УДК: 539.123.17

Расхождение между теорией и экспериментом в электродинамике

Р. И. Храпко

Рассчитано поглощение светового луча круговой поляризации без азимутальной фазовой структуры в диэлектрике в рамках классической электродинамики. Мы рассмотрели передачу углового импульса и энергии в диэлектрик. Наш теоретический результат отличается от экспериментального результата Бишопа и др. [6] (Phys. Rev. Let. V. 92, 198104 (2004). Мы нашли, что момент силы, действующий на диэлектрик, состоит из двух частей, поверхностной и объемной, которые равны друг другу. Теоретическое значение полного углового импульса рассматриваемого луча вдвое превышает экспериментальный результат.

1. Постановка проблемы.

Начиная с 19 века, физики понимают, что, согласно волновой теории, свет круговой поляризации несет угловой импульс [1]. Если некоторое вещество поглощает такой свет, оно поглощает и присутствующий в нем угловой импульс. Если такой свет проходит сквозь двояко преломляющий объект, который меняет направление круговой поляризации на противоположное, этот объект абсорбирует двойное количество углового импульса падающего света. Момент силы τ, действующий на поглотитель или на двояко преломляющую среду со стороны проходящего света, обусловлен тем, что диэлектрическая постоянная ε является тензором. Соответственно, напряженность электрического поля **E** не параллельна вектору поляризации **P** среды [2].

$$d\underset{b}{\tau}/dV = \mathbf{I} = [\mathbf{P}\,\mathbf{E}], \quad \mathbf{P} = (\varepsilon - 1)\mathbf{E}. \tag{1}$$

Мы называем такой момент силы объемным (bulk) моментом $\underset{b}{\tau}$.

В настоящей статье рассматривается поглощение светового луча круговой поляризации без азимутальной фазовой структуры. Как известно, в случае луча ограниченного поперечного сечения **E** и **B** поля имеют компоненты параллельные направлению луча. Эти компоненты локализованы вблизи поверхности луча из-за того, что силовые линии представляют собой замкнутые петли [3]. Соответственно, в этом случае плотность силы Лоренца,

$$\mathbf{f} = [\mathbf{j}\mathbf{B}], \tag{2}$$

которая действует на ток смещения в среде

$$\mathbf{j} = \partial_t \mathbf{P}, \tag{3}$$

вблизи поверхности луча имеет составляющую, перпендикулярную направлению луча. Момент этой силы является дополнительным моментом, действующим на поглощающую среду в случае луча. Мы называем этот момент пристеночным (wall) моментом силы $\underset{w}{\tau}$.

В статье используется выражение Джексона [4] для луча круговой поляризации в виде

$$\breve{\mathbf{E}}(x,y,z)=\exp[i(\breve{k}z-t)][\mathbf{x}+i\mathbf{y}+\mathbf{z}\frac{1}{\breve{k}}(i\partial_x-\partial_y)]u(x,y),\quad \breve{\mathbf{B}}=-i\breve{k}\breve{\mathbf{E}}, \tag{4}$$

где амплитуда $u(x,y)=0$ вне луча. Ради краткости, мы полагаем скорость света $c = 1$ и частоту $\omega=1$. Символ breve отмечает комплексные вектора и числа. $\breve{k}=\eta+i\kappa$ есть комплексное волновое число.

Если луч типа (4) с $\breve{k}=1$ для $z<0$,

$$\breve{\mathbf{E}}_1=\exp[i(z-t)][\mathbf{x}+i\mathbf{y}+\mathbf{z}(i\partial_x-\partial_y)]u,\quad \breve{\mathbf{B}}_1=-i\breve{\mathbf{E}}_1, \tag{5}$$

падает нормально на поверхность диэлектрика, характеризующегося волновым числом $\breve{k}$, то падающий луч разделяется на отраженный луч

$$\breve{\mathbf{E}}_2=\frac{1-\breve{k}}{1+\breve{k}}\exp[i(-z-t)][\mathbf{x}+i\mathbf{y}-\mathbf{z}(i\partial_x-\partial_y)]u,\quad \breve{\mathbf{B}}_2=i\breve{\mathbf{E}}_2, \tag{6}$$

и прошедший луч

$$\breve{\mathbf{E}}_3=\frac{2}{1+\breve{k}}\exp[i(\breve{k}z-t)][\mathbf{x}+i\mathbf{y}+\mathbf{z}\frac{1}{\breve{k}}(i\partial_x-\partial_y)]u,\quad \breve{\mathbf{B}}_3=-i\breve{k}\breve{\mathbf{E}}_3, \tag{7}$$

в соответствии с коэффициентами отражения и преломления

$$\breve{R}=\frac{1-\breve{k}}{1+\breve{k}},\quad \breve{T}=\frac{2}{1+\breve{k}}.$$

Если мы положим

$$\int|u|^2\,dxdy=1, \tag{8}$$

то усредненная по времени мощность, входящая в диэлектрик, будет равна

$$\mathscr{P}=\eta\left|\breve{T}\right|^2=\frac{4\eta}{(1+\eta)^2+\kappa^2}. \tag{9}$$

В настоящей статье мы намерены вычислить полный момент силы, действующий на диэлектрик.

2. Расхождение

Вычисление полного момента силы в рамках классической электродинамики представлено в разделах 3, 4, 5. Мы нашли, что момент равен

$$\tau=\frac{8\eta}{(1+\eta)^2+\kappa^2}, \tag{10}$$

то есть

$$\tau=2\mathscr{P} \tag{11}$$

Это означает, что отношение углового импульса к энергии луча равно

$$J/U=2/\omega. \tag{12}$$

Такое отношение не противоречит [5] результату классического эксперимента Бета [2]. Однако это отношение было найдено равным $1/\omega$ в недавнем эксперименте [6].

3. Цилиндрические координаты

Ввиду цилиндрической симметрии луча в статье используются цилиндрические координаты r, φ, z,

$$x = r\cos\varphi, \quad y = \sin\varphi, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{13}$$

с метрикой

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2, \quad g_{rr} = 1, \quad g_{\varphi\varphi} = r^2, \quad g_{zz} = 1, \quad \sqrt{g}_{\wedge} = r, \quad g^{\varphi\varphi} = 1/r^2. \tag{14}$$

Корень из определителя метрического тензора является скалярной плотностью веса +1, это отмечено значком wedge на уровне нижних индексов. Элемент объема является плотностью веса -1 и отмечается значком wedge на уровне верхних индексов так же, как абсолютно антисимметричная плотность, равная ± 1: $dV^{\wedge} = (dxdydz)^{\wedge}$, $e^{\wedge}_{ijk}$. (Заметим, что в действительности $e^{\wedge}_{ijk}$ является псевдо плотностью, однако мы проигнорируем этот факт.)

Мы преобразовываем *ковариантные* компоненты векторов $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ в формулах (5), (6), (7), используя матрицы

$$\partial^x_r = \cos\varphi, \quad \partial^x_\varphi = -r\sin\varphi, \quad \partial^y_r = \sin\varphi, \quad \partial^y_\varphi = r\cos\varphi, \quad \partial^r_x = x/r = \cos\varphi, \quad \partial^r_y = y/r = \sin\varphi. \tag{15}$$

Например,

$$E_\varphi = \partial^x_\varphi E_x + \partial^y_\varphi E_y + \partial^z_\varphi E_z = (-r\sin\varphi + ir\cos\varphi)\exp[i(z-t)]u = i\exp[i(z-t+\varphi)]ru(r),$$

$$E_z = \exp[i(z-t)](i\partial_x - \partial_y)u = \exp[i(z-t)](i\cos\varphi - \sin\varphi)\partial_r u = i\exp[i(z-t+\varphi)]\partial_r u.$$

Это преобразование даёт

$$\underset{\to}{\breve{E}}_1 = \exp[i(z-t+\varphi)](\underset{\to}{r} + ir\underset{\to}{\varphi} + \underset{\to}{z}\, i\partial_r)u(r), \qquad \underset{\to}{\breve{B}}_1 = -i\,\underset{\to}{\breve{E}}_1. \tag{16}$$

$$\underset{\to}{\breve{E}}_2 = \frac{1-\breve{k}}{1+\breve{k}}\exp[i(-z-t+\varphi)](\underset{\to}{r} + ir\underset{\to}{\varphi} - \underset{\to}{z}\, i\partial_r)u(r), \qquad \underset{\to}{\breve{B}}_2 = i\,\underset{\to}{\breve{E}}_2. \tag{17}$$

$$\underset{\to}{\breve{E}}_3 = \frac{2}{1+\breve{k}}\exp[i(\breve{k}z-t+\varphi)](\underset{\to}{r} + ir\underset{\to}{\varphi} + \underset{\to}{z}\,\frac{i}{\breve{k}}\partial_r)u(r), \qquad \underset{\to}{\breve{B}}_3 = -i\breve{k}\,\underset{\to}{\breve{E}}_3. \tag{18}$$

Стрелка, расположенная под символом, обозначает ковариантный вектор или ковариантный координатный вектор.

4. Диэлектрик

Когда электромагнитная волна проходит сквозь диэлектрик, электрическое поле поляризует его. Вектор поляризации, его производная по времени, являющаяся током смещения, и плотность силы Лоренца, действующая на этот ток, даются выражениями:

$$\mathbf{P} = (\varepsilon - 1)\mathbf{E}, \quad \mathbf{j} = \partial_t \mathbf{P}, \quad \mathbf{f} = [\mathbf{jB}], \quad \breve{\varepsilon} = \breve{k}^2 \tag{19}$$

Кроме того, круговая поляризация волны вызывает объемную плотность крутящего момента [2]

$$\mathbf{I} = [\mathbf{PE}]. \tag{20}$$

Обратимся сначала к величине (19), вернее, к интересующей нас z-компоненте векторного произведения $[\mathbf{r}\,\mathbf{f}]_\mathbf{z}$. Момент силы $\underset{w}{\tau}_z$, вызываемый силой **f,** мы называем пристеночным моментом, поскольку он действует в районе поверхности луча. Он получается интегрированием величины

$$d\underset{w}{\tau}_z = r f_{zr} \sqrt{g}_{\wedge} dV^{\wedge} = r(j_z B_r - j_r B_z)\sqrt{g}_{\wedge} dV^{\wedge} \tag{21}$$

по всему объему диэлектрика ($z > 0$) с усреднением по времени.

Для вычисления интеграла мы должны подставить комплексные значения

$$\breve{E}_{3r} = \frac{2}{1+\breve{k}} \exp[i(\breve{k}z - t + \varphi)]u(r), \qquad \breve{E}_{3z} = \frac{2i}{(1+\breve{k})\breve{k}} \exp[i(\breve{k}z - t + \varphi)]\partial_r u(r)$$

$$\breve{B}_{3r} = -i\breve{k}\breve{E}_{3r}, \qquad \breve{B}_{3z} = -i\breve{k}\breve{E}_{3z} \tag{22}$$

из (18) в (21). Интегрирование по φ, z и усреднение по времени дают

$$\underset{w}{\tau}_z = \pi\int r^2 \Re[(\breve{\varepsilon}-1)(\partial_t \breve{E}_{3z}\overline{B}_{3r} - \partial_t \breve{E}_{3r}\overline{B}_{3z})]drdz = \frac{2\pi}{\kappa[(1+\eta)^2+\kappa^2]}\int r^2 \Re\left[i(\breve{\varepsilon}-1)\left(\frac{\bar{k}}{\breve{k}}+1\right)\right]\partial_r(\frac{u^2}{2})dr. \tag{23}$$

Черта означает комплексное сопряжение комплексных чисел.

Интегрирование последнего выражения при учете (8) и усреднение по времени дают пристеночный момент силы, действующий на диэлектрик

$$\underset{w}{\tau}_z = -\Re\left[i(\breve{\varepsilon}-1)\left(\frac{\bar{k}}{\breve{k}}+1\right)\right]\frac{1}{\kappa[(1+\eta)^2+\kappa^2]} = \frac{2\eta(k^2+1)}{k^2[(1+\eta)^2+\kappa^2]}. \tag{24}$$

Теперь мы вычислим интеграл от плотности (20), используя (18). Получаем

$$\underset{b}{\tau} = \int \Re(\breve{P}_r \overline{E}_{3\varphi} - \breve{P}_\varphi \overline{E}_{3r}) e^{r\varphi z}_{\wedge} (drd\varphi dz)^{\wedge} / 2 = \frac{4\eta}{(1+\eta)^2+\kappa^2}. \tag{25}$$

Мы интерпретируем этот момент силы как объемную часть полного момента.

5. Пространство перед диэлектриком. Полный момент силы

На поверхности диэлектрика, $z = 0$, согласно (5), (6), (7), все компоненты **B** и касательные компоненты **E** непрерывны, однако E_z уменьшается в $\breve{\varepsilon}$ раз при переходе через поверхность диэлектрика. Это, естественно, означает присутствие на поверхности электрического заряда. Согласно (16), (17), (18), поверхностная плотность этого заряда равна

$$\breve{\sigma} = [\breve{E}_{3z} - \breve{E}_{1z} - \breve{E}_{2z}]_{z=0} = \frac{2i(1-\breve{k}^2)}{(1+\breve{k})\breve{k}} \exp[i(-t+\varphi)]\partial_r u(r). \qquad (26)$$

Этот заряд испытывает касательные силы σE_φ со стороны электрического поля; момент этих сил есть момент силы, действующий на поверхность диэлектрика. Интегрирование по частям и усреднение по времени дают для него выражение

$$\underset{\sigma}{\tau} = \int r\Re(\breve{\sigma}\overline{E}_{3\varphi})drd\varphi/2 = \frac{4\pi}{(1+\eta)^2+\kappa^2}\int r^2\partial_r(u^2/2)\Re[(1-\breve{k}^2)/\breve{k}]dr = \frac{2\eta(k^2-1)}{k^2[(1+\eta)^2+\kappa^2]} \qquad (27)$$

Замечательно, что сумма поверхностной части (27) и пристеночной части (24) момента силы равна объемной части полного момента силы (25).

$$\underset{\sigma}{\tau} + \underset{w}{\tau} = \frac{2\eta(k^2-1)}{[(1+\eta)^2+\kappa^2]k^2} + \frac{2\eta(k^2+1)}{[(1+\eta)^2+\kappa^2]k^2} = \frac{4\eta}{(1+\eta)^2+\kappa^2} = \underset{b}{\tau} \qquad (28)$$

Таким образом, полный момент силы, испытываемый нашим диэлектриком, равен удвоенной величине (ср. (10))

$$\tau = \underset{\sigma}{\tau} + \underset{f}{\tau} + \underset{b}{\tau} = \frac{8\eta}{(1+\eta)^2+\kappa^2} \qquad (29)$$

Мощность, передаваемую диэлектрику, можно подсчитать, интегрируя вектор Пойнтинга по сечению луча и усредняя по времени (ср. (9)):

$$\mathscr{P} = \int \Re[(\breve{E}_{1r}+\breve{E}_{2r})(\overline{B}_{1\varphi}+\overline{B}_{2\varphi}) - (\breve{E}_{1\varphi}+\breve{E}_{2\varphi})(\overline{B}_{1r}+\overline{B}_{2r})]d\varphi dr/2 = \frac{4\eta}{(1+\eta)^2+\kappa^2} \qquad (30)$$

6. Заключение

Наше вычисление показало, что полный угловой импульс электромагнитного луча круговой поляризации без азимутальной фазовой структуры состоит из пристеночной части и объёмной части, которые равны между собой. Пристеночная часть поглощается на границе диэлектрика и вблизи поверхности луча внутри диэлектрика. Пристеночная часть углового импульса луча почти не связана с его энергией, в то время как объёмная часть углового импульса связана с энергией луча соотношением, характерным для отдельного фотона $J/U = 1/\omega$. Наш теоретический результат не противоречит классическому эксперименту Бета [2], однако расходится с недавним экспериментальным результатом [6].

Я благодарен профессору Тимо Ниеминену за плодотворную дискуссию в интернете (Newsgroups: sci.physics.electromag).

Список литературы

1. Sadowsky A. // Acta et Commentationes Imp. Universitatis Jurievensis. – 1899, **7**, No 1-3.
2. Beth R. A. Direct detection of the angular momentum of light. // Physical Review. – 1935, **48.-** p.471
3. Ohanian H.C. What is spin? // American Journal of Physics. – 1986, **54**.- p.500.
4. Джексон Дж. Классическая электродинамика. - М.: Мир, 1965.- 524 с.
5. Khrapko R. I. Experimental verification of Maxwellian electrodynamics. // Measurement Techniques – 2003, **46**, No. 4.- p.317.
6. Bishop A. I. et al. Optical microrheology using rotating laser-trapped perticles. // Physical Review Letters. – 2004, **92**, 198104.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Храпко Радий Игоревич, доцент кафедры физики Московского авиационного института (Государственного технического университета), к.ф.-м.н. *E-mail:* khrapko_ri@hotmail.com
121433, Москва, Б. Филевская, 43 – 92, т. 1446312