

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ  
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»**

На правах рукописи



**АРУТЮНЯН АРОН МАРАТОВИЧ**

**НЕСТАЦИОНАРНОЕ КОНТАКТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ  
ЖЕСТКОГО ШТАМПА И УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА С  
ЗАГЛУБЛЕННЫМИ ПОЛОСТЯМИ**

01.02.04 – «Механика деформируемого твердого тела»

**ДИССЕРТАЦИЯ**

на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

к.ф.-м.н., доцент

Федотенков Григорий Валерьевич

Москва 2020

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>ВВЕДЕНИЕ.....</b>	<b>4</b>
<b>ГЛАВА 1. ПОСТАНОВКА НЕСТАЦИОНАРНЫХ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ АБСОЛЮТНО ТВЕРДЫХ УДАРНИКОВ И УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА С ПОЛОСТЯМИ.....</b>	<b>9</b>
§ 1.1. Современное состояние исследований.....	9
§ 1.2. Уравнения движения упругого полупространства.....	22
§ 1.3. Условия контакта, начальные и граничные условия.....	25
§ 1.4. Нестационарные объемные функции влияния для упругой плоскости.....	28
<b>ГЛАВА 2. МЕТОД И АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ПЛОСКИХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОБЛАСТЕЙ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ.....</b>	<b>32</b>
§ 2.1. Теорема взаимности работ двумерной нестационарной теории упругости.....	32
§ 2.2. Формула Сомильяны и основное разрешающее уравнение для плоских нестационарных задач теории упругости.....	35
§ 2.3. Система разрешающих уравнений нестационарных задач для двумерных областей произвольной геометрии.....	39
§ 2.4. Выбор пробных решений и формирование дискретного аналога системы разрешающих уравнений.....	43
<b>ГЛАВА 3. ПОСТАНОВКА И АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ АБСОЛЮТНО ЖЕСТКОГО ШТАМПА И УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА С ПОЛОСТЬЮ.....</b>	<b>49</b>
§ 3.1. Постановка задачи.....	49
§ 3.2. Система разрешающих уравнений.....	54
§ 3.3. Алгоритм решения.....	57

§ 3.4. Учет частичного отрыва граничных поверхностей ударника и полупространства.....	62
§ 3.5. Примеры расчётов.....	65
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....</b>	<b>82</b>
<b>СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ.....</b>	<b>83</b>

## ВВЕДЕНИЕ

**Актуальность работы.** Многие важные практические задачи связаны с исследованием динамического контактного взаимодействия ограниченных тел с полуограниченными упругими областями сложного строения. Эти задачи определены, в том числе, проблемами сейсмостойкости и виброзащиты сооружений, расчетом уровня и характеристик воздействия на здания и сооружения техногенных колебаний, распространяющихся в грунте, сейсморазведки полезных ископаемых и др.

В грунтовом массиве часто присутствуют неоднородности (нарушения структуры) как естественного (карстовые полости, более жесткие включения), так и искусственного (различные коммуникации, тоннели метрополитена, заглубленные хранилища отходов и др.) происхождения. Поэтому существенным является вопрос о степени влияния подобных неоднородностей на генерируемые в массиве с неоднородностью волновые поля.

Проблемами исследования и контактного взаимодействия тел с полуограниченными областями сложного строения занимается узкий круг отечественных и зарубежных ученых. Решения задач о воздействии штампа на упругое полупространство в стационарной и нестационарной постановке без полостей и неоднородностей известны. Несмотря на проведенные исследования, в настоящее время отсутствуют аналитические решения контактных задач о нестационарном воздействии ударников на упругое полупространство с заглубленными полостями произвольной геометрии, и расположения.

**Целью работы** является исследование контактного взаимодействия жестких тел с упругими полуограниченными областями неоднородного строения, включающее постановки и решения новых задач, а так же практические расчеты позволяющие оценить эффекты от влияния заглубленных полостей произвольной геометрии и расположения на генерируемые в массиве волновые поля.

**Объектом исследования** является упругое полупространство с заглубленной полостью при нестационарном контактном воздействии жесткого ударника.

**Предметом исследования** является напряженно-деформированное состояние упругого полупространства, включающее поля перемещений, напряжений и деформаций.

**Научная новизна** работы состоит в построении решений нового класса двумерных нестационарных контактных задач теории упругости.

**Теоретическая значимость работы** состоит в развитии метода функций влияния и его применения к решению контактных задач нестационарной теории упругости.

**Практическая значимость работы** заключается в:

- использовании результатов проведенной работы в инженерной практике проектными и исследовательскими организациями при проектировании и расчете зданий и сооружений при воздействии природных и техногенных колебаний, распространяющихся в грунте;

- возможности применения разработанной метода и алгоритма расчета нестационарного контактного взаимодействия жесткого штампа и упругого полупространства с заглубленными полостями при разработке нормативных документов в области строительных конструкций и оснований.

**Методы исследования.** Метод решения основан на динамической теореме взаимности работ. Используется прямой метод граничных элементов. При этом в каждый момент времени в полупространстве выделяется область, которая находится в возмущенном состоянии и вне которой возмущения отсутствуют. В качестве фундаментальных решений используются функции влияния для упругого пространства с учетом плоской постановки задачи. Они определяют перемещения и напряжения в упругой плоскости от приложенной единичной мгновенной сосредоточенной силы. С использованием фундаментальных решений задача сводится к системе интегральных

уравнений. Интегральные операторы разрешающей системы уравнений дискретизируются по пространственной переменной и по времени.

**Достоверность и обоснованность результатов** достигается использованием известных математических методов, основанных на известных уравнениях механики деформируемого твердого тела. Для решения начально-краевой задачи используются известные методы математической физики.

**Апробация результатов исследования.** Все основные результаты работы были предметом докладов, обсуждений и дискуссий на российских и международных семинарах, конференциях и симпозиумах:

- Международный научный семинар «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы». Москва, 2016г-2018г.;

- Международный симпозиум «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова – (2016г- 2020г.). Москва;

- Всероссийская конференция молодых ученых-механиков. 5-15 сентября 2017 г., Сочи, «Буревестник» МГУ. 2017г;

- X Всероссийская конференция по механике деформируемого твердого тела, 18-22 сентября 2017г., Самара, Самарский государственный университет, 2017;

- Проблемы безопасности на транспорте. VIII Международная научно-практическая конференция, посвященная Году науки – Гомель. 2017;

- Ломоносовские чтения. Научная конференция. Секция механики. Москва, (2017-2019г.);

- IV Международная научно-практическая конференция Гомель, 2018;

В заключении приводятся основные результаты диссертации.

**Личный вклад автора.** Основные положения диссертации получены лично автором, либо при непосредственном его участии, что подтверждено публикациями.

**Публикации.** Основные материалы диссертации опубликованы в восемнадцати печатных работах, из них 2 в рецензируемых журналах, включенных в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, соискание ученой степени доктора наук, 17 в сборниках трудов конференций и тезисов докладов.

**Структура и объем диссертации.** Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения, списка использованных источников (167 наименований). Общий объем диссертации включает 97 страниц, включая 28 рисунков.

В первой главе приводится подробный обзор современного состояния исследований, приведена постановка нестационарных контактных задач для абсолютно твердых ударников и упругого полупространства с полостями. Рассматриваются нестационарные задачи для однородного упруго полупространства  $y \geq 0$ , имеющего заглубленную полость, ограниченную гладкой кривой  $\gamma$ . Для описания движения полупространства используем прямоугольную декартову систему координат. Приводится замкнутая постановка задачи, включающая уравнения движения упругого полупространства, условия контакта, начальные и граничные условия на границе полупространства и границе полости, и нестационарные объемные функции влияния для упругой плоскости.

Во второй главе уделяется внимание разработке метода и алгоритма решения плоских нестационарных задач для областей произвольной геометрии, базирующемся на динамической теореме взаимности работ двумерной нестационарной теории упругости и формулах Соммильяны, которые использованы для формирования разрешающих уравнений

нестационарных задач для двумерных областей произвольной геометрии. Система разрешающих уравнений дополняется выбором контрольных решений и формированием дискретного аналога системы разрешающих уравнений.

В третьей главе приводится постановка нестационарной контактной задачи о воздействии штампа на полупространство из первой главы, описание алгоритма решения и примеры расчетов. Система разрешающих уравнений и алгоритм решения, в котором учитывается частичный отрыв граничных поверхностей ударника и полупространства, применяются к решению конкретной нестационарной контактной задачи.

В заключении сформулированы основные результаты работы.



# ГЛАВА 1. ПОСТАНОВКА НЕСТАЦИОНАРНЫХ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ АБСОЛЮТНО ТВЕРДЫХ УДАРНИКОВ И УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА С ПОЛОСТЯМИ

## § 1.1. Современное состояние исследований

Решение задач линейной теории упругости с простой геометрией, начальными и граничными условиями и нагрузками приведено во множестве источников. К одной из фундаментальных задач теории упругости относится вторая краевая задача, а ее частным случаем считается «Задача Буссинеска» (1885), посвященная изучению воздействия сосредоточенной силы на поверхность линейно-деформируемого полупространства [63]. Такие задачи используются при решении ряда прикладных задач, например, для определения напряжений в основании от действия нагрузки, равномерно распределенной по прямоугольной площадке (Ляв А., 1935; Кропоткин В.Г., 1938) [71]. Так же задача о действии сосредоточенной силы в упругом полупространстве рассмотрена в работе Лурье А.И. [70].

Задача о сосредоточенной силе, приложенной перпендикулярно к поверхности упругой изотропной полуплоскости, известна как задача Фламана. Ее решение можно найти во многих курсах теории упругости, например, [31, 66, 163]. Задача Фламана (1892) посвящена распределению напряжений в линейно-деформируемом массиве при действии вертикальной погонной сосредоточенной нагрузки в случае плоской постановки. Решение такой задачи используется при исследовании воздействий распределенных нагрузок по полосе конечной ширины (Герсеванов Н.М., 1933; Флорин В.А., 1959) [7, 44, 79, 82].

Один из типов краевых задач для упругой полуплоскости относится к случаю, когда на границе заданы и смещения, и напряжения. Такие задачи известны как смешанные краевые задачи. Это задача о вдавливании в полуплоскость жесткого штампа со «смазкой» на контакте.

Для решения смешанных краевых задач имеется аналитический аппарат. Например, можно применить методы, в основе которых лежит теория функций комплексного переменного [160, 163] или интегральные преобразования [158].

Известно, что задачи Буссинеска и Фламана относятся к статическим задачам.

Впервые задачу о динамике упругого изотропного полупространства при задании в виде дельта-функции нормального напряжения на его границе рассмотрел Lamb Н. [141]. В современной литературе она носит название «задачи Лэмба» [141].

Решение плоской задачи Лэмба приведено во многих работах. Как правило, для построения решения используются интегральные преобразования Лапласа и Фурье [49]. Различными являются методы построения оригиналов. В монографиях Слепяна Л.И. [102], Слепяна Л.И. и Яковлева Ю.С. [103], совместное обращение преобразований Лапласа и Фурье проведено с использованием однородности изображения и аналитического представления [63] с использованием функций влияния рассмотрен произвольный закон движения сосредоточенной нагрузки. Результаты получены для равномерного и равноускоренного движения.

Учет трехмерного характера возмущений, вносимых движущейся сосредоточенной нагрузкой дан в [127, 128, 130, 165]. В статье [77] решена осесимметричная задача о равномерном расширении окружности, на которой сосредоточены нормальные напряжения. Обращение интегральных преобразований Лапласа и Ханкеля проведено асимптотическими методами.

Использование моделей сред с усложненными свойствами (вязкость, неоднородность, анизотропия) даже в рамках линейной теории приводит к существенному увеличению математических трудностей.

Исторический обзор метода граничных элементов можно найти в работе [31].

В то время как главные свойства дифференциальных уравнений были хорошо уяснены в девятнадцатом веке, первое строгое исследование интегральных уравнений классических видов было опубликовано Фредгольмом в 1905г. С тех пор они интенсивно изучались, особенно в связи с теорией поля и имеется много учебников излагающих эти результаты [68, 140].

Значительный вклад в формальное понимание интегральных уравнений был сделан позднее Михлиным С.Г. и другими учеными исследователями [74-76, 145, 147, 151-157, 161, 164, 166], которые приводят такие уравнения, как со скалярными, так и с векторными подынтегральными выражениями и в частности с особенностями и разрывами в области интегрирования. Все МГЭ имеют общее происхождение и делятся на три различные, но тесно связанные между собой категории.

1. Прямой вариант МГЭ. В этом варианте функции входящие в интегральные уравнения являются реальными, имеющими физический смысл переменными задачи. Так, например, в задачах теории упругости такое решение интегрального уравнения должно сразу давать все усилия и смещения на границе, а внутри тела они должны быть получены из граничных значений численным интегрированием. Некоторые алгоритмы, основанные на этом подходе, описаны Крузом, Лаша, Риццо, Шоу, Уотсоном и другими [123-144] и названы ими методами граничных интегральных уравнений.

2. Полупрямые варианты МГЭ. В качестве альтернативы можно составлять интегральные уравнения для неизвестных функций, аналогичных функциям напряжений в теории упругости. Когда получено решение для этих функций простое дифференцирование даст распределение внутренних напряжений. Этот подход известен под названием полупрямого метода, был развит Генри, Джесуоном, Понтером, Римом и Симмом [136-138, 162].

3. Непрямые варианты МГЭ. В непрямом варианте интегральные уравнения полностью выражаются через фундаментальное сингулярное решение исходных дифференциальных уравнений, распределенное с

неизвестной плотностью по границам рассматриваемой области (фундаментальное сингулярное решение дифференциальных уравнений может быть, например, функцией Грина для неограниченной области, отсюда следует что МГЭ и так называемые методы Грина тесно связаны). Сами по себе функции плотности не имеют определенного физического смысла, но когда они найдены (численным решением интегральных уравнений) значения параметров решения везде внутри тела могут быть получены из них простым интегрированием. Развитием алгоритмов, основанных на таком подходе, описаны Бенерджи, Баттерфилдом, Хессом, Джесуоном, Массоне, Оливейрой, Симмом, Томлином, Уотсоном и другими [132-162].

Большинство одно-, двух-, и трехмерных задач механики сплошной среды (с учетом анизотропии, неоднородности и нелинейности), описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных успешно решались при помощи МГЭ.

Взаимодействие упругих тел с полупространством описаны в трудах Горшкова А.Г., Тарлаковского Д.В. [43-45], Федотенкова Г.В. [9-25, 65, 88, 104], Игумнова Л.А. [8, 28, 29, 59], Сеймова В.М. [99], Александрова В.М. [6], Воровича И.И., Александрова В.М., Бабешко В.А. [37], Галина Л.А. [38-39] и других.

Применение методов решения дифференциальных уравнений в задачах механики материалов и конструкций приведены в трудах Хроматова В.Е. [51-54, 109, 110], решение задач механики твердого тела с использованием математических программ и вычислительных систем [120], механика материалов и конструкций, и сложные виды ее деформации [83, 84].

В работе Айзиковича С.М., Волкова С.С., Мелконяна А.В. [3] получено в аналитическом виде приближенное решение задачи об изгибе круглой многослойной пластины постоянной толщины, лежащей на упругом основании сложной структуры. Простейшая осесимметричная задача контактного взаимодействия как для слоистого, так и для непрерывно-неоднородного покрытия упругого полупространства рассмотрена в работе

[34]. Задача об изгибе пластины на упругом изотропном и однородном основании рассматривалась в работах [33, 41, 60, 87, 107-112]. Решение строилось путем представления контактных напряжений в виде степенного ряда с последующим определением коэффициентов разложения из бесконечной алгебраической системы уравнений.

В работе Босакова С.В. [33] приводятся решения двух контактных задач для кольцевого штампа на упругом полупространстве под действием осесимметрично приложенной силы и момента. Обе задачи формулируются в виде тройных интегральных уравнений, которые способом подстановки сводятся к одному интегральному уравнению. В случае осесимметричной задачи ядро интегрального уравнения зависит от произведения трех функций Бесселя. Используя формулу для представления двух функций Бесселя в виде двойного ряда по произведениям гипергеометрической функции на функцию Бесселя, задача сводится к функциональному уравнению, связывающему перемещения штампа с неизвестными коэффициентами распределения контактных напряжений. Полученное функциональное уравнение сводится к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений, которая решается способом усечения.

В работе Архиповой И.М., Чиркова В.Ю. [26] рассмотрена задача медленного динамического контактного взаимодействия системы удаленных друг от друга штампов с поверхностью упругого полупространства при отсутствии сил трения в предположении, что диаметры площадок контакта малы по сравнению с минимальным расстоянием между штампами, а время пробега сдвиговой волной – расстояния, равного диаметру штампа, сопоставимо с временным масштабом процесса.

В работе Подковалихиной Е.А., Пьянковой Ю.В., Романиченко Г.В. [89] полупространством с цилиндрическим включением можно моделировать шахты, трубопроводы и другие конструкции. Для расчета таких сооружений на прочность необходимо уметь решать соответствующие контактные задачи. Изучая литературу за последние годы, удалось обнаружить близкие по

тематике публикации [49, 81, 27, 73]. В работе [49] рассматривалась контактная задача о давлении упругого штампа на упругое полупространство с начальными напряжениями. В статье [81] исследовались осесимметричные контактные задачи для двухслойного упругого полупространства с кольцевой или круговой трещиной на границе раздела слоев. В работе [27], которая является продолжением работы [81], исследовались контактные задачи для тел с начальными напряжениями для случаев жесткого и упругого штампов, а также влияние начальных напряжений на основании характеристики контактного взаимодействия. В статье [73] рассматривалась задача о взаимодействии произвольного гладкого штампа, ограниченного поверхностью вращения, с упругим многослойным основанием без дефектов. Были определены кольцевые области отставания штампа от поверхности основания. Постановка и решение этих задач базируются на специальной регуляризации решения первой основной краевой задачи теории упругости для отдельного слоя при произвольных нормальной и касательной нагрузках на его граничных плоскостях, которое строится методом преобразования Ханкеля с обеспечением сходимости интегралов для всех напряжений и перемещений. Вопрос о получении численных результатов решения контактной задачи для полупространства с цилиндрическим включением оставался открытым.

В работе Александрова В.М., академика Горячевой И.Г., Торской Е.В. [5] предложен численно-аналитический метод нахождения распределения контактного давления и неизвестной области контакта для гладкого штампа, скользящего с постоянной скоростью без трения по границе вязкоупругого полупространства. Задача решается в квазистатической постановке путем построения функции Грина для вязкоупругого полупространства (аналога функции Буссинеска) при скольжении по нему с постоянной скоростью сосредоточенной силы. Свойства материала характеризуются спектром времен релаксации. Контактные задачи о скольжении и качении линейно вязкоупругих тел в плоской постановке рассмотрены в [58, 46, 47, 93, 135, 148,

149]. В этих работах определяются распределение контактного давления и его зависимость от скорости движения, а также сила сопротивления движению, обусловленная релаксационными свойствами вязкоупругого тела. Класс пространственных контактных задач представлен в основном задачами о вдавлении штампа в вязкоупругое полупространство [30, 47, 55, 56, 61].

В работе Ткачук Н.Н., Ткачук А.Н. [105] поставлена и решена задача о взаимодействии плоского штампа с упругим полупространством. Задача сведена к интегральному уравнению. Для его решения использован метод дискретных особенностей. Проведен параметрический анализ модели.

В работе Кренёва Л.И., Айзиковича С.М., Митрина Б.И. [67] рассматривается осесимметричная квазистатическая задача термоупругости о внедрении цилиндрического штампа с плоской подошвой, на которой поддерживается постоянная температура, в функциональноградиентное полупространство, модуль упругости, коэффициент Пуассона, коэффициенты теплопроводности и линейного расширения которого непрерывно изменяются в приповерхностном слое независимо друг от друга. Вне контактной зоны поверхность идеально теплоизолирована и свободна от напряжений. Первые аналитические решения задачи об индентировании полубесконечного изотропного упругого тела осесимметричным нагреваемым штампом были получены в работах [32, 159]. Связанным задачам термоупругости были посвящены монографии Новацкого В. [150] и Карнаухова В.Г. [64]. Контактные задачи термоупругости рассматривались в статье [129] и последующих работах Грилицкого Д.В. [48] и его соавторов. В работах Дж. Барбера (например, [119]) изучались задачи, связанные с контактом движущихся частей механизмов. Свой вклад в развитие термоупругих контактных задач также внесли Burton R.A., Noda N., Паук В. и многие другие. Из последних работ, рассматривающих задачу о внедрении горячего штампа, можно отметить [139].

Решение задач линейной теории упругости с относительно простой геометрией, граничными условиями и нагрузками приведено во множестве

источников, включая [133-136]. Расчет конструкций на упругом основании приведен в работах Горбунова-Посадова М.И. [40-41], Сеницына А.П. [100]. В механике грунтов упругую модель используют с учетом того, что песчано-глинистые грунты на первых стадиях приложения нагрузок деформируются линейно, но не упруго. По этой причине упругую модель называют линейно-деформируемой. Понятие модуль упругости заменяют понятием модуля деформации, а коэффициент Пуассона – коэффициентом поперечного расширения грунта. При этом оба параметра являются независимыми и оба должны определяться из испытаний. При решении задач совместного расчета сооружений и их оснований выполняют с помощью различных численных методов: методы конечных, граничных, дискретных элементов. Наибольшее распространение на практике получил метод конечных элементов [94-96]. Практические аспекты применения метода конечных элементов для решения задач механики грунтов и строительной механики изложены в работах [42, 92].

В работе Александрова А.И., Грабко Е.В [4] получено численное решение статической пространственной контактной задачи о вдавлении прямоугольного штампа с плоским основанием в упругое шероховатое полупространство при наличии трения Кулона и неизвестным заранее зонами сцепления и проскальзывания. Учет шероховатости в этой задаче осуществлялся на основе сферической модели микровыступов путем введения в выражения относительных смещений взаимодействующих тел нелинейных слагаемых, характеризующих смятие и сдвиг поверхностных микронеровностей.

В работе Айзиковича С.М., Васильева А.С., Волкова С.С. [2] получено полуаналитическое решение контактной задачи о внедрении конического штампа в полупространство с неоднородным по глубине покрытием. Модуль Юнга и коэффициент Пуассона в покрытии изменяются с глубиной по произвольному закону. Решение является асимптотически точным для больших и малых значений геометрического параметра задачи (отношение толщины покрытия к радиусу зоны контакта). Построены численные значения



контактных напряжений на примере линейного изменения модуля Юнга в покрытии.

В работе Васильева В.В., Лурье С.А. [35] рассматриваются две задачи теории упругости – задача Буссинеска о действии сосредоточенной силы на полупространство и связанная с ней задача о взаимодействии полупространства с цилиндрическим жестким штампом с плоским основанием. В классической постановке решения этих задач являются сингулярными. В задаче Буссинеска перемещение под силой оказывается бесконечно большим, а в задаче о штампе бесконечным является давление на границе штампа. В работе обсуждаемые задачи решаются на основе соотношений обобщенной теории упругости, при выводе которых рассматривается не традиционный бесконечно малый элемент среды, а элемент, обладающий малыми, но конечными размерами. Структурный параметр среды, входящий в решения, определяется экспериментально. Полученные обобщенные решения рассматриваемых задач являются регулярными.

В работе Ярцевской Н.А. [113] в рамках линеаризованной теории упругости рассмотрена пространственная контактная задача о давлении жесткого кольцевого штампа на полупространство с начальными напряжениями без учета сил трения. Исследования представлены в общем виде для теории больших начальных деформаций и двух вариантов теории малых начальных деформаций при произвольной структуре упругого потенциала. Численный анализ представлен в виде графиков.

В работе Пожарского Д.А. [90] рассмотрены трехмерные контактные задачи теории упругости о взаимодействии жестких штампов с неоднородным слоем, материал которого характеризуется переменным по глубине коэффициентом Пуассона и постоянным модулем сдвига. Модуль продольной упругости также изменяется по глубине соответствующим образом. Другая грань слоя лежит без трения на недеформируемом основании или на основании Винклера. Задачи сведены к интегральному уравнению

относительно контактных давлений, для ядра которого построены точные выражения. При заранее неизвестной области контакта для решения применен метод нелинейных граничных интегральных уравнений, который позволяет одновременно определить область контакта и давления в этой области. Расчеты сделаны для пирамидального и конического штампов при изменении относительной толщины слоя и параметров закона неоднородности. Ранее для аналогичных задач с более сложными законами неоднородности использовалась аппроксимация символа ядра интегральных уравнений. Рассмотренный тип неоднородности можно считать простой моделью, на которой можно установить основные эффекты контактного взаимодействия.

В работе Пожарского Д.А., Давтяна Д.Б. [91] проведено сравнение точных решений двух контактных задач с неизвестной областью контакта о внедрении эллиптических штампов в трансверсально изотропное упругое полупространство. В первой задаче, названной «традиционной», граница полупространства параллельна плоскостям изотропии. Здесь возможна осевая симметрия для кругового штампа. Во второй задаче, названной «нетрадиционной», граница полупространства перпендикулярна плоскостям изотропии. Здесь осевая симметрия в принципе невозможна: даже для кругового штампа область контакта эллиптическая. Для обеих задач сравнены силы, требуемые для внедрения штампа на заданную величину, и площади возникающих областей контакта.

В работе Скобельцына С.А., Федотова И.С., Титовой А.С. [101] рассматривается решение задачи дифракции плоской гармонической звуковой волны на упругом шаре с полостью вблизи идеальной плоскости. Внешний слой шара является неоднородным. Решение проводится путем расширения области задачи до полного пространства и введения дополнительного препятствия, являющегося копией первого шара, расположенной зеркально по отношению к плоскости. Решение проводится на основе линейной теории упругости и модели распространения малых возмущений в идеальной жидкости. Представлены результаты расчета диаграмм направленности

рассеянного звукового поля в дальней зоне, которые показывают влияние геометрических и материальных параметров неоднородного препятствия на рассеяние звука.

В работе Деткова В.А. [50] дается анализ методов и конструкций невзрывных источников сейсмических волн, используемых при сейсморазведочных работах на нефть и газ.

В работе Сабо И.И., Толок В.А. [97] строится решение двумерной задачи теории упругости (плоская деформация) о действии штампа на упругую полуплоскость при помощи символического метода Власова В.З. и точного решения гармонического уравнения для полуплоскости. Замена символических функций соответствующими гармоническими функциями позволяет получить точное решение рассматриваемой задачи.

В работе Айзиковича С.М., Васильева А.С., Волкова С.С. [1] предлагается эффективный метод решения осесимметричных статических контактных задач теории упругости для непрерывно-неоднородного (функционально-градиентного) слоя сложной структуры, позволяющий получить приближенное решение задачи в аналитическом виде. Построенное решение является асимптотически точным как для больших, так и для малых значений характерного геометрического параметра задачи.

В работе Мхитаряна С.М., Шекияна А.Л., Шекияна Л.А. [80] рассматривается осесимметричная контактная задача о вдавливании круглого штампа с плоским основанием в упругое шероховатое полупространство, причем шероховатость учитывается в рамках известной модели, когда локальные поверхностные смещения пропорциональны некоторой степени контактных давлений в этой же точке.

В работе [106] Украинец В.Н., используя решение задачи о действии на упругое полупространство нагрузки, равномерно движущейся по поверхности круговой цилиндрической полости вдоль ее образующей параллельной свободной границе полупространства исследует напряженно-деформированное состояние земной поверхности тоннеля при воздействии на

него бегущих нормальных осесимметричных периодических и аperiodических нагрузок.

В работе Власова И.А. [36] рассматриваются общие свойства уравнений пространственной задачи теории идеальной пластичности при условии пластичности Треска и напряженном состоянии, соответствующем ребру поверхности текучести. Рассмотрены особые линии в жесткопластической среде и решения в окрестности особой линии, аналогичные разложениям в лучевые ряды. На основе развитой теории решена краевая задача, возникающая при вдавливании штампа с гладким основанием в некоторое пластическое тело, которое в простейшем случае является полупространством.

В работе Молчанова А.А., Пожарского Д.А. [78] рассмотрены пространственные контактные задачи об одновременном действии на грани упругого клина на эллиптическом в плане штампе и сосредоточенной силы приложенной вне области контакта на ребре клина.

В работе Панфилова Г.В., Недошивина С.В., Гаврилина И.А. [85] решена задача о начальном вдавливании круглого в плане штампа с плоским гладким основанием в дно цилиндрической полости в жесткопластическом полупространстве в условиях осесимметричного пластического течения деформируемого материала.

В работе Панфилова Г.В., Недошивина С.В., Сухонина В.А. [86] приводится силовой анализ задачи о начальном вдавливании круглого в плане штампа с плоским гладким основанием в дно цилиндрической полости в жесткопластическом полупространстве в условиях осесимметричного пластического течения деформируемого материала.

В работе Сафарова И.И., Тешаева М.Х., Болтаева З.И. [98] рассматриваются колебания механической системы, состоящей из вязкоупругих слоев, лежащих на полуплоскости и находящихся в условиях плоской деформации под действием вертикальной гармонической нагрузки.

В работе Линника Е.Ю., Котова В.Л., Константинова А.Ю. [69] рассматривается задача о нормальном ударе и проникании жестких пространственных тел в полупространство, занимаемое упругопластической средой. Для среды проникания принимается модель линейно сжимаемой упругопластической среды при линейной зависимости предела текучести от давления (условие пластичности Мизеса–Шлейхера–Боткина). Решение задачи осуществляется численно в трехмерной постановке.

В работе Калентьева Е.А. [62] предлагается аналитический метод исследования концентрации напряжений в окрестности щелевидных полостей. В основу метода положена гипотеза о возможности оценки влияния полости на перераспределение внутренних усилий путем включения в решение фиктивных сил.

В работе Ляпина А.А., Селезнёва М.Г., Селезнёва Н.М. [72] рассматривается недеформируемый штамп с плоским основанием жестко сцепленный с верхним слоем трехслойного полупространства с полостью расположенной в одном из слоев структуры. Штамп совершает установившиеся гармонические колебания с определенной частотой колебания единичной амплитуды направленной по нормали к основанию.

В работах Звягина А.В., Куратовой Д.В. [57] исследуется напряженно-деформированное состояние упругого полупространства под действием подвижной нагрузки – штампа. Целью работы являлось получение аналитического решения в случае трансзвуковой скорости движения штампа.

## **§ 1.2. Уравнения движения упругого полупространства**

Рассматриваются нестационарные задачи для однородного упруго полупространства  $y \geq 0$ , имеющего заглубленную полость, ограниченную

гладкой кривой  $\gamma$ . Для описания движения полупространства используем прямоугольную декартову систему координат  $Oxyz$ . Ось  $Ox$  направлена вдоль невозмущенной границы полупространства, а  $Oy$  – вглубь полупространства. Полагаем, что задача является плоской – все искомые и заданные функции зависят только от двух пространственных координат  $x$ ,  $y$  и времени  $t$ . При этом вектор перемещений  $\mathbf{u}$  имеет две отличные от нуля компоненты:  $u(x, y, t)$  – вдоль оси  $Ox$  и  $w(x, y, t)$  – вдоль оси  $Oy$ .

Введем систему безразмерных величин (штрихом обозначены размерные параметры)

$$\begin{aligned} x = \frac{x'}{L}, \quad y = \frac{y'}{L}, \quad \tau = \frac{c_1 t}{L}, \quad u = \frac{u'}{L}, \quad w = \frac{w'}{L}, \quad F_i = \frac{F_i' L}{\lambda + 2\mu}, \\ \eta = \frac{c_1}{c_2}, \quad c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad c_2^2 = \frac{\mu}{\rho}, \quad \sigma_{ij} = \frac{\sigma_{ij}'}{\lambda + 2\mu}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь  $L$  – некоторый характерный размер,  $c_1$  и  $c_2$  – скорости распространения волн растяжения-сжатия и сдвига;  $F_i$ ,  $i = 1, 2$  – компоненты массовых сил;  $\lambda$ ,  $\mu$  и  $\rho$  – упругие постоянные Ламе и плотность среды;  $\tau$  – безразмерное время,  $\sigma_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2$  – компоненты тензора напряжений. Здесь и далее индекс «1» у величины соответствует координате  $x$ , а индекс «2» – координате  $y$ .

Далее все уравнения и соотношения будем записывать в безразмерном виде с учётом введённой системы безразмерных величин (1.1).

Движение упругой среды описывается уравнениями Ламе [66]

$$\begin{aligned} \ddot{u} &= (1 - \eta^{-2}) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \eta^{-2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + F_1(x, y, \tau), \\ \ddot{w} &= (1 - \eta^{-2}) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \eta^{-2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + F_2(x, y, \tau). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Точками здесь и далее обозначены производные по безразмерному времени  $\tau$ .

Для системы уравнений (1.2) можно использовать следующую индексную запись

$$\ddot{u}_k = (1 - \eta^{-2}) \frac{\partial \theta}{\partial x_k} + \eta^{-2} \Delta u_k + F_k(x, y, \tau), \quad k=1,2, \quad (1.3)$$

где  $u_1 = u$ ,  $u_2 = w$ ,  $\theta = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial u_k}{\partial x_k}$ ,  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  – двумерный оператор Лапласа. Здесь и далее по повторяющимся латинским индексам проводится суммирование от 1 до 2.

Введём также *дифференциальный оператор упругого равновесия*

$$L_k(\mathbf{u}) = - (1 - \eta^{-2}) \frac{\partial \theta}{\partial x_k} - \eta^{-2} \Delta u_k, \quad (1.4)$$

Тогда уравнение (1.3) можно записать в операторной форме

$$\ddot{u}_k + L_k(\mathbf{u}) = F_k(x, y, \tau). \quad (1.5)$$

Если ввести *векторный оператор упругого равновесия*

$$\mathbf{L} = [L_1(\mathbf{u}), L_2(\mathbf{u})], \quad (1.6)$$

То система уравнений (1.5) может быть записана в векторной форме

$$\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{L}(\mathbf{u}) = \mathbf{F}. \quad (1.7)$$

Ненулевые компоненты тензора деформации  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{xy}$  и  $\varepsilon_{yy}$  связаны с перемещениями соотношениями Коши:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (1.8)$$

Напряжения  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{xy}$  и  $\sigma_{yy}$  связаны с деформациями законом Гука

$$\sigma_{xx} = \varepsilon_{xx} + (1 - 2\eta^{-2}) \varepsilon_{yy}, \quad \sigma_{xy} = 2\eta^{-2} \varepsilon_{xy}, \quad \sigma_{yy} = \varepsilon_{yy} + (1 - 2\eta^{-2}) \varepsilon_{xx}. \quad (1.9)$$

Закон Гука можно записать в индексной форме

$$\sigma_{ij} = (1 - 2\eta^{-2}) \theta \delta_{ij} + 2\eta^{-2} \varepsilon_{ij}. \quad (1.10)$$

### § 1.3. Условия контакта, начальные и граничные условия

Предполагаем, что в начальный момент времени  $\tau = 0$  полупространство находится в невозмущенном состоянии, что соответствует нулевым начальным условиям

$$u(x, z, 0) = \dot{u}(x, z, 0) = w(x, z, 0) = \dot{w}(x, z, 0) = 0. \quad (1.11)$$

На границе полупространства  $y = 0$  могут быть заданы следующие типы граничных условий.

1. Граничные условия в перемещениях:

$$u(x, 0, \tau) = U(x, \tau), \quad w(x, 0, \tau) = W(x, \tau), \quad (1.12)$$

где  $U(x, \tau)$  и  $W(x, \tau)$  – заданные функции, характеризующие касательные и нормальные перемещения границы полупространства.

2. Граничные условия в напряжениях:

$$\sigma_{xy}(x, 0, \tau) = p_1(x, \tau), \quad \sigma_{yy}(x, 0, \tau) = p_2(x, \tau), \quad (1.13)$$

где  $p_1(x, \tau)$  и  $p_2(x, \tau)$  – заданные функции, характеризующие касательные и нормальные напряжения на границе полупространства.

3. Смешанные граничные условия:

$$\begin{aligned} u(x, 0, \tau) = U(x, \tau), \quad w(x, 0, \tau) = W(x, \tau), \quad x \in \Gamma_u; \\ \sigma_{xy}(x, 0, \tau) = p_1(x, \tau), \quad \sigma_{yy}(x, 0, \tau) = p_2(x, \tau), \quad x \in \Gamma_\sigma, \end{aligned} \quad (1.14)$$

где  $\Gamma_u$  – часть границы  $y = 0$ , на которой заданы перемещения, а  $\Gamma_\sigma$  – часть границы  $y = 0$ , на которой заданы напряжения.

На бесконечности перемещения предполагаются ограниченными

$$u|_{r \rightarrow \infty} = O(1), \quad w|_{r \rightarrow \infty} = O(1), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (1.15)$$

На границе полости  $\gamma$  также возможно задание одного из трех типов граничных условий.

1. Граничные условия в перемещениях:

$$u_s|_\gamma = U_s(s, \tau), \quad u_n|_\gamma = U_n(s, \tau), \quad (1.16)$$



где  $u_s = (\mathbf{u}, \mathbf{s}) = u_k v_k$  и  $u_n = (\mathbf{u}, \mathbf{n}) = u_k n_k$  – проекции вектора перемещений на направление касательной и нормали к контуру  $\gamma$ ;  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{s}$  – единичные векторы внешней нормали и касательной к контуру  $\gamma$ .  $U_s(s, \tau)$ ,  $U_n(s, \tau)$  – заданные функции длины дуги кривой  $\gamma$  и времени, характеризующие касательные и нормальные перемещения на границе полости.

2. Граничные условия в напряжениях:

$$\sigma_s|_{\gamma} = p_s(s, \tau), \quad \sigma_n|_{\gamma} = p_n(s, \tau), \quad (1.17)$$

где  $\sigma_s$  и  $\sigma_n$  – касательные и нормальные напряжения на контуре  $\gamma$ ;  $p_s(s, \tau)$  и  $p_n(s, \tau)$  – функции длины дуги кривой  $\gamma$  и времени, характеризующие касательную и нормальную нагрузку на границе полости.

3. Смешанные граничные условия:

$$\begin{aligned} u_s|_{\gamma_u} &= U_s(s, \tau), \quad u_n|_{\gamma_u} = U_n(s, \tau), \\ \sigma_s|_{\gamma_\sigma} &= p_s(s, \tau), \quad \sigma_n|_{\gamma_\sigma} = p_n(s, \tau), \end{aligned} \quad (1.18)$$

где  $\gamma_u$  – часть границы полости, на которой заданы перемещения, а  $\gamma_\sigma$  – часть границы полости, на которой заданы нагрузки.

В случае контактного взаимодействия границы полупространства  $y = 0$  с абсолютно твёрдым прямоугольным в плане штампом, имеющим полуширину  $b$  (см. рисунок 1.1), в области контакта  $x \in [-b, b]$  возможна реализация следующих условий контакта ( $w_s = w_s(\tau)$  – осадка штампа, которая зависит от времени) [43].

1. Условия свободного проскальзывания.

$$w|_{y=0} = w_s, \quad \sigma_{xy}|_{y=0} = 0, \quad \sigma_{yy}|_{y=0} < 0, \quad x \in [-b, b]. \quad (1.19)$$

2. Условия жесткого сцепления.

$$w|_{y=0} = w_s, \quad u|_{y=0} = 0, \quad \sigma_{yy}|_{y=0} < 0, \quad x \in [-b, b]. \quad (1.20)$$

3. Контакт с трением.

$$w|_{y=0} = w_s, \quad \sigma_{xy}|_{y=0} = k_T \sigma_{yy}|_{y=0}, \quad \sigma_{yy}|_{y=0} < 0, \quad x \in [-b, b], \quad (1.21)$$

где  $k_T$  – коэффициент трения.

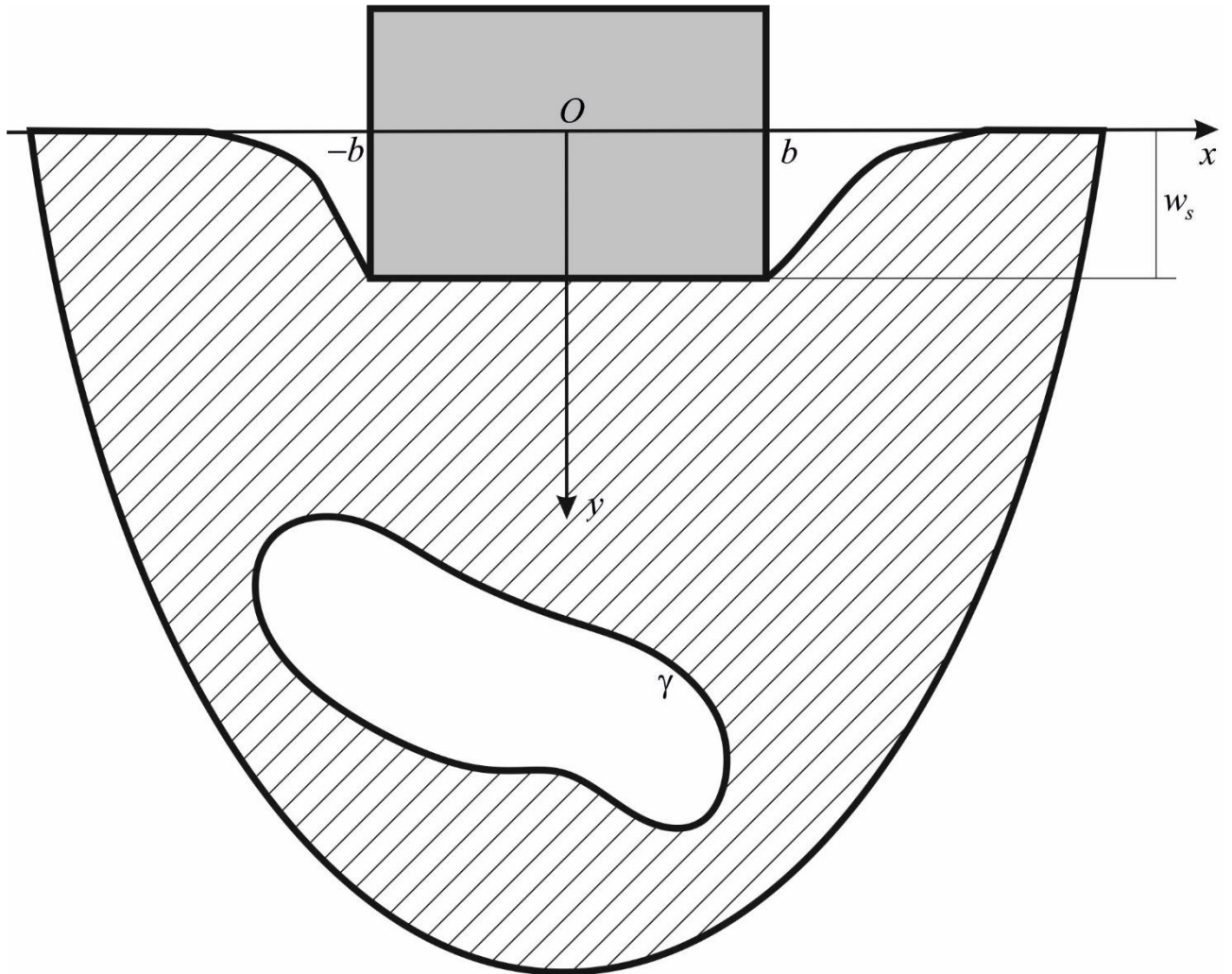


Рисунок 1.1. Контактное взаимодействие границы полупространства  $y = 0$  с абсолютно твёрдым прямоугольным в плане штампом

### § 1.4. Нестационарные объемные функции влияния для упругой плоскости

Для решения поставленных в § 1.1-§ 1.3 задач нам понадобятся функции влияния для упругой плоскости  $Oxy$  [43-45]. Здесь под этими функциями влияния мы будем понимать перемещения  $G_{km}^u(x, y)$  и напряжения  $G_{klm}^\sigma(x, y)$  как ограниченные на бесконечности решения задачи (1.5)-(1.11) для безграничной упругой плоскости при воздействии единичных сосредоточенных массовых сил, приложенных в начале координат (для сокращения записи здесь и далее  $x_1$  соответствует координате  $x$ , а  $x_2$  – координате  $y$ ):

$$\begin{aligned} \ddot{G}_{km}^u - L(G_{km}^u) &= \delta_{km} \delta(\tau) \delta(x_1, x_2), \\ \theta_m &= \frac{\partial G_{1m}^u}{\partial x_1} + \frac{\partial G_{2m}^u}{\partial x_2} = \frac{\partial G_{km}^u}{\partial x_k} = G_{11m}^\varepsilon + G_{22m}^\varepsilon = G_{kkm}^\varepsilon, \\ G_{klm}^\varepsilon &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial G_{km}^u}{\partial x_l} + \frac{\partial G_{lm}^u}{\partial x_k} \right), \\ G_{klm}^\sigma &= (1 - 2\eta^{-2}) \theta_m \delta_{kl} + 2\eta^{-2} G_{klm}^\varepsilon. \end{aligned} \tag{1.22}$$

Применим к (1.22) прямое двумерное интегральное преобразование Фурье по пространственным координатам  $x_1$  и  $x_2$  и интегральное преобразование Лапласа по времени

$$F^{FL}(q_1, q_2, s) = \int_0^\infty e^{-s\tau} d\tau \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty F(x_1, x_2, \tau) e^{i(q_1 x_1 + q_2 x_2)} dx_1 dx_2.$$

Здесь  $s$  – параметр преобразования Лапласа,  $q_1$  и  $q_2$  – параметры преобразования Фурье.

С учетом свойств интегральных преобразований [31] и того, что  $[\delta(t)\delta(x_1, x_2)]^{FL} = 1$ , в пространстве преобразований получаем

$$s^2 G_{km}^{uFL} + iq_k (1 - \eta^{-2}) \theta_m^{FL} + \eta^{-2} q^2 G_{km}^{uFL} = \delta_{km}, \tag{1.23}$$

$$i\theta_m^{FL} = q_k G_{km}^{uFL}, \quad (1.24)$$

$$G_{klm}^{\varepsilon FL} = -\frac{i}{2} (q_l G_{km}^{uFL} + q_k G_{lm}^{uFL}), \quad (1.25)$$

$$G_{klm}^{\sigma FL} = (1 - 2\eta^{-2}) \theta_m^{FL} \delta_{kl} + 2\eta^{-2} G_{klm}^{\varepsilon FL}, \quad (1.26)$$

где  $q^2 = q_1^2 + q_2^2$ .

Умножая (1.23) на  $q_k$  с учетом (1.24) и правилами суммирования приходим к уравнению

$$is^2 \theta_m^{FL} + iq^2 (1 - \eta^{-2}) \theta_m^{FL} + \eta^{-2} iq^2 \theta_m^{FL} = q_m, \quad (1.27)$$

откуда находим

$$i\theta_m^{FL} = \frac{q_m}{s^2 + q^2}. \quad (1.28)$$

Подставляя (1.28) в (1.23), находим изображения функций влияния для перемещений

$$G_{km}^{uFL} = \frac{\eta^2 \delta_{km}}{\eta^2 s^2 + q^2} - \frac{q_k q_m}{s^2} \left( \frac{1}{q^2 + s^2} - \frac{1}{\eta^2 s^2 + q^2} \right). \quad (1.29)$$

Подставляя (1.29) в (1.25) находим изображения функций влияния для деформаций

$$G_{klm}^{\varepsilon FL} = -\frac{i}{2} \left[ \frac{\eta^2 q_k \delta_{lm}}{\eta^2 s^2 + q^2} + \frac{\eta^2 q_l \delta_{km}}{\eta^2 s^2 + q^2} - \frac{2q_k q_l q_m}{s^2} \left( \frac{1}{q^2 + s^2} - \frac{1}{\eta^2 s^2 + q^2} \right) \right]. \quad (1.30)$$

Для построения оригиналов (1.29) и (1.30) используем последовательное обращение интегральных преобразований Фурье и Лапласа с помощью таблиц, приведенных в [43] (верхние индексы « $F^{-1}$ » и « $L^{-1}$ » у функции означают её обратное преобразование Фурье и Лапласа соответственно):

$$\left[ \frac{\eta^2}{\eta^2 s^2 + q^2} \right]^{F^{-1}L^{-1}} = \frac{\eta^2}{2\pi} (\tau^2 - \eta^2 r^2)_+^{-1/2},$$

$$\begin{aligned}
& \left[ \frac{1}{s^2} \frac{q_k q_m}{\eta^2 s^2 + q^2} \right]^{F^{-1}L^{-1}} = \\
& = \frac{\eta}{2\pi r} \left[ \left( \delta_{km} - \frac{2x_k x_m}{r^2} \right) \frac{(\tau^2 - \eta^2 r^2)_+^{1/2}}{\eta r} - \frac{\eta x_k x_m}{r} (\tau^2 - \eta^2 r^2)_+^{-1/2} \right], \quad (1.31) \\
& \left[ \frac{\eta^2 q_k}{\eta^2 s^2 + q^2} \right]^{F^{-1}L^{-1}} = -\frac{i\eta^3 x_k}{2\pi r} [sK_1(\eta sr)]^{L^{-1}} = i \frac{\eta^4 x_k}{2\pi} (\tau^2 - \eta^2 r^2)_+^{-3/2}, \\
& \left[ \frac{1}{s^2} \frac{q_k q_l q_m}{\eta^2 s^2 + q^2} \right]^{F^{-1}L^{-1}} = \\
& = -\frac{i}{2\pi r^4} \left\{ (x_k \delta_{lm} + x_l \delta_{km} + x_m \delta_{kl}) (2\tau^2 - \eta^2 r^2) (\tau^2 - \eta^2 r^2)_+^{-1/2} - \right. \\
& \quad \left. - \frac{x_k x_l x_m}{r^2} (8\tau^4 - 12\eta^2 r^2 \tau^2 + 3\eta^4 r^4) (\tau^2 - \eta^2 r^2)_+^{-3/2} \right\}.
\end{aligned}$$

Подставляя (1.31) в (1.29) и (1.30), находим оригиналы искомым функций влияния

$$\begin{aligned}
G_{km}^u(x, y, \tau) &= \\
& = \frac{\delta_{km}}{2\pi r^2} \left[ \tau^2 (\tau^2 - \eta^2 r^2)_+^{-1/2} - (\tau^2 - r^2)_+^{1/2} \right] - \\
& - \frac{x_k x_m}{2\pi r^4} \sum_{j=1}^2 (-1)^j (2\tau^2 - \eta_j^2 r^2) (\tau^2 - \eta_j^2 r^2)_+^{-1/2}, \quad (1.32) \\
G_{klm}^\varepsilon(x, y, \tau) &= \frac{\eta^4}{4\pi} (x_k \delta_{lm} + x_l \delta_{km}) (\tau^2 - \eta^2 r^2)_+^{-3/2} + \\
& + \frac{1}{2\pi r^4} \sum_{j=1}^2 (-1)^j \left[ \frac{x_k x_l x_m}{r^2} (8\tau^4 - 12\eta_j^2 r^2 \tau^2 + 3\eta_j^4 r^4) (\tau^2 - \eta_j^2 r^2)_+^{-3/2} - \right. \\
& \quad \left. - (x_k \delta_{lm} + x_l \delta_{km} + x_m \delta_{kl}) (2\tau^2 - \eta_j^2 r^2) (\tau^2 - \eta_j^2 r^2)_+^{-1/2} \right], \quad (1.33) \\
G_{klm}^\sigma &= (1 - \eta^{-2}) \theta_m \delta_{kl} + 2\eta^{-2} G_{klm}^\varepsilon.
\end{aligned}$$

Очевидно, что функции влияния  $G_{km}^u$  и  $G_{klm}^\varepsilon$  (а, следовательно, и  $G_{klm}^\sigma$ ) симметричны соответственно по индексам  $k, m$  и  $k, l$ :

$$G_{km}^u = G_{mk}^u, \quad G_{klm}^\sigma = G_{lkm}^\sigma. \quad (1.34)$$

Кроме того, справедливы следующие равенства

$$\begin{aligned} G_{11}^u(x, y, \tau) &= G_{22}^u(y, x, \tau), \\ G_{112}^\sigma(x, y, \tau) &= G_{221}^\sigma(y, x, \tau), \quad G_{122}^\sigma(x, y, \tau) = G_{121}^\sigma(y, x, \tau). \end{aligned} \tag{1.35}$$

## ГЛАВА 2. МЕТОД И АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ПЛОСКИХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОБЛАСТЕЙ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

### § 2.1. Теорема взаимности работ двумерной нестационарной теории упругости

Рассмотрим некоторую двумерную область  $D$  конечную (ограниченную кривой  $\Gamma$ ) или бесконечную. Область  $D$  может быть также и полуограниченной, например, представлять собой полуплоскость.

Рассмотрим в области  $D$  два поля перемещений, задаваемых векторами  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  соответственно. Для них справедливо *тождество Бетти* [82] ( $C_{ijkl}$  – компоненты тензора упругих постоянных):

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(\mathbf{u})\varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) &= C_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\mathbf{u})\varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) = \\ &= C_{klij}\varepsilon_{ij}(\mathbf{v})\varepsilon_{kl}(\mathbf{u}) = \sigma_{kl}(\mathbf{v})\varepsilon_{kl}(\mathbf{u}) = \sigma_{ij}(\mathbf{v})\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) = a(\mathbf{u}, \mathbf{v}). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Рассмотрим интеграл  $\iint_D a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) d\Omega = \iint_D \sigma^{ij}(\mathbf{u})\varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) d\Omega$ . Применяя к нему

формулу Грина [45], получим

$$\iint_D \sigma_{ij}(\mathbf{u})\varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) d\Omega = \iint_D \sigma_{ij}(\mathbf{u}) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} d\Omega = \int_{\Gamma} \sigma_{ij}(\mathbf{u}) n_j v_i ds - \iint_D \frac{\partial \sigma_{ij}(\mathbf{u})}{\partial x_j} v_i d\Omega$$

Заметим, что  $\frac{\partial \sigma^{ij}(\mathbf{u})}{\partial x_j} = -L_i(\mathbf{u})$ ,  $\sigma_{ij}(\mathbf{u})n_j = p_i(\mathbf{u})$ , где  $p_i(\mathbf{u})$  –  $i$ -тая

компонента вектора напряжений  $\mathbf{p}$  на контуре  $\Gamma$ . Следовательно

$$\iint_D \mathbf{L}(\mathbf{u})\mathbf{v} d\Omega = \iint_D \sigma_{ij}(\mathbf{u})\varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{p}(\mathbf{u})\mathbf{v} ds. \quad (2.2)$$

Полученная формула носит название *первой формулы Бетти для оператора  $\mathbf{L}$*  [31].

Поменяем теперь в формуле (2.2)  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  местами, а затем вычтем полученное равенство из (2.2). С учетом тождества Бетти, получим *вторую формулу Бетти для оператора  $\mathbf{L}$*

$$\iint_D \mathbf{L}(\mathbf{u}) \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{p}(\mathbf{u}) \mathbf{v} ds = \iint_D \mathbf{L}(\mathbf{v}) \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{p}(\mathbf{v}) \mathbf{u} ds. \quad (2.3)$$

Пусть теперь поле перемещений  $\mathbf{u}$  задано в момент времени  $\tau$ :  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\tau)$ , а поле перемещений  $\mathbf{v}$  – в момент времени  $\tau - t$ :  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\tau - t)$ . На основании второй формулы Бетти для этих полей имеем

$$\begin{aligned} & \iint_D \mathbf{L}[\mathbf{u}(\tau)] \mathbf{v}(\tau - t) d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{p}[\mathbf{u}(\tau)] \mathbf{v}(\tau - t) ds = \\ & = \iint_D \mathbf{L}[\mathbf{v}(\tau - t)] \mathbf{u}(\tau) d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{p}[\mathbf{v}(\tau - t)] \mathbf{u}(\tau) ds. \end{aligned}$$

Интегрируя последнее равенство по  $t$  от нуля до бесконечности, получим

$$\iint_D \mathbf{L}(\mathbf{u}) * \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{p}(\mathbf{u}) * \mathbf{v} ds = \iint_D \mathbf{L}(\mathbf{v}) * \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{p}(\mathbf{v}) * \mathbf{u} ds. \quad (2.4)$$

Здесь и далее символом «\*» обозначена свертка по времени:

$$f * g = \int_0^{\infty} f(\tau - t) g(t) dt = \int_0^{\infty} g(\tau - t) f(t) dt.$$

Поля перемещений  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  удовлетворяют уравнению движения (1.7):

$$\mathbf{L}(\mathbf{u}) = \mathbf{F}(\mathbf{u}) - \ddot{\mathbf{u}}, \quad \mathbf{L}(\mathbf{v}) = \mathbf{F}(\mathbf{v}) - \ddot{\mathbf{v}}. \quad (2.5)$$

Подставляя (2.5) в (2.4), получаем

$$\begin{aligned} & \iint_D \mathbf{F}(\mathbf{u}) * \mathbf{v} d\Omega - \iint_D \ddot{\mathbf{u}} * \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{p}(\mathbf{u}) * \mathbf{v} ds = \\ & = \iint_D \mathbf{F}(\mathbf{v}) * \mathbf{u} d\Omega - \iint_D \ddot{\mathbf{v}} * \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{p}(\mathbf{v}) * \mathbf{u} ds. \end{aligned}$$

По свойствам операции свёртки  $\ddot{\mathbf{u}} * \mathbf{v} = \mathbf{u} * \ddot{\mathbf{v}}$ . Тогда окончательно получаем

$$\iint_D \mathbf{F}(\mathbf{u}) * \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{p}(\mathbf{u}) * \mathbf{v} ds = \iint_D \mathbf{F}(\mathbf{v}) * \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{p}(\mathbf{v}) * \mathbf{u} ds. \quad (2.6)$$



Полученное равенство носит название *теоремы взаимности (теоремы взаимности работ, теоремы Бетти) нестационарной теории упругости для двумерных областей.*

## § 2.2. Формула Сомильяны и основное разрешающее уравнение для плоских нестационарных задач теории упругости

В этом параграфе постановки двумерных нестационарных задач теории упругости будут сведены к разрешающим граничным интегральным уравнениям относительно искомым значений поля перемещений и напряжений на границе  $\Gamma$  рассматриваемой плоской области  $D$ . Также будут получены формулы для определения полей перемещений и напряжений во внутренних точках области  $D$ .

Пусть снова имеется некоторая плоская область  $D$  с границей  $\Gamma = \partial D$  занятая упругой средой. Пусть  $\mathbf{u} = (u, w)^T$  – поле перемещений, соответствующее заданным  $\mathbf{F}(\mathbf{u}) = (F_1, F_2)^T$  и  $\mathbf{p}(\mathbf{u}) = (p_1, p_2)^T$  объёмным и граничным силам. Продолжим заданную область  $D$  на всю координатную плоскость  $Oxy$ . Получим неограниченную плоскость с внутренним контуром  $\Gamma$ , нагруженную объёмными силами  $\mathbf{F}(\mathbf{u})$ , распределёнными лишь по области  $D$  и граничными усилиями  $\mathbf{p}(\mathbf{u})$ , распределёнными по контуру  $\Gamma$ . Наряду с полем  $\mathbf{u}$  рассмотрим другое поле перемещений  $\mathbf{v}_1$ , соответствующее распределению поля объёмных сил вида  $\mathbf{F}(\mathbf{v}_1) = \begin{pmatrix} \delta(\tau)\delta(\mathbf{x}-\xi) \\ 0 \end{pmatrix}$ , которое соответствует сосредоточенной мгновенной объёмной силе единичной интенсивности, приложенной в точке  $\xi$  в направлении оси  $Ox$ . Здесь и далее для сокращения записи будем использовать обозначения  $\mathbf{x} = (x_1, x_2) = (x, y)$ ,  $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ .

Как следует из § 1.3, решениями этой задачи являются поле перемещений  $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} G_{11}''(\mathbf{x}-\xi, \tau) \\ G_{21}''(\mathbf{x}-\xi, \tau) \end{bmatrix}$  и напряжений

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}_1) = \begin{bmatrix} G_{111}^\sigma(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}, \tau) & G_{121}^\sigma(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}, \tau) \\ G_{211}^\sigma(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}, \tau) & G_{221}^\sigma(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}, \tau) \end{bmatrix}.$$

Заметим, что справедливо тождество

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(\mathbf{v}_1) * \mathbf{u} &= (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}_1), \mathbf{n}) * \mathbf{u} = \\ &= \left[ G_{111}^\sigma(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}, \tau) \cos \alpha + G_{121}^\sigma(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}, \tau) \cos \beta \right] * u + \\ &+ \left[ G_{211}^\sigma(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}, \tau) \cos \alpha + G_{221}^\sigma(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}, \tau) \cos \beta \right] * w, \end{aligned} \quad (2.7)$$

где  $\mathbf{n} = (\cos \alpha, \cos \beta)$  – единичный вектор внешней нормали к контуру  $\Gamma$ ,  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$  – направляющие косинусы вектора  $\mathbf{n}$ .

Также заметим, что по свойству дельта-функции Дирака [31]

$$\iint_D \mathbf{F}(\mathbf{v}_1) * \mathbf{u} d\Omega = H(D)u(\boldsymbol{\xi}, \tau), \quad (2.8)$$

где  $H(\Omega)$  – характеристическая функция множества  $D$ :

$$H(D) = \begin{cases} 1, & \boldsymbol{\xi} \in D; \\ 0, & \boldsymbol{\xi} \notin D. \end{cases} \quad (2.9)$$

Применим к рассмотренным полям перемещений и напряжений формулу взаимности работ (2.6). С учётом (2.7) и (2.9) получим

$$\begin{aligned} H(D)u(\boldsymbol{\xi}, \tau) &= \iint_D \mathbf{v}_1 * \mathbf{F}(\mathbf{u}) d\Omega + \int_\Gamma \mathbf{v}_1 * \mathbf{p}(\mathbf{u}) ds - \int_\Gamma \mathbf{p}(\mathbf{v}_1) * \mathbf{u} ds = \\ &= \iint_D \left[ G_{11}^u(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}, \tau) * F_1 + G_{21}^u(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}, \tau) * F_2 \right] d\Omega + \\ &+ \int_\Gamma \left[ G_{11}^u(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}, \tau) * p_1 + G_{21}^u(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}, \tau) * p_2 \right] ds - \\ &- \int_\Gamma \left[ G_{111}^\sigma(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}, \tau) \cos \alpha + G_{121}^\sigma(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}, \tau) \cos \beta \right] * u ds - \\ &- \int_\Gamma \left[ G_{211}^\sigma(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}, \tau) \cos \alpha + G_{221}^\sigma(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}, \tau) \cos \beta \right] * w ds. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Теперь наряду с тем же полем  $\mathbf{u}$  рассмотрим поле перемещений  $\mathbf{v}_2$ ,

соответствующее распределению объёмных сил вида  $\mathbf{F}(\mathbf{v}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta(\tau)\delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) \end{pmatrix}$ ,

которое соответствует сосредоточенной мгновенной объемной силе единичной интенсивности, приложенной в точке  $\xi$  в направлении оси  $Oy$ .

Как следует из § 1.3, решениями этой задачи являются поле перемещений  $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} G_{12}^u(\mathbf{x} - \xi, \tau) \\ G_{22}^u(\mathbf{x} - \xi, \tau) \end{bmatrix}$  и напряжений

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}_2) = \begin{bmatrix} G_{112}^\sigma(\mathbf{x} - \xi, \tau) & G_{122}^\sigma(\mathbf{x} - \xi, \tau) \\ G_{212}^\sigma(\mathbf{x} - \xi, \tau) & G_{222}^\sigma(\mathbf{x} - \xi, \tau) \end{bmatrix}.$$

По свойству дельта-функции Дирака имеем

$$\iint_D \mathbf{F}(\mathbf{v}_2) * \mathbf{u} d\Omega = H(D)w(\xi, \tau). \quad (2.11)$$

Заметим, что справедливо тождество

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(\mathbf{v}_2) * \mathbf{u} &= (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}_2), \mathbf{n}) * \mathbf{u} = \\ &= [G_{112}^\sigma(\mathbf{x} - \xi, \tau) \cos \alpha + G_{122}^\sigma(\mathbf{x} - \xi, \tau) \cos \beta] * u + \\ &+ [G_{212}^\sigma(\mathbf{x} - \xi, \tau) \cos \alpha + G_{222}^\sigma(\mathbf{x} - \xi, \tau) \cos \beta] * w, \end{aligned} \quad (2.12)$$

Опять применяя к рассмотренным полям перемещений и напряжений формулу взаимности работ (2.6). С учётом (2.11) и (2.12) получим

$$\begin{aligned} H(D)w(\xi, \tau) &= \iint_D \mathbf{v}_2 * \mathbf{F}(\mathbf{u}) d\Omega + \int_\Gamma \mathbf{v}_2 * \mathbf{p}(\mathbf{u}) ds - \int_\Gamma \mathbf{p}(\mathbf{v}_2) * \mathbf{u} ds = \\ &= \iint_D [G_{12}^u(\mathbf{x} - \xi, \tau) * F_1 + G_{22}^u(\mathbf{x} - \xi, \tau) * F_2] d\Omega + \\ &+ \int_\Gamma [G_{12}^u(\mathbf{x} - \xi, \tau) * p_1 + G_{22}^u(\mathbf{x} - \xi, \tau) * p_2] ds - \\ &- \int_\Gamma [G_{112}^\sigma(\mathbf{x} - \xi, \tau) \cos \alpha + G_{122}^\sigma(\mathbf{x} - \xi, \tau) \cos \beta] * u ds - \\ &- \int_\Gamma [G_{212}^\sigma(\mathbf{x} - \xi, \tau) \cos \alpha + G_{222}^\sigma(\mathbf{x} - \xi, \tau) \cos \beta] * w ds. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Соотношения (2.10) и (2.13) позволяют определить перемещения внутри области  $D$  через заданные массовые силы, перемещения и усилия на границе области  $\partial G = \Gamma$  и называются *формулами Сомильяны*.

В случае отсутствия массовых сил  $\mathbf{F}(\mathbf{u}) \equiv 0$  в формулах (2.10) и (2.13) двумерные интегралы будут равны нулю.

Приступим теперь к выводу граничных интегральных уравнений нестационарных задач для плоских областей. Далее будем полагать, что массовые силы отсутствуют. Основная идея здесь та же самая, что и при выводе формул Сомильяны, за исключением того факта, что здесь нас будут интересовать лишь граничные значения перемещений и напряжений на контуре  $\Gamma$ . Поэтому точку  $\xi$  удобнее взять лежащей *вне* области  $D$ . При этом интегралы в (2.8) и (2.11) исчезают. Выбирая какое-либо пробное состояние  $\mathbf{v}_1, \mathbf{p}(\mathbf{v}_1)$ , приходим к интегральному уравнению вида

$$\int_{\Gamma} \mathbf{v}_1 * \mathbf{p}(\mathbf{u}) ds = \int_{\Gamma} \mathbf{p}(\mathbf{v}_1) * \mathbf{u} ds. \quad (2.14)$$

Для получения граничных интегральных уравнений следует устремить точку  $\xi$  на контур  $\Gamma$  из внешней по отношению к  $\Gamma$  области, т.е. положить, что  $\xi \in \Gamma$ . Интегралы в (2.8) и (2.11) по прежнему будут равны нулю, а уравнение (2.14) остаётся в силе и называется *граничным интегральным уравнением плоской нестационарной задачи*.

Уравнение (2.14) удобно представить в компонентной записи. Как следует из постановок начально-краевых задач, в граничных условиях, которые ставятся на контуре  $\Gamma$ , фигурируют нормальные и касательные к контуру компоненты векторов перемещений  $U_n(s, \tau), U_s(s, \tau)$  и усилий  $p_n(s, \tau), p_s(s, \tau)$ . Поэтому в качестве искомым перемещений и напряжений удобно принять касательные и нормальные к контуру перемещения  $u_s, u_n$  и касательные и нормальные напряжения  $\sigma_s, \sigma_n$ . Аналогично, в качестве пробного состояния выступают другие нормальные к контуру перемещения  $u'_s, u'_n$  и касательные и нормальные напряжения  $\sigma'_s, \sigma'_n$ . Тогда, очевидно, уравнение (2.14) примет такой вид

$$\int_{\Gamma} \sigma_s * u'_s + \sigma_n * u'_n ds = \int_{\Gamma} \sigma'_s * u_s + \sigma'_n * u_n ds. \quad (2.15)$$

Уравнение (2.15) является основным и будет использовано для решения начально-краевых задач.

### § 2.3. Система разрешающих уравнений нестационарных задач для двумерных областей произвольной геометрии

Рассмотрим некоторую область  $D$ , ограниченную контуром  $\Gamma$  и заполненную упругой средой. С каждой точкой  $\xi$  контура  $\Gamma$  свяжем касательные и нормальные перемещения  $u_s, u_n$  и касательные и нормальные напряжения (или усилия)  $\sigma_s, \sigma_n$ . Эти величины задаются относительно локальной системы координат  $s, n$  точки  $\xi$  (см. рисунок 2.1).

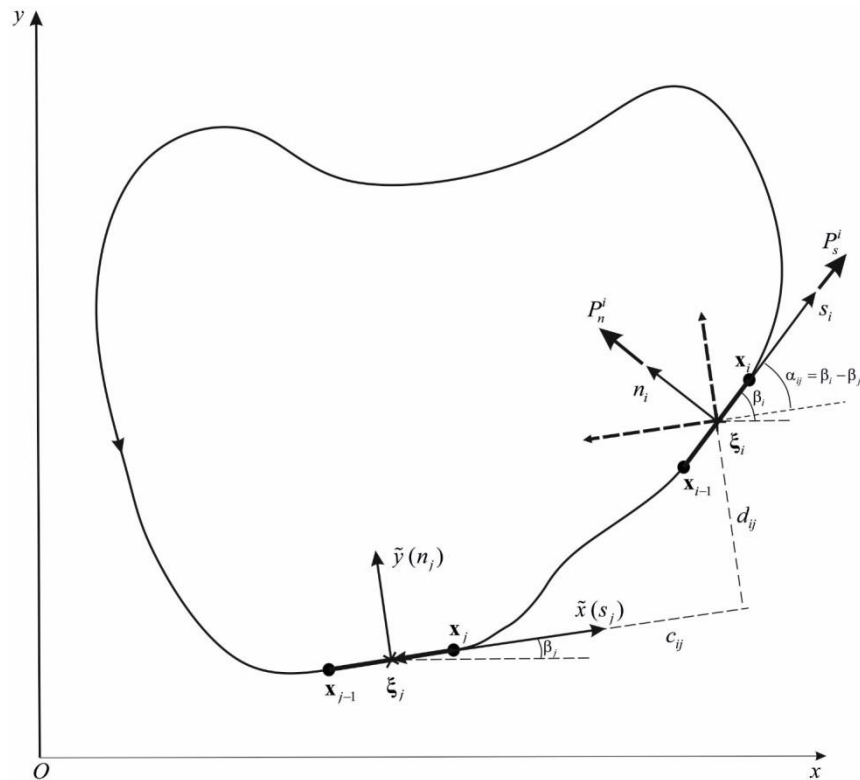


Рисунок 2.1. Локальная система координат с осями  $\tilde{x}(s_j)$  и  $\tilde{y}(n_j)$

При этом в каждой точке контура заданы касательное напряжение  $\sigma_s$  или касательное перемещение  $u_s$  и нормальное напряжение  $\sigma_n$  или нормальное перемещение  $u_n$ , т. е. две из четырех величин  $u_s$ ,  $u_n$ ,  $\sigma_s$  и  $\sigma_n$  известны заранее из граничных условий. Оставшиеся две величины должны быть найдены из решения задачи. Для этого используем уравнение (2.15).

Выберем какое-либо пробное состояние, характеризующееся перемещениями  $u'_s$ ,  $u'_n$  и напряжениями  $\sigma'_s$ ,  $\sigma'_n$ .

Для численного решения уравнения (2.15) применим дискретизацию по времени. Для этого разделим временной интервал  $[0, \tau]$  на  $N$  равных промежутков длительностью  $\Delta t$ :  $t_k = k\Delta t$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ ,  $\tau = N\Delta t$ . Перемещения и напряжения в исходной задаче аппроксимируем линейно по времени:

$$\begin{aligned} u_n(s, t) &= u_n^k(s)m_1(t) + u_n^{k-1}(s)m_2(t), \quad u_s = u_s^k(s)m_1(t) + u_s^{k-1}(s)m_2(t), \\ \sigma_n &= \sigma_n^k(s)m_1(t) + \sigma_n^{k-1}(s)m_2(t), \quad \sigma_s = \sigma_s^k(s)m_1(t) + \sigma_s^{k-1}(s)m_2(t), \\ m_1(t) &= \frac{t - t_{k-1}}{\Delta t}, \quad m_2(t) = \frac{t_k - t}{\Delta t}, \\ u_n^k(s) &= u_n(s, t_k), \quad u_s^k(s) = u_s(s, t_k), \\ \sigma_n^k(s) &= \sigma_n(s, t_k), \quad \sigma_s^k(s) = \sigma_s(s, t_k). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Подстановка (2.16) в (2.15) приводит последнее к виду

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^N \int_{\Gamma} \sigma_s^k u'_{s1}{}^k + \sigma_s^{k-1} u'_{s2}{}^k ds + \sigma_n^k u'_{n1}{}^k + \sigma_n^{k-1} u'_{n2}{}^k ds = \\ &= \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma} u_s^k \sigma'_{s1}{}^k + u_s^{k-1} \sigma'_{s2}{}^k + u_n^k \sigma'_{n1}{}^k + u_n^{k-1} \sigma'_{n2}{}^k ds, \end{aligned} \quad (2.17)$$

где

$$\begin{aligned}
u'_{n1}{}^k &= \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} u'_n(s, \tau - t) m_1(t) dt, & u'_{n2}{}^k &= \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} u'_n(s, \tau - t) m_2(t) dt, \\
u'_{s1}{}^k &= \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} u'_s(s, \tau - t) m_1(t) dt, & u'_{s2}{}^k &= \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} u'_s(s, \tau - t) m_2(t) dt, \\
\sigma'_{n1}{}^k &= \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \sigma'_n(s, \tau - t) m_1(t) dt, & \sigma'_{n2}{}^k &= \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \sigma'_n(s, \tau - t) m_2(t) dt, \\
\sigma'_{s1}{}^k &= \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \sigma'_s(s, \tau - t) m_1(t) dt, & \sigma'_{s2}{}^k &= \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \sigma'_s(s, \tau - t) m_2(t) dt,
\end{aligned}$$

Аппроксимируем контур  $\Gamma$  с помощью  $M$  примыкающих друг к другу прямолинейных отрезков (см. рисунок 2.2):

$$\Gamma \approx \bigcup_{j=1}^M \gamma_j. \quad (2.18)$$

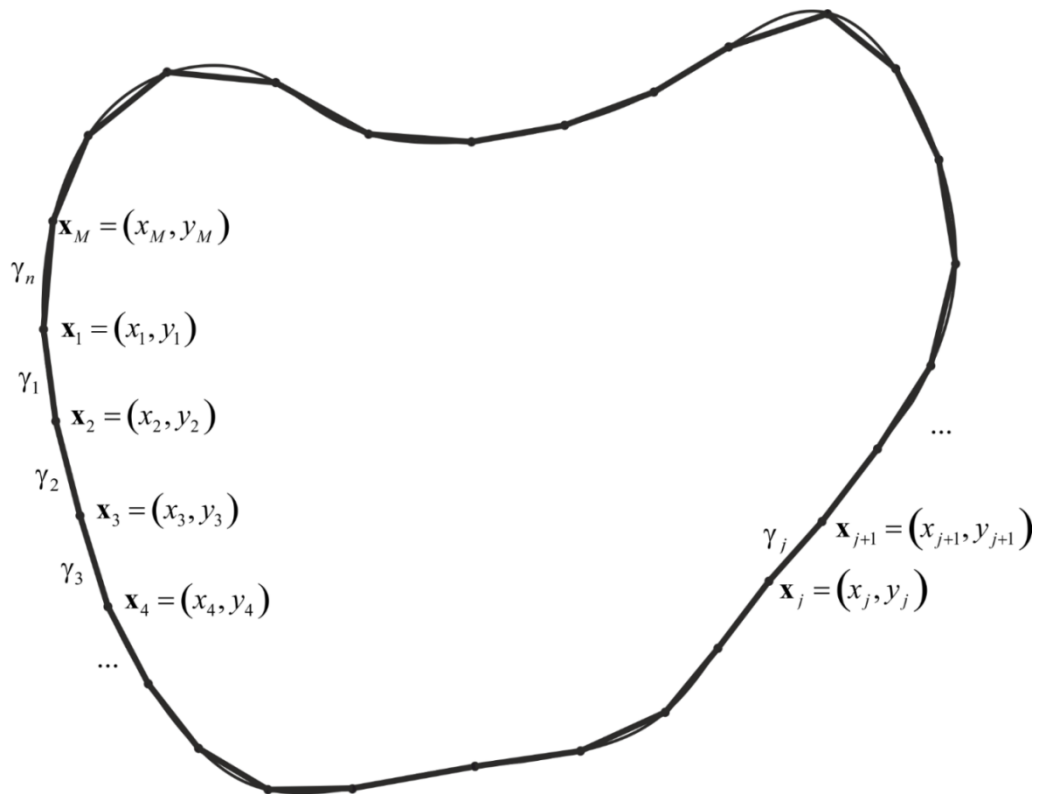


Рисунок 2.2. Аппроксимация контура  $\Gamma$



Теперь положим, что перемещения и напряжения на границе контура  $\Gamma$  в пределах каждого отрезка  $\gamma_j$  постоянны, тогда уравнение (2.17) примет вид

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^M \sigma_s^{k,j} \int_{\gamma_j} u_{s1}'^k ds + \sigma_s^{k-1,j} \int_{\gamma_j} u_{s2}'^k ds + \sigma_n^{k,j} \int_{\gamma_j} u_{n1}'^k ds + \sigma_n^{k-1,j} \int_{\gamma_j} u_{n2}'^k ds = \\ & = \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^M u_s^{k,j} \int_{\gamma_j} \sigma_{s1}'^k ds + u_s^{k-1,j} \int_{\gamma_j} \sigma_{s2}'^k ds + u_n^{k,j} \int_{\gamma_j} \sigma_{n1}'^k ds + u_n^{k-1,j} \int_{\gamma_j} \sigma_{n2}'^k ds. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Путем перегруппировки слагаемых с учётом нулевых начальных условий, уравнение (2.19) может быть переписано так

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^M (u_s^{N,j} \sigma_{s,j}'^N + u_n^{N,j} \sigma_{n,j}'^N - \sigma_s^{N,j} u_{s,j}'^N - \sigma_n^{N,j} u_{n,j}'^N) = F_N, \quad (2.20) \\ & \sigma_{s,j}'^N = \int_{\gamma_j} \sigma_{s1}'^N ds, \quad \sigma_{n,j}'^N = \int_{\gamma_j} \sigma_{n1}'^N ds, \quad u_{s,j}'^N = \int_{\gamma_j} u_{s1}'^N ds, \quad u_{n,j}'^N = \int_{\gamma_j} u_{n1}'^N ds, \\ & F_N = \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{j=1}^M \sigma_s^{k,j} \int_{\gamma_j} (u_{s1}'^k + u_{s2}'^{k+1}) ds + \sigma_n^{k,j} \int_{\gamma_j} (u_{n1}'^k + u_{n2}'^{k+1}) ds - \\ & - \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{j=1}^M u_s^{k,j} \int_{\gamma_j} (\sigma_{s1}'^k + \sigma_{s2}'^{k+1}) ds + u_n^{k,j} \int_{\gamma_j} (\sigma_{n1}'^k + \sigma_{n2}'^{k+1}) ds. \end{aligned}$$

В уравнении (2.20) правая часть  $F_N$  – известна, т.к. содержит искомые функции на предшествующих текущему временных шагах ( $k = 1, 2, \dots, N-1$ ). В соответствии с заданными граничными условиями, в левой части уравнения (2.20) содержатся  $2M$  неизвестных узловых значений перемещений или напряжений. Остальные  $2M$  узловых значений заданы граничными условиями (1.16), (1.17) или (1.18). Кроме того, в случае контактных задач, на части границы  $\Gamma$  заданы соответствующие условия контакта (1.19), (1.20) или (1.21). Поэтому  $2M$  слагаемых в левой части уравнения (2.20) в каждом конкретном случае также являются известными. Уравнение (2.20) будет корректироваться в каждом конкретном случае постановки граничных условий и условий контакта.

Также отметим, что для получения замкнутой системы разрешающих уравнений относительно  $2M$  искомых узловых значений перемещений или напряжений необходимо сформировать  $2M$  уравнений вида (2.20). Для этого

необходимо обеспечить достаточное количество, а именно,  $2M$  пробных решений (состояний)  $u'_s, u'_n, \sigma'_s, \sigma'_n$ .

#### § 2.4. Выбор пробных решений и формирование дискретного аналога системы разрешающих уравнений

Как указано в предыдущем пункте, для формирования замкнутой системы разрешающих уравнений необходимо иметь  $2M$  пробных решений.

Положим, что в неограниченной упругой плоскости, заполненной упругой средой, расположен «фиктивный» контур  $\tilde{\Gamma}$ , положение которого совпадает с положением контура  $\Gamma$ . Контур  $\tilde{\Gamma}$  приближенно заменим кусочно-линейной аппроксимацией, как указано на рисунке 2.2:  $\tilde{\Gamma} \approx \bigcup_{j=1}^M \gamma_j$ .

В дальнейшем, так как в области,  $\tilde{D}$ , ограниченной контуром  $\tilde{\Gamma}$  и соответствующей области  $D$ , построенное решение будет совпадать с искомым, не будем делать различий между контуром  $\Gamma$  и фиктивным контуром  $\tilde{\Gamma}$ , а также между областями  $D$  и  $\tilde{D}$ .

В качестве пробных решений примем решения задач о воздействии сосредоточенных по координатам и времени нормальных  $P_s^i$  и касательных  $P_n^i$  единичных усилий, приложенных к точкам  $\xi_i$ , которые являются серединами отрезков  $\gamma_i$ ,  $i=1,2,\dots,M$  *извне* области  $D$ , ограниченной контуром  $\Gamma$ . Решениями этих задач являются функции влияния (см. § 1.4).

Для вычисления коэффициентов и правой части уравнения (2.20) удобно на каждом участке  $\gamma_j$  ввести локальную систему координат с осями  $\tilde{x}(s_j)$  и  $\tilde{y}(n_j)$ , причем направление оси  $\tilde{y}(n_j)$  совпадает с направлением внешней

нормали к контуру  $\Gamma$ , а ось  $\tilde{y}(n_j)$  направлена по направлению обхода контура  $\Gamma$  (см. рисунок 2.3).

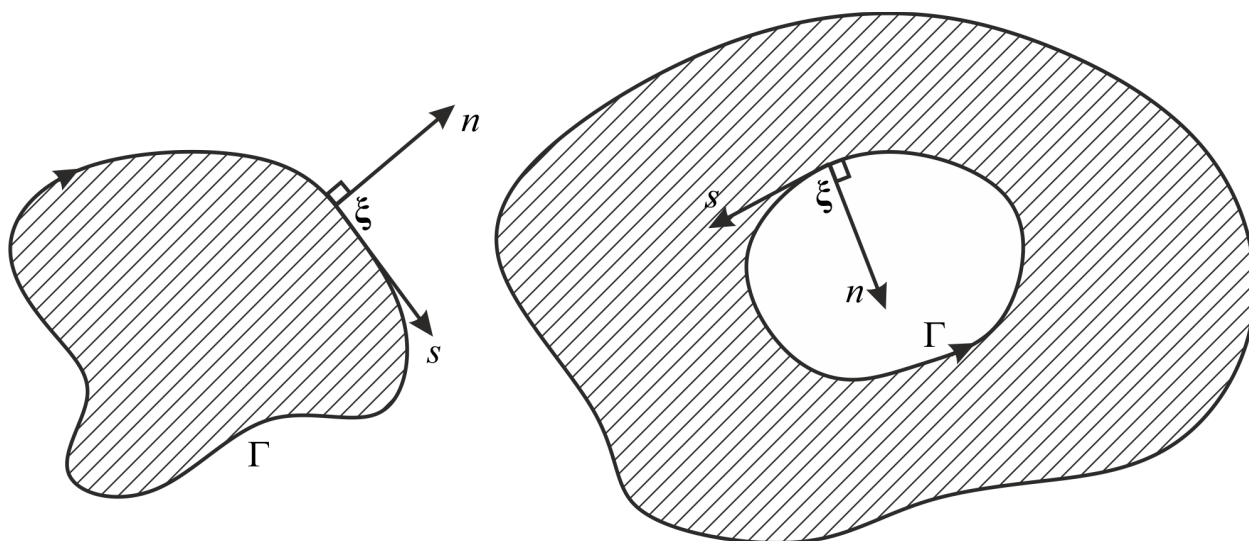


Рисунок 2.3. Локальные системы координат и направления обхода контура  $\Gamma$  в случае внутренней и внешней по отношению к  $\Gamma$  областей

Пусть в точке  $\xi_i$  участка  $\gamma_i$  приложены единичное нормальное усилие  $P_n^i$  и единичное касательное усилие  $P_s^i$ . Тогда в локальной системе координат  $\tilde{x}(s_j)$  и  $\tilde{y}(n_j)$  суммарные проекции этих сил на координатные оси будут определяться следующими выражениями:

$$\begin{aligned} P_{\tilde{x}}^{ij} &= P_s^i \cos \alpha_{ij} - P_n^i \sin \alpha_{ij}, \\ P_{\tilde{y}}^{ij} &= P_s^i \sin \alpha_{ij} + P_n^i \cos \alpha_{ij}, \end{aligned} \quad (2.21)$$

где  $\alpha_{ij} = \beta_i - \beta_j$ , а  $\beta_i$  и  $\beta_j$  – углы между векторами  $\mathbf{s}_i$ ,  $\mathbf{s}_j$  с осью  $Ox$  глобальной декартовой системы координат  $Oxy$ .

При этом пробные решения в локальной системе координат, согласно § 1.4, имеют вид

$$\begin{aligned}
\sigma'_{xy} = \sigma'_s &= P_{\tilde{x}}^{ij} G_{121}^\sigma(\tilde{x} - c_{ij}, -d_{ij}, \tau) + P_{\tilde{y}}^{ij} G_{122}^\sigma(\tilde{x} - c_{ij}, -d_{ij}, \tau) = \\
&= P_s^i G_{121}^\sigma(\tilde{x} - c_{ij}, -d_{ij}, \tau) \cos \alpha_{ij} - P_n^i G_{121}^\sigma(\tilde{x} - c_{ij}, -d_{ij}, \tau) \sin \alpha_{ij} + \\
&+ P_s^i G_{122}^\sigma(\tilde{x} - c_{ij}, -d_{ij}, \tau) \sin \alpha_{ij} + P_n^i G_{122}^\sigma(\tilde{x} - c_{ij}, -d_{ij}, \tau) \cos \alpha_{ij}, \tag{2.22}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma'_{yy} = \sigma'_n &= P_{\tilde{x}}^{ij} G_{221}^\sigma(\tilde{x} - c_{ij}, -d_{ij}, \tau) + P_{\tilde{y}}^{ij} G_{222}^\sigma(\tilde{x} - c_{ij}, -d_{ij}, \tau) = \\
&= P_s^i G_{221}^\sigma(\tilde{x} - c_{ij}, -d_{ij}, \tau) \cos \alpha_{ij} - P_n^i G_{221}^\sigma(\tilde{x} - c_{ij}, -d_{ij}, \tau) \sin \alpha_{ij} + \\
&+ P_s^i G_{222}^\sigma(\tilde{x} - c_{ij}, -d_{ij}, \tau) \sin \alpha_{ij} + P_n^i G_{222}^\sigma(\tilde{x} - c_{ij}, -d_{ij}, \tau) \cos \alpha_{ij},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u'_{\tilde{x}} = u'_s &= P_{\tilde{x}}^{ij} G_{11}^u(\tilde{x} - c_{ij}, -d_{ij}, \tau) + P_{\tilde{y}}^{ij} G_{12}^u(\tilde{x} - c_{ij}, -d_{ij}, \tau) = \\
&= P_s^i G_{11}^u(\tilde{x} - c_{ij}, -d_{ij}, \tau) \cos \alpha_{ij} - P_n^i G_{11}^u(\tilde{x} - c_{ij}, -d_{ij}, \tau) \sin \alpha_{ij} + \\
&+ P_s^i G_{12}^u(\tilde{x} - c_{ij}, -d_{ij}, \tau) \sin \alpha_{ij} + P_n^i G_{12}^u(\tilde{x} - c_{ij}, -d_{ij}, \tau) \cos \alpha_{ij}, \tag{2.23}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u'_{\tilde{y}} = u'_n &= P_{\tilde{x}}^{ij} G_{21}^u(\tilde{x} - c_{ij}, -d_{ij}, \tau) + P_{\tilde{y}}^{ij} G_{22}^u(\tilde{x} - c_{ij}, -d_{ij}, \tau) = \\
&= P_s^i G_{21}^u(\tilde{x} - c_{ij}, -d_{ij}, \tau) \cos \alpha_{ij} - P_n^i G_{21}^u(\tilde{x} - c_{ij}, -d_{ij}, \tau) \sin \alpha_{ij} + \\
&+ P_s^i G_{22}^u(\tilde{x} - c_{ij}, -d_{ij}, \tau) \sin \alpha_{ij} + P_n^i G_{22}^u(\tilde{x} - c_{ij}, -d_{ij}, \tau) \cos \alpha_{ij},
\end{aligned}$$

где  $(c_{ij}, d_{ij})$  – координаты центра  $i$ -того элемента в локальной системе координат  $\tilde{x}, \tilde{y}$ , связанной с центром  $j$ -того элемента:

$$\begin{aligned}
c_{ij} &= (x_{ci} - x_{cj}) \cos \beta_j + (y_{ci} - y_{cj}) \sin \beta_j, \\
d_{ij} &= -(x_{ci} - x_{cj}) \sin \beta_j + (y_{ci} - y_{cj}) \cos \beta_j, \tag{2.24}
\end{aligned}$$

$$x_{ci} = \frac{x_i + x_{i-1}}{2}, \quad x_{cj} = \frac{x_j + x_{j-1}}{2}, \quad y_{ci} = \frac{y_i + y_{i-1}}{2}, \quad y_{cj} = \frac{y_j + y_{j-1}}{2}.$$

Отметим, что формулы (2.22) и (2.23) в сущности содержат два пробных решения: одно вследствие действия единичной силы  $P_s^i$ , а другое – вследствие действия единичной силы  $P_n^i$ . Полагая в (2.22), (2.23)  $P_s^i = 1$ ,  $P_n^i = 0$ , получаем первое пробное решение для элемента  $\gamma_i$ :

$$\begin{aligned}
\sigma'_{s1,ij}(\tilde{x} - c_{ij}, -d_{ij}, \tau) &= G_{121}^\sigma(\tilde{x} - c_{ij}, -d_{ij}, \tau) \cos \alpha_{ij} + \\
&\quad + G_{122}^\sigma(\tilde{x} - c_{ij}, -d_{ij}, \tau) \sin \alpha_{ij}, \\
\sigma'_{n1,ij}(\tilde{x} - c_{ij}, -d_{ij}, \tau) &= G_{221}^\sigma(\tilde{x} - c_{ij}, -d_{ij}, \tau) \cos \alpha_{ij} + \\
&\quad + G_{222}^\sigma(\tilde{x} - c_{ij}, -d_{ij}, \tau) \sin \alpha_{ij}, \\
u'_{s1,ij}(\tilde{x} - c_{ij}, -d_{ij}, \tau) &= G_{11}^u(\tilde{x} - c_{ij}, -d_{ij}, \tau) \cos \alpha_{ij} + \\
&\quad + G_{12}^u(\tilde{x} - c_{ij}, -d_{ij}, \tau) \sin \alpha_{ij}, \\
u'_{n1,ij}(\tilde{x} - c_{ij}, -d_{ij}, \tau) &= G_{21}^u(\tilde{x} - c_{ij}, -d_{ij}, \tau) \cos \alpha_{ij} + \\
&\quad + G_{22}^u(\tilde{x} - c_{ij}, -d_{ij}, \tau) \sin \alpha_{ij}.
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Аналогично, полагая в (2.22), (2.23)  $P_s^i = 0$ ,  $P_n^i = 1$ , получаем второе пробное решение для элемента  $\gamma_i$ :

$$\begin{aligned}
\sigma'_{s2,ij}(\tilde{x} - c_{ij}, -d_{ij}, \tau) &= -G_{121}^\sigma(\tilde{x} - c_{ij}, -d_{ij}, \tau) \sin \alpha_{ij} + \\
&\quad + G_{122}^\sigma(\tilde{x} - c_{ij}, -d_{ij}, \tau) \cos \alpha_{ij}, \\
\sigma'_{n2,ij}(\tilde{x} - c_{ij}, -d_{ij}, \tau) &= -G_{221}^\sigma(\tilde{x} - c_{ij}, -d_{ij}, \tau) \sin \alpha_{ij} + \\
&\quad + G_{222}^\sigma(\tilde{x} - c_{ij}, -d_{ij}, \tau) \cos \alpha_{ij}, \\
u'_{s2,ij}(\tilde{x} - c_{ij}, -d_{ij}, \tau) &= -G_{11}^u(\tilde{x} - c_{ij}, -d_{ij}, \tau) \sin \alpha_{ij} + \\
&\quad + G_{12}^u(\tilde{x} - c_{ij}, -d_{ij}, \tau) \cos \alpha_{ij}, \\
u'_{n2,ij}(\tilde{x} - c_{ij}, -d_{ij}, \tau) &= -G_{21}^u(\tilde{x} - c_{ij}, -d_{ij}, \tau) \sin \alpha_{ij} + \\
&\quad + G_{22}^u(\tilde{x} - c_{ij}, -d_{ij}, \tau) \cos \alpha_{ij}.
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Поскольку число элементов  $\gamma_i$  равно  $M$ , то повторяя аналогичные действия для каждого элемента, как раз и получаем  $2M$  необходимых пробных решений. Для каждой пары этих решений из (2.20) получаем два уравнения

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^M (u_s^{N,j} a_{ss,ij}^N + u_n^{N,j} a_{ns,ij}^N - \sigma_s^{N,j} b_{ss,ij}^N - \sigma_n^{N,j} b_{ns,ij}^N) &= F_{si}^N, \\
F_{si}^N &= \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{j=1}^M \sigma_s^{k,j} b_{ss,ij}^k + \sigma_n^{k,j} b_{ns,ij}^k - u_s^{k,j} a_{ss,ij}^k - u_n^{k,j} a_{ns,ij}^k,
\end{aligned} \tag{2.27}$$

$$\sum_{j=1}^M \left( u_s^{N,j} a_{ss,ij}^N + u_n^{N,j} a_{ns,ij}^N - \sigma_s^{N,j} b_{ss,ij}^N - \sigma_n^{N,j} b_{ns,ij}^N \right) = F_{ni}^N, \quad (2.28)$$

$$F_{ni}^N = \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{j=1}^M \sigma_s^{k,j} b_{sn}^k + \sigma_n^{k,j} b_{nm,ij}^k - u_s^{k,j} a_{sn,ij}^k - u_n^{k,j} a_{nm,ij}^k,$$

$$a_{ss,ij}^N = \int_{-0.5\Delta_j}^{0.5\Delta_j} \Sigma_{ss,ij}^N dx, \quad a_{ns,ij}^N = \int_{-0.5\Delta_j}^{0.5\Delta_j} \Sigma_{ns,ij}^N dx, \quad b_{ss,ij}^N = \int_{-0.5\Delta_j}^{0.5\Delta_j} U_{ss,ij}^N dx, \quad b_{ns,ij}^N = \int_{-0.5\Delta_j}^{0.5\Delta_j} \Sigma_{ns,ij}^N dx,$$

$$b_{ss,ij}^k = \int_{-0.5\Delta_j}^{0.5\Delta_j} U_{ss,ij}^k dx, \quad b_{ns,ij}^k = \int_{-0.5\Delta_j}^{0.5\Delta_j} U_{ns,ij}^k dx, \quad a_{ss,ij}^k = \int_{-0.5\Delta_j}^{0.5\Delta_j} \Sigma_{ss,ij}^k dx, \quad a_{ns,ij}^k = \int_{-0.5\Delta_j}^{0.5\Delta_j} \Sigma_{ns,ij}^k dx,$$

$$a_{sn,ij}^N = \int_{-0.5\Delta_j}^{0.5\Delta_j} \Sigma_{sn,ij}^N dx, \quad a_{nm,ij}^N = \int_{-0.5\Delta_j}^{0.5\Delta_j} \Sigma_{nm,ij}^N dx, \quad b_{ss,ij}^N = \int_{-0.5\Delta_j}^{0.5\Delta_j} U_{sn,ij}^N dx, \quad b_{nm,ij}^N = \int_{-0.5\Delta_j}^{0.5\Delta_j} \Sigma_{nm,ij}^N dx,$$

$$b_{sn,ij}^k = \int_{-0.5\Delta_j}^{0.5\Delta_j} U_{sn,ij}^k dx, \quad b_{nm,ij}^k = \int_{-0.5\Delta_j}^{0.5\Delta_j} U_{nm,ij}^k dx, \quad a_{sn,ij}^k = \int_{-0.5\Delta_j}^{0.5\Delta_j} \Sigma_{sn,ij}^k dx, \quad a_{nm,ij}^k = \int_{-0.5\Delta_j}^{0.5\Delta_j} \Sigma_{nm,ij}^k dx,$$

$$\Sigma_{ss,ij}^N = \int_{\tau-\Delta t}^{\tau} \sigma'_{s1,ij}(x-c_{ij}, -d_{ij}, \tau-t) m_1(t) dt, \quad \Sigma_{ns,ij}^N = \int_{\tau-\Delta t}^{\tau} \sigma'_{n1,ij}(x-c_{ij}, -d_{ij}, \tau-t) m_1(t) dt,$$

$$U_{ss,ij}^N = \int_{\tau-\Delta t}^{\tau} u'_{s1,ij}(x-c_{ij}, -d_{ij}, \tau-t) m_1(t) dt, \quad U_{ns,ij}^N = \int_{\tau-\Delta t}^{\tau} u'_{n1,ij}(x-c_{ij}, -d_{ij}, \tau-t) m_1(t) dt,$$

$$\Sigma_{sn,ij}^N = \int_{\tau-\Delta t}^{\tau} \sigma'_{s2,ij}(x-c_{ij}, -d_{ij}, \tau-t) m_1(t) dt, \quad \Sigma_{nm,ij}^N = \int_{\tau-\Delta t}^{\tau} \sigma'_{n2,ij}(x-c_{ij}, -d_{ij}, \tau-t) m_1(t) dt,$$

$$U_{sn,ij}^N = \int_{\tau-\Delta t}^{\tau} u'_{s2,ij}(x-c_{ij}, -d_{ij}, \tau-t) m_1(t) dt, \quad U_{nm,ij}^N = \int_{\tau-\Delta t}^{\tau} u'_{n2,ij}(x-c_{ij}, -d_{ij}, \tau-t) m_1(t) dt,$$

$$U_{ss,ij}^k = \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} u'_{s1,ij}(x-c_{ij}, -d_{ij}, \tau-t) m_1(t) dt + \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} u'_{s1,ij}(x-c_{ij}, -d_{ij}, \tau-t) m_2(t) dt,$$

$$U_{ns,ij}^k = \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} u'_{n1,ij}(x-c_{ij}, -d_{ij}, \tau-t) m_1(t) dt + \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} u'_{n1,ij}(x-c_{ij}, -d_{ij}, \tau-t) m_2(t) dt,$$

$$\Sigma_{ss,ij}^k = \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \sigma'_{s1,ij}(x-c_{ij}, -d_{ij}, \tau-t) m_1(t) dt + \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \sigma'_{s1,ij}(x-c_{ij}, -d_{ij}, \tau-t) m_2(t) dt,$$

$$\Sigma_{ns,ij}^k = \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \sigma'_{n1,ij}(x-c_{ij}, -d_{ij}, \tau-t) m_1(t) dt + \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \sigma'_{n1,ij}(x-c_{ij}, -d_{ij}, \tau-t) m_2(t) dt,$$

$$\begin{aligned}
U_{sn,ij}^k &= \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} u'_{s2,ij}(x - c_{ij}, -d_{ij}, \tau - t) m_1(t) dt + \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} u'_{s2,ij}(x - c_{ij}, -d_{ij}, \tau - t) m_2(t) dt, \\
U_{m,ij}^k &= \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} u'_{n2,ij}(x - c_{ij}, -d_{ij}, \tau - t) m_1(t) dt + \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} u'_{n2,ij}(x - c_{ij}, -d_{ij}, \tau - t) m_2(t) dt, \\
\Sigma_{sn,ij}^k &= \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \sigma'_{s2,ij}(x - c_{ij}, -d_{ij}, \tau - t) m_1(t) dt + \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \sigma'_{s2,ij}(x - c_{ij}, -d_{ij}, \tau - t) m_2(t) dt, \\
\Sigma_{mn,ij}^k &= \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \sigma'_{n2,ij}(x - c_{ij}, -d_{ij}, \tau - t) m_1(t) dt + \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \sigma'_{n2,ij}(x - c_{ij}, -d_{ij}, \tau - t) m_2(t) dt.
\end{aligned}$$

Окончательное формирование системы разрешающих уравнений удобно производить исходя из конкретного типа решаемой задачи.

### ГЛАВА 3. ПОСТАНОВКА И АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ АБСОЛЮТНО ЖЕСТКОГО ШТАМПА И УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА С ПОЛОСТЬЮ

#### § 3.1. Постановка задачи

Рассмотрим плоскую нестационарную контактную задачу для упругого полупространства с заглубленной полостью эллиптической формы и абсолютно твёрдого призматического штампа (ударника) имеющего прямоугольное сечение в плане  $Oxy$ . Положение и геометрию полости характеризуют координаты центра  $O_1$ , длины полуосей эллипса  $p_1$ ,  $p_2$  и угол  $\alpha_e$  наклона большей полуоси к оси  $Ox$  декартовой прямоугольной системы координат  $Oxy$  (рисунок 3.1). Подошва ударника имеет ширину равную  $2b$ . Центр масс штампа обозначен точкой  $O_1$ .

Положим, что в момент начала взаимодействия  $\tau = 0$  ударник движется с некоторой заданной начальной скоростью  $V_0$ , вектор которой направлен по нормали к свободной поверхности полупространства  $y = 0$ . В начальный момент времени полупространство находится в невозмущённом состоянии.

Движение полупространства описывается динамическими уравнениями плоской теории упругости (1.7), которые дополняются соотношениями Коши (1.8) и законом Гука **Ошибка! Источник ссылки не найден.**

Рассмотрим случай безотрывного контакта подошвы штампа, имеющей ширину  $2b$ , с поверхностью полупространства. В этом случае в пределах отрезка  $x \in [-b, b]$  нормальные перемещения границы полупространства совпадают с перемещениями подошвы ударника  $w_s(x, \tau)$ :

$$w|_{y=0} = w_s(x, \tau), \quad x \in [-b, b]. \quad (3.1)$$



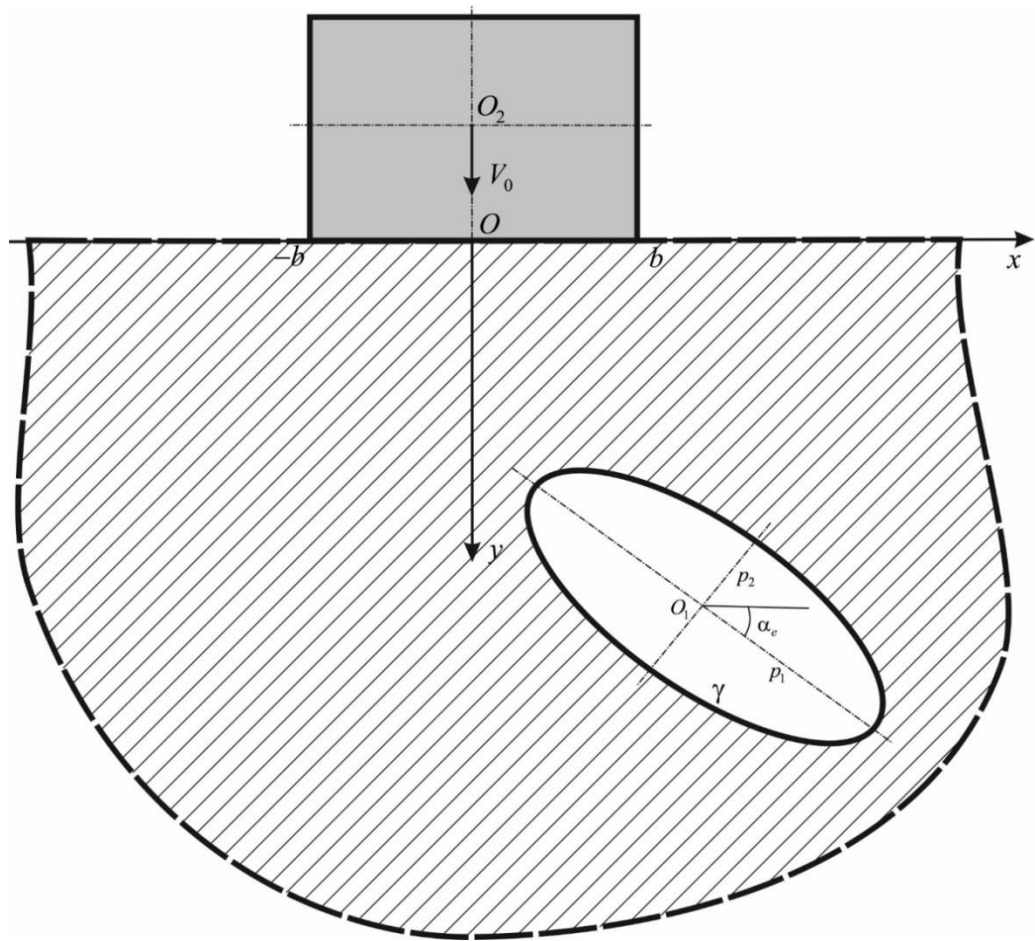


Рисунок 3.1. Постановка нестационарной контактной задачи

Положим, что контакт между ударником и упругим полупространством происходит в условиях свободного проскальзывания. В этом случае приходим к следующим условиям на границе полупространства:

$$\begin{aligned}
 u_n|_{y=0} &= w_s(x, \tau), \quad x \in [-b, b]; \\
 \sigma_s|_{y=0} &= 0, \quad x \in (-\infty, \infty); \\
 \sigma_n|_{y=0} &= 0, \quad x \in (-\infty, b] \cup [b, \infty).
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Отметим, что в процессе контактного взаимодействия поверхность полупространства деформируется (рисунок 3.2). Однако, в линейной постановке задачи граничные условия сносятся на недеформированную поверхность  $y=0$  [9 – 25]. Поэтому, полагая время взаимодействия малым,

считаем, что граничные условия сохраняют вид (3.2) в течении всего времени процесса контактного взаимодействия.

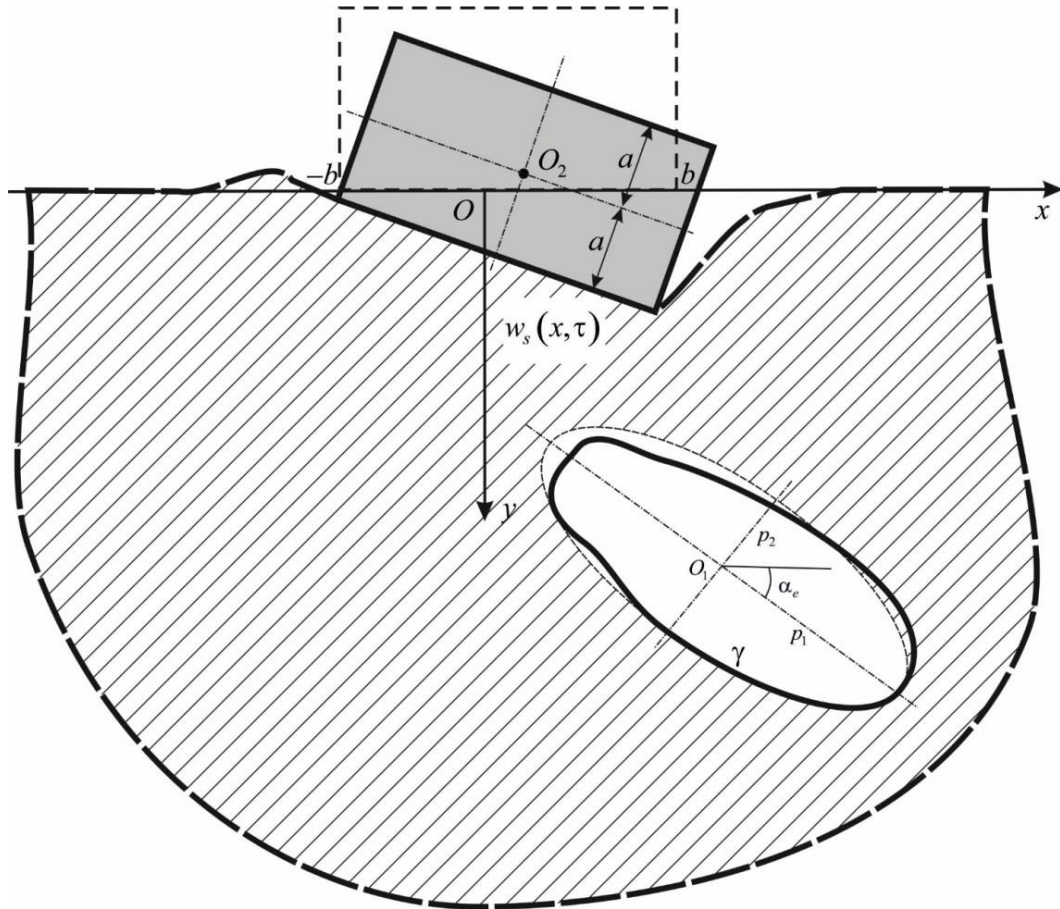


Рисунок 3.2. Перемещения штампа и полупространства

Для определения перемещений подошвы штампа в постановку задачи необходимо привлечь уравнения поступательного движения ударника как абсолютно твёрдого тела, записанное в интегральной форме:

$$mw_p(\tau) = V_0\tau + \int_0^\tau \int_{-b}^b (\tau - t)\sigma_n(x, t) dx dt, \quad (3.3)$$

где  $w_p$  – перемещение центра масса штампа.

Кроме того штамп может совершать поворот вокруг своего центра масс, поэтому дополнительно необходимо привлечь также уравнение вращательного движения штампа вокруг точки  $O_2$ :

$$J\varphi(\tau) = \int_0^\tau \int_{-b}^b (\tau - t) \sigma_n(x, t) x dx dt, \quad (3.4)$$

где  $\varphi$  – угол поворота штампа,  $J = \frac{4}{3}ab(a^2 + b^2)$  – погонный осевой момент инерции ударника.

Тогда в любой момент времени, в соответствии с геометрическим построением и линеаризацией постановки задачи (см. рисунок 3.3), нормальные перемещения точек подошвы ударника определяются так:

$$w_s(x, \tau) = w_p(\tau) - \varphi(\tau) \sqrt{a^2 + x^2} \sin \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}. \quad (3.5)$$

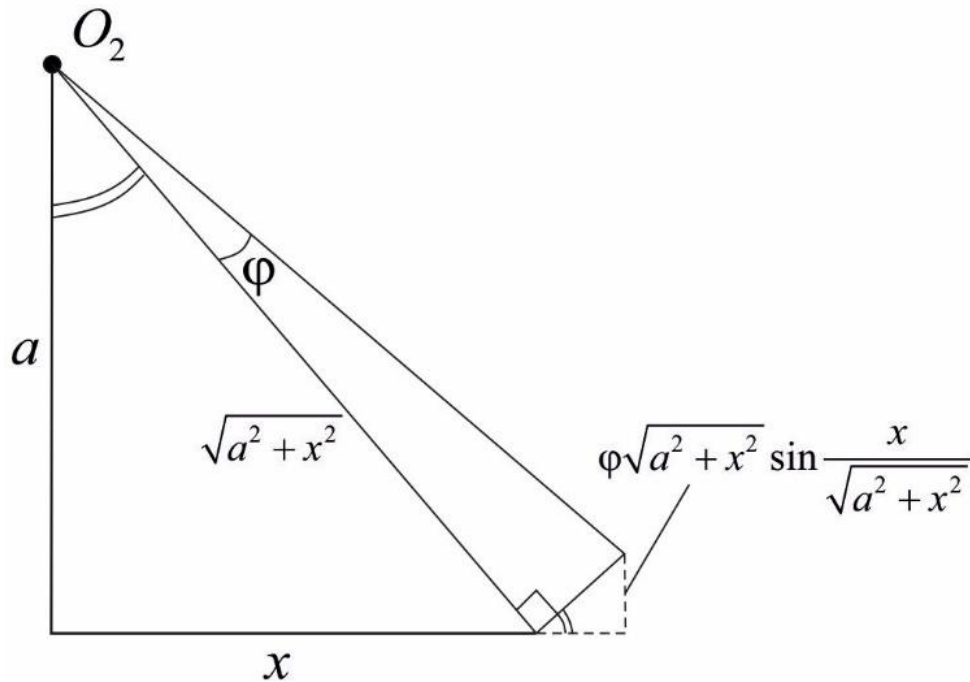


Рисунок 3.3. Определение дополнительной составляющей нормальных перемещений штампа за счёт поворота

Теперь поставим граничные условия на контуре эллиптической полости.

Положим, что граница эллиптической полости  $\gamma$  свободна от напряжений

$$\sigma_n|_\gamma = \sigma_s|_\gamma = 0. \quad (3.6)$$

Заметим, что контур  $\Gamma$ , ограничивающий область искомого решения, состоит из действительной оси  $Ox$  и границы эллипса  $\gamma$ :

$$\Gamma = Ox \cup \gamma. \quad (3.7)$$

Таким образом, постановка нестационарной контактной задачи включает уравнения движения полупространства (1.7), соотношения Коши (1.8), закон Гука **Ошибка! Источник ссылки не найден.**, уравнения движения ударника (3.3), (3.4), соотношение (3.5), граничные условия на границе полупространства (3.2) и на контуре полости  $\gamma$  (3.6) и начальные условия (1.11). Отметим, что начальные условия для ударника учтены в интегральных формах записи уравнений движения (3.3) и (3.4).

### § 3.2. Система разрешающих уравнений

Опираясь на результаты § 3.1 и главы 2 сформируем систему разрешающих уравнений нестационарной контактной задачи. В случае контакта в условиях свободного проскальзывания искомыми функциями являются тангенциальные перемещения  $u_s$  и нормальные напряжения  $\sigma_n$  под штампом, нормальные  $u_n$  и тангенциальные  $u_s$  перемещения вне штампа при  $y = 0$ , а также нормальные и тангенциальные перемещения  $u_n$  и  $u_s$  на границе полости  $\gamma$ .

Основное разрешающее интегральное уравнение (2.15) в соответствии с граничными условиями (3.2) и (3.6) примет вид:

$$\int_{-b}^{-b} (\sigma_n * u'_n - \sigma'_s * u_s) dx - \int_{-\infty}^{-b} (\sigma'_s * u_s + \sigma'_n * u_n) dx - \int_b^{\infty} (\sigma'_s * u_s + \sigma'_n * u_n) dx - \int_{\gamma} (\sigma'_s * u_s + \sigma'_n * u_n) ds = \int_{-b}^{-b} \sigma'_n * w_s dx, \quad (3.8)$$

где в правой части под интегралами содержатся искомые функции.

Следующей сложностью при решении поставленных контактных задач является то обстоятельство, что контур  $\Gamma$  является неограниченным. Поскольку граничные условия ставятся на внутреннем контуре  $\gamma$  и на всей границе  $y = 0$ , то вообще-то следовало бы всю ось  $Ox$  аппроксимировать бесконечной совокупностью граничных элементов (примыкающих друг к другу отрезков оси  $Ox$ ). Однако, ввиду конечности скоростей распространения возмущений в упругой среде, нет необходимости разбивать всю ось  $Ox$  на граничные элементы. В разбиении достаточно учесть только те из элементов, до которых успевают дойти упругие волны в рассматриваемый момент времени. Максимальная безразмерная скорость возмущений в упругой среде равная 1 (скорость волн растяжения-сжатия). Поэтому, при заданном конечном значении времени расчёта  $T$  достаточно рассмотреть только отрезок  $[-b - T, b + T]$  оси

$Ox$ , поскольку вне этого отрезка напряжения и перемещения на поверхности полупространства  $y=0$  отсутствуют (рисунок 3.2,  $c_R$  – безразмерная скорость волн Рэлея):

$$u_s|_{y=0, |x|>b+T} = u_n|_{y=0, |x|>b+T} = \sigma_s|_{y=0, |x|>b+T} = \sigma_n|_{y=0, |x|>b+T} = 0.$$

Исходя из вышесказанного, в дальнейшем под контуром  $\Gamma$  будем понимать отрезок  $[-b-T, b+T]$  оси  $Ox$  и контур полости  $\gamma$ . Заметим, что контур  $\Gamma$  можно полагать односвязным, проведя разрез в плоскости  $Oxy$  как показано на рисунке 3.3. Так как при этом интегралы по берегам разреза (контурам  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ ), входящие в граничное интегральное уравнение, вследствие противоположного направления обхода контуров  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , сокращаются (рисунок 3.4).

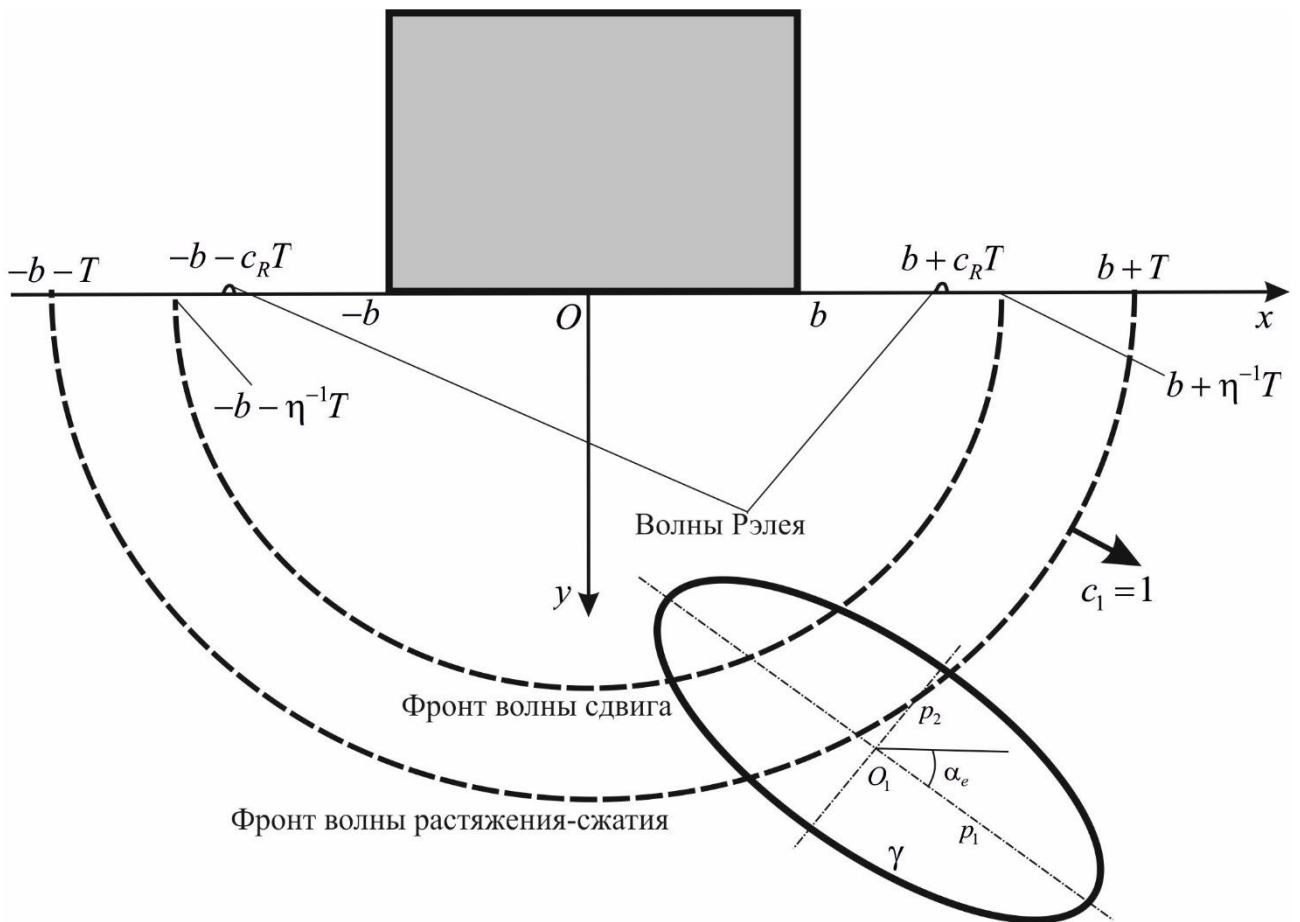


Рисунок 3.4. Волновые фронты

Тогда в уравнении (3.8) все интегралы становятся определёнными и оно примет вид

$$\int_{-b}^{-b} (\sigma_n * u_n' - \sigma_s' * u_s) dx - \int_{-b-T}^{-b} (\sigma_s' * u_s + \sigma_n' * u_n) dx - \int_b^{b+T} (\sigma_s' * u_s + \sigma_n' * u_n) dx - \int_{\gamma} (\sigma_s' * u_s + \sigma_n' * u_n) ds = \int_{-b}^{-b} \sigma_n' * w_s dx. \quad (3.9)$$

Заметим, что правая часть уравнения (3.9) содержит под интервалом перемещения  $w_s$  подошвы штампа, которые определяются из уравнений (3.3)-(3.5).

Таким образом, уравнение (3.9) совместно с (3.3)-(3.5) составляют замкнутую систему разрешающих уравнений нестационарной контактной задачи для абсолютно твёрдого ударника и упругого полупространства с полостью.

### § 3.3. Алгоритм решения

Для унификации и программной реализации разрабатываемого алгоритма удобно связать с каждым граничным элементом цифровой код, который определяет тип граничных условий, задаваемых на этом элементе. Положим, что если на граничном элементе заданы напряжения  $\sigma_s$  и  $\sigma_n$ , то с этим элементом связывается код равный 1. Если на элементе заданы перемещения  $u_s$  и  $u_n$ , то он имеет код 2. При известных тангенциальных напряжениях  $\sigma_s$  и нормальных перемещениях  $u_n$  элемент имеет код 3. Наконец, если на элементе заданы нормальные напряжения  $\sigma_n$  и тангенциальные перемещения  $u_s$ , то с ним связывается код со значением 4. Таким образом, назначения граничным элементам соответствующих кодов от 1 до 4 позволяет охватить все возможные типы граничных условий, включая условия свободного проскальзывания и жесткого сцепления в начально-краевых и контактных задачах.

Первым этапом алгоритма решения является задание граничных элементов, аппроксимирующих контур  $\Gamma$  (рисунок 3.5). Для задания граничных элементов на контуре полости запишем уравнение эллипса с центром в точке  $O_1 = (x_0, y_0)$  и полуосями  $p_1$  и  $p_2$  в параметрической форме:

$$\begin{aligned} (x - x_0) \cos \alpha_e + (y - y_0) \sin \alpha_e &= p_1 \cos t, \\ -(x - x_0) \sin \alpha_e + (y - y_0) \cos \alpha_e &= p_2 \sin t, \end{aligned} \quad (3.10)$$

где  $t \in [0, 2\pi)$  – параметр.



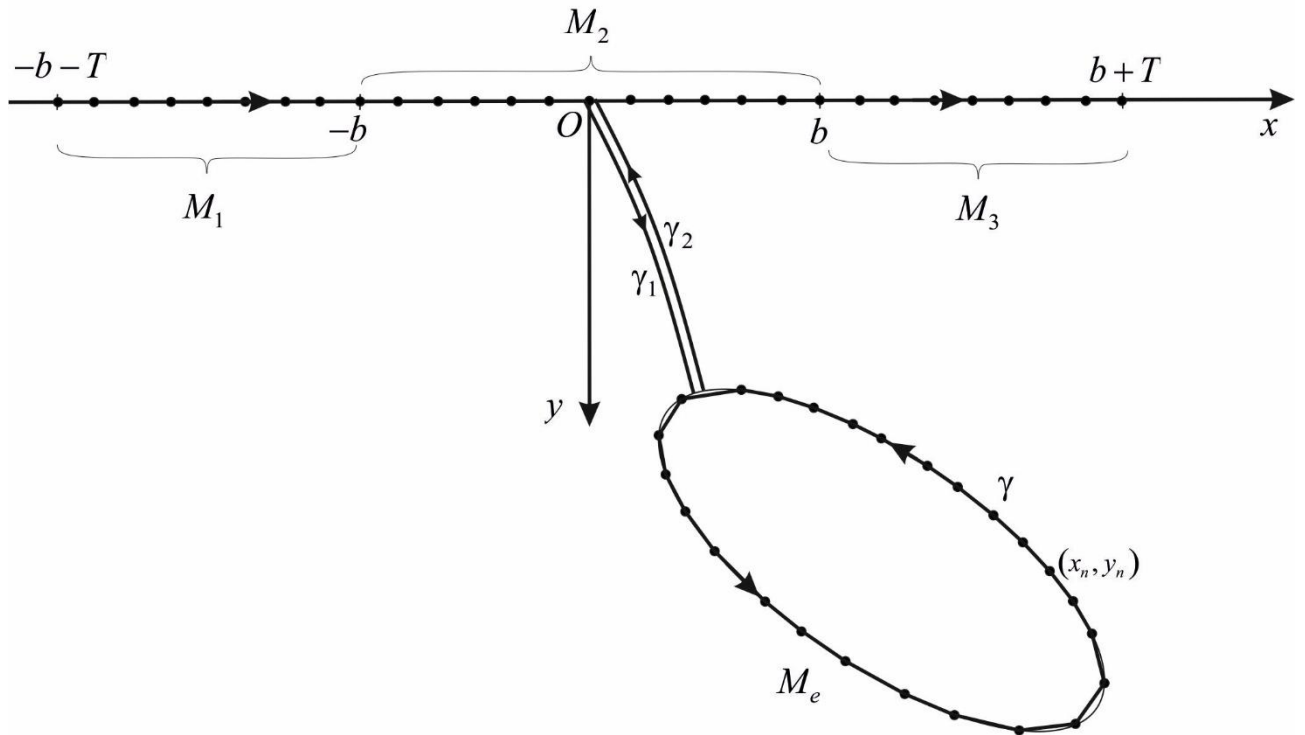


Рисунок 3.5. Схема граничных элементов

Решая систему (3.10) относительно  $x$  и  $y$ , получаем

$$\begin{aligned} x &= x_0 + p_1 \cos(t) \cos(\alpha_e) - p_2 \sin(t) \sin(\alpha_e), \\ y &= y_0 + p_2 \sin(t) \cos(\alpha_e) + p_1 \sin(\alpha_e) \cos(t). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Задаваясь теперь желаемым количеством граничных элементов на эллипсе  $M_e$  и полагая  $t_n = \frac{2\pi}{M_e} n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots, M_e - 1$  получим  $M_e$  пар значений  $(x_n, y_n)$ , определяющих координаты крайних точек элементов, аппроксимирующих границу эллиптической полости. Они, в совокупности с  $M_1 + M_2 + M_3$  граничными элементами, аппроксимирующими отрезок  $|x| \leq b + T$  оси  $Ox$ , составляют схему граничных элементов на которых будет строиться решение контактной задачи для отрезка времени  $\tau \in [0, T]$  (рисунок 3.3).

В соответствии с построенной схемой граничных элементов и опираясь на результаты § 2.4 построим дискретный аналог основного разрешающего уравнения (3.9):

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{M_1} \left( u_s^{N,j} a_{ss,ij}^N + u_n^{N,j} a_{ns,ij}^N \right) + \sum_{j=M_1+1}^{M_1+M_2} \left( u_s^{N,j} a_{ss,ij}^N - \sigma_n^{N,j} b_{ns,ij}^N \right) + \\
& + \sum_{j=M_1+M_2+1}^{M_1+M_2+M_3} \left( u_s^{N,j} a_{ss,ij}^N + u_n^{N,j} a_{ns,ij}^N \right) + \sum_{j=M_1+M_2+M_3+1}^M \left( u_s^{N,j} a_{ss,ij}^N + u_n^{N,j} a_{ns,ij}^N \right) = F_{si}^N, \\
& \sum_{j=1}^{M_1} \left( u_s^{N,j} a_{sn,ij}^N + u_n^{N,j} a_{nm,ij}^N \right) + \sum_{j=M_1+1}^{M_1+M_2} \left( u_s^{N,j} a_{sn,ij}^N - \sigma_n^{N,j} b_{nm,ij}^N \right) + \\
& + \sum_{j=M_1+M_2+1}^{M_1+M_2+M_3} \left( u_s^{N,j} a_{sn,ij}^N + u_n^{N,j} a_{nm,ij}^N \right) + \sum_{j=M_1+M_2+M_3+1}^M \left( u_s^{N,j} a_{sn,ij}^N + u_n^{N,j} a_{nm,ij}^N \right) = F_{ni}^N, \\
& F_{si}^N = - \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{j=M_1+1}^{M_1+M_2} u_n^{k,j} a_{ns,ij}^k, \quad F_{ni}^N = - \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{j=M_1+1}^{M_1+M_2} u_n^{k,j} a_{nm,ij}^k, \quad i = \overline{1, M}, \\
& M = M_1 + M_2 + M_3 + M_e
\end{aligned}$$

(3.12)

Система (3.12) содержит  $2M$  с  $2M$  неизвестными (граничные значения перемещений и напряжений на контуре  $\Gamma$ ). До замкнутой системы уравнений она дополняется дискретными аналогами уравнений (3.3)-(3.5):

$$\begin{aligned}
w_{p,k} &= \frac{V_0 k \Delta t}{m} + \frac{\Delta t^2}{2m} \sum_{l=1}^k \sum_{j=M_1+1}^{M_1+M_2} (x_j - x_{j-1}) [2(k-l)+1] \sigma_n^{l,j}, \\
\Phi_k &= \frac{\Delta t^2}{4J} \sum_{l=1}^k \sum_{j=M_1+1}^{M_1+M_2} (x_j^2 - x_{j-1}^2) [2(k-l)+1] \sigma_n^{l,j}, \\
u_n^{k,j} &= w_s \left( \frac{x_j + x_{j-1}}{2}, k \Delta t \right) = w_{p,k} - \frac{\Phi_k}{2} \sqrt{4a^2 + (x_j + x_{j-1})^2} \sin \frac{x_j + x_{j-1}}{\sqrt{4a^2 + (x_j + x_{j-1})^2}},
\end{aligned}$$

(3.13)

где  $x_{j-1}$ ,  $x_j$  – координаты начала и конца  $j$ -того элемента, расположенного под подошвой ударника в глобальной системе координат  $Oxy$ .

Систему уравнений (3.12) можно привести к векторно-матричной форме записи. Для этого удобно использовать коды элементов, описанные в начале параграфа, классифицирующие элементы по типу граничных условий:

$$A^N \mathbf{b}^N = \mathbf{f}^N, \quad (3.14)$$

$$A^N = (a_{ij}^N)_{2M \times 2M}, \quad \mathbf{b}^N = (b_j^N)_{2M \times 1}, \quad \mathbf{f}^N = (f_i^N)_{2M \times 1},$$

$$a_{ij}^N, a_{ij+1}^N = \begin{cases} a_{ss,ij}^N, a_{ns,ij}^N, \text{ kod} = 1, i = \overline{1, M}; \\ b_{ss,ij}^N, b_{ns,ij}^N, \text{ kod} = 2, i = \overline{1, M}; \\ a_{ss,ij}^N, b_{ns}^{N,j}, \text{ kod} = 3, i = \overline{1, M}; \\ a_{ns,ij}^N, \sigma_{ss}^{N,j}, \text{ kod} = 4, i = \overline{1, M}; \\ a_{sn,ij}^N, a_{nn,ij}^N, \text{ kod} = 1, i = \overline{M+1, 2M}; \\ b_{sn,ij}^N, b_{nn,ij}^N, \text{ kod} = 2, i = \overline{M+1, 2M}; \\ a_{sn,ij}^N, b_{nn}^{N,j}, \text{ kod} = 3, i = \overline{M+1, 2M}; \\ a_{nn,ij}^N, \sigma_{sn}^{N,j}, \text{ kod} = 4, i = \overline{M+1, 2M}. \end{cases}$$

$$b_j^N, b_{j+1}^N = \begin{cases} u_s^{N,j}, u_n^{N,j}, \text{ kod} = 1; \\ \sigma_s^{N,j}, \sigma_n^{N,j}, \text{ kod} = 2; \\ u_s^{N,j}, \sigma_n^{N,j}, \text{ kod} = 3; \\ u_n^{N,j}, \sigma_s^{N,j}, \text{ kod} = 4. \end{cases}$$

$$f_i^N = \begin{cases} F_{si}^N, i = \overline{1, M}; \\ F_{ni}^N, i = \overline{M+1, 2M}, \end{cases}$$

где *kod* означает код элемента.

Отметим, что применительно к рассматриваемой задаче граничным элементам, расположенным под подошвой ударника, соответствует *kod* = 3, а элементам на границе полупространства вне подошвы ударника и элементам на границе полости – *kod* = 1. Таким образом в рассматриваемой задаче используются только два типа граничных элементов относительно сопоставляемых с ними кодов и, соответственно, типов граничных условий или условий контакта.

К системе уравнений (3.14) по-прежнему добавляются уравнения (3.13), определяющие нормальные перемещения под подошвой ударника.

Отметим ещё, что в соответствии с начальными условиями  $f_i^1 \equiv 0$ .

Таким образом, на каждом шаге по времени из системы уравнений (3.13) – (3.14) определяются все граничные значения искомых функций – перемещений и напряжений, включая кантатные напряжения под подошвой ударника.

Для контроля сходимости в алгоритме реализована процедура адаптивного подбора шага по времени. На каждом шаге проводится оценка погрешности

$$\|\Delta_N\| < \varepsilon, \Delta_N = \max_j |u_n^{N,j} - u_n^{N-1,j}|, \quad (3.15)$$

где  $\varepsilon$  – требуемая точность.

Если неравенство (3.15) не выполняется, то на текущем цикле по времени шаг уменьшается в 2 раза и выполняется пересчёт значений искомых функций на данном шаге по времени. Затем значение шага возвращается к выбранному начальному значению. Таким образом, алгоритм позволяет легко реализовать адаптивный подбор шага  $\Delta t$  на каждом цикле по времени.

Отметим, что коэффициенты системы уравнений (3.14), представляющие собой соответствующие интегралы от функций влияния для упругой плоскости, могут содержать особенности порядка  $x^{-\alpha}$ ,  $\alpha > 0$ . В случае, когда  $\alpha \leq 1/2$  соответствующая особенность будет слабой, в том смысле, что интеграл от функции с такой особенностью существует как несобственный интеграл второго рода. В случае же когда  $\alpha > 1/2$ , особенность является сильной, а соответствующий интеграл является сингулярным и понимается в смысле главного значения:

$$\int_{-a}^a \frac{f(x)}{x^\alpha} = \int_{-a}^a \frac{f(x) - f(0)}{x^\alpha} dx, \quad \alpha=1;$$

$$\int_{-a}^a \frac{f(x)}{x^\alpha} = \int_{-a}^a \frac{f(x) - f(0) - \sum_{m=1}^{[\alpha]} \frac{f^{(m)}(0)}{m!} x^m}{x^\alpha} dx + \sum_{m=1}^{[\alpha]} \frac{f^{(m)}(0)}{m!} \int_{-a}^a \frac{dx}{x^{\alpha-m}}, \quad \alpha > 0,$$

$$\int_{-a}^a \frac{dx}{x^{\alpha-m}} = -\frac{a^{m-\alpha-1}}{\alpha-m+1} \left[ 1 + (-1)^{m-\alpha-1} \right].$$

(3.16)

где  $[\alpha]$  означает целую часть числа  $\alpha$ .

Соответствующие интегралы от регулярных функций и функций со слабыми особенностями вычисляются численно с применением метода Гаусса. При наличии сингулярных особенностей интеграл представляется в виде суммы регулярной и сингулярной части, как показано в (3.16). При этом регулярная часть вычисляется численно по методу Гаусса, а сингулярная – аналитически.

### **§ 3.4. Учет частичного отрыва граничных поверхностей ударника и полупространства**

Отметим, что в процессе контактного взаимодействия возможен частичный отрыв граничных поверхностей ударника и полупространства в зоне контакта (рисунок 3.6). Для учёта этого эффекта необходимо моделировать алгоритм, описанный в предыдущем параграфе с добавлением итерационного процесса уточнения области контакта с учётом деформируемости границы полупространства  $y = 0$ .

При учёте частичного отрыва граничных поверхностей полупространства и ударника принимается во внимание возможная многосвязность области контакта. За поверхность, на которой ставятся граничные условия, по-прежнему принимаются недеформированные границы полупространства и полости.

При построении итерационного алгоритма решения задачи в качестве нулевого приближения принимается решение, полученное с помощью алгоритма, описанного в § 3.3. Для учета деформируемости граничных поверхностей к алгоритму § 3.3 добавляется итерационная процедура, выполняемая на каждом шаге по времени при реализации алгоритма. Она состоит в следующем.

Область контактного взаимодействия на нулевой итерации предполагается односвязной. Ее границы, также как и перемещения ударника определяется из уравнений (3.3)-(3.5) при реализации алгоритма § 3.3. На текущем временном шаге  $\tau_k = k\Delta t$  из решения системы уравнений (3.14) находятся перемещения границ полупространства и ударника, а также определяется распределение контактного давления по области взаимодействия.

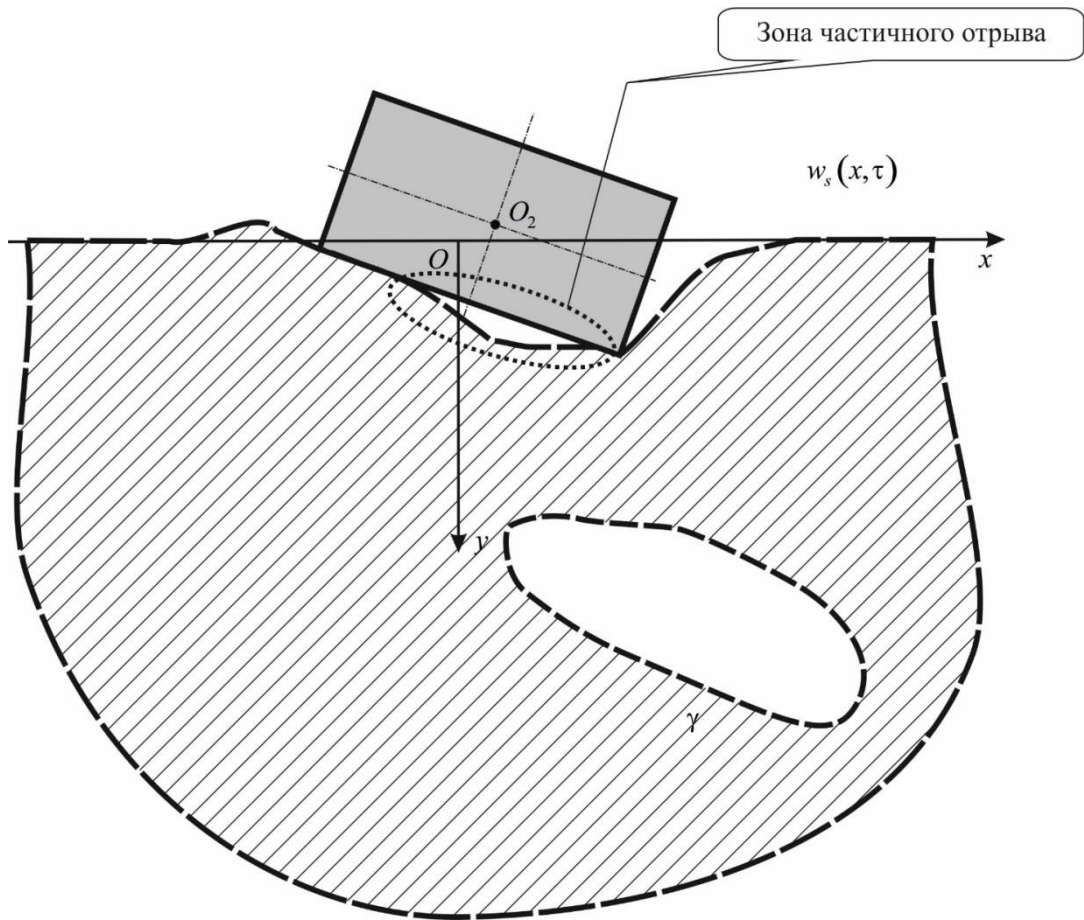


Рисунок 3.6. Частичный отрыв граничных поверхностей

Далее вычисляется разность нормальных перемещений подошвы ударника и границы полупространства  $\Delta_{wjk}$ :

$$\Delta_{wjk} = \Delta_w(x_j, \tau_k), \quad (3.17)$$

$$\Delta_w(x, \tau) = w_s(x, \tau) - w_0(x, \tau), \quad w_0(x, \tau) = u_n|_{y=0}.$$

Если на текущем временном шаге  $\tau_k$  для некоторой области, принадлежащей свободной поверхности полупространства, разность перемещений  $\Delta_{wjk}$  отлична от нуля, то граничные элементы, принадлежащие этой области, приобретают код, равный 1 и таким образом исключаются из элементов, принадлежащих области контакта на следующей итерации. Также

из области контакта исключаются элементы с наличием неотрицательных нормальных напряжений. После уточнения зоны контакта с учетом возможной ее многосвязности производится повторный расчет граничных значений всех искомых функций (напряжений и перемещений).

Анализ сходимости итерационного процесса поводится по норме разности между двумя сеточными функциями нормальных перемещений, определенных на текущей и на предыдущей итерации. Если ее величина не превышает одной сотой длины наименьшего граничного элемента, то итерационный процесс останавливается, и алгоритм переходит к выполнению расчетов на следующем временном шаге.



### § 3.5. Примеры расчётов

Рассмотрим плоскую нестационарную контактную задачу о внедрении абсолютно жесткого ударника, имеющего прямоугольное в плане сечения с размерами  $b=0.5$ ,  $a=0.25$ , в полупространство с эллиптической полостью. Геометрия полости характеризуется полуосями, равными  $p_1=0.25$ ,  $p_2=0.125$  и углом  $\alpha_e = \pi/4$  между большей полуосью и осью  $Ox$  глобальной декартовой системы координат  $Oxy$ . Центр полости расположен в точке  $O_1(0.5, 0.7)$  (рисунок 3.7).

В качестве материала полупространства примем сталь, что соответствует значению  $\eta=1.87$ .

Положим, что начальная скорость движения ударника равна  $V_0=0.1$ .

Время расчёта положим равным  $T=3$ , число шагов по времени – 300, количество граничных элементов на эллипсе  $M_e=30$ , под подошвой штампа,  $M_2=20$ , на участках свободной границы вне штампа  $M_1=M_3=60$ .

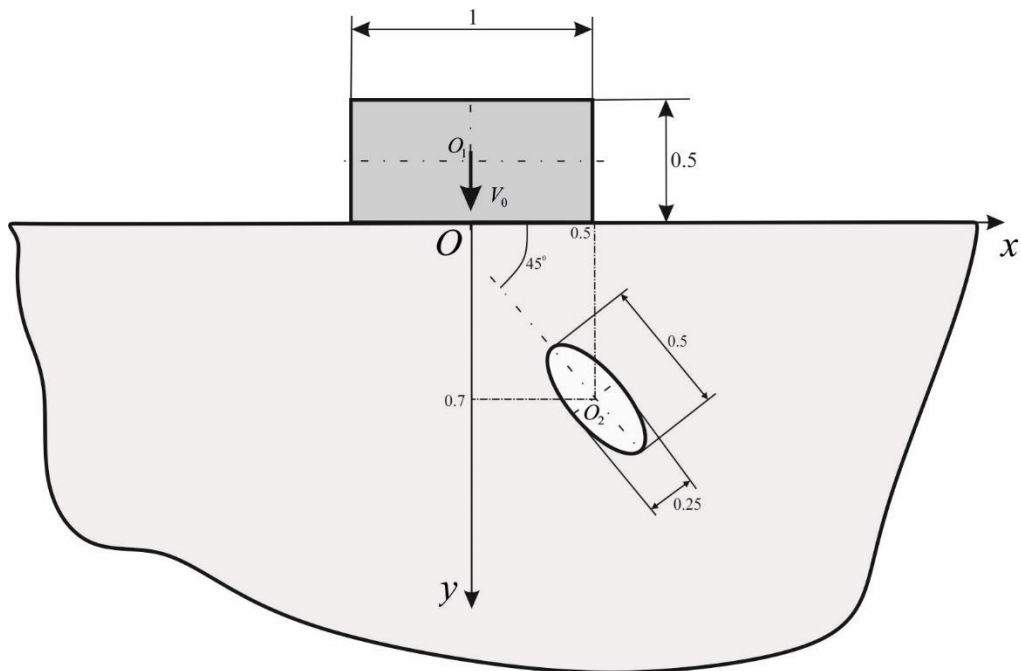


Рисунок 3.7. Пример расчёта

На рисунке 3.8 показан график перемещения центра масс ударника  $w_c$  в зависимости от времени  $\tau$ . Видно, что при  $\tau = 1.15$  центра масс начинает двигаться в направлении противоположном направлению оси  $x$ , т.е. при  $\tau = 1.15$  наступает момент начала отскока.

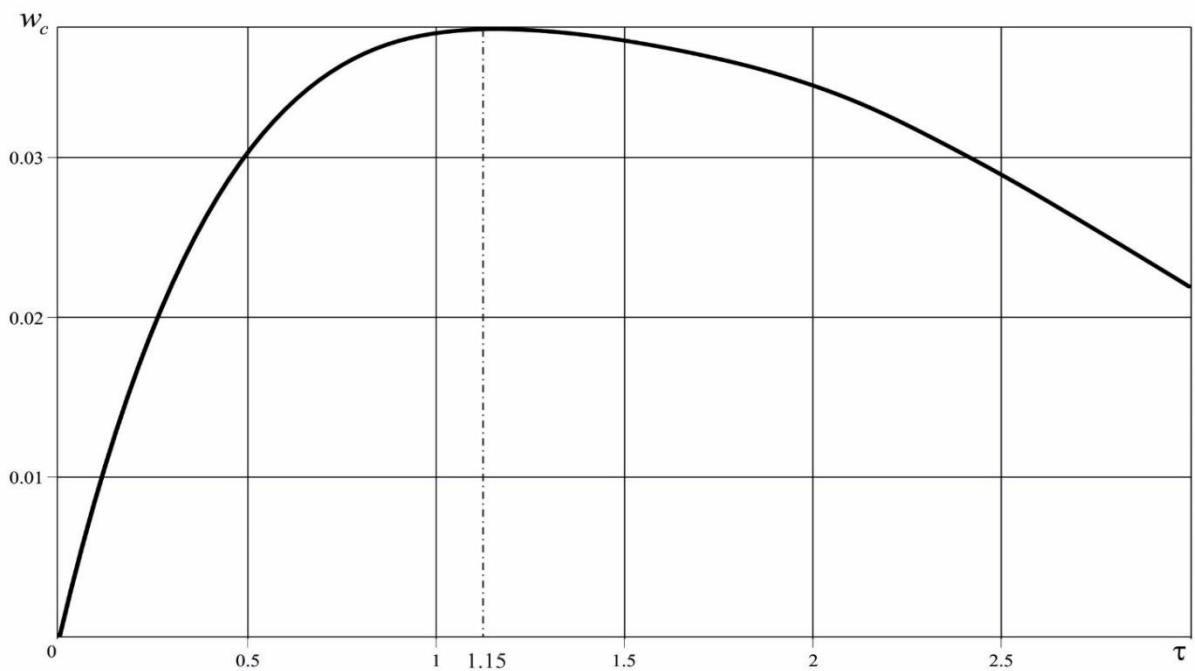


Рисунок 3.8. Перемещение центра масс ударника

Рисунок 3.9 иллюстрирует зависимость скорости  $V$  центра масс ударника от времени. Из графика видно, что при  $\tau = 1.15$  скорость движения центра масс обращается в ноль, а после этого момента принимает отрицательные значения, что соответствует началу отскока ударника.

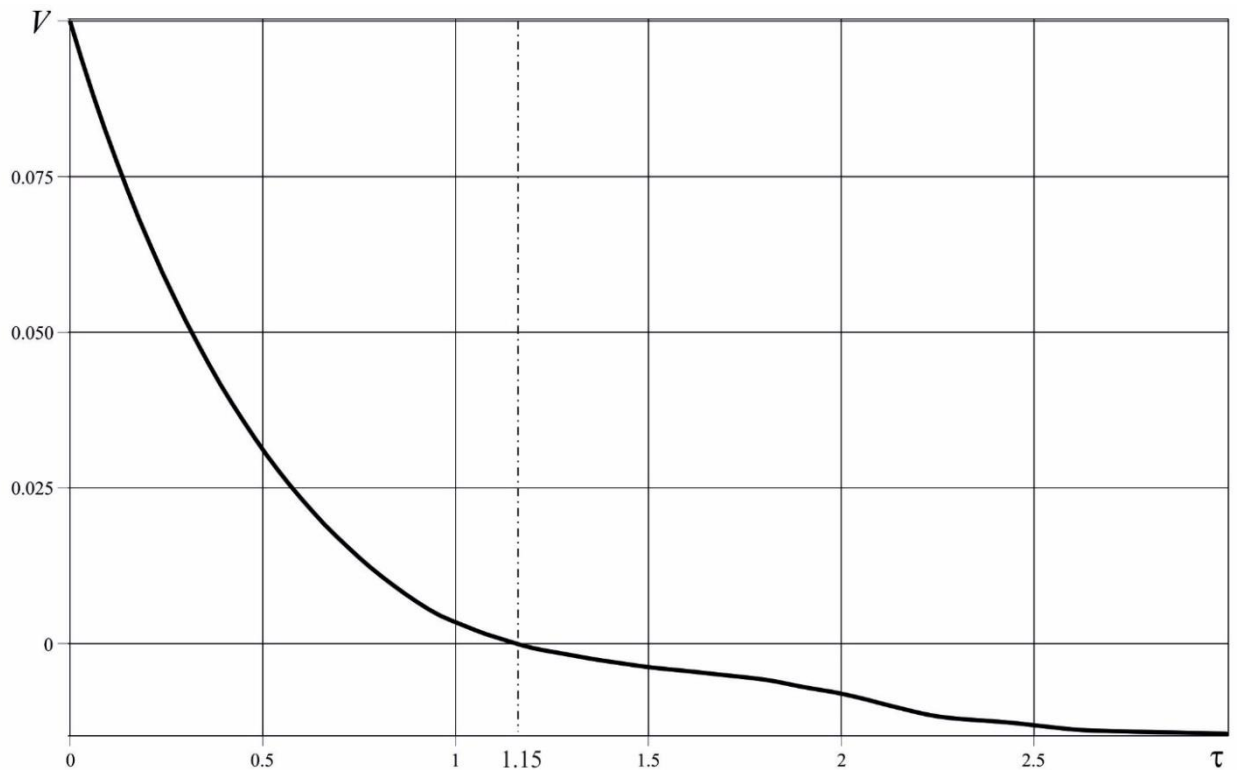


Рисунок 3.9. Скорость центра масс ударника

На рисунке 3.10 представлены распределения контактного давления  $p = -\sigma_n|_{y=0}$  под подошвой ударника в моменты времени  $\tau = 0.2$  (сплошная кривая),  $\tau = 0.4$  (штриховая кривая) и  $\tau = 0.6$  (штрих-пунктирная кривая). Видно, что контактное давление на всех графиках распределено симметрично вертикальной оси симметрии сечения ударника. Это согласуется с тем фактом, что упругие волны, отраженные от границы полости, в эти моменты времени ещё не успевают достичь границы полупространства и своим воздействием повлиять на характер распределения контактного давления. Также из результатов следует, что контактное давление значительно возрастает по мере приближения к границам штампа, что качественно хорошо согласуется с известными результатами решений соответствующих плоских статических контактных задач для абсолютно твёрдых штампов и упругого полупространства без полостей.

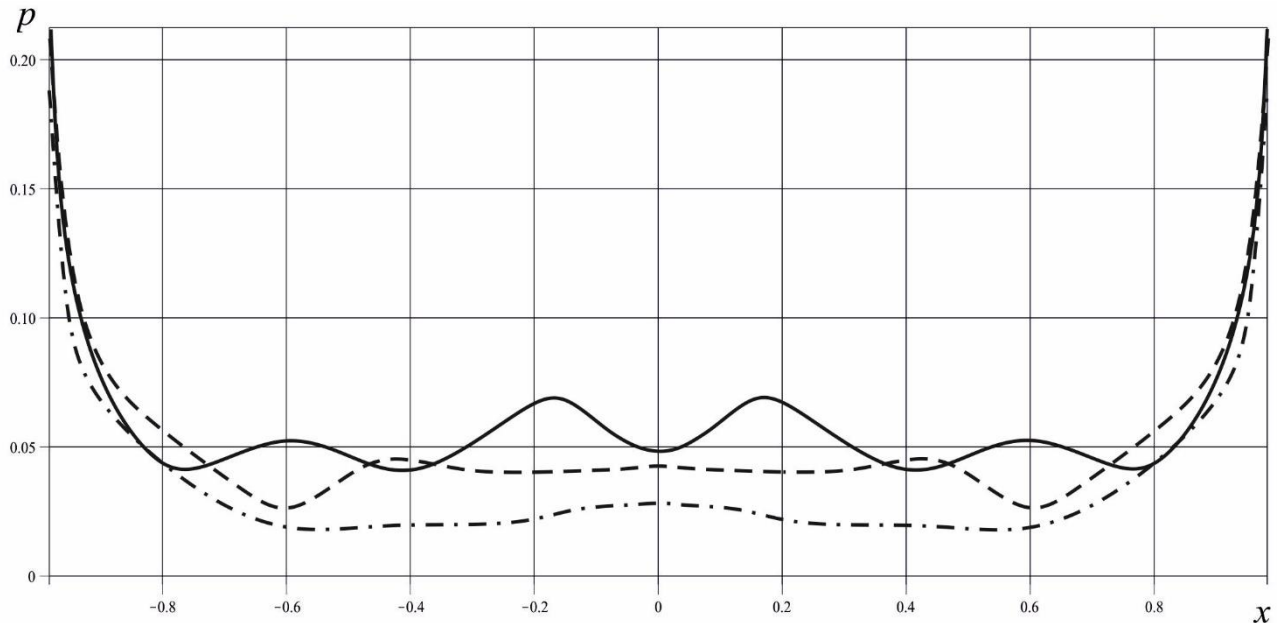


Рисунок 3.10. Распределения контактных напряжений при  $\tau = 0.2$  (сплошная кривая),  $\tau = 0.4$  (штриховая кривая) и  $\tau = 0.6$  (штрих-пунктирная кривая)

На рисунке 3.11 представлены распределения контактного давления под подошвой ударника в моменты времени  $\tau = 0.5$  (сплошная кривая),  $\tau = 1$  (штриховая кривая) и  $\tau = 1.5$  (штрих-пунктирная кривая). Из результатов видно, что при  $\tau \geq 1$  распределения контактных напряжений носит несимметричный характер и, мало того, появляются подобласти в которых контактные напряжения обращаются в ноль. Это объясняется приходом отраженных волн от границы эллиптической полости. Таким образом, начиная с момента времени  $\tau = 1$  на распределение контактных напряжений начинает оказывать влияние наличие полости в полупространстве. До этого момента контактные напряжения распределяются так, как будто полупространство является сплошным. Происходит это потому, что возмущения в полупространстве распространяются с конечными скоростями.

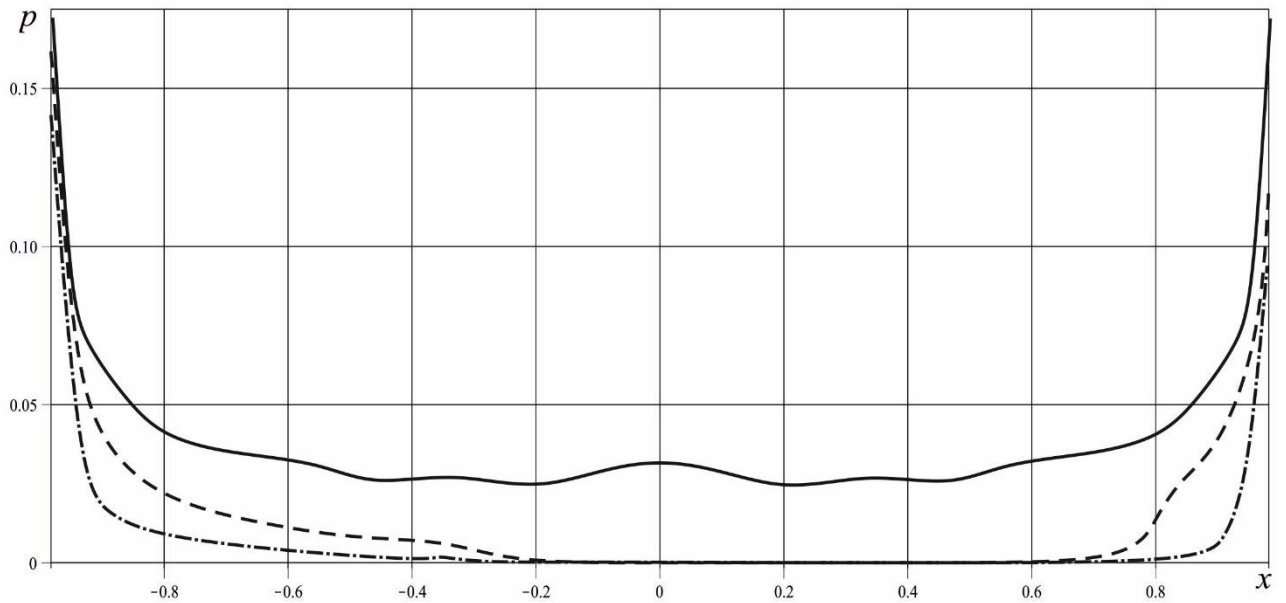


Рисунок 3.11. Распределения контактных напряжений  $\tau = 0.5$  (сплошная кривая),  $\tau = 1$  (штриховая кривая) и  $\tau = 1.5$  (штрих-пунктирная кривая)

Кривые на рисунке 3.12 иллюстрируют распределения контактного давления под подошвой ударника в моменты времени  $\tau = 1$  (сплошная кривая),  $\tau = 2$  (штриховая кривая) и  $\tau = 3$  (штрих-пунктирная кривая). Здесь уже во все рассмотренные моменты времени наблюдается совершенно явное влияние полости. Распределения контактного давления существенно несимметричны в каждый из рассмотренных моментов времени.

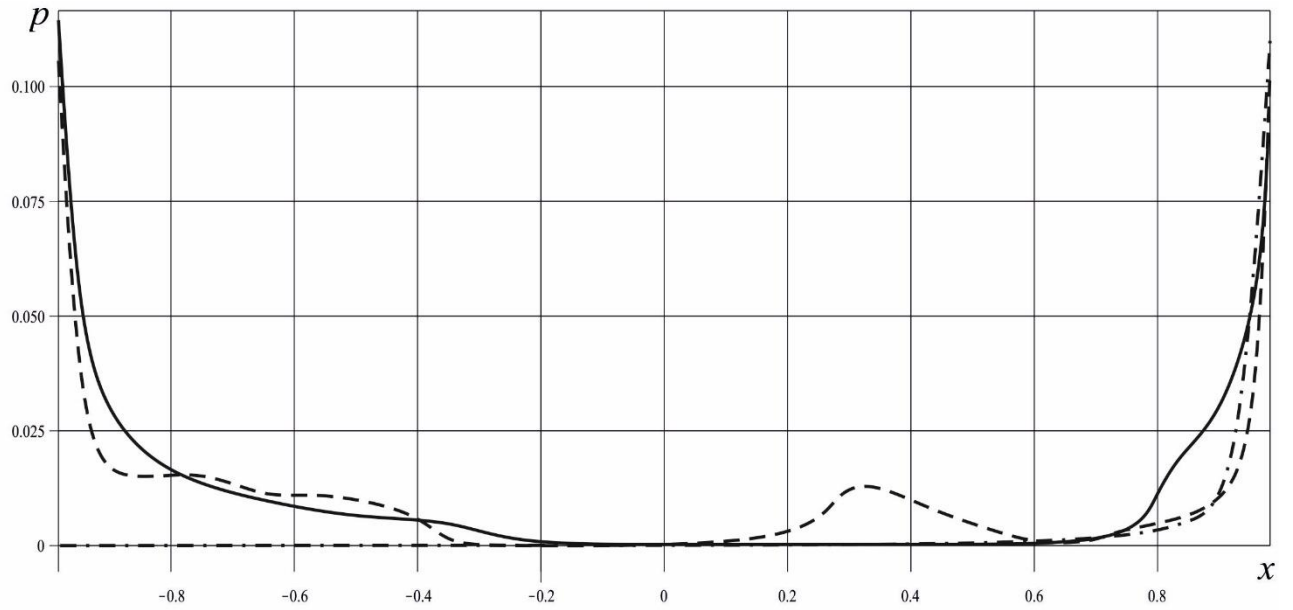


Рисунок 3.12. Распределения контактных напряжений  $\tau = 1$  (сплошная кривая),  $\tau = 2$  (штриховая кривая) и  $\tau = 3$  (штрих-пунктирная кривая)

На рисунке 3.13 представлены зависимости контактного давления от времени. Сплошная кривая соответствует точке с координатой  $x = 0.95$  (вблизи угловой точки ударника), штриховая –  $x = 0.25$ , штрих-пунктирная –  $x = 0$ . Хорошо видно существенное различие в значениях контактного давления.

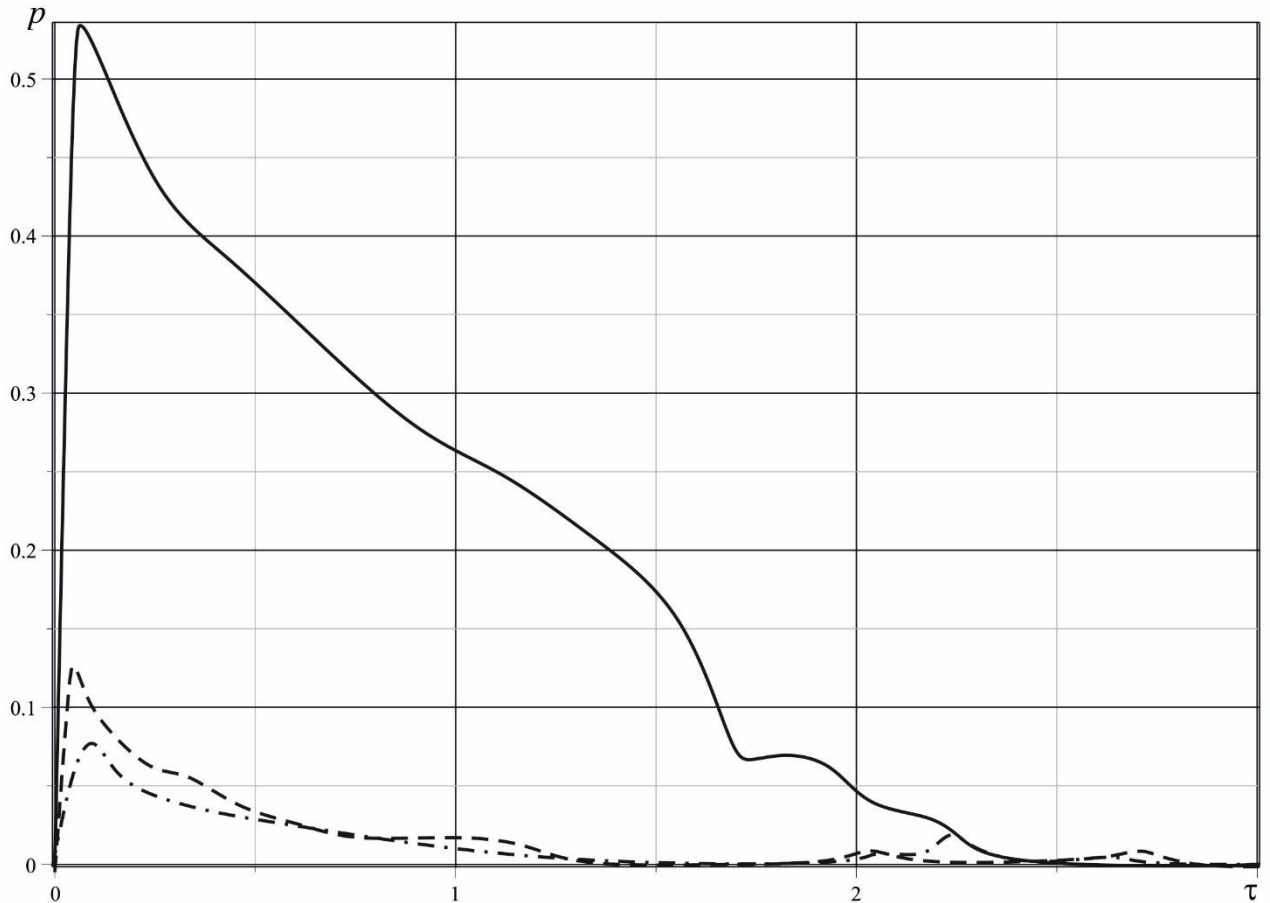


Рисунок 3.13. Зависимость контактного давления в различных точках ( $x = 0.95$  – сплошная кривая,  $x = 0.25$  – штриховая,  $x = 0$  – штрих-пунктирная)

Перейдём теперь к анализу перемещений.

На рисунке 3.14 показаны перемещения подошвы ударника  $w_s(x, \tau)$  в моменты времени  $\tau = 0.2$  (сплошная линия),  $\tau = 0.4$  (штриховая линия) и  $\tau = 0.6$  (штрих-пунктирная линия). При этом влияние полости пока ещё не сказывается и, как видно из графиков, распределения перемещений имеют равномерный характер по координате  $x$ , что хорошо согласуется с механикой волновых процессов до момента прихода отраженных волн от границы полости.

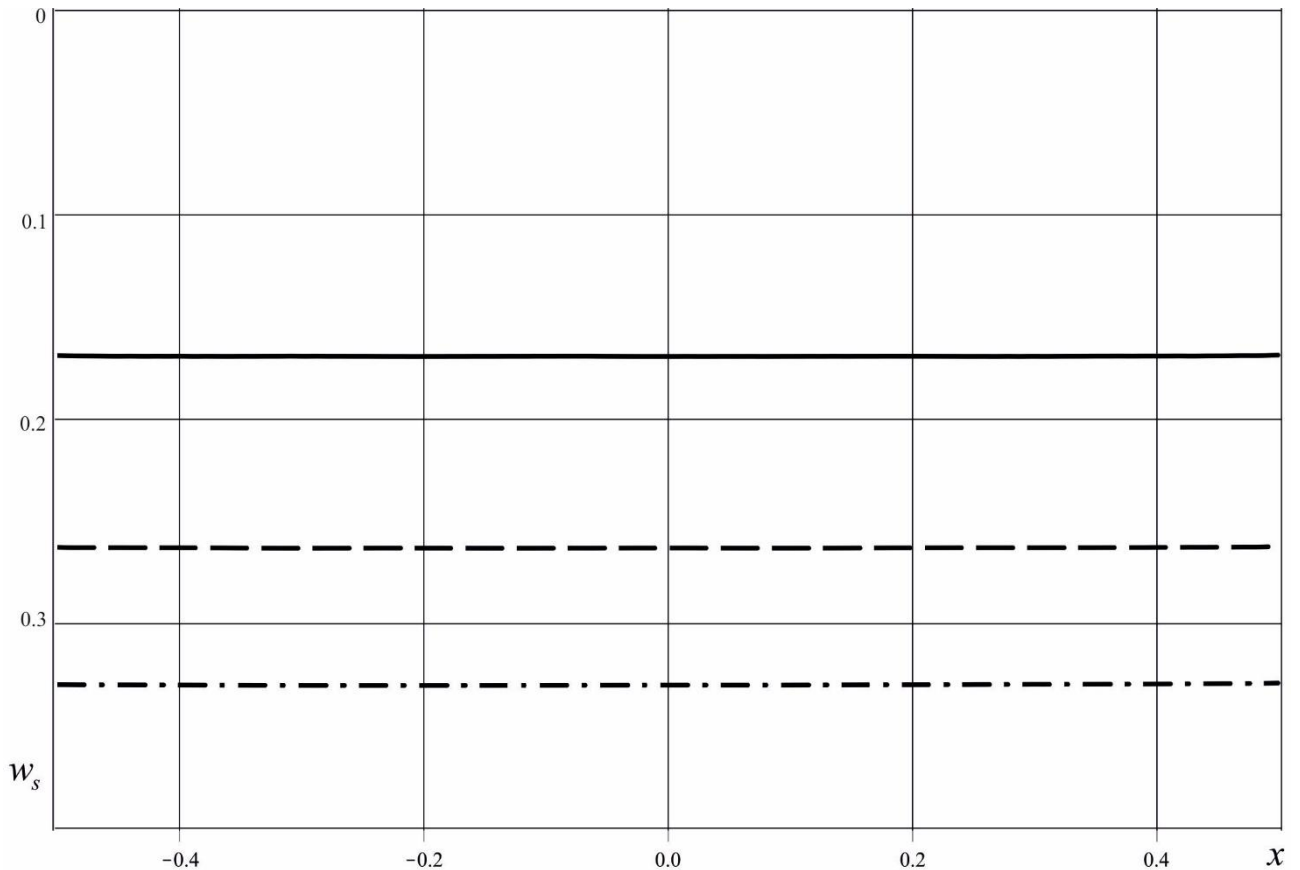


Рисунок 3.14. Распределение перемещений ударника в различные моменты времени:  $\tau = 0.2$  (сплошная линия),  $\tau = 0.4$  (штриховая линия) и  $\tau = 0.6$  (штрих-пунктирная линия)

Аналогичные результаты, но для моментов времени  $\tau = 1$  (сплошная линия),  $\tau = 2$  (штриховая линия) и  $\tau = 3$  (штрих-пунктирная линия) отображены на рисунке 3.15. Здесь видно, что при  $\tau > 1$  подошва ударника (как и сам ударник) начинает поворачиваться. Это происходит из-за того, что при  $\tau > 1$  ударник начинает ощущать влияние полости. Как будет видно далее, граница упругого полупространства начинает интенсивно «проседать» в точках, расположенных наиболее близко к границе полости. За счёт этого эффекта податливости среды за счёт полости ударник начинает поворачиваться. Именно для учёта этого эффекта в постановку задачи было привлечено уравнение (3.4) вращательного движения штампа.



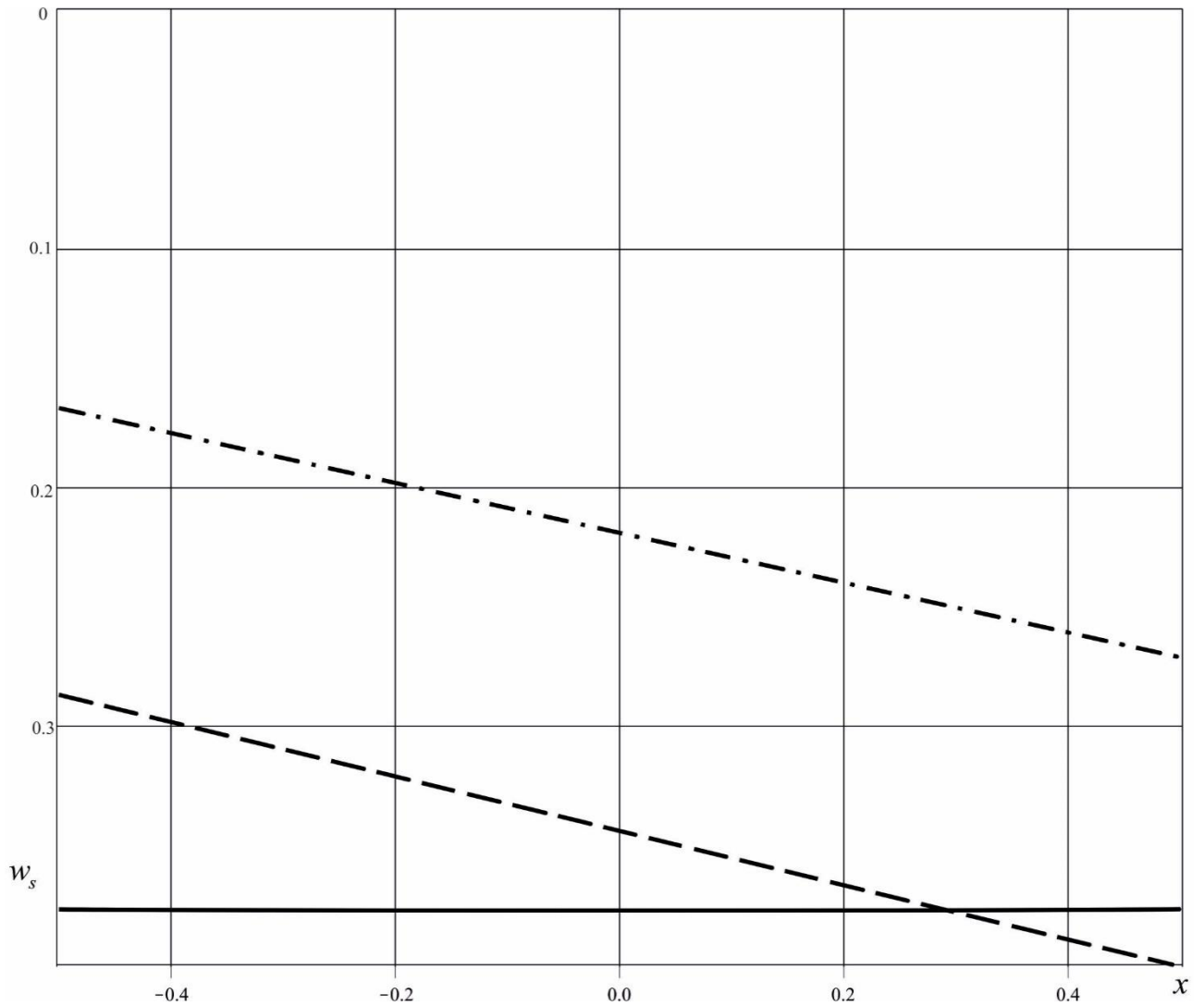


Рисунок 3.15. Распределение перемещений ударника в различные моменты времени:  $\tau = 1$  (сплошная линия),  $\tau = 2$  (штриховая линия) и  $\tau = 3$  (штрих-пунктирная линия)

Распределения нормальных перемещений границы полупространства  $w = u_n|_{y=0}$  в моменты времени  $\tau = 0.2$  (сплошная кривая),  $\tau = 0.4$  (штриховая кривая) и  $\tau = 0.6$  (штрих-пунктирная кривая) показаны на рисунке 3.16. Здесь также наблюдается симметричный характер распределений по отношению к оси симметрии поперечного сечения ударника – влияние полости пока ещё не успело проявиться.

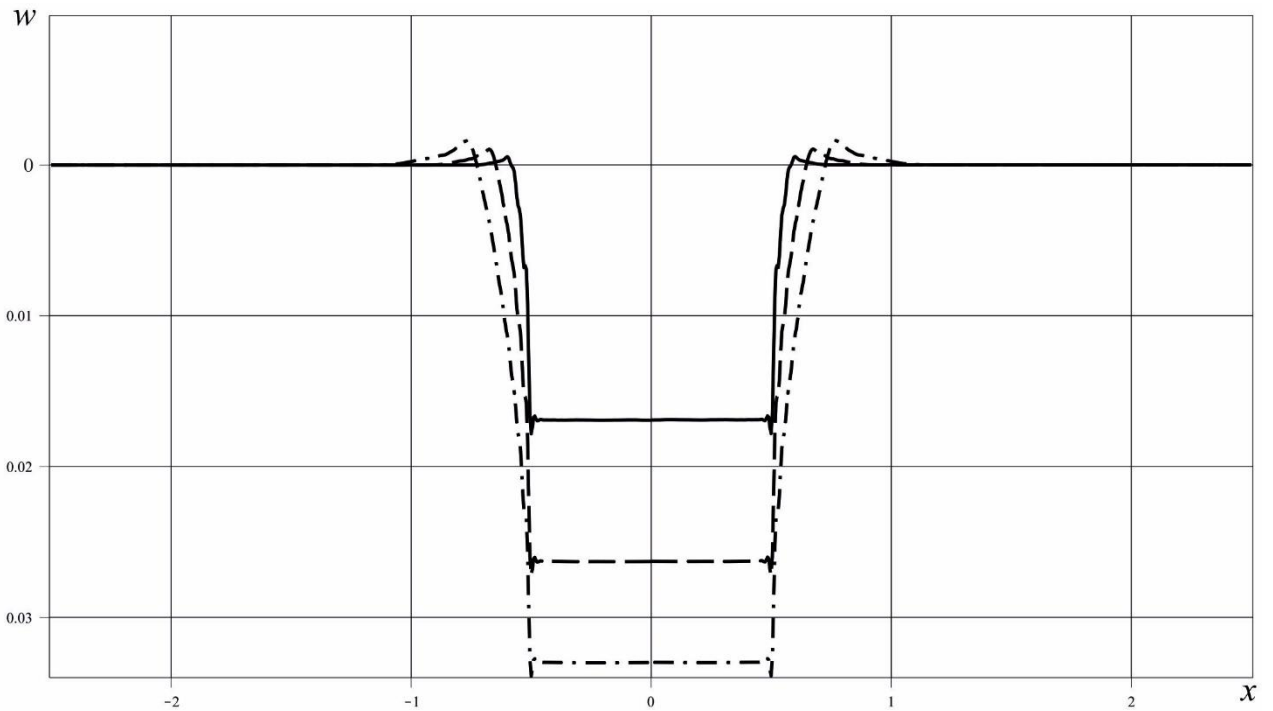


Рисунок 3.16. Распределение нормальных перемещений границы полупространства в различные моменты времени:  $\tau = 0.2$  (сплошная линия),  $\tau = 0.4$  (штриховая линия) и  $\tau = 0.6$  (штрих-пунктирная линия)

Аналогичные графики представлены на рисунке 3.17, но для моментов времени  $\tau = 1$  (сплошная кривая),  $\tau = 2$  (штриховая кривая) и  $\tau = 3$  (штрих-пунктирная кривая). А вот тут уже явно заметно влияние полости, вызванное приходом отраженных волн от её границы, что проявляется в явном несимметричном характере распределений при  $\tau > 1$ .

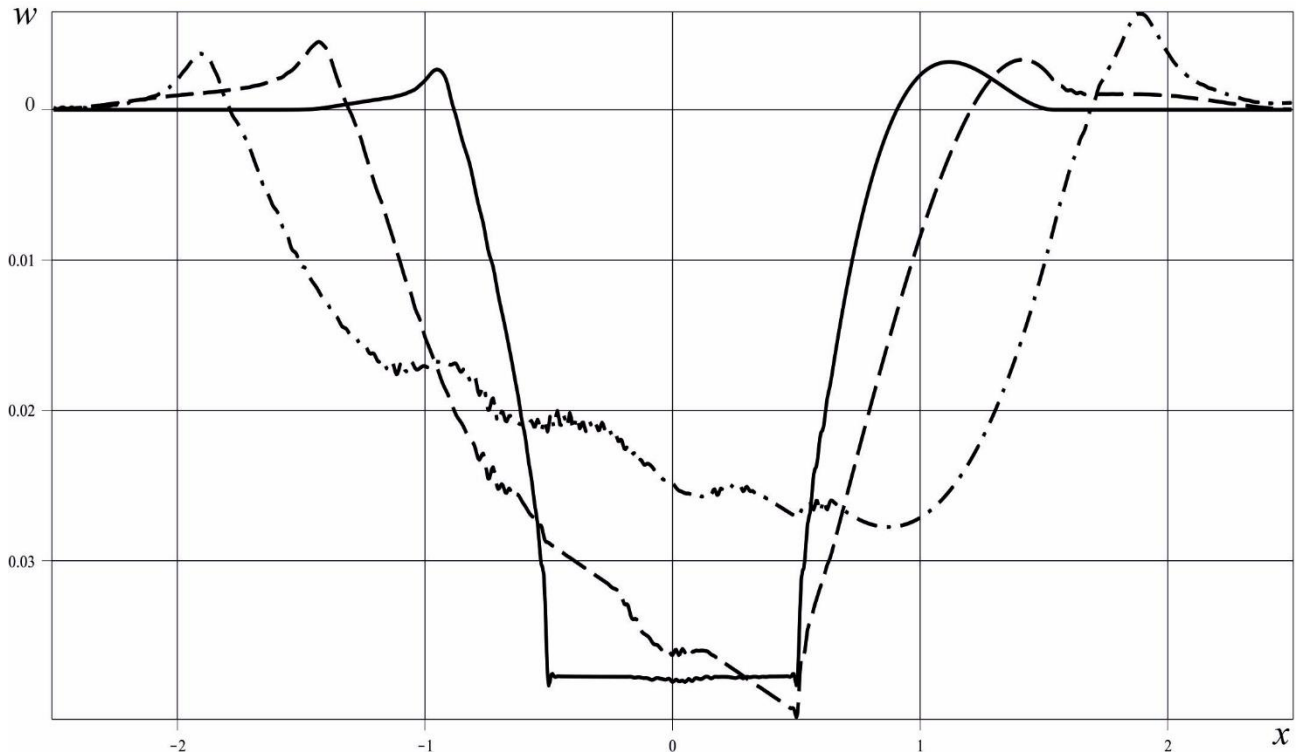


Рисунок 3.17. Распределение нормальных перемещений границы полупространства в различные моменты времени:  $\tau = 1$  (сплошная кривая),  $\tau = 2$  (штриховая кривая) и  $\tau = 3$  (штрих-пунктирная кривая)

Для более подробного графического анализа явления отслоения граничных поверхностей ударника и полупространства приведём ещё результаты расчёта нормальных перемещений границ ударника и полупространства совместно на одном графике.

На рисунке 3.18 представлены распределения нормальных перемещений по границе полупространства (сплошная кривая) и по подошве ударника (пунктирная кривая) в момент времени  $\tau = 1$ . При этом эффект прихода отраженных от полости волн только начинает проявляться и перемещения имеют почти симметричный характер за исключением наличия совсем небольшого отслоения в области контакта. Тем не менее, несимметричный характер распределения становится уже заметным.

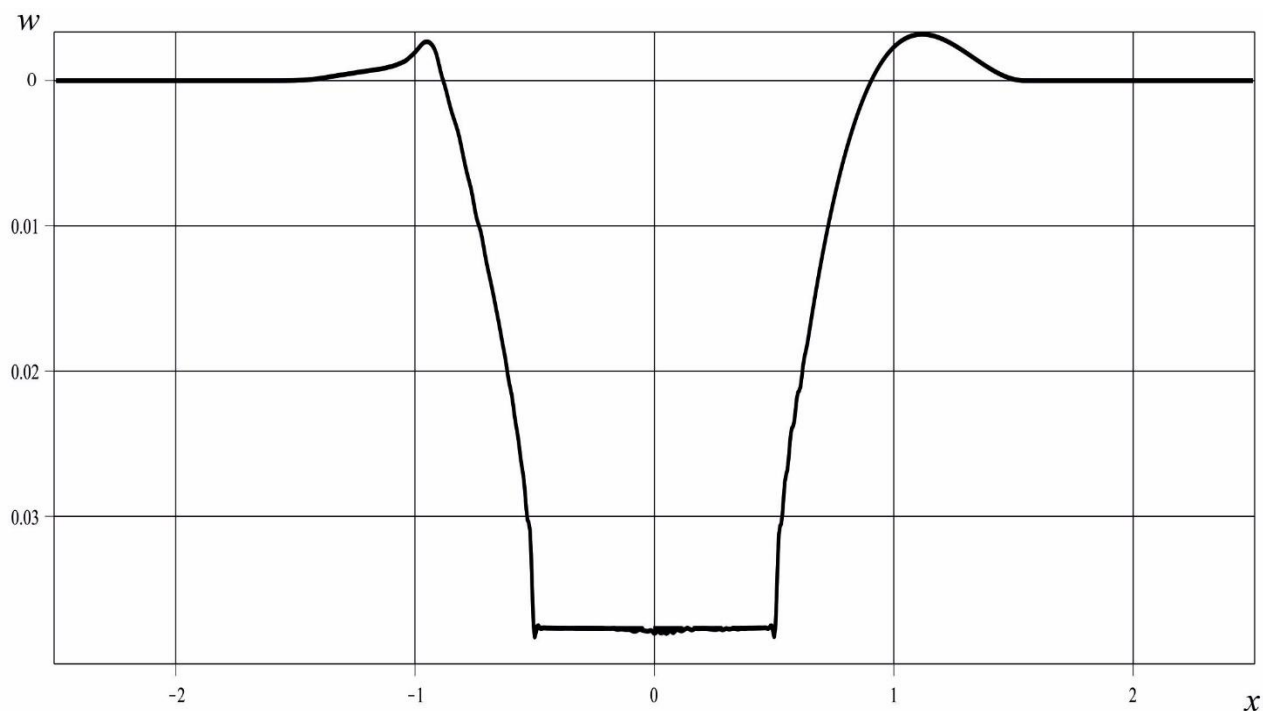


Рисунок 3.18. Распределения нормальных перемещений границ полупространства и ударника в момент времени  $\tau = 1$

При дальнейшем протекании процесса нестационарного взаимодействия наличие отслоений в области контакта становятся более заметными. Как было сказано выше, это связано с податливостью среды и, следовательно, границы полупространства в сторону полости.

На рисунке 3.19 отображены распределения нормальных перемещений по границе полупространства (сплошная кривая) и по подошве ударника (пунктирная кривая) в момент времени  $\tau = 2$ . Как видно, область отслоения стала гораздо более заметной.

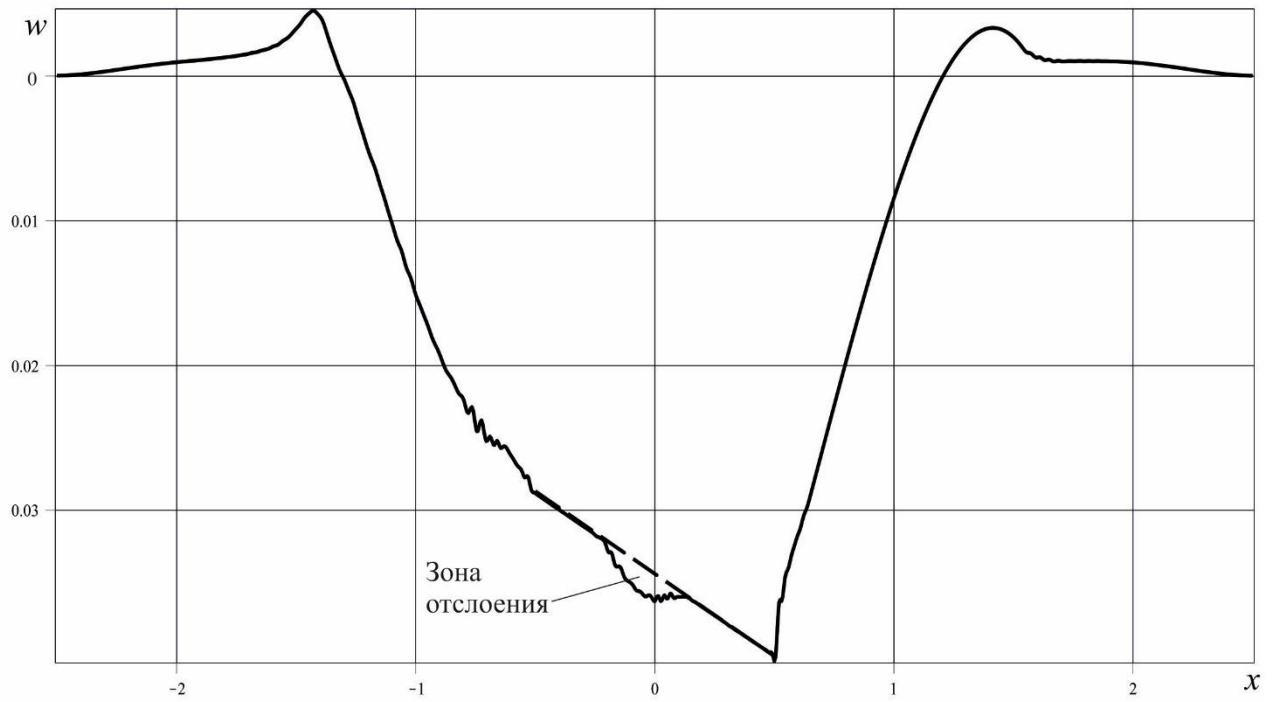


Рисунок 3.19. Распределения нормальных перемещений границ полупространства и ударника в момент времени  $\tau = 2$

К моменту времени  $\tau = 3$  процесс отслоения уже развился чрезвычайно сильно. Как видно из рисунка 3.20 к этому моменту подошва ударника по большей своей части отрывается от границы полупространства.

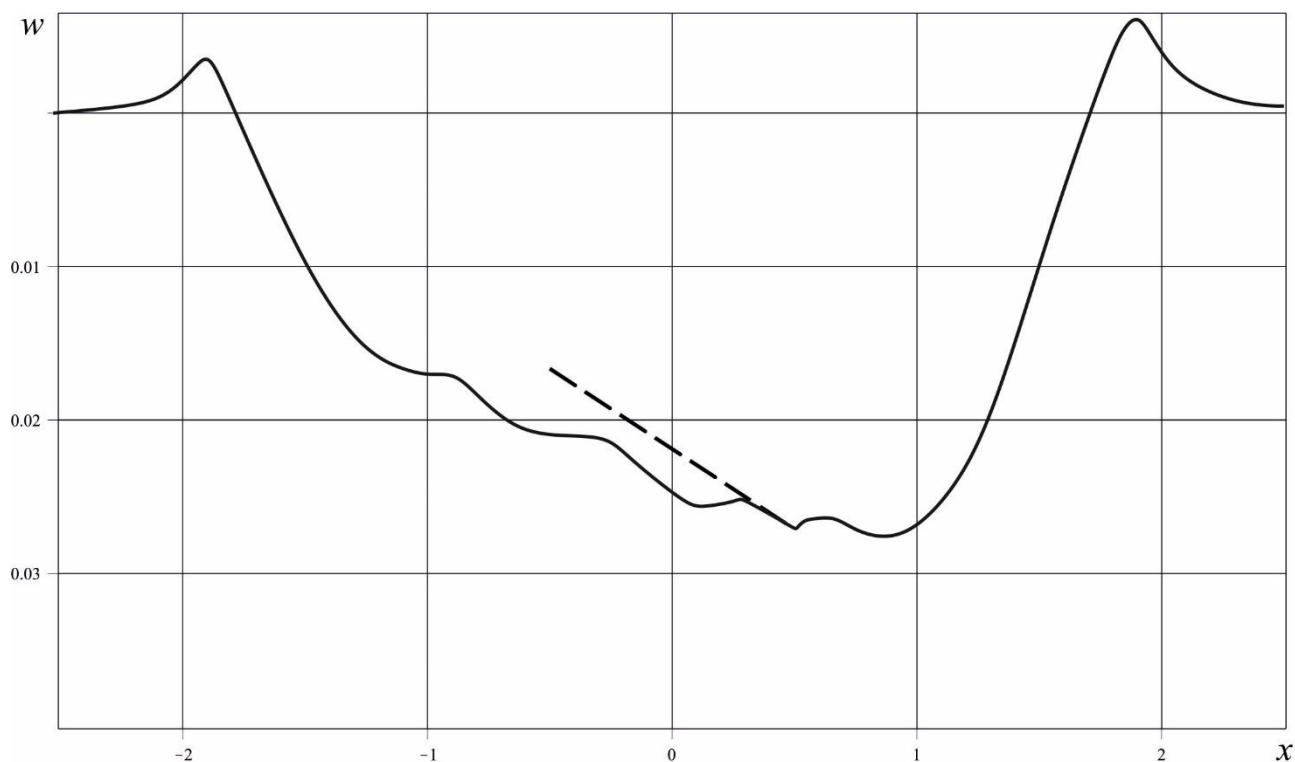


Рисунок 3.20 – Распределения нормальных перемещений границ полупространства (сплошная линия) и ударника (штриховая линия) в момент времени  $\tau = 3$

Представим ещё графики зависимостей перемещений от времени в точках границы эллиптической полости. Для иллюстрации этих результатов выберем три характерных точки, принадлежащие границе эллиптической полости, показанные на рисунке 3.21.

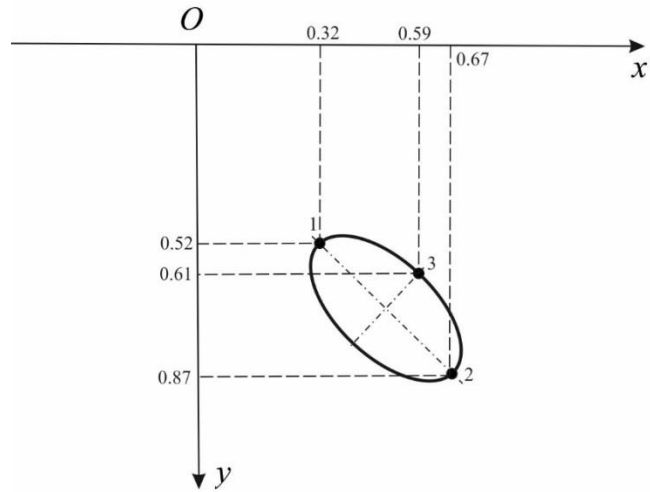


Рисунок 3.21. Три характерные точки на границе эллиптической полости

На рисунке 3.22 представлена зависимость нормальных  $u_{n1}$  (сплошная кривая) и тангенциальных  $u_{s1}$  (штриховая кривая) перемещений в первой точке.

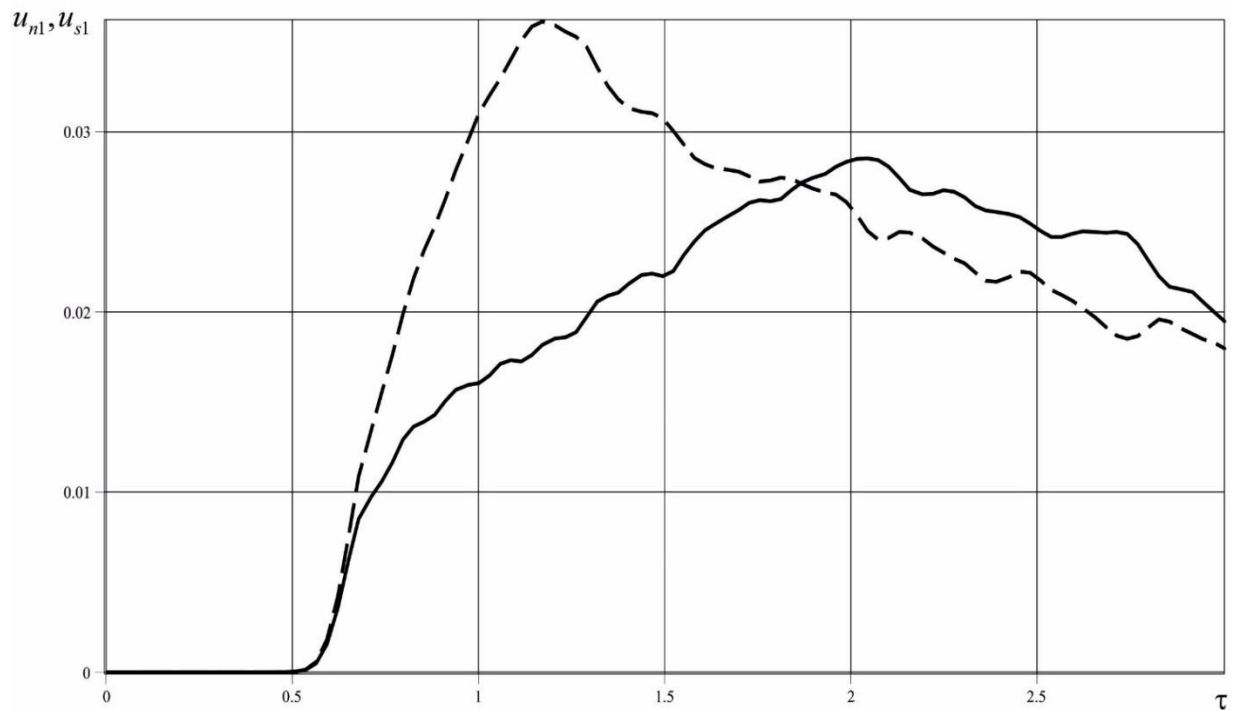


Рисунок 3.22. Зависимости от времени нормальных (сплошная кривая) и тангенциальных  $u_{s1}$  (штриховая кривая) перемещений в первой точке

Аналогичные графики приведены на рисунках 3.23 и 3.24 для второй и третьей характерных точек. Следует отметить, что до определённого момента времени, а именно, момента времени прихода упругих возмущений от воздействия штампа в рассматриваемую точку, перемещения в этой точке отсутствуют. Это опять хорошо согласуется с характером движений упругих волн, которые распространяются в упругом полупространстве с конечной скоростью.

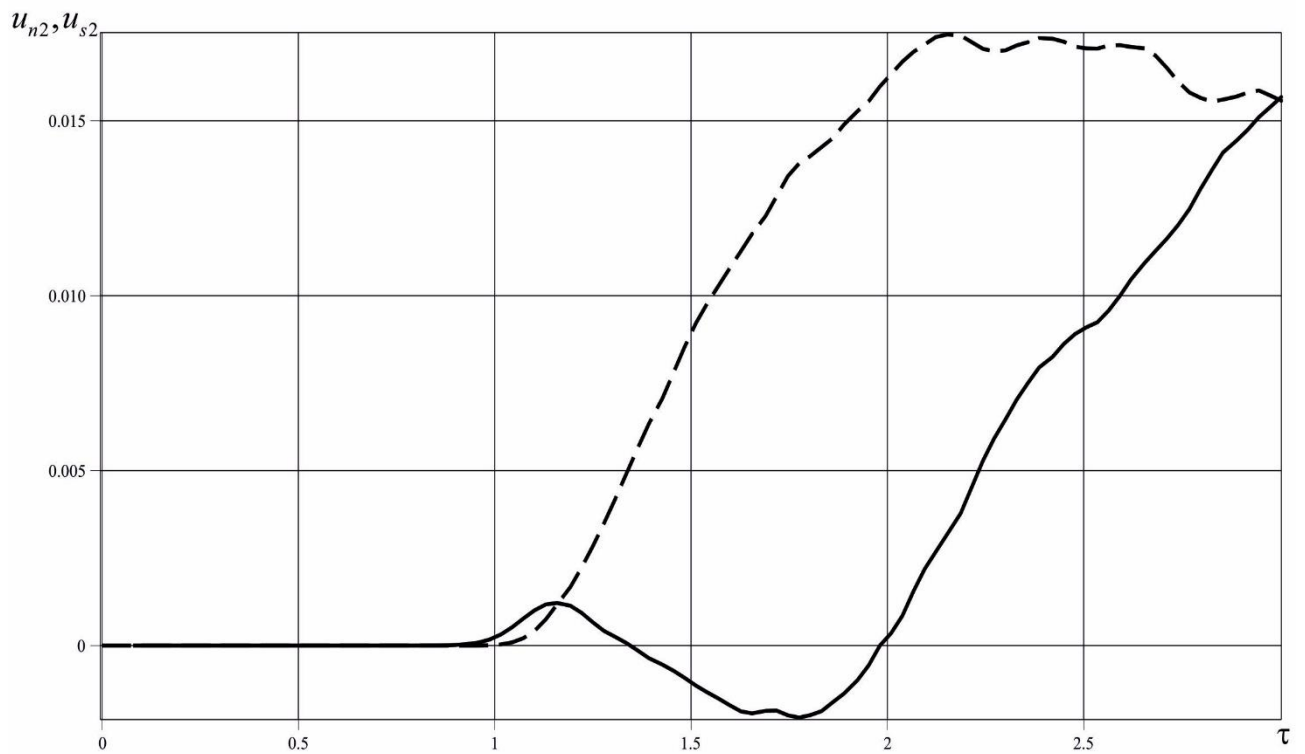


Рисунок 3.23 – Зависимости от времени нормальных (сплошная кривая) и тангенциальных  $u_{s1}$  (штриховая кривая) перемещений во второй точке



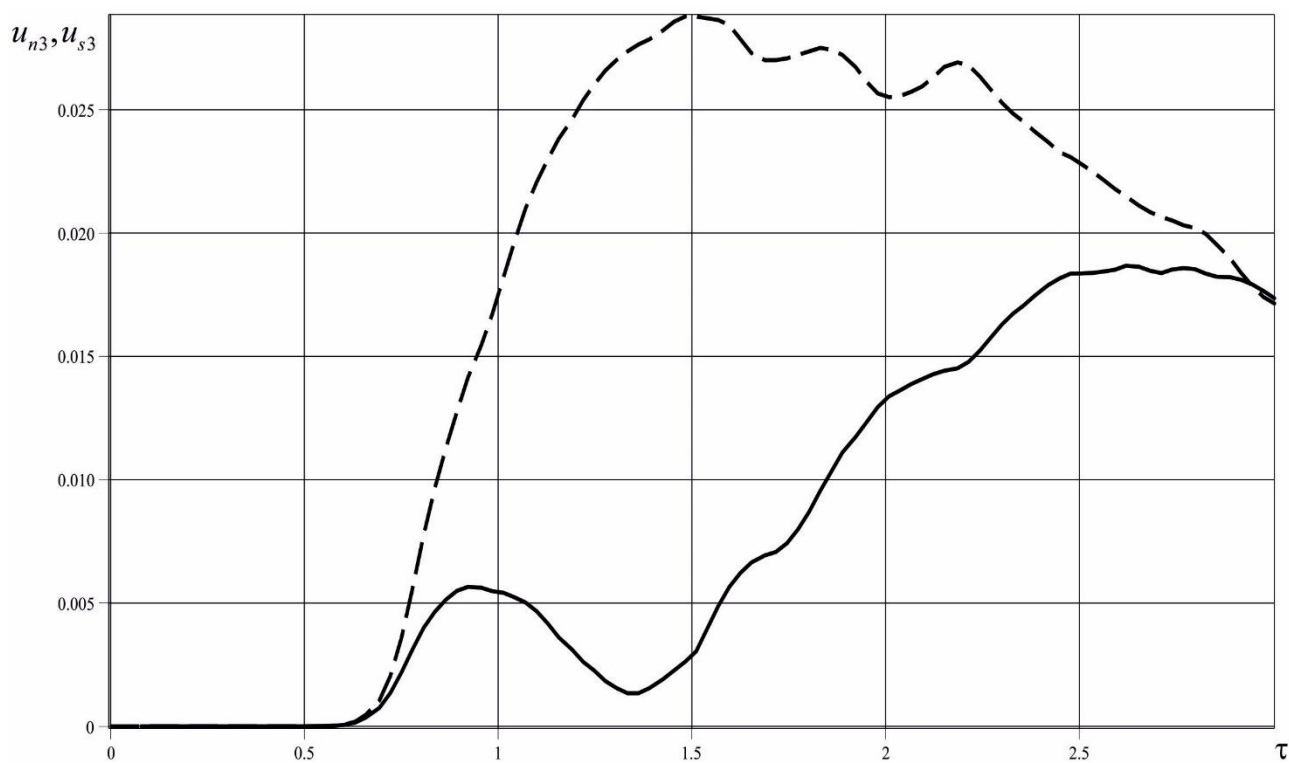


Рисунок 3.24 – Зависимости от времени нормальных (сплошная кривая) и тангенциальных  $u_{s1}$  (штриховая кривая) перемещений в третьей точке

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В представленной диссертационной работе проведено исследование нестационарного контактного взаимодействия жесткого штампа и полупространства с заглубленными полостями произвольной геометрии и расположения. Основные результаты диссертационной работы:

1. Построена замкнутая математическая постановка плоских нестационарных контактных задач для абсолютно твёрдых ударников и упругого полупространства с заглубленными полостями.
2. С использованием динамической теоремы взаимности работ и функций влияния для упругой плоскости получена система разрешающих уравнений.
3. Разработан и реализован на ЭВМ оригинальный алгоритм решения, основанный на методе граничных интегралов с дополнительной итерационной процедурой, позволяющей учитывать частичный отрыв граничных поверхностей ударника и полупространства в области контакта.
4. Проведено параметрическое исследование процесса нестационарного контакта абсолютно твёрдого прямоугольного в плане штампа с полупространством, имеющим заглубленную полость.

**Перспективами дальнейшей разработки темы** на основании выполненных исследований в данной диссертационной работе могут являться исследования нестационарного контактного взаимодействия изгибаемого штампа и вязкоупругого полупространства с заглубленными полостями произвольной геометрии, расположения и заполнения.

**СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ**

1. **Айзикович С.М., Васильев А.С., Волков С.С.** Осесимметричная контактная задача о вдавливании конического штампа в полупространство с неоднородным по глубине покрытием // Прикладная математика и механика том 79. Вып.5, 2015.
2. **Айзикович С.М., Васильев А.С., Волков С.С.** Аналитические решения осесимметричных контактных задач для слоя// Фундаментальные проблемы теоретической и прикладной механики Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2011, № 4 (5), с. 1948-1949.
3. **Айзикович С.М., Волков С.С., Мелконян А.В.** Осесимметричный изгиб круглой многослойной пластины на упругом основании сложной структуры. Вестник ДГТУ. 2014.Т.14, №2(77).
4. **Александров В.М., Горячева И.Г., Торская Е.В.** // Пространственная задача о движении гладкого штампа по вязкоупругому полупространству. Доклады академии наук, 2010, том 430, №4, с. 490-493.
5. **Александров А.И., Грабко Е.В.** Решение контактной задачи о вдавливании прямоугольного штампа в упругое шероховатое полупространство при наличии Кулонова трения// Вестн. Сам. Гос. Техн. Ун-та. Сер. Физ-мат. Науки. 2014. №4(37), с. 42-52.
6. **Александров В.М., Коваленко Е.В.** Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями.- М.: Наука. Гл. ред физ.-мат. лит., 1986.- 336 с.
7. **Амензаде Ю.А.** Теория упругости. Учебник для университетов. Изд.
8. **Аменицкий А.В., Белов А.А., Игумнов Л.А., Карелин И.С.** Граничные интегральные уравнения для решения динамических задач трехмерной теории пороупругости // Проблемы прочности и пластичности, вып. 71, 2009, с. 164-171.
9. **Арутюнян А.М., Кузнецова Е.Л., Федотенков Г.В.** Нестационарные контактные задачи для абсолютно твердых тел и полупространства с полостями // Материалы XXIV международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова – М., 2018., Т. 2. – С. 12-14.

10. **Арутюнян А.М., Кузнецова Е.Л., Федотенков Г.В.** Метод и алгоритм исследования нестационарных возмущений, воздействующих на упругое полупространство // Тезисы докладов VII Международного научного семинара «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы». 2018г., Москва – М.: Издательство ООО "ТР-принт", 2018. – С. 9-10.
11. **Арутюнян А.М., Кузнецова Е.Л., Федотенков Г.В.** Плоская нестационарная задача о распространении возмущений от заглубленной полости в упругом полупространстве // Материалы XXIII международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова – М., 2017., Т. 2. – С. 5-7.
12. **Арутюнян А.М., Кузнецова Е.Л., Федотенков Г.В.** Применение метода прямых граничных интегралов к исследованию распространения нестационарных возмущений в полупространстве с заглубленной цилиндрической полостью // Тезисы докладов VI Международного научного семинара «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы». 2017г., Москва – М.: Издательство ООО "ТР-принт", 2017. – С. 12-13.
13. **Арутюнян А.М., Кузнецова Е.Л., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.** Нестационарная контактная задача для прямоугольного в плане штампа и упругого полупространства с полостью // В сборнике Актуальные вопросы и перспективы развития транспортного и строительного комплексов: материалы IV Международная научно-практическая конференция: в 2 ч, место издания БелГУТ Гомель, 2018, том 2, тезисы, с. 112-114.
14. **Арутюнян А.М., Кузнецова Е.Л., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.** Исследование распространения нестационарных возмущений в полупространстве с заглубленной цилиндрической полостью методом прямых граничных интегралов // Проблемы безопасности на транспорте. Материалы VIII Международной научно-практической конференции, посвященной Году науки – Гомель. 2017 г. Ч. 2. – С. 166.
15. **Арутюнян А.М., Кузнецова Е.Л., Федотенков Г.В.** Метод и алгоритм решения нестационарных задач для упругого полупространства с полостью произвольной геометрии // Ломоносовские чтения. Научная конференция. Секция механики. 16–27

апреля 2018 года. Тезисы докладов. – М.: Издательство Московского университета, 2018. – С. – 24.

16. **Арутюнян А.М., Кузнецова Ел.Л., Федотенков Г.В.** Начально-краевая задача для упругого полупространства с полостью // Материалы XXVI международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Т. 2. – М.: ООО «ТРП», 2020 – С. 8-9.
17. **Арутюнян А.М., Кузнецова Ел.Л., Федотенков Г.В.** Нестационарные упругие волны в полупространстве с заглубленной цилиндрической полостью // Тезисы докладов V Международного научного семинара «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы». 2016г., Москва – М.: Издательство ООО "ТР-принт", 2016. – С. 14-16.
18. **Арутюнян А.М., Кузнецова Ел.Л., Федотенков Г.В.** Плоская нестационарная задача для абсолютно твердого ударника и упругого полупространства // Материалы XXV международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова – Вятчи, 18 – 22 марта 2019 г., Т. 2. – С. 22-23.
19. **Арутюнян А.М., Кузнецова Ел.Л., Федотенков Г.В.** Плоская нестационарная задача о воздействии поверхностного давления на упругое полупространство с заглубленной цилиндрической полостью // Тезисы докладов IV Международного научного семинара «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы». 2016г., Москва – М.: Издательство ООО "ТР-принт", 2016. – С. 13-14.
20. **Арутюнян А.М., Кузнецова Ел.Л., Федотенков Г.В.** Плоская нестационарная контактная задача для абсолютно твердого штампа и упругого полупространства с полостью // Электронный журнал «Труды МАИ». 2020. Выпуск № 113. DOI: 10.34759/trd-2020-113-02.
21. **Арутюнян А.М., Кузнецова Ел.Л., Федотенков Г.В.** Решение двумерных нестационарных контактных задач для упругого полупространства и абсолютно твердых ударников методом граничных интегральных уравнений // Ломоносовские чтения. Научная конференция. Секция механики. 15–25 апреля 2019 года. Тезисы

- докладов. – М.: Издательство Московского университета, 2019. – С. 201-202.
22. **Арутюнян А.М., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.** Плоская нестационарная задача о распространении упругих волн в упругом полупространстве с полостью // Материалы X Всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела, 18-22 сентября 2017г., Самара, Самарский государственный университет, 2017. Т. 1. – С. 50-52.
23. **Арутюнян А.М., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.** Воздействие нестационарного поверхностного давления на границу упругой полуплоскости с заглубленной полостью произвольной геометрии и расположения // Материалы XXII международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова – М., 2016., Т. 2. – С. 23-24.
24. **Арутюнян А.М., Федотенков Г.В.** Гранично-элементное моделирование распространения нестационарных упругих возмущений в полупространстве с полостью произвольной геометрии // Тезисы докладов Всероссийской конференции молодых ученых-механиков. 5-15 сентября 2017 г., Сочи, «Буревестник» МГУ. Издательство Московского Университета, 2017, С. 28.
25. **Арутюнян А.М., Федотенков Г.В.** Исследование распространения нестационарных возмущений в полупространстве с заглубленной цилиндрической полостью методом граничных элементов // Ломоносовские чтения. Научная конференция. Секция механики. 17–26 апреля 2017 года. Тезисы докладов. – М.: Издательство Московского университета, 2017. – С. – 24-25.
26. **Архипова И.М., Чирков В.Ю.** Взаимодействие медленно движущихся штампов с упругим полупространством// Прикладная механика и техническая физика. 2008.Т. 49, №6.
27. **Бабич С.Ю., Гузь А.Н., Рудницкий В.Б.** Контактные задачи для упругих тел с начальными напряжениями применительно к жестким и упругим штампам // Прикладная механика. - 2004. - № 1. - С. 41-69.
28. **Баженов В.Г., Белов А.А., Игумнов Л.А.** Гранично-элементное моделирование динамики кусочно-однородных сред и конструкций: учебное пособие – Нижний Новгород: изд. Нижегородский гос. ун-т им. Н. И. Лобачевского 2009.-180с.

29. **Белов А.А., Игумнов Л.А., Литвинчук С.Ю.** Развитие метода граничных элементов для решения трехмерных контактных динамических задач теории упругости // Проблемы прочности и пластичности, вып. 69, 2007, с. 125-136.
30. **Белоконь А.В., Ворович И.И.** // Изв. АН СССР. МТТ. 1973. № 6. С. 63-73.
31. **Бенерджи П., Баттерфилд Р.** Методы граничных элементов в прикладных науках. - М.: Мир, 1984. [Имеется перевод: Снеддон И. Н. Преобразование Фурье. - М.: ИЛ, 1955].
32. **Бородачѳв Н.М.** К решению контактных задач термоупругости в случае осевой симметрии / Н.М. Бородачѳв // Известия АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. - 1962. -№ 5. - С. 12-21.
33. **Босаков С.В.** Две контактные задачи о вдавливании кольцевого штампа в упругое полупространство / С.В. Босаков // Наука и техника. 2018. Т. 17, № 6. С. 458-464. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2018-17-6-458-464>.
34. **Васильев А.С.** Кручение упругого полупространства с многослойным покрытием периодической структуры / А.С. Васильев, Е.В. Садырин, М.Е. Васильева // Вестник Дон.гос. техн. Ун-та.-2013.-№5/6(74).-С.6-13.
35. **Васильев В.В., Лурье С.А.** Новое решение осесимметричной контактной задачи теории упругости // Механика твердого тела №5, 2017.
36. **Власов И.А.** Задача о вдавливании гладкого штампа произвольной формы в плане в жесткопластическое полупространство// Вестник СамГУ- Естественнонаучная серия.2013. №9/2(110).
37. **Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А.** Неклассические смешанные задачи теории упругости.-М.: Наука. Гл. ред физ.-мат. лит., 1974.- 456 с.
38. **Галин Л.А.** Контактные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1953.
39. **Галин Л.А.** Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 303 с.
40. **Горбунов-Посадов М.И.** Расчет балок и плит на упругом полупространстве // Прикладная математика и механика. - 1940. - Т.4, вып.3. - с. 61-80.

41. **Горбунов-Посадов М.И.** Расчет конструкций на упругом основании: М.: Стройиздат, 1990. -304с.
42. **Городецкий А.С.** Компьютерные модели конструкций : К.: Факт, 2005. - 344 с.
43. **Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В.** Волны в сплошных средах // Учеб. Пособ.: Для вузов. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004 - 472 С.
44. **Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Тарлаковский Д.В.** Теория упругости и пластичности: Учеб.: Для вузов - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002 – 416 с.
45. **Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В.** Динамические контактные задачи с подвижными границами. - М.: Наука. Физматлит, 1995.-352с.
46. **Горячева И.Г.** // ПММ. 1973. Т. 37. В. 5. С. 925-933.
47. **Горячева И.Г.** Механика фрикционного взаимодействия. М.: Наука, 2001. 478 с.
48. **Грилицкий Д.В.** Осесимметричная контактная задача термоупругости для трансверсально изотропного полупространства / Д.В. Грилицкий, Б.Г. Шелестовский // Прикладная механика. - 1973. - Т. 6. - Вып. 8. - С. 3-8.
49. **Гузь А.Н., Рудницкий В.Б.** Контактная задача о давлении упругого штампа на упругое полупространство с начальными напряжениями // Прикладная механика. - 1984. - Т. 20. - № 8. - С. 3-11.
50. **Детков В.А.** Импульсные невзрывные источники сейсморазведки с электромагнитным приводом// Вестник Сибирского государственного аэрокосмического университета имени академика М.Ф. Решетнева.
51. **Дуйшеналиев Т.Б., Дуйшембиев А.С., Орозбаев А.А., Хроматов В.Е.** Линейный тензор деформаций коши и функции перемещения // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Сборник трудов. В 4-х томах. 2019.
52. **Дуйшеналиев Т.Б., Дуйшембиев А.С., Хроматов В.Е., Щугорев В.Н.** Статическая краевая задача и ее решения // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред. Материалы XXV международного симпозиума имени А.Г. Горшкова. 2019.



53. **Дуйшеналиев Т. Б., Хроматов В. Е.** Моделирование конечных деформаций линейным тензором коши // Современная математика и ее приложения. Уфа, 2017 г.
54. **Дуйшеналиев Т.Б, Хроматов В.Е, Аскарбеков Р.Н., Дуйшембиев А.С., Орозбаев А.А.** Преобразование материальных поверхностей и конечные деформаций упругих тел // Известия Кыргызского государственного технического университета им. И. Раззакова. ISSN: 1694-5557.
55. **Ефимов А.Б.** // Вестн. МГУ. Сер. математика, механика. 1966. № 2. С. 57-66.
56. **Ефимов А.Б.** // Изв. АН СССР. МТТ. 1970. № 5. С. 161-163.
57. **Звягин А.В., Куратова Д.В.** Контактная задача для упругого полупространства в случае трансзвуковой скорости движения нагрузки// вестн.моск.ун-та. Сер.1, математика и механика. 2013.№4.
58. **Иванова Р.Я.** // ПМТФ. 1964. № 3. С. 179-184.
59. **Игумнов Л.А.** Применение метода граничных интегральных уравнений к исследованию динамики упругих, вязко- и пористо- упругих тел // VI Сессия научного совета РАН по механике. Барнаул, Белокуриха, 26-31 июля 2012 г., с. 24-25.
60. **Ишкова А.Г.** Об изгибе полосы и круглой пластины, лежащих на упругом полупространстве// Инженерный сборник. - 1960. - Т.23.- С. 171-181.
61. **Какосимиди Н.Ф., Прокопович И.Е.** // ПМТФ. 1962. № 1. С. 102-108.
62. **Калентьев Е.А.** концентрация напряжений в окрестности полости в упругом полупространстве // Вычислительная механика сплошных сред. - 2018. - Т. 11, № 2. - С. 137-147.
63. **Каплунов Ю.Д.** Нестационарная динамика упругой полуплоскости при действии подвижной нагрузки. - Препринт / ИПМ АН СССР.-М., 1986.- №277.- 54 с.
64. **Карнаухов В.Г.** Связанные задачи термовязкоупругости / В.Г. Карнаухов- Киев : Наукова думка, 1982. - 260 с.
65. **Козел А.Г., Оконечников А.С. Федотенков Г.В.** Нестационарное воздействие штампа на упругую полуплоскость при учёте сил поверхностного притяжения // Материалы XXV международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики

конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова – Вятчи, 18 – 22 марта 2019 г., Т. 2. – С. 93-94.

66. **Крауч В., Старфилд А.** Методы граничных элементов в механике твердого тела. М.: МИР, 1987. - 328 с.
67. **Кренёв Л.И., Айзикович С.М., Митрин Б.И.** Внедрение кругового штампа при заданной постоянной температуре на плоской подошве штампа в непрерывно неоднородное термоупругое полупространство // Вестник ДГТУ. 2014. Т. 14, № 1 (76).
68. **Купрадз В.Д.** Методы потенциала в теории упругости. -М.:Физматгиз, 1963.
69. **Линник Е.Ю., Котов В.Л., Константинов А.Ю.** Моделирование процессов динамического внедрения пространственных тел в сжимаемую упругопластическую среду// ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА № 4, 2017.
70. **Лурье А.И.** Пространственные задачи теории упругости. М.: Государственное издательство Техничко-теоретической литературы, 1955. - 493 с.
71. **Ляв А.** Математическая теория упругости. М.; Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1935. 674 с.
72. **Ляпин А.А., Селезнёв М.Г., Селезнёв Н.М.** Динамическая контактная задача для трехслойного полупространства с цилиндрической полостью// Экологический вестник научных центров ЧЭС. 2008. №4.
73. **Манько Н., Приварников А.К.** Відокремлення пружного шару від багатозарової основи під дією нормального навантаження // Вісник Донецького університету. - 2002. -№ 1. - С. 49-53.
74. **Михлин С.Г.** Интегральные уравнения.-М.-Л.:Гостехиздат, 1947.
75. **Михлина С.Г.** Линейные уравнения математической физики / - М.: Наука, 1964.-368 с.
76. **Михлин С.Г.** Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения.-М.: Физматгиз, 1962.
77. **Молотков Л.А.** О колебаниях однородного упругого полупространства под действием источника, приложенного к равномерно расширяющейся окружности // Прикл. матем. и мех. - 1967.-Т.-31, №2.-С. 211-221.
78. **Молчанов А.А., Пожарский Д.А.** Обобщение контактной задачи Галина и взаимодействия штампов// Механика деформируемого

- твёрдого тела. Вестник Нижегородского университета им Н.И. Лобачевского, 2011, №4, (4), с. 1636-1638.
79. **Мухелишвили Н.И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.:Изд-во АН СССР, 1954.
80. **Мхитарян С.М., Шемян А.Л., Шемян Л.А.** Вдавливание круглого штампа в упругое шероховатое полупространство // Механика твёрдого тела №5. 2009.
81. **Никишин В.С.** Осесимметричные контактные задачи для двухслойного упругого полупространства с кольцевой или круговой трещиной на границе раздела слоев // Прикладная математика и механика. - 2002. - Т. 66. - № 4. - С. 670-680.
82. **Новацкий В.** Теория упругости. М.: МИР, 1975. - 872 с.
83. **Окопный Ю.А., Радин В.П., Чирков В.П., Хроматов В.Е.** Механика материалов и конструкций. Общие сведения. Справочник. Инженерный журнал с приложением. Издательство: Издательский дом "Спектр" (Москва) ISSN: 0203-347X.
84. **Окопный Ю.А., Радин В.П., Чирков В.П., Хроматов В.Е.** Сложные виды деформаций. Справочник. Инженерный журнал с приложением. Издательство: Издательский дом "Спектр" (Москва) ISSN: 0203-347X.
85. **Панфилов Г.В., Недошивин С.В., Гаврилин И.А.** Расчет напряжений в осесимметричных полях линий скольжения на примере задачи о вдавливании цилиндрического штампа в полость// Известия ТулГУ. Технические науки. 2015. Вып. 6. Ч. 1.
86. **Панфилов Г.В., Недошивин С.В., Сухонин В.А.** Результирующий силовой анализ при вдавливании осесимметричного штампа в полость полупространства// Известия ТулГУ. Технические науки. 2015. Вып. 6. Ч. 1.
87. **Парамонов В.Н.** Расчет оснований зданий и сооружений в физически и геометрически нелинейной постановке: дис. д-ра техн. наук: 05.23.17, 05.23.02. - СПб., 1998. - 364 с.
88. **Пещерикова О.Н., Федотенков Г.В.** Воздействие нестационарной поверхностной нагрузки на упруго-пористое полупространство // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. Том 160 (2019). С. 105–113.
89. **Подковалихина Е.А., Пьянкова Ю.В., Романиченко Г.В.** Осесимметричная задача теории упругости о взаимодействии штампа с

- полупространством с цилиндрическим включением // Складні технічні системи і процеси №2, 2007.
90. **Пожарский Д.А.** Контактные задачи для неоднородного слоя // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2018. № 1.
  91. **Пожарский Д.А., Давтян Д.Б.** Сравнение точных решений контактных задач для трансверсально изотропного полупространства // Вестник Донского государственного технического университета 2015, №1(80), с. 23-28.
  92. **Постнов В.А.** Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций: Л.: Судостроение, 1974. - 344 с.
  93. **Работнов Ю.Н.** Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с. 1968, v. 22, с. 244-259.
  94. **Розин Л.А.** Задачи теории упругости и численные методы их решений: СПб.: Издательство СПбГТУ, 1998. - 532 с.
  95. **Розин Л.А.** Основы метода конечных элементов в теории упругости: Л.: Издательство ЛПИ, 1972. - 77 с.
  96. **Розин Л.А.** Расчет гидротехнических сооружений на ЭЦВМ. Метод конечных элементов: Л.: Энергия, 1971. - 214 с.
  97. **Сабо И.И., Толок В.А.** Моделирование задачи о штампе в двумерной постановке// Математичне та комп'ютерне моделювання. Радіoeлектроніка, інформатика, управління. 2012. № 1.
  98. **Сафаров И.И., Тешаев М.Х., Болтаев З.И.** Вынужденные гармонические колебания вязкоупругих слоистых тел лежащих на деформируемой полуплоскости// Проблемы механики и управления. Нелинейные динамические системы. Межвузовский сборник научных трудов. Вып. 48.2016.
  99. **Сеймов В.М.** Динамические контактные задачи. Киев: Наукова Думка - 1976.
  100. **Синицын А.П.** Расчет конструкции на основе теории риска: М.: Стройиздат, 1971. - 229 с.
  101. **Скобельцын С.А., Федотов И.С., Титова А.С.** Дифракция звука на упругом шаре с неоднородным покрытием и полостью в полупространстве // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, вып. 4, С. 177-193.

102. **Слепян Л.И.** Нестационарные упругие волны - Л.: Судостроение 1972.-351с.
103. **Слепян Л.И., Яковлев Ю.С.** Интегральные преобразования в нестационарных задачах механики.-Л.: Судостроение, 1980.-344с. 3-е, доп. М., "Высшая школа", 1976 - 272с.
104. **Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.** Нестационарные контактные задачи с подвижными границами для оболочек и абсолютно твердых или деформируемых тел // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник трудов в 4 томах. Т. 3: Механика деформируемого твердого тела. – Уфа: РИЦ БашГУ, 2019. – С. 993-994.
105. **Ткачук Н.Н., Ткачук А.Н.** К вопросу о контактном взаимодействии плоского штампа с полупространством// Восточно-Европейский журнал передовых технологий 3/9 (45) 2010.
106. **Украинец В.Н.** Реакция земной поверхности на движущуюся в тоннеле нагрузку// Механика твердого тела №2.2009.
107. **Улицкий В.М.** Геотехническое сопровождение реконструкции городов: М.: Изд. АСВ, 1999.-324с.
108. **Фадеев А.Б.** Метод конечных элементов в геомеханике: М.: 1987. 7-49 с.
109. **Хроматов В. Е., Бесова М. И.** Применение методов решения дифференциальных уравнений в задачах механики материалов и конструкций // Дифференциальные уравнения и смежные проблемы. Материалы Международной научной конференции. В 2-х томах. Издательство: Башкирский государственный университет (Уфа), 2018.
110. **Хроматов В.Е., Панкрашкина Н.Г., Новикова О.В.** Когнитивный подход к изложению дисциплин механики твердого тела для инженерных специальностей вузов // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред. Материалы XXVI Международного симпозиума им. А.Г. Горшкова. 2020.
111. **Шашкин, А.Г.** Упруго-вязко-пластическая модель структурно-неустойчивого глинистого грунта: СПб.: Геореконструкция-Фундаментпроект, 2005., 221-228 с.
112. **Яваров А.В., Сергеев И.Э., Рязанцева Ю.В.** // Численные и аналитические решения задач о действии внешних нагрузок на упругое полупространство. Строительство уникальных зданий и сооружений, 2015, №1 (28).

113. **Ярцевской Н.А.** Розв'язок просторової контактної задачі про тиск жорсткого кільцевого штампа на попередньо напружений півпростір // ICIENCE.IN.UA "Актуальные научные исследования в современном мире" выпуск 11(31).Горячева И.Г. // ПММ. 1973. Т. 37. В. 5. С. 925–933.
114. **Banaugh R.P., Goldsmith W.** Diffraction of steady acoustic waves by surfaces of arbitrary shape. -J. Acoust. Soc. Amer., 1963, v. 35, No. 10, p. 1590-1601.
115. **Banerjee P.J., Butterfield R.** Boundary element methods in geomechanics. -In: Finite elements in geomechanics. Ed. by G. Gudehus. - London: Wiley, 1977.
116. **Banerjee P.K.** Foundations within a finite elastic layer - application of the integral equation method. -Civ. Engng, 1971, Novem., p. 1197-1202.
117. **Banerjee P.K.** Integral equation methods for analysis of piece-wise nonhomogeneous three-dimensional elastic solids of arbitrary shape. - Int.J. Mech. Sci., 1976, v. 18, p. 293-303.
118. **Banerjee P.K., Driscoll R M. C.** Three-dimensional analysis of raked pile-groups. - roc. inst. L.Iv. Eng., 1 (es. ana theory, 11:11b, v.:11, No. 2, p. 653-671.
119. **Barber J.R.** Thermoelastic contact of a rotating sphere and a half-space / J.R. Barber //Wear. - 1975. - Vol. 35. - Pp. 283-289.
120. **Besova A.V., Khromatov V.E., Besova M.I.** The solution of solid body mechanics' problems using mathematical programs and computing systems // 4th international conference on information technologies in engineering education, inforino 2018 Moscow. DOI: 10.1109/INFORINO.2018.8581811.
121. **Butterfield R., Banerjee P.K.** The problem of pile-cap., pile-group interaction. - Geotechnique, 1971, t. 21, No. 2, p.135-142.
122. **Chen L.H., Schweikert J.** Sound radiation from an arbitrary body. - J. Acoust. Soc. Amer., 1963, v. 35, p. 1626-1632.
123. **Cruse T.A.** An improved boundary integral equation method for three-dimensional stresses analysis - Computers and structures. 1974. v. 4. p. 741-757.
124. **Cruse T.A.** Application of the boundary integral equation method in solid mechanics. -In: Proc. Int. Conf. Southampton Univ. Ed. by H. Tottenham, C. Brebbia. Vol. 2, 1972.
125. **Cruse T.A.** Numerical solutions in three-dimensional elastostatics. - Int. J. Solids Structs, 1969, v. 5, p. 1259-1274.

126. **Cruse T.A., Ryzzo F.J.** A direct formulation and numerical solution of the general transient elasto-dynamic problem. -J. Math. Anal Appl.;
127. **Eason G.** The stresses produced in an elastic half-space //Quart. j. mech. appl.math.-1964/-V.- 17, №3.-P. 279-292.
128. **Friedman M.B., Shaw R.P.** Diffraction of a plane shock wave by an arbitrary rigid cylindrical obstacle. --. J. Appl. Mech., 1962, v. 29, No. I, p. 40-46. (имеется перевод: прикладная механика.-Мир 1962. Т.29, №1].
129. **Gakenheymer D.C.** Numerical results for Lamb's point load problem // Trans.ASME: J. appl. Mech.-1970.-V. 37.№ 2 .- P. 522-524.
130. **Gakenheymer D.C., Miklovitz J.** Transient excitation of an elastic half-space by a point load traveling on the surface // Trans. ASME: J. appl. mech.-1969.- V. 36, № 3.-P. 505-515.
131. **Hess J.L.** Improved solution for potential flow about arbitrary axisymmetric bodies by the use of a higher order surface source method. -Computer Meth. in Appl. Mech. Engng, 1975, v. 5, p. 297-308.
132. **Hess J.L.** The problem of three-dimensional lifting potential flow and its solution by means of surface singularity distributions. -Computer Meth. in Appl. Mech. Engng, 1974, v. 4, p. 283-319.
133. **Hess J.L., Smith A.M.** Calculations of nonlifting potential flow about arbitrary three-dimensional bodies. -J. Ship Res., 1964, v. 8, No. 2.
134. **Hess J.L, Smith A.M.** Calculations of potential flow about arbitrary bodies. - In: Progress in aeronautical sciences. Vol. 8. - New York: Pergamen Press, 1966, p. 1-138.
135. **Hunter S.C.** // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1961. V. 28. № 4. P. 611-617.
136. **Jaswon M.A.** Integral equation method in potential theory. - I. -Proc. Roy. Soc., Ser. A, 1963, v. 273, p. 23-32.
137. **Jaswon M.A., Pontor A.R.** An integral equation method for a torsion problem. -Proc. Roy. Soc., Ser. A, 1963, v. 273, p. 237-246.
138. **Jaswon M.A., Symm G.T.** Integral equation methods in potential theory and elastostatics. -London: Academic Press, 1977.
139. **Karapetian E., Kalinin S.V.** Indentation of a punch with chemical or heat distribution at its base into transversely isotropic half-space: Application to local thermal and electrochemical probes /E. Karapetian, S.V. Kalinin // Journal of Applied Physics. - 2013. - Vol. 113. - DOI: 10.1063/1.4802097.

140. **Kellog O.D.** Foundations of potential theory. -Berlin: Springer, 1929; New York: Dover, 1953.
141. **Labm H.** On the propogation of tremers over the surface of an elastic solid //Phil. Trans. Roy.soc. London Ser. A. - 1904. - V. 203.-P. 1-42.
142. **Lachat J.C.** Further developments of the boundary integral techniques for elasto-statics. -Ph. p. thes. -Southampton Univ., 1975.
143. **Lachat J.C., Watson J.O.** A second generation boundary integral equation program for three-dimensional elastic analysis. – In.
144. **Lachat J.C., Watson J.O.** Effective numerical treatment of boundary integral equations: a formulation for three-dimensional elasto-statics. - Int. J. Num. Meth. in Engng, 1976, v. 10, p. 991-1005.
145. **Massonnet C.E.** Numerical use of integral procedures. In: Stress analysis. Ed. by O. C. Zienkiewicz, G. S. Holister. -London: Wiley, 1965.
146. **Mikhlin S.G.** Approximate solutions of differential and integral equations. - Oxford: Pergamon Press, 1965.
147. **Mitzner K. M.** Numerical solution for transient scattering from a hard surface of arbitrary shape-retarded potential technique. - J. Acoust. Soc. Amer., 1967, v. 42, No. 2, p. 391-397.
148. **Morland L.W.** // Quart. Appl. Math. 1967. V. 25. № 4. P. 363-376.
149. **Morland L.W.** // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1962. V. 29. № 2. P. 345-352.
150. **Nowacki W.** Thermoelasticity / W. Nowacki. - London : Pergamon Press, 1962.
151. **Oliveira E.R.** A Plane stress analysis by a general integral method. - J. ASCE, Eng. Mech. Div., 1968, Febr., p. 79-85.
152. **Rim K., Henry A.S.** An integral equation method in plane elasticity. - NASA Rep. No. CR-779-1967, 1967.
153. **Rizzo F.J., Shippy D.J.** An advoanced boundary integral equation method for three-dimensional thermo-elasticity. - Int. J. Num. Meth. in Engng,1977, v. II, p. 1753.
154. **Rizzo F.J., Shippy D.J.** Recent advances of the boundary element method in thermoelasticity. - In: Developments in boundary element me- thods. Ed. by P. K.: Banerjee, R. Butterfield. Vol. I, Ch. VI. -London: Applied Science Publishers, 1979.



155. **Shaw R.P.** Diffraction of acoustic pulses by obstacles of arbitrary shape with a Robin boundary condition - Part A. -J. Acoust. Soc. Amer., 1966, v. 41, No. 4, p. 855-859.
156. **Shaw R.P.** Diffraction of pulses by obstacles of arbitrary shape with an impedance boundary condition. -J. Acoust. Soc. Amer., 1969, v. 44, No. 4, p. 1962-1968
157. **Shaw P., Friedman M.B.** Diffraction of a plane shock wave by a free cylindrical obstacle at a free surface.-In: Proc. Fourth U.S. Nat. Congr. of Appl. Mech., 1962, p. 371-379.
158. **Sneddon I.N.** Fourier transforms, 1951. -New York: McGraw-Hill, 1951. McGraw-Hill, 1970. [Имеется перевод: Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. - М.: Наука, 1975].
159. **Sneddon I.N.** The axisymmetric Boussinesq problem for a heated punch / I. N. Sneddon, D. L. George // J. Math. Mech. - 1962. - Vol. 11. - Pp. 665-689.
160. **Sokolnikoff I.S.** Mathematical theory of elasticity, 1956, 2nd edn. - New York: McGraw-Hill, 1956.
161. **Symm G.T.** Integral equation methods in elasticity and potential theory. - Ph. D. thes. - London Univ. , 1964.
162. **Symm G.T.** Integral equation methods in potential theory. -Proc. Roy. Soc., Ser. A, 1963, v. 275, p. 33-46.
163. **Timoshenko S.P., Goodier J. N.** Theory of elasticity, 3rd edn. New York:
164. **Tomlin G.R, Butterfield R.** Elastic analysis of zoned orthotropic continua. Proc. ASCE, Engng Mech. Div., 1974, v. EM3, p. 511-529.
165. **Watanabe K.** Transient response of an elastic half-space to moving loads // Bull. JSME.-1981.-V.24, №192.-P. 913-919.
166. **Watson J.O.** Analysis of thick shells with holes by using integral equation method. - Ph. D. thes. -Southampton Univ., 1973.
167. **Yulong LI, Arutiunian A.M., Kuznetsova El.L., Fedotenkov G.V.** Method for solving plane unsteady contact problems for rigid stamp and elastic half-space with a cavity of arbitrary geometry and location // INCAS BULLETIN, 2020, Vol. 12, Special Issue, pp. 99-113, <https://doi.org/10.13111/2066-8201.2020.12.S.9>.