

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Московский авиационный институт  
(национальный исследовательский университет)

На правах рукописи

УДК 539.3



ЧАН ЛЕ ТХАЙ

**ДИНАМИКА УПРУГОГО МОМЕНТНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА  
ПОД ДЕЙСТВИЕМ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ  
ПОВЕРХНОСТНОЙ НАГРУЗКИ**

01.02.04 – механика деформируемого твердого тела

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

д. ф.-м. н., профессор

Тарлаковский Дмитрий Валентинович

Москва – 2019

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>ВВЕДЕНИЕ</b> .....	<b>3</b>
<b>ГЛАВА 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ</b> .....	<b>7</b>
1.1. Современное состояние исследований .....	7
1.2. Пространственные уравнения движения и граничные условия для среды Коссера .....	23
1.3. Уравнения осесимметричного движения среды Коссера .....	25
1.4. Постановка осесимметричных задач для полупространства .....	28
1.5. Интегральные представления решений осесимметричных задачи для полупространства .....	29
1.6. Интегральные представления решений при нормальных поверхностных возмущениях .....	35
<b>ГЛАВА 2. ДЕЙСТВИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО НЕСТАЦИОНАРНОГО НОРМАЛЬНОГО ПЕРЕМЕЩЕНИЯ НА ПОЛУПРОСТРАНСТВО</b> .....	<b>38</b>
2.1. Изображение ограниченного решения .....	38
2.2. Метод малого параметра .....	41
2.3. Изображения функций влияния, соответствующих условиям (1.6.10) ....	44
2.4. Плоская задача с граничными условиями, аналогичными (1.6.10) .....	47
2.5. Оригиналы функций влияния, соответствующих условиям (1.6.10) .....	56
2.6. Функции влияния, соответствующие условиям (1.6.11) .....	60
2.7. Функции влияния, соответствующие условиям (1.6.12) .....	65
2.8. Функции влияния, соответствующие условиям (1.6.13) .....	67
2.9. Примеры действия нестационарной поверхностной нагрузки .....	69
<b>ГЛАВА 3. ДЕЙСТВИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО НЕСТАЦИОНАРНОГО НОРМАЛЬНОГО ДАВЛЕНИЯ НА ПОЛУПРОСТРАНСТВО</b> .....	<b>74</b>
3.1. Функции влияния, соответствующие условиям (1.6.15) .....	74
3.2. Функции влияния, соответствующие условиям (1.6.16) .....	83
3.3. Функции влияния, соответствующие условиям (1.6.17) .....	86
3.4. Функции влияния, соответствующие условиям (1.6.18) .....	88
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ</b> .....	<b>91</b>
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ</b> .....	<b>92</b>
<b>СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ</b> .....	<b>95</b>

## ВВЕДЕНИЕ

Развитие современной техники зачастую приводит к необходимости использования уточненных по сравнению с классической теорией упругости моделей, позволяющих учитывать микростроение вещества. Прежде всего, это требуется для композитных материалов. Одной из таких моделей является используемая в данной работе модель Коссера. Деформация такой среды описывается не только вектором перемещения, но и вектором поворота, т.е. величиной, являющейся функцией времени и положения.

Как следует из приведенного в главе 1 обзора публикаций по данной тематике, в настоящее время для среды Коссера, в основном, исследованы статические и стационарные задачи. И лишь в нескольких работах рассматриваются нестационарные процессы. При этом рассматриваются плоские задачи. Публикации, посвященные нестационарным осесимметричным процессам в таких средах, практически отсутствуют. В данной работе и проводится их исследование применительно к распространению нестационарных поверхностных возмущений от границы полупространства. В том числе, рассматривается задача типа Лемба.

**Целью диссертационной работы** является постановка задач о распространении осесимметричных нестационарных волн в упругом моментном полупространстве и построение их аналитических решений.

**Актуальность темы исследования** обусловлена в теоретическом плане малой изученностью нестационарных осесимметричных процессов в телах, заполненных средой Коссера. С практической же точки зрения она связана с потребностью учета микроструктуры материала при расчетах элементов конструкций объектов современной техники.

**Методы исследования.** Для постановки задач о распространении нестационарных поверхностных возмущений от границы полупространства используется модель Коссера. Их решения представляются в виде обобщенных сверток этих возмущений с нестационарными поверхностными функциями

влияния. Для построения этих функций в осесимметричных случаях применяются интегральные преобразования Лапласа по времени и Ханкеля по радиусу в сочетании с методом малого параметра. Обращение этих преобразований в простейших случаях проводится последовательно, а в более сложных вариантах применяется связь плоской и осесимметричной задач.

**Достоверность и обоснованность результатов** научных положений и полученных результатов подтверждается использованием апробированной модели сплошной среды, применением для решения начально-краевых задач строгих математических методов и сравнением с решениями для упругих сред.

**Научная новизна диссертационной работы** заключается в следующем.

1. Впервые даны постановка и интегральное представление решений задач о распространении поверхностных нестационарных осесимметричных возмущений всех возможных видов в полупространстве.

2. Получено аналитическое решение новой плоской нестационарной задачи о распространении возмущений от границы полуплоскости.

3. Впервые построены аналитические решения нестационарных осесимметричных задач для полупространства с заданными поверхностными возмущениями.

4. Исследованы новые задачи о действии на границу упругого моментного полупространства распределенных нормальных возмущений.

**Практическая значимость** состоит в разработке методов исследования напряженно-деформированного состояния упругих сред и элементов конструкций из материалов с микроструктурой, работающих в условиях нестационарных внешних воздействий, а также в возможности использования полученных решений в качестве тестовых при использовании различных пакетов программ.

**На защиту выносятся следующие основные результаты и положения.**

1. Постановка и интегральное представление решений задач о распространении поверхностных нестационарных осесимметричных возмущений всех возможных видов в полупространстве, заполненном средой Коссера.

2. Аналитические решения всех возможных нестационарных задач о распространении осесимметричных поверхностных возмущений от границы упругого моментного полупространства.

3. Модификация алгоритмов построения оригиналов Лапласа и Ханкеля для функций влияния.

4. Результаты решения задач о действии на границу полупространства нестационарных осесимметричных распределенных нормальных возмущений и оценка влияния учета моментных характеристик.

**Апробация основных результатов работы.** Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на Российских и Международных конференциях и симпозиумах:

– Международный симпозиум «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова (Московская обл., 2016 – 2019 г.г.);

– Международный научный семинар «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при взаимодействии полей различной физической природы». (Москва, МАИ, 2015 – 2018 г.г.);

– Научная конференция «Ломоносовские чтения» (Москва, МГУ, 2016 – 2018 г.г.).

**Публикации.** Основные результаты диссертации опубликованы в 14 печатных работах, в том числе в 4 статьях в журналах, рекомендованных ВАК РФ и 10 тезисов докладов.

**Структура и объем диссертации.** Диссертационная работа состоит из введения, трёх глав, заключения, приложение и списка использованных источников, включающего 138 наименований. Общий объем диссертации 109 страниц.

В первой главе дан аналитический обзор публикаций, посвящённых рассматриваемой в диссертации проблеме. Приведены основные соотношения для упругой моментной среды, описываемой моделью Коссера. Из них получены

уравнения осесимметричного движения в цилиндрической системе координат. Дана постановка соответствующих начально-краевых задач для полупространства, включающая все возможные краевые условия на граничной полуплоскости. Приведены их интегральные представления. Особо выделены условия, обеспечивающие осесимметричный характер движения.

Вторая глава посвящена разработке методов решения нестационарных осесимметричных задач для полупространства, основанного на использовании интегральных преобразований Лапласа и Ханкеля, а также метода малого параметра. Здесь же построены аналитические решения для случаев действия на границе нестационарного нормального перемещения.

В третьей главе с использованием полученных выше результатов проведено исследование нестационарных осесимметричных задач для полупространства, занятого средой Коссера при действии на его границу нестационарного давления.

## ГЛАВА 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

### 1.1. Современное состояние исследований

При исследовании динамических процессов в композиционных материалах, которые в последнее время широко используются в конструкциях различных объектов, в том числе в авиационной и ракетно-космической технике [123, 124], требуются отличные от традиционных модели сплошных сред. Например, классическая теория упругости основывается на идеализированной модели упругого континуума, в которой материальная частица совпадает с точкой, а деформированное состояние описывается перемещением точки. Несмотря на то, что эта теория успешно описывает распределение напряжений в конструкциях, существуют и модели сред, учитывающих внутренний момент количества движения.

Одной из основных гипотез классической механики сплошных сред (МСС) является принцип напряжений Коши, устанавливающий эквивалентность действия всех внутренних сил, приложенных к элементарной площадке, действию их равнодействующей, приложенной к центру площадки. Однако в общем случае действие произвольной системы сил эквивалентно действию главного вектора и главного момента. При этом в среде возникают не только напряжения, но и моментные напряжения, образующие, вообще говоря, несимметричные тензоры. Чтобы учесть эти факторы, необходимо допустить наличие дополнительных степеней свободы и рассмотреть физически бесконечно малый объем, по которому ведется усреднение свойств среды, не как материальную точку, а как более сложный объект, обладающий новыми степенями свободы: ротационными, осцилляторными или способностью к микродеформации. Таким образом, для расширения спектра свойств сплошной среды необходимо предположить у физически бесконечно малого объема существование внутренней структуры (микроструктуры), обусловленной зернистостью или волокнистостью строения реальных материалов.

Среду, моделируемую таким образом, сегодня часто называют средой Коссера, а из-за появления моментных несимметричных напряжений эту теорию называют моментной, несимметричной или микрополярной теорией упругости. В силу того, что нагрузка на элементарную область тела осуществляется также и посредством момента сил, для среды вводится независимая кинематическая характеристика, с которой связана работа данного вращающего момента. Этой характеристикой является вектор поворота.

Происхождение теории микроструктуры, вероятно, связано с работой [138], в которой впервые рассмотрена модель среды с вращательным взаимодействием ее частиц при изучении упругих свойств кристаллов. Стараясь исправить недостатки классической теории упругости путем дополнительного предположения о передаче нагрузок через элемент поверхности не только главным вектором, но и главным моментом, автор вывел уравнения равновесия для таких кристаллов, включая уравнение моментов, и исследовал свойства кристаллов.

Общая теория моментной упругости впервые была разработана братьями Коссера (E. Cosserat, F. Cosserat) в 1909 г. [128]. В этой работе они развили теорию с помощью вариационного принципа, который назвали "Евклидовым действием" ("L'Action Euclidienne"). При этом каждой частице деформированной среды ставится в соответствие ортогональный трехгранник. Таким образом, частицы получают ориентирование (полярная среда). Каждая частица среды Коссера является бесконечно малым абсолютно твердым телом. Деформация такой среды описывается не только вектором перемещения, но и вектором поворота, т.е. величиной, являющейся функцией времени и положения. При таких предположениях в теле возникают не только напряжения, но и моментные напряжения, образующие, вообще говоря, несимметричные тензоры. Можно сказать, что появление модели континуума Коссера знаменовало собой начало перехода в МСС от механики Ньютона, исходным объектом которой является



материальная точка, к механике Эйлера, имеющей в качестве исходного объекта твердое тело.

Затем на протяжении нескольких десятилетий не было практически ни одной работы, посвященной континууму Коссера. Но только приблизительно через полвека после выхода знаменитой работы братьев Коссера появились яркие труды, касающиеся возможностей применения положений микрополярного континуума в различных областях механики сплошных сред, например, [8, 9, 55, 77 – 79, 85, 86]. В значительной степени они посвящены концептуальным вопросам – описанию кинематики точки континуума, построению физических соотношений. Эти работы внесли большой вклад в развитие данной области знаний и послужили основой для дальнейших исследований. Но в 70 – 80-х годах прошлого века, судя по количеству публикаций, наблюдается некоторое «затишье» в изучении обобщенных континуумов [17, 27, 41, 48, 49, 53, 54, 68, 75, 117].

Возможно, бурное развитие микромеханики в целом, а также достижения в сфере нанотехнологий послужили в конце XX века и первые годы XXI-го века причиной новой волны интереса к теории обобщенного континуума. За прошедшие годы опубликованы тысячи работ, отражающих ее развитие и применение к описанию особенностей поведения как жидких сред, так и деформируемых твердых тел [1 – 7, 10 – 16, 18 – 26, 28 – 35, 39, 40, 42 – 47, 50 – 52, 56 – 67, 69 – 74, 76, 80 – 84, 87 – 92, 94 – 98, 100 – 102, 118 – 122, 125 – 127, 129 – 137].

В монографии [45] автор приводит несколько направлений развития несимметричной теории упругости. Это:

- теория среды со «стесненным вращением» (псевдоконтинуум Коссера);
- теория среды Коссера;
- континуум Леру;
- микроморфная среда Миндлина-Эрингена и прочие.

В статье [47] предложен вариант построения континуума Коссера, позволяющий учитывать вязкоупругие свойства материала. Особенности волновых процессов в микрополярных средах посвящены статьи [60 – 67, 75]. В работу [130] представлены результаты исследований, связанных с особенностями волновых процессов в материалах, взаимодействующих с микрополярными упругими средами. В статьях [47, 58, 94] развиваются численные методы и алгоритмы решения статических и динамических краевых задач континуума Коссера.

В рамках несимметричной теории упругости получено большое количество более физически правдоподобных решений по сравнению с классической теорией. Однако все эти решения носят лишь теоретический характер в связи с отсутствием информации по значениям материальных коэффициентов моментных упругих сред. Вопросы о материальных константах для микроструктурных сред рассматриваются в работах [1, 15, 27, 31, 42, 43, 72, 73, 81, 84, 91].

В монографии [1] рассматриваются проблемы идентификации констант упругого изотропного однородного и центрально-симметричного континуума Коссера с использованием решений различных статических и динамических краевых задач. Обсуждены вопросы использования метода гомогенизации для моделей гетерогенных материалов и связанные с ним ограничения на использование гипотезы однородности при рассмотрении краевых эффектов. Выполнен сравнительный анализ масштабных параметров длины для комбинаций констант модели, полученных в экспериментальных работах, и комбинаций констант, используемых в теоретических работах. Показано, что значимые эффекты учета моментных напряжений в основном проявляются в погранслоях, толщина которых соизмерима с масштабными параметрами длины для конкретного континуума Коссера.

В работе [72] с использованием метода осреднения определяются материальные функции линейной моментной теории упругости. Эта методика

применяется для отыскания константы материала в задаче о равновесии бесконечной плоскости, ослабленной круговым отверстием.

В [73] получены упругие константы, входящие в определяющие соотношения несимметричной теории упругости, отражающие связь напряжений и деформаций неоднородного упругого материала.

А в статье [81] в рамках несимметричной теории упругости построена модель волокнистого гибридного композита, все фазы которого являются изотропными материалами. Определены эффективные термоупругие характеристики композиции. Показано, что на основе полученных уравнений можно определить напряженно-деформированные состояния во всех фазах композиции, используя известные осредненные компоненты тензоров напряжений, моментных напряжений, деформаций и изгиба-кручения в волокнистом материале, что имеет принципиальное значение при расчетах композитных конструкций с использованием структурных теорий прочности.

В работе [84] проводится исследование и сравнение способов нахождения определяющих соотношений несимметричной теории упругости с использованием асимптотических методов осреднения композитов с периодической структурой. Рассматривается композит с упругой матрицей и регулярными сферическими упругими включениями меньшей жесткости, для которого как аналитическими, так и численными методами определяются материальные константы среды Коссера, и подтверждается существенность эффектов моментной упругости.

В статье [91] описывается способ вычисления материальных характеристик определяющих соотношений моментной теории упругости в случае, если известны тензоры модулей упругости и структура исследуемого материала.

В настоящий момент решено большое число статических задач моментной теории упругости [14, 22, 23, 40, 58, 80, 88 – 90, 95 – 97, 102]. Так в работе [14] показано, что в общем случае изотропного упругого тела имеются четыре характеристики материала: кроме модуля Юнга и коэффициента Пуассона

необходимы и достаточны еще два параметра моментной теории упругости. Построена замкнутая система дифференциальных соотношений и впервые установлены граничные условия основных задач моментной теории упругости. Найдено интегральное представление вектора перемещений, приводящее к теории потенциалов моментного напряженно-деформированного состояния упругой сплошной среды. Автором выведена система дифференциальных уравнений. Основные задачи моментной теории упругости сведены к системе сингулярных граничных интегральных уравнений. Построены интегральные уравнения задачи кручения упругого тела вращения для моментной теории упругости.

В статье [23] рассмотрена двумерная модель деформации асимметрично-упругого тела. Приведено точное решение задачи плоской асимметричной теории упругости об одноосном растяжении пластины, ослабленной треугольным отверстием. Проведен сравнительный анализ полученного решения с классическим.

В работе [40] предложен метод решения статической задачи несимметричной теории упругости в перемещениях. С использованием преобразований двух основных векторных уравнений моментной теории упругости автором введена оригинальная форма уравнений моментной упругости и получены решения этих уравнений в виде различных представлений. Здесь же работе приводится метод последовательных приближений.

В статье [89] рассматриваются две постановки квазистатической задачи в напряжениях несимметричной теории упругости для изотропной среды. Одна из них, "классическая", используется при рассмотрении континуума Коссера, другая, "новая", заключается в решении 12 дифференциальных уравнений второго порядка относительно 12 независимых компонент симметричных частей тензоров напряжений и моментных напряжений при удовлетворении 12 граничным условиям. Доказывается эквивалентность обеих постановок.

В работе [96] при помощи метода гипотез двумерная краевая задача микрополярной теории упругости для анизотропной среды в области тонкого

прямоугольника сводится к прикладной одномерной задаче. На основе построенных моделей микрополярных анизотропных упругих тонких балок рассматривается конкретная задача об определении напряженно-деформационного состояния балки с шарнирно-опертыми граничными условиями. Получены результаты численных расчетов. На основе их анализа выявляются эффективные прочностные и жесткостные свойства микрополярного анизотропного материала балки.

В работе [97] авторами была построена общая прикладная двумерная теория пластин на основе несимметричной теории упругости. Показано, что в зависимости от значений новых упругих моментных констант материала пластинки, возможно построение прикладной двумерной теории микрополярных упругих пластин, при котором моментные напряжения играют решающую роль, а также прикладной двумерной теории, при которой компоненты вектора поворота точек срединной плоскости пластинки выражаются через прогиб пластинки (как в случае классической теории). Т.е. фактически речь идет о прикладной двумерной теории микрополярных пластин со стесненным вращением. В данной работе на основе прикладной двумерной теории упругости и термоупругости микрополярных пластин (с независимыми полями перемещений и вращений) рассмотрены некоторые конкретные задачи (цилиндрический изгиб пластин, изгиб прямоугольных и круглых пластин). Все изученные задачи доведены до окончательных численных результатов и выполнен их анализ. Выявлены особенности микрополярности материала пластинки.

В статье [102] решены системы однородных дифференциальных уравнений статики континуума Коссера и краевые задачи моментной теории упругости для шара. Решения рассматриваемых задач получены в виде абсолютно и равномерно сходящихся рядов.

Вопросы разработки дискретных структурных и обобщенных континуальных моделей тел Коссера, для которых важен учет поворотов элементов, рассматриваются в работе [30, 62]. Здесь представлены подходы к

построению иерархии моделей материалов с квадратной решеткой на основе введения макроячеек различного типа и, соответственно, большего числа полей для описания деформаций, а также комбинаций подходов микрополярной и многополевой теорий.

В работах [24 – 27] путем обобщения предложенных автором градиентной и одномоментной теорий упругости сформулированы основы мультимоментной теории упругости и рассмотрены ее приложения в механике композитов. Установлен алгоритм для определения эффективных однородных и моментных компонентов состояния сред с заданной структурой.

Нелинейные моментные теории упругости рассматриваются в работах [11, 21, 46, 48 – 50, 127]. В [11] изучаются некоторые качественные особенности уравнений термоупругости полярно-структурных сред первого порядка, тесно связанных с понятием разрывных решений и существованием движущихся сингулярных поверхностей, а также отыскание ряда соответствий между двумя различными формами волновых движений: распространением слабых разрывов в нелинейной задаче с одной стороны и наличием диспергирующих волн гармонического типа в инфинитезимальной теории с другой.

В статье [20] предложены два варианта вариационного формулирования краевых задач нелинейной локально-моментной теории упругости на основании полных функционалов. В первом случае базовый потенциал (функция Гамильтона) задается на фазовом пространстве векторов силовых импульсов поступательной и вращательной форм движения и тензоров градиента места и градиента локальных вращений. Во втором случае сопряженный потенциал Гамильтона является функцией, заданной на фазовом пространстве векторов скоростей поступательного и вращательного движений и соответствующих тензоров силовых и моментных напряжений.

В статье [46] методом связанных нормальных волн осуществлен переход от системы нелинейных уравнений, описывающих динамику среды, к эволюционным уравнениям. Показано, что эволюционные уравнения

представляют собой систему четырех нелинейных уравнений в частных производных, два из которых являются уравнениями Бюргерса, а два – модифицированными уравнениями Кортевега-де Вриза.

В работе [48, 49] выводятся уравнения нелинейной динамики, законы изменения энергии и волнового импульса для сред с моментными напряжениями. Исследованы особенности распространения плоских периодических и уединённых волн. Обсуждается вопрос их устойчивости относительно поперечных возмущений.

В статье [50] найдены семейства конечных деформаций упругого континуума Коссера, на которых система уравнений равновесия сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Этими семействами можно описать раздувание, растяжение и кручение полого кругового цилиндра, цилиндрический изгиб прямоугольной плиты, выпрямление круговой арки, выворачивание цилиндрической трубы, образование винтовой дислокации и клиновой дисклинации в полом цилиндре и другие виды деформаций. А в статье [127] излагается применение динамики среды Коссера к нелинейной задаче неплоскостной динамики упругих стержней.

Задачи для термоупругой среды Коссера рассматриваются в работах [2, 3, 26, 51, 81, 97, 101, 125, 126, 131]. В [2] исследуется задача термоупругости для пологих оболочек на основе несимметричной теории упругости. Приводятся решения некоторых модельных задач, характеризующих специфические особенности, связанные с учетом несимметричности.

В монографии [3] рассматривается методика приведения трехмерной несимметричной задачи термоупругости к несвязанной двумерной плоской задаче и задаче изгиба. На основе аналитического и численного решения модельных задач делается вывод, что суммарные моменты существенным образом зависят от значений новых упругих постоянных несимметричной теории упругости, величины которых прямыми экспериментами не определены.

В работе [26] на основе предложенных концепций и найденных уравнений моментной механики и моментной термодинамики неоднородных сред рассматривается алгоритм для определения моментных компонентов состояния сред с заданной структурой. Установлено, что на границах тел возникает тонкий слой, состояние которого отлично от остальной области. Это состояние в зависимости от строения структуры может существенно (до 20%) изменить интенсивность безмоментных компонентов напряженного состояния. Доказано, что основные феноменологические законы типа закона упругости Гука, закона теплопроводности Фурье, закона диффузии Фика и другие должны уточняться в связи с влиянием неоднородного строения материалов и высокого градиентного воздействия. Для некоторых конкретных материалов в работе найдены в аналитическом виде уточненные законы.

В [97] построена общая прикладная двумерная теория термоупругости пластин на основе моментной теории упругости. Рассмотрены некоторые задачи термоупругости микрополярных пластин (цилиндрический изгиб пластин, изгиб прямоугольных и круглых пластин).

Основные уравнения плоской задачи моментной теории термоупругости получены в монографии [101].

В статье [125] исследована начально-краевая задача линейной динамики термоупругих оболочек Коссера с полостями. Доказаны теоремы взаимной и единственности решения. Исследована также непрерывная зависимость решения задачи от внешних объемных сил, температурных воздействий и начальных условий. Получена вариационная характеристика решения.

В [126] рассматривается задача вычисления температурных напряжений в упругих цилиндрических оболочках. Задача заключается в определении равновесного состояния оболочки под действием заданного температурного поля. Распределение температуры задается полиномиальной функцией осевой координаты, причем коэффициенты полинома зависят от окружной координаты.



В работе [131] исследовано распространение волн в трансверсально изотропном моментно термоупругом пространстве.

Большое число работ связано со стационарными динамическими (установившимися) процессами в моментно упругих средах [12, 13, 16, 39, 45, 48, 49, 58, 60 – 67, 75, 76, 92]. В работе [12] рассматриваются особенности распространения гармонических волн в анизотропной среде Коссера с кубической симметрией. Исследуется влияние анизотропии на возможность существования различных типов волн в линейной упругой среде Коссера, а также изучаются некоторые акустические характеристики такой среды.

В [13] исследуются некоторые свойства упругих монохроматических волн, распространяющихся в неограниченной среде Коссера в произвольном направлении. Полученная связанная система линейных однородных уравнений для векторов смещений и поворота приводит к характеристическому уравнению относительно фазовых скоростей возможных упругих волн.

В статье [16] получены выражения для фазовых и лучевых скоростей распространения трехмерных фронтов квазипродольных и квазипоперечных упругих волн в микрополярной кубически анизотропной среде. Проведен анализ влияния микрополярной постоянной упругости на зависимость скоростей волн от угла наклона нормали к поверхности.

В [39] решена плоская задача о равновесии моментно упругого прямоугольника со смешанными краевыми условиями: на границе заданы нормальные компоненты напряжений, касательные компоненты перемещения и моментные напряжения. Поставленная краевая задача в предположении достаточной гладкости искомых функций сведена к последовательному решению краевых задач внутри прямоугольника для уравнений Пуассона и Гельмгольца.

В статье [58] получен ряд аналитических решений статических и динамических волновых задач линейной упругой среды Коссера. Параллельно с получением аналитических решений и на основе метода конечных элементов были разработаны численные алгоритмы решения задач несимметричной теории

упругости о статическом деформировании. Динамические задачи являются краевыми и решение уравнений движения представимо в виде Фурье-интегралов относительно всех компонент вектора перемещения и вектора поворота.

В работе [60] того же автора рассматривается задача о распространении поверхностной акустической волны Рэлея в полупространстве, смоделированном редуцированной средой Коссера. Получено общее аналитическое решение этой задачи. Приведен сравнительный анализ полученного решения с соответствующим решением для упругой классической среды и для полной линейной среды Коссера. Показано, что для волны Рэлея характерна запрещенная зона частот, где волна распространяться не может. Дисперсионная кривая состоит из двух ветвей, причем для одной из них имеется как частота отсечки, так и волновое число отсечки.

В [62] введены и проанализированы макропараметры, характеризующие отличие напряженно-деформированного состояния от предсказываемого классической теорией упругости: коэффициент эллиптичности, волновое число, фазовая и групповая скорости. Необходимо отметить, что эти параметры экспериментально измеряемы.

В работе [64] рассматривается задача о распространении упругих поверхностных волн в среде Коссера (случай полупространства). В отличие от известных работ, решения уравнений движения ищутся в виде волновых пакетов, задаваемых спектром Фурье произвольной формы. Полученное решение состоит из двух независимых частей, одна из которых описывает волну Рэлея, а вторая соответствует поперечной волне, затухающей с глубиной. Для обоих типов волн выписаны аналитические решения в перемещениях. Особо необходимо отметить, что, в отличие от волны Рэлея, полученное решение для поперечной поверхностной волны не имеет аналогов в классической теории упругости. В качестве численных иллюстраций приведено сравнение решения для поперечной волны с решением для волны Рэлея.

В [92] рассматриваются основные соотношения линеаризованной теории для деформированной упругой среды с учетом моментных напряжений. Предполагается, что функция упругого потенциала зависит от тензора конечных деформаций и тензора изгиба-кручения. Для изотропного в начальном состоянии тела и однородных начальных деформаций предлагается использовать операторный метод представления решений линеаризованных уравнений статики и динамики. Полученные общие решения используются для анализа закономерностей распространения упругих волн различного типа в пространстве и полупространстве. Исследуется вид дисперсионных кривых, влияние предварительной деформации. Показано, что если предварительное сжимающее напряжение превышает некоторое "критическое" значение, то исчезает поверхностная волна Рэлея.

Высокий уровень вычислительной техники неизбежно привел к развитию методов численного моделирования при исследовании моделей сред, в том числе сред с микроструктурой [19, 26, 30, 94]. В работе [19] дается подход к моделированию свойств одномерного континуума Коссера. Используется предложенный Ильюшиным метод механического моделирования, предусматривающий построение дискретной модели конструкции, составленной из элементов (блоков, ячеек) специального вида, осредненные свойства которой воспроизводят свойства моделируемого континуума. В качестве исходной дискретной модели для континуума Коссера предложена модель оснащенного стержня - упругая конструкция в виде тонкого стержня с размещенными вдоль его упругой линии на упругих шарнирах массивными включениями (шкивами), связанными между собой упругими ременными передачами. Выведена полная система уравнений, описывающих механические свойства и динамическое равновесие оснащенности стержня в произвольных плоских движениях. Проведено усреднение этих уравнений в случае достаточно плавного изменения параметров движения вдоль стержня (длинноволновое приближение). Установлено, что осредненные уравнения в точности совпадают с уравнениями

одномерной среды Коссера, а в частных случаях и с классическими уравнениями движения упругого стержня. Изучаются плоские движения построенной модели одномерного континуума. Уравнения, характеризующие свойства и движения континуума, линеаризуются с помощью ряда предположений о малости кинетических параметров. Решена задача о собственных колебаниях с однородными граничными условиями. Обнаружено, что каждому значению параметра, выделяющего моды собственных колебаний, отвечают ровно две различные формы колебательных движений (в одной моде), каждая со своим значением частоты.

В [26] рассматриваются вопросы разработки дискретных структурных и обобщенных континуальных моделей тел Коссера, для которых важен учет поворотов микрообъемов. Представлены подходы к построению иерархии многополевых моделей материалов с квадратной решеткой на основе введения макроячеек различного типа и, соответственно, большего числа полей для описания деформаций, а также комбинаций подходов микрополярной и многополевой теорий. В качестве примеров рассмотрены простая решетка Коссера, решетки Коссера с акустическими свойствами и с хиральной структурой.

В работе [94] разработан вычислительный алгоритм для решения пространственных динамических задач моментной теории упругости Коссера на многопроцессорных вычислительных системах. Проведены расчеты трехмерной задачи Лемба о действии сосредоточенной нагрузки на поверхности однородного упругого полупространства и задачи о действии сосредоточенной импульсной нагрузки, периодической по времени. Сформулированы условия симметрии, позволяющие многократно уменьшить объем вычислений. Численно обнаружены четыре типа волн (продольные, поперечные, крутильные и вращательные волны) характерных для моментной упругой среды, а также колебания вращательного движения частиц на фронтах волн. Результаты анализа колебательных процессов показали, что моментная среда обладает собственной частотой акустического резонанса, который проявляется при определенных условиях возмущения и

зависит только от инерционных частей микроструктуры и от параметров упругости материала.

Нестационарным задачам для моментной упругой среды посвящено небольшое число публикаций [5, 6, 28, 69 – 71, 98, 100, 103 – 116, 126, 132, 133]. В статье [5] в трехмерной области тонкой пластинки рассматривается начально-краевая задача общей трехмерной несимметричной теории упругости. Для изучения задачи как основу принимая асимптотический метод, построена определяющая система дифференциальных уравнений, а также граничные и начальные условия для внутренней задачи (для прикладной двумерной теории). Асимптотический метод, излагаемый в данной работе, относится к категории методов сингулярных возмущений.

В работах [6, 98] рассматривается система динамических уравнений несимметричной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений для тонкой пластины. На основе асимптотического метода интегрирования сингулярно-возмущенных систем дифференциальных уравнений построен внутренний итерационный процесс и погранслои пластины по несимметричной теории упругости. Для первых трех асимптотических приближений приведены определяющие уравнения и соответствующие граничные и начальные условия прикладной двумерной теории изгиба и обобщенного плоского напряженного состояния микрополярных упругих тонких пластин.

В [69 – 71] рассматривается нестационарная осесимметричная задача о распространении кинематических возмущений от сферической полости в пространстве, заполненном однородной изотропной средой псевдокоссера. Для решения используются разложения в ряды по полиномам Лежандра, преобразование Лапласа по времени и его обращение с помощью степенных рядов в окрестности начального момента времени.

В статьях [100, 105] дана постановка и проведены аналитические исследования задач о действии нестационарной поверхностной нагрузки на

моментную упругую полуплоскость и построены соответствующие нестационарные поверхностные функций влияния для плоской задачи.

В работе [103] исследовано нестационарное осесимметричное движение упругого моментного полупространства под действием нестационарных нормальных поверхностных перемещений. В силу осесимметричного характера задачи наряду с преобразованием Лапласа по времени применяется двойное преобразование Фурье (или преобразование Ханкеля) по пространственным переменным.

В статье [126] на основе одномерных динамических уравнений микрополярных упругих тонких балок со свободным вращением, со стесненным вращением и с «малой сдвиговой жесткостью», при которых учтены все вращательно-сдвиговые деформации, изучены свободные колебания балок при шарнирном опирании на концах. На основе численного анализа выявляются специфические особенности динамических характеристик упругих микрополярных балок.

В работе [132] исследуется динамическая задача для микрополярных упругих тел при помощи использования метода собственных значений и применения интегральных преобразований Лапласа и Фурье. Для иллюстрации метода рассматривается бесконечное пространство с концентрированной силой в начале координат. Встречающиеся интегральные преобразования численно обращаются для получения компонент микровращений, смещений, напряжения силы и спаренных напряжений в физической области. Вычисляются также некоторые интегралы по квадратурной формуле Ромберга. Обращение преобразования Лапласа проводится по известной схеме.

В работе [133] рассмотрена динамическая связанная осесимметричная задача микрополярной теории упругости для изотропной среды, бесконечной в радиальном направлении (т. е. для слоя, полупространства или пространства). Применяя преобразование Лапласа по времени и преобразование Ханкеля по радиусу к уравнениям типа Ламе относительно перемещений и вращений, авторы

приходят к системе линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами для трансформант. Решение этой системы для трансформант обычным образом выписывается через характеристические числа, то есть через собственные числа и собственные функции соответствующей характеристической системы линейных алгебраических уравнений. Обратные интегральные преобразования Лапласа и Ханкеля для полученных представлений трансформант не описываются. В качестве примера выписано решение в трансформантах для сосредоточенной силы в микрополярной среде.

В данной диссертационной работе аналогично работам [132, 133] исследуются нестационарные процессы в моментно упругом полупространстве под действием осесимметричной поверхностной нагрузки. Однако в отличие от этих работ рассматриваются все возможные варианты граничных условий и решения представлены в аналитическом виде.

## 1.2. Пространственные уравнения движения и граничные условия для среды Коссера

Уравнения движения такой среды имеют вид [83]:

$$\rho \frac{\partial^2 u^i}{\partial t^2} = \nabla_j \sigma^{ji} + F^i, \quad J \frac{\partial^2 \omega^i}{\partial t^2} = \nabla_j \mu^{ji} + \varepsilon^{ijk} \sigma_{jk} + M^i. \quad (1.2.1)$$

Здесь  $u^i$ ,  $\omega^i$ ,  $F^i$  и  $M^i$  - координаты векторов перемещения  $\mathbf{u} = u^i \mathbf{e}_i$ , угла поворота  $\boldsymbol{\omega} = \omega^i \mathbf{e}_i$ , массовых сил  $\mathbf{F} = F^i \mathbf{e}_i$  и массовых моментов  $\mathbf{M} = M^i \mathbf{e}_i$  соответственно;  $\sigma^{ij}$  и  $\mu^{ij}$  - компоненты тензоров напряжений  $\boldsymbol{\sigma} = \sigma^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$  и моментов напряжений  $\boldsymbol{\mu} = \mu^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$ ;  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  - ковариантный базис криволинейной системы координат  $\xi^1, \xi^2, \xi^3$ ;  $\varepsilon^{ijk}$  - компоненты дискриминантного тензора Леви-Чивиты;  $\nabla_j$  - ковариантная производная;  $\rho$  - плотность среды;  $J$  - мера инерции среды при вращении (плотность момента инерции);  $t$  - время.

Соответствующие геометрические и физические соотношения записываются так [83]:

$$\gamma_{ij} = \nabla_i u_j - \varepsilon_{kij} \omega^k, \quad \chi_{ij} = \nabla_i \omega_j; \quad (1.2.2)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= (\mu + \alpha) \gamma_{ij} + (\mu - \alpha) \gamma_{ji} + \lambda \gamma_{kk} \delta_{ij}, \\ \mu_{ij} &= (\gamma + \varepsilon) \chi_{ij} + (\gamma - \varepsilon) \chi_{ji} + \beta \chi_{kk} \delta_{ij}. \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

Здесь  $\gamma_{ij}$  и  $\chi_{ij}$  – компоненты тензоров деформаций  $\gamma$  и изгиба-кручения  $\chi$  соответственно;  $\lambda, \mu$  – упругие постоянные Ламе;  $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$  – физические параметры моментной среды;  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера.

Замкнутая система уравнений (1.2.1) – (1.2.3) сводится к уравнениям движения в перемещениях:

$$(\lambda + 2\mu) \text{grad div } \mathbf{u} - (\mu + \alpha) \text{rot rot } \mathbf{u} + 2\alpha \text{rot } \boldsymbol{\omega} + \mathbf{F} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad (1.2.4)$$

$$(\beta + 2\gamma) \text{grad div } \boldsymbol{\omega} - (\gamma + \varepsilon) \text{rot rot } \boldsymbol{\omega} + 2\alpha \text{rot } \mathbf{u} - 4\alpha \boldsymbol{\omega} + \mathbf{M} = J \frac{\partial^2 \boldsymbol{\omega}}{\partial t^2}.$$

К уравнениям (1.2.1) – (1.2.3) или (1.2.4) – (1.2.3) необходимо добавить граничные и начальные условия.

Основные типы первых из них поверхности  $\partial G$  тела  $G$  следующие [83].

1. Заданы перемещения  $\mathbf{u}_0$  и повороты  $\boldsymbol{\omega}_0$ :

$$\mathbf{u}|_{\partial G} = \mathbf{u}_0, \quad \boldsymbol{\omega}|_{\partial G} = \boldsymbol{\omega}_0. \quad (1.2.5)$$

2. Заданы нагрузки  $\mathbf{P}_0 = P_0^i \mathbf{e}_i$  и моменты  $\mathbf{M}_0 = M_0^i \mathbf{e}_i$ :

$$\sigma^{ji} \nu_j |_{\partial G} = P_0^i, \quad \mu^{ji} \nu_j |_{\partial G} = M_0^i. \quad (1.2.6)$$

Далее будут также рассмотрены «смешанные» граничные условия (включающие как кинематические, так силовые характеристики напряженно-деформированного состояния).

Если область  $G$  содержит бесконечно удаленные точки, то добавляется условие ограниченности решения.

Начальные условия записываются так:

$$\begin{aligned} u_i(\mathbf{x}, 0) &= l_i(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial u_i}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = k_i(\mathbf{x}), \\ \omega_i(\mathbf{x}, 0) &= q_i(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial \omega_i}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = t_i(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in G, \end{aligned} \quad (1.2.7)$$



где функции  $l_i, k_i, q_i, t_i$  являются заданными.

Таким образом, уравнения (1.2.4), граничные условия (1.2.5) или (1.2.6) и начальные условия (1.2.7) замыкают постановку нестационарных задач в перемещениях и микроповоротах для среды Коссера без учета температуры.

Далее везде полагаем, что массовые сил и моменты отсутствуют:

$$\mathbf{F} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{0}.$$

С помощью разложения поле перемещения на потенциальную и соленоидальную части ( $\varphi$  и  $\boldsymbol{\psi}$  – скалярный и векторный потенциалы)

$$\mathbf{u} = \text{grad } \varphi + \text{rot } \boldsymbol{\psi}, \quad \text{div } \boldsymbol{\psi} = 0, \quad (1.2.8)$$

уравнения (1.2.4) сводятся к следующей системе:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= c_1^2 \Delta \varphi, & \frac{\partial^2 \boldsymbol{\psi}}{\partial t^2} &= \left( c_2^2 + \frac{\alpha}{\rho} \right) \Delta \boldsymbol{\psi} + 2 \frac{\alpha}{\rho} \boldsymbol{\omega}, \\ \frac{\partial^2 \boldsymbol{\omega}}{\partial t^2} &= c_3^2 \Delta \boldsymbol{\omega} + \frac{\beta + \gamma - \varepsilon}{J} \text{grad div } \boldsymbol{\omega} - 2 \frac{\alpha}{J} (\Delta \boldsymbol{\psi} + 2 \boldsymbol{\omega}), \end{aligned} \quad (1.2.9)$$

где

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad c_3 = \sqrt{\frac{\gamma + \varepsilon}{J}},$$

– скорости волн растяжения-сжатия, сдвига и кручения соответственно.

### 1.3. Уравнения осесимметричного движения среды Коссера

Далее везде в качестве основной системы координат будем использовать цилиндрическую систему координат:

$$\xi^1 = r, \quad \xi^2 = \vartheta, \quad \xi^3 = z \quad (r \geq 0, \quad -\pi < \vartheta \leq \pi, \quad z \in \mathbb{R})$$

с базисом  $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\vartheta, \mathbf{e}_z$ .

Полагаем, что движение является симметричным относительно оси  $Oz$ , что соответствует следующим потенциалам и векторам перемещения и угла поворота:

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi(r, z, t), \quad \boldsymbol{\psi} = \psi(r, z, t) \mathbf{e}_\vartheta, \\ \mathbf{u} &= u(r, z, t) \mathbf{e}_r + w(r, z, t) \mathbf{e}_z, \quad \boldsymbol{\omega} = \omega(r, z, t) \mathbf{e}_\vartheta. \end{aligned}$$

При этом входящие в систему уравнений (1.2.9) операторы имеют следующий вид [36, 83]:

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial\varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}, \quad \Delta\psi = \left( \Delta\psi - \frac{\psi}{r^2} \right) \mathbf{e}_\vartheta, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{\omega} = 0.$$

Тогда уравнения (1.2.9) приобретают следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} &= c_1^2 \Delta\varphi, \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \left( c_2^2 + \frac{\alpha}{\rho} \right) \left( \Delta\psi - \frac{\psi}{r^2} \right) + 2 \frac{\alpha}{\rho} \boldsymbol{\omega}, \\ \frac{\partial^2\boldsymbol{\omega}}{\partial t^2} &= c_3^2 \left( \Delta\boldsymbol{\omega} - \frac{\boldsymbol{\omega}}{r^2} \right) - 2 \frac{\alpha}{J} \left( \Delta\psi - \frac{\psi}{r^2} + 2\boldsymbol{\omega} \right), \end{aligned} \quad (1.3.1)$$

а связь перемещений с потенциалами и выражения деформаций  $\gamma_{\xi\zeta}$ ,  $\chi_{\xi\zeta}$  через перемещения, а также связь напряжений  $\sigma_{\xi\zeta}$ ,  $\mu_{\xi\zeta}$  где  $\{\xi, \zeta\} = \{r, \vartheta, z\}$  с кинематическими параметрами, как следует из (1.2.8), (1.2.2) и (1.2.3) записываются так [36]:

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial r} - \frac{\partial\psi}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\psi)}{\partial r}; \quad (1.3.2)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{rr} &= \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \gamma_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{rz} = \frac{\partial w}{\partial r} + \boldsymbol{\omega}, \quad \gamma_{zr} = \frac{\partial u}{\partial z} - \boldsymbol{\omega}, \quad \gamma_{\vartheta\vartheta} = \frac{u}{r}, \\ \chi_{r\vartheta} &= \frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial r}, \quad \chi_{z\vartheta} = \frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial z}, \quad \chi_{\vartheta r} = -\frac{\boldsymbol{\omega}}{r}, \quad \gamma_{\vartheta r} = \gamma_{r\vartheta} = \gamma_{\vartheta z} = \gamma_{z\vartheta} \equiv 0, \\ \chi_{rr} &= \chi_{\vartheta\vartheta} = \chi_{zz} = \chi_{\vartheta z} = \chi_{rz} = \chi_{zr} \equiv 0; \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= (\lambda + 2\mu)\gamma_{rr} + \lambda(\gamma_{zz} + \gamma_{\vartheta\vartheta}), \quad \sigma_{\vartheta\vartheta} = (\lambda + 2\mu)\gamma_{\vartheta\vartheta} + \lambda(\gamma_{rr} + \gamma_{zz}), \\ \sigma_{zz} &= (\lambda + 2\mu)\gamma_{zz} + \lambda(\gamma_{rr} + \gamma_{\vartheta\vartheta}), \quad \sigma_{rz} = \mu(\gamma_{rz} + \gamma_{zr}) + \alpha(\gamma_{rz} - \gamma_{zr}), \\ \sigma_{zr} &= \mu(\gamma_{zr} + \gamma_{rz}) + \alpha(\gamma_{zr} - \gamma_{rz}), \quad \sigma_{r\vartheta} = \sigma_{\vartheta r} = \sigma_{\vartheta z} = \sigma_{z\vartheta} \equiv 0, \\ \mu_{r\vartheta} &= (\gamma + \varepsilon)\chi_{r\vartheta} + (\gamma - \varepsilon)\chi_{\vartheta r}, \quad \mu_{\vartheta r} = (\gamma + \varepsilon)\chi_{\vartheta r} + (\gamma - \varepsilon)\chi_{r\vartheta}, \\ \mu_{z\vartheta} &= (\gamma + \varepsilon)\chi_{z\vartheta}, \quad \mu_{\vartheta z} = (\gamma - \varepsilon)\chi_{z\vartheta}, \quad \mu_{rz} = \mu_{zr} \equiv 0. \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

Далее будем использовать безразмерные величины (штрихи соответствуют размерным величинам; в последующем изложении они опущены):

$$\begin{aligned}
u' &= \frac{u}{L}, \quad w' = \frac{w}{L}, \quad r' = \frac{r}{L}, \quad z' = \frac{z}{L}, \quad \tau = \frac{c_1 t}{L}, \quad \varphi' = \frac{\Phi}{L^2}, \quad \psi' = \frac{\Psi}{L^2}, \\
\sigma'_{\xi\xi} &= \frac{\sigma_{\xi\xi}}{\lambda + 2\mu}, \quad \mu'_{\xi\xi} = \frac{L\mu_{\xi\xi}}{\gamma + \varepsilon}, \quad \gamma_1^2 = \frac{c_1^2}{c_2^2}, \quad \gamma_2^2 = \frac{c_1^2}{c_3^2}, \quad \eta = \frac{\gamma - \varepsilon}{\gamma + \varepsilon}, \quad \chi'_{\xi\xi} = L\chi_{\xi\xi}, \\
\delta &= \frac{\rho L^2}{J}, \quad \alpha' = \frac{\alpha}{\lambda + 2\mu}, \quad \kappa = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} = 1 - 2\gamma_1^{-2},
\end{aligned} \tag{1.3.5}$$

где  $L$  – некоторый характерный линейный размер.

В безразмерном виде уравнения (1.3.1) принимают следующий вид (точками обозначено дифференцирование по  $\tau$ ):

$$\begin{aligned}
\ddot{\phi} &= \Delta\phi, \quad \ddot{\psi} = (\gamma_1^{-2} + \alpha)\Delta\psi + 2\alpha\omega - (\gamma_1^{-2} + \alpha)\frac{\Psi}{r^2}, \\
\ddot{\omega} &= \gamma_2^{-2}\Delta\omega - 2\alpha\delta\Delta\psi - 4\alpha\delta\omega - \frac{1}{r^2}(\gamma_2^{-2}\omega - 2\alpha\delta\psi).
\end{aligned} \tag{1.3.6}$$

Соотношения (1.3.2) и (1.3.3) сохраняют свой вид, а физический закон (1.3.4) преобразовывается так:

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= \frac{\partial u}{\partial r} + \kappa \left( \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{u}{r} \right), \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{u}{r} + \kappa \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} \right), \\
\sigma_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} + \kappa \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right), \quad \sigma_{rz} = (\gamma_1^{-2} + \alpha)\frac{\partial w}{\partial r} + (\gamma_1^{-2} - \alpha)\frac{\partial u}{\partial z} + 2\alpha\omega, \\
\sigma_{zr} &= (\gamma_1^{-2} + \alpha)\frac{\partial u}{\partial z} + (\gamma_1^{-2} - \alpha)\frac{\partial w}{\partial r} - 2\alpha\omega, \\
\mu_{r\theta} &= \frac{\partial \omega}{\partial r} - \eta\frac{\omega}{r}, \quad \mu_{\theta r} = -\frac{\omega}{r} + \eta\frac{\partial \omega}{\partial r}, \quad \mu_{z\theta} = \frac{\partial \omega}{\partial z}, \quad \mu_{\theta z} = \eta\frac{\partial \omega}{\partial z}.
\end{aligned} \tag{1.3.7}$$

Отметим, что при  $\alpha = 0$  второе и третье уравнения в (1.3.6) становятся независимыми.

Соотношения между характерными скоростями волн в моментно упругой среде могут быть различными. Далее будем считать, что имеют место справедливые для композита в виде алюминиевой дроби в эпоксидной матрице [45] неравенства  $c_2 < c_1 < c_3$ , из которых вытекает следующее соотношение:  $\gamma_2 < 1 < \gamma_1$ .

### 1.4. Постановка осесимметричных задач для полупространства

Пусть упругая однородная изотропная среда Коссера занимает полупространство  $G: z \geq 0$ , где  $Oxyz$  – прямоугольная декартова система координат (рис. 1.4.1). Граничная поверхность области  $G$  – плоскость  $\partial G: z = 0$ .

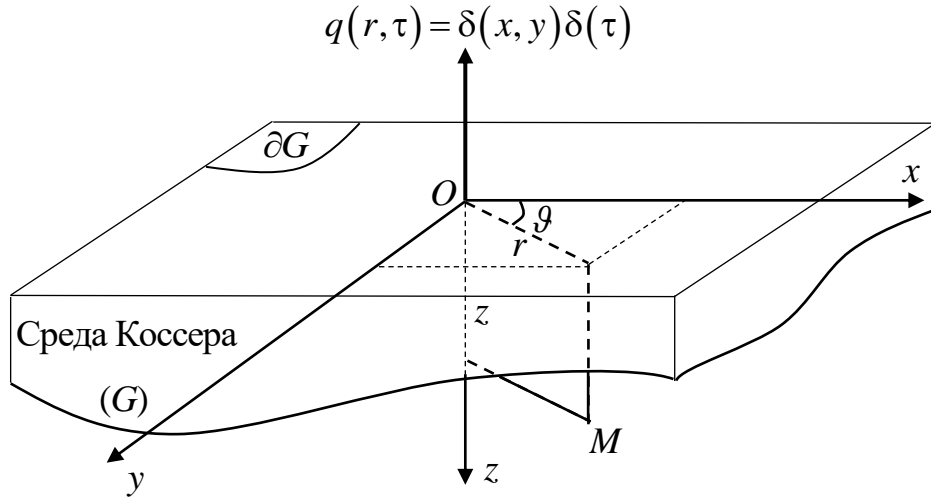


Рис. 1.4.1

В цилиндрической системе координат  $Or\vartheta z$  в качестве замкнутой системы уравнений ее движения принимаем соотношения (1.3.2), (1.3.3), (1.3.6) и (1.3.7).

Считаем, что в начальный момент времени возмущения отсутствуют:

$$\varphi|_{\tau=0} = \dot{\varphi}|_{\tau=0} = \psi|_{\tau=0} = \dot{\psi}|_{\tau=0} = \omega|_{\tau=0} = \dot{\omega}|_{\tau=0} = 0, \quad (1.4.1)$$

Применительно к полупространству на его границе  $z=0$  в случае осевой симметрии основные из указанных в параграфе 1.2 граничные условия имеют вид:

– *кинематические условия* (первая группа – на  $\partial G$  заданы перемещение  $\mathbf{u}_0 = u_0 \mathbf{e}_r + w_0 \mathbf{e}_z$  и угол поворота  $\boldsymbol{\omega}_0 = \omega_0 \mathbf{e}_\vartheta$ )

$$u|_{z=0} = u_0(r, \tau), \quad w|_{z=0} = w_0(r, \tau), \quad \omega|_{z=0} = \omega_0(r, \tau); \quad (1.4.2)$$

– *динамические условия* (вторая группа – на  $\partial G$  заданы векторы напряжений  $\mathbf{P} = Q\mathbf{e}_r + P\mathbf{e}_z$  и моментов  $\mathbf{M} = M\mathbf{e}_\vartheta$ )

$$\sigma_{zr}|_{z=0} = Q(r, \tau), \quad \sigma_{zz}|_{z=0} = P(r, \tau), \quad \mu_{z\vartheta}|_{z=0} = M(r, \tau). \quad (1.4.3)$$

Возможны также *смешанные граничные условия*. Возможно шесть вариантов таких условий:

– *смешанные условия первого типа* (третья группа – заданы нормальное перемещение  $w_0 \mathbf{e}_z$ , вектор касательных напряжений  $Q\mathbf{e}_r$  и угол поворота  $\omega_0 \mathbf{e}_\vartheta$ )

$$w|_{z=0} = w_0(r, \tau), \quad \sigma_{zr}|_{z=0} = Q(r, \tau), \quad \omega|_{z=0} = \omega_0(r, \tau); \quad (1.4.4)$$

– смешанные условия второго типа (четвертая группа – заданы касательное перемещение  $u_0 \mathbf{e}_r$ , векторы нормальных напряжений  $P \mathbf{e}_z$  и моментов  $M \mathbf{e}_\vartheta$ )

$$u|_{z=0} = u_0(r, \tau), \quad \sigma_{zz}|_{z=0} = P(r, \tau), \quad \mu_{z\vartheta}|_{z=0} = M(r, \tau); \quad (1.4.5)$$

– смешанные условия третьего типа (пятая группа – заданы нормальное перемещение  $w_0 \mathbf{e}_z$ , векторы касательных напряжений  $Q \mathbf{e}_r$  и моментов  $M \mathbf{e}_\vartheta$ )

$$w|_{z=0} = w_0(r, \tau), \quad \sigma_{zr}|_{z=0} = Q(r, \tau), \quad \mu_{z\vartheta}|_{z=0} = M(r, \tau); \quad (1.4.6)$$

– смешанные условия четвертого типа (шестая группа – заданы касательное перемещение  $u_0 \mathbf{e}_r$ , вектор нормальных напряжений  $P \mathbf{e}_z$  и угол поворота  $\omega_0 \mathbf{e}_\vartheta$ )

$$u|_{z=0} = u_0(r, \tau), \quad \sigma_{zz}|_{z=0} = P(r, \tau), \quad \omega|_{z=0} = \omega_0(r, \tau); \quad (1.4.7)$$

– смешанные условия пятого типа (седьмая группа – заданы перемещение  $\mathbf{u}_0 = u_0 \mathbf{e}_r + w_0 \mathbf{e}_z$  и вектор момента  $M \mathbf{e}_\vartheta$ )

$$u|_{z=0} = u_0(r, \tau), \quad w|_{z=0} = w_0(r, \tau), \quad \mu_{z\vartheta}|_{z=0} = M(r, \tau); \quad (1.4.8)$$

– смешанные условия шестого типа (восьмая группа – заданы вектор напряжения  $\mathbf{P} = Q \mathbf{e}_r + P \mathbf{e}_z$  и угол поворота  $\omega_0 \mathbf{e}_\vartheta$ )

$$\sigma_{zr}|_{z=0} = Q(r, \tau), \quad \sigma_{zz}|_{z=0} = P(r, \tau), \quad \omega|_{z=0} = \omega_0(r, \tau). \quad (1.4.9)$$

Дополнительным условием является требование ограниченности компонентов напряженно-деформированного состояния.

## 1.5. Интегральные представления решений осесимметричных задачи для полупространства

Искомые компоненты напряженно-деформированного состояния как решения сформулированных выше начально-краевых задач представляем в виде линейной комбинации свертки по времени  $\tau$  и обобщенной свертки по радиусу  $r$  (они обозначаются звездочками) правых частей граничных условий  $f_0(r)$  с поверхностными функциями влияния  $G_{v,\theta}^{(k)}(r, \xi, z, \tau)$ :

$$f_0(r) * G_{v,\theta}^{(k)} = \int_0^{\infty} f_0(\xi) G_{v,\theta}^{(k)}(r, \xi, z, \tau) d\xi.$$

В обозначениях функций влияния индекс  $k$  указывает на номер группы граничных условий (1.4.2) – (1.4.9), а индексы  $v$  и  $\theta$  принимают одно из следующих значений:  $u, w, \omega, zz, rz, zr, r\vartheta, \vartheta r, z\vartheta$  или  $\vartheta z$ .

В приводимых ниже равенствах, кроме подразделения по группам, в соответствии с принципом суперпозиции для линейных задач проведено разделение на подгруппы по каждому из граничных возмущений. Под левыми частями  $U_v(r, z, \tau)$  этих равенств понимаются компоненты напряженно-деформированного состояния  $u, w, \omega, \sigma_{zz}, \sigma_{rz}, \sigma_{zr}, \mu_{r\vartheta}, \mu_{\vartheta r}, \mu_{z\vartheta}$  или  $\mu_{\vartheta z}$ .

Полагается, что функции влияния являются ограниченными решениями начально-краевых задач, включающих в себя уравнения (1.3.6) с начальными условиями (1.4.1), соотношения (1.3.2), (1.3.3) и (1.3.7) и указанные ниже граничные условия, в которых  $\delta(\xi)$  – дельта-функция Дирака [36, 37].

#### 1. Первая группа (1.4.2):

$$U_v(r, z, \tau) = u_0(r, \tau) * G_{v,u}^{(1)} + w_0(r, \tau) * G_{v,w}^{(1)} + \omega_0(r, \tau) * G_{v,\omega}^{(1)}.$$

##### 1а. Первая подгруппа, функции

$$\begin{aligned} G_{u,u}^{(1)} = u, \quad G_{w,u}^{(1)} = w, \quad G_{\omega,u}^{(1)} = \omega, \quad G_{zz,u}^{(1)} = \sigma_{zz}, \quad G_{rz,u}^{(1)} = \sigma_{rz}, \quad G_{zr,u}^{(1)} = \sigma_{zr}, \\ G_{r\vartheta,u}^{(1)} = \mu_{r\vartheta}, \quad G_{\vartheta r,u}^{(1)} = \mu_{\vartheta r}, \quad G_{z\vartheta,u}^{(1)} = \mu_{z\vartheta}, \quad G_{\vartheta z,u}^{(1)} = \mu_{\vartheta z} \end{aligned} \quad (1.5.1)$$

соответствуют граничным условиям

$$u|_{z=0} = \delta(r - \xi)\delta(\tau), \quad w|_{z=0} = 0, \quad \omega|_{z=0} = 0. \quad (1.5.2)$$

##### 1б. Вторая подгруппа, функции

$$\begin{aligned} G_{u,w}^{(1)} = u, \quad G_{w,w}^{(1)} = w, \quad G_{\omega,w}^{(1)} = \omega, \quad G_{zz,w}^{(1)} = \sigma_{zz}, \quad G_{rz,w}^{(1)} = \sigma_{rz}, \quad G_{zr,w}^{(1)} = \sigma_{zr}, \\ G_{r\vartheta,w}^{(1)} = \mu_{r\vartheta}, \quad G_{\vartheta r,w}^{(1)} = \mu_{\vartheta r}, \quad G_{z\vartheta,w}^{(1)} = \mu_{z\vartheta}, \quad G_{\vartheta z,w}^{(1)} = \mu_{\vartheta z} \end{aligned} \quad (1.5.3)$$

соответствуют граничным условиям

$$u|_{z=0} = 0, \quad w|_{z=0} = \delta(r - \xi)\delta(\tau), \quad \omega|_{z=0} = 0. \quad (1.5.4)$$

##### 1в. Третья подгруппа, функции

$$\begin{aligned} G_{u,\omega}^{(1)} = u, \quad G_{w,\omega}^{(1)} = w, \quad G_{\omega,\omega}^{(1)} = \omega, \quad G_{zz,\omega}^{(1)} = \sigma_{zz}, \quad G_{rz,\omega}^{(1)} = \sigma_{rz}, \quad G_{zr,\omega}^{(1)} = \sigma_{zr}, \\ G_{r\vartheta,\omega}^{(1)} = \mu_{r\vartheta}, \quad G_{\vartheta r,\omega}^{(1)} = \mu_{\vartheta r}, \quad G_{z\vartheta,\omega}^{(1)} = \mu_{z\vartheta}, \quad G_{\vartheta z,\omega}^{(1)} = \mu_{\vartheta z} \end{aligned} \quad (1.5.5)$$

соответствуют граничным условиям

$$u|_{z=0} = 0, \quad w|_{z=0} = 0, \quad \omega|_{z=0} = \delta(r - \xi)\delta(\tau). \quad (1.5.6)$$

## 2. Вторая группа (1.4.3):

$$U_v(r, z, \tau) = Q(r, \tau) ** G_{v,zr}^{(2)} + P(r, \tau) ** G_{v,zz}^{(2)} + M(r, \tau) ** G_{v,z\vartheta}^{(2)}.$$

### 2а. Первая подгруппа, функции

$$\begin{aligned} G_{u,zr}^{(2)} = u, \quad G_{w,zr}^{(2)} = w, \quad G_{\omega,zr}^{(2)} = \omega, \quad G_{zz,zr}^{(2)} = \sigma_{zz}, \quad G_{rz,zr}^{(2)} = \sigma_{rz}, \quad G_{zr,zr}^{(2)} = \sigma_{zr}, \\ G_{r\vartheta,zr}^{(2)} = \mu_{r\vartheta}, \quad G_{\vartheta r,zr}^{(2)} = \mu_{\vartheta r}, \quad G_{z\vartheta,zr}^{(2)} = \mu_{z\vartheta}, \quad G_{\vartheta z,zr}^{(2)} = \mu_{\vartheta z} \end{aligned} \quad (1.5.7)$$

соответствуют граничным условиям

$$\sigma_{zr}|_{z=0} = \delta(r - \xi)\delta(\tau), \quad \sigma_{zz}|_{z=0} = 0, \quad \mu_{z\vartheta}|_{z=0} = 0. \quad (1.5.8)$$

### 2б. Вторая подгруппа, функции

$$\begin{aligned} G_{u,zz}^{(2)} = u, \quad G_{w,zz}^{(2)} = w, \quad G_{\omega,zz}^{(2)} = \omega, \quad G_{zz,zz}^{(2)} = \sigma_{zz}, \quad G_{rz,zz}^{(2)} = \sigma_{rz}, \quad G_{zr,zz}^{(2)} = \sigma_{zr}, \\ G_{r\vartheta,zz}^{(2)} = \mu_{r\vartheta}, \quad G_{\vartheta r,zz}^{(2)} = \mu_{\vartheta r}, \quad G_{z\vartheta,zz}^{(2)} = \mu_{z\vartheta}, \quad G_{\vartheta z,zz}^{(2)} = \mu_{\vartheta z} \end{aligned} \quad (1.5.9)$$

соответствуют граничным условиям

$$\sigma_{zr}|_{z=0} = 0, \quad \sigma_{zz}|_{z=0} = \delta(r - \xi)\delta(\tau), \quad \mu_{z\vartheta}|_{z=0} = 0. \quad (1.5.10)$$

### 2в. Третья подгруппа, функции

$$\begin{aligned} G_{u,z\vartheta}^{(2)} = u, \quad G_{w,z\vartheta}^{(2)} = w, \quad G_{\omega,z\vartheta}^{(2)} = \omega, \quad G_{zz,z\vartheta}^{(2)} = \sigma_{zz}, \quad G_{rz,z\vartheta}^{(2)} = \sigma_{rz}, \quad G_{zr,z\vartheta}^{(2)} = \sigma_{zr}, \\ G_{r\vartheta,z\vartheta}^{(2)} = \mu_{r\vartheta}, \quad G_{\vartheta r,z\vartheta}^{(2)} = \mu_{\vartheta r}, \quad G_{z\vartheta,z\vartheta}^{(2)} = \mu_{z\vartheta}, \quad G_{\vartheta z,z\vartheta}^{(2)} = \mu_{\vartheta z} \end{aligned} \quad (1.5.11)$$

соответствуют граничным условиям

$$\sigma_{zr}|_{z=0} = 0, \quad \sigma_{zz}|_{z=0} = 0, \quad \mu_{z\vartheta}|_{z=0} = \delta(r - \xi)\delta(\tau). \quad (1.5.12)$$

## 3. Третья группа (1.4.4):

$$U_v(r, z, \tau) = Q(r, \tau) ** G_{v,zr}^{(3)} + w_0(r, \tau) ** G_{v,w}^{(3)} + \omega_0(r, \tau) ** G_{v,\omega}^{(3)}.$$

### 3а. Первая подгруппа, функции

$$\begin{aligned} G_{u,zr}^{(3)} = u, \quad G_{w,zr}^{(3)} = w, \quad G_{\omega,zr}^{(3)} = \omega, \quad G_{zz,zr}^{(3)} = \sigma_{zz}, \quad G_{rz,zr}^{(3)} = \sigma_{rz}, \quad G_{zr,zr}^{(3)} = \sigma_{zr}, \\ G_{r\vartheta,zr}^{(3)} = \mu_{r\vartheta}, \quad G_{\vartheta r,zr}^{(3)} = \mu_{\vartheta r}, \quad G_{z\vartheta,zr}^{(3)} = \mu_{z\vartheta}, \quad G_{\vartheta z,zr}^{(3)} = \mu_{\vartheta z} \end{aligned} \quad (1.5.13)$$

соответствуют граничным условиям

$$\sigma_{zr} \Big|_{z=0} = \delta(r - \xi) \delta(\tau), \quad w \Big|_{z=0} = 0, \quad \omega \Big|_{z=0} = 0. \quad (1.5.14)$$

3б. Вторая подгруппа, функции

$$\begin{aligned} G_{u,w}^{(3)} = u, \quad G_{w,w}^{(3)} = w, \quad G_{\omega,w}^{(3)} = \omega, \quad G_{zz,w}^{(3)} = \sigma_{zz}, \quad G_{rz,w}^{(3)} = \sigma_{rz}, \quad G_{zr,w}^{(3)} = \sigma_{zr}, \\ G_{r\vartheta,w}^{(3)} = \mu_{r\vartheta}, \quad G_{\vartheta r,w}^{(3)} = \mu_{\vartheta r}, \quad G_{z\vartheta,w}^{(3)} = \mu_{z\vartheta}, \quad G_{\vartheta z,w}^{(3)} = \mu_{\vartheta z} \end{aligned} \quad (1.5.15)$$

соответствуют граничным условиям

$$\sigma_{zr} \Big|_{z=0} = 0, \quad w \Big|_{z=0} = \delta(r - \xi) \delta(\tau), \quad \omega \Big|_{z=0} = 0. \quad (1.5.16)$$

3в. Третья подгруппа, функции

$$\begin{aligned} G_{u,\omega}^{(3)} = u, \quad G_{w,\omega}^{(3)} = w, \quad G_{\omega,\omega}^{(3)} = \omega, \quad G_{zz,\omega}^{(3)} = \sigma_{zz}, \quad G_{rz,\omega}^{(3)} = \sigma_{rz}, \quad G_{zr,\omega}^{(3)} = \sigma_{zr}, \\ G_{r\vartheta,\omega}^{(3)} = \mu_{r\vartheta}, \quad G_{\vartheta r,\omega}^{(3)} = \mu_{\vartheta r}, \quad G_{z\vartheta,\omega}^{(3)} = \mu_{z\vartheta}, \quad G_{\vartheta z,\omega}^{(3)} = \mu_{\vartheta z} \end{aligned} \quad (1.5.17)$$

соответствуют граничным условиям

$$\sigma_{zr} \Big|_{z=0} = 0, \quad w \Big|_{z=0} = 0, \quad \omega \Big|_{z=0} = \delta(r - \xi) \delta(\tau). \quad (1.5.18)$$

4. Четвертая группа (1.4.5):

$$U_v(r, z, \tau) = u_0(r, \tau) ** G_{v,u}^{(4)} + P(r, \tau) ** G_{v,zz}^{(4)} + M(r, \tau) ** G_{v,z\vartheta}^{(4)}.$$

4а. Первая подгруппа, функции

$$\begin{aligned} G_{u,u}^{(4)} = u, \quad G_{w,u}^{(4)} = w, \quad G_{\omega,u}^{(4)} = \omega, \quad G_{zz,u}^{(4)} = \sigma_{zz}, \quad G_{rz,u}^{(4)} = \sigma_{rz}, \quad G_{zr,u}^{(4)} = \sigma_{zr}, \\ G_{r\vartheta,u}^{(4)} = \mu_{r\vartheta}, \quad G_{\vartheta r,u}^{(4)} = \mu_{\vartheta r}, \quad G_{z\vartheta,u}^{(4)} = \mu_{z\vartheta}, \quad G_{\vartheta z,u}^{(4)} = \mu_{\vartheta z} \end{aligned} \quad (1.5.19)$$

соответствуют граничным условиям

$$u \Big|_{z=0} = \delta(r - \xi) \delta(\tau), \quad \sigma_{zz} \Big|_{z=0} = 0, \quad \mu_{z\vartheta} \Big|_{z=0} = 0. \quad (1.5.20)$$

4б. Вторая подгруппа, функции

$$\begin{aligned} G_{u,zz}^{(4)} = u, \quad G_{w,zz}^{(4)} = w, \quad G_{\omega,zz}^{(4)} = \omega, \quad G_{zz,zz}^{(4)} = \sigma_{zz}, \quad G_{rz,zz}^{(4)} = \sigma_{rz}, \quad G_{zr,zz}^{(4)} = \sigma_{zr}, \\ G_{r\vartheta,zz}^{(4)} = \mu_{r\vartheta}, \quad G_{\vartheta r,zz}^{(4)} = \mu_{\vartheta r}, \quad G_{z\vartheta,zz}^{(4)} = \mu_{z\vartheta}, \quad G_{\vartheta z,zz}^{(4)} = \mu_{\vartheta z} \end{aligned} \quad (1.5.21)$$

соответствуют граничным условиям

$$u \Big|_{z=0} = 0, \quad \sigma_{zz} \Big|_{z=0} = \delta(r - \xi) \delta(\tau), \quad \mu_{z\vartheta} \Big|_{z=0} = 0. \quad (1.5.22)$$

4в. Третья подгруппа, функции



$$\begin{aligned}
G_{u,z\vartheta}^{(4)} = u, \quad G_{w,z\vartheta}^{(4)} = w, \quad G_{\omega,z\vartheta}^{(4)} = \omega, \quad G_{zz,z\vartheta}^{(4)} = \sigma_{zz}, \quad G_{rz,z\vartheta}^{(4)} = \sigma_{rz}, \quad G_{zr,z\vartheta}^{(4)} = \sigma_{zr}, \\
G_{r\vartheta,z\vartheta}^{(4)} = \mu_{r\vartheta}, \quad G_{\vartheta r,z\vartheta}^{(4)} = \mu_{\vartheta r}, \quad G_{z\vartheta,z\vartheta}^{(4)} = \mu_{z\vartheta}, \quad G_{\vartheta z,z\vartheta}^{(4)} = \mu_{\vartheta z}
\end{aligned} \tag{1.5.23}$$

соответствуют граничным условиям

$$u|_{z=0} = 0, \quad \sigma_{zz}|_{z=0} = 0, \quad \mu_{z\vartheta}|_{z=0} = \delta(r - \xi)\delta(\tau). \tag{1.5.24}$$

### 5. Пятая группа (1.4.6):

$$U_v(r, z, \tau) = Q(r, \tau) ** G_{v,zr}^{(5)} + w_0(r, \tau) ** G_{v,w}^{(5)} + M(r, \tau) ** G_{v,z\vartheta}^{(5)}.$$

#### *5а. Первая подгруппа, функции*

$$\begin{aligned}
G_{u,zr}^{(5)} = u, \quad G_{w,zr}^{(5)} = w, \quad G_{\omega,zr}^{(5)} = \omega, \quad G_{zz,zr}^{(5)} = \sigma_{zz}, \quad G_{rz,zr}^{(5)} = \sigma_{rz}, \quad G_{zr,zr}^{(5)} = \sigma_{zr}, \\
G_{r\vartheta,zr}^{(5)} = \mu_{r\vartheta}, \quad G_{\vartheta r,zr}^{(5)} = \mu_{\vartheta r}, \quad G_{z\vartheta,zr}^{(5)} = \mu_{z\vartheta}, \quad G_{\vartheta z,zr}^{(5)} = \mu_{\vartheta z}
\end{aligned} \tag{1.5.25}$$

соответствуют граничным условиям

$$\sigma_{zr}|_{z=0} = \delta(r - \xi)\delta(\tau), \quad w|_{z=0} = 0, \quad \mu_{z\vartheta}|_{z=0} = 0. \tag{1.5.26}$$

#### *5б. Вторая подгруппа, функции*

$$\begin{aligned}
G_{u,w}^{(5)} = u, \quad G_{w,w}^{(5)} = w, \quad G_{\omega,w}^{(5)} = \omega, \quad G_{zz,w}^{(5)} = \sigma_{zz}, \quad G_{rz,w}^{(5)} = \sigma_{rz}, \quad G_{zr,w}^{(5)} = \sigma_{zr}, \\
G_{r\vartheta,w}^{(5)} = \mu_{r\vartheta}, \quad G_{\vartheta r,w}^{(5)} = \mu_{\vartheta r}, \quad G_{z\vartheta,w}^{(5)} = \mu_{z\vartheta}, \quad G_{\vartheta z,w}^{(5)} = \mu_{\vartheta z}
\end{aligned} \tag{1.5.27}$$

соответствуют граничным условиям

$$\sigma_{zr}|_{z=0} = 0, \quad w|_{z=0} = \delta(r - \xi)\delta(\tau), \quad \mu_{z\vartheta}|_{z=0} = 0. \tag{1.5.28}$$

#### *5в. Третья подгруппа, функции*

$$\begin{aligned}
G_{u,z\vartheta}^{(5)} = u, \quad G_{w,z\vartheta}^{(5)} = w, \quad G_{\omega,z\vartheta}^{(5)} = \omega, \quad G_{zz,z\vartheta}^{(5)} = \sigma_{zz}, \quad G_{rz,z\vartheta}^{(5)} = \sigma_{rz}, \quad G_{zr,z\vartheta}^{(5)} = \sigma_{zr}, \\
G_{r\vartheta,z\vartheta}^{(5)} = \mu_{r\vartheta}, \quad G_{\vartheta r,z\vartheta}^{(5)} = \mu_{\vartheta r}, \quad G_{z\vartheta,z\vartheta}^{(5)} = \mu_{z\vartheta}, \quad G_{\vartheta z,z\vartheta}^{(5)} = \mu_{\vartheta z}
\end{aligned} \tag{1.5.29}$$

соответствуют граничным условиям

$$\sigma_{zr}|_{z=0} = 0, \quad w|_{z=0} = 0, \quad \mu_{z\vartheta}|_{z=0} = \delta(r - \xi)\delta(\tau). \tag{1.5.30}$$

### 6. Шестая группа (1.4.7):

$$U_v(r, z, \tau) = u_0(r, \tau) ** G_{v,u}^{(6)} + P(r, \tau) ** G_{v,zz}^{(6)} + \omega_0(r, \tau) ** G_{v,\omega}^{(6)}.$$

#### *6а. Первая подгруппа, функции*

$$\begin{aligned}
G_{u,u}^{(6)} = u, \quad G_{w,u}^{(6)} = w, \quad G_{\omega,u}^{(6)} = \omega, \quad G_{zz,u}^{(6)} = \sigma_{zz}, \quad G_{rz,u}^{(6)} = \sigma_{rz}, \quad G_{zr,u}^{(6)} = \sigma_{zr}, \\
G_{r\vartheta,u}^{(6)} = \mu_{r\vartheta}, \quad G_{\vartheta r,u}^{(6)} = \mu_{\vartheta r}, \quad G_{z\vartheta,u}^{(6)} = \mu_{z\vartheta}, \quad G_{\vartheta z,u}^{(6)} = \mu_{\vartheta z}
\end{aligned} \tag{1.5.31}$$

соответствуют граничным условиям

$$u|_{z=0} = \delta(r - \xi)\delta(\tau), \quad \sigma_{zz}|_{z=0} = 0, \quad \omega|_{z=0} = 0. \quad (1.5.32)$$

6б. Вторая подгруппа, функции

$$\begin{aligned} G_{u,zz}^{(6)} = u, \quad G_{w,zz}^{(6)} = w, \quad G_{\omega,zz}^{(6)} = \omega, \quad G_{zz,zz}^{(6)} = \sigma_{zz}, \quad G_{rz,zz}^{(6)} = \sigma_{rz}, \quad G_{zr,zz}^{(6)} = \sigma_{zr}, \\ G_{r\vartheta,zz}^{(6)} = \mu_{r\vartheta}, \quad G_{\vartheta r,zz}^{(6)} = \mu_{\vartheta r}, \quad G_{z\vartheta,zz}^{(6)} = \mu_{z\vartheta}, \quad G_{\vartheta z,zz}^{(6)} = \mu_{\vartheta z} \end{aligned} \quad (1.5.33)$$

соответствуют граничным условиям

$$u|_{z=0} = 0, \quad \sigma_{zz}|_{z=0} = \delta(r - \xi)\delta(\tau), \quad \omega|_{z=0} = 0. \quad (1.5.34)$$

6в. Третья подгруппа, функции

$$\begin{aligned} G_{u,\omega}^{(6)} = u, \quad G_{w,\omega}^{(6)} = w, \quad G_{\omega,\omega}^{(6)} = \omega, \quad G_{zz,\omega}^{(6)} = \sigma_{zz}, \quad G_{rz,\omega}^{(6)} = \sigma_{rz}, \quad G_{zr,\omega}^{(6)} = \sigma_{zr}, \\ G_{r\vartheta,\omega}^{(6)} = \mu_{r\vartheta}, \quad G_{\vartheta r,\omega}^{(6)} = \mu_{\vartheta r}, \quad G_{z\vartheta,\omega}^{(6)} = \mu_{z\vartheta}, \quad G_{\vartheta z,\omega}^{(6)} = \mu_{\vartheta z} \end{aligned} \quad (1.5.35)$$

соответствуют граничным условиям

$$u|_{z=0} = 0, \quad \sigma_{zz}|_{z=0} = 0, \quad \omega|_{z=0} = \delta(r - \xi)\delta(\tau). \quad (1.5.36)$$

7. Седьмая группа (1.4.8):

$$U_v(r, z, \tau) = u_0(r, \tau) ** G_{v,u}^{(7)} + w_0(r, \tau) ** G_{v,w}^{(7)} + M(r, \tau) ** G_{v,z\vartheta}^{(7)},$$

7а. Первая подгруппа, функции

$$\begin{aligned} G_{u,u}^{(7)} = u, \quad G_{w,u}^{(7)} = w, \quad G_{\omega,u}^{(7)} = \omega, \quad G_{zz,u}^{(7)} = \sigma_{zz}, \quad G_{rz,u}^{(7)} = \sigma_{rz}, \quad G_{zr,u}^{(7)} = \sigma_{zr}, \\ G_{r\vartheta,u}^{(7)} = \mu_{r\vartheta}, \quad G_{\vartheta r,u}^{(7)} = \mu_{\vartheta r}, \quad G_{z\vartheta,u}^{(7)} = \mu_{z\vartheta}, \quad G_{\vartheta z,u}^{(7)} = \mu_{\vartheta z} \end{aligned} \quad (1.5.37)$$

соответствуют граничным условиям

$$u|_{z=0} = \delta(r - \xi)\delta(\tau), \quad w|_{z=0} = 0, \quad \mu_{z\vartheta}|_{z=0} = 0. \quad (1.5.38)$$

7б. Вторая подгруппа, функции

$$\begin{aligned} G_{u,w}^{(7)} = u, \quad G_{w,w}^{(7)} = w, \quad G_{\omega,w}^{(7)} = \omega, \quad G_{zz,w}^{(7)} = \sigma_{zz}, \quad G_{rz,w}^{(7)} = \sigma_{rz}, \quad G_{zr,w}^{(7)} = \sigma_{zr}, \\ G_{r\vartheta,w}^{(7)} = \mu_{r\vartheta}, \quad G_{\vartheta r,w}^{(7)} = \mu_{\vartheta r}, \quad G_{z\vartheta,w}^{(7)} = \mu_{z\vartheta}, \quad G_{\vartheta z,w}^{(7)} = \mu_{\vartheta z} \end{aligned} \quad (1.5.39)$$

соответствуют граничным условиям

$$u|_{z=0} = 0, \quad w|_{z=0} = \delta(r - \xi)\delta(\tau), \quad \mu_{z\vartheta}|_{z=0} = 0. \quad (1.5.40)$$

7в. Третья подгруппа, функции

$$\begin{aligned}
G_{u,z\vartheta}^{(7)} = u, \quad G_{w,z\vartheta}^{(7)} = w, \quad G_{\omega,z\vartheta}^{(7)} = \omega, \quad G_{zz,z\vartheta}^{(7)} = \sigma_{zz}, \quad G_{rz,z\vartheta}^{(7)} = \sigma_{rz}, \quad G_{zr,z\vartheta}^{(7)} = \sigma_{zr}, \\
G_{r\vartheta,z\vartheta}^{(7)} = \mu_{r\vartheta}, \quad G_{\vartheta r,z\vartheta}^{(7)} = \mu_{\vartheta r}, \quad G_{z\vartheta,z\vartheta}^{(7)} = \mu_{z\vartheta}, \quad G_{\vartheta z,z\vartheta}^{(7)} = \mu_{\vartheta z}
\end{aligned} \tag{1.5.41}$$

соответствуют граничным условиям

$$u|_{z=0} = 0, \quad w|_{z=0} = 0, \quad \mu_{z\vartheta}|_{z=0} = \delta(r - \xi)\delta(\tau). \tag{1.5.42}$$

### 8. Восьмая группа (1.4.9):

$$U_v(r, z, \tau) = Q(r, \tau) ** G_{v,zr}^{(8)} + P(r, \tau) ** G_{v,zz}^{(8)} + \omega_0(r, \tau) ** G_{v,\omega}^{(8)}.$$

#### 8а. Первая подгруппа, функции

$$\begin{aligned}
G_{u,zr}^{(8)} = u, \quad G_{w,zr}^{(8)} = w, \quad G_{\omega,zr}^{(8)} = \omega, \quad G_{zz,zr}^{(8)} = \sigma_{zz}, \quad G_{rz,zr}^{(8)} = \sigma_{rz}, \quad G_{zr,zr}^{(8)} = \sigma_{zr}, \\
G_{r\vartheta,zr}^{(8)} = \mu_{r\vartheta}, \quad G_{\vartheta r,zr}^{(8)} = \mu_{\vartheta r}, \quad G_{z\vartheta,zr}^{(8)} = \mu_{z\vartheta}, \quad G_{\vartheta z,zr}^{(8)} = \mu_{\vartheta z}
\end{aligned} \tag{1.5.43}$$

соответствуют граничным условиям

$$\sigma_{zr}|_{z=0} = \delta(r - \xi)\delta(\tau), \quad \sigma_{zz}|_{z=0} = 0, \quad \omega|_{z=0} = 0. \tag{1.5.44}$$

#### 8б. Вторая подгруппа, функции

$$\begin{aligned}
G_{u,zz}^{(8)} = u, \quad G_{w,zz}^{(8)} = w, \quad G_{\omega,zz}^{(8)} = \omega, \quad G_{zz,zz}^{(8)} = \sigma_{zz}, \quad G_{rz,zz}^{(8)} = \sigma_{rz}, \quad G_{zr,zz}^{(8)} = \sigma_{zr}, \\
G_{r\vartheta,zz}^{(8)} = \mu_{r\vartheta}, \quad G_{\vartheta r,zz}^{(8)} = \mu_{\vartheta r}, \quad G_{z\vartheta,zz}^{(8)} = \mu_{z\vartheta}, \quad G_{\vartheta z,zz}^{(8)} = \mu_{\vartheta z}
\end{aligned} \tag{1.5.45}$$

соответствуют граничным условиям

$$\sigma_{zr}|_{z=0} = 0, \quad \sigma_{zz}|_{z=0} = \delta(r - \xi)\delta(\tau), \quad \omega|_{z=0} = 0. \tag{1.5.46}$$

#### 8в. Третья подгруппа, функции

$$\begin{aligned}
G_{u,\omega}^{(8)} = u, \quad G_{w,\omega}^{(8)} = w, \quad G_{\omega,\omega}^{(8)} = \omega, \quad G_{zz,\omega}^{(8)} = \sigma_{zz}, \quad G_{rz,\omega}^{(8)} = \sigma_{rz}, \quad G_{zr,\omega}^{(8)} = \sigma_{zr}, \\
G_{r\vartheta,\omega}^{(8)} = \mu_{r\vartheta}, \quad G_{\vartheta r,\omega}^{(8)} = \mu_{\vartheta r}, \quad G_{z\vartheta,\omega}^{(8)} = \mu_{z\vartheta}, \quad G_{\vartheta z,\omega}^{(8)} = \mu_{\vartheta z}
\end{aligned} \tag{1.5.47}$$

соответствуют граничным условиям

$$\sigma_{zr}|_{z=0} = 0, \quad \sigma_{zz}|_{z=0} = 0, \quad \omega|_{z=0} = \delta(r - \xi)\delta(\tau). \tag{1.5.48}$$

## 1.6. Интегральные представления решений при нормальных поверхностных возмущениях

Далее ограничимся рассмотрением только нормальных поверхностных возмущений, а именно, следующими частными случаями граничных условий (1.4.2) – (1.4.9):

$$u|_{z=0} = 0, \quad w|_{z=0} = w_0(r, \tau), \quad \omega|_{z=0} = 0; \quad (1.6.1)$$

$$\sigma_{zr}|_{z=0} = 0, \quad \sigma_{zz}|_{z=0} = P(r, \tau), \quad \mu_{z\vartheta}|_{z=0} = 0; \quad (1.6.2)$$

$$\sigma_{zr}|_{z=0} = 0, \quad w|_{z=0} = w_0(r, \tau), \quad \omega|_{z=0} = 0; \quad (1.6.3)$$

$$u|_{z=0} = 0, \quad \sigma_{zz}|_{z=0} = P(r, \tau), \quad \mu_{z\vartheta}|_{z=0} = 0; \quad (1.6.4)$$

$$\sigma_{zr}|_{z=0} = 0, \quad w|_{z=0} = w_0(r, \tau), \quad \mu_{z\vartheta}|_{z=0} = 0; \quad (1.6.5)$$

$$u|_{z=0} = 0, \quad \sigma_{zz}|_{z=0} = P(r, \tau), \quad \omega|_{z=0} = 0; \quad (1.6.6)$$

$$u|_{z=0} = 0, \quad w|_{z=0} = w_0(r, \tau), \quad \mu_{z\vartheta}|_{z=0} = 0; \quad (1.6.7)$$

$$\sigma_{zr}|_{z=0} = 0, \quad \sigma_{zz}|_{z=0} = P(r, \tau), \quad \omega|_{z=0} = 0. \quad (1.6.8)$$

Как будет ясно из дальнейшего изложения, только для этих вариантов возможно построение аналитических решений.

В этом случае в интегральных представлениях, указанных в предыдущем параграфе, можно заменить обобщенную свертку по радиусу  $r$  обычной сверткой по координатам  $x, y$  (они также обозначаются звездочками) и соответственно уменьшить число аргументов у функций влияния.

Так решения начально-краевых задач, соответствующих условиям (1.6.1), (1.6.3), (1.6.5) и (1.6.7) записываем так:

$$\begin{aligned} u(r, z, \tau) &= w_0(r, \tau) *** G_u^{(k)}(r, z, \tau), \quad w(r, z, \tau) = w_0(r, \tau) *** G_w^{(k)}(r, z, \tau), \\ \omega(r, z, \tau) &= w_0(r, \tau) *** G_\omega^{(k)}(r, z, \tau), \quad \sigma_{zz}(r, z, \tau) = w_0(r, \tau) *** G_{zz}^{(k)}(r, z, \tau), \\ \sigma_{rz}(r, z, \tau) &= w_0(r, \tau) *** G_{rz}^{(k)}(r, z, \tau), \quad \sigma_{zr}(r, z, \tau) = w_0(r, \tau) *** G_{zr}^{(k)}(r, z, \tau), \\ \mu_{r\vartheta}(r, z, \tau) &= w_0(r, \tau) *** G_{r\vartheta}^{(k)}(r, z, \tau), \quad \mu_{\vartheta r}(r, z, \tau) = w_0(r, \tau) *** G_{\vartheta r}^{(k)}(r, z, \tau), \\ \mu_{z\vartheta}(r, z, \tau) &= w_0(r, \tau) *** G_{z\vartheta}^{(k)}(r, z, \tau), \quad \mu_{\vartheta z}(r, z, \tau) = w_0(r, \tau) *** G_{\vartheta z}^{(k)}(r, z, \tau). \end{aligned} \quad (1.6.9)$$

Ядра этих сверток есть функции влияния, удовлетворяющие соответственно таким модификациям условий (1.5.4), (1.5.16), (1.5.28) и (1.5.40) на границе полупространства:

$$u|_{z=0} = 0, \quad w|_{z=0} = \delta(x, y)\delta(\tau), \quad \omega|_{z=0} = 0; \quad (1.6.10)$$

$$\sigma_{zr}|_{z=0} = 0, \quad w|_{z=0} = \delta(x, y)\delta(\tau), \quad \omega|_{z=0} = 0; \quad (1.6.11)$$

$$\sigma_{zr}|_{z=0} = 0, \quad w|_{z=0} = \delta(x, y)\delta(\tau), \quad \mu_{z9}|_{z=0} = 0; \quad (1.6.12)$$

$$u|_{z=0} = 0, \quad w|_{z=0} = \delta(x, y)\delta(\tau), \quad \mu_{z9}|_{z=0} = 0. \quad (1.6.13)$$

Соответствующие функции влияния назовем *функциями первого, третьего, пятого и седьмого типов*. При этом верхний индекс в обозначениях функций влияния в (1.6.9) в зависимости от граничных условий принимает следующие значения: (1.6.10)  $\sim k=1$ , (1.6.11)  $\sim k=3$ , (1.6.12)  $\sim k=5$  и (1.6.13)  $\sim k=7$ .

Аналогичным образом представляются решения начально-краевых задач, соответствующих условиям (1.6.2), (1.6.4), (1.6.6) и (1.6.8):

$$\begin{aligned} u(r, z, \tau) &= P(r, \tau) *** G_u^{(k)}(r, z, \tau), \quad w(r, z, \tau) = P(r, \tau) *** G_w^{(k)}(r, z, \tau), \\ \omega(r, z, \tau) &= P(r, \tau) *** G_\omega^{(k)}(r, z, \tau), \quad \sigma_{zz}(r, z, \tau) = P(r, \tau) *** G_{zz}^{(k)}(r, z, \tau), \\ \sigma_{rz}(r, z, \tau) &= P(r, \tau) *** G_{rz}^{(k)}(r, z, \tau), \quad \sigma_{zr}(r, z, \tau) = P(r, \tau) *** G_{zr}^{(k)}(r, z, \tau), \\ \mu_{r9}(r, z, \tau) &= P(r, \tau) *** G_{r9}^{(k)}(r, z, \tau), \quad \mu_{9r}(r, z, \tau) = P(r, \tau) *** G_{9r}^{(k)}(r, z, \tau), \\ \mu_{z9}(r, z, \tau) &= P(r, \tau) *** G_{z9}^{(k)}(r, z, \tau), \quad \mu_{9z}(r, z, \tau) = P(r, \tau) *** G_{9z}^{(k)}(r, z, \tau). \end{aligned} \quad (1.6.14)$$

Здесь функции влияния соответствуют следующим видоизменениям граничным условиям (1.5.10), (1.5.22), (1.5.34) и (1.5.46):

$$\sigma_{zr}|_{z=0} = 0, \quad \sigma_{zz}|_{z=0} = \delta(x, y)\delta(\tau), \quad \mu_{z9}|_{z=0} = 0; \quad (1.6.15)$$

$$u|_{z=0} = 0, \quad \sigma_{zz}|_{z=0} = \delta(x, y)\delta(\tau), \quad \mu_{z9}|_{z=0} = 0; \quad (1.6.16)$$

$$u|_{z=0} = 0, \quad \sigma_{zz}|_{z=0} = \delta(x, y)\delta(\tau), \quad \omega|_{z=0} = 0; \quad (1.6.17)$$

$$\sigma_{zr}|_{z=0} = 0, \quad \sigma_{zz}|_{z=0} = \delta(x, y)\delta(\tau), \quad \omega|_{z=0} = 0. \quad (1.6.18)$$

Соответствующие функции влияния назовем *функциями второго, четвертого, шестого и восьмого типа*. При этом верхний индекс в обозначениях функций влияния в (1.6.14) в зависимости от граничных условий принимает следующие значения: (1.6.15)  $\sim k=2$ , (1.6.16)  $\sim k=4$ , (1.6.17)  $\sim k=6$  и (1.6.18)  $\sim k=8$ .

## ГЛАВА 2. ДЕЙСТВИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО НЕСТАЦИОНАРНОГО НОРМАЛЬНОГО ПЕРЕМЕЩЕНИЯ НА ПОЛУПРОСТРАНСТВО

### 2.1. Изображение ограниченного решения

Используем преобразование Лапласа по времени  $\tau$  и Ханкеля по радиусу  $r$  нулевого порядка для  $\varphi$ ,  $w$  и первого порядка для  $\psi$ ,  $u$ ,  $\omega$  (значки « $L$ » и « $H$ » указывают на соответствующие изображения;  $s$  и  $q$  – параметры этих преобразований). Тогда уравнения (1.3.6) с учетом нулевых начальных условий переходят в следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi^{HL}}{\partial z^2} - k_0^2(q, s) \varphi^{HL} &= 0, k_0(q, s) = \sqrt{q^2 + \gamma_0^2 s^2}, (\gamma_0 = 1), \operatorname{Re} \sqrt{\cdot} > 0, \\ (\gamma_1^{-2} + \alpha) \frac{\partial^2 \psi^{HL}}{\partial z^2} - [(\gamma_1^{-2} + \alpha) q^2 + s^2] \psi^{HL} + 2\alpha \omega^{HL} &= 0, \\ \gamma_2^{-2} \frac{\partial^2 \omega^{HL}}{\partial z^2} - 2\alpha \delta \frac{\partial^2 \psi^{HL}}{\partial z^2} - (\gamma_2^{-2} q^2 + s^2 + 4\alpha \delta) \omega^{HL} + 2\alpha \delta q^2 \psi^{HL} &= 0. \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

Изображения необходимых для отыскания функций Грина перемещений и напряжений определяются по формулам:

$$u^{HL} = -q\varphi^{HL} - \frac{\partial \psi^{HL}}{\partial z}, \quad w^{HL} = \frac{\partial \varphi^{HL}}{\partial z} + q\psi^{HL}; \quad (2.1.2)$$

$$\sigma_{zz}^{HL} = \frac{\partial w^{HL}}{\partial z} + \kappa q u^{HL},$$

$$\sigma_{rz}^{HL} = (\gamma_1^{-2} - \alpha) \frac{\partial u^{HL}}{\partial z} - (\gamma_1^{-2} + \alpha) q w^{HL} + 2\alpha \omega^{HL}, \quad (2.1.3)$$

$$\sigma_{zr}^{HL} = (\gamma_1^{-2} + \alpha) \frac{\partial u^{HL}}{\partial z} - (\gamma_1^{-2} - \alpha) q w^{HL} - 2\alpha \omega^{HL},$$

$$\mu_{r\theta}^{HL} = q\omega^{HL}, \quad \mu_{\theta r}^{HL} = \eta q\omega^{HL}, \quad \mu_{z\theta}^{HL} = \frac{\partial \omega^{HL}}{\partial z}, \quad \mu_{\theta z}^{HL} = \eta \frac{\partial \omega^{HL}}{\partial z}.$$

Общее решение первого уравнения в (2.1.1) с учетом его ограниченности имеет вид:

$$\varphi^{HL}(q, z, s) = C_0(q, s) E_0(q, z, s), \quad E_0(q, z, s) = e^{-k_0(q, s)z}, \quad (2.1.4)$$

где  $C_0(q, s)$  – постоянная интегрирования.

Из двух последних уравнений в (2.1.1) получаем равенство

$$\omega^{HL} = \frac{1}{2\alpha} \left\{ \left[ (\gamma_1^{-2} + \alpha)q^2 + s^2 \right] \Psi^{HL} - (\gamma_1^{-2} + \alpha) \frac{\partial^2 \Psi^{HL}}{\partial z^2} \right\} \quad (2.1.5)$$

и уравнение четвертого порядка:

$$A \frac{\partial^4 \Psi^{HL}}{\partial z^4} - B \frac{\partial^2 \Psi^{HL}}{\partial z^2} + C \Psi^{HL} = 0, \quad (2.1.6)$$

где

$$A = P_0 + \alpha Q_0, \quad B = P_1(q^2, s^2) + \alpha Q_1(q^2, s^2), \quad C = P_2(q^2, s^2) + \alpha Q_2(q^2, s^2),$$

$$P_0 = \gamma_1^{-2} \gamma_2^{-2}, \quad Q_0 = \gamma_2^{-2},$$

$$P_1(q, s) = 2\gamma_1^{-2} \gamma_2^{-2} q + \gamma^2 s, \quad Q_1(q, s) = 2\gamma_2^{-2} q + s + 4\delta \gamma_1^{-2}, \quad \gamma^2 = \gamma_1^{-2} + \gamma_2^{-2},$$

$$P_2(q, s) = \gamma_1^{-2} \gamma_2^{-2} q^2 + \gamma^2 qs + s^2, \quad Q_2(q, s) = \gamma_2^{-2} q^2 + qs + 4\delta \gamma_1^{-2} q + 4\delta s.$$

Соответствующее обыкновенному дифференциальному уравнению (2.1.6) характеристическое уравнение имеет вид:

$$Ak^2(q, s) - Bk(q, s) + C = 0, \quad k(q, s) = k^2(q, s). \quad (2.1.7)$$

Его корни вычисляются по формулам

$$k_{1,2}(q, s) = \sqrt{\kappa_{1,2}(q, s)}, \quad \kappa_{1,2}(q, s) = \frac{B \pm \sqrt{\Delta}}{2A}, \quad (2.1.8)$$

$$\operatorname{Re} k_{1,2}(q, s) > 0, \quad \Delta = B^2 - 4AC.$$

Тогда ограниченное общее решение уравнения (2.1.6) записывается следующим образом:

$$\Psi^{HL}(q, z, s) = \sum_{l=1}^2 C_l(q, s) E_l(q, z, s), \quad E_l(q, z, s) = e^{-k_l(q, s)z}, \quad (2.1.9)$$

где  $C_l(q, s)$  – постоянные интегрирования.

Подставляя (2.1.4) и (2.1.9) в равенства (2.1.2) и (2.1.3) с учетом (2.1.5), приходим к следующим равенствам для изображений перемещений и напряжений:

$$\begin{aligned}
u^{HL}(q, z, s) &= -qC_0(q, s)E_0(q, z, s) + \sum_{l=1}^2 k_l(q, s)C_l(q, s)E_l(q, z, s), \\
w^{HL}(q, z, s) &= -k_0(q, s)C_0(q, s)E_0(q, z, s) + q \sum_{l=1}^2 C_l(q, s)E_l(q, z, s), \quad (2.1.10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega^{HL}(q, z, s) &= \frac{1}{2\alpha} \sum_{l=1}^2 T_l(q, s)C_l(q, s)E_l(q, z, s); \\
\gamma_1^2 \sigma_{zz}^{HL}(q, z, s) &= k_3^2(q, s)C_0(q, s)E_0(q, z, s) - \\
&\quad - 2q \sum_{l=1}^2 k_l(q, s)C_l(q, s)E_l(q, z, s), \\
\gamma_1^2 \sigma_{zr}^{HL}(q, z, s) &= 2qk_0(q, s)C_0(q, s)E_0(q, z, s) - \\
&\quad - \sum_{l=1}^2 k_3^2(q, s)C_l(q, s)E_l(q, z, s), \quad (2.1.11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu_{z\vartheta}^{HL}(q, z, s) &= -\frac{1}{2\alpha} \sum_{l=1}^2 T_l(q, s)k_l(q, s)C_l(q, s)E_l(q, z, s); \\
\gamma_1^2 \sigma_{rz}^{HL}(q, z, s) &= 2qk_0(q, s)C_0(q, s)E_0(q, z, s) - \\
&\quad - \sum_{l=1}^2 L_l(q, s)C_l(q, s)E_l(q, z, s), \quad (2.1.12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu_{r\vartheta}^{HL}(q, z, s) &= \frac{q}{2\alpha} \sum_{l=1}^2 T_l(q, s)C_l(q, s)E_l(q, z, s), \\
\mu_{\vartheta r}^{HL}(q, z, s) &= \eta \mu_{r\vartheta}^{HL}(q, z, s), \quad \mu_{\vartheta z}^{HL}(q, z, s) = \eta \mu_{z\vartheta}^{HL}(q, z, s),
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
T_l(q, s) &= (\gamma_1^{-2} + \alpha) [q^2 - k_l^2(q, s)] + s^2, \\
L_l(q, s) &= 2k_l^2(q, s) - \gamma_1^2 s^2, \quad k_3^2(q, s) = 2q^2 + \gamma_1^2 s^2. \quad (2.1.13)
\end{aligned}$$

В соответствии со структурой формул (2.1.10) – (2.1.12) функции влияния представим в виде сумм:

$$\begin{aligned}
G_v^{(k)HL}(q, z, s) &= \sum_{j=0}^2 G_{vj}^{(k)HL}(q, z, s), \quad (2.1.14) \\
v &= \{u, w, \omega, zz, rz, zr, r\vartheta, \vartheta r, z\vartheta, \vartheta z\} \quad (k = \overline{1, 8}),
\end{aligned}$$

где



$$\begin{aligned}
G_{u0}^{(k)HL}(q, z, s) &= -qC_0(q, s)E_0(q, z, s), \\
G_{ul}^{(k)HL}(q, z, s) &= C_l(q, s)k_l(q, s)E_l(q, z, s), \\
G_{w0}^{(k)HL}(q, z, s) &= -C_0(q, s)k_0(q, s)E_0(q, z, s), \\
G_{wl}^{(k)HL}(q, z, s) &= qC_l(q, s)E_l(q, z, s), \\
G_{\omega 0}^{(k)HL}(q, z, s) &= 0, \quad G_{\omega l}^{(k)HL}(q, z, s) = \frac{1}{2\alpha}T_l(q, s)C_l(q, s)E_l(q, z, s), \\
G_{zz0}^{(k)HL}(q, z, s) &= -\frac{\gamma_1^{-2}k_3^2(q, s)}{q}G_{u0}^{(k)HL}(q, z, s), \\
G_{zxl}^{(k)HL}(q, z, s) &= -2\gamma_1^{-2}qG_{ul}^{(k)HL}(q, z, s), \\
G_{rz0}^{(k)HL}(q, z, s) &= -2\gamma_1^{-2}qG_{w0}^{(k)HL}(q, z, s), \\
G_{rxl}^{(k)HL}(q, z, s) &= -\gamma_1^{-2}L_l(q, s)C_l(q, s)E_l(q, z, s), \\
G_{zr0}^{(k)HL}(q, z, s) &= G_{rz0}^{(k)HL}(q, z, s), \\
G_{zrl}^{(k)HL}(q, z, s) &= -\frac{\gamma_1^{-2}k_3^2(q, s)}{q}G_{wl}^{(k)HL}(q, z, s), \\
G_{r90}^{(k)HL}(q, z, s) &= 0, \quad G_{r9l}^{(k)HL}(q, z, s) = qG_{\omega l}^{(k)HL}(q, z, s), \\
G_{9r0}^{(k)HL}(q, z, s) &= 0, \quad G_{9rl}^{(k)HL}(q, z, s) = \eta qG_{\omega l}^{(k)HL}(q, z, s), \\
G_{z90}^{(k)HL}(q, z, s) &= 0, \quad G_{z9l}^{(k)HL}(q, z, s) = -\frac{1}{2\alpha}T_l(q, s)k_l(q, s)C_l(q, s)E_l(q, z, s), \\
G_{9z0}^{(k)HL}(q, z, s) &= 0, \quad G_{9zl}^{(k)HL}(q, z, s) = \eta G_{z9l}^{(k)HL}(q, z, s) \quad (l=1,2).
\end{aligned} \tag{2.1.15}$$

## 2.2. Метод малого параметра

Как следует из (2.1.8), вид корней  $k_{1,2}(q, s)$  не позволяет находить оригиналы искоемых функций влияния в аналитическом виде. Но, как показывает анализ известных характеристик моментно упругих материалов [45], характеризующий связь поля перемещений и вектора вращения безразмерный параметр  $\alpha$  в (1.3.5) является малым (см. также параграф 1.3). Поэтому раскладываем все искоемые функции в степенные ряды по нему (коэффициентам рядов соответствует дополнительный нижний индекс):

$$G_v^{(k)}(r, z, \tau) = \sum_{m=0}^{\infty} G_{vm}^{(k)}(r, z, \tau) \alpha^m = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^2 G_{vjm}^{(k)}(r, z, \tau) \alpha^m, \quad (2.2.1)$$

$$v = \{u, w, \omega, zz, rz, zr, r\vartheta, \vartheta r, z\vartheta, \vartheta z\} \quad (k = \overline{1,8}).$$

Также представляем корни уравнения (2.1.7) в виде аналогичных рядов:

$$\kappa(q, s) = \sum_{m=0}^{\infty} \kappa_m(q, s) \alpha^m. \quad (2.2.2)$$

С помощью последнего ряда находим

$$\kappa^2(q, s) = \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{\kappa}_m(q, s) \alpha^m, \quad (2.2.3)$$

$$\tilde{\kappa}_0(q, s) = \kappa_0^2(q, s), \quad \tilde{\kappa}_1(q, s) = 2\kappa_1(q, s)\kappa_0(q, s),$$

$$\tilde{\kappa}_m(q, s) = 2\kappa_m(q, s)\kappa_0(q, s) + \sum_{j=1}^{m-1} \kappa_{m-j}(q, s)\kappa_j(q, s) \quad (m \geq 2).$$

Подставляя (2.2.2) и (2.2.3) в уравнение (2.1.7), получаем равенство

$$P_0\kappa_0^2 - P_1(q^2, s^2)\kappa_0 + P_2(q^2, s^2) + \sum_{m=1}^{\infty} (P_0\tilde{\kappa}_m + Q_0\tilde{\kappa}_{m-1})\alpha^m - \quad (2.2.4)$$

$$- \sum_{m=1}^{\infty} [P_1(q^2, s^2)\kappa_m + Q_1(q^2, s^2)\kappa_{m-1}]\alpha^m + Q_2(q^2, s^2)\alpha = 0,$$

из которого вытекает рекуррентная система уравнений:

– при  $m=0$

$$P_0\kappa_0^2 - P_1(q^2, s^2)\kappa_0 + P_2(q^2, s^2) = 0; \quad (2.2.5)$$

– при  $m=1$

$$P_0\tilde{\kappa}_1 + Q_0\tilde{\kappa}_0 - P_1(q^2, s^2)\kappa_1 - Q_1(q^2, s^2)\kappa_0 + Q_2(q^2, s^2) = \quad (2.2.6)$$

$$= 2P_0\kappa_1\kappa_0 + Q_0\kappa_0^2 - P_1(q^2, s^2)\kappa_1 - Q_1(q^2, s^2)\kappa_0 + Q_2(q^2, s^2) = 0;$$

– при  $m \geq 2$

$$P_0\tilde{\kappa}_m + Q_0\tilde{\kappa}_{m-1} - P_1(q^2, s^2)\kappa_m - Q_1(q^2, s^2)\kappa_{m-1} = P_0 \left( 2\kappa_m\kappa_0 + \sum_{j=1}^{m-1} \kappa_{m-j}\kappa_j \right) + \quad (2.2.7)$$

$$+ Q_0 \sum_{j=0}^{m-1} \kappa_{m-1-j}\kappa_j - P_1(q^2, s^2)\kappa_m - Q_1(q^2, s^2)\kappa_{m-1} = 0.$$

Корни уравнения (2.2.5) имеют вид (второй индекс здесь и далее указывает на номер ветви коэффициента  $\kappa_m(q, s)$  в (2.2.2), выбираемой с помощью неравенства в (2.1.8)):

$$\kappa_{0l}(q, s) = q^2 + \gamma_l^2 s^2, \quad (l=1, 2). \quad (2.2.8)$$

Подставляя (2.2.8) в (2.2.6), а затем полученные результаты в (2.2.6) и (2.2.7), приходим к следующим равенствам для второго и третьего коэффициентов разложения (2.2.2):

$$\kappa_{11}(q, s) = -\gamma_1^4 s^2, \quad \kappa_{12}(q, s) = 4\delta\gamma_2^2; \quad (2.2.9)$$

$$\kappa_{21}(q, s) = \frac{4\delta\gamma_1^2}{\gamma_1^{-2} - \gamma_2^{-2}} + \gamma_1^6 s^2, \quad \kappa_{22}(q, s) = \frac{4\delta\gamma_2^2}{\gamma_2^{-2} - \gamma_1^{-2}}. \quad (2.2.10)$$

Коэффициенты рядов

$$k_l(q, s) = \sum_{m=0}^{\infty} k_{ml}(q, s) \alpha^m, \quad (l=1, 2), \quad (2.2.11)$$

находим с использованием (2.1.8) и (2.2.8) – (2.2.10):

$$\begin{aligned} k_{0l}(q, s) &= \sqrt{\kappa_{0l}(q, s)}, \quad k_{1l}(q, s) = \frac{\kappa_{1l}(q, s)}{2k_{0l}(q, s)}, \\ k_{2l}(q, s) &= \frac{\kappa_{2l}(q, s) - k_{1l}^2(q, s)}{2k_{0l}(q, s)}, \dots \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

Далее в окончательных формулах ограничиваемся линейными по  $\alpha$  членами и приближенные равенства везде заменяем точными:

$$k_l(q, s) = k_{0l}(q, s) + \alpha k_{1l}(q, s). \quad (2.2.13)$$

Соответствующие равенства для экспоненты в (2.1.9) имеют вид:

$$E_l(q, z, s) = [1 - \alpha k_{1l}(q, s) z] e^{-k_{0l}(q, s) z}. \quad (2.2.14)$$

Здесь в соответствии с (2.2.12)

$$\begin{aligned} k_{0l}(q, s) &= \sqrt{q^2 + \gamma_l^2 s^2} \quad (l=1, 2), \\ k_{11}(q, s) &= -\frac{\gamma_1^4 s^2}{2k_{01}(q, s)}, \quad k_{12}(q, s) = \frac{2\delta\gamma_2^2}{k_{02}(q, s)}. \end{aligned} \quad (2.2.15)$$

Кроме того, с учетом (2.2.8) – (2.2.10) и (2.2.15) строим содержащее главный член разложения по  $\alpha$  функции  $T_1(q, s)$  и линейное по этому параметру представление функций  $T_2(q, s)$  и  $L_l(q, s)$  в (2.1.13):

$$\begin{aligned} T_1(q, s) &= T_{12}(q, s)\alpha^2, & T_{12}(q, s) &= -\frac{4\delta\gamma_1^2\gamma_2^2}{\gamma_2^2 - \gamma_1^2}, \\ T_2(q, s) &= T_{20}(q, s) + \alpha T_{21}(q, s), \\ T_{20}(q, s) &= \gamma_1^{-2}(\gamma_1^2 - \gamma_2^2)s^2, & T_{21}(q, s) &= -\gamma_1^{-2}\gamma_2^2(4\delta + \gamma_1^2s^2), \\ L_l(q, s) &= L_{l0}(q, s) + \alpha L_{l1}(q, s), \\ L_{l0}(q, s) &= 2\kappa_{0l}(q, s) - \gamma_1^2s^2, & L_{l1}(q, s) &= 2\kappa_{l1}(q, s), \\ L_{10}(q, s) &= k_3^2(q, s), & L_{11}(q, s) &= 2\kappa_{11}(q, s) = -2\gamma_1^4s^2. \end{aligned} \quad (2.2.16)$$

### 2.3. Изображения функций влияния, соответствующих условиям (1.6.10)

Изображения граничных условий (1.6.10) записываются так [106]:

$$u^{HL}\Big|_{z=0} = 0, \quad w^{HL}\Big|_{z=0} = \frac{1}{2\pi}, \quad \omega^{HL}\Big|_{z=0} = 0. \quad (2.3.1)$$

Подстановка в них соотношений (2.1.10) приводит к следующей системе линейных алгебраических уравнений относительно постоянных интегрирования:

$$\mathbf{A}_1 \mathbf{C} = \frac{1}{2\pi} \mathbf{b}, \quad (2.3.2)$$

где

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} -q & k_1(q, s) & k_2(q, s) \\ -k_0(q, s) & q & q \\ 0 & T_1(q, s) & T_2(q, s) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_0(q, s) \\ C_1(q, s) \\ C_2(q, s) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решение системы (2.3.2) имеет вид

$$C_0(q, s) = -\frac{K_1(q, s)}{2\pi R_1(q, s)}, \quad C_1(q, s) = -\frac{qT_2(q, s)}{2\pi R_1(q, s)}, \quad C_2(q, s) = \frac{qT_1(q, s)}{2\pi R_1(q, s)}, \quad (2.3.3)$$

где

$$\begin{aligned} R_1(q, s) &= q^2 R(q, s) + k_0(q, s) K_1(q, s), \\ R(q, s) &= T_1(q, s) - T_2(q, s), \quad K_1(q, s) = k_1(q, s) T_2(q, s) - k_2(q, s) T_1(q, s). \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

Подстановка (2.3.3) в (2.1.15) позволяет найти изображения составляющих функций влияния. Для определения их оригиналов с использованием (2.2.1), (2.2.13), (2.2.14) и (2.2.16) строим их линейные по параметру  $\alpha$  приближения. Для этого сначала получаем равенства

$$\begin{aligned} R(q, s) &= -T_{20}(q, s) - \alpha T_{21}(q, s), \quad K_1(q, s) = K_{10}(q, s) + \alpha K_{11}(q, s), \\ R_1(q, s) &= R_{10}(q, s) + \alpha R_{11}(q, s), \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

$$\frac{1}{R_1(q, s)} = \frac{1}{R_{10}(q, s) + \alpha R_{11}(q, s)} = \frac{1}{R_{10}(q, s)} \left[ 1 - \alpha \frac{R_{11}(q, s)}{R_{10}(q, s)} \right],$$

где

$$\begin{aligned} K_{10}(q, s) &= k_{01}(q, s)T_{20}(q, s), \\ K_{11}(q, s) &= k_{01}(q, s)T_{21}(q, s) + k_{11}(q, s)T_{20}(q, s), \\ R_{10}(q, s) &= -R_I(q, s)T_{20}(q, s), \quad R_I(q, s) = q^2 - k_0(q, s)k_{01}(q, s), \\ R_{11}(q, s) &= -R_I(q, s)T_{21}(q, s) + k_0(q, s)k_{11}(q, s)T_{20}(q, s). \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

Используя теперь (2.3.3), (2.3.5) и обозначения (2.2.1), получаем следующие результаты:

$$\begin{aligned} G_{u00}^{(1)HL}(q, z, s) &= -\frac{qk_{01}(q, s)}{2\pi R_I(q, s)} e^{-k_0(q, s)z}, \quad G_{u01}^{(1)HL}(q, z, s) = \frac{\gamma_1^4 s^2 q^3 e^{-k_0(q, s)z}}{4\pi k_{01}(q, s) R_I^2(q, s)}, \\ G_{u10}^{(1)HL}(q, z, s) &= \frac{qk_{01}(q, s)}{2\pi R_I(q, s)} e^{-k_{01}(q, s)z}, \quad G_{u2}^{(1)HL}(q, z, s) = 0, \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

$$G_{u11}^{(1)HL}(q, z, s) = -\frac{\gamma_1^4 s^2 q}{4\pi R_I(q, s)} \left[ \frac{q^2}{k_{01}(q, s) R_I(q, s)} - z \right] e^{-k_{01}(q, s)z};$$

$$G_{w00}^{(1)HL}(q, z, s) = -\frac{k_0(q, s)k_{01}(q, s)}{2\pi R_I(q, s)} e^{-k_0(q, s)z},$$

$$G_{w01}^{(1)HL}(q, z, s) = \frac{\gamma_1^4 s^2 q^2 k_0(q, s) e^{-k_0(q, s)z}}{4\pi k_{01}(q, s) R_I^2(q, s)}, \quad G_{w10}^{(1)HL}(q, z, s) = \frac{q^2 e^{-k_{01}(q, s)z}}{2\pi R_I(q, s)}, \quad (2.3.8)$$

$$G_{w11}^{(1)HL}(q, z, s) = -\frac{\gamma_1^4 s^2 q^2 e^{-k_{01}(q, s)z}}{4\pi k_{01}(q, s) R_I(q, s)} \left[ \frac{k_0(q, s)}{R_I(q, s)} - z \right], \quad G_{w2}^{(1)HL}(q, z, s) = 0;$$

$$G_{\omega 0}^{(1)HL}(q, z, s) = G_{\omega 10}^{(1)HL}(q, z, s) = G_{\omega 20}^{(1)HL}(q, z, s) = 0, \quad (2.3.9)$$

$$G_{\omega 11}^{(1)HL}(q, z, s) = (-1)^{l+1} \frac{qT_{12}(q, s)}{4\pi R_l(q, s)} e^{-k_0(q, s)z};$$

$$G_{zz00}^{(1)HL}(q, z, s) = \frac{\gamma_1^{-2} k_{01}(q, s) k_3^2(q, s)}{2\pi R_l(q, s)} e^{-k_0(q, s)z},$$

$$G_{zz01}^{(1)HL}(q, z, s) = -\frac{\gamma_1^2 s^2 q^2 k_3^2(q, s)}{4\pi k_{01}(q, s) R_l^2(q, s)} e^{-k_0(q, s)z}, \quad (2.3.10)$$

$$G_{zz10}^{(1)HL}(q, z, s) = -\frac{\gamma_1^{-2} q^2 k_{01}(q, s)}{\pi R_l(q, s)} e^{-k_0(q, s)z}, \quad G_{zz2}^{(1)HL}(q, z, s) = 0,$$

$$G_{zz11}^{(1)HL}(q, z, s) = \frac{\gamma_1^2 s^2 q^2}{2\pi R_l(q, s)} \left[ \frac{q^2}{k_{01}(q, s) R_l(q, s)} - z \right] e^{-k_0(q, s)z};$$

$$G_{rz00}^{(1)HL}(q, z, s) = \frac{\gamma_1^{-2} q k_0(q, s) k_{01}(q, s)}{\pi R_l(q, s)} e^{-k_0(q, s)z}, \quad G_{rz2}^{(1)HL}(q, z, s) = 0,$$

$$G_{rz01}^{(1)HL}(q, z, s) = -\frac{\gamma_1^2 s^2 q^3 k_0(q, s) e^{-k_0(q, s)z}}{2\pi k_{01}(q, s) R_l^2(q, s)}, \quad G_{rz10}^{(1)HL}(q, z, s) = -\frac{\gamma_1^{-2} q k_3^2(q, s)}{2\pi R_l(q, s)} e^{-k_0(q, s)z}, \quad (2.3.11)$$

$$G_{rz11}^{(1)HL}(q, z, s) = \frac{\gamma_1^2 s^2 q e^{-k_0(q, s)z}}{4\pi k_{01}(q, s) R_l(q, s)} \left[ \frac{k_0(q, s) k_3^2(q, s)}{R_l(q, s)} + 4k_{01}(q, s) - z k_3^2(q, s) \right];$$

$$G_{zr00}^{(1)HL}(q, z, s) = \frac{\gamma_1^{-2} q k_0(q, s) k_{01}(q, s)}{\pi R_l(q, s)} e^{-k_0(q, s)z},$$

$$G_{zr01}^{(1)HL}(q, z, s) = -\frac{\gamma_1^2 s^2 q^3 k_0(q, s)}{2\pi k_{01}(q, s) R_l^2(q, s)} e^{-k_0(q, s)z}, \quad (2.3.12)$$

$$G_{zr10}^{(1)HL}(q, z, s) = -\frac{\gamma_1^{-2} q k_3^2(q, s)}{2\pi R_l(q, s)} e^{-k_0(q, s)z}, \quad G_{zr2}^{(1)HL}(q, z, s) = 0,$$

$$G_{zr11}^{(1)HL}(q, z, s) = \frac{\gamma_1^2 s^2 q k_3^2(q, s)}{4\pi k_{01}(q, s) R_l(q, s)} \left[ \frac{k_0(q, s)}{R_l(q, s)} - z \right] e^{-k_0(q, s)z};$$

$$G_{r90}^{(1)HL}(q, z, s) = 0, \quad G_{r9l1}^{(1)HL}(q, z, s) = (-1)^{l+1} \frac{q^2 T_{12}(q, s)}{4\pi R_l(q, s)} e^{-k_0(q, s)z}; \quad (2.3.13)$$

$$G_{9r0}^{(1)HL}(q, z, s) = 0, \quad G_{9rl1}^{(1)HL}(q, z, s) = \eta G_{r9l1}^{(1)HL}(q, z, s); \quad (2.3.14)$$

$$G_{z90}^{(1)HL}(q, z, s) = 0, \quad G_{z911}^{(1)HL}(q, z, s) = (-1)^l \frac{qT_{12}(q, s)k_{0l}(q, s)}{4\pi R_l(q, s)} e^{-k_{0l}(q, s)z}; \quad (2.3.15)$$

$$G_{9z0}^{(1)HL}(q, z, s) = 0, \quad G_{9z11}^{(1)HL}(q, z, s) = \eta G_{z911}^{(1)HL}(q, z, s). \quad (2.3.16)$$

Далее ограничиваемся значениями функций влияния на поверхности полупространства. При этом, поскольку алгоритмы построения этих функций аналогичны, то рассмотрим только нормальным напряжением. Вводя обозначения

$$G_{0zz}^{(1)HL}(q, s) = G_{zz}^{(1)HL}(q, 0, s) = \sum_{j=0}^2 G_{0zzj}^{(1)HL}(q, s), \quad G_{0zz1}^{(1)HL}(q, s) = G_{zzj}^{(1)HL}(q, 0, s),$$

с использованием (2.3.10) записываем эти функции так:

$$G_{0zz0}^{(1)HL}(q, s) = s^2 G_{330}^{HL}(q, s), \quad G_{0zz1}^{(1)HL}(q, s) = s^2 G_{331}^{HL}(q, s). \quad (2.3.17)$$

Здесь

$$G_{330}^{HL}(q, s) = \frac{k_{01}(q, s)}{2\pi R_l(q, s)}, \quad G_{331}^{HL}(q, s) = -\frac{\gamma_1^4 s^2 q^2}{4\pi k_{01}(q, s) R_l^2(q, s)}, \quad (2.3.18)$$

Отметим, что знание оригиналов функций  $G_{330}^{HL}(q, s)$  и  $G_{331}^{HL}(q, s)$  в соответствии с (1.6.9), (2.2.1), (2.3.17) при учете свойств преобразования Лапласа и свертки позволяет записать нормальное напряжение на границе полупространства так:

$$\sigma_{zz}(r, 0, \tau) = \ddot{w}_0(r, \tau) *** G_{33}(r, \tau), \quad G_{33}(r, \tau) = G_{330}(r, \tau) + \alpha G_{331}(r, \tau), \quad (2.3.19)$$

Попытка последовательного обращения преобразований Ханкеля и Лапласа для функций в (2.3.18) не приводит к аналитическим выражениям для оригиналов. Поэтому будем использовать связь плоской и осесимметричной задач [36, 99]

## 2.4. Плоская задача с граничными условиями, аналогичными (1.6.10)

Рассмотрим задачу о распространении нестационарных двумерных граничных возмущений в заполненной упругой однородной изотропной средой Коссера полуплоскости  $z > 0$  ( $Oxz$  – прямоугольная декартова систему координат). Полагаем, на границе полуплоскости заданы следующие условия [105]:

$$u|_{z=0} = 0, \quad w|_{z=0} = \delta(x, y)\delta(\tau), \quad \omega|_{z=0} = 0. \quad (2.4.1)$$

Здесь и далее в этом параграфе все обозначения совпадают с использованными в п.п. 2.1 – 2.3 и полностью соответствуют статье [100], где построено решение задачи Лемба для моментно упругой полуплоскости.

Движение этой среды описывается следующими соотношениями [83]:

– уравнения относительно скалярного потенциала  $\varphi$  и ненулевой компоненты  $\psi$  векторного потенциала перемещений

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} &= \Delta\varphi, \quad \ddot{\psi} = (\gamma_1^{-2} + \alpha)\Delta\psi + 2\alpha\omega, \\ \ddot{\omega} &= \gamma_2^{-2}\Delta\omega - 2\alpha\delta\Delta\psi - 4\alpha\delta\omega, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}; \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

– связь касательного  $u$  и нормального  $w$  перемещений с потенциалами

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\partial\psi}{\partial x}; \quad (2.4.3)$$

– связь напряжений и перемещений

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \kappa \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \sigma_{yy} = \kappa \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right), \\ \sigma_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} + \kappa \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \sigma_{xz} = (\gamma_1^{-2} + \alpha) \frac{\partial w}{\partial x} + (\gamma_1^{-2} - \alpha) \frac{\partial u}{\partial z} + 2\alpha\omega, \\ \sigma_{zx} &= (\gamma_1^{-2} + \alpha) \frac{\partial u}{\partial z} + (\gamma_1^{-2} - \alpha) \frac{\partial w}{\partial x} - 2\alpha\omega, \\ \mu_{xy} &= \frac{\partial \omega}{\partial x}, \quad \mu_{yx} = \eta \frac{\partial \omega}{\partial x}, \quad \mu_{zy} = \frac{\partial \omega}{\partial z}, \quad \mu_{yz} = \eta \frac{\partial \omega}{\partial z}. \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

Считаем, что в начальный момент времени возмущения отсутствуют:

$$\varphi|_{\tau=0} = \dot{\varphi}|_{\tau=0} = \psi|_{\tau=0} = \dot{\psi}|_{\tau=0} = \omega|_{\tau=0} = \dot{\omega}|_{\tau=0} = 0, \quad (2.4.5)$$

и все искомые функции являются ограниченными

В пространстве преобразований Лапласа по времени  $\tau$  и Фурье по координате  $x$  (верхний индекс « $F$ » соответствует изображению;  $q$  – параметр преобразования), получаем следующую краевую задачу:

– уравнения (2.4.2) переходят в следующие соотношения



$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi^{FL}}{\partial z^2} - k_0^2(q, s) \varphi^{FL} &= 0, \\ (\gamma_1^{-2} + \alpha) \frac{\partial^2 \psi^{FL}}{\partial z^2} - [(\gamma_1^{-2} + \alpha) q^2 + s^2] \psi^{FL} + 2\alpha \omega^{FL} &= 0, \\ \gamma_2^{-2} \frac{\partial^2 \omega^{FL}}{\partial z^2} - 2\alpha \delta \frac{\partial^2 \psi^{FL}}{\partial z^2} - (\gamma_2^{-2} q^2 + s^2 + 4\alpha \delta) \omega^{FL} + 2\alpha \delta q^2 \psi^{FL} &= 0; \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

– перемещения и напряжения

$$u^{FL} = -iq\varphi^{FL} - \frac{\partial \psi^{FL}}{\partial z}, \quad w^{FL} = \frac{\partial \varphi^{FL}}{\partial z} - iq\psi^{FL}; \quad (2.4.7)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}^{FL} = \frac{\partial w^{FL}}{\partial z} - iq\kappa u^{FL}, \quad \sigma_{xz}^{FL} = (\gamma_1^{-2} - \alpha) \frac{\partial u^{FL}}{\partial z} - (\gamma_1^{-2} + \alpha) iqw^{FL} + 2\alpha \omega^{FL}, \\ \sigma_{zx}^{FL} = (\gamma_1^{-2} + \alpha) \frac{\partial u^{FL}}{\partial z} - (\gamma_1^{-2} - \alpha) iqw^{FL} - 2\alpha \omega^{FL}, \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

$$\mu_{xy}^{FL} = -iq\omega^{FL}, \quad \mu_{yx}^{FL} = -iq\eta\omega^{FL}, \quad \mu_{zy}^{FL} = \frac{\partial \omega^{FL}}{\partial z}, \quad \mu_{yz}^{FL} = \eta \frac{\partial \omega^{FL}}{\partial z};$$

– граничные условия

$$u^{FL} \Big|_{z=0} = 0, \quad w^{FL} \Big|_{z=0} = 1, \quad \omega^{FL} \Big|_{z=0} = 0. \quad (2.4.9)$$

Поскольку уравнения (2.4.6) совпадают с (2.1.1) с точностью до символов интегральных преобразований, то их общие ограниченные решения также аналогичны соответствующим равенствам в (2.1.4), (2.1.9) и (2.1.10):

$$\begin{aligned} \varphi^{FL}(q, z, s) = C_0(q, s) E_0(q, z, s), \quad \psi^{FL}(q, z, s) = \sum_{l=1}^2 C_l(q, s) E_l(q, z, s), \\ \omega^{FL}(q, z, s) = \frac{1}{2\alpha} \sum_{l=1}^2 T_l(q, s) C_l(q, s) E_l(q, z, s), \end{aligned} \quad (2.4.10)$$

где  $C_j(q, s)$ , ( $j=0, 2$ ) – постоянные интегрирования; а  $k_{1,2}(q, s)$  – корни биквадратного уравнения (2.1.7).

Подстановка (2.4.10) в (2.4.8) и использование условий (2.4.9) подобно (2.3.3) позволяет определить постоянные интегрирования:

$$C_0(q, s) = -\frac{K_1(q, s)}{R_1(q, s)}, \quad C_1(q, s) = -\frac{iqT_2(q, s)}{R_1(q, s)}, \quad C_2(q, s) = \frac{iqT_1(q, s)}{R_1(q, s)}. \quad (2.4.11)$$

Аналогично п. 2.2 при разложении в степенные ряды по малому параметру  $\alpha$ , а именно, ограничиваясь линейным приближением, перемещения и угол поворота записываем так:

$$\Gamma_v(x, z, \tau) = \sum_{m=0}^{\infty} \Gamma_{vm}(x, z, \tau) \alpha^m, v = \{u, w, \omega, zz, rz, zr, r\vartheta, \vartheta r, z\vartheta, \vartheta z\}. \quad (2.4.12)$$

Использование (2.4.7), (2.4.8), (2.4.10), (2.4.11) и (2.2.13) – (2.2.16) позволяет найти изображений искомых коэффициентов в (2.4.12), они имеют вид:

$$\Gamma_{u00}^{FL}(q, z, s) = -\frac{iqk_{01}(q, s)}{R_l(q, s)} e^{-k_0(q, s)z}, \quad \Gamma_{u2}^{FL}(q, z, s) = 0, \\ \Gamma_{u01}^{FL}(q, z, s) = \frac{\gamma_1^4 s^2 q^3}{2k_{01}(q, s)R_l^2(q, s)} e^{-k_0(q, s)z}, \quad \Gamma_{u10}^{FL}(q, z, s) = \frac{iqk_{01}(q, s)}{R_l(q, s)} e^{-k_{01}(q, s)z}, \quad (2.4.13)$$

$$\Gamma_{u11}^{FL}(q, z, s) = -\frac{i\gamma_1^4 s^2 q}{2R_l(q, s)} \left[ \frac{q^2}{k_{01}(q, s)R_l(q, s)} - z \right] e^{-k_{01}(q, s)z};$$

$$\Gamma_{w00}^{FL}(q, z, s) = -\frac{k_0(q, s)k_{01}(q, s)}{R_l(q, s)} e^{-k_0(q, s)z}, \quad \Gamma_{w2}^{FL}(q, z, s) = 0,$$

$$\Gamma_{w01}^{FL}(q, z, s) = \frac{\gamma_1^4 s^2 q^2 k_0(q, s)}{2k_{01}(q, s)R_l^2(q, s)} e^{-k_0(q, s)z}, \quad \Gamma_{w10}^{FL}(q, z, s) = \frac{q^2}{R_l(q, s)} e^{-k_{01}(q, s)z}, \quad (2.4.14)$$

$$\Gamma_{w11}^{FL}(q, z, s) = -\frac{\gamma_1^4 s^2 q^2}{2k_{01}(q, s)R_l(q, s)} \left[ \frac{k_0(q, s)}{R_l(q, s)} - z \right] e^{-k_{01}(q, s)z};$$

$$\Gamma_{\omega l}^{FL}(q, z, s) = (-1)^{l+1} \frac{iqT_{12}(q, s)}{2R_l(q, s)} e^{-k_{01}(q, s)z} \quad (l=1, 2); \quad (2.4.15)$$

$$\Gamma_{zz00}^{FL}(q, z, s) = \frac{\gamma_1^{-2} k_3^2(q, s) k_{01}(q, s)}{R_l(q, s)} e^{-k_0(q, s)z},$$

$$\Gamma_{zz01}^{FL}(q, z, s) = -\frac{\gamma_1^2 s^2 q^2 k_3^2(q, s)}{2k_{01}(q, s)R_l^2(q, s)} e^{-k_0(q, s)z},$$

(2.4.16)

$$\Gamma_{zz10}^{FL}(q, z, s) = -\frac{2\gamma_1^{-2} q^2 k_{01}(q, s)}{R_l(q, s)} e^{-k_{01}(q, s)z}, \quad \Gamma_{zz2}^{FL}(q, z, s) = 0,$$

$$\Gamma_{zz11}^{FL}(q, z, s) = \frac{\gamma_1^2 s^2 q^2}{R_l(q, s)} \left[ \frac{q^2}{k_{01}(q, s)R_l(q, s)} - z \right] e^{-k_{01}(q, s)z};$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{xz00}^{FL}(q, z, s) &= \frac{2\gamma_1^{-2} i q k_0(q, s) k_{01}(q, s)}{R_I(q, s)} e^{-k_0(q, s)z}, \\ \Gamma_{xz01}^{FL}(q, z, s) &= -\frac{\gamma_1^2 i s^2 q^3 k_0(q, s)}{k_{01}(q, s) R_I^2(q, s)} e^{-k_0(q, s)z}, \Gamma_{xz10}^{FL}(q, z, s) = -\frac{\gamma_1^{-2} i q k_3^2(q, s)}{R_I(q, s)} e^{-k_{01}(q, s)z}, \\ \Gamma_{xz10}^{FL}(q, z, s) &= -\frac{\gamma_1^{-2} i q k_3^2(q, s)}{R_I(q, s)} e^{-k_{01}(q, s)z}, \Gamma_{xz2}^{FL}(q, z, s) = 0.\end{aligned}\quad (2.4.17)$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{xz11}^{FL}(q, z, s) &= \frac{\gamma_1^2 i s^2 q}{2k_{01}(q, s) R_I(q, s)} \times \\ &\times \left[ \frac{k_0(q, s) k_3^2(q, s)}{R_I(q, s)} + 4k_{01}(q, s) - z k_3^2(q, s) \right] e^{-k_{01}(q, s)z}; \\ \Gamma_{zx00}^{FL}(q, z, s) &= \frac{2\gamma_1^{-2} i q k_0(q, s) k_{01}(q, s)}{R_I(q, s)} e^{-k_0(q, s)z}, \\ \Gamma_{zx01}^{FL}(q, z, s) &= -\frac{\gamma_1^2 i s^2 q^3 k_0(q, s)}{k_{01}(q, s) R_I^2(q, s)} e^{-k_0(q, s)z}, \Gamma_{zx10}^{FL}(q, z, s) = -\frac{\gamma_1^{-2} i q k_3^2(q, s)}{R_I(q, s)} e^{-k_{01}(q, s)z},\end{aligned}\quad (2.4.18)$$

$$\Gamma_{zx11}^{FL}(q, z, s) = \frac{\gamma_1^2 i s^2 q k_3^2(q, s)}{2k_{01}(q, s) R_I(q, s)} \left[ \frac{k_0(q, s)}{R_I(q, s)} - z \right] e^{-k_{01}(q, s)z}, \Gamma_{zx2}^{FL}(q, z, s) = 0;$$

$$\Gamma_{xy11}^{FL}(q, z, s) = (-1)^{l+1} \frac{q^2 T_{12}(q, s)}{2R_I(q, s)} e^{-k_{01}(q, s)z},$$

$$\Gamma_{zy11}^{FL}(q, z, s) = (-1)^l \frac{i q T_{12}(q, s) k_{01}(q, s)}{2R_I(q, s)} e^{-k_{01}(q, s)z}, \quad (2.4.19)$$

$$\Gamma_{yx11}^{FL}(q, z, s) = \eta \Gamma_{xy11}^{FL}(q, z, s), \quad \Gamma_{yz11}^{FL}(q, z, s) = \eta \Gamma_{zy11}^{FL}(q, z, s).$$

Далее, аналогично п. 2.3, ограничиваемся значениями функций влияния на границе полуплоскости  $z=0$ . При этом, поскольку алгоритмы построения оригиналов всех функций аналогичны, то рассмотрим только нормальное напряжение. Вводя обозначения

$$\Gamma_{0zz}^{FL}(q, s) = \Gamma_{zz}^{FL}(q, 0, s) = \sum_{j=0}^2 \Gamma_{0zzj}^{FL}(q, s), \quad \Gamma_{0zzj}^{FL}(q, s) = \Gamma_{zzj}^{FL}(q, 0, s),$$

с использованием (2.4.16) записываем эти функции так:

$$\Gamma_{0zz0}^{FL}(q, s) = s^2 \Gamma_{330}^{FL}(q, s), \quad \Gamma_{0zz1}^{FL}(q, s) = s^2 \Gamma_{331}^{FL}(q, s), \quad (2.4.20)$$

где

$$\Gamma_{330}^{FL}(q, s) = \frac{k_{01}(q, s)}{R_l(q, s)}, \quad \Gamma_{331}^{FL}(q, s) = -\frac{\gamma_1^4 s^2 q^2}{2k_{01}(q, s)R_l^2(q, s)}. \quad (2.4.21)$$

Тогда искомые функций влияния определяются так:

$$\Gamma_{0zz0}(x, \tau) = \ddot{\Gamma}_{330}(x, \tau), \quad \Gamma_{0zz1}(x, \tau) = \ddot{\Gamma}_{331}(x, \tau), \quad (2.4.22)$$

Для вычисления оригиналов функций (2.4.21) используем алгоритм совместного обращения преобразований Фурье и Лапласа [36, 45, 99]. Выполняя замену аргументов  $q = \lambda s$ , из (2.4.21) получаем:

$$\Gamma_{33m}^{FL}(q, s) = \frac{1}{s} h_{33m}(\lambda) \quad (m = 0, 1),$$

$$h_{330}(\lambda) = \frac{k_{01}(\lambda^2, 1)}{S(\lambda^2)}, \quad h_{331}(\lambda) = -\frac{\gamma_1^4 \lambda^2}{2k_{01}(\lambda^2, 1)S^2(\lambda^2)}, \quad S(\lambda) = \lambda - k_0(\lambda, 1)k_{01}(\lambda, 1);$$

$$\lambda = -\tau \frac{y + xi}{x^2 + y^2}, \quad \lim_{y \rightarrow \pm 0} \lambda = \lambda_0(x, \tau) = -\frac{i\tau}{x}.$$

Тогда искомые функции определяются так:

$$\Gamma_{33m}(x, \tau) = -\frac{1}{2\pi i x} \left[ \lim_{y \rightarrow +0} h_{33m}(\lambda) - \lim_{y \rightarrow -0} h_{33m}(\lambda) \right] \quad (m = 0, 1). \quad (2.4.23)$$

Выделение однозначных ветвей функций  $k_0(\lambda^2, 1)$  и  $k_{01}(\lambda^2, 1)$  проводится с помощью разрезов комплексной плоскости  $\lambda$  вдоль мнимой оси:

$$\lim_{y \rightarrow \pm 0} k_0(\lambda^2, 1) = \begin{cases} \sqrt{1 - \tau^2/x^2} & (\tau/|x| < 1), \\ \pm i \operatorname{sign}(x) \sqrt{\tau^2/x^2 - 1} & (\tau/|x| \geq 1), \end{cases} \quad (2.4.24)$$

$$\lim_{y \rightarrow \pm 0} k_{01}(\lambda^2, 1) = \begin{cases} \sqrt{\gamma_1^2 - \tau^2/x^2} & (\tau/|x| < \gamma_1), \\ \pm i \operatorname{sign}(x) \sqrt{\tau^2/x^2 - \gamma_1^2} & (\tau/|x| \geq \gamma_1). \end{cases}$$

Выполняя предельные переходы (2.4.23), с учетом (2.4.23) получаем следующие выражения для оригиналов:

– при  $\tau/|x| < 1$

$$\Gamma_{330}(x, \tau) = \Gamma_{331}(x, \tau) = 0, \quad (2.4.25)$$

– при  $1 \leq \tau/|x| < \gamma_1$

$$\Gamma_{330}(x, \tau) = \frac{(\tau^2 - \gamma_1^2 x^2) \sqrt{\tau^2 - x^2}}{\pi(1 + \gamma_1^2) x^2 (\tau^2 - v_1^2 x^2)} = \Gamma_{3300}(x, \tau), \quad v_1 = \frac{\gamma_1}{\sqrt{1 + \gamma_1^2}} < 1, \quad (2.4.26)$$

$$\Gamma_{331}(x, \tau) = \frac{\gamma_1^4 \tau^4 \sqrt{\tau^2 - x^2}}{\pi(1 + \gamma_1^2)^2 x^2 (\tau^2 - v_1^2 x^2)^2} = \Gamma_{3310}(x, \tau),$$

– при  $\tau/|x| \geq \gamma_1$

$$\Gamma_{330}(x, \tau) = \frac{Q(x^2, \tau^2) \sqrt{\tau^2 - \gamma_1^2 x^2}}{\pi(1 + \gamma_1^2) x^2 (\tau^2 - v_1^2 x^2)} = \Gamma_{3302}(x, \tau), \quad Q(x, \tau) = \tau + \sqrt{\tau - x} \sqrt{\tau - \gamma_1^2 x}, \quad (2.4.27)$$

$$\Gamma_{331}(x, \tau) = \frac{\gamma_1^4 \tau^2 Q^2(x^2, \tau^2)}{2\pi(1 + \gamma_1^2)^2 x^2 (\tau^2 - v_1^2 x^2)^2 \sqrt{\tau^2 - \gamma_1^2 x^2}} = \Gamma_{3312}(x, \tau).$$

Учитывая, что для известных моментно упругих материалов [45] имеет место неравенство  $\gamma_1 > 1$ , формулы (2.4.25) – (2.4.27) представляем так ( $H(\xi)$  – единичная функция Хевисайда [36]):

$$\Gamma_{33m}(x, \tau) = \sum_{j=0}^1 \Gamma_{33mj}(x, \tau) H(\tau - \gamma_j |x|) \quad (m = 0, 1), \quad (2.4.28)$$

где

$$\Gamma_{3301}(x, \tau) = \Gamma_{3302}(x, \tau) - \Gamma_{3300}(x, \tau) = \frac{\tau^2 \sqrt{\tau^2 - \gamma_1^2 x^2}}{\pi(1 + \gamma_1^2) x^2 (\tau^2 - v_1^2 x^2)},$$

$$\Gamma_{3311}(x, \tau) = \Gamma_{3312}(x, \tau) - \Gamma_{3310}(x, \tau) = \frac{\gamma_1^4 \tau^2 [\tau^4 + (\tau^2 - x^2)(\tau^2 - \gamma_1^2 x^2)]}{2\pi(1 + \gamma_1^2)^2 x^2 \sqrt{\tau^2 - \gamma_1^2 x^2} (\tau^2 - v_1^2 x^2)^2}.$$

Отсюда следует, что функция  $\Gamma_{330}(x, \tau)$  непрерывна всюду, а  $\Gamma_{331}(x, \tau)$  непрерывна везде за исключением точек  $\tau = \gamma_1 |x|$ . При этом имеют место соотношения:

$$\lim_{\tau \rightarrow \gamma_1 |x| \pm 0} \Gamma_{33m}(x, \tau) = 0 \quad (m = 0, 1), \quad \lim_{\tau \rightarrow \gamma_1 |x| \pm 0} \Gamma_{330}(x, \tau) = 0,$$

$$\lim_{\tau \rightarrow \gamma_1 |x| - 0} \Gamma_{331}(x, \tau) = \frac{\sqrt{\gamma_1^2 - 1}}{\pi |x|}, \quad \lim_{\tau \rightarrow \gamma_1 |x| + 0} \Gamma_{331}(x, \tau) = +\infty.$$

В качестве примера рассмотрим полуплоскость, заполненную зернистым композитом из алюминиевой дроби в эпоксидной матрице, со следующими физическими характеристиками [45]:

$$\lambda = 7,59 \text{ ГПа}, \quad \mu = 1,89 \text{ ГПа}, \quad \alpha = 7,45 \text{ МПа}, \quad \gamma + \varepsilon = 2,64 \text{ кН}, \\ J = 0,429 \cdot 10^{-3} \text{ кг/м}, \quad c_2 = 9,29 \cdot 10^2 \text{ м/с}.$$

В качестве характерного линейного размера принимаем  $L = 1 \text{ м}$ . С помощью (1.3.5) определяем плотность материала:  $\rho = \mu/c_2^2 = 2,19 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ . При этом безразмерные параметры в (1.3.5) таковы:

$$\gamma_1 = 2,45; \quad \gamma_2 = 0,92; \quad \alpha = 0,66 \cdot 10^{-3}; \quad \delta = 5,1 \cdot 10^6.$$

На рис. 2.4.1 и 2.4.2 представлены построенные с помощью формулы (2.4.28) зависимости функций влияния  $\Gamma_{330}(x, \tau)$  и  $\Gamma_{331}(x, \tau)$  от времени  $\tau$  при различных значениях координаты: сплошная кривая соответствует  $x = 0,2$ , пунктирная –  $x = 0,4$ , а штрихпунктирная –  $x = 0,6$ .

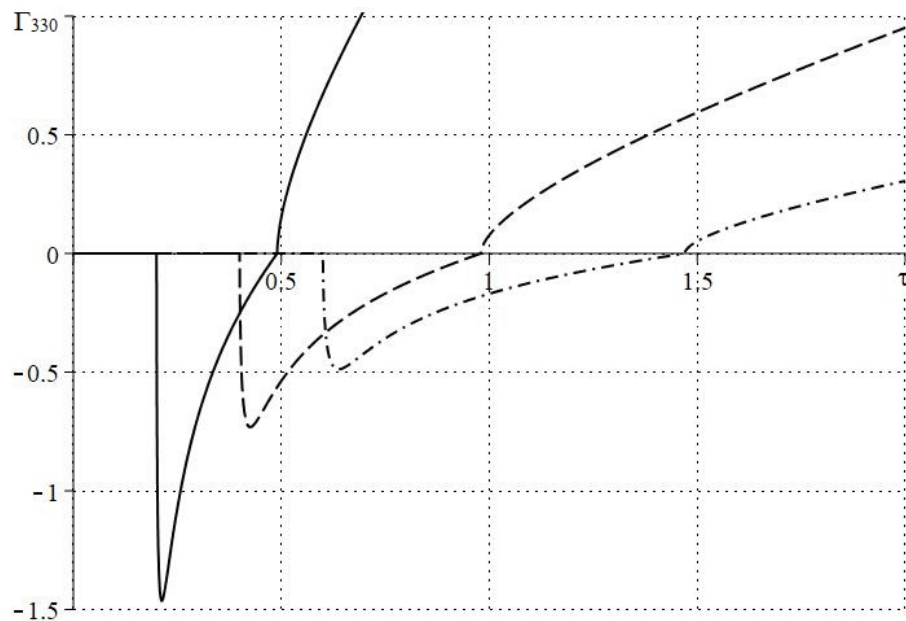


Рис. 2.4.1

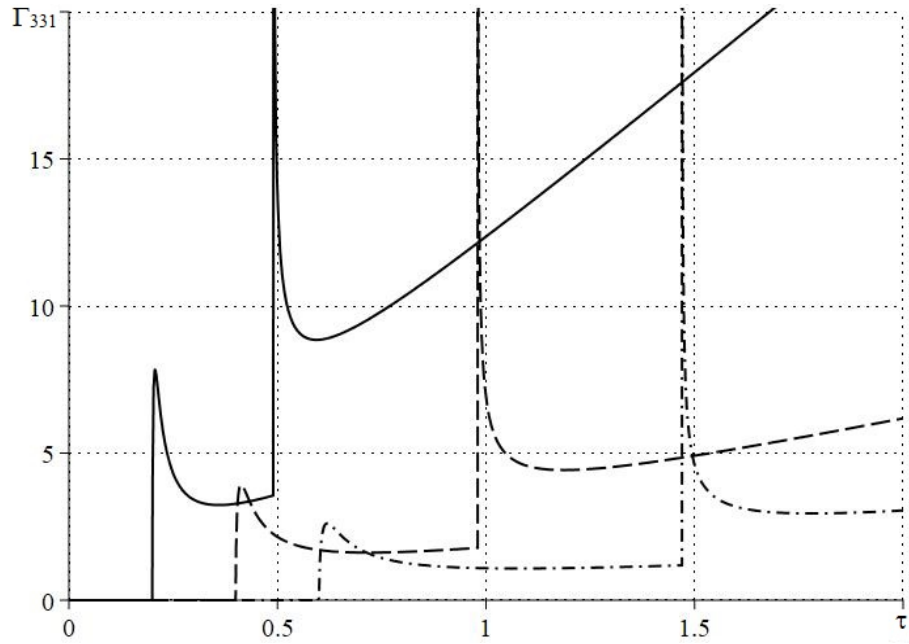


Рис. 2.4.2

На рис. 2.4.3 и 2.4.4 изображены зависимости тех же функций от координаты  $x$  при различных значениях времени: сплошная кривая соответствует  $\tau = 0,15$ , пунктирная –  $\tau = 0,3$ , а штрихпунктирная –  $\tau = 0,45$ .

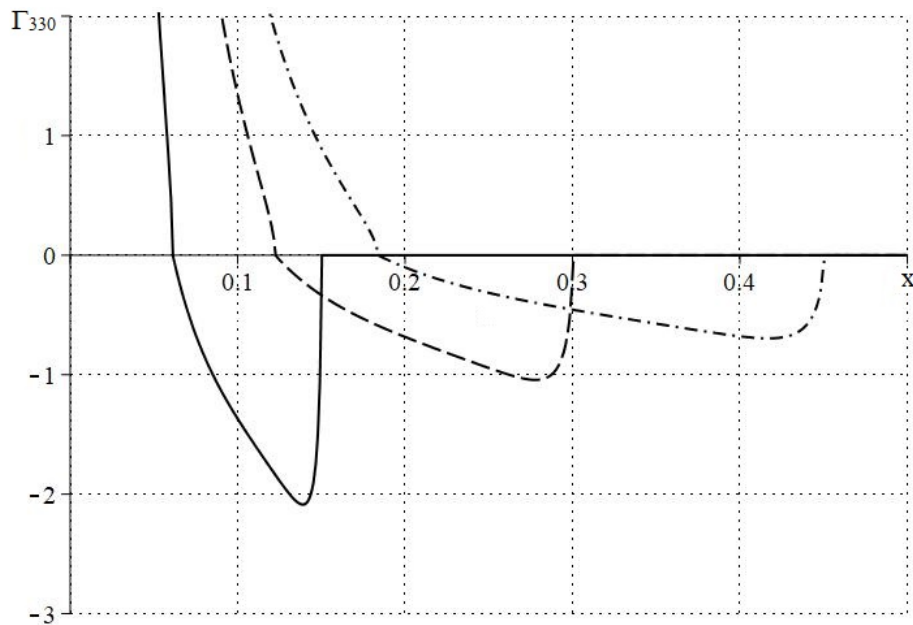


Рис. 2.4.3

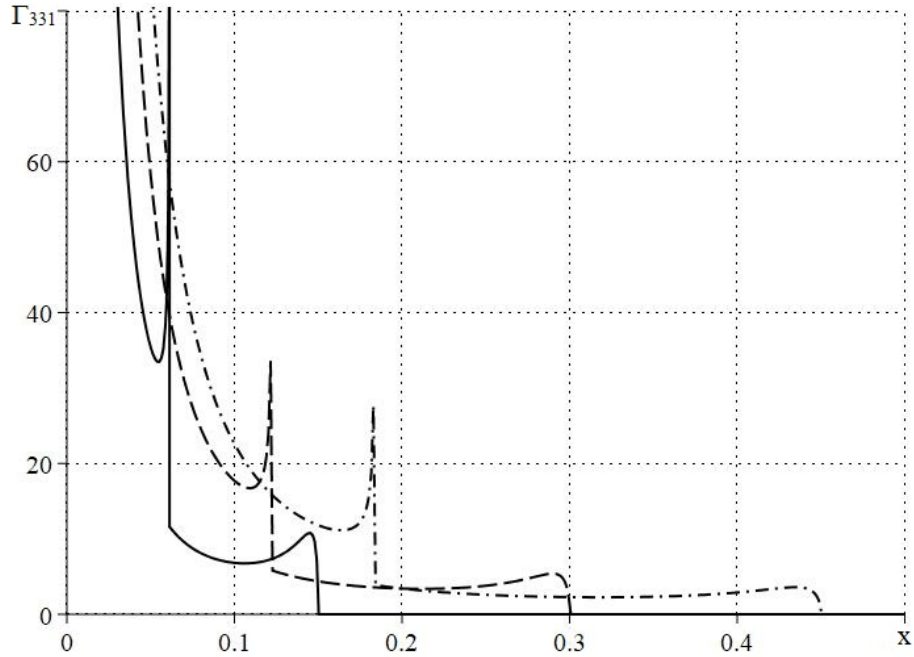


Рис. 2.4.4

Отметим, что поскольку порядок функции  $\Gamma_{331}(x, \tau)$  на единицу выше чем функции  $\Gamma_{330}(x, \tau)$ , то относительный вклад учета моментных характеристик приблизительно эквивалентен  $10\alpha$ . Но нужно учесть, что речь идет о производных второго порядка по времени от функций влияния. Качественное отличие от классической упругой среды заключается в появлении дополнительного фронта волны, распространяющегося со скоростью  $v_1^{-1}$ .

### 2.5. Оригиналы функций влияния, соответствующих условиям (1.6.10)

Из сравнения формул (2.3.18) и (2.4.21) следует, что имеют место равенства [106]:

$$G_{33m}^{HL}(q, s) = \frac{1}{2\pi} \Gamma_{33m}^{FL}(q, s) \quad (m = 0, 1), \quad (2.5.1)$$

Равенства (2.5.1) позволяют найти оригинал функции  $G_{33m}^{HL}(q, s)$  с помощью утверждений о связи преобразований Фурье и Ханкеля [36, 37]. При этом учитываем, что функции  $\Gamma_{33m}(x, \tau)$  – четная функция по  $x$ , и для них использовалось преобразование Ханкеля нулевого порядка. В результате получаем



$$G_{33mj}(r, \tau) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} x(x^2 - r^2)_+^{-3/2} \Gamma_{33mj}(x, \tau) = -\frac{1}{\pi} \sum_{j=0}^1 I_{mj}(r, \tau) H(\tau - \gamma_j r),$$

$$I_{mj}(r, \tau) = \int_r^{\tau/\gamma_j} \frac{x \Gamma_{33mj}(x, \tau)}{(x^2 - r^2)^{3/2}} dx. \quad (2.5.2)$$

Интегралы  $I_{mj}(r, \tau)$  с помощью замены переменной интегрирования приводятся к следующему виду (они понимаются в смысле регуляризованных значений):

$$I_{00}(r, \tau) = -\frac{1}{2\pi(1 + \gamma_1^2)} \int_{r^2}^{\tau^2/\gamma_0^2} \frac{(\gamma_1^2 y - \tau^2) \sqrt{\tau^2 - y}}{y(y - r^2)^{3/2} (\tau^2 - v_1^2 y)} dy,$$

$$I_{01}(r, \tau) = \frac{\tau^2}{2\pi(1 + \gamma_1^2)} \int_{r^2}^{\tau^2/\gamma_1^2} \frac{\sqrt{\tau^2 - \gamma_1^2 y}}{y(y - r^2)^{3/2} (\tau^2 - v_1^2 y)} dy,$$

$$I_{10}(r, \tau) = \frac{\gamma_1^4 \tau^4}{2\pi(1 + \gamma_1^2)^2} \int_{r^2}^{\tau^2/\gamma_0^2} \frac{\sqrt{\tau^2 - y}}{y(y - r^2)^{3/2} (\tau^2 - v_1^2 y)^2} dy,$$

$$I_{11}(r, \tau) = \frac{\gamma_1^4 \tau^2}{4\pi(1 + \gamma_1^2)^2} \int_{r^2}^{\tau^2/\gamma_1^2} \frac{[\tau^4 + (\tau^2 - y)(\tau^2 - \gamma_1^2 y)]}{y(y - r^2)^{3/2} \sqrt{\tau^2 - \gamma_1^2 y} (\tau^2 - v_1^2 y)^2} dy,$$

Вычисляя их с помощью разложения рациональных частей подынтегральной функции на элементарные дроби и табличных интегралов [38, 93], окончательно получаем

$$G_{330}(r, \tau) = \frac{\tau}{2\pi(1 + \gamma_1^2)} \left[ \frac{1}{r^3} \sum_{j=0}^1 H(\tau - \gamma_j r) - \frac{\gamma_1 v_1^3}{(\tau^2 - v_1^2 r^2)^{3/2}} \sum_{j=0}^1 (-1)^j H(\tau - \gamma_j r) \right],$$

$$G_{331}(r, \tau) = \frac{\gamma_1^4 \tau}{2\pi(1 + \gamma_1^2)^2} \times \left[ \frac{1}{r^3} \sum_{j=0}^1 H(\tau - \gamma_j r) + \frac{v_1^5}{(\tau^2 - v_1^2 r^2)^{5/2}} \sum_{j=0}^1 (a_{1j} \tau^2 + b_{1j} r^2) H(\tau - \gamma_j r) \right], \quad (2.5.3)$$

где

$$a_{10} = \frac{(1 + 2\gamma_1^2)(2 - \gamma_1^4 + \gamma_1^2)}{2\gamma_1^5}, b_{10} = \frac{(1 + 2\gamma_1^2)(\gamma_1^2 - 1)}{2\gamma_1^3},$$

$$a_{11} = \frac{\gamma_1^8 - (\gamma_1^6 + 3\gamma_1^4 + 2\gamma_1^2 + 1)}{2\gamma_1^7}, \quad b_{11} = \frac{1 - \gamma_1^6}{2\gamma_1^5}.$$

В качестве примера приведем графики поверхностных функций влияния для полупространства, заполненного материалом, описанным в п. 2.4.

На рис. 2.5.1 и 2.5.2 представлены построенные с помощью формулы (2.5.3) зависимости функций влияния  $G_{330}(r, \tau)$  и  $G_{331}(r, \tau)$  от времени  $\tau$  при различных значениях радиусов: сплошная кривая соответствует  $r = 0,1$ , пунктирная –  $r = 0,15$ , а штрихпунктирная –  $r = 0,2$ .

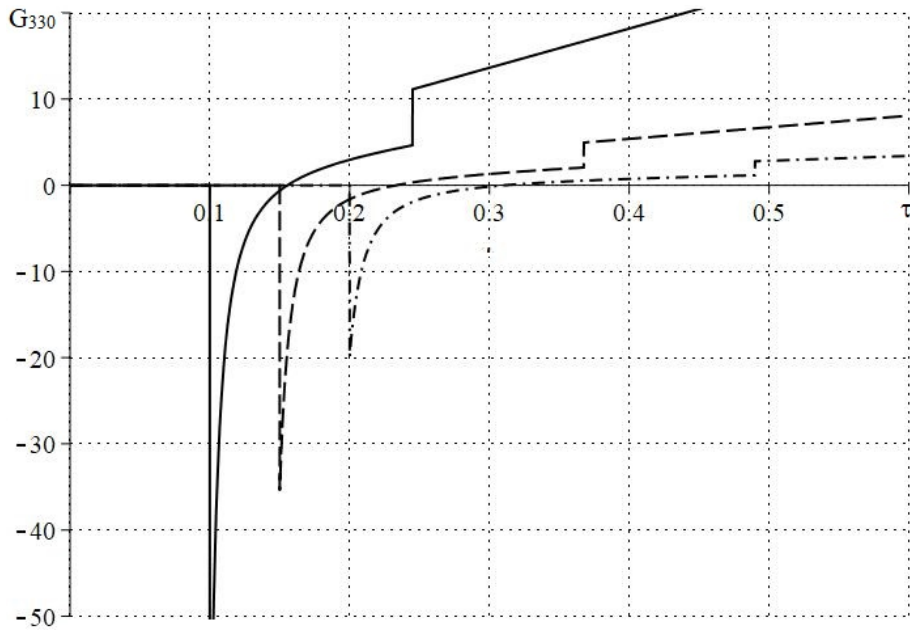


Рис. 2.5.1

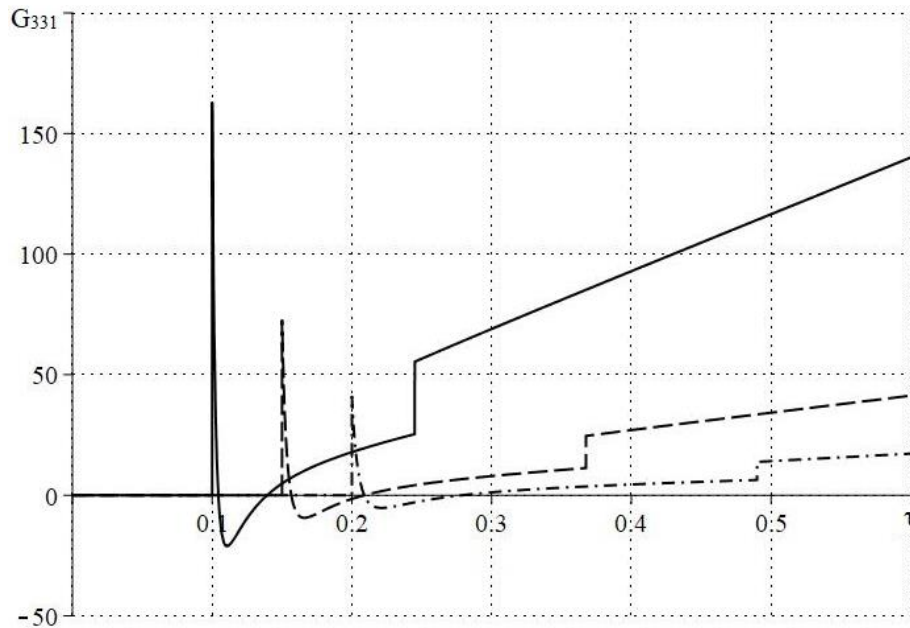


Рис. 2.5.2

На рис. 2.5.3 и 2.5.4 изображены зависимости тех же функций от радиуса  $r$  при различных значениях времени: сплошная кривая соответствует  $\tau = 0,2$ , пунктирная –  $\tau = 0,4$ , а штрихпунктирная –  $\tau = 0,6$ .

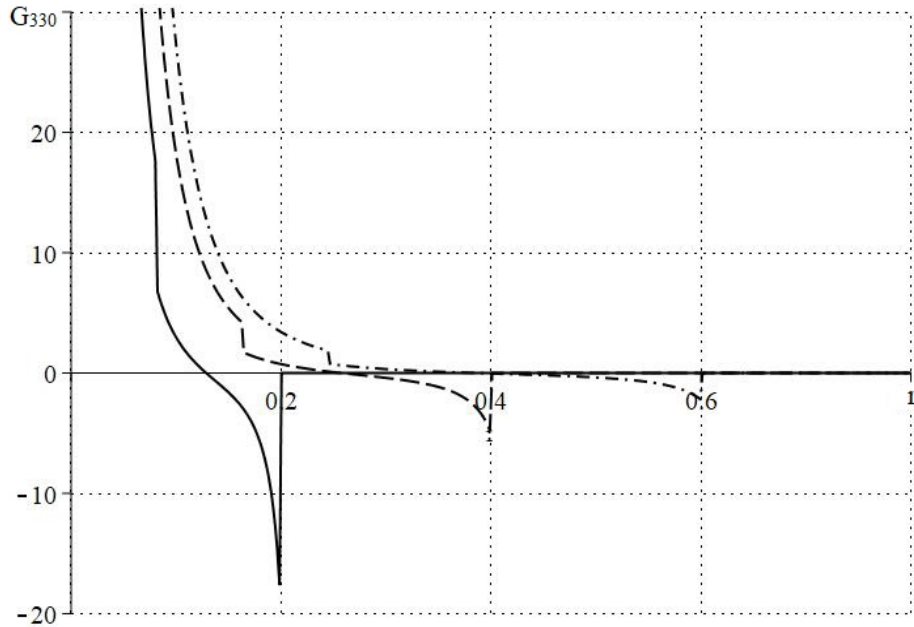


Рис. 2.5.3

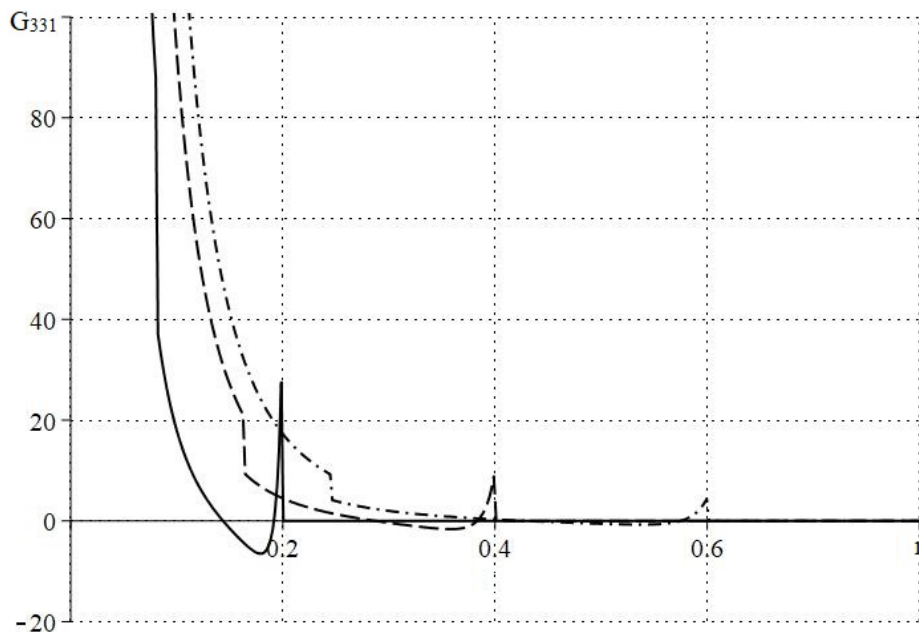


Рис. 2.5.4

Анализ этих результатов показывает, что для осесимметричной задачи с граничными условиями (2.3.1), в основном, остается справедливым вывод относительно влияния учета моментных свойств среды, приведенный в конце параграфа 2.4 для плоского случая.

## 2.6. Функции влияния, соответствующие условиям (1.6.11)

Изображения граничных условий (1.6.11) записываются так [103]:

$$\sigma_{zr}^{HL}\Big|_{z=0} = 0, \quad w^{HL}\Big|_{z=0} = \frac{1}{2\pi}, \quad \omega^{HL}\Big|_{z=0} = 0. \quad (2.6.1)$$

Подстановка в них соотношений (2.1.10) и (2.1.11) приводит к следующей системе линейных алгебраических уравнений относительно постоянных интегрирования:

$$\mathbf{A}_3 \mathbf{C} = \frac{1}{2\pi} \mathbf{b}, \quad (2.6.2)$$

где

$$\mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 2qk_0(q,s) & -k_3^2(q,s) & -k_3^2(q,s) \\ -k_0(q,s) & q & q \\ 0 & T_1(q,s) & T_2(q,s) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_0(q,s) \\ C_1(q,s) \\ C_2(q,s) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решение системы (2.6.2) имеет вид

$$C_0(q,s) = -\frac{k_3^2(q,s)}{2\pi\gamma_1^2 s^2 k_0(q,s)}, \quad C_1(q,s) = \frac{qT_2(q,s)}{\pi\gamma_1^2 s^2 R(q,s)}, \quad C_2 = -\frac{qT_1(q,s)}{\pi\gamma_1^2 s^2 R(q,s)}. \quad (2.6.3)$$

Формула для величины  $R(q,s)$  указана в (2.3.4). С ее помощью находим следующее разложение по малому параметру:

$$\frac{1}{R(q,s)} = -\frac{1}{T_{20}(q,s)} \left[ 1 - \alpha \frac{T_{21}(q,s)}{T_{20}(q,s)} \right]. \quad (2.6.4)$$

Подстановка (2.6.3) в (2.1.15) позволяет найти изображения составляющих функций влияния. Используя теперь (2.6.3), (2.6.4) и обозначения (2.2.1), получаем следующие результаты:

$$G_{u00}^{(3)HL}(q,z,s) = \frac{1}{\pi} \left( \frac{q^2}{\gamma_1^2 s^2} + \frac{1}{2} \right) f_{10}^{H_1L}(q,z,s), \quad G_{u01}^{(3)HL}(q,z,s) = 0, \\ G_{u10}^{(3)HL}(q,z,s) = -\frac{1}{\pi} \left( \frac{q^2}{\gamma_1^2 s^2} + 1 \right) f_{11}^{H_1L}(q,z,s), \quad (2.6.5)$$

$$G_{u11}^{(3)HL}(q,z,s) = \frac{\gamma_1^2}{2\pi} \left[ f_{11}^{H_1L}(q,z,s) - z f_{31}^{H_1L}(q,z,s) \right], \quad G_{u2}^{(3)HL}(q,z,s) = 0;$$

$$G_{w00}^{(3)HL}(q, z, s) = \frac{1}{\pi} \left( \frac{q^2}{\gamma_1^2 s^2} + \frac{1}{2} \right) f_{20}^{H_0L}(q, z, s), G_{w01}^{(3)HL}(q, z, s) = 0,$$

$$G_{w10}^{(3)HL}(q, z, s) = -\frac{1}{\pi \gamma_1^2} \frac{q^2}{s^2} f_{21}^{H_0L}(q, z, s), \quad (2.6.6)$$

$$G_{w11}^{(3)HL}(q, z, s) = -\frac{\gamma_1^2 z}{2\pi} f_{41}^{H_0L}(q, z, s), \quad G_{w2}^{(3)HL}(q, z, s) = 0;$$

$$G_{\omega 0}^{(3)HL}(q, z, s) = 0, \quad G_{\omega 1}^{(3)HL}(q, z, s) = (-1)^{l+1} \frac{2\delta\gamma_2^2}{\pi(\gamma_2^2 - \gamma_1^2)} \frac{f_{31}^{H_1L}(q, z, s)}{s^2}; \quad (2.6.7)$$

$$G_{z\omega 0}^{(3)HL}(q, z, s) = -\frac{2}{\pi \gamma_1^2} \left( \frac{q^2}{\gamma_1^2 s^2} + 1 \right) f_{40}^{H_0L}(q, z, s) - \frac{1}{2\pi} s^2 f_{50}^{H_0L}(q, z, s),$$

$$G_{z\omega 1}^{(3)HL}(q, z, s) = 0, G_{z\omega 10}^{(3)HL}(q, z, s) = \frac{2}{\pi \gamma_1^2} \left( \frac{q^2}{\gamma_1^2 s^2} + 1 \right) f_{41}^{H_0L}(q, z, s), \quad (2.6.8)$$

$$G_{z\omega 11}^{(3)HL}(q, z, s) = -\frac{1}{\pi} \left[ f_{41}^{H_0L}(q, z, s) - zq^2 f_{21}^{H_0L}(q, z, s) \right], G_{z\omega 2}^{(3)HL}(q, z, s) = 0;$$

$$G_{rz00}^{(3)HL}(q, z, s) = -\frac{1}{\pi} \left( \frac{2q^2}{\gamma_1^4 s^2} + \frac{1}{\gamma_1^2} \right) f_{30}^{H_1L}(q, z, s), G_{rz01}^{(3)HL}(q, z, s) = 0,$$

$$G_{rz10}^{(3)HL}(q, z, s) = \frac{1}{\pi} \left( \frac{2q^2}{\gamma_1^4 s^2} + \frac{1}{\gamma_1^2} \right) f_{31}^{H_1L}(q, z, s), \quad G_{rz2}^{(3)HL}(q, z, s) = 0, \quad (2.6.9)$$

$$G_{rz11}^{(3)HL}(q, z, s) = -\frac{1}{2\pi} \left[ 4f_{31}^{H_1L}(q, z, s) - z(2q^2 + \gamma_1^2 s^2) f_{11}^{H_1L}(q, z, s) \right];$$

$$G_{zr00}^{(3)HL}(q, z, s) = -\frac{1}{\pi} \left( \frac{2q^2}{\gamma_1^4 s^2} + \frac{1}{\gamma_1^2} \right) f_{30}^{H_1L}(q, z, s), G_{zr01}^{(3)HL}(q, z, s) = 0,$$

$$G_{zr10}^{(3)HL}(q, z, s) = \frac{1}{\pi} \left( \frac{2q^2}{\gamma_1^4 s^2} + \frac{1}{\gamma_1^2} \right) f_{31}^{H_1L}(q, z, s), \quad (2.6.10)$$

$$G_{zr11}^{(3)HL}(q, z, s) = \frac{z}{2\pi} (2q^2 + \gamma_1^2 s^2) f_{11}^{H_1L}(q, z, s), \quad G_{zr2}^{(3)HL}(q, z, s) = 0;$$

$$G_{r\theta 0}^{(3)HL}(q, z, s) = 0, \quad G_{r\theta 11}^{(3)HL}(q, z, s) = \frac{2\delta\gamma_2^2}{\pi(\gamma_2^2 - \gamma_1^2)} \frac{q^2}{s^2} f_{21}^{H_0L}(q, z, s), \quad (2.6.11)$$

$$G_{r\theta 21}^{(3)HL}(q, z, s) = -\frac{2\delta\gamma_2^2}{\pi(\gamma_2^2 - \gamma_1^2)} \frac{k_{01}(q, s)}{s^2} \frac{q^2 e^{-k_{02}(q, s)z}}{k_{02}(q, s)};$$

$$G_{\theta r 0}^{(3)HL}(q, z, s) = 0, \quad G_{\theta r 11}^{(3)HL}(q, z, s) = \eta G_{r\theta 11}^{(3)HL}(q, z, s); \quad (2.6.12)$$

$$G_{z90}^{(3)HL}(q, z, s) = 0, \quad G_{z911}^{(3)HL}(q, z, s) = -\frac{2\delta\gamma_1^2\gamma_2^2}{\pi(\gamma_2^2 - \gamma_1^2)} \left( \frac{q^2}{\gamma_1^2 s^2} + 1 \right) f_{11}^{H_1L}(q, z, s),$$

$$G_{z921}^{(3)HL}(q, z, s) = \frac{2\delta\gamma_2^2}{\pi(\gamma_2^2 - \gamma_1^2)} \frac{qk_{01}(q, s)}{s^2} e^{-k_{02}(q, s)z};$$

(2.6.13)

$$G_{9z0}^{(3)HL}(q, z, s) = 0, \quad G_{9z11}^{(3)HL}(q, z, s) = \eta G_{z911}^{(3)HL}(q, z, s).$$

(2.6.14)

Здесь

$$f_{1j}^{H_1L}(q, z, s) = \frac{qe^{-z\sqrt{q^2 + \gamma_j^2 s^2}}}{\sqrt{q^2 + \gamma_j^2 s^2}}, \quad f_{2j}^{H_0L}(q, z, s) = e^{-z\sqrt{q^2 + \gamma_j^2 s^2}}, \quad f_{3j}^{H_1L}(q, z, s) = qe^{-z\sqrt{q^2 + \gamma_j^2 s^2}},$$

$$f_{4j}^{H_0L}(q, z, s) = \frac{q^2 e^{-z\sqrt{q^2 + \gamma_j^2 s^2}}}{\sqrt{q^2 + \gamma_j^2 s^2}}, \quad f_{5j}^{H_0L}(q, z, s) = \frac{e^{-z\sqrt{q^2 + \gamma_j^2 s^2}}}{\sqrt{q^2 + \gamma_j^2 s^2}} \quad j = (0, 1, 2).$$

(2.6.15)

Оригиналы функций  $G_{ij}^{(3)}(r, z, \tau)$ ,  $G_{wj}^{(3)}(r, z, \tau)$  и  $G_{\omega j}^{(3)}(r, z, \tau)$  находятся с использованием соотношений (П.1.3) – (П.1.8) и представлены в виде регулярных и сингулярных составляющих (им соответствуют дополнительные индексы « $r$ » и « $s$ »):

$$G_u^{(3)}(r, z, \tau) = G_{ur}^{(3)}(r, z, \tau) + G_{us}^{(3)}(r, z, \tau),$$

$$G_{ur}^{(3)}(r, z, \tau) = \frac{3r\tau(4z^2 - r^2)}{\pi\gamma_1^2 r_3^7} \sum_{j=0}^1 [(-1)^j H(\tau - \gamma_j r_3)],$$

$$G_{us}^{(3)}(r, z, \tau) = \frac{r}{\pi\gamma_1^2 r_3^5} \left\{ \sum_{j=0}^1 [(-1)^j 2\gamma_j^2 (2z^2 - r^2) + \gamma_1^2 r_3^2 d_{1j}] \delta(\tau - \gamma_j r_3) + \right.$$

$$\left. + r_3 \sum_{j=0}^1 \gamma_j [d_{1j} \gamma_1^2 r_3^2 + (-1)^{j+1} \gamma_j^2 r^2] \delta'(\tau - \gamma_j r_3) \right\} +$$

$$+ \alpha \frac{\gamma_1^2 r}{2\pi r_3^5} \left\{ (r_3^2 - 3z^2) [\delta(\tau - \gamma_1 r_3) + \gamma_1 r_3 \delta'(\tau - \gamma_1 r_3)] - \gamma_1^2 z^2 r_3^2 \delta''(\tau - \gamma_1 r_3) \right\},$$

(2.6.16)

$$d_{10} = \frac{1}{2}, \quad d_{11} = -1;$$

$$G_w^{(3)}(r, z, \tau) = G_{wr}^{(3)}(r, z, \tau) + G_{ws}^{(3)}(r, z, \tau),$$

$$G_{wr}^{(3)}(r, z, \tau) = \frac{3\tau z(2z^2 - 3r^2)}{\pi\gamma_1^2 r_3^7} \sum_{j=0}^1 (-1)^j H(\tau - \gamma_j r_3),$$

(2.6.17)

$$\begin{aligned}
G_{\omega s}^{(3)}(r, z, \tau) &= \frac{z}{2\pi\gamma_1^2 r_3^5} \left\{ \left[ 4\gamma_0^2(z^2 - 2r^2) + \gamma_1^2 r_3^2 \right] - 4\gamma_1^2(z^2 - 2r^2) \right\} \delta(\tau - \gamma_1 r_3) + \\
&\quad + \frac{z}{2\pi\gamma_1^2 r_3^4} \left[ \gamma_0(\gamma_1^2 r_3^2 - 2\gamma_0^2 r^2) + 2\gamma_1^3 r^2 \right] \delta'(\tau - \gamma_1 r_3) - \\
&\quad - \alpha \frac{\gamma_1^2 z}{2\pi r_3^5} \left\{ (2z^2 - r^2) \left[ \delta(\tau - \gamma_1 r_3) + \gamma_1 r_3 \delta'(\tau - \gamma_1 r_3) \right] - \gamma_1^2 r_3^2 r^2 \delta''(\tau - \gamma_1 r_3) \right\}; \\
G_{\omega}^{(3)}(r, z, \tau) &= G_{\omega r}^{(3)}(r, z, \tau) + G_{\omega s}^{(3)}(r, z, \tau), \\
G_{\omega r}^{(3)}(r, z, \tau) &= \frac{6\alpha\delta\gamma_2^2 r z \tau}{\pi(\gamma_2^2 - \gamma_1^2) r_3^5} \sum_{l=1}^2 (-1)^{l+1} H(\tau - \gamma_l r_3), \\
G_{\omega s}^{(3)}(r, z, \tau) &= \frac{2\alpha\delta\gamma_2^2 r z}{\pi(\gamma_2^2 - \gamma_1^2) r_3^3} \sum_{l=1}^2 (-1)^{l+1} \gamma_l^2 \delta(\tau - \gamma_l r_3).
\end{aligned} \tag{2.6.18}$$

Оригиналы остальных функций могут быть вычислены по формулам (1.3.7).

На рис. 2.6.1 – 2.6.3 представлены построенные с помощью формулы (2.6.16) – (2.6.18) зависимости регулярных составляющих функций влияния для задачи (1.6.11) от координаты  $z$  при  $r=0,4$  для различных значений моментов времени  $\tau$ : сплошная кривая соответствует  $\tau=0,6$ , пунктирная –  $\tau=0,8$ , а штрихпунктирная –  $\tau=1$ .

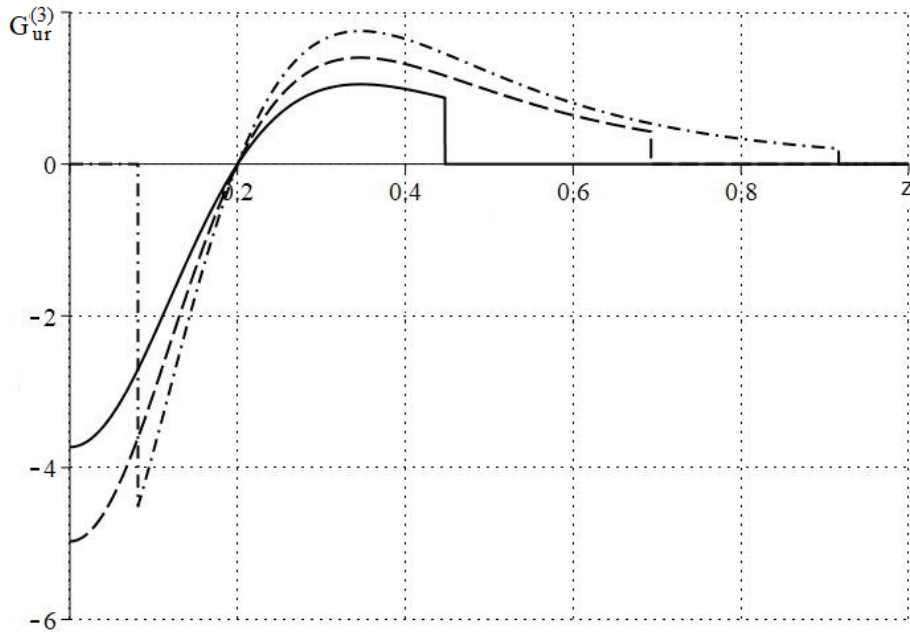


Рис. 2.6.1

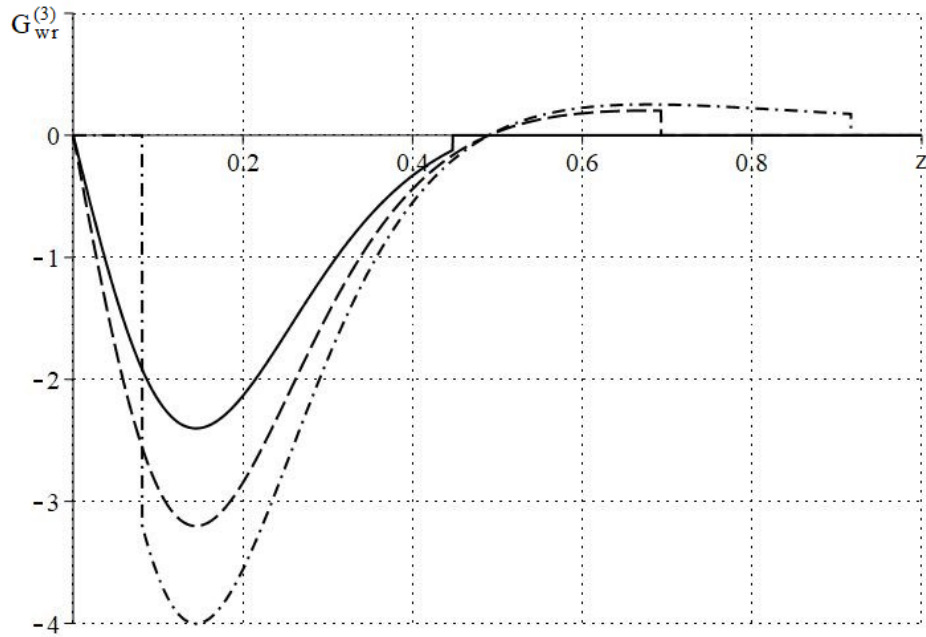


Рис. 2.6.2

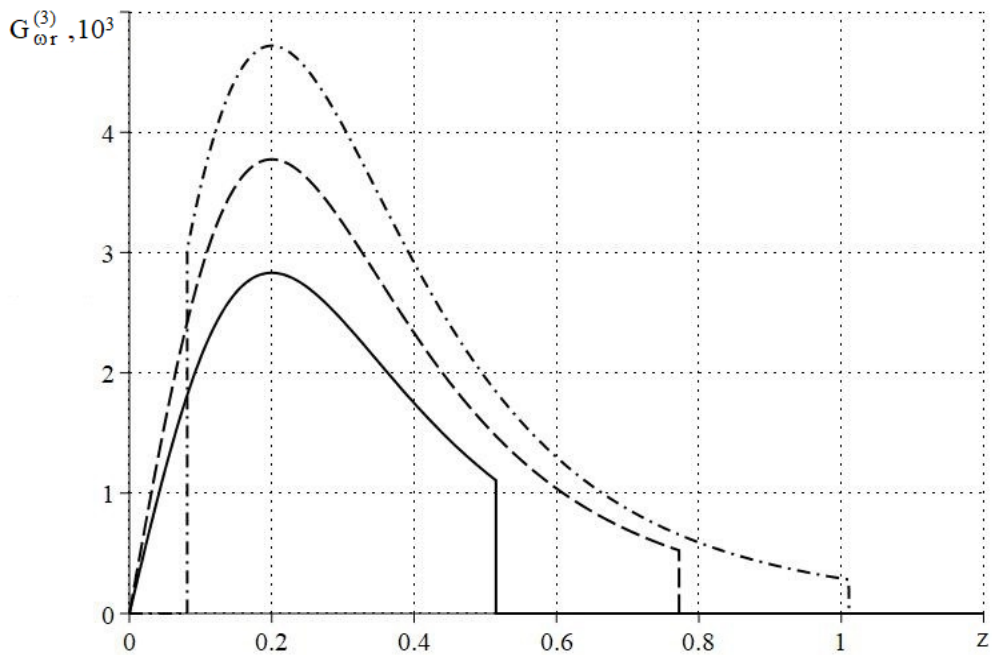


Рис. 2.6.3

Отметим, что, как следует из (2.6.16) – (2.6.18), эти функции для перемещений совпадают с регулярными составляющими упругого решения, а отличие состоит в наличии угла поворота.



## 2.7. Функции влияния, соответствующие условиям (1.6.12)

Изображения граничных условий (1.6.12) записываются так:

$$\sigma_{zr}^{HL}\Big|_{z=0} = 0, \quad w^{HL}\Big|_{z=0} = \frac{1}{2\pi}, \quad \mu_{z9}^{HL}\Big|_{z=0} = 0. \quad (2.7.1)$$

Подстановка в них соотношений (2.1.10) и (2.1.11) приводит к следующей системе линейных алгебраических уравнений относительно постоянных интегрирования:

$$\mathbf{A}_5 \mathbf{C} = \frac{1}{2\pi} \mathbf{b}, \quad (2.7.2)$$

где

$$\mathbf{A}_5 = \begin{pmatrix} 2qk_0(q,s) & -k_3^2(q,s) & -k_3^2(q,s) \\ -k_0(q,s) & q & q \\ 0 & T_1(q,s)k_1(q,s) & T_2(q,s)k_2(q,s) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_0(q,s) \\ C_1(q,s) \\ C_2(q,s) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решение системы (2.7.2) имеет вид

$$C_0(q,s) = -\frac{k_3^2(q,s)K_2(q,s)}{2\pi k_0(q,s)R_5(q,s)}, \quad (2.7.3)$$

$$C_1(q,s) = -\frac{qK_4(q,s)}{\pi R_5(q,s)}, \quad C_2(q,s) = -\frac{qK_3(q,s)}{\pi R_5(q,s)},$$

где

$$R_5(q,s) = \gamma_1^2 s^2 K_2(q,s), \quad K_2(q,s) = K_3(q,s) + K_4(q,s) \quad (2.7.4)$$

$$K_3(q,s) = k_1(q,s)T_1(q,s), \quad K_4(q,s) = -k_2(q,s)T_2(q,s).$$

Подстановка (2.7.3) в (2.1.15) позволяет найти изображения составляющих функций влияния. Для определения их оригиналов с использованием (2.2.1), (2.2.13), (2.2.14) и (2.2.16) строим линейные приближения по параметру  $\alpha$ . Для этого сначала получаем равенства

$$K_2(q,s) = K_{20}(q,s) + \alpha K_{21}(q,s), \quad K_3(q,s) = \alpha^2 K_{32}(q,s),$$

$$K_4(q,s) = K_{40}(q,s) + \alpha K_{41}(q,s), \quad R_5(q,s) = R_{50}(q,s) + \alpha R_{51}(q,s), \quad (2.7.5)$$

$$\frac{1}{R_5(q,s)} = \frac{1}{R_{50}(q,s)} \left[ 1 - \alpha \frac{R_{51}(q,s)}{R_{50}(q,s)} \right],$$

где

$$\begin{aligned}
K_{20}(q, s) &= K_{40}(q, s) = -k_{02}(q, s)T_{20}(q, s), \\
K_{21}(q, s) &= K_{41}(q, s) = -[k_{02}(q, s)T_{21}(q, s) + k_{12}(q, s)T_{20}(q, s)], \\
K_{32}(q, s) &= k_{01}(q, s)T_{12}(q, s), \quad R_{50}(q, s) = \gamma_1^2 s^2 K_{20}(q, s), \\
R_{51}(q, s) &= \gamma_1^2 s^2 K_{21}(q, s).
\end{aligned} \tag{2.7.6}$$

Используя теперь (2.7.3), (2.7.5) и обозначения (2.2.1), получаем следующие результаты:

$$\begin{aligned}
G_{u0}^{(5)HL}(q, z, s) &= G_{u0}^{(3)HL}(q, z, s), \quad G_{u10}^{(5)HL}(q, z, s) = G_{u10}^{(3)HL}(q, z, s), \\
G_{u11}^{(5)HL}(q, z, s) &= G_{u11}^{(3)HL}(q, z, s), \quad G_{u2}^{(5)HL}(q, z, s) = 0;
\end{aligned} \tag{2.7.7}$$

$$\begin{aligned}
G_{w0}^{(5)HL}(q, z, s) &= G_{w0}^{(3)HL}(q, z, s), \quad G_{w10}^{(5)HL}(q, z, s) = G_{w10}^{(3)HL}(q, z, s), \\
G_{w11}^{(5)HL}(q, z, s) &= G_{w11}^{(3)HL}(q, z, s), \quad G_{w2}^{(5)HL}(q, z, s) = 0;
\end{aligned} \tag{2.7.8}$$

$$\begin{aligned}
G_{\omega 0}^{(5)HL}(q, z, s) &= 0, \quad G_{\omega 10}^{(5)HL}(q, z, s) = G_{\omega 20}^{(5)HL}(q, z, s) = 0, \\
G_{\omega 11}^{(5)HL}(q, z, s) &= G_{\omega 11}^{(3)HL}(q, z, s),
\end{aligned} \tag{2.7.9}$$

$$G_{\omega 21}^{(5)HL}(q, z, s) = -\frac{4\delta\gamma_2^2}{2\pi(\gamma_2^2 - \gamma_1^2)} \frac{k_{01}(q, s)}{s^2} \frac{q e^{-k_{02}(q, s)z}}{k_{02}(q, s)};$$

$$\begin{aligned}
G_{zz0}^{(5)HL}(q, z, s) &= G_{zz0}^{(3)HL}(q, z, s), \quad G_{zz10}^{(5)HL}(q, z, s) = G_{zz10}^{(3)HL}(q, z, s), \\
G_{zz11}^{(5)HL}(q, z, s) &= G_{zz11}^{(3)HL}(q, z, s), \quad G_{zz2}^{(5)HL}(q, z, s) = 0;
\end{aligned} \tag{2.7.10}$$

$$\begin{aligned}
G_{rz0}^{(5)HL}(q, z, s) &= G_{rz0}^{(3)HL}(q, z, s), \quad G_{rz10}^{(5)HL}(q, z, s) = G_{rz10}^{(3)HL}(q, z, s), \\
G_{rz11}^{(5)HL}(q, z, s) &= G_{rz10}^{(3)HL}(q, z, s), \quad G_{rz2}^{(5)HL}(q, z, s) = 0;
\end{aligned} \tag{2.7.11}$$

$$\begin{aligned}
G_{zr0}^{(5)HL}(q, z, s) &= G_{zr0}^{(3)HL}(q, z, s), \quad G_{zr10}^{(5)HL}(q, z, s) = G_{zr10}^{(3)HL}(q, z, s), \\
G_{zr11}^{(5)HL}(q, z, s) &= G_{zr11}^{(3)HL}(q, z, s), \quad G_{zr2}^{(5)HL}(q, z, s) = 0;
\end{aligned} \tag{2.7.12}$$

$$\begin{aligned}
G_{r90}^{(5)HL}(q, z, s) &= 0, \quad G_{r911}^{(5)HL}(q, z, s) = G_{r911}^{(3)HL}(q, z, s), \\
G_{r921}^{(5)HL}(q, z, s) &= -\frac{2\delta\gamma_2^2}{\pi(\gamma_2^2 - \gamma_1^2)} \frac{q^2}{s^2} f_{22}^{H_0L}(q, z, s);
\end{aligned} \tag{2.7.13}$$

$$G_{9r0}^{(5)HL}(q, z, s) = 0, \quad G_{9r11}^{(5)HL}(q, z, s) = \eta G_{r911}^{(5)HL}(q, z, s); \tag{2.7.14}$$

$$G_{z90}^{(5)HL}(q, z, s) = 0, \quad G_{z911}^{(5)HL}(q, z, s) = G_{z911}^{(3)HL}(q, z, s),$$

$$G_{z921}^{(5)HL}(q, z, s) = \frac{2\delta\gamma_1^2\gamma_2^2}{\pi(\gamma_2^2 - \gamma_1^2)} \left( \frac{q^2}{\gamma_1^2 s^2} + 1 \right) f_{12}^{HL}(q, z, s); \quad (2.7.15)$$

$$G_{9z0}^{(5)HL}(q, z, s) = 0, \quad G_{9z11}^{(5)HL}(q, z, s) = \eta G_{z911}^{(5)HL}(q, z, s). \quad (2.7.16)$$

Оригиналы этих функций влияния могут быть найдены аналогично параграфу 2.6.

## 2.8. Функции влияния, соответствующие условиям (1.6.13)

Изображения граничных условий (1.6.13) записываются так:

$$u^{HL}|_{z=0} = 0, \quad w^{HL}|_{z=0} = \frac{1}{2\pi}, \quad \mu_{z9}^{HL}|_{z=0} = 0. \quad (2.8.1)$$

Подстановка в них соотношений (2.1.10) и (2.1.11) приводит к следующей системе линейных алгебраических уравнений относительно постоянных интегрирования:

$$\mathbf{A}_7 \mathbf{C} = \frac{1}{2\pi} \mathbf{b}, \quad (2.8.2)$$

где

$$\mathbf{A}_7 = \begin{pmatrix} -q & k_1(q, s) & k_2(q, s) \\ -k_0(q, s) & q & q \\ 0 & k_1(q, s)T_1(q, s) & k_2(q, s)T_2(q, s) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_0(q, s) \\ C_1(q, s) \\ C_2(q, s) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решение системы (2.8.2) имеет вид

$$C_0(q, s) = -\frac{K_5(q, s)}{2\pi R_7(q, s)}, \quad C_1(q, s) = \frac{qK_4(q, s)}{2\pi R_7(q, s)}, \quad C_2(q, s) = \frac{qK_3(q, s)}{2\pi R_7(q, s)}, \quad (2.8.3)$$

где

$$R_7(q, s) = q^2 K_2(q, s) + k_0(q, s) K_5(q, s),$$

$$K_5(q, s) = -k_1(q, s) k_2(q, s) R(q, s), \quad (2.8.4)$$

Формулы для величин  $R(q, s)$ ,  $K_2(q, s)$ ,  $K_3(q, s)$  и  $K_4(q, s)$  указаны в (2.3.4) и (2.7.4).

Подстановка (2.8.3) в (2.1.15) позволяет найти изображения составляющих функций влияния. Для определения их оригиналов с использованием (2.2.1), (2.2.13), (2.2.14) и (2.2.16) строим линейные приближения по параметру  $\alpha$ . Для этого сначала получаем равенства

$$K_5(q, s) = K_{50}(q, s) + \alpha K_{51}(q, s), \quad R_7(q, s) = R_{70}(q, s) + \alpha R_{71}(q, s),$$

$$\frac{1}{R_7(q, s)} = \frac{1}{R_{70}(q, s)} \left[ 1 - \alpha \frac{R_{71}(q, s)}{R_{70}(q, s)} \right], \quad (2.8.5)$$

где

$$K_{50}(q, s) = k_{01}(q, s)k_{02}(q, s)T_{20}(q, s),$$

$$K_{51}(q, s) = k_{01}(q, s)k_{02}(q, s)T_{21}(q, s) + [k_{01}(q, s)k_{12} + k_{02}(q, s)k_{11}]T_{20}(q, s), \quad (2.8.6)$$

$$R_{70}(q, s) = -R_I(q, s)k_{02}(q, s)T_{20}(q, s),$$

$$R_{71}(q, s) = R_I(q, s)K_{21}(q, s) + k_0(q, s)k_{02}(q, s)k_{11}T_{20}(q, s).$$

Используя теперь (2.8.3), (2.8.5) и обозначения (2.2.1), получаем следующие результаты:

$$G_{u00}^{(7)HL}(q, z, s) = G_{u00}^{(1)HL}(q, z, s), \quad G_{u01}^{(7)HL}(q, z, s) = G_{u01}^{(1)HL}(q, z, s),$$

$$G_{u10}^{(7)HL}(q, z, s) = G_{u10}^{(1)HL}(q, z, s), \quad G_{u2}^{(7)HL}(q, z, s) = 0, \quad (2.8.7)$$

$$G_{u11}^{(7)HL}(q, z, s) = G_{u11}^{(1)HL}(q, z, s);$$

$$G_{w00}^{(7)HL}(q, z, s) = G_{w00}^{(1)HL}(q, z, s), \quad G_{w01}^{(7)HL}(q, z, s) = G_{w01}^{(1)HL}(q, z, s),$$

$$G_{w10}^{(7)HL}(q, z, s) = G_{w10}^{(1)HL}(q, z, s), \quad G_{w2}^{(7)HL}(q, z, s) = 0, \quad (2.8.8)$$

$$G_{w11}^{(7)HL}(q, z, s) = G_{w11}^{(1)HL}(q, z, s);$$

$$G_{\omega l0}^{(7)HL}(q, z, s) = 0, \quad G_{\omega 11}^{(7)HL}(q, z, s) = G_{\omega 11}^{(1)HL}(q, z, s),$$

$$G_{\omega 21}^{(7)HL}(q, z, s) = -\frac{qT_{12}(q, s)k_{01}(q, s)}{4\pi R_I(q, s)k_{02}(q, s)} e^{-k_{02}(q, s)z}, \quad (2.8.9)$$

$$G_{zz00}^{(7)HL}(q, z, s) = G_{zz00}^{(1)HL}(q, z, s), \quad G_{zz01}^{(7)HL}(q, z, s) = G_{zz01}^{(1)HL}(q, z, s),$$

$$G_{zz10}^{(7)HL}(q, z, s) = G_{zz10}^{(1)HL}(q, z, s), \quad G_{zz2}^{(7)HL}(q, z, s) = 0, \quad (2.8.10)$$

$$G_{zz11}^{(7)HL}(q, z, s) = G_{zz11}^{(1)HL}(q, z, s);$$

$$\begin{aligned}
G_{rz00}^{(7)HL}(q, z, s) &= G_{rz00}^{(1)HL}(q, z, s), & G_{rz01}^{(7)HL}(q, z, s) &= G_{rz01}^{(1)HL}(q, z, s), \\
G_{rz10}^{(7)HL}(q, z, s) &= G_{rz10}^{(1)HL}(q, z, s), & G_{rz2}^{(7)HL}(q, z, s) &= 0, \\
G_{rz11}^{(7)HL}(q, z, s) &= G_{rz11}^{(1)HL}(q, z, s);
\end{aligned} \tag{2.8.11}$$

$$\begin{aligned}
G_{zr00}^{(7)HL}(q, z, s) &= G_{zr00}^{(7)HL}(q, z, s), & G_{zr01}^{(7)HL}(q, z, s) &= G_{zr01}^{(7)HL}(q, z, s), \\
G_{zr10}^{(7)HL}(q, z, s) &= G_{zr10}^{(1)HL}(q, z, s), & G_{zr2}^{(7)HL}(q, z, s) &= 0, \\
G_{zr11}^{(7)HL}(q, z, s) &= G_{zr11}^{(1)HL}(q, z, s);
\end{aligned} \tag{2.8.12}$$

$$\begin{aligned}
G_{r90}^{(7)HL}(q, z, s) &= 0, & G_{r911}^{(7)HL}(q, z, s) &= G_{r911}^{(1)HL}(q, z, s), \\
G_{r921}^{(7)HL}(q, z, s) &= -\frac{q^2 T_{12}(q, s) k_{01}(q, s)}{4\pi R_I(q, s) k_{02}(q, s)} e^{-k_{02}(q, s)z};
\end{aligned} \tag{2.8.13}$$

$$G_{9r0}^{(7)HL}(q, z, s) = 0, \quad G_{9r11}^{(7)HL}(q, z, s) = \eta G_{r911}^{(7)HL}(q, z, s); \tag{2.8.14}$$

$$\begin{aligned}
G_{z90}^{(7)HL}(q, z, s) &= 0, & G_{z911}^{(7)HL}(q, z, s) &= G_{z911}^{(1)HL}(q, z, s), \\
G_{z921}^{(7)HL}(q, z, s) &= \frac{q T_{12}(q, s) k_{01}(q, s)}{4\pi R_I(q, s)} e^{-k_{02}(q, s)z};
\end{aligned} \tag{2.8.15}$$

$$G_{9z0}^{(7)HL}(q, z, s) = 0, \quad G_{9z11}^{(7)HL}(q, z, s) = \eta G_{z911}^{(7)HL}(q, z, s). \tag{2.8.16}$$

Оригиналы этих функций влияния могут быть найдены аналогично параграфу 2.5.

## 2.9. Примеры действия нестационарной поверхностной нагрузки

В качестве первого примера рассмотрим действие на границе полупространства сосредоточенного в начале координат возмущения вида  $w_0(r, \tau) = \tau_+^2 \delta(x, y)/2$  [106]. Учитывая, что при этом  $\ddot{w}_0(r, \tau) = H(\tau) \delta(x, y)$  из формулы (2.3.19) получаем

$$\sigma_{zz}(r, 0, \tau) = \sigma_{zz0}(r, 0, \tau) + \alpha \sigma_{zz1}(r, 0, \tau), \tag{2.9.1}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
\sigma_{zz0}(r, 0, \tau) &= H(\tau) * G_{330}(r, \tau) = \int_0^{\tau} H(\tau - t) G_{330}(r, t) dt = \\
&= \frac{1}{4\pi(1 + \gamma_1^2)} \left\{ \frac{1}{r^3} \sum_{j=0}^1 (\tau^2 - \gamma_j^2 r^2)_+ - \right. \\
&\quad \left. - 2\gamma_1 v_1^3 \sum_{j=0}^1 (-1)^j \left[ \frac{1}{r\sqrt{\gamma_j^2 - v_1^2}} - \frac{1}{\sqrt{\tau^2 - v_1^2 r^2}} \right] H(\tau - \gamma_j r) \right\};
\end{aligned} \tag{2.9.2}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{zz1}(r, 0, \tau) &= H(\tau) * G_{331}(r, \tau) = \int_0^{\tau} H(\tau - t) G_{331}(r, t) dt = \\
&= \frac{\gamma_1^4}{4\pi(1 + \gamma_1^2)^2} \left\{ \frac{1}{r^3} \sum_{j=0}^1 (\tau^2 - \gamma_j^2 r^2)_+ - \right. \\
&\quad \left. - 2v_1^5 \sum_{j=0}^1 \left[ \frac{a_{1j}}{\sqrt{\tau^2 - v_1^2 r^2}} + \frac{(b_{1j} + a_{1j} v_1^2) r^2}{3(\tau^2 - v_1^2 r^2)^{3/2}} - \frac{b_{1j} + 3a_{1j} \gamma_j^2 - 2a_{1j} v_1^2}{3r(\gamma_j^2 - v_1^2)^{3/2}} \right] H(\tau - \gamma_j r) \right\}.
\end{aligned} \tag{2.9.3}$$

При проведении расчетов далее полагалось, что материал полупространства имеет указанные в параграфе 2.5 характеристики. На рис. 2.9.1 и 2.9.2 представлены построенные с помощью формулы (2.9.2) и (2.9.3) зависимости нормальных напряжений  $\sigma_{zz0}(r, \tau)$  и  $\sigma_{zz1}(r, \tau)$  от времени  $\tau$  при различных значениях радиусов  $r = 0,1$ , пунктирная –  $r = 0,15$ , а штрихпунктирная –  $r = 0,2$ .

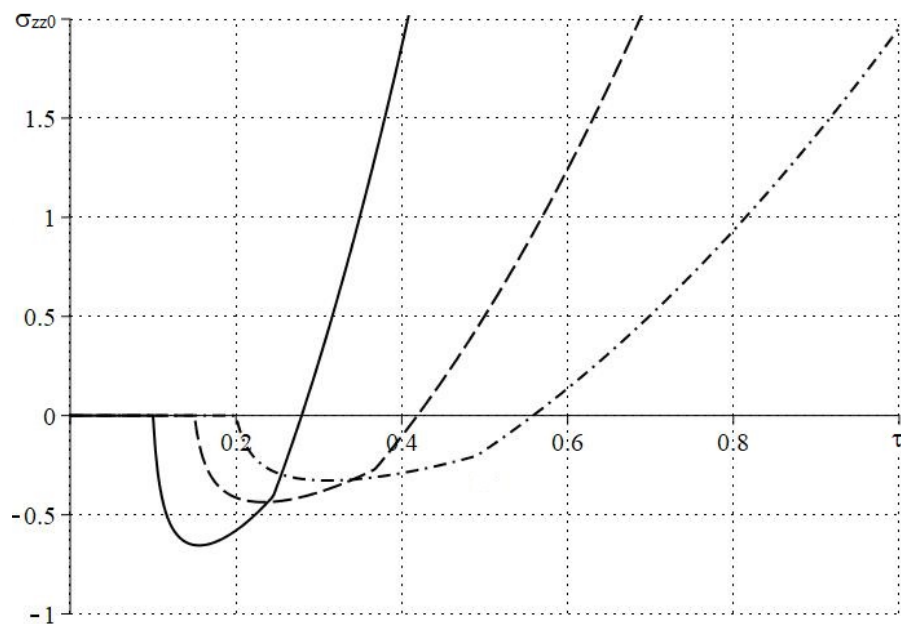


Рис. 2.9.1

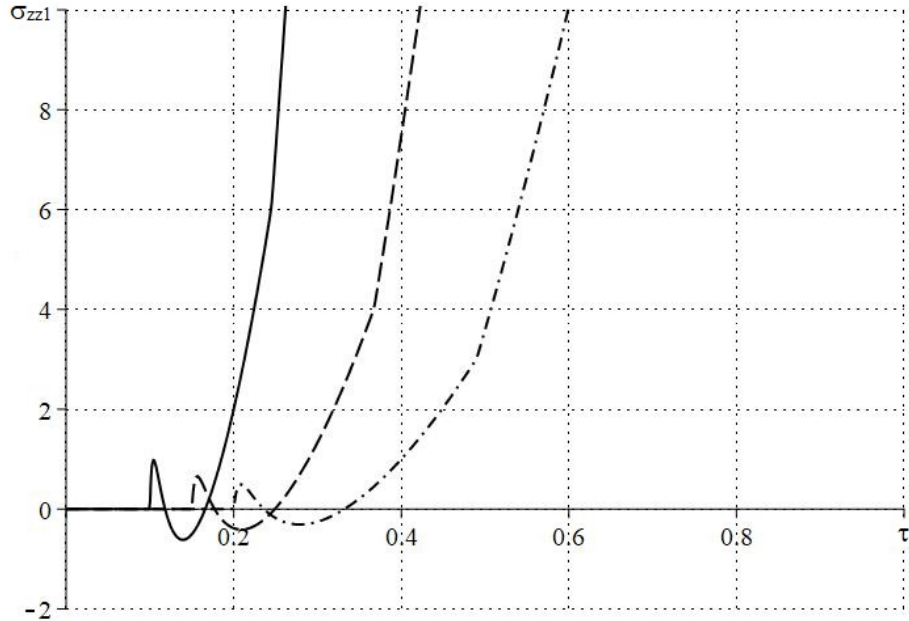


Рис. 2.9.2

Второй вариант возмущения – распределенное по радиусу  $r$  перемещение вида  $w_0(r, \tau) = \tau_+ f_0(r) H(a - r)$ , где  $f_0(r) = (a^2 - r^2)^2$ ,  $a > 0$ . Учитывая, что в этом случае  $\ddot{w}_0(r, \tau) = f(r) \delta(\tau)$ ,  $f(r) = H(a - r) f_0(r)$ , опять приходим к равенству (2.9.1), входящие в которое функции с использованием формулы для вычисления свертки зависящих от радиуса функций определяются так [36]:

$$\sigma_{zzm}(r, 0, \tau) = f(r) ** G_{33m}(r, \tau) = 2 \int_0^{\infty} \rho G_{33m}(\rho, \tau) J(r, \rho) d\rho \quad (m = 0, 1), \quad (2.9.4)$$

где

$$J(r, \rho) = \int_{-1}^1 \frac{f[R(r, \rho, z)]}{\sqrt{1 - z^2}} dz = \int_{-1}^1 \frac{f_0[R(r, \rho, z)]}{\sqrt{1 - z^2}} H[a - R(r, \rho, z)] dz, \quad (2.9.5)$$

$$R(r, \rho, z) = \sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho z},$$

$$f_0[R(r, \rho, z)] = [a^2 - R^2(r, \rho, z)]^2 = 4r^2 \rho^2 [z - b(r, \rho)]^2,$$

$$b(r, \rho) = \frac{r^2 + \rho^2 - a^2}{2r\rho} = \frac{(r + \rho)^2 - a^2}{2r\rho} - 1 = \frac{(r - \rho)^2 - a^2}{2r\rho} + 1.$$

Анализ носителя подынтегральной функции в (2.9.5) показывает, что имеет место равенство

$$J(r, \rho) = H(a-r) \left[ H(a-r-\rho) J_1(r, \rho) + H(r-|\rho-a|) J_2(r, \rho) \right] + \\ + H(r-a) H(a-|\rho-r|) J_2(r, \rho),$$

где

$$J_1(r, \rho) = I(r, \rho; -1), \quad J_2(r, \rho) = I[r, \rho; b(r, \rho)], \quad I(r, \rho; z) = \int_z^1 \frac{f_0[R(r, \rho, z)]}{\sqrt{1-z^2}} dz.$$

Вычисляя интеграл  $I(r, \rho; z)$  [38, 93]:

$$I(r, \rho; z) = 2r^2 \rho^2 \left\{ [1 + 2b^2(r, \rho)] \arccos z - [4b(r, \rho) - z] \sqrt{1-z^2} \right\},$$

получаем

$$J_2(r, \rho) = B(r, \rho) \arccos b(r, \rho) - \frac{3}{2} B_0(r, \rho) \sqrt{B_-(r, \rho) B_+(r, \rho)},$$

$$J_1(r, \rho) = \pi B(r, \rho), \quad B_{\pm}(r, \rho) = \pm [\rho^2 - (r \mp a)^2],$$

$$B(r, \rho) = \left[ (r^2 + \rho^2 - a^2)^2 + 2r^2 \rho^2 \right], \quad B_0(r, \rho) = r^2 + \rho^2 - a^2.$$

Окончательно приходим к такой формуле для напряжений

$$\frac{1}{2} \sigma_{zzm}(r, 0, \tau) = H(r-a) \int_{r-a}^{a+r} \rho G_{33m}(\rho, \tau) J_2(r, \rho) d\rho + \\ + H(a-r) \left[ \int_0^{a-r} \rho G_{33m}(\rho, \tau) J_1(r, \rho) d\rho + \int_{a-r}^{a+r} \rho G_{33m}(\rho, \tau) J_2(r, \rho) d\rho \right]. \quad (2.9.6)$$

Здесь функции  $G_{33m}(\rho, \tau)$  определены формулами (2.5.3). Входящие сюда интегралы находятся численно в среде Maple.

Результаты расчетов зависимости функций  $\sigma_{zz0}(r, \tau)$  и  $\sigma_{zz1}(r, \tau)$  от радиуса  $r$  при  $a = 0,5$  для различных значений времени  $\tau$  (сплошная кривая соответствует  $\tau = 0,2$ , пунктирная –  $\tau = 0,4$ , а штрихпунктирная –  $\tau = 0,6$ ) представлены на рис. 2.9.3 и 2.9.4.



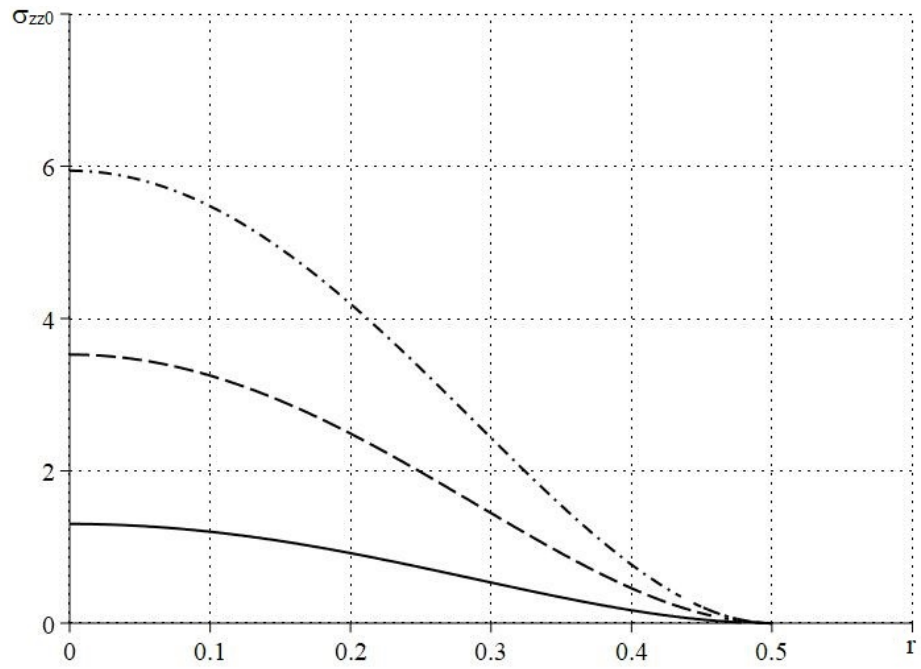


Рис. 2.9.3

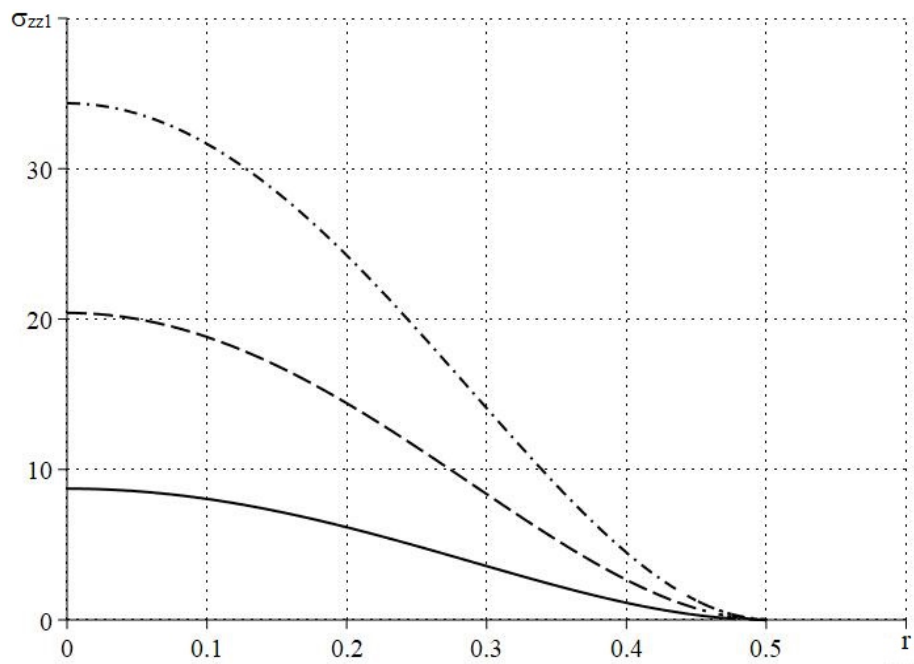


Рис. 2.9.4

Результаты этих двух примеров показывают, что в рассмотренных вариантах возмущений относительный вклад учета моментных характеристик приблизительно эквивалентен  $5\alpha$ .

### ГЛАВА 3. ДЕЙСТВИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО НЕСТАЦИОНАРНОГО НОРМАЛЬНОГО ДАВЛЕНИЯ НА ПОЛУПРОСТРАНСТВО

#### 3.1. Функции влияния, соответствующие условиям (1.6.15)

Изображения граничных условий (1.6.15) записываются так [104]:

$$\sigma_{zr}^{HL} \Big|_{z=0} = 0, \quad \sigma_{zz}^{HL} \Big|_{z=0} = \frac{1}{2\pi}, \quad \mu_{z\theta}^{HL} \Big|_{z=0} = 0. \quad (3.1.1)$$

Подстановка в них соотношений (2.1.11) приводит к следующей системе линейных алгебраических уравнений относительно постоянных интегрирования:

$$\mathbf{A}_2 \mathbf{C} = \frac{\gamma_1^2}{2\pi} \mathbf{b}, \quad (3.1.2)$$

где

$$\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 2qk_0(q,s) & -k_3^2(q,s) & -k_3^2(q,s) \\ k_3^2(q,s) & -2qk_1(q,s) & -2qk_2(q,s) \\ 0 & T_1(q,s)k_1(q,s) & T_2(q,s)k_2(q,s) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_0(q,s) \\ C_1(q,s) \\ C_2(q,s) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решение системы (3.1.2) имеет вид

$$C_0(q,s) = -\frac{\gamma_1^2 k_3^2(q,s) K_2(q,s)}{2\pi R_2(q,s)}, \quad C_1(q,s) = -\frac{\gamma_1^2 q k_0(q,s) K_4(q,s)}{\pi R_2(q,s)}, \quad (3.1.3)$$

$$C_2(q,s) = -\frac{\gamma_1^2 q k_0(q,s) K_3(q,s)}{\pi R_2(q,s)},$$

где

$$R_2(q,s) = -4q^2 k_0(q,s) K_5(q,s) - k_3^4(q,s) K_2(q,s). \quad (3.1.4)$$

Формулы для величин  $K_2(q,s)$ ,  $K_3(q,s)$ ,  $K_4(q,s)$  и  $K_5(q,s)$  указаны в (2.7.4) и (2.8.4).

Подстановка (3.1.3) в (2.1.15) позволяет найти изображения составляющих функций влияния.

Для определения их оригиналов с использованием (2.2.1), (2.2.13), (2.2.14) и (2.2.16) строим линейные приближения по параметру  $\alpha$ . Для этого сначала получаем равенства

$$R_2(q, s) = R_{20}(q, s) + \alpha R_{21}(q, s),$$

$$\frac{1}{R_2(q, s)} = \frac{1}{R_{20}(q, s)} \left[ 1 - \alpha \frac{R_{21}(q, s)}{R_{20}(q, s)} \right], \quad (3.1.5)$$

где

$$R_{20}(q, s) = R_{II}(q, s)k_{02}(q, s)T_{20}(q, s),$$

$$R_{II}(q, s) = k_3^4(q, s) - 4q^2k_0(q, s)k_{01}(q, s), \quad (3.1.6)$$

$$R_{21}(q, s) = -\left[ 4q^2k_0(q, s)K_{51}(q, s) + k_3^4(q, s)K_{21}(q, s) \right].$$

Используя теперь (3.1.3), (3.1.5) и обозначения (2.2.1), получаем следующие результаты:

$$G_{u00}^{(2)HL}(q, z, s) = -\frac{\gamma_1^2 q k_3^2(q, s)}{2\pi R_{II}(q, s)} e^{-k_0(q, s)z},$$

$$G_{u01}^{(2)HL}(q, z, s) = \frac{\gamma_1^6 s^2 q^3 k_0(q, s) k_3^2(q, s)}{\pi k_{01}(q, s) R_{II}^2(q, s)} e^{-k_0(q, s)z}, \quad (3.1.7)$$

$$G_{u10}^{(2)HL}(q, z, s) = \frac{\gamma_1^2 q k_0(q, s) k_{01}(q, s)}{\pi R_{II}(q, s)} e^{-k_{01}(q, s)z}, \quad G_{u2}^{(2)HL}(q, z, s) = 0,$$

$$G_{u11}^{(2)HL}(q, z, s) = -\frac{\gamma_1^6 s^2 q k_0(q, s)}{2\pi R_{II}(q, s)} \left[ \frac{k_3^4(q, s)}{k_{01}(q, s) R_{II}(q, s)} - z \right] e^{-k_{01}(q, s)z};$$

$$G_{w00}^{(2)HL}(q, z, s) = -\frac{\gamma_1^2 k_0(q, s) k_3^2(q, s)}{2\pi R_{II}(q, s)} e^{-k_0(q, s)z},$$

$$G_{w01}^{(2)HL}(q, z, s) = \frac{\gamma_1^6 s^2 q^2 k_0^2(q, s) k_3^2(q, s)}{\pi k_{01}(q, s) R_{II}^2(q, s)} e^{-k_0(q, s)z}, \quad (3.1.8)$$

$$G_{w10}^{(2)HL}(q, z, s) = \frac{\gamma_1^2 q^2 k_0(q, s)}{\pi R_{II}(q, s)} e^{-k_{01}(q, s)z}, \quad G_{w2}^{(2)HL}(q, z, s) = 0,$$

$$G_{w11}^{(2)HL}(q, z, s) = -\frac{\gamma_1^6 s^2 q^2 k_0(q, s)}{2\pi k_{01}(q, s) R_{II}(q, s)} \left[ \frac{4q^2 k_0(q, s)}{R_{II}(q, s)} - z \right] e^{-k_{01}(q, s)z};$$

$$G_{\omega11}^{(2)HL}(q, z, s) = \frac{\gamma_1^2 T_{12}(q, s) q k_0(q, s)}{2\pi R_{II}(q, s)} e^{-k_{01}(q, s)z}, \quad (3.1.9)$$

$$G_{\omega21}^{(2)HL}(q, z, s) = -\frac{\gamma_1^2 T_{12}(q, s) q k_0(q, s) k_{01}(q, s) e^{-k_{02}(q, s)z}}{2\pi R_{II}(q, s) k_{02}(q, s)};$$

$$\begin{aligned}
G_{zz00}^{(2)HL}(q, z, s) &= \frac{k_3^4(q, s)}{2\pi R_{II}(q, s)} e^{-k_0(q, s)z}, \\
G_{zz01}^{(2)HL}(q, z, s) &= -\frac{\gamma_1^4 s^2 q^2 k_0(q, s) k_3^4(q, s)}{\pi k_{01}(q, s) R_{II}^2(q, s)} e^{-k_0(q, s)z}, \\
G_{zz10}^{(2)HL}(q, z, s) &= -\frac{2q^2 k_0(q, s) k_{01}(q, s)}{\pi R_{II}(q, s)} e^{-k_{01}(q, s)z}, \quad G_{zz2}^{(2)HL}(q, z, s) = 0,
\end{aligned} \tag{3.1.10}$$

$$\begin{aligned}
G_{zz11}^{(2)HL}(q, z, s) &= \frac{\gamma_1^4 s^2 q^2 k_0(q, s)}{\pi R_{II}(q, s)} \left[ \frac{k_3^4(q, s)}{k_{01}(q, s) R_{II}(q, s)} - z \right] e^{-k_{01}(q, s)z}; \\
G_{rz00}^{(2)HL}(q, z, s) &= \frac{q k_0(q, s) k_3^2(q, s)}{\pi R_{II}(q, s)} e^{-k_0(q, s)z}, \\
G_{rz01}^{(2)HL}(q, z, s) &= -\frac{2\gamma_1^4 s^2 q^3 k_0^2(q, s) k_3^2(q, s)}{\pi k_{01}(q, s) R_{II}^2(q, s)} e^{-k_0(q, s)z}, \\
G_{rz10}^{(2)HL}(q, z, s) &= -\frac{q k_0(q, s) k_3^2(q, s)}{\pi R_{II}(q, s)} e^{-k_{01}(q, s)z},
\end{aligned} \tag{3.1.11}$$

$$\begin{aligned}
G_{rz11}^{(2)HL}(q, z, s) &= \frac{\gamma_1^4 s^2 q k_0(q, s)}{2\pi k_{01}(q, s) R_{II}(q, s)} \times \\
&\times \left[ \frac{4q^2 k_0(q, s) k_3^2(q, s)}{R_{II}(q, s)} + 4k_{01}(q, s) - k_3^2(q, s)z \right] e^{-k_{01}(q, s)z};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{zr00}^{(2)HL}(q, z, s) &= G_{rz00}^{(2)HL}(q, z, s), \quad G_{zr01}^{(2)HL}(q, z, s) = G_{rz01}^{(2)HL}(q, z, s), \\
G_{zr10}^{(2)HL}(q, z, s) &= -\frac{q k_0(q, s) k_3^2(q, s)}{\pi R_{II}(q, s)} e^{-k_{01}(q, s)z}, \quad G_{zr2}^{(2)HL}(q, z, s) = 0,
\end{aligned} \tag{3.1.12}$$

$$\begin{aligned}
G_{zr11}^{(2)HL}(q, z, s) &= \frac{\gamma_1^4 s^2 q k_0(q, s) k_3^2(q, s)}{2\pi k_{01}(q, s) R_{II}(q, s)} \left[ \frac{4q^2 k_0(q, s)}{R_{II}(q, s)} - z \right] e^{-k_{01}(q, s)z}; \\
G_{r90}^{(2)HL}(q, z, s) &= 0, \quad G_{r911}^{(2)HL}(q, z, s) = \frac{\gamma_1^2 T_{12}(q, s) q^2 k_0(q, s)}{2\pi R_{II}(q, s)} e^{-k_{01}(q, s)z},
\end{aligned} \tag{3.1.13}$$

$$G_{r921}^{(2)HL}(q, z, s) = -\frac{\gamma_1^2 T_{12}(q, s) q^2 k_0(q, s) k_{01}(q, s)}{2\pi R_{II}(q, s) k_{02}(q, s)} e^{-k_{02}(q, s)z};$$

$$G_{9r0}^{(2)HL}(q, z, s) = 0, \quad G_{9r11}^{(2)HL}(q, z, s) = \eta G_{r911}^{(2)HL}(q, z, s); \tag{3.1.14}$$

$$G_{z90}^{(2)HL}(q, z, s) = 0, \quad (3.1.15)$$

$$G_{z9l1}^{(2)HL}(q, z, s) = (-1)^l \frac{\gamma_1^2 q T_{12}(q, s) k_0(q, s) k_{01}(q, s)}{2\pi R_{II}(q, s)} e^{-k_{0l}(q, s)z};$$

$$G_{9z0}^{(2)HL}(q, z, s) = 0, \quad G_{9z1l}^{(2)HL}(q, z, s) = \eta G_{z9l1}^{(2)HL}(q, z, s). \quad (3.1.16)$$

Далее ограничиваемся значениями функций влияния на поверхности полупространства. При этом, поскольку алгоритмы построения этих функций аналогичны, то рассмотрим только нормальное перемещение. Вводя обозначения

$$G_{0w}^{(2)HL}(q, s) = G_w^{(2)HL}(q, 0, s) = \sum_{j=0}^2 G_{0wj}^{(2)HL}(q, s), \quad G_{0wj}^{(2)HL}(q, s) = G_{wj}^{(2)HL}(q, 0, s),$$

с использованием (2.2.1) приходим к следующим равенствам:

$$G_{0wm}^{(2)HL}(q, s) = \frac{1}{2\pi} W_m^{FL}(q, s) \quad (m = 0, 1). \quad (3.1.17)$$

Здесь

$$W_0^{FL}(q, s) = -\frac{\gamma_1^4 s^2 k_0(q, s)}{R_{II}(q, s)}, \quad W_1^{FL}(q, s) = \frac{2\gamma_1^8 s^4 q^2 k_0^2(q, s)}{k_{01}(q, s) R_{II}^2(q, s)},$$

– изображения Фурье по декартовой координате  $x$  (им соответствует верхний индекс « $F$ ») и Лапласа составляющих решений плоской задачи Лемба для моментно упругой полуплоскости [100]. Соответствующие оригиналы имеют следующий вид:

$$W_m(x, \tau) = \sum_{j=0}^1 W_{mj}(x, \tau) H(\tau - \gamma_j |x|), \quad (m = 0, 1). \quad (3.1.18)$$

Здесь

$$W_{00}(x, \tau) = \frac{\gamma_1^2 R_{00}(x^2, \tau^2)}{\pi \sqrt{\tau^2 - x^2}}, \quad W_{01}(x, \tau) = \frac{4\gamma_1^2 \tau^2 R_{01}(x^2, \tau^2)}{\pi \sqrt{\tau^2 - \gamma_1^2 x^2}},$$

$$W_{10}(x, \tau) = \frac{16\gamma_1^4 \tau^4 R_{10}(x^2, \tau^2)}{\pi \sqrt{\tau^2 - x^2}}, \quad W_{11}(x, \tau) = \frac{2\gamma_1^4 \tau^2 R_{11}(x^2, \tau^2)}{\pi \sqrt{\tau^2 - \gamma_1^2 x^2}},$$

$$R_{00}(x^2, \tau^2) = \frac{(2\tau^2 - \gamma_1^2 x^2)^2 (\tau^2 - x^2)}{P_3(x^2, \tau^2)}, \quad R_{01}(x^2, \tau^2) = \frac{(\tau^2 - \gamma_1^2 x^2)(\tau^2 - x^2)}{P_3(x^2, \tau^2)},$$

$$R_{1j}(x^2, \tau^2) = \frac{(\tau^2 - x^2)P_j(x^2, \tau^2)}{P_3^2(x^2, \tau^2)}, \quad P_0(x^2, \tau^2) = (2\tau^2 - \gamma_1^2 x^2)^2 (\tau^2 - x^2),$$

$$P_1(x^2, \tau^2) = (\gamma_1^2 x^2 - 2\tau^2)^4 + 16\tau^4 (\tau^2 - x^2)(\tau^2 - \gamma_1^2 x^2).$$

а  $P_3(x, \tau)$  – многочлен, имеющий следующий вид [36, 37] ( $c_R$  – скорость волн Релея):

$$P_3(x, \tau) = \gamma_1^6 x^3 - 8\gamma_1^4 x^2 \tau + 8\gamma_1^2 (2 + \kappa) x \tau^2 - 8(1 + \kappa) \tau^3 = \gamma_1^6 (x - c_R^2 \tau) P_2(x, \tau),$$

$$P_3(c_R^2, 1) = 0, \quad P_2(x, \tau) = x^2 - 2a^2 x \tau + b^2 \tau^2, \quad a^2 = \frac{4}{\gamma_1^2} - \frac{c_R^2}{2}, \quad b^2 = 16 \frac{\gamma_1^2 - 1}{\gamma_1^8 c_R^2}.$$

При этом для дискриминанта  $D_2(\kappa)$  многочлена  $P_2$  имеют место следующие соотношения:

$$c_R < \gamma_1^{-1}, \quad D_2(\kappa) > 0 \quad (0 \leq \kappa < \kappa_* \approx 0,357), \quad D_2(\kappa_*) = 0, \quad D_2(\kappa) < 0 \quad (\kappa_* < \kappa < 1).$$

Далее для определенности ограничимся случаем  $\kappa_* < \kappa$ .

Равенства (3.1.18) позволяют найти оригинал функции  $G_{0wm}^{(2)HL}(q, s)$  с помощью утверждений о связи преобразований Фурье и Ханкеля [36, 37]. При этом учитываем еще, что функции  $W_m(x, \tau)$  – четная функция по  $x$ , и для них использовалось преобразование Ханкеля нулевого порядка. В результате получаем

$$G_{0wm}^{(2)}(r, \tau) = -\frac{1}{\pi} \int_r^\infty \frac{x W_m(x, \tau) dx}{(x^2 - r^2)^{3/2}} = -\frac{\gamma_1^2}{\pi} \sum_{j=0}^1 I_{mj}(r, \tau) H(\tau - \gamma_j r), \quad (3.1.19)$$

где

$$I_{0j}(r, \tau) = \frac{A_{0j} \tau}{\pi} \int_{r^2/\tau^2}^{\gamma_j^2} \frac{Q_{0j}(z) dz}{\sqrt{(1 - \gamma_j^2 z)(\tau^2 z - r^2)}},$$

$$I_{1j}(r, \tau) = \frac{A_{1j} \gamma_1^2 \tau}{\pi} \int_{r^2/\tau^2}^{\gamma_j^2} \frac{Q_{1j}(z) dz}{\sqrt{(1 - \gamma_j^2 z)(\tau^2 z - r^2)}}, \quad Q_{mj}(z) = \frac{R_{mj}(z, 1)}{\tau^2 z - r^2},$$

$$A_{00} = \frac{1}{2}, \quad A_{01} = 2, \quad A_{10} = 8, \quad A_{11} = 1.$$

Эти интегралы понимаются в смысле регуляризованных значений [37].

Отметим, что  $G_{0w0}^{(2)}(r, \tau)$  есть решение классической задачи Лемба для упругой среды. Она найдена, например, в [37] и при  $\kappa_* < \kappa$  имеет вид:

$$G_{0w0}^{(2)}(r, \tau) = \sum_{j=0}^1 G_{0w0j}(r, \tau) H(\tau - \gamma_j r), \quad (3.1.20)$$

$$G_{0w0j}(r, \tau) = \frac{\tau a_j \gamma_{Rj}}{2\pi \gamma_1^4} (r^2 - c_R^2 \tau^2)_+^{-3/2} + \chi_j(r^2, \tau^2),$$

где

$$\chi_j(r, \tau) = \frac{1}{P_2^{3/2}(r, \tau)} \left[ (b_j r + c_j \tau) S_j(r, \tau) + (\tau - \gamma_j^2 r) \right] \frac{Q_{1j}(r, \tau)}{2S_j(r, \tau)},$$

$$Q_{1j}(r, \tau) = (b_j a^2 + c_j) r - (b_j b^2 + c_j a^2) \tau,$$

$$S_j^2(r, \tau) = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{P_2(r, \tau) P_2(1, \gamma_j^2)} + P_{1j}(r, \tau) \right],$$

$$P_{1j}(r, \tau) = (1 - a^2 \gamma_j^2) r + (b^2 \gamma_j^2 - a^2) \tau, \quad \gamma_{Rj} = \sqrt{1 - \gamma_j^2 c_R^2},$$

$$a_0 = \frac{(2 - \gamma_1^2 c_R^2)^2}{P_2(c_R^2, 1)}, \quad a_1 = -b_1 = 4 \frac{1 - c_R^2}{P_2(c_R^2, 1)}, \quad b_0 = \gamma_1^4 - a_0, \quad c_j = \frac{b^2 a_j - 4}{c_R^2}.$$

Интегралы  $I_{1j}(r, \tau)$  в (3.1.19) находим с помощью разложения рациональной части подынтегральной функции на элементарные дроби, выделяя регулярные  $K_{jr}(r, \tau)$  и сингулярные  $K_{js}(r, \tau)$  части:

$$I_{1j}(r, \tau) = \frac{A_{1j}}{\gamma_1^{10}} \left[ K_{jr}(r, \tau) + K_{js}(r, \tau) \right], \quad (3.1.21)$$

где

$$K_{jr}(r, \tau) = \frac{1}{\pi \tau^2} \int_{r^2/\tau^2}^{\gamma_j^2} \frac{\Phi_j(z, r^2/\tau^2)}{\sqrt{(1 - \gamma_j^2 z)(z - r^2/\tau^2)}} dz,$$

$$\Phi_j(z, \xi) = \left[ \frac{F_j(z) - F_j(\xi)}{z - \xi} - \frac{F_j(z) - F_j(c_R^2)}{z - c_R^2} \right] \frac{1 - \xi}{(\xi - c_R^2)^2} -$$

$$\frac{1 - c_R^2}{\xi - c_R^2} \frac{F_j(z) - F_j(c_R^2) - F_j'(c_R^2)(z - c_R^2)}{(z - c_R^2)^2}, \quad F_j(z) = \frac{P_j(z, 1)}{P_2^2(z, 1)};$$

$$K_{js}(r, \tau) = h_{j1}(\tau)(r^2 - \tau^2 c_R^2)_+^{-3/2} + h_{j2}(r, \tau)(r^2 - \tau^2 c_R^2)_+^{-5/2},$$

$$h_{j1}(\tau) = -\frac{(1 - c_R^2)\tau}{2(1 - \gamma_j^2 c_R^2)^{3/2}} \left[ \gamma_j^2 F_j(c_R^2) + 2(1 - \gamma_j^2 c_R^2) F_j'(c_R^2) \right],$$

$$h_{j2}(r, \tau) = -\tau \frac{(3 - c_R^2)\tau^2 - 2r^2}{2\sqrt{1 - \gamma_j^2 c_R^2}} F_j(c_R^2).$$

Достаточно просто доказываем, что функция  $\Phi_j(z, \xi)$  в точке  $\xi = c_R^2$  доопределяется непрерывным образом:

$$\Phi_j(z, c_R^2) = -\frac{F_j(z) - F_j(c_R^2) - F_j'(c_R^2)(z - c_R^2)}{(z - c_R^2)^2}, \quad \Phi_j(c_R^2, c_R^2) = -\frac{1}{2} F_j''(c_R^2).$$

Подставляя (3.1.21) в (3.1.19) получаем

$$G_{0w1}^{(2)}(r, \tau) = -\frac{A_{1j}}{\pi\gamma_1^8} \sum_{j=0}^1 \left[ K_{jr}(r, \tau) + K_{js}(r, \tau) \right] H(\tau - \gamma_j r), \quad (3.1.22)$$

Выясним, как ведет себя функция  $G_{0w1}^{(2)}(r, \tau)$  на границах носителя ее составляющих. Прежде всего, отметим, что носителями слагаемых в (3.1.22) и функций  $K_{js}(r, \tau)$  являются множества  $\tau \geq \gamma_j r$  и  $r \geq c_R \tau$  соответственно. При этом функции  $K_{jr}(r, \tau)$  в (3.1.21) непрерывные и для них справедливы равенства

$$\lim_{\tau \rightarrow \gamma_j r + 0} K_{jr}(r, \tau) = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} K_{jr}(r, \tau) = 0. \quad (3.1.23)$$

Функция  $K_{js}(r, \tau)$  при  $\tau = \gamma_j r$  принимает конечное значение

$$K_{js}(r, \gamma_j r) = -\frac{\pi}{r^3 (1 - \gamma_j^2 c_R^2)^3} \left\{ (1 - c_R^2)(1 - \gamma_j^2 c_R^2) F_j'(c_R^2) + F_j(c_R^2) \left[ (2 - c_R^2) \gamma_j^2 - 1 \right] \right\}, \quad (3.1.24)$$

а на фронте волны Релея коэффициенты  $h_{j1}(\tau)$  и  $h_{j2}(r, \tau)$  при ее сингулярных составляющих определяются так:



$$h_{j1}(r/c_R) = -\frac{(1-c_R^2)r}{2c_R(1-\gamma_j^2c_R^2)^{3/2}} \left[ \gamma_j^2 F_j(c_R^2) + 2(1-\gamma_j^2c_R^2) F_j'(c_R^2) \right],$$

$$h_{j2}(r, r/c_R) = -\frac{3(1-c_R^2)r^3}{2c_R^3 \sqrt{1-\gamma_j^2c_R^2}} F_j(c_R^2).$$
(3.1.25)

Окончательно с учетом неравенств  $1 < \gamma_1 < c_R^{-1}$  из (3.1.19) – (3.1.25) получаем

$$G_{0w1}^{(2)}(r, \tau) = 0 \quad (\tau < r), \quad \lim_{\tau \rightarrow r+0} G_{0w1}^{(2)}(r, \tau) = -\frac{A_{10}}{\pi\gamma_1^8} K_{0s}(r, r), \quad \lim_{\tau \rightarrow +\infty} G_{0w1}^{(2)}(r, \tau) = 0,$$

$$\lim_{\tau \rightarrow \gamma_1 r - 0} G_{0w1}^{(2)}(r, \tau) = -\frac{A_{10}}{\pi\gamma_1^8} \left[ K_{0r}(r, \gamma_1 r) + K_{0s}(r, \gamma_1 r) \right],$$

$$\lim_{\tau \rightarrow \gamma_1 r + 0} G_{0w1}^{(2)}(r, \tau) = \lim_{\tau \rightarrow \gamma_1 r - 0} G_{0w1}^{(2)}(r, \tau) - \frac{A_{11}}{\pi\gamma_1^8} K_{1s}(r, \gamma_1 r),$$

$$\lim_{\tau \rightarrow r/c_R + 0} G_{0w1}^{(2)}(r, \tau) = -\frac{1}{\pi\gamma_1^8} \left[ A_{10} K_{0r}(r, r/c_R) + A_{11} K_{1r}(r, r/c_R) \right].$$

Следовательно, график этой функции при фиксированных  $r$  имеет в точках  $\tau = r$  и  $\tau = \gamma_1 r$  разрывы первого рода, а в точке  $\tau = r/c_R$  левую вертикальную асимптоту.

Отметим, что решение осесимметричной задачи Лемба для упругой среды имеет степенную особенность порядка  $-3/2$  на фронте волны Релея  $r = c_R \tau$ . Для моментной же среды, как вытекает из формул (3.1.19) и (3.1.21), появляется дополнительная особенность порядка  $-5/2$ . Кроме того, обращает на себя внимание тот факт, что рассмотренное первое приближение для нормального перемещения не содержит фронт волны кручения.

В качестве примера приведем графики поверхностных функций влияния для полупространства, заполненного материалом, описанным в п. 2.4.

В этом случае из формулы  $P_3(c_R^2, 1) = 0$  следует  $c_R^2 = 0,148$ .

На рис. 3.1.1 – 3.1.3 представлены построенные с помощью формулы (3.1.20), (3.1.22) зависимости функций влияния  $G_{0w0}^{(2)}$ ,  $G_{0w1}^{(2)}$  и  $G_{0w}^{(2)} = G_{0w0}^{(2)} + \alpha G_{0w1}^{(2)}$  от времени  $\tau$  при различных значениях радиусов: сплошная кривая соответствует  $r = 0,2$ , пунктирная –  $r = 0,4$ , а штрихпунктирная –  $r = 0,6$ .

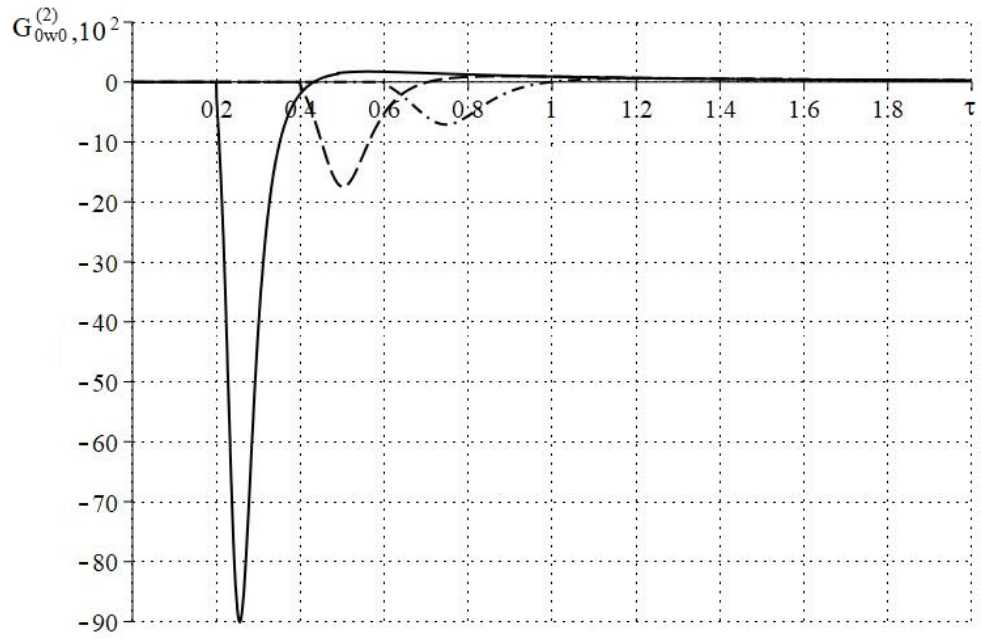


Рис. 3.1.1

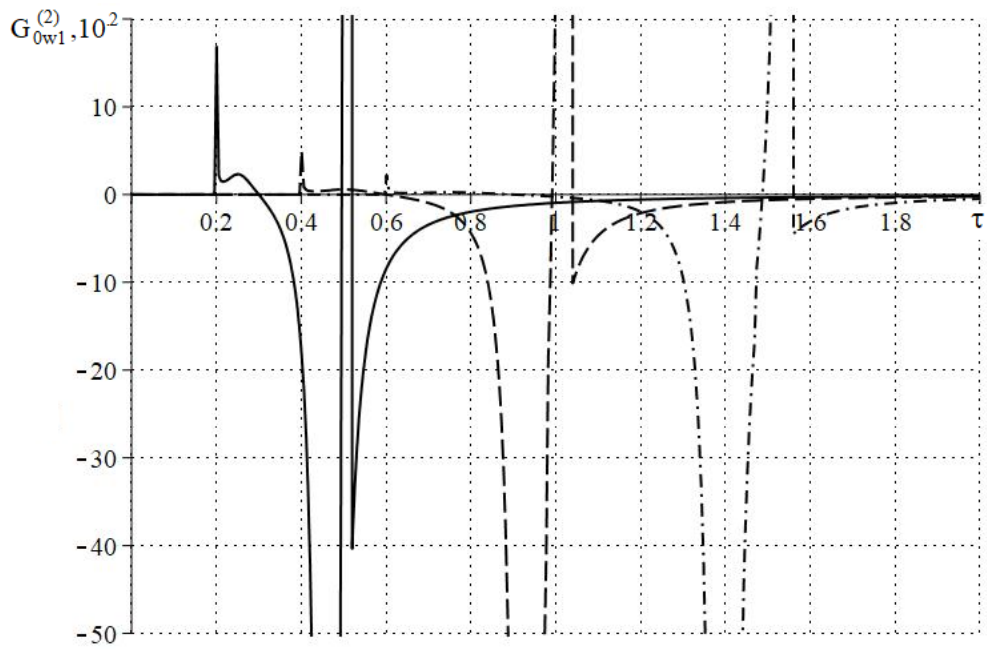


Рис. 3.1.2

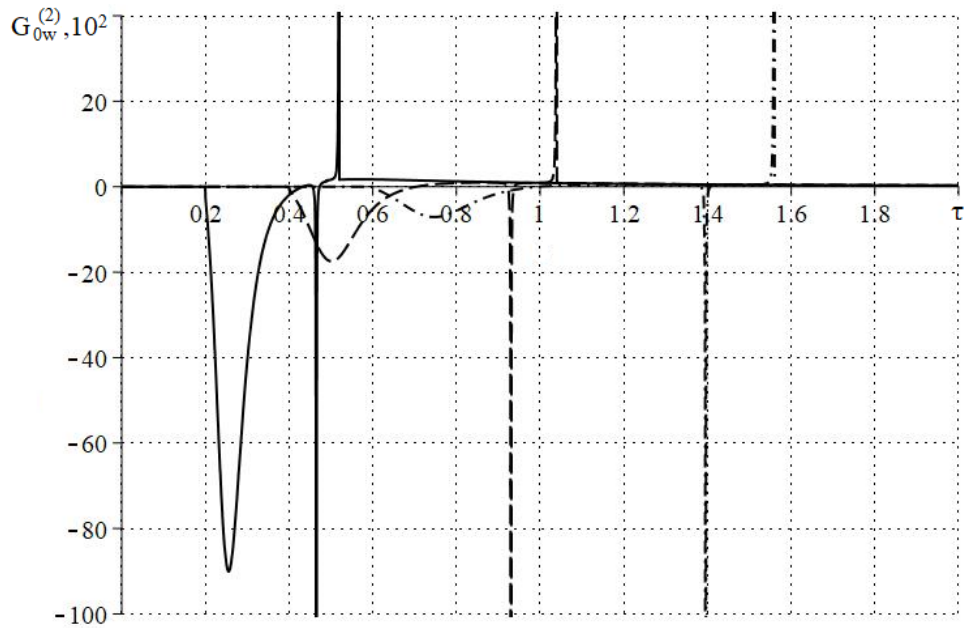


Рис. 3.1.3

### 3.2. Функции влияния, соответствующие условиям (1.6.16)

Изображения граничных условий (1.6.16) записываются так:

$$u|_{z=0} = 0, \quad \sigma_{zz}^{HL}|_{z=0} = \frac{1}{2\pi}, \quad \mu_{z9}^{HL}|_{z=0} = 0. \quad (3.2.1)$$

Подстановка в них соотношений (2.1.10) и (2.1.11) приводит к следующей системе линейных алгебраических уравнений относительно постоянных интегрирования:

$$\mathbf{A}_4 \mathbf{C} = \frac{\gamma_1^2}{2\pi} \mathbf{b}, \quad (3.2.2)$$

где

$$\mathbf{A}_4 = \begin{pmatrix} -q & k_1(q,s) & k_2(q,s) \\ k_3^2(q,s) & -2qk_1(q,s) & -2qk_2(q,s) \\ 0 & T_1(q,s)k_1(q,s) & T_2(q,s)k_2(q,s) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_0(q,s) \\ C_1(q,s) \\ C_2(q,s) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решение системы (3.2.2) имеет вид

$$C_0(q,s) = \frac{1}{2\pi s^2}, \quad C_1(q,s) = \frac{qK_4(q,s)}{2\pi R_4(q,s)}, \quad C_2(q,s) = \frac{qK_3(q,s)}{2\pi R_4(q,s)}, \quad (3.2.3)$$

где

$$R_4(q, s) = -s^2 K_5(q, s). \quad (3.2.4)$$

Формулы для величин  $K_3(q, s)$ ,  $K_4(q, s)$  и  $K_5(q, s)$  указаны в (2.7.4) и (2.8.4).

Подстановка (3.2.3) в (2.1.15) позволяет найти изображения составляющих функций влияния. Для определения их оригиналов с использованием (2.2.1), (2.2.13), (2.2.14) и (2.2.16) строим линейные приближения по параметру  $\alpha$ . Для этого сначала получаем равенства

$$\begin{aligned} R_4(q, s) &= R_{40}(q, s) + \alpha R_{41}(q, s), \\ \frac{1}{R_4(q, s)} &= \frac{1}{R_{40}(q, s)} \left[ 1 - \alpha \frac{R_{41}(q, s)}{R_{40}(q, s)} \right], \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

где

$$R_{40}(q, s) = -s^2 k_{01}(q, s) k_{02}(q, s) T_{20}(q, s), \quad R_{41}(q, s) = -s^2 K_{51}(q, s). \quad (3.2.6)$$

Используя теперь (3.2.3), (3.2.5) и обозначения (2.2.1), получаем следующие результаты:

$$G_{u0}^{(4)HL}(q, z, s) = -\frac{1}{2\pi} \frac{f_{30}^{H_1L}(q, z, s)}{s^2}, \quad G_{u10}^{(4)HL}(q, z, s) = \frac{1}{2\pi} \frac{f_{31}^{H_1L}(q, z, s)}{s^2}, \quad (3.2.7)$$

$$G_{u11}^{(4)HL}(q, z, s) = \frac{\gamma_1^4 z}{4\pi} f_{11}^{H_1L}(q, z, s), \quad G_{u2}^{(4)HL}(q, z, s) = 0;$$

$$G_{w0}^{(4)HL}(q, z, s) = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{q^2}{s^2} + 1 \right) f_{50}^{H_0L}(q, z, s),$$

$$G_{w10}^{(4)HL}(q, z, s) = \frac{1}{2\pi} \frac{q^2}{s^2} f_{51}^{H_0L}(q, z, s), \quad G_{w2}^{(4)HL}(q, z, s) = 0, \quad (3.2.8)$$

$$G_{w11}^{(4)HL}(q, z, s) = \frac{\gamma_1^4}{4\pi} \frac{q^2}{k_{01}^3(q, s)} [1 + k_{01}(q, s)z] e^{-k_{01}(q, s)z};$$

$$G_{\omega 0}^{(4)HL}(q, z, s) = 0, \quad G_{\omega 1}^{(4)HL}(q, z, s) = -\frac{\delta \gamma_1^2 \gamma_2^2}{\pi(\gamma_2^2 - \gamma_1^2)} \frac{f_{11}^{H_1L}(q, z, s)}{s^2}; \quad (3.2.9)$$

$$G_{zz0}^{(4)HL}(q, z, s) = \frac{1}{\pi} \left( \frac{q^2}{\gamma_1^2 s^2} + 1 \right) f_{20}^{H_0L}(q, z, s),$$

$$G_{zz10}^{(4)HL}(q, z, s) = -\frac{\gamma_1^{-2} q^2}{\pi s^2} f_{21}^{H_0L}(q, z, s), \quad (3.2.10)$$

$$G_{zz11}^{(4)HL}(q, z, s) = -\frac{\gamma_1^2 z}{2\pi} f_{41}^{H_0L}(q, z, s), \quad G_{zz2}^{(4)HL}(q, z, s) = 0;$$

$$G_{rz0}^{(4)HL}(q, z, s) = \frac{\gamma_1^{-2}}{\pi} \left( \frac{q^2}{s^2} + \gamma_0^2 \right) f_{10}^{H_1L}(q, z, s),$$

$$G_{rz10}^{(4)HL}(q, z, s) = -\frac{1}{\pi} \left( \frac{q^2}{\gamma_1^2 s^2} + \frac{1}{2} \right) f_{11}^{H_1L}(q, z, s), \quad (3.2.11)$$

$$G_{rz11}^{(4)HL}(q, z, s) = \frac{\gamma_1^2}{\pi} f_{11}^{H_1L}(q, z, s) - \frac{\gamma_1^2}{4\pi} \left[ \frac{1}{k_{01}(q, s)} + z \right] k_3^2(q, s) \frac{q e^{-k_{01}(q, s)z}}{k_{01}^2(q, s)};$$

$$G_{zr0}^{(4)HL}(q, z, s) = G_{rz0}^{(4)HL}(q, z, s),$$

$$G_{zr10}^{(4)HL}(q, z, s) = -\frac{1}{\pi} \left( \frac{q^2}{\gamma_1^2 s^2} + \frac{1}{2} \right) f_{11}^{H_1L}(q, z, s), \quad G_{zr2}^{(4)HL}(q, z, s) = 0, \quad (3.2.12)$$

$$G_{zr11}^{(4)HL}(q, z, s) = -\frac{\gamma_1^2}{4\pi} \left[ \frac{1}{k_{01}(q, s)} + z \right] k_3^2(q, s) \frac{q e^{-k_{01}(q, s)z}}{k_{01}^2(q, s)};$$

$$G_{r90}^{(4)HL}(q, z, s) = 0, \quad G_{r9l1}^{(4)HL}(q, z, s) = (-1)^l \frac{\delta \gamma_1^2 \gamma_2^2}{\pi(\gamma_2^2 - \gamma_1^2)} \frac{q^2}{s^2} f_{5l}^{H_0L}(q, z, s); \quad (3.2.13)$$

$$G_{9r0}^{(4)HL}(q, z, s) = 0, \quad G_{9rl1}^{(4)HL}(q, z, s) = \eta G_{r9l1}^{(4)HL}(q, z, s); \quad (3.2.14)$$

$$G_{z90}^{(4)HL}(q, z, s) = 0, \quad G_{z9l1}^{(4)HL}(q, z, s) = (-1)^{l+1} \frac{\delta \gamma_1^2 \gamma_2^2}{\pi(\gamma_2^2 - \gamma_1^2)} \frac{f_{3l}^{H_1L}(q, z, s)}{s^2}; \quad (3.2.15)$$

$$G_{9z0}^{(4)HL}(q, z, s) = 0, \quad G_{9zl1}^{(4)HL}(q, z, s) = \eta G_{z9l1}^{(4)HL}(q, z, s). \quad (3.2.16)$$

Оригиналы этих функций влияния могут быть найдены аналогично параграфу 2.6.

### 3.3. Функции влияния, соответствующие условиям (1.6.17)

Изображения граничных условий (1.6.17) записываются так:

$$u|_{z=0} = 0, \quad \sigma_{zz}^{HL}|_{z=0} = \frac{1}{2\pi}, \quad \omega^{HL}|_{z=0} = 0. \quad (3.3.1)$$

Подстановка в них соотношений (2.1.10) и (2.1.11) приводит к следующей системе линейных алгебраических уравнений относительно постоянных интегрирования:

$$\mathbf{A}_6 \mathbf{C} = \frac{\gamma_1^2}{2\pi} \mathbf{b}, \quad (3.3.2)$$

где

$$\mathbf{A}_6 = \begin{pmatrix} -q & k_1(q, s) & k_2(q, s) \\ k_3^2(q, s) & -2qk_1(q, s) & -2qk_2(q, s) \\ 0 & T_1(q, s) & T_2(q, s) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_0(q, s) \\ C_1(q, s) \\ C_2(q, s) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решение системы (3.3.2) имеет вид

$$C_0(q, s) = \frac{1}{2\pi s^2}, \quad C_1(q, s) = -\frac{qT_2(q, s)}{2\pi R_6(q, s)}, \quad C_2(q, s) = \frac{qT_1(q, s)}{2\pi R_6(q, s)}, \quad (3.3.3)$$

где

$$R_6(q, s) = -s^2 K_1(q, s). \quad (3.3.4)$$

Формула для величины  $K_1(q, s)$  указана в (2.3.4).

Подстановка (3.3.3) в (2.1.15) позволяет найти изображения составляющих функций влияния. Для определения их оригиналов с использованием (2.2.1), (2.2.13), (2.2.14) и (2.2.16) строим линейные приближения по параметру  $\alpha$ . Для этого сначала получаем равенства

$$R_6(q, s) = R_{60}(q, s) + \alpha R_{61}(q, s),$$

$$\frac{1}{R_6(q, s)} = \frac{1}{R_{60}(q, s)} \left[ 1 - \alpha \frac{R_{61}(q, s)}{R_{60}(q, s)} \right], \quad (3.3.5)$$

где

$$R_{60}(q, s) = -s^2 K_{10}(q, s), \quad R_{61}(q, s) = -s^2 K_{11}(q, s). \quad (3.3.6)$$

Используя теперь (3.3.3), (3.3.5) и обозначения (2.2.1), получаем следующие результаты:

$$\begin{aligned} G_{u0}^{(6)HL}(q, z, s) &= G_{u0}^{(4)HL}(q, z, s), & G_{u10}^{(6)HL}(q, z, s) &= G_{u10}^{(4)HL}(q, z, s), \\ G_{u11}^{(6)HL}(q, z, s) &= G_{u11}^{(4)HL}(q, z, s), & G_{u2}^{(6)HL}(q, z, s) &= 0; \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

$$\begin{aligned} G_{w0}^{(6)HL}(q, z, s) &= G_{w0}^{(4)HL}(q, z, s), & G_{w10}^{(6)HL}(q, z, s) &= G_{w10}^{(4)HL}(q, z, s), \\ G_{w11}^{(6)HL}(q, z, s) &= G_{w11}^{(4)HL}(q, z, s), & G_{w2}^{(6)HL}(q, z, s) &= 0; \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

$$\begin{aligned} G_{\omega 0}^{(6)HL}(q, z, s) &= 0, & G_{\omega 11}^{(6)HL}(q, z, s) &= G_{\omega 11}^{(4)HL}(q, z, s), \\ G_{\omega 21}^{(6)HL}(q, z, s) &= \frac{\delta\gamma_1^2\gamma_2^2}{\pi(\gamma_2^2 - \gamma_1^2)} \frac{q}{s^2 k_{01}(q, s)} e^{-k_{02}(q, s)z}; \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

$$\begin{aligned} G_{zz0}^{(6)HL}(q, z, s) &= G_{zz0}^{(4)HL}(q, z, s), & G_{zz10}^{(6)HL}(q, z, s) &= G_{zz10}^{(4)HL}(q, z, s), \\ G_{zz11}^{(6)HL}(q, z, s) &= G_{zz11}^{(4)HL}(q, z, s), & G_{zz2}^{(6)HL}(q, z, s) &= 0; \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

$$\begin{aligned} G_{rz0}^{(6)HL}(q, z, s) &= G_{rz0}^{(4)HL}(q, z, s), & G_{rz10}^{(6)HL}(q, z, s) &= G_{rz10}^{(4)HL}(q, z, s), \\ G_{rz11}^{(6)HL}(q, z, s) &= G_{rz11}^{(4)HL}(q, z, s), & G_{rz2}^{(6)HL}(q, z, s) &= 0; \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

$$\begin{aligned} G_{zr0}^{(6)HL}(q, z, s) &= G_{zr0}^{(6)HL}(q, z, s), & G_{zr10}^{(6)HL}(q, z, s) &= G_{zr10}^{(4)HL}(q, z, s), \\ G_{zr11}^{(6)HL}(q, z, s) &= G_{zr11}^{(4)HL}(q, z, s), & G_{zr2}^{(6)HL}(q, z, s) &= 0; \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

$$\begin{aligned} G_{r90}^{(6)HL}(q, z, s) &= 0, & G_{r911}^{(6)HL}(q, z, s) &= G_{r911}^{(4)HL}(q, z, s), \\ G_{r921}^{(6)HL}(q, z, s) &= \frac{\delta\gamma_1^2\gamma_2^2}{\pi(\gamma_2^2 - \gamma_1^2)} \frac{q^2}{s^2 k_{01}(q, s)} e^{-k_{02}(q, s)z}; \end{aligned} \quad (3.3.13)$$

$$G_{9r0}^{(6)HL}(q, z, s) = 0, \quad G_{9r11}^{(6)HL}(q, z, s) = \eta G_{r911}^{(6)HL}(q, z, s); \quad (3.3.14)$$

$$\begin{aligned} G_{z90}^{(6)HL}(q, z, s) &= 0, & G_{z911}^{(6)HL}(q, z, s) &= G_{z911}^{(4)HL}(q, z, s), \\ G_{z921}^{(6)HL}(q, z, s) &= -\frac{\delta\gamma_1^2\gamma_2^2}{\pi(\gamma_2^2 - \gamma_1^2)} \frac{qk_{02}(q, s)}{s^2 k_{01}(q, s)} e^{-k_{02}(q, s)z}; \end{aligned} \quad (3.3.15)$$

$$G_{9z0}^{(6)HL}(q, z, s) = 0, \quad G_{9z11}^{(6)HL}(q, z, s) = \eta G_{z911}^{(6)HL}(q, z, s). \quad (3.3.16)$$

Оригиналы этих функций влияния могут быть найдены аналогично параграфу 2.6.

### 3.4. Функции влияния, соответствующие условиям (1.6.18)

Изображения граничных условий (1.6.18) записываются так:

$$\sigma_{zr}^{HL}\Big|_{z=0} = 0, \quad \sigma_{zz}^{HL}\Big|_{z=0} = \frac{1}{2\pi}, \quad \omega^{HL}\Big|_{z=0} = 0. \quad (3.4.1)$$

Подстановка в них соотношений (2.1.10) и (2.1.11) приводит к следующей системе линейных алгебраических уравнений относительно постоянных интегрирования:

$$\mathbf{A}_8 \mathbf{C} = \frac{\gamma_1^2}{2\pi} \mathbf{b}, \quad (3.4.2)$$

где

$$\mathbf{A}_8 = \begin{pmatrix} 2qk_0(q,s) & -k_3^2(q,s) & -k_3^2(q,s) \\ k_3^2(q,s) & -2qk_1(q,s) & -2qk_2(q,s) \\ 0 & T_1(q,s) & T_2(q,s) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_0(q,s) \\ C_1(q,s) \\ C_2(q,s) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Её решение записывается так:

$$C_0(q,s) = -\frac{\gamma_1^2 k_3^2(q,s) R(q,s)}{2\pi R_8(q,s)}, \quad C_1(q,s) = \frac{\gamma_1^2 q k_0(q,s) T_2(q,s)}{\pi R_8(q,s)}, \quad (3.4.3)$$

$$C_2(q,s) = -\frac{\gamma_1^2 q k_0(q,s) T_1(q,s)}{\pi R_8(q,s)},$$

где

$$R_8(q,s) = -4q^2 k_0(q,s) K_1(q,s) - k_3^4(q,s) R(q,s). \quad (3.4.4)$$

Формулы для величин  $R(q,s)$  и  $K_1(q,s)$  указаны в (2.3.4).

Подстановка (3.4.3) в (2.1.15) позволяет найти изображения составляющих функций влияния. Для определения их оригиналов с использованием (2.2.1), (2.2.13), (2.2.14) и (2.2.16) строим линейные приближения по параметру  $\alpha$ . Для этого сначала получаем равенства

$$R_8(q,s) = R_{80}(q,s) + \alpha R_{81}(q,s),$$

$$\frac{1}{R_8(q,s)} = \frac{1}{R_{80}(q,s)} \left[ 1 - \alpha \frac{R_{81}(q,s)}{R_{80}(q,s)} \right], \quad (3.4.5)$$



где

$$\begin{aligned} R_{80}(q, s) &= R_{II}(q, s)T_{20}(q, s), \\ R_{81}(q, s) &= k_3^4(q, s)T_{21}(q, s) - 4q^2k_0(q, s)K_{11}(q, s). \end{aligned} \quad (3.4.6)$$

Используя теперь (3.4.3), (3.4.5) и обозначения (2.2.1), получаем следующие результаты:

$$\begin{aligned} G_{u00}^{(8)HL}(q, z, s) &= G_{u00}^{(2)HL}(q, z, s), \quad G_{u01}^{(8)HL}(q, z, s) = G_{u01}^{(2)HL}(q, z, s), \\ G_{u10}^{(8)HL}(q, z, s) &= G_{u10}^{(2)HL}(q, z, s), \quad G_{u2}^{(8)HL}(q, z, s) = 0, \\ G_{u11}^{(8)HL}(q, z, s) &= G_{u11}^{(2)HL}(q, z, s); \end{aligned} \quad (3.4.7)$$

$$\begin{aligned} G_{w00}^{(8)HL}(q, z, s) &= G_{w00}^{(2)HL}(q, z, s), \quad G_{w01}^{(8)HL}(q, z, s) = G_{w01}^{(2)HL}(q, z, s), \\ G_{w10}^{(8)HL}(q, z, s) &= G_{w10}^{(2)HL}(q, z, s), \quad G_{w2}^{(8)HL}(q, z, s) = 0, \\ G_{w11}^{(8)HL}(q, z, s) &= G_{w11}^{(2)HL}(q, z, s); \end{aligned} \quad (3.4.8)$$

$$G_{\omega 0}^{(8)HL}(q, z, s) = 0, \quad G_{\omega 1}^{(8)HL}(q, z, s) = (-1)^{l+1} \frac{\gamma_1^2 T_{12}(q, s) q k_0(q, s)}{2\pi R_{II}(q, s)} e^{-k_0(q, s)z}; \quad (3.4.9)$$

$$\begin{aligned} G_{zz00}^{(8)HL}(q, z, s) &= G_{zz00}^{(2)HL}(q, z, s), \quad G_{zz01}^{(8)HL}(q, z, s) = G_{zz01}^{(2)HL}(q, z, s), \\ G_{zz10}^{(8)HL}(q, z, s) &= G_{zz10}^{(2)HL}(q, z, s), \quad G_{zz2}^{(8)HL}(q, z, s) = 0, \\ G_{zz11}^{(8)HL}(q, z, s) &= G_{zz11}^{(2)HL}(q, z, s); \end{aligned} \quad (3.4.10)$$

$$\begin{aligned} G_{rz00}^{(8)HL}(q, z, s) &= G_{rz00}^{(2)HL}(q, z, s), \quad G_{rz01}^{(8)HL}(q, z, s) = G_{rz01}^{(2)HL}(q, z, s), \\ G_{rz10}^{(8)HL}(q, z, s) &= G_{rz10}^{(2)HL}(q, z, s), \quad G_{rz2}^{(8)HL}(q, z, s) = 0, \\ G_{rz11}^{(8)HL}(q, z, s) &= G_{rz11}^{(2)HL}(q, z, s); \end{aligned} \quad (3.4.11)$$

$$\begin{aligned} G_{zr00}^{(8)HL}(q, z, s) &= G_{zr00}^{(8)HL}(q, z, s), \quad G_{zr01}^{(8)HL}(q, z, s) = G_{zr01}^{(8)HL}(q, z, s), \\ G_{zr10}^{(8)HL}(q, z, s) &= G_{zr10}^{(2)HL}(q, z, s), \quad G_{zr2}^{(8)HL}(q, z, s) = 0, \\ G_{zr11}^{(8)HL}(q, z, s) &= G_{zr11}^{(2)HL}(q, z, s); \end{aligned} \quad (3.4.12)$$

$$G_{r90}^{(8)HL}(q, z, s) = 0, \quad G_{r91}^{(8)HL}(q, z, s) = (-1)^{l+1} \frac{\gamma_1^2 T_{12}(q, s) q^2 k_0(q, s)}{2\pi R_{II}(q, s)} e^{-k_0(q, s)z}; \quad (3.4.13)$$

$$G_{9r0}^{(8)HL}(q, z, s) = 0, \quad G_{9r1}^{(8)HL}(q, z, s) = \eta G_{r91}^{(8)HL}(q, z, s); \quad (3.4.14)$$

$$G_{z90}^{(8)HL}(q, z, s) = 0,$$

$$G_{z911}^{(8)HL}(q, z, s) = (-1)^l \frac{\gamma_1^2 q T_{12}(q, s) k_0(q, s) k_{0l}(q, s)}{2\pi R_{II}(q, s)} e^{-k_{0l}(q, s)z}; \quad (3.4.15)$$

$$G_{9z0}^{(8)HL}(q, z, s) = 0, \quad G_{9z11}^{(8)HL}(q, z, s) = \eta G_{z911}^{(8)HL}(q, z, s). \quad (3.4.16)$$

Оригиналы этих функций влияния могут быть найдены аналогично параграфу 3.1.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты диссертационной работы.

1. Даны постановка и интегральное представление решений задач о распространении поверхностных нестационарных осесимметричных возмущений всех возможных видов в полупространстве, заполненном средой Коссера.

2. В линейном приближении по малому параметру построены изображения Лапласа и Ханкеля всех поверхностных функций влияния при нормальных граничных возмущениях.

3. Построен и реализован алгоритм определения оригиналов функций влияния.

4. Получены решения задач о действии на границу полупространства нестационарных осесимметричных распределенных нормальных возмущений.

5. Дана оценка влияния учета моментных характеристик. Показано, что количественное отличие от классического упругого решения невелико, однако имеет место дополнительный фронт волны.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### ОРИГИНАЛЫ НЕКОТОРЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Здесь построим оригиналы совместного преобразования Лапласа и Ханкеля, изображений, указанных в (2.6.15), а также связанных с ними функций

$$\begin{aligned} s^2 f_{5j}^{H_0L}(q, z, s), s^{-2} f_{2j}^{H_0L}(q, z, s), s^{-2} f_{3j}^{H_1L}(q, z, s), \\ q^2 s^{-2} f_{1j}^{H_1L}(q, z, s), q^2 s^{-2} f_{2j}^{H_0L}(q, z, s). \end{aligned} \quad (\text{П.1.1})$$

При этом используем таблицы в [36] и свойства этих преобразований.

Оригиналы преобразования Ханкеля функций в (2.6.15) имеют вид:

$$\begin{aligned} f_{1j}^L(r, z, s) &= \frac{r(1 + \gamma_j r_3 s)}{r_3^3} e^{-\gamma_j r_3 s}, \quad f_{2j}^L(r, z, s) = \frac{z}{r_3^3} (1 + \gamma_j r_3 s) e^{-\gamma_j r_3 s}, \\ f_{3j}^L(r, z, s) &= \frac{rz}{r_3^3} \left( \gamma_j^2 s^2 + \frac{3\gamma_j s}{r_3} + \frac{3}{r_3^2} \right) e^{-\gamma_j r_3 s}, \\ f_{4j}^L(r, z, s) &= \frac{1}{r_3^3} \left[ \frac{2z^2 - r^2}{r_3} \left( \gamma_j s + \frac{1}{r_3} \right) - \gamma_j^2 r^2 s^2 \right] e^{-\gamma_j r_3 s}, \\ f_{5j}^L(r, z, s) &= \frac{1}{r_3} e^{-\gamma_j r_3 s}, \quad r_3 = \sqrt{r^2 + z^2}. \end{aligned} \quad (\text{П.1.2})$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} f_{1j}(r, z, \tau) &= \frac{r}{r_3^3} \left[ \delta(\tau - \gamma_j r_3) + \gamma_j r_3 \delta'(\tau - \gamma_j r_3) \right], \\ f_{2j}(r, z, \tau) &= \frac{z}{r_3^3} \left[ \delta(\tau - \gamma_j r_3) + \gamma_j r_3 \delta'(\tau - \gamma_j r_3) \right], \\ f_{3j}(r, z, \tau) &= \frac{rz}{r_3^5} \left[ 3\gamma_j r_3 \delta'(\tau - \gamma_j r_3) + 3\delta(\tau - \gamma_j r_3) + \gamma_j^2 r_3^2 \delta''(\tau - \gamma_j r_3) \right], \\ f_{4j}(r, z, \tau) &= \frac{1}{r_3^5} \left\{ (2z^2 - r^2) \left[ \delta(\tau - \gamma_j r_3) + \gamma_j r_3 \delta'(\tau - \gamma_j r_3) \right] - \right. \\ &\quad \left. - \gamma_j^2 r_3^2 r^2 \delta''(\tau - \gamma_j r_3) \right\}, \\ f_{5j}(r, z, \tau) &= \frac{1}{r_3} \delta(\tau - \gamma_j r_3). \end{aligned} \quad (\text{П.1.3})$$

Оригинал функции  $s^2 f_{5j}^{H_0L}(q, z, s)$  находится с использованием (П.1.2):

$$\left[ s^2 f_{5j}^{H_0L}(q, z, s) \right]^{H_0^{-1}L^{-1}} = \left[ s^2 f_{5j}^L(r, z, s) \right]^{L^{-1}} = f_{5j}''(r, z, \tau) = \frac{1}{r_3} \delta''(\tau - \gamma_j r_3). \quad (\text{П.1.4})$$

Для функций  $s^{-2} f_{2j}^{H_0L}(q, z, s)$  и  $s^{-2} f_{3j}^{H_1L}(q, z, s)$  из (П.1.2) получаем следующие результаты:

$$\begin{aligned} \left[ s^{-2} f_{2j}^{H_0L}(q, z, s) \right]^{H_0^{-1}L^{-1}} &= \frac{z}{r_3^3} \left[ (s^{-2} + \gamma_j r_3 s^{-1}) e^{-\gamma_j r_3 s} \right]^{L^{-1}} = \\ &= \frac{z}{r_3^3} \left[ (\tau - \gamma_j r_3)_+ + \gamma_j r_3 H(\tau - \gamma_j r_3) \right] = \frac{z\tau}{r_3^3} H(\tau - \gamma_j r_3); \end{aligned} \quad (\text{П.1.5})$$

$$\begin{aligned} \left[ s^{-2} f_{3j}^{H_0L}(q, z, s) \right]^{H_0^{-1}L^{-1}} &= \frac{rz}{r_3^3} \left[ \left( \gamma_j^2 + \frac{3\gamma_j s}{sr_3} + \frac{3}{s^2 r_3^2} \right) e^{-\gamma_j r_3 s} \right]^{L^{-1}} = \\ &= \frac{rz}{r_3^5} \left[ \gamma_j^2 r_3^2 \delta(\tau - \gamma_j r_3) + 3\gamma_j r_3 H(\tau - \gamma_j r_3) + 3(\tau - \gamma_j r_3)_+ \right] = (\text{П.1.6}) \\ &= \frac{rz}{r_3^5} \left[ 3\tau H(\tau - \gamma_j r_3) + \gamma_j^2 r_3^2 \delta(\tau - \gamma_j r_3) \right]. \end{aligned}$$

Для функции  $q^2 s^{-2} f_{1j}^{H_1L}(q, z, s)$  сначала с использованием (П.1.2) сначала обращаем преобразование Ханкеля:

$$\begin{aligned} \left( q^2 f_{1j}^{H_1L} \right)^{H_1^{-1}} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r f_{1j}^L) \right] = -\frac{\partial r_3}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r_3} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial r_3}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r_3} \left( \frac{1 + \gamma_j r_3 s}{r_3^3} e^{-\gamma_j r_3 s} \right) \right] = \\ &= \frac{r}{r_3^7} \left\{ \left[ 2(2z^2 - r^2) - \gamma_j r^2 r_3 s \right] r_3^2 \gamma_j^2 s^2 + 3(4z^2 - r^2)(r_3 \gamma_j s + 1) \right\} e^{-\gamma_j r_3 s}, \end{aligned}$$

а затем находим оригинал преобразования Лапласа:

$$\begin{aligned} \left( s^{-2} q^2 f_{1j}^{H_1L} \right)^{H_1^{-1}L^{-1}} &= \frac{r}{r_3^7} \left\{ \left[ 2(2z^2 - r^2) - \gamma_j r^2 r_3 s \right] r_3^2 \gamma_j^2 + \right. \\ &\quad \left. + 3(4z^2 - r^2)(r_3 \gamma_j s^{-1} + s^{-2}) \right\} e^{-\gamma_j r_3 s} \Big|^{L^{-1}} = \\ &= \frac{r}{r_3^7} \left[ 3\tau(4z^2 - r^2) H(\tau - \gamma_j r_3) + 2\gamma_j^2 r_3^2 (2z^2 - r^2) \delta(\tau - \gamma_j r_3) - \right. \\ &\quad \left. - \gamma_j^3 r^2 r_3^3 \delta'(\tau - \gamma_j r_3) \right]. \end{aligned} \quad (\text{П.1.7})$$

Аналогичным образом поступаем и с функцией  $q^2 s^{-2} f_{2j}^{H_0L}(q, z, s)$ :

$$\begin{aligned}
(q^2 f_{2j}^{H_0L})^{H_0^{-1}} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f_{2j}^L}{\partial r} \right) = -\frac{1}{r_3} \frac{\partial}{\partial r_3} \left( \frac{r^2}{r_3} \frac{\partial f_{2j}^L}{\partial r_3} \right) = \\
&= -\frac{z}{r_3} \frac{\partial}{\partial r_3} \left[ \frac{r_3^2 - z^2}{r_3} \frac{\partial}{\partial r_3} \left( \frac{1 + \gamma_j r_3 s}{r_3^3} e^{-\gamma_j r_3 s} \right) \right] = \\
&= \frac{z}{r_3^7} \left\{ \gamma_j^2 r_3^2 s^2 \left[ 2(z^2 - 2r^2) - \gamma_j r^2 r_3 s \right] + 3(2z^2 - 3r^2)(\gamma_j r_3 s + 1) \right\} e^{-\gamma_j r_3 s}; \\
(s^{-2} q^2 f_{2j}^{H_0L})^{H_0^{-1}L^{-1}} &= \frac{z}{r_3^7} \left\langle \left\{ \gamma_j^2 r_3^2 \left[ 2(z^2 - 2r^2) - \gamma_j r^2 r_3 s \right] + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 3(2z^2 - 3r^2)(\gamma_j r_3 s^{-1} + s^{-2}) \right\} e^{-\gamma_j r_3 s} \right\rangle^{L^{-1}} = \tag{II.1.8} \\
&= \frac{z}{r_3^7} \left[ 3\tau(2z^2 - 3r^2)H(\tau - \gamma_j r_3) + 2\gamma_j^2 r_3^2 (z^2 - 2r^2)\delta(\tau - \gamma_j r_3) - \right. \\
&\quad \left. - \gamma_j^3 r^2 r_3^3 \delta'(\tau - \gamma_j r_3) \right].
\end{aligned}$$

**СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ**

1. *Адамов А.А.* О гипотезе однородности, масштабных параметрах длины и краевом эффекте для изотропного континуума Коссера // МКМК. – 2010. – Т. 16. – № 3. – С. 329–346.
2. *Амбарцумян С.А.* Задача несимметричной термоупругости весьма пологой оболочки // Изв. АН РА. Механика. – 2002. – № 3. – С. 20–33.
3. *Амбарцумян С.А.* Температурная задача микрополярной пластинки // Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки. – 2000. – № 3. – С. 17–20.
4. *Амбарцумян С.А.* Микрополярная теория оболочек и пластин. – Ереван: Изд-во НАН РА, 1999. – С. 214.
5. *Атоян А.А., Саркисян С.О.* Задача динамики тонкой пластинки на основе несимметричной теории упругости // Изв. АН РА. Механика. – 2004. – Т. 57. – № 2. – С. 18–33.
6. *Атоян А.А., Саркисян С.О.* Динамическая теория микрополярных упругих тонких пластин // Экологический вестник научных центров ЧЭС. – 2004, – №1. – С. 18–29.
7. *Атоян А.А., Саркисян С.О.* Изучение свободных колебаний микрополярных упругих тонких пластин // Докл. НАН РА. – 2004. – Т. 104. – № 2. – С. 18–33.
8. *Аэро Э.Л., Кувшинский Е.В.* Континуальная теория асимметричной упругости. Учет внутреннего вращения // ФТТ. – 1964. – Т. 6. – Вып. 9. – С. 2689–2699.
9. *Аэро Э.Л., Кувшинский Е.В.* Основные уравнения теории упругости сред с вращательным взаимодействием частиц // ФТТ. – 1960. – Т. 2. – Вып. 7. – С. 1399–1409.
10. *Багдасарян Г.Е., Асанян Д.Д.* Основные уравнения и соотношения теории несимметричной магнитоупругости ферромагнитного тела // Проблемы механики тонких деформируемых тел: Сборник: Посвящается 80-летию

академика НАН РА Амбарцумяна С.А. Ин-т мех. НАН РА. – Ереван: Гитутюн, 2002. – С. 37–47.

11. *Баскаков В.А., Бестужева Н.П., Кончакова Н.А.* О нелинейных уравнениях динамики термоупругих микрополярных сред // Деп. в ВИНТИ. – 1998. 185–В98.

12. *Баскаков В.А., Бестужева Н.П.* Особенности распространения гармонических волн в анизотропной среде Коссера с кубической симметрией // Проблемы механики неупругих деформаций: Сборник статей. К 70-летию Дюиса Даниловича Ивлева. – М.: Физматлит, 2001. – С. 52–61.

13. *Баскаков В.А., Бестужева Н.П., Кончакова Н.А.* Особые частоты плоских волн в несимметрично упругой среде // Регион. межвуз. семин. "Процессы теплообмена в энергомашиностр.". Тез. докл.. Воронеж. – 1996. – С. 51.

14. *Белоносов С.М.* Моментная теория упругости: (Статика). – Владивосток: Дальнаука, 1993. – 148 с.

15. *Большаков В.И., Андрианов И.В., Данишевский В.В.* Асимптотические методы расчета композитных материалов с учетом внутренней структуры. – Днепропетровск: Пороги, 2008. – 196 с.

16. *Босяков С.М.* Влияние моментных напряжений на распространение упругих волн в микрополярной кубически анизотропной среде // ИФЖ. – 2006. – № 2. – С. 178–182.

17. *Бояндин В.С., Козак А.Л.* Моментная теория деформирования железобетона с трещинами. – Киев: Киев. инж.-строит. ин-т., 1989. – 50 с.

18. *Бровко Г.Л.* Основные понятия и законы рациональной механики сред Коссера. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2010. – С. 104–105.

19. *Бровко Г.Л., Иванова О.А.* Моделирование свойств и движений неоднородного одномерного континуума сложной микроструктуры типа Коссера // Изв. РАН. МТТ. – 2008. – № 1. – С. 22–36.

20. *Бровко Г.Л.* Об одной конструкционной модели среды Коссера // Изв. РАН. МТТ. – 2002. – № 1. – С. 75–91.



21. Бурак Ярослав, Мороз Галина. Краевые задачи локально-моментной теории упругости. Вариационные формулирования. [Крайові задачі локально-моментної теорії пружності. Варіаційні формулювання] // Фіз.-мат. моделюв. інф. технол. – 2004. – № 1. – С. 9–19.

22. Бытев В.О., Слезко И.В. Решение задач асимметричной упругости // Вестник СамГУ. – 2008. – № 6. – С. 238–243.

23. Бытев В.О., Слезко И.В. Решение задач асимметричной упругости // Математическое и информационное моделирование: Сборник научных трудов. – Тюмень: Вектор Бук, 2008. – Вып. 10. – С. 27–32.

24. Ванин Г.А. Концентрация напряжений в моментной теории упругости // Прикладная механика. – 2007. – Т. 43. – № 1. – С. 66–76.

25. Ванин Г.А. Моментная механика и обобщения // Проблемы механики: Сборник статей к 90-летию со дня рождения А. Ю. Ишлинского. – М.: Физматлит, 2003. – С. 156–170.

26. Ванин Г.А. Моментная термодинамика неоднородных сред // Достижения и задачи машиноведения: К 70-летию академика Константина Васильевича Фролова. – Екатеринбург: УрО РАН, 2006. – С. 192–206.

27. Ванин Г.А. Микромеханика композиционных материалов. – Киев: Наук. думка, 1985. – 304 с.

28. Варыгина М.П. Параллельный алгоритм для решения пространственных задач динамики моментной среды Коссера // VIII Всероссийская конференция молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям, Новосибирск, 27-29 нояб., 2007: Программа и тезисы докладов. – Новосибирск: ИВТ СО РАН, 2007. – С. 38.

29. Варыгина М.П., Садовская О.В. Параллельный вычислительный алгоритм для решения динамических задач моментной теории упругости // Вестник КрасГУ. Физико-математические науки. – 2005. – № 4. – С. 211–215.

30. Васильев А.А. Структурные и обобщенные континуальные модели тел Коссера. Проблемы прочности, пластичности и устойчивости в механике

деформируемого твердого тела // Материалы VII международного научного симпозиума, Тверь, 16-17 дек., 2010: Посвящены 80-летию со дня рождения заслуженного деятеля науки и техники РФ профессора В. Г. Зубчанинова. – Тверь: ТГТУ, 2011. – С. 81–86.

31. *Волегов П.С., Шулепов А.В.* Упругие константы монокристалла в несимметричной физической теории пластичности // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2010. – № 1. – С. 19–34.

32. *Гарагаш И.А., Николаевский В.Н.* Механика Коссера для наук о земле // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2009. – Т.2. – № 4. – С. 44–66.

33. *Горбачев В.И.* Интегральные формулы в симметричной и несимметричной упругости // Вестник МГУ. – 2009. – № 6. – С. 57–60.

34. *Горбачев В.И., Емельянов А.Н.* Осреднение уравнений моментной теории упругости неоднородного тела // Изв. РАН. МТТ. – 2014. – № 1. – С. 95–107.

35. *Горбачев, В.И., Емельянов, А. Н.* Об эффективных характеристиках композита с моментными свойствами компонентов // Научная конференция Ломоносовские чтения, секция механики, 14-23 апреля 2014г., Москва. Тезисы докладов. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 2014. – С. 56.

36. *Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В.* Волны в сплошных средах. – М.: Физматлит, 2004. – 472 с.

37. *Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В.* Динамические контактные задачи с подвижными границами. – М.: Физматлит, 1995. – 352 с.

38. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука, 1971. – 1108 с.

39. *Григорьев Ю.М.* Аналитическое решение задачи о равновесии прямоугольника в моментной теории упругости // Вестник СВФУ. – 2007. – Т. 4. – № 4. – С. 19–26.

40. *Деев В.М.* Новый метод решения статической пространственной задачи несимметричной теории упругости в перемещениях // IX Всероссийский

съезд по теоретической и прикладной механике, Нижний Новгород, 22-28 авг., 2006. – Новгород: Изд-во ННГУ, 2006. – С. 82.

41. *Дудников В.А., Назаров С.А.* Асимптотически точные уравнения тонких пластин на основе теории Коссера // Докл. АН СССР. – 1982. – Т. 262. – № 2. – С. 306–309.

42. *Емельянов А.Н.* Эффективные материальные функции слоистых композитов в линейной моментной теории упругости // Вестник МГУ. Сер. 1. – 2015. – № 1. – С. 40–45.

43. *Емельянов А.Н.* Эффективные характеристики слоистых композитов, состоящих из анизотропных слоев, в моментной теории упругости // Упругость и неупругость. Материалы Международного научного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвященного 105-летию со дня рождения А.А. Ильюшина (Москва, 20-21 января 2016 года). – М.: Изд-во Моск. ун-та, 2016. – С. 303–307.

44. *Ерофеев В.И.* Братья Коссера и механика обобщенных континуумов // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2009. – Т. 2. – № 4. – С. 5–10.

45. *Ерофеев В.И.* Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1999. – 328 с.

46. *Ерофеев В.И., Землянхин А.И., Катсон В.М., Шешенин С.Ф.* Формирование солитонов деформации в континууме Коссера со стесненным вращением // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2009. – Т.2. – № 4. – С. 67–75.

47. *Ерофеев В.И., Кажяев В.В., Семерикова Н.П.* Макромеханическое моделирование упругой и вязкоупругой сред Коссера // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2009. – Т.2. – № 2. – С. 40–47.

48. *Ерофеев В.И., Потапов А.И.* Нелинейные продольные волны в упругих средах с моментными напряжениями // Акустический журнал. – 1991. – Т. 37. – № 3. – С. 477–483.

49. *Ерофеев В.И.* Распространение нелинейных сдвиговых волн в твердом теле с микроструктурой // Прикладная механика (Киев). – 1993. – Т. 29. – № 4. – С. 18–22.

50. Зеленина А.А., Зубов Л.М. Одномерные деформации нелинейно упругих микрополярных тел // Изв. РАН. МТТ. – 2010. – № 4. – С. 97–106.

51. Иванова Е.А. Моделирование термоупругих процессов в трехмерных средах и оболочках посредством среды Коссера с микроструктурой // РЭНСИТ. – 2013. – Т. 5. – № 1. – С. 98–110.

52. Илюхин А.А., Тимошенко Д.В. Построение основных соотношений одномерной микрополярной теории упругих стержней // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2008. – Т. 8. – № 4. – С. 52–61.

53. Ильюшин А.А. Ломакин В.А. Моментные теории в механике твердых деформируемых тел. // Прочность и пластичность. – М.: Наука, 1971. – С. 54–61.

54. Каюк Я.Ф., Жуковский А.П. К теории пластин и оболочек на основе концепции поверхностей Коссера // Прикладная механика. – 1981. – Т. XVII. – № 10. – С. 80–85.

55. Койтер В.Т. Моментные напряжения в теории упругости // Механика: Период. сб. перев. иностр. статей. – 1965. – № 3. – С. 89–112.

56. Кончакова Н.А. О построении моделей сплошных сред с несимметричными тензорами // Вестник МГУ. Сер. 1. – 2002. – № 4. – С. 41–47.

57. Корепанов В.В., Кулеш М.А., Матвеев В.П., Шардаков И.Н. Аналитические и численные решения в рамках континуума Коссера как основа для постановки экспериментов по обнаружению моментных эффектов в материалах // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2009. – Т. 2. – № 4. – С. 76–91.

58. Корепанов В.В., Кулеш М.А., Матвеев В.П., Шардаков И.Н. Аналитические и численные решения статических и динамических задач несимметричной теории упругости // Физ. мезомех. – 2007. – Т. 10. – № 5. – С. 77–90.

59. Корепанов В.В., Матвеев В.П., Шардаков И.Н. Численное исследование двумерных задач несимметричной теории упругости // Изв. РАН. МТТ. – 2008. – № 2. – С. 63–70.

60. *Кулеш М.А., Грекова Е.Ф., Шардаков И.Н.* Задача о распространении поверхностной волны в редуцированной среде Коссера // *Акустический журнал.* – 2009. – Т. 55. – № 2. – С. 216–225.

61. *Кулеш М.А., Матвеев В.П., Улитин М.В., Шардаков И.Н.* Анализ волнового решения уравнений эластокинетики среды Коссера в случае плоских объемных волн // *ПМТФ.* – 2008. – Т. 49. – № 2. – С. 196–203.

62. *Кулеш М.А., Матвеев В.П., Шардаков И.Н.* Дисперсия и поляризация поверхностных волн Рэлея для среды Коссера // *Изв. РАН. МТТ.* – 2007. – № 4. – С. 100–113.

63. *Кулеш М.А., Матвеев В.П., Шардаков И.Н.* О распространении упругих поверхностных волн в среде Коссера // *Акустический журнал.* – 2006. – Т. 52. – № 2. – С. 227–235.

64. *Кулеш М.А., Матвеев В.П., Шардаков И.Н.* О свойствах поверхностных волн в упругой среде Коссера // *Математическое моделирование систем и процессов: Сборник научных трудов.* – Пермь: ПГТУ, 2006. – Вып. 14. – С. 109–113.

65. *Кулеш М.А., Матвеев В.П., Шардаков И.Н.* Построение аналитического решения волны Лэмба в рамках континуума Коссера // *ПМТФ.* – 2007. – Т. 48. – № 1. – С. 143–150.

66. *Кулеш М.А., Матвеев В.П., Шардаков И.Н.* Построение аналитических решений некоторых двумерных задач моментной теории упругости // *Изв. РАН. МТТ.* – 2002. – № 5. – С. 69–82.

67. *Кулеш М.А., Матвеев В.П., Шардаков И.Н.* Построение и анализ аналитического решения для поверхностной волны Рэлея в рамках континуума Коссера // *ПМТФ.* – 2005. – Т. 46. – № 4. – С. 116–124.

68. *Кунин И.А.* Теория упругих сред с микроструктурой. Нелокальная теория упругости. – М.: Наука, 1975. – 416 с.

69. *Лай Тхань Туан, Тарлаковский Д.В.* Распространение нестационарных кинематических возмущений от сферической полости в псевдоконтинууме Коссера // *МКМК.* – 2011. – Т. 17. – № 2. – С. 184–195.

70. *Лай Тхань Туан, Тарлаковский Д.В.* Распространение нестационарных осесимметричных возмущений от поверхности шара, заполненного псевдоупругой средой Коссера // Электронный журнал “Труды МАИ”. – 2012. – № 53. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=29267>.

71. *Лай Тхань Туан, Тарлаковский Д.В.* Дифракция нестационарных волн на сферической полости в псевдоконтинууме Коссера // РЭНСИТ. – 2013. – Т.5. – № 1. – С. 119–125.

72. *Леонов А.В.* Асимптотический подход к осреднению неоднородной среды Коссера // Современные наукоемкие технологии. – 2010. – № 9. – С. 106–107.

73. *Леонов А.В.* Нахождение определяющих соотношений несимметричной теории упругости путем осреднения неоднородного упругого материала // Вестник ТГТУ. – 2010. – Т. 16. – № 3. – С. 625–631.

74. *Лурье С.А.* Теория сред с сохраняющимися дислокациями. Частные случаи: среды Коссера и Аэро–Кувшинского, пористые среды, среды с «двойникованием» // Современные проблемы механики гетерогенных сред: Сб. науч. тр. Инст. прикладной механики РАН. – 2006. – Вып. 1. – С. 235–267.

75. *Лялин А.Е., Пирожков В.А. Степанов Р.Д.* О распространении поверхностных волн в среде Коссера // Акустический журнал. – 1982. – Т. 28. – № 6. – С. 838–840.

76. *Матвеев В.П., Кулеш М.А., Улитин М.В., Шардаков И.Н.* Волновая динамика упругой линейной среды Коссера // Проблемы современной механики: к 85-летию со дня рождения академика Г. Г. Черного: Сборник. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 2008. – С. 307–322.

77. *Миндлин Р.Д.* Влияние моментных напряжений на концентрацию напряжений // Механика: Сборник переводов. – 1964. – Т. 85. – № 4. – С. 115–128.

78. *Миндлин Р.Д.* Микроструктура в линейной упругости // Механика: Сборник переводов. – 1964. – Т. 86. – № 4. – С. 129–160.

79. *Миндлин Р.Д., Тирстен Г.Ф.* Эффекты моментных напряжений в линейной теории упругости // Механика: Сборник переводов. – 1964. – Т.86. – № 4. – С. 80–114.

80. *Мутафян М.Н., Саркисян С.О.* Асимптотические решения краевых задач тонкого прямоугольника по несимметричной теории упругости // Изв. АН РА. Механика. – 2004. – Т. 57. – № 1. – С. 41–58.

81. *Немировский Ю.В., Янковский А.П.* Определение эффективных термомеханических характеристик однонаправлено армированного гибридного композита в рамках несимметричной теории упругости // МКМК. – 2009. – № 3. – С. 383–394.

82. *Николау В.И.* Моментная теория упругости (Развитие, анализ, приложения). – Одесса: Астропринт, 2006. – 352 с.

83. *Новацкий В.* Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872 с.

84. *Омаров С.Е.* Способ определения материальных функций в линейной моментной теории упругости // Вестник МГУ. Сер. 1. – 2009. – № 5. – С. 37–41.

85. *Пальмов В.А.* Основные уравнения теории несимметричной упругости // ПММ. – 1964. – Т. 28. – Вып. 3. – С. 401–408.

86. *Пальмов В.А.* Плоская задача теории несимметричной упругости // ПММ. – 1964. – Т. 28. – Вып. 6. – С. 1117–1120.

87. *Пальмов В.А.* Приложение теории обобщенного континуума к проблеме пространственного затухания в сложных механических системах // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2009. – Т. 2. – № 4. – С. 105–110.

88. *Победря Б.Е.* О моментной статической задаче в напряжениях // Изв. РАН. МТТ. – 2011. – № 1. – С. 96–98.

89. *Победря Б.Е.* Статическая задача несимметричной теории упругости для изотропной среды // Вестник МГУ. Сер. 1. – 2005. – № 1. – С. 54–59.

90. *Победря Б.Е., Леонов А.В.* Новая постановка задачи несимметричной теории упругости // Вестник ТГТУ. – 2010. – Т. 16. – № 1. – С. 108–118.

91. *Победря Б.Е., Омаров С.Е.* Определяющие соотношения моментной теории упругости // Вестник МГУ. Сер. 1. – 2007. – № 3. – С. 56–58.

92. *Пронина В.С., Филатов Г.Ф.* Поверхностные волны в деформированной упругой среде Коссера // Материалы IX Международного симпозиума

«Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред», Ярополец, 10-14 февр., 2003. – М. 2003. – С. 38–39.

93. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Т.1. Элементарные функции. – М.: Физматлит, 2002. – 632 с.

94. *Садовский В.М., Садовская О.В., Варыгина М.П.* Численное моделирование пространственных волновых движений в моментных средах // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2009. – Т. 2. – № 4. – С. 111–121.

95. *Саркисян С.О.* Краевые задачи тонких пластин в несимметричной теории упругости // ПММ. – 2008. – Т. 72. – № 1. – С. 129–147.

96. *Саркисян С.О., Алваджян Ш.И.* Модели статической деформации анизотропных микрополярных упругих тонких балок и особенности их прочностных-жесткостных характеристик // Научно-технический сборник ВАНТ. – 2011. – № 4. – С. 196–204.

97. *Саркисян С.О., Варданян С.А., Фарманян А.Ж.* Некоторые задачи прочности и термоупругости микрополярных пластин // Международная научная конференция по механике «IV Поляховские чтения», Санкт-Петербург, 7-10 февр., 2006: Тезисы докладов. СПб: ВВМ. – 2006. – С. 213–214.

98. *Саркисян С.О., Саркисян А.А.* Общая динамическая теория микрополярных упругих тонких пластин со свободным вращением и особенности их свободных колебаний // Акустический журнал. – 2011. – № 4. – С. 461–469.

99. *Слепян Л.И., Яковлев Ю.С.* Интегральные преобразования в нестационарных задачах механики. – Л.: Судостроение, 1980. – 344 с.

100. *Суворов Е.М., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.* Плоская задача об ударе твердого тела по полупространству, моделируемому средой Коссера // ПММ. – 2012. – Т. 76. – Вып. 5. – С. 850–859.

101. *Федоров Ю.А.* Основные уравнения плоской задачи моментной теории термоупругости // Изв. Иван. отд-ния Петр. Акад. наук и искусств. – 1998. – № 3. – С. 103–105.



102. *Хмиадашвили М.А., Схвитаридзе К.М., Бицадзе Р.Г.* Краевые задачи моментной теории упругости для шара // Проблемы механики. – 2005. – № 3. – С. 74–79.

103. *Чан Ле Тхай, Тарлаковский Д.В.* Нестационарное осесимметричное движение упругого моментного полупространства под действием нестационарных нормальных поверхностных перемещений // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2017. – Т. 159, кн. 2. – С. 231–245. = *Tran Le Thai, D.V. Tarlakovskii.* Nonstationary Axisymmetric Motion of an Elastic Momentum Half-Space under Nonstationary Normal Surface Displacements // *Lobachevskii Journal of Mathematics.* – 2018. – Vol. 39. – No. 9. – P. 1484–1494.

104. *Чан Ле Тхай, Тарлаковский Д.В.* Осесимметричная задача Лемба для среды Коссера // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2018. – Т. 18, вып. 4. – С. 496–506. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-4-496-506>.

105. *Чан Ле Тхай, Тарлаковский Д.В.* Моментно упругая полуплоскость под действием поверхностных нестационарных нормальных перемещений // Труды МАИ. – 2018. – № 102. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=99731>. (дата обращения: 25.10.2018).

106. *Чан Ле Тхай, Тарлаковский Д.В.* Упругое моментное полупространство под действием осесимметричных нестационарных поверхностных кинематических возмущений // ППП. – 2019. – Т. 81. – № 1. – С. 5–17.

107. *Чан Ле Тхай, Тарлаковский Д.В.* Нестационарные осесимметричные волны в полупространстве, заполненном средой Коссера // Научная конференция «Ломоносовские чтения», секция механики: Тезисы докладов. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 2016. – С. 162.

108. *Чан Ле Тхай, Тарлаковский Д.В.* Нестационарное осесимметричное движение упругого моментного полупространства под действием нестационарных нормальных поверхностных перемещений // Тезисы докладов IV Международного научного семинара «Динамическое деформирование и

контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы» – М.: ООО «ТР-принт», 2016. – С. 152.

109. *Чан Ле Тхай, Тарлаковский Д.В.* Осесимметричные волны в упругом моментном пространстве при заданных на границе нестационарных нормальных перемещениях // *Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред: Материалы XXII Междунар. симп. им. А.Г. Горшкова.* – М.: ООО «ТР-принт», 2016. – Т2. – С. 126–127.

110. *Чан Ле Тхай, Тарлаковский Д.В.* Нестационарное осесимметричное движение упругого моментного полупространства под действием нестационарных касательных поверхностных перемещений // *Тезисы докладов V Международного научного семинара «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы»* – М.: ООО «ТР-принт», 2016. – С. 171.

111. *Чан Ле Тхай, Тарлаковский Д.В.* Нестационарное осесимметричное движение упругого моментного полупространства под действием нестационарных поверхностных касательных сил // *Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред: Материалы XXIII Междунар. симп. им. А.Г. Горшкова.* – М.: ООО «ТР-принт», 2017. – Т1. – С. 203–204.

112. *Чан Ле Тхай, Тарлаковский Д.В., Коровайцева Е.А.* Осесимметричное движение упругого моментного полупространства под действием нестационарных поверхностных касательных сил // *Научная конференция «Ломоносовские чтения», секция механики: Тезисы докладов.* – М.: Изд-во Моск. ун-та, 2017. – С. 117.

113. *Чан Ле Тхай, Тарлаковский Д.В.* Распространение осесимметричных нестационарных возмущений в упругом моментном полупространстве под действием нестационарного поверхностного угла поворота // *Тезисы докладов VI Международного научного семинара «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы»* – М.: ООО «ТР-принт», 2017. – С. 119.

114. *Чан Ле Тхай, Тарлаковский Д.В.* Действие нестационарного осесимметричного нормального давления на полупространство, заполненное средой Коссера // *Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред: Материалы XXIV Междунар. симп. им. А.Г. Горшкова.* – М.: ООО “ТР-принт”, 2018. – Т1. – С. 226–227.

115. *Чан Ле Тхай, Тарлаковский Д.В., Коровайцева Е.А.* Моментно упругое полупространство под действием осесимметричного нестационарного нормального давления // *Научная конференция «Ломоносовские чтения», секция механики: Тезисы докладов.* – М.: Изд-во Моск. ун-та, 2018. – С. 181.

116. *Чан Ле Тхай, Тарлаковский Д.В.* Нестационарные процессы в моментно упругой полуплоскости под действием нормального перемещения // *Тезисы докладов VII Международного научного семинара «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы»* – М.: ООО «ТР-принт», 2018. – С. 122–123.

117. *Чкадуа О.О., Хамза Ф.* Исследование основных задач моментной теории упругости для анизотропных сред // *Сообщ. АН ГССР.* – 1987. – Т. 128. – № 3. – С. 469–472.

118. *Шардаков И.Н., Кулеш М.А.* Построение и анализ некоторых точных аналитических решений двумерных упругих задач в рамках континуума Коссера // *Вестник ПГТУ. Математическое моделирование.* – Пермь: ПГТУ, 2001. – № 9. – С. 187–201.

119. *Шкутин И.Л.* Обобщенные модели типа Коссера для анализа конечных деформаций тонких тел // *ПМТФ.* – 1996. – № 3. – С. 120–132.

120. *Якушев Р.С., Никабадзе М.У., Улуханан А.Р.* Постановка задач теории жестких в поперечном направлении тонких тел в моментах относительно систем ортогональных полиномов // *XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Казань, 20 – 24 августа 2015 года.* – С. 4330–4332.

121. *Adachi Taiji, Tomita Yoshihiro, Tanaka Masao, Era Shuji.* Finite Element Method for Elastic Cosserat Continuum and Its Application to Deformation Behavior of Materials with Microstructure // *Trans. Jap. Soc. Mech. Eng. A.* – 1994. – Vol. 60. – No. 569. – P. 191–197.

122. *Altenbach H., Eremeyev V.* On the linear theory of micropolar plates // *Z Angew. Math. Mech (ZAMM).* – 2009. – Vol. 89. – No. 4. – P. 242–256.

123. *Badriev I.B., Makarov M.V., Paimushin V.N.* Contact statement of mechanical problems of reinforced on a contour sandwich plates with transversally-soft core // *Russ. Math.* – 2017. – Vol. 61. No. 1. – P. 69–75. Doi: 10.3103/S1066369X1701008X.

124. *Badriev I.B., Makarov M.V., Paimushin V.N.* Numerical investigation of physically non-linear problem of sandwich plate bending // *Proc. Eng.* – 2016. – Vol. 150. – P. 1050–1055. Doi: 10.1016/j.proeng.2016.07.213.

125. *Birsan Mircea.* Several results in the dynamic theory of thermoelastic Cosserat shells with voids // *Mech. Res. Commun.* – 2006. – Vol. 33. – No. 2. – P. 157–176.

126. *Birsan Mircea.* Thermal stresses in cylindrical Cosserat elastic shells // *Eur. J. Mech. A.* – 2009. – Vol. 28. – Iss. 1. – P. 94–101.

127. *Cao D. Q., Tucker Robin W.* Nonlinear dynamics of elastic rods using the Cosserat theory: Modelling and simulation // *Int. J. Solids and struct.* – 2008. – Vol. 45. – Iss. 2. – P. 460–477.

128. *Cosserat E., Cosserat F.* *Theorie des corps deformables.* – Paris: A. Hermann et fils, 1909. – 226 p. (Reprint 2009).

129. *Ivanova E.A.* Derivation of theory of thermoviscoelasticity by means of two-component Cosserat continuum. *Technische Mechanik.* – 2012. – Vol. 32. – Iss. 2–5. – P. 273–286.

130. *Khurana A., Tomar S.K.* Longitudinal wave response of a chiral slab interposed between micropolar solid half-spaces. *Int. J. Solids Struct.* – 2009. – No. 46. – P. 135–150.

131. *Kumar Rajneesh, Gupta Rajani Rani*. Propagation of waves in transversely isotropic micropolar generalized thermoelastic half space // *Int. Commun. Heat and Mass Transfer*. – 2010. – Vol. 37. – Iss. 10. – P. 1452–1458.

132. *Kumar Rajneesh, Singh Ranjit, Chadha T. K*. Eigen value approach to second dynamic problem of micropolar elastic solid // *Indian J. Pure and Appl. Math.* – 2003. – Vol. 34. – No. 5. – P. 743–754.

133. *Saxena Hirdeshwar S., Dhaliwal Ranjit S*. Eigenvalue approach to axially symmetric coupled micropolar thermoelasticity // *Bull. Pol. Acad. Sci. Techn. Sci.* – 1990. – T. 38. – No. 1. – P. 7–18.

134. *Shanjie Zhang, Jianming Jin*. Computation of special functions. – New York: John Wiley & Sons, 1996. – 740 p.

135. *Suiker A.S.J., Metrikine A.V., De Borst R*. Comparison of wave propagation characteristics of the Cosserat continuum model and corresponding discrete lattice models // *Int. J. Solids and Struct.* – 2001. – Vol. 38. – Iss. 9. – P. 1563–1583.

136. *Tomar S.K., Khurana A*. Elastic waves in an electro-microelastic solid // *Int. J. Solids Struct.* – 2008. – № 45. – P. 276–302.

137. *Tomar S.K., Khurana A*. Reflection and transmission of elastic waves from a plane interface between two thermo-microstretch solid half-spaces // *Int. J. of Appl. Math. Mech.* – 2009. – № 5 (4). – P. 48–68.

138. *Voigt W*. Theoretische Studien uber die Elasticitatsverhaltnisse der Krystalle. – *Abh.Kgl.Ges.Wiss.Gottingen*, 1887. – Vol. Math.Kl. – P. 3–51.