УДК 536.2

Условия реализуемости автомодельного процесса теплопереноса в анизотропном полупространстве с подвижной границей при локальном тепловом воздействии в условиях теплообмена с внешней средой

А.В. Аттетков, П.А. Власов, И.К. Волков

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет), Москва, 105005, Россия
e-mail: fn2@bmstu.ru

DOI: 10.34759/TPT-2019-11-11-499-504

Поступила в редакцию 01.10.2019
После доработки 17.10.2019
Принята к публикации 18.10.2019

В связи с теоретической и прикладной значимостью исследований автомодельных («самоподобных») процессов теплопереноса в твердых телах сформулирована задача об определении нестационарного температурного поля анизотропного полупространства, подвижная граница которого подвержена локальному тепловому воздействию в условиях теплообмена с внешней средой. Установлено, что в отличие от известных автомодельных процессов теплопереноса в изотропных твердых телах, к которым, в частности, можно отнести процессы формирования температурных полей в нефтяных пластах при заводнении в условиях поршневого вытеснения нефти водой, для исследования реализуемости автомодельного процесса теплопереноса в рассматриваемой ситуации необходимо использование не одного, а двух автомодельных переменных. Первое автомодельное переменное определяет анализируемый процесс теплопереноса в плоскости, параллельной подвижной границе анизотропного полупространства, второе – в направлении ее внешней нормали. Представление математической модели сформулированной задачи теплопереноса в анизотропном полупространстве с подвижной границей с использованием двух автомодельных переменных позволяет уяснить, что реализуемость автомодельного процесса теплопереноса в рассматриваемой ситуации связана с выполнением вполне определенных условий. Эти условия полностью и однозначно определяют закон движения границы объекта исследований, структуру воздействующего на него внешнего теплового потока и реализуемый режим теплообмена в изучаемой системе «анизотропное полупространство–внешняя среда», т.е. функциональную зависимость числа Био – критерия конвективно-кондуктивного подобия – от пространственных и временнóго переменных. Теоретически обосновано, что в анализируемом процессе теплопереноса автомодельные структуры и внешнего теплового потока, и реализуемого режима теплообмена имеют одинаковый вид и функционально зависят от критерия тепловой гомохронности – числа Фурье.

Ключевые слова: анизотропное полупространство, подвижная граница, теплообмен с внешней средой, локальное тепловое воздействие, автомодельная задача теплопереноса.

Введение

В математической теории теплопроводности [1–4] особое место занимают исследования автомодельных («самоподобных») процессов теплопереноса в изотропных твердых телах [5–7]. При этом, несмотря на их очевидную теоретическую и практическую значимость, множество известных публикаций, связанных с исследованиями автомодельных процессов теплопереноса в твердых телах и их практическими приложениями, весьма ограничено. В частности, в работе [5] сформулирована и решена задача о распространении тепловой волны от мгновенного источника энергии в изотропном пространстве с постоянной или зависящей от температуры теплопроводностью, а в [7] представлены результаты дальнейших исследований в этом направлении. В работе [8] в качестве объекта исследований рассмотрена система «изотропное пространство–сферический очаг разогрева». Показано, что реализация в этой системе автомодельного процесса теплопереноса сопровождается проявлением физического эффекта «инерции» (локализации) теплоты [6, 9] и может приводить к существованию граничного режима с обострением в очаге разогрева [8]. В работах [10–13] изложены результаты дальнейших исследований, связанных с изучением физических свойств автомодельного процесса теплопереноса в анализируемой системе.

Следует особо отметить, что авторам известно лишь несколько публикаций, в которых представлены результаты исследований автомодельных процессов теплопереноса в анизотропных твердых телах [14–16]. В частности, в работах [14, 15] сформулирована и решена задача о распространении тепловой волны в анизотропном пространстве с зависящей от температуры теплопроводностью, инициируемой мгновенным источником энергии, при наличии (или отсутствии) ее стоков в объекте исследований.

Цель проведенных исследований – идентификаций условий реализуемости автомодельности процесса теплопереноса в анизотропном полупространстве с анизотропией свойств общего вида, подвижная граница которого находится под локальным тепловым воздействием в условиях теплообмена с внешней средой.

Исходные допущения и математическая модель

Для достижения поставленной цели при построении исходной математической модели процесса формирования температурного поля $T(x_1, x_2, x_3, t)$ объекта исследований в фиксированной декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$ пространства $\mathbb{R}^3$ предполагалось, что:

1) объект исследований имитируется анизотропным полупространством

$$\left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{matrix} -\infty < x_1 < +\infty \\ \omega(t) \le x_2, t \ge 0 \\ -\infty < x_3 < +\infty \end{matrix} \right\},$$

граница которого перемещается параллельно самой себе по закону

$$x_2 = \omega(t), \;\; t \ge 0,$$

где $\omega(t)$ – неубывающая положительная функция и $\omega(0) = 0$;

2) подвижная граница объекта исследований находится как под воздействием нестационарного внешнего теплового потока с плотностью мощности $q(x_1, x_3, t)$, ориентированного в направлении ее внутренней нормали, так и внешней среды, постоянная температура которой T_0 совпадает с начальной температурой анизотропного полупространства;

3) реализуется нестационарный режим теплообмена в системе «объект исследований–внешняя среда» с коэффициентом теплоотдачи $\alpha(x_1, x_3, t)$;

4) функционалы $q(x_1, x_3, t)$, $\alpha(x_1, x_3, t)$ как скалярные функции пространственных переменных x_1, x_3 при любом фиксированном значении временного переменного $t \ge 0$ интегрируемы с квадратом в $\mathbb{R}^2$ [17], т.е.

$$q(x_1, x_3, t)\big|_{t \ge 0} \in L^2(\mathbb{R}^2);\; \alpha(x_1, x_3, t)\big|_{t \ge 0} \in L^2(\mathbb{R}^2),$$

а как скалярные функции временного переменного t они являются оригиналами интегрального преобразования Лапласа [2, 3], т.е.

$$q(x_1, x_3, t)\big|_{[x_1, x_3]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2} \in L_t\left(0, +\infty\right];$$

$$\alpha(x_1, x_3, t)\big|_{[x_1, x_3]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2} \in L_t\left(0, +\infty\right].$$

Для удобства дальнейших рассуждений воспользуемся следующими обозначениями:

$$\theta = \frac{T - T_0}{T_0};\;\; \mathrm{Fo} = \frac{\lambda_{22}}{c\rho l^2}t; \quad x = \frac{x_1}{l}; \quad y = \frac{x_2}{l};$$

$$z = \frac{x_3}{l}; \quad \mu_{ij} = \frac{\lambda_{ij}}{\lambda_{22}}; \quad Q = \frac{ql}{\lambda_{22}T_0}, \;\; \mathrm{Bi} = \frac{\alpha l}{\lambda_{22}},$$

где l – выбранная единица масштаба пространственных переменных; $\lambda_{ij} \equiv \lambda_{ji}$ – компонента тензора теплопроводности анизотропного материала объекта исследований, а ρ и c – его плотность и удельная массовая теплоемкость. В этом случае, согласно исходным допущениям, функционал $\theta(x,y,z,\mathrm{Fo})$, определяющий искомое температурное поле, должен удовлетворять линейному дифференциальному уравнению в частных производных второго порядка параболического типа [3, 4]:

$$\begin{gathered}\frac{\partial\theta}{\partial\,\mathrm{Fo}}=\mu_{11}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+2\mu_{12}\frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial y}+\\+2\mu_{13}\frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}+\\+2\mu_{23}\frac{\partial^2\theta}{\partial y\partial z}+\mu_{33}\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2};\\ \begin{bmatrix}x\\z\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^2,\ y>\nu(\mathrm{Fo}),\ \mathrm{Fo}>0,\end{gathered}\tag{1}$$

где $\nu(\mathrm{Fo})\equiv l^{-1}\omega(c\rho l^2\lambda_{22}^{-1}\,\mathrm{Fo})$,
однородному начальному условию

$$\theta(x,y,z,\mathrm{Fo})\big|_{\mathrm{Fo}=0}=0\tag{2}$$

и специфическому краевому условию [18] на подвижной границе анизотропного полупространства:

$$\begin{gathered}\left[\mu_{12}\frac{\partial\theta}{\partial x}+\frac{\partial\theta}{\partial y}+\mu_{23}\frac{\partial\theta}{\partial z}\right]\Bigg|_{y=\nu(\mathrm{Fo})}=\\=-Q(x,z,\mathrm{Fo})+\mathrm{Bi}(x,z,\mathrm{Fo})\theta(x,y,z,\mathrm{Fo})\big|_{y=\nu(\mathrm{Fo})}.\end{gathered}\tag{3}$$

Кроме того, функционал $\theta(x,y,z,\mathrm{Fo})$ должен удовлетворять следующим естественным требованиям:

$$\begin{gathered}\theta(x,y,z,\mathrm{Fo})\Big|_{\left([x,z]^{\mathrm T}\in\mathbb{R}^2\right)\wedge(\mathrm{Fo}\ge0)}\in L^2\left[\nu(\mathrm{Fo}),+\infty\right);\\ \theta(x,y,z,\mathrm{Fo})\Big|_{\left(y\ge\nu(\mathrm{Fo})\right)\wedge(\mathrm{Fo}\ge0)}\in L^2(\mathbb{R}^2);\\ \theta(x,y,z,\mathrm{Fo})\Big|_{\left([x,z]^{\mathrm T}\in\mathbb{R}^2\right)\wedge(y\ge\nu(\mathrm{Fo}))}\in L_{\mathrm{Fo}}\left[0,+\infty\right).\end{gathered}\tag{4}$$

Идентификация достаточных условий реализуемости автомодельного процесса теплопереноса в анизотропной системе

Для достижения основной цели настоящих исследований воспользуемся автомодельными переменными

$$\xi\triangleq\frac{\alpha x+\beta z}{\sqrt{\mathrm{Fo}}},\quad\eta\triangleq\gamma\frac{y-\nu(\mathrm{Fo})}{\sqrt{\mathrm{Fo}}},\tag{5}$$

идентификация параметров α,β,γ которых будет реализована далее. В этом случае с учетом очевидных равенств

$$\frac{\partial}{\partial\,\mathrm{Fo}}=-\frac{1}{2\,\mathrm{Fo}}\left\{\xi\frac{\partial}{\partial\xi}+\left[2\gamma\dot\nu(\mathrm{Fo})\sqrt{\mathrm{Fo}}+\eta\right]\frac{\partial}{\partial\eta}\right\};$$

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\alpha}{\sqrt{\mathrm{Fo}}}\bullet\frac{\partial}{\partial\xi};\quad\frac{\partial}{\partial y}=\frac{\gamma}{\sqrt{\mathrm{Fo}}}\bullet\frac{\partial}{\partial\eta};\quad\frac{\partial}{\partial z}=\frac{\beta}{\sqrt{\mathrm{Fo}}}\bullet\frac{\partial}{\partial\xi},$$

где $\dot\nu(\mathrm{Fo})$ – скорость перемещения подвижной границы объекта исследований (производная функционала $\nu(\mathrm{Fo})$), смешанная задача (1)–(4) преобразуется к эквивалентной ей краевой задаче:

$$\begin{gathered}a\frac{\partial^2\theta}{\partial\xi^2}+\frac{\xi}{2}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial\xi}+2\gamma\frac{\partial^2\theta}{\partial\xi\partial\eta}+\gamma^2\frac{\partial^2\theta}{\partial\eta^2}+\\+\frac{1}{2}\left[\eta+2\gamma\dot\nu(\mathrm{Fo})\sqrt{\mathrm{Fo}}\right]\frac{\partial\theta}{\partial\eta}=0,\ \xi\in\mathbb{R},\eta>0;\\ \left[b\frac{\partial\theta}{\partial\xi}+\gamma\frac{\partial\theta}{\partial\eta}-\sqrt{\mathrm{Fo}}\,\mathrm{Bi}\,\theta\right]\Bigg|_{\eta=0}=-\sqrt{\mathrm{Fo}}Q;\\ \lim_{\xi^2+\eta\to+\infty}\theta(\xi,\eta)=0,\end{gathered}\tag{6}$$

при записи которой использованы следующие обозначения:

$$\begin{gathered}a\triangleq\mu_{11}\alpha^2+2\mu_{13}\alpha\beta+\mu_{33}\beta^2;\\ b\triangleq(\mu_{12}\alpha+\mu_{23}\beta)\gamma.\end{gathered}\tag{7}$$

Следует также заметить, что при переходе к автомодельным переменным, определенным равенствами (5), начальное условие (2) смешанной задачи (1)–(4) трансформировалось в граничное условие (при $\xi^2+\eta\to+\infty$) эквивалентной ей краевой задачи (6), (7).

Непосредственный анализ математической модели (6), (7) позволяет сделать вывод о реализуемости искомого автомодельного процесса теплопереноса при выполнении следующих условий:

$$2\gamma\dot\nu(\mathrm{Fo})\sqrt{\mathrm{Fo}}\equiv\nu_0-\mathrm{const};\tag{8}$$

$$\mathrm{Bi}(x,z,\mathrm{Fo})\sqrt{\mathrm{Fo}}\equiv\mathrm{Bi}^{(o)}(\xi);\tag{9}$$

$$Q(x,z,\mathrm{Fo})\sqrt{\mathrm{Fo}}\equiv Q_0(\xi).\tag{10}$$

При этом условие автомодельности (8) однозначно определяет закон движения границы анизотропного полупространства:

$$\nu(\mathrm{Fo})=\gamma^{-1}\nu_0\sqrt{\mathrm{Fo}},\quad\gamma^{-1}\nu_0>0.\tag{11}$$

Для удобства дальнейших рассуждений полагаем

$$Z\triangleq\nu_0+\eta\tag{12}$$

и, воспользовавшись условиями автомодельности (8)–(10), представим краевую задачу (6), (7) в следующем виде:

$$
\begin{gathered}
2a\frac{\partial^2\theta}{\partial\xi^2}+\xi\frac{\partial\theta}{\partial\xi}+4b\frac{\partial^2\theta}{\partial\xi\partial Z}+\\
+2\gamma^2\frac{\partial^2\theta}{\partial Z^2}+Z\frac{\partial\theta}{\partial Z}=0,\xi\in\mathbb{R},\ Z>\nu_0;\\
\left[b\frac{\partial\theta(\xi,Z)}{\partial\xi}+\gamma\frac{\partial\theta(\xi,Z)}{\partial Z}-\mathrm{Bi}^{(0)}(\xi)\theta(\xi,Z)\right]\Bigg|_{Z=\nu_0}=\\
=-Q_0(\xi);\\
\lim_{\xi^2+Z\to+\infty}\theta(\xi,Z)=0,
\end{gathered}
\tag{13}
$$

где квадратичная форма a (7) является положительно определенной, в чем можно убедиться непосредственно воспользовавшись свойствами тензора теплопроводности второго ранга [4] и критерием Сильвестра [19].

Для нахождения решения краевой задачи (13) в аналитически замкнутом виде полагаем

$$\alpha\triangleq-\frac{\mu_{23}}{\mu_{12}}\beta,\quad \gamma\triangleq\frac{1}{\sqrt{2}}; \tag{14}$$

$$\mathrm{Bi}^{(0)}(\xi)\triangleq\mathrm{Bi}^{(0)}-\mathrm{const},\ a\triangleq 0.5. \tag{15}$$

В этом случае согласно (7) и (14)

$$b=0, \tag{16}$$

и с учетом (7) и (15) имеем:

$$0<a\equiv\left[\mu_{11}\left(\frac{\mu_{23}}{\mu_{12}}\right)^2-2\mu_{13}\left(\frac{\mu_{23}}{\mu_{12}}\right)+\mu_{33}\right]\beta^2=\frac{1}{2}$$

и, как следствие,

$$\beta=\frac{\mu_{12}}{\sqrt{2}}\left(\mu_{11}\mu_{23}^2-2\mu_{13}\mu_{23}\mu_{12}+\mu_{33}\mu_{12}^2\right)^{-1/2}. \tag{17}$$

Таким образом, согласно (13)–(17), рассматриваемая задача автомодельного теплопереноса в анизотропном полупространстве, граница которого перемещается по закону, представленному равенством (11), и подвержена воздействию внешнего теплового потока с плотностью мощности, определенной равенством (10), в условиях теплообмена с внешней средой по закону Ньютона, где число Bi определено равенствами (9), (15), может быть представлена в следующем виде:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial^2\theta}{\partial\xi^2}+\xi\frac{\partial\theta}{\partial\xi}+\frac{\partial^2\theta}{\partial Z^2}+Z\frac{\partial\theta}{\partial Z}=0,\xi\in\mathbb{R},\ Z>\nu_0;\\
\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\partial\theta(\xi,Z)}{\partial Z}-\mathrm{Bi}^{(0)}\theta(\xi,Z)\right]\Bigg|_{Z=\nu_0}=-Q_0(\xi);\\
\lim_{\xi^2+Z\to+\infty}\theta(\xi,Z)=0.
\end{gathered}
\tag{18}
$$

Заметим, что для нахождения решения краевой задачи (18) в аналитически замкнутом виде целесообразно воспользоваться либо экспоненциальным интегральным преобразованием Фурье, применив его по переменному ξ, либо сингулярным интегральным преобразованием по переменному Z, порождаемым линейным дифференциальным оператором второго порядка $\partial^2/\partial Z^2+Z\partial/\partial Z$ и краевым условием третьего рода, представленным в (18) [17].

Заключение

1. Реализуемость автомодельного процесса теплопереноса в анизотропном полупространстве, подвижная граница которого находится под локальным тепловым воздействием в условиях теплообмена с внешней средой, непосредственно связана с выполнением условий, представленных совокупностью равенств (8)–(10).

2. Равенства (8)–(10) определяют достаточные условия реализуемости автомодельного процесса теплопереноса в рассматриваемой ситуации. Эти условия полностью и однозначно определяют закон движения границы объекта исследований, структуру воздействующего на него внешнего теплового потока и реализуемый режим теплообмена в системе «анизотропное полупространство–внешняя среда», т.е. функциональную зависимость числа Bi от пространственных и временного переменных.

3. Установлено, что в изучаемом процессе теплопереноса автомодельные структуры внешнего теплового потока и реализуемого режима теплообмена с внешней средой имеют одинаковый вид.

4. Используемые автомодельные переменные полностью определены равенствами (5), (14), (17).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Карслоу Г., Егер Д.** Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964. 488 с.
2. **Лыков А.В.** Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.
3. **Карташов Э.М.** Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высшая школа, 2001. 552 с.
4. **Формалёв В.Ф.** Теплопроводность анизотропных тел. Аналитические методы решения задач. М.: Физматлит, 2014. 312 с.
5. **Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П.** Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука, 1966. 686 с.

6. **Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П.** Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987. 478 с.
7. **Волосевич П.П., Леванов Е.И.** Автомодельные решения задач газовой динамики и теплопереноса. М.: Изд-во МФТИ, 1997. 240 с.
8. **Аттетков А.В., Волков И.К.** О возможности реализации режима термостатирования границы сферического очага разогрева // Известия РАН. Энергетика. 2016. № 3. С. 141–147.
9. **Змитренко Н.В., Михайлов А.П.** Инерция тепла. М.: Знание, 1982. 64 с.
10. **Аттетков А.В., Волков И.К.** Автомодельное решение задачи теплопереноса в твердом теле со сферическим очагом разогрева, обладающим термически тонким покрытием // Тепловые процессы в технике. 2016. Т. 8. № 7. С. 297–300.
11. **Аттетков А.В., Волков И.К.** О реализации граничного режима с обострением в автомодельном процессе теплопереноса в твердом теле со сферическим очагом разогрева, обладающим пленочным покрытием // Тепловые процессы в технике. 2017. Т. 9. № 3. С. 126–130.
12. **Аттетков А.В., Волков И.К., Гайдаенко К.А.** Автомодельное решение задачи теплопереноса в твердом теле со сферическим очагом разогрева, подвижная граница которого обладает пленочным покрытием // Тепловые процессы в технике. 2017. Т. 9. № 4. С. 178–183.
13. **Аттетков А.В., Волков И.К., Гайдаенко К.А.** Автомодельные процессы теплопереноса в прозрачном для излучения твердом теле с поглощающим включением при наличии фазовых превращений в системе // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение. 2019. № 2. С. 60–70.
14. **Формалёв В.Ф., Рабинский Л.Н.** Волновой теплоперенос в анизотропном пространстве с нелинейными характеристиками // Теплофизика высоких температур. 2014. Т. 52. № 5. С. 704–709.
15. **Формалёв В.Ф., Кузнецова Е.Л.** Локализация тепловых возмущений в нелинейных анизотропных средах с поглощением // Теплофизика высоких температур. 2015. Т. 53. № 4. С. 579–584.
16. **Формалёв В.Ф.** Теплоперенос в анизотропных твердых телах. Численные методы, тепловые волны, обратные задачи. М.: Физматлит, 2015. 280 с.
17. **Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М.** Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высшая школа, 1970. 712 с.
18. **Пехович А.И., Жидких В.М.** Расчет теплового режима твердых тел. Л.: Энергия, 1968. 304 с.
19. **Беллман Р.** Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1969. 368 с.

Conditions of heat transfer self-similar process realization in anisotropic half-subspace with movable boundary at local thermal impact in conditions of heat exchange with external environment

A.V. Attetkov, P.A. Vlasov, I.K. Volkov

Bauman Moscow State Technical University (National research university), Moscow, 105005, Russia
e-mail: fn2@bmstu.ru

Due to the pertinence of theoretical and applied studies of self-similar processes of heat transfer in solids, a problem of determining of non-stationary temperature field of anisotropic half-subspace, which movable boundary is subjected to a heat impact in conditions of heat exchange with external environment, was formulated. It was found, that unlike the well-known self-similar heat transfer processes in isotropic solids, to which the temperature field forming processes in oil stratums while water flooding in conditions of naphtha frontal driving by water might be referred to in particular, the use of two, instead of one, self-similar variables is required while studying heat transfer self-similar process for the situation under consideration. The first self-similar variable defines the analyzed heat transfer process in the plane, parallel to the moving boundary of an anisotropic half-subspace, and the second one in the direction of its external normal. Representation of mathematical model of the formulated problem of heat transfer in anisotropic half-subspace with moving boundary employing two self-similar variables allows understanding that realizability of self-similar process of heat transfer in the situation under consideration is associated with fulfillment of the quite certain conditions. These conditions define completely and unambiguously the law of movement of the boundary of the subject under study, as well as the structure of the thermal flow affecting it, and a heat transfer mode being realized in the studied system “anisotropic half-subspace–external environment”, i.e. functional dependence of Bio’s number (which is criterion of convective-conductive similarity) on spatial and time variables. It was substantiated theoretically, that in the heat transfer process being analyzed, self-similar structures of both external heat flow and heat transfer mode being realized are of the same kind, and functionally dependent on thermal homochronoucity criterion, i.e. Fourier number.

Keywords: non-isotropic half-subspace, moving boundary, heat exchange with external environment, local thermal impact, auto-modelling problem of heattransfer.

REFERENCES

1. **Karslou G., Eger D.** *Teploprovodnost' tvyordyh tel* [Thermal conductivity of solids]. M.: Nauka, 1964. 488 p. In Russ.
2. **Lykov A.V.** *Teoriya teploprovodnosti* [Theory of heat conductivity]. Moscow: Vysshaya shkola, 1967. 600 p. In Russ.
3. **Kartashov E.M.** *Analiticheskie metody v teorii teploprovodnosti tvyordyh tel* [Analytical methods in the theory of the thermal conductivity of solids]. M.: Vysshayashkola, 2001. 552 p. In Russ.
4. **Formalev V.F.** *Teploprovodnost' anizotropnyh tel. Analiticheskie metody resheniya zadach* [Thermal conductivity of anisotropic bodies. Analytical methods for solving problems]. M.: Fizmatlit, 2014. 312 p.
5. **Zel'dovich Y.B., Raizer Y.P.** *Fizika udarnykh voln i vysokotemperaturnykh gidrodinamicheskikh yavlenij* [Physics of shock waves and high-temperature hydrodynamic phenomena]. Moscow: Nauka, 1966. 686 p. In Russ.
6. **Samarsky A.A., Galaktionov V.A., Kurdyumov S.P., Mikhailov A.P.** *Rezhimy s obostreniem v zadachakh dlya kvazilinejnykh parabolicheskikh uravnenij* [Regimes with sharpenings in problems for quasilinear parabolic equations]. Moscow: Nauka, 1987. 478 p. In Russ.
7. **Volosevich P.P., Levanov E.I.** *Avtomodel'nye resheniya zadach gazovojdinamiki i teploperenosa* [Self-similar solutions of the gas dynamics and heat-transfer problems]. Moscow: Publishing house of MIPT, 1997. 240 p. In Russ.
8. **Attetkov A.V., Volkov I.K.** O vozmozhnosti realizatsii rezhima termostatirovaniya granitsy sfericheskogo ochaga razogreva [On the possibility of the realization of thermostating mode of a spherical hot spot boundary]. *Izvestiya RAN. Energetika – Proceedings of the RAS. Energetics,* 2016, no. 3, pp. 141–147. In Russ.
9. **Zmitrenko N.V., Mikhailov A.P.** *Inertsiya tepla* [Inertia of heat]. Moscow: Znanie, 1982. 64 p. In Russ.
10. **Attetkov A.V., Volkov I.K.** Avtomodel'noe reshenie zadachi teploperenosa v tverdom tele so sfericheskim ochagom razogreva, obladayushhim termicheski tonkim pokrytiem [Self-similar solution of heat transport problems in a solid with a spherical hot spot having a thermally thin coating]. *Teplovye protsessy v tekhnike – Thermal Processes in Engineering*, 2016, vol. 8, no. 7, pp. 297–300. In Russ.
11. **Attetkov A.V., Volkov I.K.** O realizatsii granichnogo rezhima s obostreniem v avtomodel'nom protsesse teploperenosa v tverdom tele so sfericheskim ochagom razogreva, obladayushhim plenochnym pokrytiem [The implementation of the boundary regime with peaking in the self-similar process of the heat transfer in the solid spherical hot spot with a film coating]. *Teplovye protsessy v tekhnike – Thermal Processes in Engineering*, 2017, vol. 9, no. 7, pp. 126–130. In Russ.
12. **Attetkov A.V., Volkov I.K., Gaydaenko K.A.** Avtomodel'noe reshenie zadachi teploperenosa v tverdom tele so sfericheskim ochagom razogreva, podvizhnaya granitsa kotorogo obladaet plenochnym pokrytiem [Self-similar solution of the problem of the heat transfer in a solid with spherical hot spot, which moving boundary has a firm coating]. *Teplovye protsessy v tekhnike – Thermal Processes in Engineering*, 2017, vol. 9, no. 4, pp. 178–183. In Russ.
13. **Attetkov A.V., Volkov I.K., Gaydaenko K.A.** Avtomodel'nye protsessy teploperenosa v prozrachnom dlya izlucheniya tverdom tele s pogloshhayushhim vklyucheniem pri nalichii fazovykh prevrashhenij v sisteme [Self-similar heat transfer processes in a radiation-transparent solid body containing an absorptive inclusion with the system featuring phase transitions]. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Mashinostroenie – Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Mechanical Engineering,* 2019, no. 2, pp. 60–70. DOI: 10.18698/0236-3941-2019-2-60-70
14. **Formalev V.F., Rabinskii L.N.** Wave heat transfer in anisotropic space with nonlinear characteristics. *High Temperature*, 2014, vol. 52, no. 5, pp. 675–680. DOI: 10.1134/S0018151X14050058
15. **Formalev V.F., Kuznetsova E.L., Rabinskiy L.N.** Localization of thermal disturbances in nonlinear anisotropic media with absorption. *High Temperature*, 2015, vol. 53, no. 4, pp. 548–553. DOI: 10.1134/S0018151X15040100
16. **Formalev V.F.** *Teploperenos v anizotropnyh tvyordyh telah. Chislennye metody, teplovye volny, obratnye zadachi* [Heat transfer in anisotropic solids. Numerical methods, heat waves, inverse problems]. Moscow: Fizmatlit, 2015. 280 p. In Russ.
17. **Koshlyakov N.S., Gliner E.B., Smirnov M.M.** *Uravneniya v chastnykh proizvodnykh matematicheskoj fiziki* [Partial differential equations of mathematical physics]. Moscow: Vysshaya shkola, 1970. 712 p. In Russ.
18. **Pekhovich A.I., Zhidkih V.M.** *Raschyot teplovogo rezhima tvyordyh tel* [Calculation of the thermal regime of solids]. L.: Energiya, 1968. 304 p. In Russ.
19. **Bellman R.** *Vvedenie v teoriyu matric* [Introduction to the theory of matrices]. M.: Nauka, 1969. 368 p. In Russ.