightarrow s \rightarrow p) ,$$

$$m_p + m_q = m_r + m_s \quad (q \rightarrow r \rightarrow s \rightarrow q) .$$

Соотношения (4.16) – (4.19) позволяют исследовать связи между колебаниями с различными числами волн по окружности и в различных плоскостях, а также вывести условия параметрического возбуждения неосесимметричных форм при осесимметричных колебаниях конструкции.

Рассмотрим вынужденные колебания конструкции под действием осесимметричной продольной силы  $P(t)$ , приложенной в некотором сечении. В этом случае обобщенные силы  $f_p(t)$  в уравнениях (4.6), (4.8) отличны от нуля только для осесимметричных продольно-радиальных форм колебаний и равны

$$f_p(t) = F_p P(t), \quad (4.20)$$

где  $F_p$  – коэффициент, равный продольному смещению в точке приложения силы на  $p$ -ой собственной форме.

Из структуры нелинейных связей, определяемой соотношениями (4.16) – (4.19), следует, что при нулевых начальных условиях при таком воздействии неосесимметричные формы колебаний возбуждаться не должны. В то же время влияние этих нелинейных связей может привести к неустойчивости нулевых решений для коэффициентов этих неосесимметричных форм. Механизм этого явления заключается в параметрическом возбуждении неосесимметричных форм колебаний при периодическом изменении осесимметричного напряженно-деформированного состояния. При наличии сколь угодно малых начальных неосесимметричных возмущений в этом случае неустойчивость может привести к быстрому росту и даже преобладанию этих форм по сравнению с осесимметричными.

Предположим, что в разложении по собственным формам учтено  $N$  членов, причем первые  $K$  из них соответствуют осесимметричному движению ( $m = 0$ ). Рассматривая осесимметричное движение:

$$\begin{cases} q_p = q_p^0(t), & p = 1, \dots, K, \\ q_p = 0, & p = K + 1, \dots, N, \end{cases}$$

как невозмущенное, построим для него систему в вариациях. Подставляя выражение для невозмущенного движения:

$$\begin{cases} q_p = q_p^0(t) + \delta q_p, & p = 1, \dots, K, \\ q_p = \delta q_p, & p = K + 1, \dots, N, \end{cases}$$

в нелинейные уравнения (4.8) и линеаризуя получающиеся соотношения, приходим к следующей системе уравнений:

$$\mu_p (\delta \ddot{q}_p + \varepsilon_p \delta \dot{q}_p + \omega_p^2 \delta q_p) + \sum_{q=1}^K C_{pq}(t) \delta q_q = 0, \quad p = 1, \dots, K, \quad (4.21)$$

$$\mu_p (\delta \ddot{q}_p + \varepsilon_p \delta \dot{q}_p + \omega_p^2 \delta q_p) + \sum_{q=K+1}^N C_{pq}(t) \delta q_q = 0, \quad p = K + 1, \dots, N, \quad (4.22)$$

где

$$C_{pq}(t) = 2 \sum_{r=1}^K a_{pqr} q_r^0(t) + 3 \sum_{r=1}^K \sum_{s=1}^K b_{pqrs} q_r^0(t) q_s^0(t).$$

Здесь учтены соотношения (4.17), (4.19), из которых следует, что

- 1)  $a_{pqr} = 0$ , если  $m_p > 0, m_q = m_r = 0$ ,
- 2)  $b_{pqrs} = 0$ , если  $m_p > 0, m_q = m_r = m_s = 0$ .

## 4.2. Анализ динамической потери устойчивости вынужденных гармонических осесимметричных колебаний с использованием метода гармонического баланса

В случае гармонического воздействия  $P = P_0 \cos \omega t$  можно поставить задачу исследования условий параметрического возбуждения неосесимметричных форм при установившихся стационарных осесимметричных колебаниях конструкции. При этом коэффициенты в (4.22) будут периодическими функциями времени. Тогда исследование устойчивости этой системы сводится к исследованию устойчивости линейной системы с периодическими коэффициентами.

Легко проверить, используя соотношения (4.16) – (4.19), что

$$C_{pq}(t) = 0 \quad (m_p > 0, m_q > 0), \text{ если } m_p \neq m_q \text{ или } i_p \neq i_q.$$

Таким образом, система (4.22) распадается на не связанные между собой подсистемы, соответствующие различным числам волн по окружности  $m$  и различным индексам  $i$ . Следовательно, для каждой пары  $(m, i)$  устойчивость можно исследовать отдельно, вне связи с формами, имеющими другие значения этих параметров.

При достаточно малой амплитуде силы  $P_0$  осесимметричный отклик конструкции можно рассчитывать по линеаризованным уравнениям. Тогда выражения для коэффициентов системы (4.22) приобретают вид:

$$C_{pq}(t) = C_{pq}^c \cos \omega t + C_{pq}^s \sin \omega t + C_{pq}^{cc} \cos^2 \omega t + C_{pq}^{cs} \cos \omega t \sin \omega t + C_{pq}^{ss} \sin^2 \omega t, \quad (4.23)$$

где

$$C_{pq}^c = 2 \sum_{r=1}^K a_{pqr} A_r, \quad ,$$

$$C_{pq}^s = 2 \sum_{r=1}^K a_{pqr} B_r, \quad ,$$

$$C_{pq}^{cc} = 3 \sum_{r=1}^K \sum_{s=1}^K b_{pqrs} A_r A_s, \quad ,$$

$$C_{pq}^{cs} = 6 \sum_{r=1}^K \sum_{s=1}^K b_{pqrs} A_r B_s, \quad ,$$

$$C_{pq}^{ss} = 3 \sum_{r=1}^K \sum_{s=1}^K b_{pqrs} B_r B_s, \quad ,$$

$$\left. \begin{aligned} A_r &= \frac{F_r P_0 (\omega_r^2 - \omega^2)}{\mu_r [(\omega_r^2 - \omega^2)^2 + (\varepsilon_r \omega)^2]} \\ B_r &= \frac{F_r P_0 \varepsilon_r \omega}{\mu_r [(\omega_r^2 - \omega^2)^2 + (\varepsilon_r \omega)^2]} \end{aligned} \right\} r = 1, \dots, K.$$

Выведем далее некоторые приближенные формулы для частного случая, когда учитывается одна неосесимметричная форма колебаний. В этом случае нелинейные уравнения колебаний с учетом соотношений (4.16) - (4.19) принимают вид:

$$\begin{aligned} & \mu_p \left( \delta \ddot{q}_p + \varepsilon_p \delta \dot{q}_p + \omega_p^2 \delta q_p \right) + \sum_{q,r=1}^{N-1} a_{pqr} q_q q_r + \\ & + \sum_{q,r,s=1}^{N-1} b_{pqrs} q_q q_r q_s + q_N^2 \left( a_{pNN} + 2 \sum_{q=1}^{N-1} b_{pq} q_q \right) = F_p P_0 \cos \omega t \quad (p=1, \dots, N-1), \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$\mu_N \left( \ddot{q}_N + \varepsilon_N \dot{q}_N + \omega_N^2 q_N \right) + q_N \left( 2 \sum_{q=1}^{N-1} a_{pNN} q_q + 3 \sum_{q,r=1}^{N-1} b_{qrNN} q_q q_r \right) + b_{NNNN} q_N^3 = 0. \quad (4.25)$$

Предполагая, что осесимметричные колебания малы, перепишем систему (4.24), (4.25), пренебрегая некоторыми членами, в виде:

$$\mu_p \left( \ddot{q}_p + \varepsilon_p \dot{q}_p + \omega_p^2 q_p \right) + a_{pNN} q_N^2 = F_p P_0 \cos \omega t \quad (p=1, \dots, N-1), \quad (4.26)$$

$$\mu_N \left( \ddot{q}_N + \varepsilon_N \dot{q}_N + \omega_N^2 q_N \right) + q_N \left( 2 \sum_{q=1}^{N-1} a_{pNN} q_q \right) + b_{NNNN} q_N^3 = 0. \quad (4.27)$$

В окрестностях главного параметрического резонанса  $\omega = \frac{\omega_N}{2}$  справедливо предположение [50], что колебания переменной  $q_N$  имеют частоту  $\frac{\omega}{2}$ .

Применим аналогично работам [50, 51] метод гармонического баланса, полагая в первом приближении, что

$$q_N = a \sin \frac{\omega t}{2} + b \cos \frac{\omega t}{2}. \quad (4.28)$$

Подставив (4.28) в (4.26), получим:

$$q_p = a_p \sin \omega t + b_p \cos \omega t + c_p, \quad (4.29)$$

где

$$\begin{aligned} a_p &= \frac{-aba_{pNN}(\omega_p^2 - \omega^2) - \frac{1}{2}(b^2 - a^2)a_{pNN}\varepsilon_p\omega + F_p P_0 \varepsilon_p \omega}{\mu_p [(\omega_p^2 - \omega^2)^2 + (\varepsilon_p \omega)^2]}, \\ b_p &= \frac{aba_{pNN}\varepsilon_p\omega - \frac{1}{2}(b^2 - a^2)a_{pNN}(\omega_p^2 - \omega^2) + F_p P_0(\omega_p^2 - \omega^2)}{\mu_p [(\omega_p^2 - \omega^2)^2 + (\varepsilon_p \omega)^2]}, \end{aligned}$$

$$c_p = -\frac{a_{pNN}(a^2 - b^2)}{2\mu_p \omega_p^2} .$$

Затем из (4.27) получаем после несложных преобразований два уравнения относительно  $a$  и  $b$ :

$$\begin{aligned} \left[ \mu_N \eta + E_0(\omega)A^2 - F_0(\omega)P_0 \right] a - \left[ \frac{1}{2} \mu_N \varepsilon_N \omega + E_1(\omega)A^2 - F_1(\omega)P_0 \right] b &= 0 , \\ \left[ \mu_N \eta + E_0(\omega)A^2 + F_0(\omega)P_0 \right] b + \left[ \frac{1}{2} \mu_N \varepsilon_N \omega + E_1(\omega)A^2 + F_1(\omega)P_0 \right] a &= 0 , \end{aligned} \quad (4.30)$$

где введены обозначения:

$$\begin{aligned} \eta &= \omega_N^2 - \frac{\omega^2}{4} , \quad A^2 = a^2 + b^2 , \\ E_0(\omega) &= \frac{3}{4} a_{NNNN} - \sum_{p=1}^{N-1} \frac{a_{pNN}^2}{2\mu_p} \left[ \frac{2}{\omega_p^2} + \frac{\omega_p^2 - \omega^2}{(\omega_p^2 - \omega^2)^2 + (\varepsilon_p \omega)^2} \right] , \\ E_1(\omega) &= \sum_{p=1}^{N-1} \frac{a_{pNN}^2 \varepsilon_p \omega}{2\mu_p [(\omega_p^2 - \omega^2)^2 + (\varepsilon_p \omega)^2]} , \\ F_0(\omega) &= \sum_{p=1}^{N-1} \frac{F_p a_{pNN} (\omega_p^2 - \omega^2)}{\mu_p [(\omega_p^2 - \omega^2)^2 + (\varepsilon_p \omega)^2]} , \\ F_1(\omega) &= \sum_{p=1}^{N-1} \frac{F_p a_{pNN} \varepsilon_p \omega}{\mu_p [(\omega_p^2 - \omega^2)^2 + (\varepsilon_p \omega)^2]} . \end{aligned}$$

В частном случае отсутствия демпфирования, когда  $\varepsilon_1 = \dots = \varepsilon_N = 0$ , имеем:

$$E_1(\omega) = F_1(\omega) = 0 ,$$

И тогда аналогично [50, 51] получаем три решения:

- 1)  $a = b = 0$ ,
  - 2)  $\mu_N \eta + E_0(\omega)a^2 - F_0(\omega)P_0 = 0$ ,  $b = 0$ ,
  - 3)  $\mu_N \eta + E_0(\omega)b^2 + F_0(\omega)P_0 = 0$ ,  $a = 0$ .
- (4.31)

первое из которых соответствует осесимметричным колебаниям, а остальные - связанным осесимметричным и неосесимметричным колебаниям, причем одно из

этих двух решений устойчиво.

Из (4.31) получается условие параметрического возбуждения неосесимметричной формы:

$$P_0 = \pm \frac{\mu_N \eta}{F_0(\omega)}, \quad (4.32)$$

определяющее границу области неустойчивости в окрестности главного параметрического резонанса.

В общем случае рассмотрим систему (4.30) как систему однородных линейных алгебраических уравнений и из условия существования нетривиального решения получим биквадратное уравнение относительно амплитуды  $A$  неосесимметричной формы колебаний:

$$\begin{aligned} [E_0^2(\omega) - E_1^2(\omega)]A^4 + [2\mu_N \eta E_0(\omega) + \mu_N \varepsilon_N \omega E_1(\omega)]A^2 + \\ + \mu_N^2 \left[ \eta^2 + \varepsilon_N^2 \frac{\omega^2}{4} \right] = [F_0^2(\omega) + F_1^2(\omega)]P_0^2. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Граница области параметрического возбуждения неосесимметричной формы определяется соотношением:

$$P_0 = \pm \mu_N \sqrt{\frac{\eta^2 + \varepsilon_N^2 \frac{\omega^2}{4}}{F_0^2(\omega) + F_1^2(\omega)}}. \quad (4.34)$$

С учетом того, что в программе расчета собственных частот вычисляемые собственные формы автоматически нормируются по обобщенной массе (т.е. все  $\mu_p$  и  $\mu_N$  равны 1) упрощаются формулы для вычисления величин:

$$F_0(\omega) = \sum_{p=1}^{N-1} \frac{F_p a_{pNN} (\omega_p^2 - \omega^2)}{(\omega_p^2 - \omega^2)^2 + (\varepsilon_p \omega)^2},$$

$$F_1(\omega) = \sum_{p=1}^{N-1} \frac{F_p a_{pNN} \varepsilon_p \omega}{(\omega_p^2 - \omega^2)^2 + (\varepsilon_p \omega)^2},$$

а также

$$P_0 = \pm \sqrt{\frac{\eta^2 + \varepsilon_N^2 \frac{\omega^2}{4}}{F_0^2(\omega) + F_1^2(\omega)}}. \quad (4.34a)$$



Коэффициенты демпфирования в приведенных выше формулах задаем с использованием логарифмических декрементов колебаний  $\Delta_p$  по формулам:

$$\varepsilon_p = \frac{\Delta_p \omega_p}{\pi}.$$

Заметим, что в случае колебаний закрепленной на жестком основании конструкции, возбуждаемых периодическим продольным смещением этого основания с амплитудой  $W_0$ , в приведенных выше формулах достаточно заменить:

$$P_0 \Rightarrow W_0, \quad F_p \Rightarrow \omega^2 \mu_{0p} \quad (p = 1, \dots, N - 1),$$

где  $\mu_{0p}$  вычисляется в программе расчета динамических характеристик как нормирующий множитель для осесимметричной собственной формы к единичному смещению эквивалентного осциллятора (благодаря нормировке собственной формы по массе: ).

Для обеспечения численных исследований параметрических колебаний осесимметричных тонкостенных конструкций с жидкостью была разработана программная надстройка в файле FasanE.xlsm с целью расчета коэффициентов нелинейных членов в уравнениях (4.8). В результате сформирован файл-шаблон FasanED.xlsm, в котором в VBA-проект (см. рис. 4.1) добавлены несколько модулей, обеспечивающих работу по построению областей динамической неустойчивости гармонических осесимметричных колебаний конструкции.

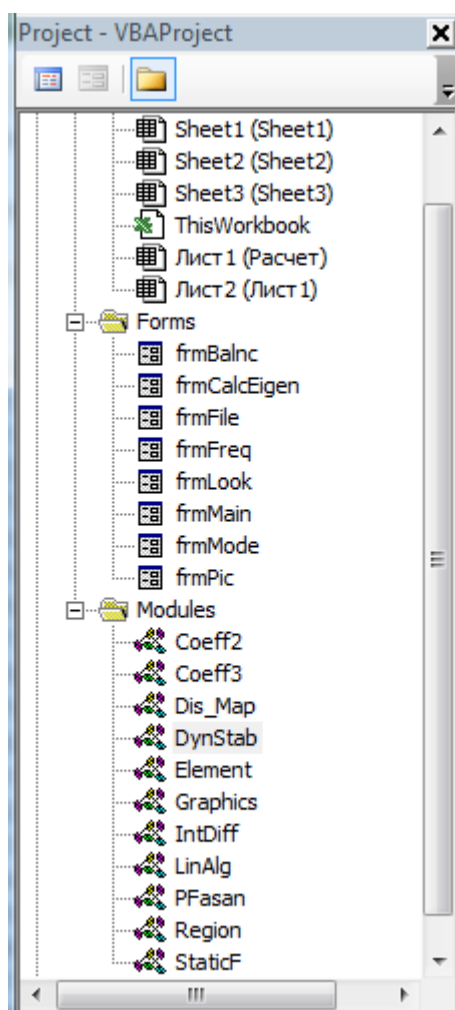


Рис. 4.1 Проект файла-шаблона FasanED.xlsm

База данных формируется на специально активированном (или созданном) рабочем листе Excel в процессе последовательного вычисления представляющих интерес собственных форм. Сначала вычисляются собственные формы осесимметричных колебаний, а затем последовательно неосесимметричных. После вычисления каждой собственной формы в окне ее просмотра (см. рис. 4.3) при помощи специально добавленной кнопки «Вектор – в NL-базу» вектор вместе с дополнительной информацией записывается в столбцы предназначенного рабочего листа.

Примерный вид сформированной в рабочем листе базы данных показан на рис. 4.4. В первой ячейке первой строки указано количество записанных векторов.

FASAN-ED

C:\Пак Сонги\Obrv2.f

Neq= 2958 Nh= 28 nEnv= 70377  
Neqk= 545 Nhk= 8 nEnvk= 3515

Точность соб. частот, Eps= 1,е-6  
Точность соб. векторов, Eps1= 1,е-6  
Нормировка 1/N, N= 1,е+0  
Промежуточная нормировка, N1= 1,е+6  
Буфер для вычислений (по 8 байт) 1000000  
Контрольное число итераций 10

Сохранение матрицы масс  
 не сохранять  
 в произвольном файле  
 в текущем каталоге

учитывать статическую деформацию при расчете собственных частот

4 Число волн по окружности

Матрица масс в файле  
C:\Пак Сонги\Obrv2.m~

.00001 Гц  
30 Гц

====<OK>====

Количество собственных частот в интервале: 3  
до верхней границы: 3  
до нижней границы: 0

Старт

Частота	Кратность
6.29240453735158	1

Собственный вектор  
f= 6.29240453735158

Осевое сечение

Кoeffициенты  
нелинейных  
уравнений

Ввод КЭ-массивов

Расчет массовых характеристик конструкции

Статическая деформация

Формирование матриц масс и жесткостей

Тестирование частоты

Частотный интервал

Собственные частоты и формы

Файл листинга  
нет

Препроцессор

Выход

Рис. 4.2. Главное окно проекта в файле FasanED.xlsm

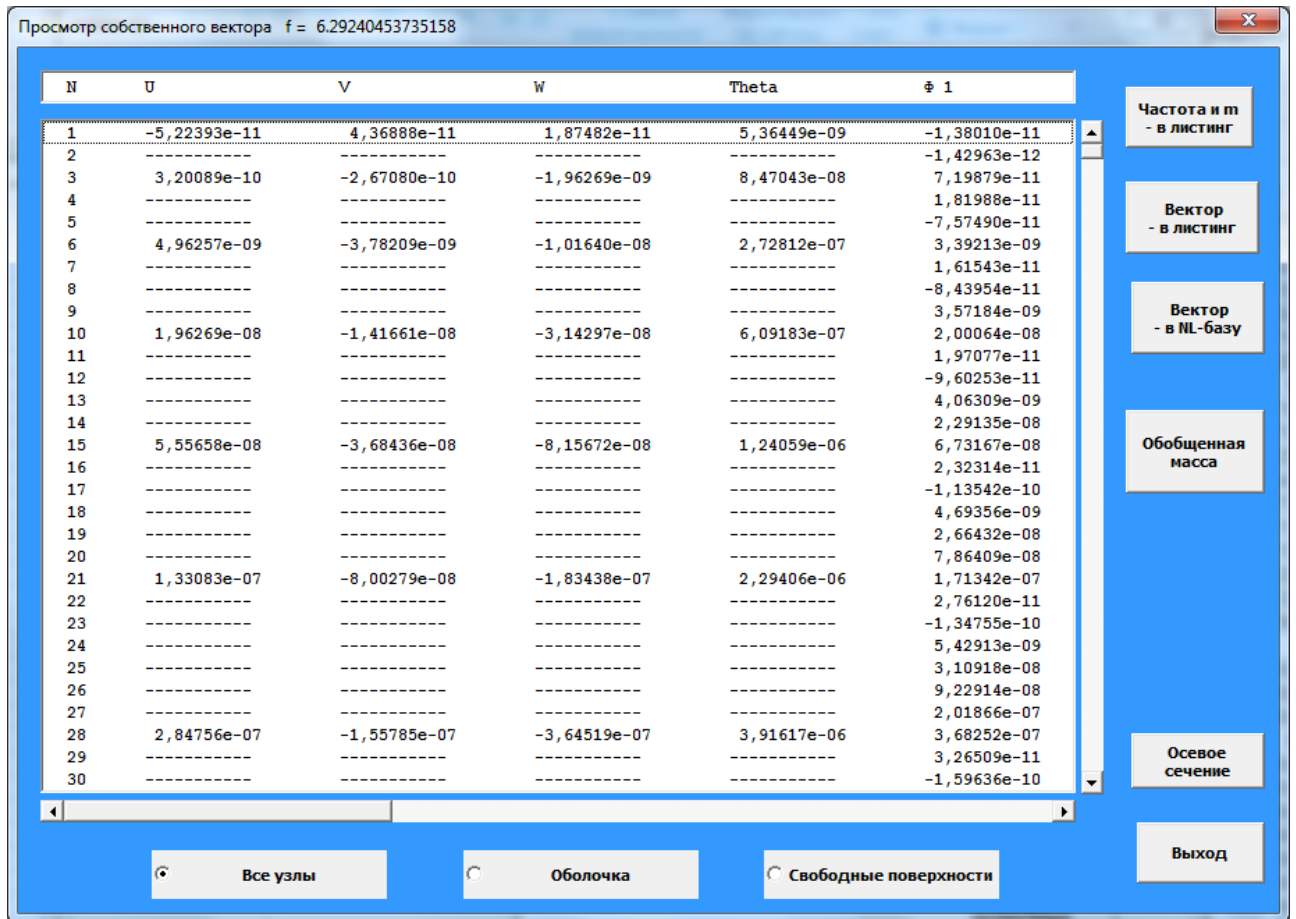


Рис. 4.3. Окно просмотра собственного вектора с опцией формирования базы данных для расчета коэффициентов нелинейных уравнений

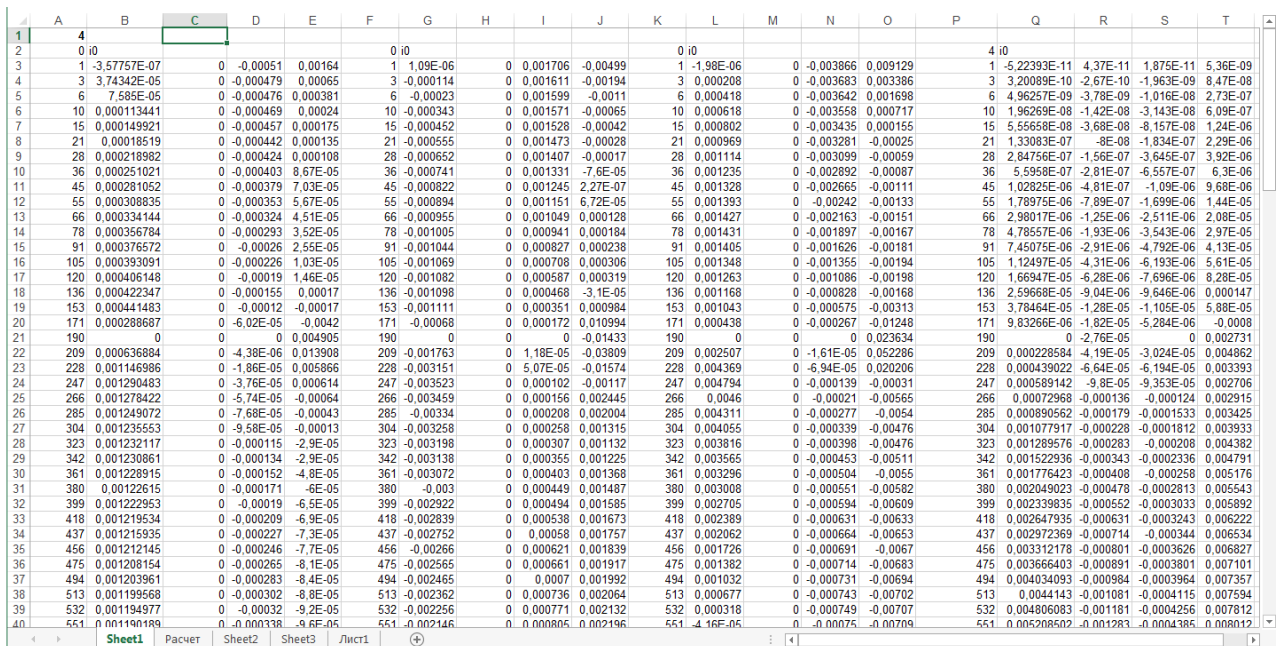


Рис. 4.4. Примерный вид рабочего листа с базой данных для расчета коэффициентов нелинейных уравнений

Во второй строке для каждого вектора указывается число волн по окружности  $m$  в собственной форме колебаний. В соседней с этой ячейке текст, начинающийся с латинской буквы « $i$ », кодирует информацию о том, учитывать ли в уравнениях одну из линейно независимых собственных форм данной частоты или обе, и с каким индексом  $i$  согласно формулам (2.51).

Для построения графиков границ областей неустойчивости осесимметричных колебаний конструкции предусмотрены два макроса в модуле «Region»: «Graph» и «Graph0». Первый из них предназначен для формирования данных для построения графика, в котором горизонтальная ось масштабирована к частоте главного параметрического резонанса, соответствующего удвоенной собственной частоте неосесимметричного тона  $\theta = \frac{\omega}{2\omega_N}$ . Второй из этих макросов формирует данные для построения графика, в котором горизонтальная ось представлена частотой (в Гц) осесимметричного воздействия на конструкцию.

Вертикальная ось соответствует амплитуде внешнего осесимметричного гармонического воздействия, непосредственно возбуждающего осесимметричные колебания конструкции. В данной работе это  $W_0$  – амплитуда вертикальных колебаний основания, на котором крепится конструкция, так что перемещение основания  $w_0(t) = W_0 \sin(\omega t)$ .

Перед построением графика активный рабочий лист должен быть подготовлен, как показано на рис. 4.5, т.е. в ячейку G1 вводится количество учтенных осесимметричных тонов, в столбцы F – I вводятся данные по этим тонам в соответствующем количестве. В ячейки J3 – L3 вводятся данные по неосесимметричному тону. После выполнения одного из указанных макросов в столбцах A и B находятся данные для построения графика. Построение и форматирование графика выполняется вручную с использованием средств среды табличного процессора Excel.

**Пример 1.** Динамическая устойчивость осесимметричных колебаний тонкостенного цилиндра с плоским дном.

Задача о динамической устойчивости тонкостенного стального цилиндра с жестким плоским дном, заполненного водой и свободно опертого на краях, была исследована в работах [50, 75]. Дно цилиндра совершает продольные колебания с заданными амплитудой и частотой (рис. 4.5).

Параметры исследованной конструкции удовлетворяют соотношениям:

$$R/h = 150, \quad L/R = 10.67, \quad \rho/\rho_0 = 7.8, \quad \nu = 0.3 .$$

В расчетах учитывались: один осесимметричный тон и неосесимметричный тон с числом волн по окружности  $m = 4$ .

При проведении расчетов в настоящей работе для формирования конечно-элементной модели были заданы конкретные значения физических величин:

$$R = 1 \text{ м}, \quad L = 10,67 \text{ м}, \quad h = 0,006666667 \text{ м}, \quad \rho_0 = 1000 \text{ кг/м}^3, \quad \rho = 7800 \text{ кг/м}^3, \quad E = 200 \text{ ГПа}.$$

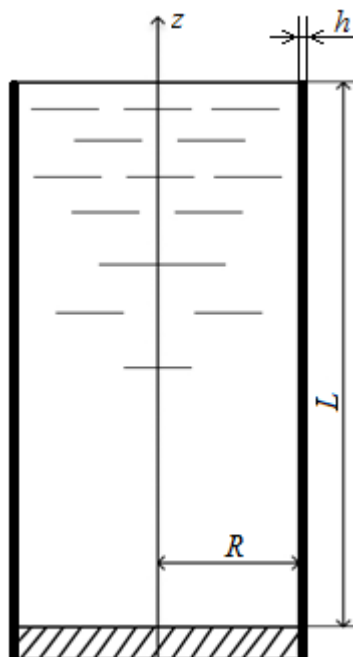


Рис. 4.5. Тонкостенный цилиндр с плоским дном.

В результате расчетов с использованием конечно-элементной модели получены одна низшая собственная частота и форма осесимметричных колебаний конструкции и одна низшая собственная частота и форма колебаний с четырьмя

волнами по окружности (рис. 4.6).

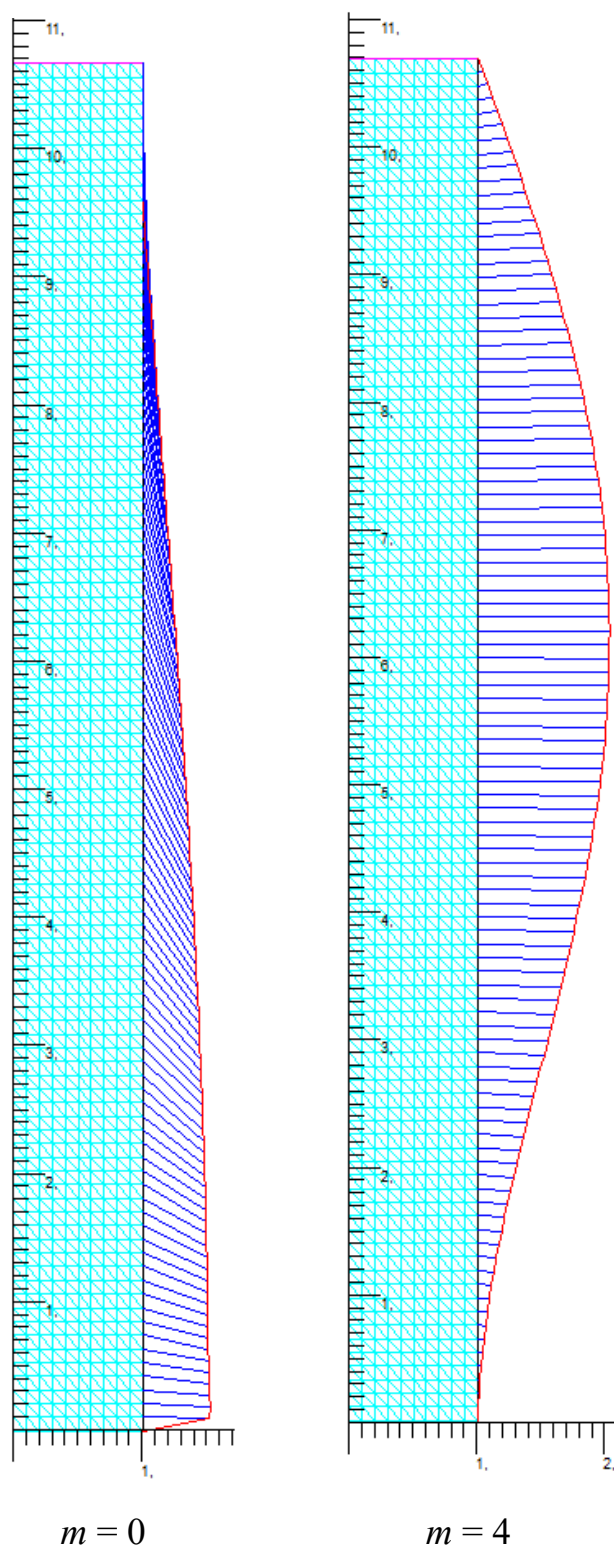


Рис. 4.6. Собственные формы, использованные в расчете

Вычисленные значения частот и коэффициентов нелинейных связей в соответствии с системой уравнений (4.26 – 4.27) представлены на рис. 4.7.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	0,7	0,128196				np=	1					
2	0,702	0,125707				ApNN	fp(Гц)	Dp	mu0p	ANNNN	fN	DN
3	0,704	0,123251				10731,34	19,13658	0,05	-166,731	58806,75	10,53303	0,05
4	0,706	0,120828										
5	0,708	0,118436										

Рис. 4.7. Вид рабочего листа для построения области неустойчивости.

Кроме собственных частот и коэффициентов на рис. 4.7 присутствуют значения логарифмических декрементов, равные 0,05. Такого порядка значения или близкие к ним характерны для многих металлических конструкций, однако для уточненных расчетов, как правило, используются данные экспериментальных исследований.

На рис. 4.8 показана нижняя граница области динамической неустойчивости, вычисленная при указанных на рис. 4.7 значениях параметров. Вследствие наличия демпфирования с заданными величинами логарифмического декремента эта граница не касается на графике оси абсцисс.

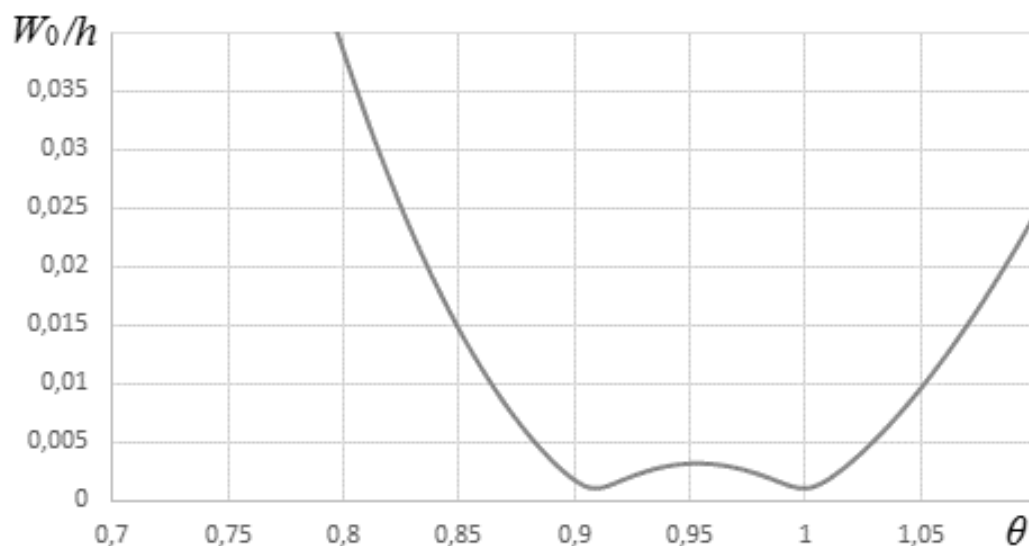


Рис. 4.8. Граница области динамической неустойчивости с учетом демпфирования

На рис. 4.9 показаны результаты расчета без учета демпфирования. Граница области неустойчивости в этом случае касается оси абсцисс в двух точках: в точке



основного параметрического резонанса ( $\theta = 1$ ) и в точке резонанса основной частоты осесимметричных колебаний. Штриховой линией показана граница, полученная в работе [50]. Заметное различие результатов предположительно объясняется тем, что в работе [50] собственная частота не осесимметричного тона вычислена на основе соотношений теории пологих оболочек.

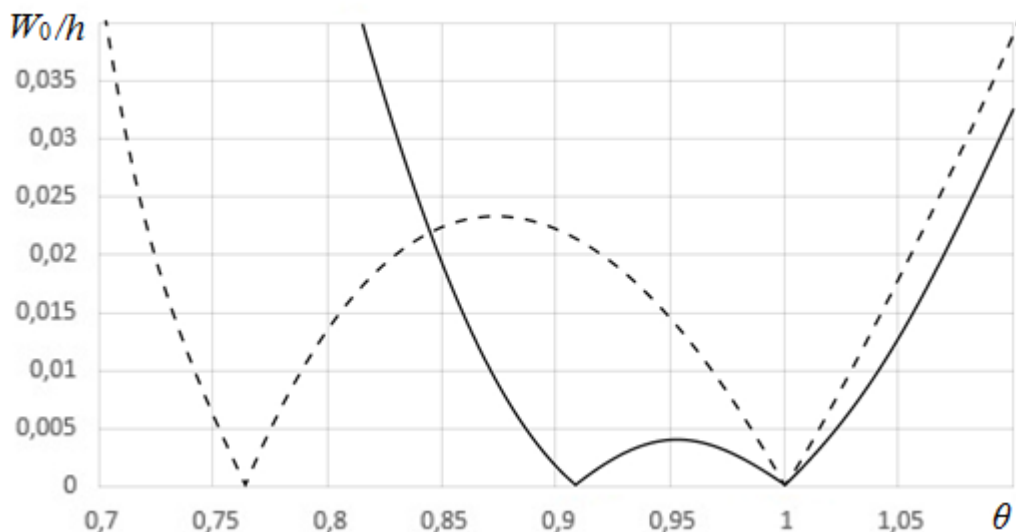


Рис. 4.9. Граница области динамической неустойчивости без учета демпфирования

**Пример 2.** Динамическая устойчивость осесимметричных колебаний тонкостенного цилиндра с полусферическим днищем.

Задача о динамической устойчивости тонкостенного алюминиевого цилиндра (рис. 4.10) с полусферическим днищем, заполненного водой и опертого на краях, была исследована в работе [51]. Опора конструкции совершает продольные колебания с заданными амплитудой и частотой.

Параметры исследованной конструкции удовлетворяют соотношениям:

$$R/h = 200, \quad L/R = 6, \quad \rho/\rho_0 = 2.7, \quad \nu = 0.3 .$$

В расчетах учитывались: три осесимметричных тона и не осесимметричный тон с числом волн по окружности  $m = 4$ .

При проведении расчетов в настоящей работе для формирования конечно-элементной модели были заданы конкретные значения физических величин:

$R = 1$  м,  $L = 6$  м,  $h = 0,005$  м,  $\rho_0 = 1000$  кг/м<sup>3</sup>,  $\rho = 2700$  кг/м<sup>3</sup>,  $E = 70$  ГПа.

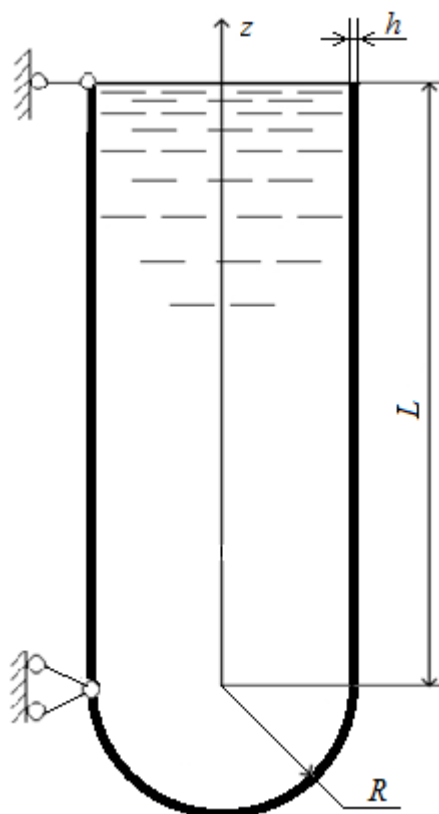


Рис. 4.10. Тонкостенный цилиндр с полусферическим дном.

В результате расчетов с использованием конечно-элементной модели получены три низшие собственные частоты и соответствующие формы осесимметричных колебаний конструкции и одна низшая собственная частота и форма колебаний с четырьмя волнами по окружности (рис. 4.11).

Вычисленные значения частот и коэффициентов нелинейных связей в соответствии с системой уравнений (4.26 – 4.27) представлены на рис. 4.12.

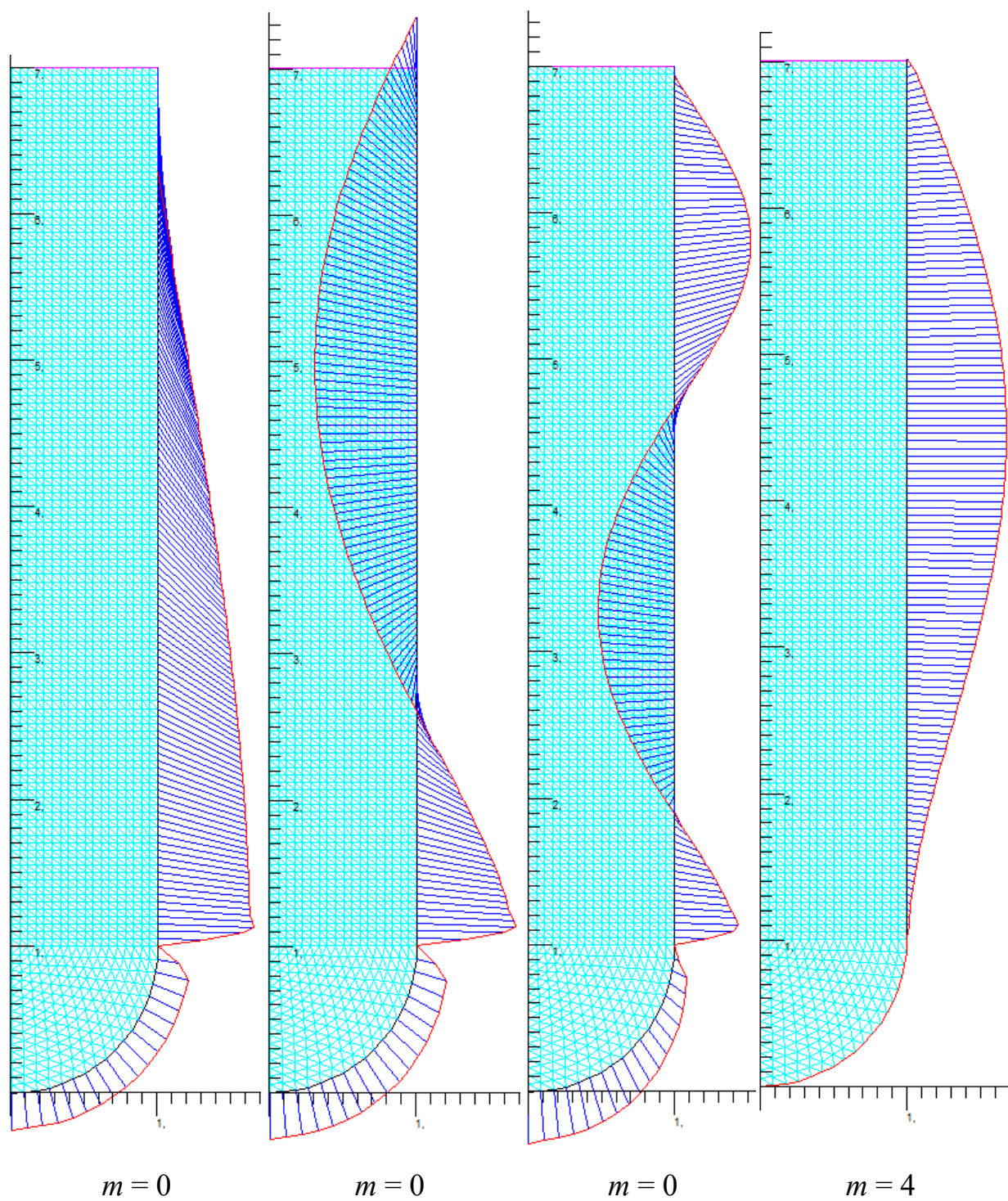


Рис. 4.11. Собственные формы, использованные в расчете

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	0,8	0,24697				np= 3						
2	0,805	0,236558				ApNN	fp(Гц)	Dp	mu0p	ANNNN	fN	DN
3	0,81	0,226428				6744,674	16,55806	0,05	-127,613	36362,94	6,292405	0,05
4	0,815	0,216575				23618,29	48,17538	0,05	44,33502			
5	0,82	0,20699				-1864,58	76,00651	0,05	-29,7447			

Рис. 4.12. Вычисленные значения частот и коэффициентов нелинейных связей

На рис. 4.13 показана нижняя граница области динамической неустойчивости, вычисленная при указанных на рис. 4.12 значениях параметров.

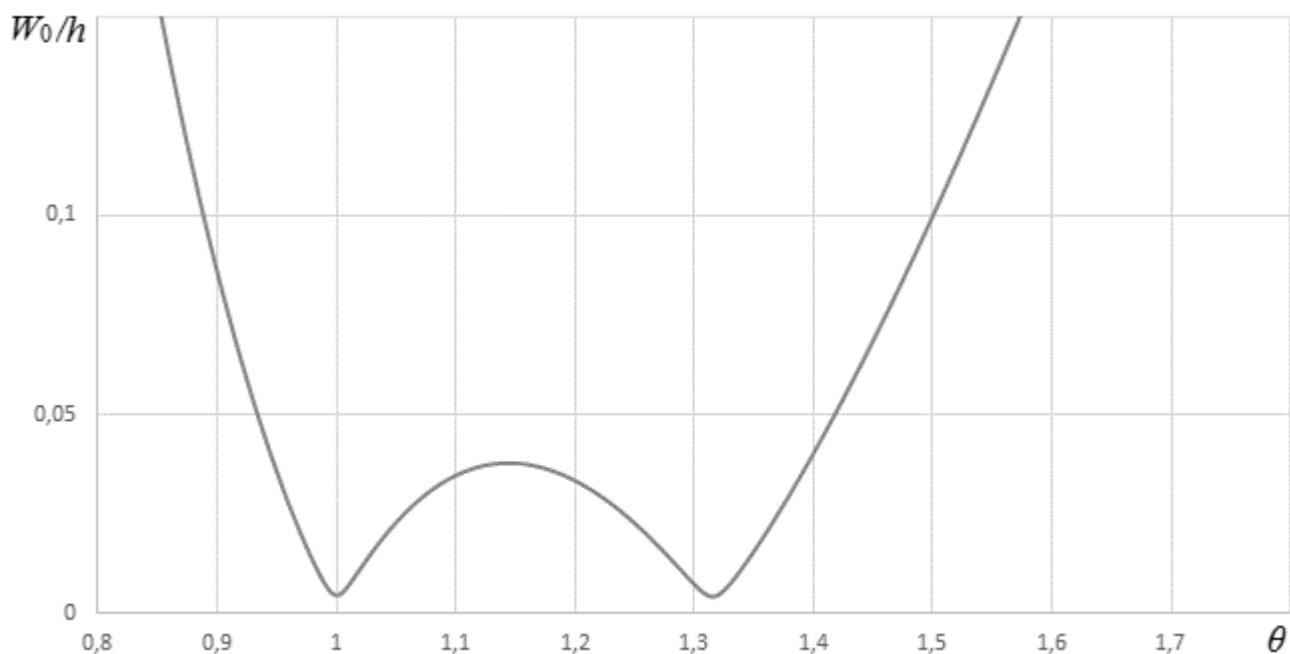


Рис. 4.13. Граница области динамической неустойчивости с учетом демпфирования

На рис. 4.14 показаны результаты расчета без учета демпфирования. Граница области неустойчивости в этом случае касается оси абсцисс в двух точках: в точке основного параметрического резонанса ( $\theta = 1$ ) и в точке резонанса основной частоты осесимметричных колебаний. Штриховой линией показана граница, полученная в работе [34]. Заметное различие результатов связано с отличием вычисленной частоты не осесимметричного тона. Непосредственно в зоне параметрического резонанса кривые на графике совпадают.

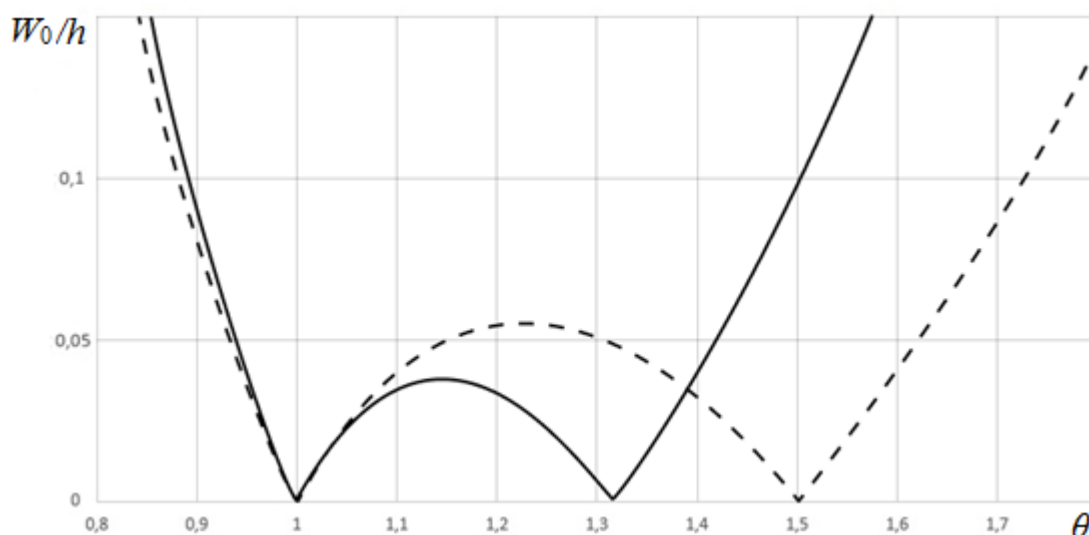


Рис. 4.14. Граница области динамической неустойчивости  
без учета демпфирования

### 4.3. Исследование процесса динамической потери устойчивости вынужденных гармонических осесимметричных колебаний методом численного интегрирования

Можно предположить, что большие возможности исследования особенностей взаимодействия осесимметричных форм колебаний рассматриваемого типа конструкций и не осесимметричных форм с различными количествами волн в окружном направлении  $m$  и индексами сдвига на четверть волны  $i$  откроется путем численного решения задачи Коши для системы нормальных координат (4.8) с варьированием состава рассматриваемого набора этих координат и начальных их значений в момент времени  $t = 0$ . Однако возможное разнообразие сочетаний указанных параметров требует некоторого систематизированного подхода к такому исследованию в последовательном его усложнении. В данном разделе работы сделана попытка выполнить такое исследование, начиная с максимально упрощенного набора уравнений и удерживаемых нелинейных связей между отдельными уравнениями, представленного системой (4.26 – 4.27). С учетом нормировки вычисляемых с помощью метода конечных элементов собственных форм «по массе» такая задача

имеет вид:

$$\ddot{q}_p + \varepsilon_p \dot{q}_p + \omega_p^2 q_p + a_{pNN} q_N^2 = F_p P_0 \cos \omega t \quad (p=1, \dots, N-1), \quad (4.35)$$

$$\ddot{q}_N + \varepsilon_N \dot{q}_N + \omega_N^2 q_N + q_N \left( 2 \sum_{q=1}^{N-1} a_{qNN} q_q \right) + b_{NNNN} q_N^3 = 0, \quad (4.36)$$

с начальными условиями:

$$q_p(0) = q_{p0}, \quad \dot{q}_p(0) = q_{p1} \quad (p=1, \dots, N-1), \quad (4.37)$$

$$q_N(0) = q_{N0}, \quad \dot{q}_N(0) = q_{N1}. \quad (4.38)$$

Систему  $N$  уравнений второго порядка (4.35 – 4.36) можно преобразовать в систему  $2N$  уравнений первого порядка, с помощью замены переменных

$$y_p = q_p, \quad y_{N+p} = \dot{q}_p \quad (p=1, \dots, N).$$

Тогда система (4.35 – 4.36) эквивалентна системе уравнений первого порядка:

$$\dot{y}_p = y_{N+p} \quad (p=1, \dots, N),$$

$$\dot{y}_{N+p} = F_p P_0 \cos \omega t - \varepsilon_p y_{N+p} - \omega_p^2 y_p - a_{pNN} y_N^2 \quad (p=1, \dots, N-1), \quad (4.39)$$

$$\dot{y}_{2N} = -\varepsilon_N y_{2N} - \omega_N^2 y_N - y_N \left( 2 \sum_{q=1}^{N-1} a_{qNN} y_q \right) - b_{NNNN} y_N^3,$$

с начальными условиями:

$$y_p(0) = q_{p0}, \quad y_{N+p}(0) = q_{p1} \quad (p=1, \dots, N). \quad (4.40)$$

Для решения задачи Коши (4.39 – 4.40) можно использовать известные численные одношаговые методы. В данной работе использован метод Кутты-Мерсона, процедура которого описана в книге [34] на языке Algol. Эта процедура переведена на язык VBA и дополнена блоком контроля точности с коррекцией шага интегрирования для обеспечения требуемой точности результата. Процедура оттестирована и обеспечивает высокую точность результатов. Текст подпрограммы приведен в следующем листинге.

## Листинг 1.

```

Sub KuttaMerson(n&, eps#, h#, k&, t#, y#(), ploc&)
' *****
' * Интегрирование нормальной системы обыкновенных
' *   дифференциальных уравнений.
' *   Метод Кутта-Мерсона
' *   с контролем точности решения
' *****
' * Входные параметры:
' * n - порядок системы;
' * Eps - заданный предел погрешности;
' * h - длина участка интегрирования
' * k - тип оцениваемой погрешности:
' *   k = 0 => абсолютная, иначе - относительная
' * t - начальное значение аргумента системы
' * y - начальные значения вектора решения системы
' *   (массив размером n элементов);
' * ploc - начальное дробление интервала h ( >=1 )
' * Выходные параметры:
' * t - конечное значение аргумента системы (t+dt)
' * y - конечные значения вектора решения системы
' *   после интегрирования (массив размерности n).
' * ploc - дробление интервала h, полученное в
' *   процессе контроля погрешности решения
' *****
' * Программа обращается к подпрограмме вычисления
' * правых частей системы Fct(n, t, y, f),
' * где f - значения вектора правых частей системы
' *   в точке (t, y) (массив размерности n).
' *****
Dim Error#, hc#, i&, loc&, increase As Boolean
ReDim w1#(1 To n), w2#(1 To n), F0#(1 To n), F1#(1 To n), F2#(1 To n)
hc = h / ploc: loc = 0
Nxt: Fct n, t, y(), F0()
For i = 1 To n: w1(i) = y(i) + hc / 3 * F0(i): Next i
Fct n, t + hc / 3, w1(), F1()
For i = 1 To n: w1(i) = y(i) + hc / 6 * (F0(i) + F1(i)): Next i
Fct n, t + hc / 3, w1(), F1()
For i = 1 To n: w1(i) = y(i) + hc / 8 * (F0(i) + 3 * F1(i)): Next i
Fct n, t + hc / 2, w1(), F2()
For i = 1 To n: w1(i) = y(i) + hc / 2 * (F0(i) - 3 * F1(i) + 4 * F2(i)): Next i
Fct n, t + hc, w1(), F1()
For i = 1 To n: w2(i) = y(i) + hc / 6 * (F0(i) + F1(i) + 4 * F2(i)): Next i
increase = True
For i = 1 To n:
  If k = 0 Or Abs(w1(i)) < 1E-50 Then Error = w1(i) - w2(i) Else Error = 1 - w2(i)
  / w1(i)
  Error = 0.2 * Abs(Error)
  If Error > eps Then hc = hc / 2: ploc = 2 * ploc: loc = 2 * loc: GoTo Nxt
  If Error * 64 > eps Then increase = False
Next i
t = t + hc: loc = loc + 1
For i = 1 To n: y(i) = w2(i): Next i
If loc < ploc Then
  If increase And (loc = (loc \ 2) * 2) And ploc > 1 Then
    hc = 2 * hc: loc = loc \ 2: ploc = ploc \ 2
  End If
  GoTo Nxt
End If
End Sub

```

Исследование решений задачи проведено на примере рассмотренного в предыдущем разделе тонкостенного цилиндра с полусферическим дном. Для выбора начальных условий и частоты и амплитуды продольного воздействия на рисунке 4.15 показана граница области неустойчивости в координатах «частота (Гц)» – «амплитуда (м)» при наличии демпфирования.

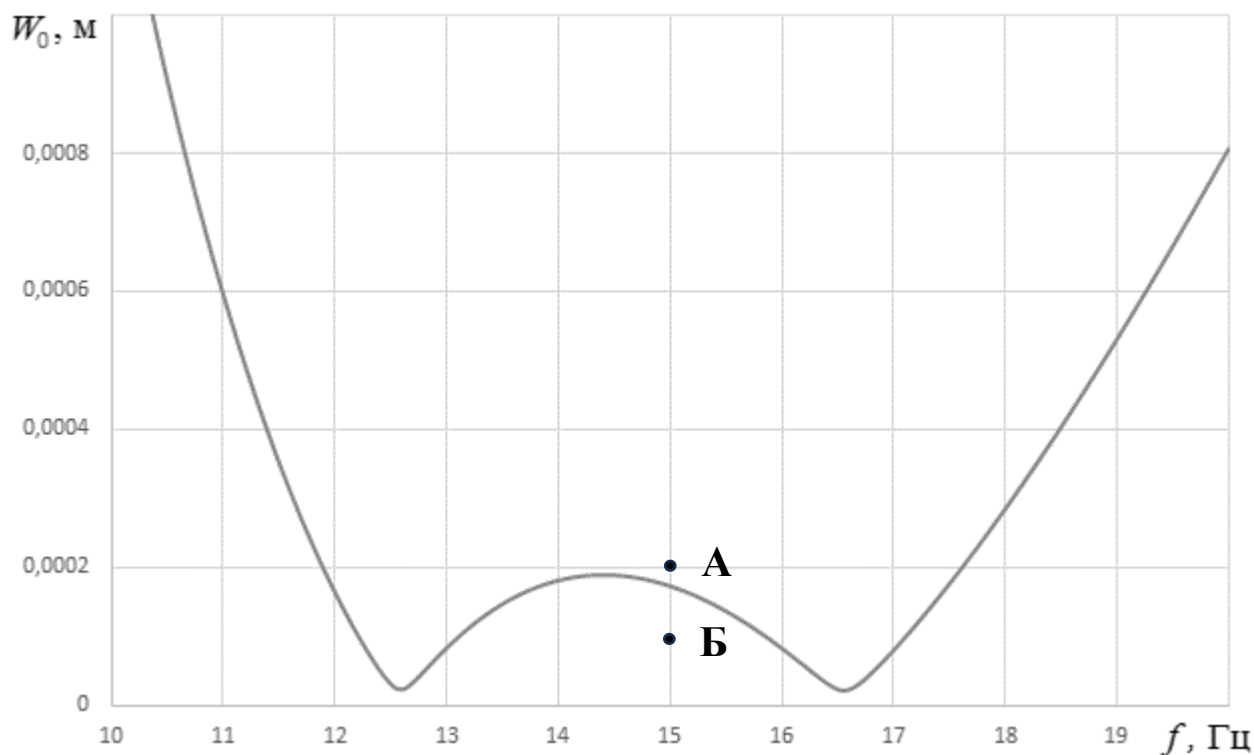


Рис. 4.15. Нижняя граница области неустойчивости

Выберем значение частоты 15 Гц и сравним результаты интегрирования при значениях амплитуды ниже и выше показанной границы. Начальные условия для осесимметричных тонов задаются нулевыми, а для не осесимметричного тона задается малое начальное возмущение обобщенной координаты  $q_4(0)$ . Последнее обстоятельство существенно, поскольку при  $q_4(0) = 0$  не осесимметричные колебания принципиально не возникают.

На рис. 4.16 показано, как задаются на рабочем листе данные для расчета переходного процесса.



F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
np=	3								
ApNN	fp(Гц)	Dp	mu0p	ANNNN	fN	DN	w0	f	q4(0)
6744,674	16,55806	0,05	-127,613	36362,94	6,292405	0,05	0,0002	15	1,00E-05
23618,29	48,17538	0,05	44,33502						
-1864,58	76,00651	0,05	-29,7447						

Рис. 4.16. Данные для расчета переходного процесса

На рис. 4.17 показаны результаты расчета при амплитуде гармонического воздействия 0,0002 м, что согласно рис. 4.15 лежит в области неустойчивости (точка А на рис. 4.15).

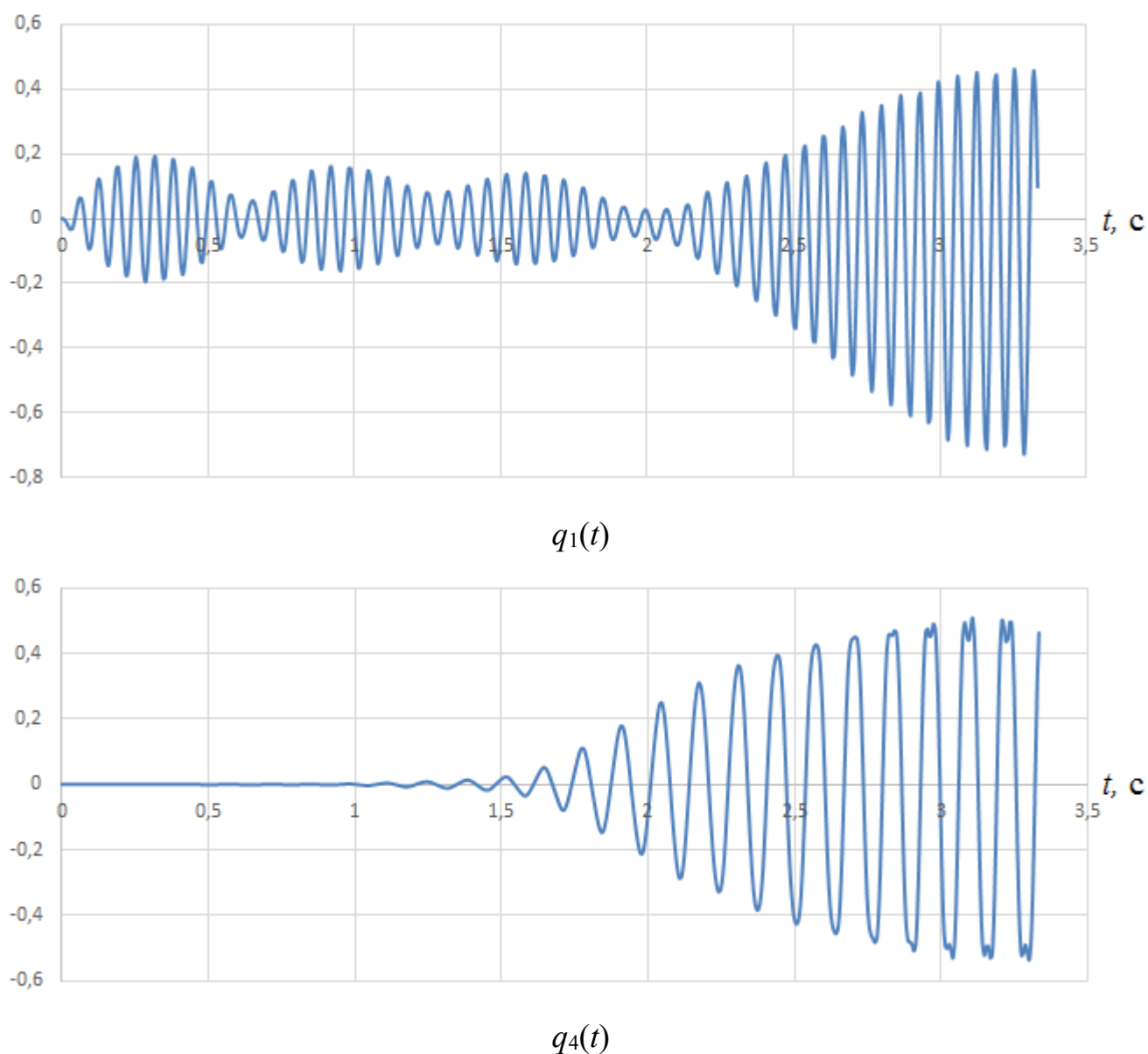


Рис. 4.17. Амплитуда гармонического воздействия 0,0002 м

Из графиков видно, что при достижении осесимметричным откликом стационарной величины развиваются интенсивные не осесимметричные колебания конструкции. Эти колебания имеют основную составляющую в два раза меньшей частоты, что характеризует параметрический характер их возбуждения. Это полностью соответствует тому, что параметры воздействия лежат в области динамической неустойчивости системы.

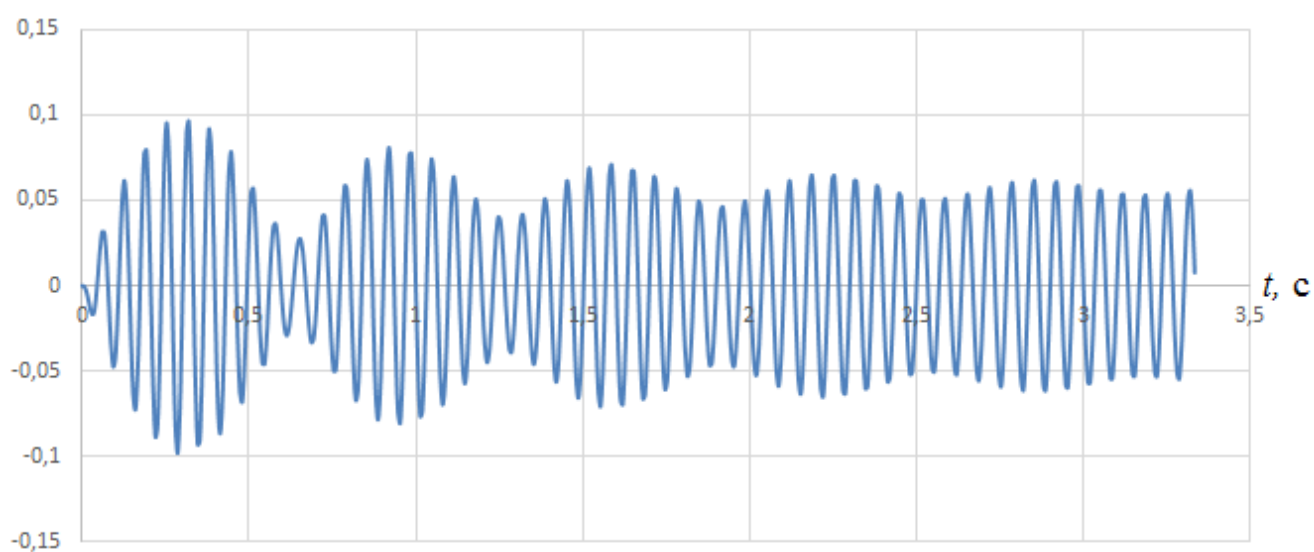
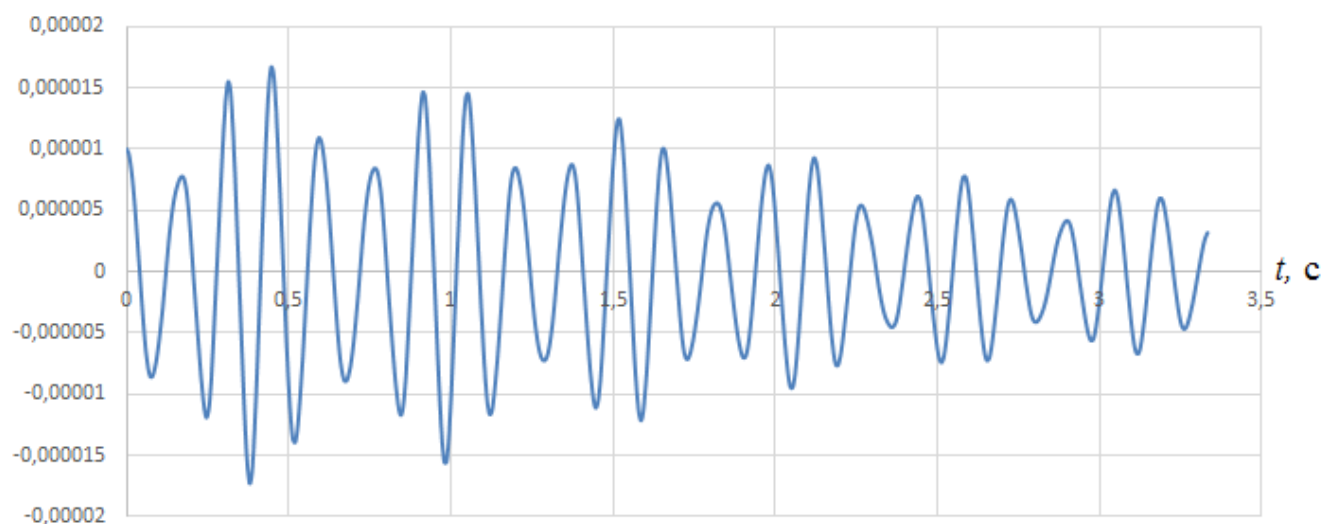
 $q_1(t)$  $q_4(t)$ 

Рис. 4.18. Амплитуда гармонического воздействия 0,0001 м

Результаты расчета при амплитуде гармонического воздействия 0,0001 м, что

согласно рис. 4.15 лежит в области устойчивости, показаны на рис. 4.18 (точка Б на рис. 4.15). Из графиков видно, что амплитуда осесимметричного отклика достигает практически стационарного уровня, в то время как рост амплитуды не осесимметричных колебаний отсутствует, даже наблюдается их затухание.

Таким образом, результаты численного интегрирования нелинейных уравнений подтверждает выводы, полученные методом гармонического баланса.

В отличие от метода гармонического баланса, который обоснован лишь в зоне частот, близких к частоте основного параметрического резонанса, прямое численное интегрирование подобных ограничений не налагает. Вопрос лишь в том, как близко можно подойти к границе области параметрического резонанса, чтобы локализовать ее с помощью графиков, подобных рис. 4.17 и 4.18. Провести подобное исследование несложно благодаря высокой скорости вычислений в современных компьютерах. На практике одно тестирование с построением графика в среде Excel занимает 2 – 4 секунды.

Пик нижней границы области параметрического возбуждения не осесимметричных колебаний (области динамической неустойчивости) на рис. 4.15 в соответствии с принятой классификацией простых параметрических резонансов близок к удвоенной собственной частоте  $2f_N$  и называется основным параметрическим резонансом. Соседний пик (около 16,5 Гц) обусловлен не механизмом параметрического возбуждения, а простым резонансом первого осесимметричного тона колебаний.

Как правило, кроме основного параметрического резонанса наблюдаются пики резонансов более высокого порядка вблизи частот  $2f_N/p$ , где  $p = 2, 3, \dots$  обозначает порядок параметрического резонанса. В соответствии с этим основной параметрический резонанс есть резонанс первого порядка.

В таблице 4.1 приведены результаты тестирования набора частот осесимметричного воздействия из диапазона 10 – 20 Гц. На графике рис. 4.19 показаны точки локализации границы области параметрического возбуждения неосесимметричного тона с 4 волнами по окружности при тестированных значениях частоты в сравнении с положением границы, вычисленной методом

гармонического баланса. Как и ожидалось, вблизи основного параметрического резонанса метод гармонического баланса дает результаты близкие к точным оценкам, а на краях диапазона появляются значительные расхождения.

Таблица 4.1

Частота, Гц	Оценка $W_0$ снизу, м	Оценка $W_0$ сверху, м	$W_0$ по методу гармонического баланса, м
10	0,0014	0,00142	0,001293
10,5	0,00095	0,00098	0,000904
11	0,00062	0,00063	0,000505
11,5	0,00035	0,00036	0,000351
12	0,00016	0,00017	0,000163
12,5	0,000025	0,00003	0,000031
13	0,000081	0,000082	0,000083
13,5	0,00014	0,00015	0,000147
14	0,00017	0,00018	0,000181
14,5	0,00018	0,00019	0,000189
15	0,00016	0,00017	0,000173
15,5	0,00013	0,00014	0,000136
16	0,000078	0,000079	0,000083
16,5	0,000021	0,000022	0,000023
17	0,000065	0,000068	0,000080
17,5	0,000135	0,00014	0,000176
18	0,00022	0,00023	0,000285
19	0,00035	0,00038	0,000531
20	0,00045	0,00048	0,000807

Построение одновременно нижней и верхней оценок границы области основного параметрического резонанса (рис. 4.20) показало, что сближение этих оценок возможно до практического слияния графиков.

Исследование методом численного интегрирования диапазона частот от 2 Гц до 10 Гц позволило выявить пики границ областей параметрических резонансов 2-го, 3-го и 4-го порядков, что показано на рис. 4.21.

Таким образом, на практике показано, что посредством визуальной оценки характера графиков типа рис. 4.17 и 4.18, получаемых методом прямого интегрирования нелинейно связанных уравнений колебаний можно с удовлетворительной точностью (до толщины линии построения) получать графики границ областей параметрических резонансов неосесимметричных колебаний (т.е. областей динамической неустойчивости осесимметричного гармонического отклика рассматриваемого типа тонкостенных конструкций).

Заметим здесь, что для более надежного выявления динамической неустойчивости осесимметричных колебаний требуется задавать достаточно длинный интервал интегрирования системы уравнений по времени. В проведенных здесь исследованиях рассматривались временные интервалы длительностью в 100 периодов колебаний внешнего осесимметричного воздействия на конструкцию.

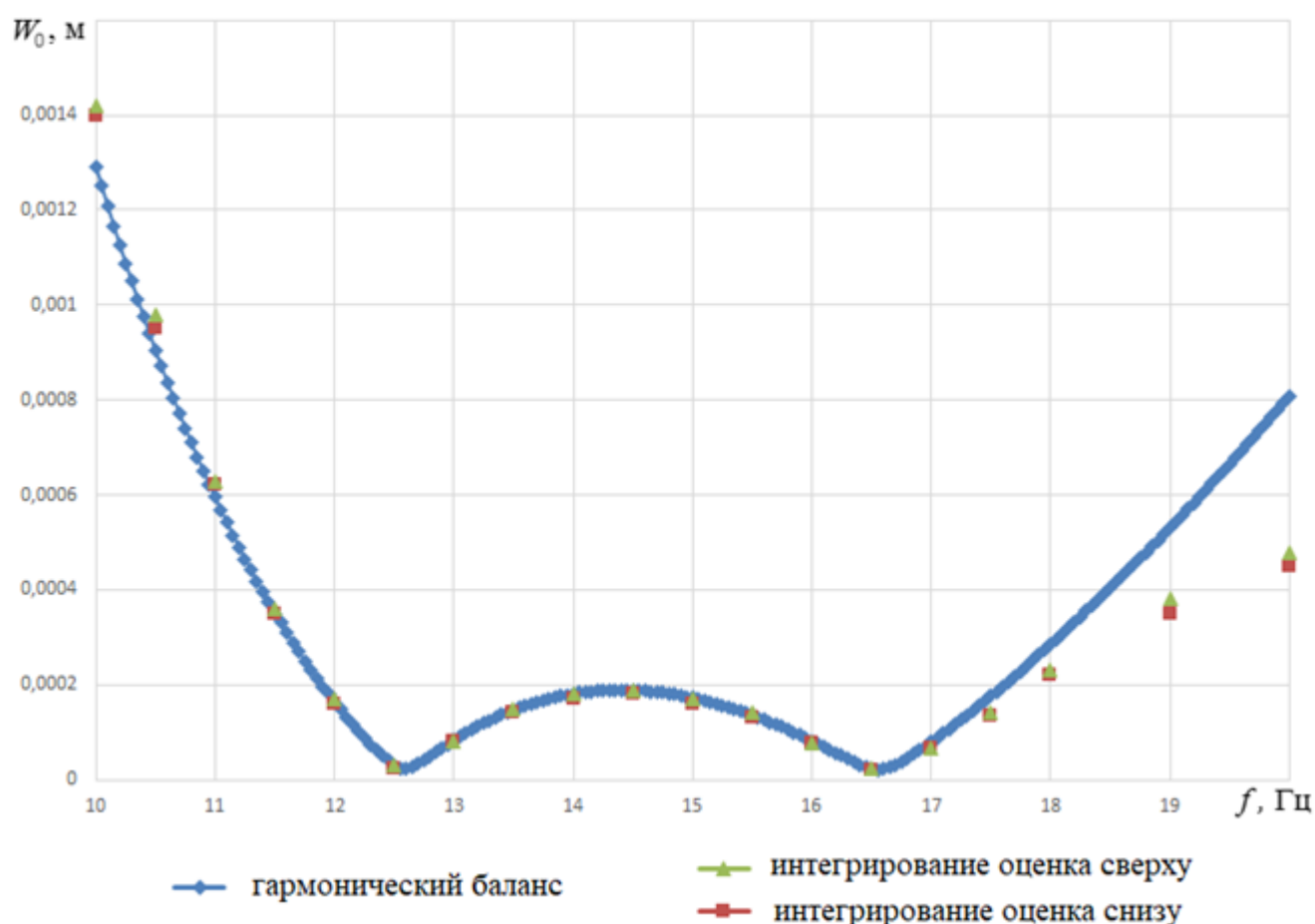


Рис. 4.19. Граница области основного параметрического резонанса по методу гармонического баланса и оценки прямым интегрированием уравнений

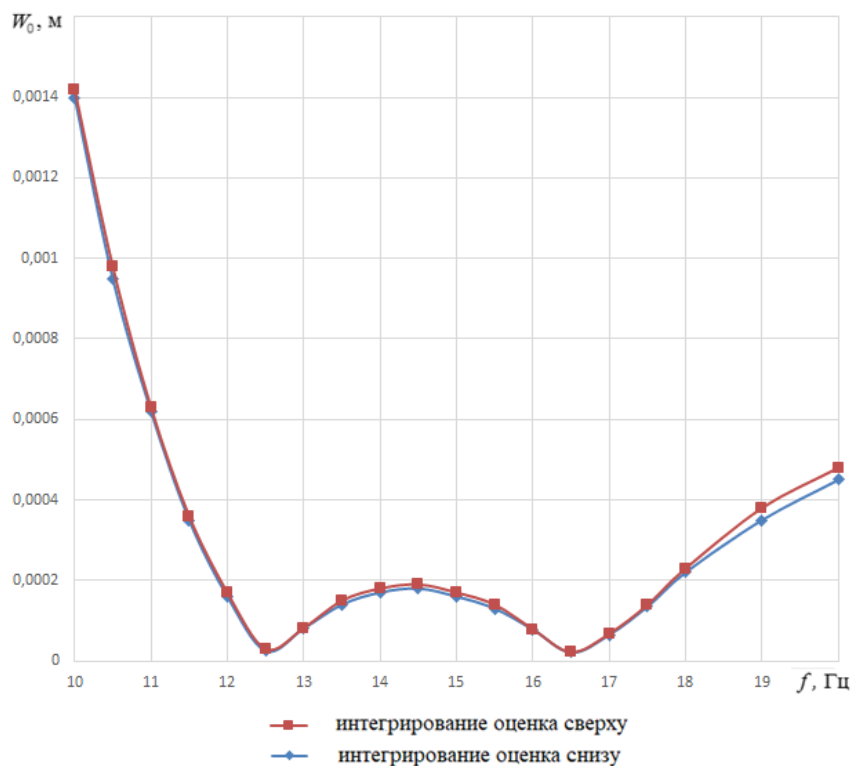


Рис. 4.20. Оценка границы области основного параметрического резонанса (1-го порядка)

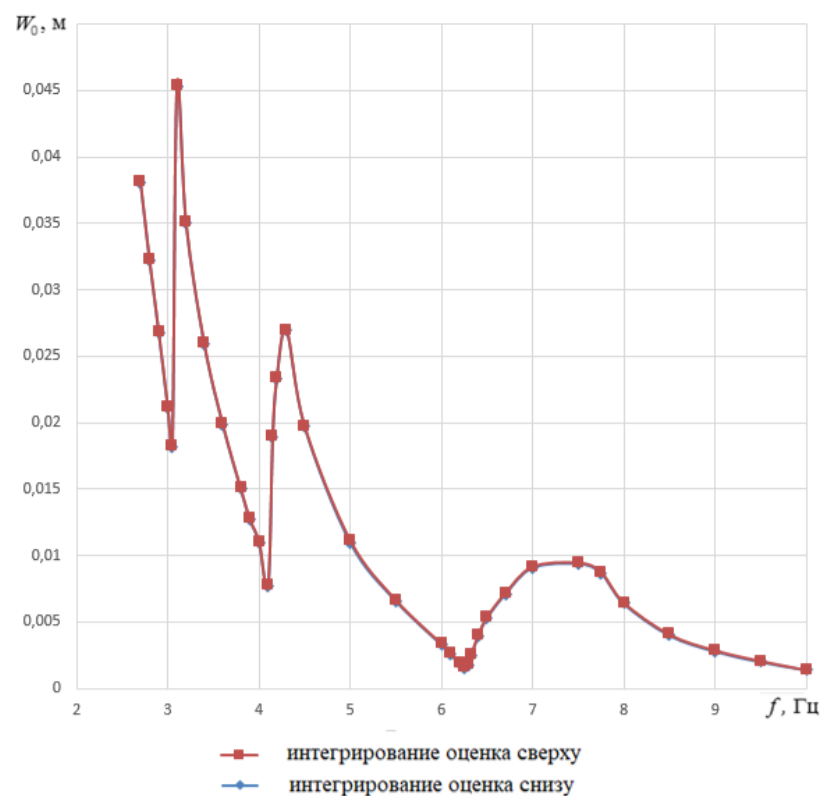


Рис. 4.21. Границы областей параметрических резонансов 2-го, 3-го и 4-го порядков

## Заключение

1. Разработана на основе динамического подхода математическая модель и методика исследования статической устойчивости упругой тонкостенной осесимметричной конструкции, полости которой могут быть частично заполнены идеальной несжимаемой жидкостью (либо конструкция взаимодействует с ограниченным осесимметричным объемом жидкости). Методика основана на пространственном Фурье-анализе спектра нагруженной конструкции, что обеспечивает более высокую точность по сравнению с 3-мерным конечно-элементным моделированием осесимметричной оболочки. Обеспечивается также возможность многофакторного анализа с построением границ областей устойчивости в одно-, двух- и трехмерных пространствах параметров.

2. Представлены результаты исследования устойчивости для ряда примеров. Получены области статической устойчивости конструкций при действии внутреннего, внешнего давления, сосредоточенных масс и гидростатического внешнего давления с использованием программы расчета динамических характеристик осесимметричных оболочечных конструкций, содержащих жидкость, основанной на методе конечных элементов. Показаны границы областей устойчивости, вычисленные в примерах.

3. Разработана методика исследования динамической устойчивости гармонических колебаний осесимметричных тонкостенных конструкций, содержащих несжимаемую жидкость, возбуждаемых продольным периодическим воздействием. Для построения областей неустойчивости использован метод гармонического баланса в сочетании с методом конечных элементов при расчете параметров нелинейных модальных уравнений колебаний конструкций.

4. Методом численного интегрирования исследованы переходные процессы колебаний системы как в области динамической неустойчивости параметров воздействия, так и вне ее. Показан параметрический характер неосесимметричных колебаний при осесимметричном воздействии. Получены границы областей параметрических резонансов как основного (1-го порядка), так и резонансов более

высоких порядков.

5. Для обеспечения перечисленных выше исследований разработана версия программы расчета динамических характеристик осесимметричных тонкостенных упругих конструкций, содержащих объемы идеальной несжимаемой жидкости, с использованием метода конечных элементов, реализованная в среде офисной программы Excel на языке программирования Visual Basic for Applications (VBA).



**Список используемой литературы**

1. Абрамсон Х.Н., Кана Д.Д. Некоторые экспериментальные исследования динамической устойчивости тонких оболочек, содержащих жидкость. // Проблемы механики твердого деформированного тела. – Л.: Судостроение, 1970. – С. 11 – 19.
2. Багдасарян Г.Е., Гнуни В.Ц. Устойчивость цилиндрической оболочки частично заполненной жидкостью при внешнем динамическом давлении. *Mechanics. Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia*. – 2007. – Т. 60. – №. 1. – С. 25 – 32.
3. Балакирев Ю.Г. Осесимметричные колебания соосных цилиндрических оболочек, заполненных жидкостью // Труды VII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок, 1969. – М.: Наука, 1970.
4. Бате Н., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. – М.: Стройиздат, 1982. – 448 с.
5. Бленд Д. Нелинейная динамическая теория упругости. – М.: Мир, 1972. – 184 с.
6. Богадица Э.С., Брусиловский А.Д., Шмаков В.П. Численная реализация метода расчета собственных и вынужденных колебаний упругих оболочек вращения, заполненных жидкостью. // *Динамика упругих и твердых тел, взаимодействующих с жидкостью*. – Томск, Томский ун-т, 1972. – С. 3 – 16.
7. Богадица Э.С., Брусиловский А.Д., Шмаков В.П. Применение численного метода к расчету собственных колебаний оболочек вращения, частично заполненных жидкостью // *Прикладная механика*. – 1977. – Т. 13. – № 1. – С. 81 – 85.
8. Бочкарёв С.А. Собственные колебания вращающейся круговой цилиндрической оболочки с жидкостью. *Вычислительная механика сплошных сред*, 2010. № 3(2), С. 24 – 33.
9. Бочкарёв С.А., Матвеев В.П. Численное моделирование устойчивости нагруженных оболочек вращения при внутреннем течении жидкости.

- Прикладная механика и техническая физика. – 2008. – Том 49. – № 2. – С. 185 – 195.
10. Бочкарёв С.А., Лекомцев С.В., Матвеев В.П. Численное моделирование пространственных колебаний цилиндрических оболочек, частично заполненных жидкостью. Вычислительные технологии. – 2013. – Том 18. – № 2. – С. 12 – 24.
  11. Брусиловский А.Д., Шмаков В.П., Яблоков В.А. Метод расчета собственных и вынужденных колебаний упругих оболочек вращения, заполненных идеальной несжимаемой жидкостью // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1973. – № 3. – С. 99 – 110.
  12. Васильев В.З. Основы и некоторые специальные задачи теории упругости. – М.: Учебно-методический центр по образованию на железнодорожном транспорте, 2012. – 215 с.
  13. Веселовский З. Динамические задачи нелинейной теории упругости. –К.: Наук. Думка, 1981. – 216 с.
  14. Власов В.З. Общая теория оболочек: Избранные труды. В 2 т. Т. 1. М.: Изд-во АН СССР, 1962. – 528 с.
  15. Вольмир А.С. Гибкие пластинки и оболочки. – М.: ОГИЗ государственное издательство технико-технической литературы, 1956. – 419 с.
  16. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. – 432 с.
  17. Вольмир А.С. Оболочки в потоке жидкости и газа: Задачи гидроупругости. М.: Наука, 1979. – 320 с.
  18. Гнитько В.И., Дегтярев К.Г., Науменко В.В., Тонконоженко А.М. Свободные и вынужденные колебания оболочек вращения, частично заполненных жидкостью. Вюник Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна. Серія Математичне моделювання. Інформацшш технологи. Автоматизоваш системи управлшня. 2013. №. 23. С. 39 – 49.
  19. Гнитько В.И., Дегтярев К.Г., Науменко В.В., Стрельникова Е.А. Математическая модель колебаний оболочки вращения с изменяющимся

- уровнем заполнения жидкостью. Вестник Херсонского национального технического университета. – 2014. – №. 3 (50). – С. 21 – 25.
20. Гольденвейзер А.Л., Лидский Б.В., Товстик П.Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. М.: Наука, 1979. – 384 с.
21. Горбунов Ю.А., Новохатская Л.М., Шмаков В.П. Теоретическое и экспериментальное исследование спектра собственных неосесимметричных колебаний конической оболочки с жидкостью при наличии внутреннего давления. // Динамика упругих и твердых тел, взаимодействующих с жидкостью. – Томск, Томский ун-т, 1975. – С. 47 – 52.
22. Грибков В.А., Адаменко, Р. А. Двумерная модель жидкости для расчета собственных частот колебаний осесимметричных гидрооболочечных систем. Инженерный журнал: наука и инновации. – 2017. – №. 3 (63). – С. 1 – 6.
23. Григолюк Э.И., Горшков Г.А. Взаимодействие упругих конструкций с жидкостью (удар и погружение). – Л.: Судостроение, 1976. – 200 с.
24. Григорьев В.Г. Применение метода конечных элементов к расчету колебаний упругих оболочечных конструкций, содержащих жидкость. // Динамика упругих и твердых тел, взаимодействующих с жидкостью. (Труды III семинара). – Томск, Томский ун-т, 1978. – С. 55 – 60.
25. Григорьев В.Г. Расчет динамических характеристик сложных оболочечных конструкций с жидкостью. // Колебания упругих конструкций с жидкостью. Сборник научных докладов IV симпозиума. - М.: ЦНТИ “Волна”, 1980. – С. 102 – 107
26. Григорьев В.Г. О расчете колебаний упругих оболочек с жидкостью в условиях однородного гравитационного поля. // Механика оболочек и пластин: Сборник докладов XIX Международной конференции по теории оболочек и пластин. - Нижний Новгород: Издательство ННГУ, 1999. – С. 51 – 54.
27. Григорьев В.Г. Методология исследования динамических свойств сложных упругих и гидроупругих систем. Дисс... д-ра техн. наук. 2000. – 328 с.

28. Григорьев В.Г. О вариационных принципах в динамике упругих конструкций, взаимодействующих с жидкостью. // Материалы VI Международного симпозиума “Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред”. - М.: Издательство “ГРАФРОС”, 2000. – С. 30 – 31.
29. Григорьев В.Г., Григорьева Е.В. Контактное взаимодействие ограниченного объема жидкости с деформируемым твердым телом под влиянием гравитационных сил // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2011. – №2 – С. 147 – 159.
30. Гузь А.Н. Устойчивости упругих тел при конечных деформациях. – К.: Вища школа, 1995. – 304 с.
31. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. - М.: Мир, 1975. – 541 с.
32. Ильгамов М.А., Иванов В.А. Гулин Б.В. Расчет оболочек с упругим наполнителем. – М.: Наука, 1987. – 260 с.
33. Ильгамов М.А. Устойчивость цилиндрической оболочки с жидкостью при осевом ударе. Известия РАН. – 2020. – №. 2. – С. 14 – 19.
34. Кармишин А.В., Лясковец В.А., Мяченков В.И., Фролов А.Н. Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций. – М.: Машиностроение, 1975.
35. Клигман Е.П., Клигман И.Е., Матвеев В.П. Спектральная задача для оболочек с жидкостью. Прикладная механика и техническая физика. – 2005. – Том 46. – №. 6. – С. 128 – 135.
36. Клименко Д.В., Тонконоженко А.М., Гнитко В.И., Дегтярев К.Г., Стрельникова Е.А. Колебания жидкости в упругих оболочках с разным уровнем их заполнения. Космическая техника. Ракетное вооружение. – 2015. – №. 3. – С. 24 – 29.
37. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика, части I, II. - М.: Физматгиз, 1963.
38. Кубенкр В.Д. Нелинейные колебания цилиндрических оболочек. – К.: Выща школа, 1989. – 208 с.

39. Купрадзе В.Д. Методы потенциала в теории упругости. – М.: Физматгиз, 1963. – 472 с.
40. Лампер Р.Е., Левин В.Е. Метод конечных и граничных элементов в задачах динамики упругих сосудов с жидкостью. Прикладная математика и механика, 2004. Том 68. – №. 1. – С. 91 – 97.
41. Лейбензон Л.С. Курс теории упругости. – Л.-М.: Государственное издательство технико-технической литературы, 1947 г. – 464 с.
42. Лекомцев С.В. Численный анализ устойчивости тонкостенных оболочек произвольного поперечного сечения, содержащих текущую или неподвижную жидкость. Дисс... канд. физ.-мат.. наук. 2013. – 118 с.
43. Лошкин А.З. Введение в нелинейную теорию упругости. –Л.: ИздЛКИ, 1977. – 106 с.
44. Лурье А.И. Статика тонкостенных упругих оболочек. – М –Л.:Гостехиздат, 1947. – 252 с.
45. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. –М.: Наука, 1980. – 512 с.
46. Могилевич Л.И., Блинков Ю.А., Иванов С.В., Попов В.С., Кондратов Д.В. Волны деформации в двух соосных, физически нелинейных оболочках с конструкционным демпфированием, взаимодействующих с окружающей средой и заполненных жидкостью. Вестник Московского государственного технического университета им. НЭ Баумана. Серия «Приборостроение». – 2022. – №. 3 (140). – С. 34 – 60.
47. Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости. –Л. –М.: ОГИЗ, 1948. – 211 с.
48. Новожилов В.В. Теория упругости. – Л.: Судпромгиз, 1958 г. – 374 с.
49. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. – Л.: Судпромгиз, 1962. – 432 с.
50. Образцова Е.И. Нелинейные параметрические колебания цилиндрической оболочки с жидкостью при продольном возбуждении // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. – 1976. – № 6. – С. 87 – 93.
51. Образцова Е.И., Шклярчук Ф.Н. Нелинейные параметрические колебания цилиндрического бака с жидкостью // Известия АН СССР. Механика

- твердого тела. – 1979. – № 4. – С. 133 – 145.
52. Пак Сонги, Григорьев В.Г. Устойчивость тонкостенных осесимметричных соосных конструкций, содержащих жидкость, при многофакторных нагрузках. Труды МАИ. – № 119. – 2021. – 18 с.
53. Пак Сонги, Григорьев В.Г. Моделирование динамической устойчивости тонкостенных конструкций, частично заполненных жидкостью, при гидростатическом воздействии. Математическое моделирование и численные методы, 2022, № 3, С. 3–17.
54. Постнов В.А., Хархурим И.Я. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. – Л.: Судостроение, 1974.
55. Радаев Ю.Н., Лычев С.А. Нелинейная теория упругости как физическая теория поля. – Самара: Издательство Универс-групп, 2005. – 60 с.
56. Самойлов Е.А., Павлов Б.С. Колебания полусферической оболочки, заполненной жидкостью // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. – 1964. – № 3.
57. Сеймов В.Н. Динамические контактные задачи. – К.: Наукова Думка, 1976. – 283 с.
58. Сейфуллаев А.И., Агаларов Г.Д. Свободные колебания сферической оболочки с упругим наполнителем. Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2015. – №. 3. – С. 74 – 80.
59. Сьярле Ф. Математическая теория упругости. Пер. с англ. – М.: Мир, 1992. – 427 с.
60. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1975. – 576 с.
61. Челомей В.Н. и др. Вибрации в технике. – М.: Машиностроение, 1978-1981.
62. Чемодуров В.Т., Леоненко Ю., Попов А.Г. Устойчивость цилиндрического резервуара с жидкостью, нагруженного внешним давлением. Строительство и техногенная безопасность. – 2019. – №. 14 (66). – С. 21 – 28.
63. Черных К.Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. – Л.: Машиностроение, 1986.
64. Шмаков В.П. Избранные труды по гидроупругости и динамике упругих

- конструкций. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. – 287 с.
65. Шклярчук Ф.Н. Расчет колебаний оболочек вращения с жидкостью методом конечных элементов. Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2015. – №. 1. – С. 17 – 29.
66. Amabili M., Païdoussis M. P., Lakis A. A. Vibrations of partially filled cylindrical tanks with ring-stiffeners and flexible bottom. *Journal of Sound and Vibration*, 1998. 213(2), p. 259 – 299.
67. Amabili M. Balasubranmanian P. Nonlinear vibrations of truncated conical shells considering multiple internal resonances. *Nonlinear Dynamics*. – 2020. – Т. 100. – №. 1. – С. 77 – 93.
68. Archimedes. *The works of Archimedes* (T. Heath, Ed. 2010, 1st edition 1897). Cambridge: Cambridge University Press.
69. Darrigol O. Between Hydrodynamics and Elasticity Theory: The First Five Births of the Navier-Stokes Equation. *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 56, no. 2, 2002, p. 95 – 150.
70. Darrigol O., Frisch U. From Newton's mechanics to Euler's equations. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Volume 237, Issues 14–17, 2008, Pages 1855-1869, ISSN 0167-2789, <https://doi.org/10.1016/j.physd.2007.08.003>.
71. Goncalves P. B., Ramos N. R. S. S. Free vibration analysis of cylindrical tanks partially filled with liquid. *Journal of Sound and Vibration*, 1996. 195(3), p. 429 – 444.
72. Jordan P. Vibration test of a pressurized torus shell. // *AIAA Paper. 5th Aerospace Sciences Meeting*. 1967, No. 73.
73. Newmark, N. M. A method of computation for structural dynamics. *Journal of the engineering mechanics division*, 1959. 85(3), p. 67 – 94.
74. Nowacki, Horst. Leonhard Euler and the Theory of Ships. *Journal of Ship Research* vol. 52 № 04, 2008, p. 274 – 290.
75. Kana D.D., Craig R.R., Jr. Parametric oscillations of a longitudinally excited cylindrical shell containing liquid // *Journal of Spacecraft and Rockets*. – 1968. V. 5. – № 1. – P. 13 – 21.

76. Koiter W.T. On the stability of elastic equilibrium. Dissertation, Delft, The Netherlands. 1945. An English translation is available in 1967 by NASA, Vol.833.
77. Koiter W.T. A translation of the stability of elastic equilibrium. Management Information Services, 1970.
78. Leissa A.W. Vibration of Shells. Columbus: Acoustical Society of America, 1993. 434 p.
79. Park SongYi, Grigoriev V.G. The stability of thin-walled axial symmetric structures made up two coaxial shells containing liquid under the multifactor static loading. Proceedings of the International Astronautical Congress, IAC 71, Connecting @ll Space People. Cep. "71st International Astronautical Congress, IAC 2020 - The CyberSpace Edition" Tom 2020-October. 2020.
80. Park SongYi, Grigoriev V.G. A multivariate study of the stability of toroidal thin-walled structures containing liquid. Proceedings of the International Astronautical Congress, IAC, Cep. "IAF Materials and Structures Symposium 2021 - Held at the 72nd International Astronautical Congress, IAC 2021" Tom C2. 2021.
81. Pellicano F., Amabili M. Stability and vibration of empty and fluid-filled circular cylindrical shells under static and periodic axial loads. International Journal of Solids and Structures. – 2003. – T. 40. – №. 13-14. – P. 3229 – 3251.
82. Sivak V.F., Telakov A.I. Experimental investigation of vibrations of a cylindrical shell in contact with a liquid. Soviet applied mechanics. – 1991. – 27(5) – P. 484 – 488.
83. Soedel W. Vibration of Shells and Plates. New York: CRC Press, 2004. 553 p.
84. Wilson, E. L., Farhoomand, I., Bathe, K. J. Nonlinear dynamic analysis of complex structures. Earthquake Engineering & Structural Dynamics, 1972. 1(3), P. 241-252.