

## **Моделирование и анализ вращательно-колебательных движений деформируемой Земли**

В.В. Перепелкин

*На основе данных измерений параметров вращения Земли методом наименьших квадратов построены интерполяция колебаний полюса на восьмилетнем интервале времени и двухлетний прогноз с помощью основной математической модели содержащей чандлеровскую, годовую составляющие и нерегулярный медленный дрейф (тренд) среднего полюса Земли. Проведено сопоставление теоретических кривых (прогноза) и реализовавшегося движения на основе приведенных данных измерений Международной Службы Вращения Земли.*

*Рассмотрена модель, учитывающая колебания, вызванные лунным воздействием. На периоде биений установлено проявление высокочастотных лунных колебаний с месячным и двухнедельным периодами и возможность их интерполирования на коротком интервале времени.*

### **Введение**

В основе многих астрометрических исследований лежит динамическая теория вращения Земли относительно центра масс [1-4, 6-9]. Известно из астрономических наблюдений (с конца 19в. проводились регулярные наблюдения и измерения), что ось вращения Земли с течением времени изменяет свою ориентацию как по отношению к связанной, так и инерциальной системам координат. Весьма сложный процесс колебаний полюса содержит составляющие с сильно различающимися частотными и амплитудными характеристиками. Так в колебательном движении полюса выделяются: чандлеровская составляющая, амплитуда которой достигает величины  $0,20''$  –  $0,25''$ , а период равен приблизительно 430–440 зв. сут., годовая составляющая с амплитудой  $0,20''$  –  $0,25''$  и периодом равным одному году, а также высокочастотные составляющие, обусловленные гравитационным воздействием Луны и планет.

Создание математических моделей вращения деформируемой Земли, которые с высокой точностью идентифицируют ее параметры вращения на основе данных измерений Международной Службы Вращения Земли (МСВЗ) и дают надежный прогноз движения полюса, является основополагающим при исследовании ряда астрометрических, геодинамических и

навигационных задач [1-4, 6-9]. В связи с модернизацией и развитием отечественной навигационной системы ГЛОНАСС весьма актуальным оказывается достижение высоких точностей координатно-временного обеспечения наземных (стационарных и подвижных), а также движущихся в околоземном пространстве объектов [2] (зарубежным аналогом является система GPS). Эта прикладная задача непосредственно связана с фундаментальной проблемой определения параметров вращения Земли, т.е. колебаниями полюса и прогноза его движения как на длительном (1-2) года, так и на относительно коротком (30-100 суток) интервалах времени.

### *Небесно-механическая модель в теории вращения Земли вокруг центра масс*

Для описания вращательного движения деформируемой Земли и колебаний ее полюса рассматривается упрощенная механическая модель вязкоупругого твердого тела [3, 4]. Планета представляется двухслойной, состоящей из абсолютно твердого ядра (шара) и вязкоупругой мантии. Какое-либо усложнение модели фигуры Земли не является оправданным, поскольку в этом случае определение требуемых физико-механических характеристик планеты на основе измерений не может быть проведено с требуемой точностью. Влияние упругой податливости мантии на вращение Земли вокруг центра масс имеет существенное значение и связано с уточнением тензора инерции вращающейся деформируемой Земли и с вычислением вектора кинетического момента и его производной по времени.

Стандартным образом вводится жестко связанная с твердым ядром недеформированной планеты декартова система координат  $C_2 x_i$  ( $i=1, 2, 3$ ). В качестве осей удобно взять главные оси тензора инерции, а точку  $C_2$  совместить с центром масс. Для деформированного состояния вводится соответствующая система  $C'_2 x'_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) путем переноса начала координат из точки  $C_2$  в точку  $C'_2$  – центр масс с учетом малых деформаций – и параллельного переноса осей. Упругие деформации  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{u}_*$  в системах  $C_2 x_i$  и  $C'_2 x'_i$  соответственно связаны выражением  $\mathbf{u}_* = \mathbf{u} - \mathbf{u}_c$ , где  $\mathbf{u}_c$  – смещение центра масс относительно ядра. С целью упрощения расчетов полагается, что мантия однородна и изотропна. Для искомого вектора  $\mathbf{u}$  имеют место уравнение состояния Эйлера-Коши [5] и граничные условия на поверхности  $P$  Земли и поверхности  $P_0$  ядра:

$$\Delta \mathbf{u} + \frac{1}{1-2\nu} \nabla(\nabla, \mathbf{u}) + \frac{\rho}{\mu} \Phi = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \sigma_n |_{P} = 0, \quad (1)$$

$$\mathbf{u} |_{P_0} = 0.$$

Здесь  $\Delta$  – оператор Лапласа,  $\nabla$  – оператор Гамильтона,  $\rho$  – плотность,  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $\mu$  – модуль сдвига,  $\Phi$  – массовая плотность сил инерции,  $\mathbf{n}$  – вектор нормали к  $P$ ,  $\sigma_n$

– тензор напряжений. Далее в квазистатическом приближении ( $\mathbf{u} = \dot{\mathbf{u}} = 0$ ) проводится исследование уравнения (1).

Важно отметить, что в функции  $\Phi$  можно пренебречь также членом, содержащим  $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ , где  $\boldsymbol{\omega}$  – вектор угловой скорости вращения Земли. Это обусловлено близостью вектора  $\boldsymbol{\omega}$  к главной оси инерции – оси фигуры Земли.

Представим искомую функцию в виде  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0(\mathbf{r}) + \mathbf{u}_*(\mathbf{r}, t)$ , где  $\mathbf{u}_0$  – квазистатическое смещение (статический экваториальный выступ), а  $\mathbf{u}_*$  – деформации, вызванные приливными гравитационными силами Луны и Солнца. Функция  $\mathbf{u}_0$  – определяется на первом этапе исследований для уточнения тензора инерции деформируемой Земли при построении модели движения полюса на сравнительно коротких промежутках времени. Она находится как решение краевой задачи (1) при  $\Phi = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$  и может быть представлена в виде разложения по степеням числового параметра  $\rho\omega^2 R^2 / \mu$ , где  $R$  – характерный линейный размер (радиус Земли). Соответствующим образом с учётом астрометрических данных оценивается добавка  $\mathbf{u}_*$ , характеризующая диссипативные приливные моменты сил.

Выпишем вектор  $\mathbf{G}$  кинетического момента Земли в деформированном состоянии и его производную

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \int_{\Omega} (\mathbf{r} + \mathbf{u}) \times \mathbf{v} \rho dV, \\ \dot{\mathbf{G}} &= \int_{\Omega} (\mathbf{r} + \mathbf{u}) \times (\mathbf{w} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) \rho dV. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $dV$  – элемент объёма,  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{w}$  – скорость и ускорение, вычисляемые по правилам кинематики для вращающейся системы координат. Область  $\Omega$  содержит абсолютно твёрдое ядро, для которого  $\mathbf{u} \equiv 0$ , и деформируемую мантию, для которой вектор  $\mathbf{u}$  определяется согласно (1). Выражения для  $\mathbf{G}$  и  $\dot{\mathbf{G}}$  (2) могут быть упрощены отбрасыванием квадратичных членов по  $\mathbf{u}$ . В результате удастся получить представления, содержащие главную часть (недеформируемая планета), и малые добавки, обусловленные смещениями  $\mathbf{u}$  и их производными по  $t$ .

На предварительном этапе исследования чандлеровского движения полюсов под действием возмущающего момента рассматривается следующая модельная задача. Считается, что деформируемая планета (Земля) и точечный спутник (Луна) совершают взаимное поступательно-вращательное движение вокруг общего центра масс (барицентра), который перемещается по эллиптической орбите вокруг Солнца. Вводится инерциальная система координат  $C_{12}\xi_1\xi_2\xi_3$  с началом в барицентре системы  $C_{12}$ . Пусть  $\mathbf{G}$  – собственный кинетический момент Земли,  $\Lambda$  – суммарный орбитальный кинетический момент центров масс Луны  $C_1$  и Земли  $C_2$ . Тогда

момент импульса всей замкнутой системы  $\mathbf{K}=\mathbf{G}+\mathbf{\Lambda}$  без учёта влияния внешних возмущающих воздействий неподвижен в инерциальном пространстве и совпадает с осью  $C_{12}\xi_3$  (рис. 1).

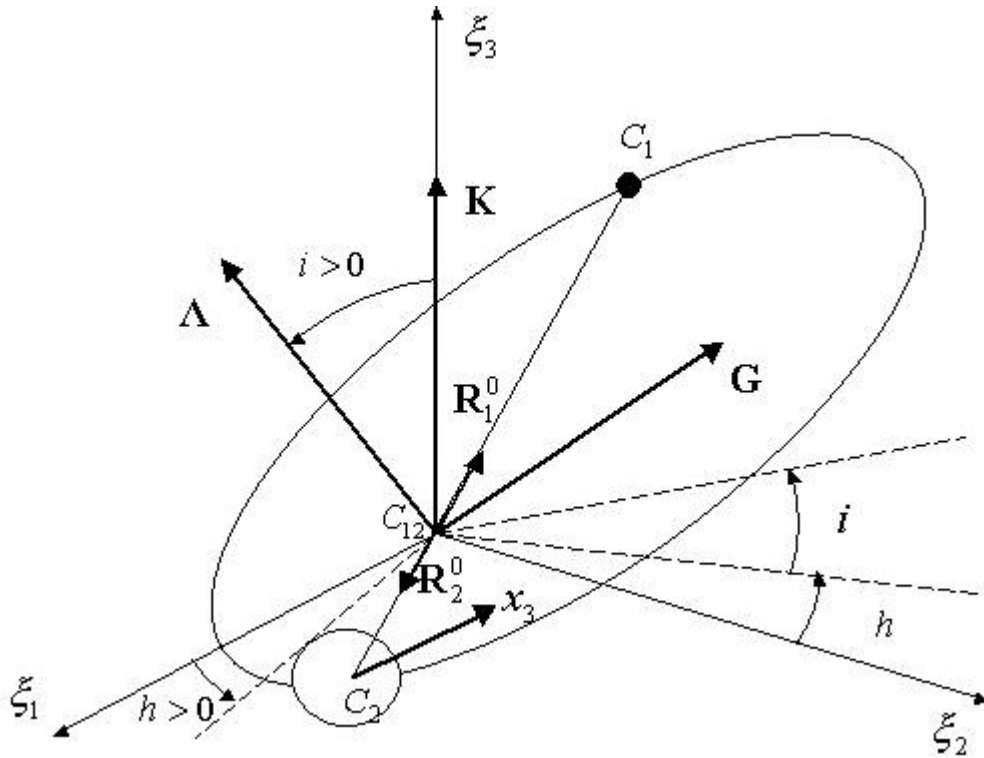


Рис. 1 Система координат для задачи двух тел и ориентация векторов.

Радиус-векторы  $\mathbf{R}_1$  и  $\mathbf{R}_2$  точек  $C_1$ ,  $C_2$  в системе координат  $C_{12}\xi_1\xi_2\xi_3$  задаются в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_j &= R_j \mathbf{R}_j^0, \quad R_j = c_j^* R_{21}, \quad c_1^* = m_2/m, \quad c_2^* = m_1/m, \quad m = m_1 + m_2, \\ \mathbf{R}_j^0 &= \pm \Gamma_3(h) \Gamma_1(i) (\cos \vartheta, \sin \vartheta, 0)^T, \quad \mathbf{R}_1 = -\mathbf{R}_2, \quad j = 1, 2, \\ \Gamma_1(i) &= \text{diag}(1, \Pi_2(i)), \quad \Gamma_3(h) = \text{diag}(\Pi_2(h), 1). \end{aligned} \quad (3)$$

Матрицы  $\Gamma_{1,3}$  в (3) – блочно-диагональные,  $\Pi_2$  – матрица плоского поворота. Угловые переменные  $h$ ,  $i$  и  $\vartheta$  суть долгота восходящего узла, наклонение и истинная аномалия орбиты соответственно. Радиус-вектор  $\mathbf{R}_{21}$ , соединяющий центры масс Земли и Луны, т.е. точки  $C_1$  и  $C_2$ , имеет вид  $\mathbf{R}_{21} = R_{21} \mathbf{R}_{21}^0$  так, что  $\mathbf{R}_{21}^0 = \mathbf{R}_1^0$ . Использованы следующие значения  $R_{21} = 384,4 \times 10^6$  м., масса Луны  $m_1 = 7,36 \times 10^{22}$  кг., масса Земли  $m_2 = 5,98 \times 10^{24}$  кг.

С твердым ядром планеты жестко связана декартова система координат  $C_2x_1x_2x_3$ , оси которой направлены вдоль главных центральных осей инерции  $A, B$  и  $C$ . В связанной системе координат орт  $\mathbf{R}_{21}^0$  определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} S^{-1} \mathbf{R}_{21}^0 &= (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)^T, \\ S^{-1} &= \Gamma_3^{-1}(\varphi_1) \Gamma_1^{-1}(\delta_2) \Gamma_3^{-1}(\varphi_2) \Gamma_1^{-1}(\delta_1) \Gamma_3^{-1}(\varphi_3). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь ортогональная матрица  $S = S(t)$  ( $S^{-1} = S^T$ ) задает переход от связанных к инерциальным осям и выражается посредством канонических переменных Андуайе [4, 6]: моментов импульсов  $L, G, G_{\xi_3}$  и угловых переменных  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ . Углы  $\delta_1, \delta_2$  определяются соотношениями (рис. 2)

$$\cos \delta_1 = \frac{G_{\xi_3}}{G}, \quad \cos \delta_2 = \frac{L}{G}, \quad (5)$$

где  $G$  – модуль кинетического момента Земли,  $G_{\xi_3}$  – проекция вектора  $\mathbf{G}$  на инерциальную ось  $\xi_3$ .

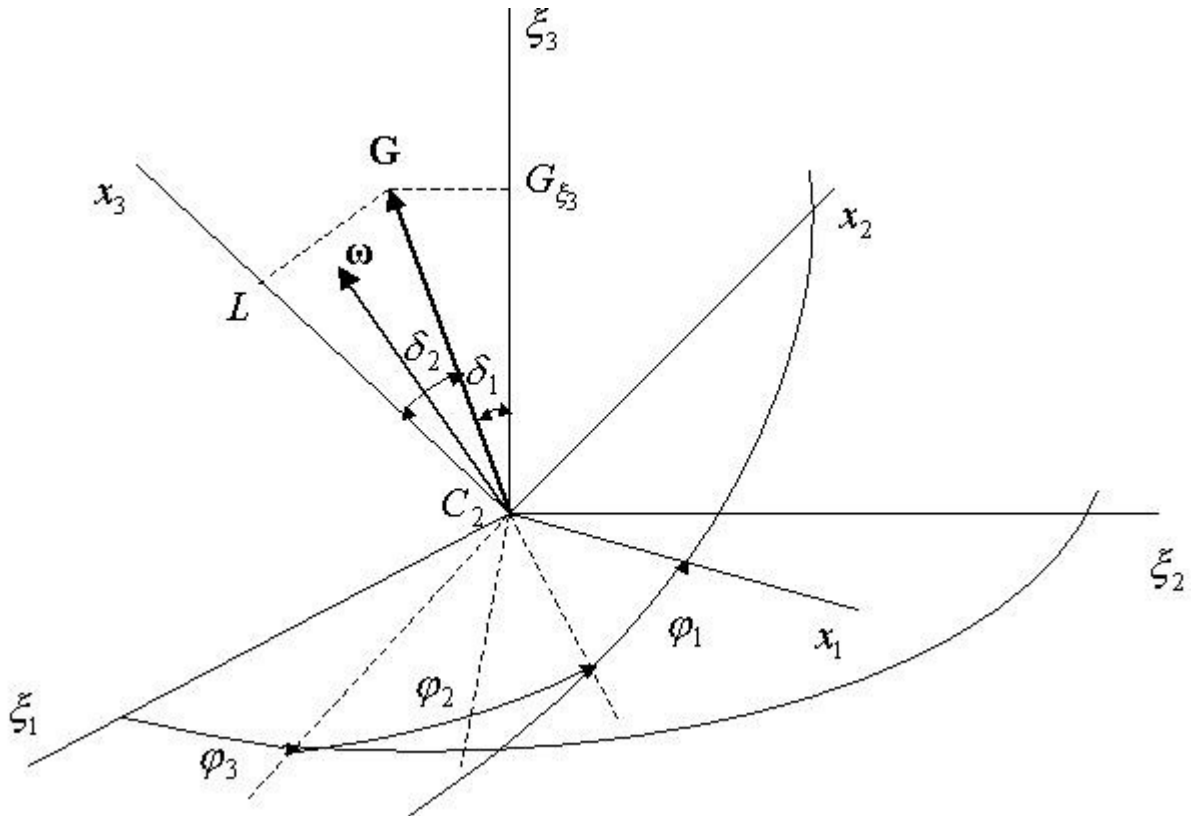


Рис. 2 Взаимная ориентация связанной с деформируемой Землей и опорной систем координат и переменных Андуайе.

Взаимное орбитальное движение центров масс  $C_1$  и  $C_2$  описывается каноническими переменными Делоне  $\Lambda, H, \mathcal{Q}, h$ , где  $\Lambda = |\Lambda|$ ,  $H = \Lambda \cos i$  – проекция  $\Lambda$  на ось  $C_{12}\xi_3$ , т.е. на ось суммарного кинетического момента  $\mathbf{K}$ .

Функционал Рауса  $R^*$  в промежуточной задаче для деформируемой Земли после ряда несложных преобразований и усреднения по быстрым переменным  $\varphi_2$  и  $\mathcal{Q}$  приводится к виду (с точностью до несущественной постоянной)

$$R^* = \frac{G^2 - L^2}{2} \left( \frac{\sin^2 \varphi_1}{A^*} + \frac{\cos^2 \varphi_1}{B^*} \right) + \frac{L^2}{2C^*} + const. \quad (6)$$

В (6)  $A^*, B^*, C^*$  – эффективные главные центральные моменты инерции с учетом деформаций “замороженной” Земли, обусловленные сложным движением – собственным вращением и

движением относительно барицентра  $C_{12}$ . Используются значения  $A^* = 8,0912 \times 10^{37}$  кгм<sup>2</sup>;  $B^* = 8,0914 \times 10^{37}$  кгм<sup>2</sup>;  $C^* = 8,1100 \times 10^{37}$  кгм<sup>2</sup>. Выражения для них могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} A^*, B^*, C^* &= J_{jj}[\mathbf{u}] I_2^2 (I_2^2 + 3\mu_1 R_{21}^{-3} d J_{jj}^2[\mathbf{u}])^{-1}, \quad I_2 = G, \quad j = 1, 2, 3, \\ d &= \cos^2 h^* + \cos^2 i \sin^2 h^* + \cos^2 \delta_1 (\sin^2 h^* + \cos^2 i \cos^2 h^*) + \\ &\sin^2 i \sin^2 \delta_1, \quad h^* = \varphi_3 - h, \quad \mu_1 = f m_1. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь  $f$  – постоянная тяготения;  $J_{jj}[\mathbf{u}]$  – функционалы упругих смещений  $\mathbf{u}$  частиц вязкоупругой мантии, имеющие смысл компонент главного центрального тензора инерции деформированной Земли в связанной системе координат; при  $\mathbf{u} = 0$  имеем  $J_{jj}[0] = \text{diag}(A, B, C)$ . Таким образом, согласно (7) система Земля-Луна рассматривается как “почти” двойная планета.

Структура (6) совпадает с традиционным выражением для функции Рауса абсолютно твердого тела в переменных Андуайе [4, 7]. В результате общее решение для рассматриваемой задачи имеет вид

$$\begin{aligned} L(t) &= L^0, \quad G(t) = G^0, \quad G_{\xi}^0(t) = G_{\xi_3}^0, \\ \varphi_1 &= n_1 t + \varphi_1^0, \quad \varphi_2 = n_2 t + \varphi_2^0, \quad \varphi_3 = \varphi_3^0, \\ n_1 &= \frac{A^* - C^*}{A^* C^*} L, \quad n_2 = \frac{G}{A^*}. \end{aligned} \quad (8)$$

В (8) величины  $L^0, G^0, G_{\xi_3}^0, \varphi_1^0, \varphi_2^0, \varphi_3^0$  суть начальные значения, фазы  $\varphi_1, \varphi_2$  и частоты  $n_1, n_2$  отвечают соответственно чандлеровскому движению полюса и суточному вращению деформируемой Земли.

Таким образом, в промежуточном движении деформируемая Земля равномерно вращается в поле центробежных сил инерции и гравитационного поля Луны. Для абсолютно твердой планеты ( $\mathbf{u} = 0$ ) имеет место регулярная прецессия Эйлера- Пуансо. В рассматриваемом случае деформируемой Земли выражения (8) также описывают регулярную прецессию, но угловые скорости прецессии и собственного вращения изменяются на некоторую относительно малую величину, обусловленную возмущающими факторами. При возмущенном движении с учетом диссипативных свойств вязкоупругой мантии Земли имеет место регулярная прецессия с медленно изменяющимися во времени параметрами, т.е. возникает эволюция медленных переменных, подлежащая изучению на основе асимптотических методов нелинейной механики. Полученное решение (8) является порождающим для использования метода усреднения при учете возмущающих моментов сил различной физической природы.

На основе асимптотического анализа уравнений движения в переменных Андуайе можно определить стабильные характеристики вращательно-колебательного движения деформируемой Земли относительно центра масс в квазистатическом приближении.

Сперва находятся уточненные периоды (частоты) осевого вращения чандлеровского колебания и проводятся сопоставления с данными спектрального анализа. Даются оценки амплитуд свободных колебаний вектора угловой скорости в связанной системе координат и сравниваются с наблюдаемыми значениями.

### **Основная модель колебаний земного полюса**

Для построения модели вращательного движения Земли относительно центра масс представим описывающие его уравнения в форме классических динамических уравнений Эйлера-Лиувилля с переменным тензором инерции  $J$  [8, 9]

$$\begin{aligned} J\dot{\omega} + \dot{\omega} \times J\omega &= \mathbf{M}, \quad \omega = (p, q, r)^T, \quad J = J^* + \delta J, \quad J^* = const, \\ J^* &= \text{diag}(A^*, B^*, C^*), \quad \delta J = \delta J(t), \quad \|\delta J\| \ll \|J^*\| \end{aligned} \quad (9)$$

где  $\omega$  – вектор угловой скорости в связанной с Землей (на эпоху 1900 г.) системе координат (референц-системе), которая приближенно совпадает с главными центральными осями инерции  $J^*$  "замороженной" Земли с учетом "экваториального выступа" [3].

Дополнительно возмущающие члены, получающиеся при дифференцировании вектора кинетического момента деформируемой Земли [3], отнесены к вектору возмущающего момента сил  $\mathbf{M}$ . Считается, что малые вариации тензора инерции  $\delta J$  могут содержать различные гармонические составляющие, обусловленные влиянием гравитационных суточных приливов от Солнца и Луны и, возможно, ряд других (годовые, полугодовые, месячные, полусуточные и т.п.). В качестве основных факторов возмущающих внешних моментов сил  $\mathbf{M}$ , вызывающих нутационные колебания, принимаются гравитационно-приливные воздействия с годовым и близким к чандлеровскому периодам.

Упрощенные дифференциальные уравнения движения полюса Земли получаются из классических динамических уравнений Эйлера-Лиувилля и имеют вид [8, 9]:

$$p' + N_p q + \sigma_p p = M_p, \quad q' - N_q q + \sigma_q q = M_q, \quad \theta = \omega_0 t. \quad (10)$$

Здесь  $p, q$  - проекции вектора мгновенной угловой скорости вращения Земли на связанные оси, штрих означает производную по аргументу  $\theta$ ,  $\sigma_{p,q} \approx \sigma$  – коэффициент суммарной диссипации,  $N_{p,q} \equiv N$  – чандлеровская частота,  $M_{p,q}$  – основные возмущающие гравитационно-приливные моменты сил, вызывающие нутационные колебания полюса. Определение  $N_{p,q}$  и  $M_{p,q}$

представляет основную и значительную трудность при построении модели. Начальные значения  $p^0, q^0$  находятся измерениями при  $t = 0$ .

Вводя переменные  $x(\tau)=p(t)$ ,  $y(\tau)=q(t)$ , где  $\tau=t/T_h$  – время, измеряемое годами, приведем выражения координат полюса для модели первого приближения с учетом коэффициентов тренда  $c_{x,y}$ , чандлеровской  $a_{x,y}^{c,s}$  и годичной  $d_{x,y}^{c,s}$  компонент [9]

$$\begin{aligned} x(\tau) &= c_x^0 + c_x^1 \tau - a_x^c \cos 2\pi N \tau + a_x^s \sin 2\pi N \tau - \\ &\quad - N d_x^c \cos 2\pi \tau - d_x^s \sin 2\pi \tau, \\ y(\tau) &= c_y^0 + c_y^1 \tau + a_y^c \cos 2\pi N \tau + a_y^s \sin 2\pi N \tau - \\ &\quad - N d_y^c \cos 2\pi \tau + d_y^s \sin 2\pi \tau, \\ N &= 0.845 - 0.850. \end{aligned} \quad (11)$$

Величина  $N$  выбирается на основе дисперсионного анализа. Неизвестные  $c_{x,y}^{0,1}$ ,  $a_{x,y}^{c,s}$ ,  $d_{x,y}^{c,s}$  – вычисляются с помощью метода наименьших квадратов [10] по результатам измерений МСВЗ [1], причём следует иметь в виду равенства

$$a_x^{c,s} \approx a_y^{s,c}, \quad d_x^{c,s} \approx d_y^{s,c}, \quad (12)$$

отражающие структурные свойства модели. Это также означает, что процессы  $x$  и  $y$  связаны, что следует учитывать при статистической обработке измерений.

Введенные параметры могут в пределах достаточно длительного интервала  $0 \leq \tau \leq \Theta$  (где, например,  $\Theta \sim 10-20$  лет) подвергаться коррекции согласно выражениям  $c_{x,y} = c_{x,y}^0 + c_{x,y}^1 \tau + \dots$  и аналогично  $a_{x,y}^{c,s}$ ,  $d_{x,y}^{c,s}$ . Вековые члены должны учитывать медленную эволюцию основных параметров системы для улучшения интерполяции процесса колебаний.

### ***Результаты численного моделирования основной модели***

Изложим результаты расчетов на основе упрощенной процедуры метода наименьших квадратов [10], который применялся независимо к каждой из переменных  $x(\tau)$  и  $y(\tau)$  в виде шестимерных аппроксимаций согласно построенной модели (11)

$$\begin{aligned} x(\tau) &= (\xi, f(\tau)), \quad y(\tau) = (\eta, f(\tau)), \\ \xi &= (\xi_1, \dots, \xi_6)^T, \quad \eta = (\eta_1, \dots, \eta_6)^T, \\ f(\tau) &= (1, \tau, \cos 2\pi N \tau, \sin 2\pi N \tau, \cos 2\pi \tau, \sin 2\pi \tau)^T, \\ N &\approx 0.845 \div 0.85. \end{aligned} \quad (13)$$

Шестимерные векторы  $\xi$ ,  $\eta$  подлежат определению. Между компонентами векторов  $\xi$ ,  $\eta$  и коэффициентами модели (11) имеет место взаимнооднозначное соответствие. Исследование



эффективности интерполяции и прогноза движения полюса на основе известных ежедневных результатов измерений МСВЗ свидетельствует об удовлетворительной точности построения модели (13). На рис.3, 4 представлена интерполяция наблюдаемого процесса и прогноз на 2 года (до конца 2005г.) колебаний полюса на основе 8-летних ежедневных данных наблюдений МСВЗ (1996–2003г.г.) посредством шестипараметрической модели.

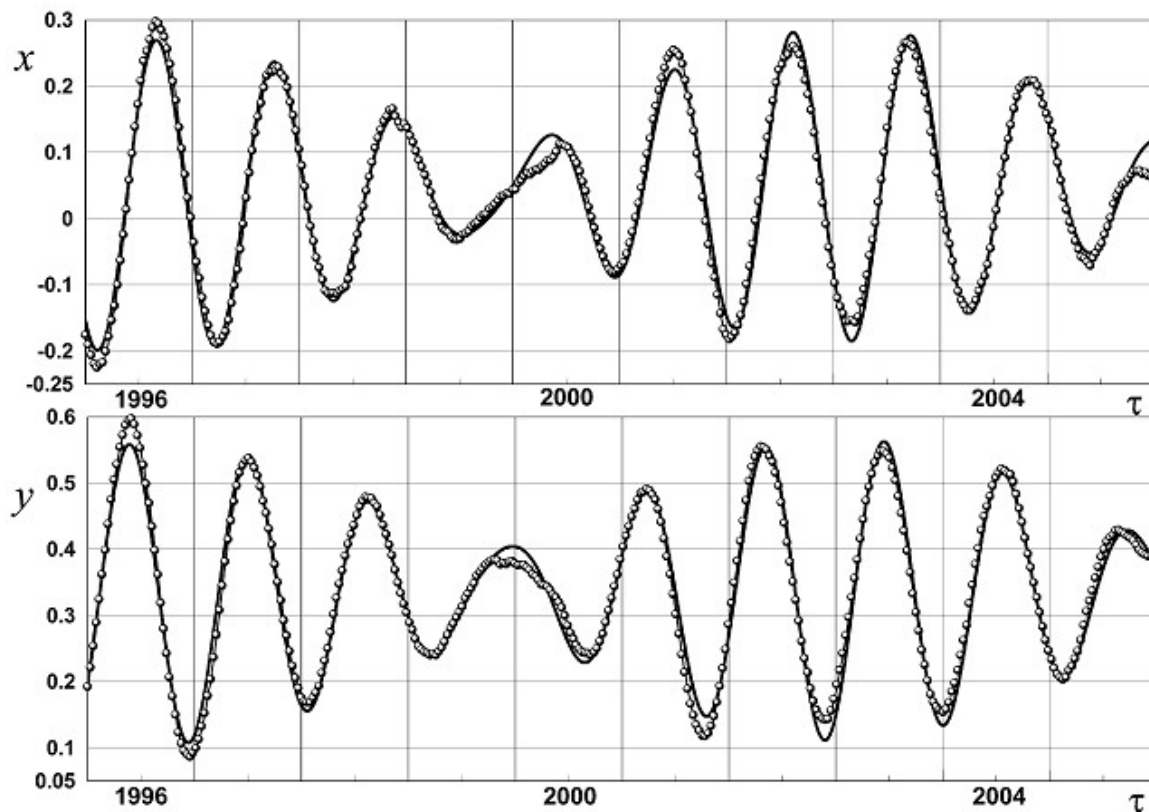


Рис. 3. Интерполяция траектории полюса на 8-летнем интервале 1996-2003 гг. и прогноз на 2004-2005 гг. (сплошная линия); точки – данные МСВЗ.

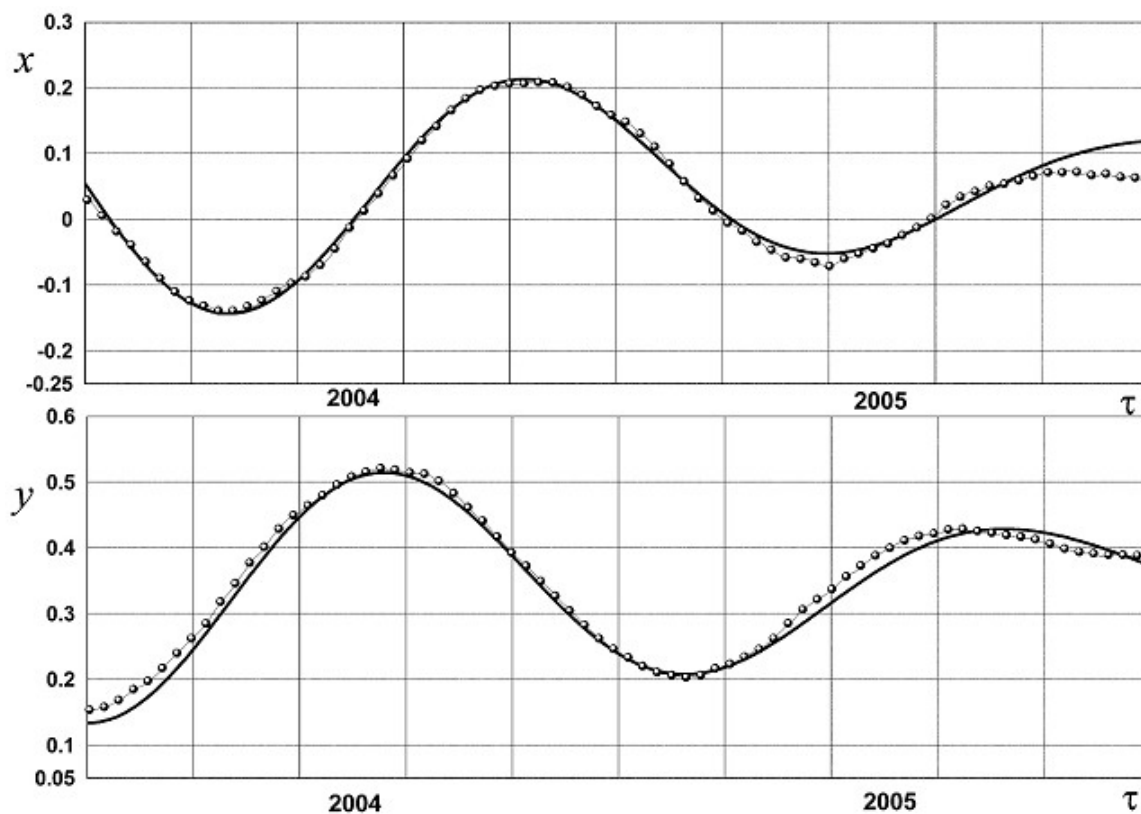


Рис. 4. Прогноз на 2004-2005 гг. по результатам интерполяции на 8-летнем интервале 1996-2003 гг. (сплошная линия); точки – данные МСВЗ.

На рис. 5 приводятся новые результаты интерполяции с начала 2001г. до конца 2005г. и прогноз на 2 года: 2006 и 2007 гг.

Наряду с основными характерными свойствами колебательного процесса представляет интерес учет и анализ мелкомасштабных высокочастотных колебаний на более коротких интервалах времени [8], а также объяснение их нерегулярностей и аномалий.

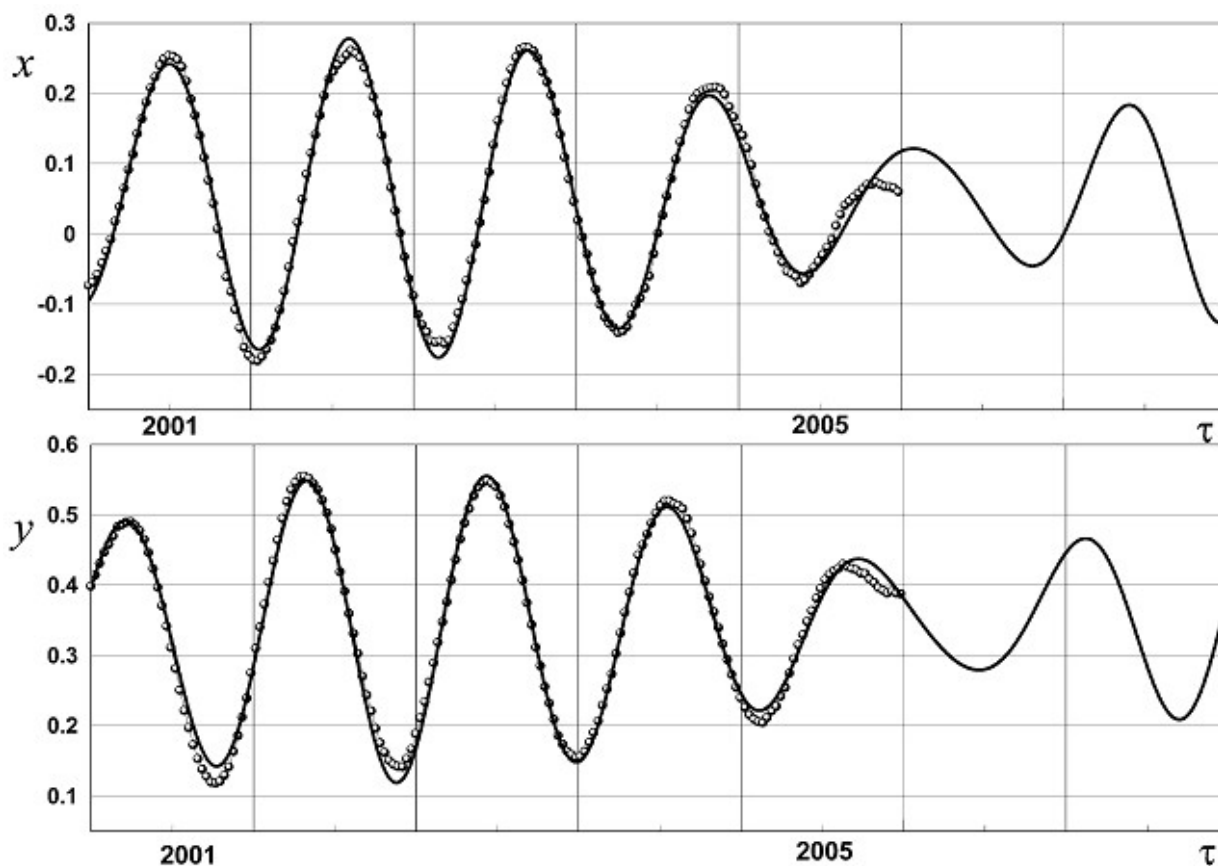


Рис. 5. Интерполяция траектории полюса на 5-летнем интервале 2001-2005 гг. и прогноз на 2006-2007 гг. (сплошная линия); точки – данные МСВЗ.

### *Учет высокочастотных составляющих в колебаниях полюса по расширенной модели*

На базе рассмотренной выше 6-ти параметрической основной модели [8, 9] проводится ее уточнение посредством учета внешних воздействий с более высокими частотами – это лунные, полугодичные и, возможно, комбинационные гармоники гравитационно-приливных сил. Обобщение модели осуществляется на основе небесно-механических подходов, с учетом спектрального анализа временных рядов МСВЗ, проводится идентификация параметров модели методом наименьших квадратов. В данной работе рассматриваются лунные воздействия, приводящие к высокочастотным колебаниям полюса, среди которых наиболее существенные – колебания с месячной ( $M_m = 27.667$  суток) и двухнедельной ( $M_f = 13.661$  суток) частотами.

При построении математических моделей движения полюса Земли с целью получения долгосрочного прогноза (3 ÷ 5 лет) моменты сил гравитации от Луны не учитывались из-за относительной малости их влияния на годовые нутационные колебания вследствие значительного различия частот. Для доказательства была проведена оценка, выписаны дифференциальные уравнения движения полюса Земли (1) с учетом лунных возмущений, которые имеют вид

$$\dot{p} + N_p q = M_p = \Lambda_p \cos(v\tau + \alpha), \quad \dot{q} - N_q p = M_q = -\Lambda_q \cos(v\tau + \alpha) \quad (14)$$

Здесь  $\Lambda_p \approx \Lambda_q$  - амплитуды лунных возмущений,  $v\tau$  - фаза;  $\tau$  - время, измеряемое годами; частоты  $\nu \approx 26.7$  для двухнедельной и  $\nu = 13.2$  для месячной компонент лунных возмущений. Определим установившееся решение системы (10), (14), учитывая малость отношения  $N^2/\nu^2 \approx 10^{-3} - 10^{-4}$ . Опуская промежуточные выкладки, искомое решение представим в виде:

$$p_0 = -\frac{N}{\nu^2 - N^2} \Lambda_q \cos v\tau + \frac{\nu}{\nu^2 - N^2} \Lambda_p \sin v\tau \cong \frac{\Lambda_p}{\nu} \sin v\tau, \quad (15)$$

$$q_0 = -\frac{N}{\nu^2 - N^2} \Lambda_p \cos v\tau - \frac{\nu}{\nu^2 - N^2} \Lambda_q \sin v\tau \cong -\frac{\Lambda_q}{\nu} \sin v\tau.$$

Амплитуда гравитационного момента от Луны  $\Lambda$  в 2-3 раза больше чем от Солнца  $S$ . Однако эффективность влияния приливного гравитационного момента сил от Солнца будет существенно выше. Действительно, согласно (15) отношение амплитуд нутационных колебаний, обусловленных гравитационными моментами от Солнца и Луны составит величину [9]

$$A_S \sim \frac{(S_p^2 + S_q^2)^{1/2}}{1 - \nu^2} \cong 3S, \quad \frac{A_S}{A_\Lambda} \cong 40 \frac{S}{\Lambda} \cong 15 \div 20, \quad A_\Lambda \sim \frac{(\Lambda_p^2 + \Lambda_q^2)^{1/2}}{\sigma} \cong \frac{\Lambda}{13.25}, \quad (16)$$

$$N = 0.845, \quad \nu = 13.2, 26.7. \quad )$$

Из оценок (16) следует, что влияние Луны приводит к месячным и двухнедельным колебаниям с амплитудой в  $15 \div 20$  раз меньше, чем амплитуда годичных колебаний. Эти воздействия оказываются заметными при детальном исследовании экстремумов отклонений полюса по каждой компоненте и в особенности на периоде биений. Колебания полюса на периоде биений представляют особый научный и практический интерес. На основе приведенных выше графиков (рис. 1) интерполяции и прогноза сложного процесса колебаний полюса деформируемой Земли на базе 8-летних ежедневных данных измерений наблюдаются аномалии (отклонения) в траектории полюса, происходящие на периоде явления биений (1999–2000г.г.). На периоде биений, когда амплитуда колебаний полюса минимальна, значимыми возмущениями могут быть возмущения двух видов: это возмущения гравитационного характера и нерегулярные воздействия геофизического происхождения.

Ниже изложены результаты расчётов на основе упрощенной процедуры согласно методу наименьших квадратов. Алгоритм применялся независимо к переменным  $x(\tau)$ ,  $y(\tau)$  в виде восьмимерных аппроксимаций в соответствии с расширенной моделью, учитывающей лунное воздействие:

$$x(\tau) = (\xi, f(\tau)), \quad y(\tau) = (\eta, f(\tau)), \quad (17)$$

$$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_8)^T, \quad \eta = (\eta_1, \dots, \eta_8)^T,$$

$$f(\tau) = (1, \tau, \cos 2\pi N\tau, \sin 2\pi N\tau, \cos 2\pi\tau, \sin 2\pi\tau, \cos 2\pi\nu\tau, \sin 2\pi\nu\tau)^T, \quad (17)$$

$$N = 0.845 - 0.850,$$

где  $N$  – чандлеровская частота;  $V$  – частота колебаний, обусловленных лунным возмущением;  $\tau$  – время, измеряемое годами (365.25 звездных суток).

На рис.6, 7 приводятся теоретические кривые с учётом двухнедельной ( $\nu=26.72$ ) и месячной ( $\nu=13.19$ ) составляющей соответственно, построенные на основе данных измерений на 60-ти суточном интервале времени (с 01.10.2005 по 30.11.2005), полученные последовательным независимым применением метода наименьших квадратов для определения коэффициентов годичной и чандлеровской составляющих и высокочастотной двухнедельной составляющей.

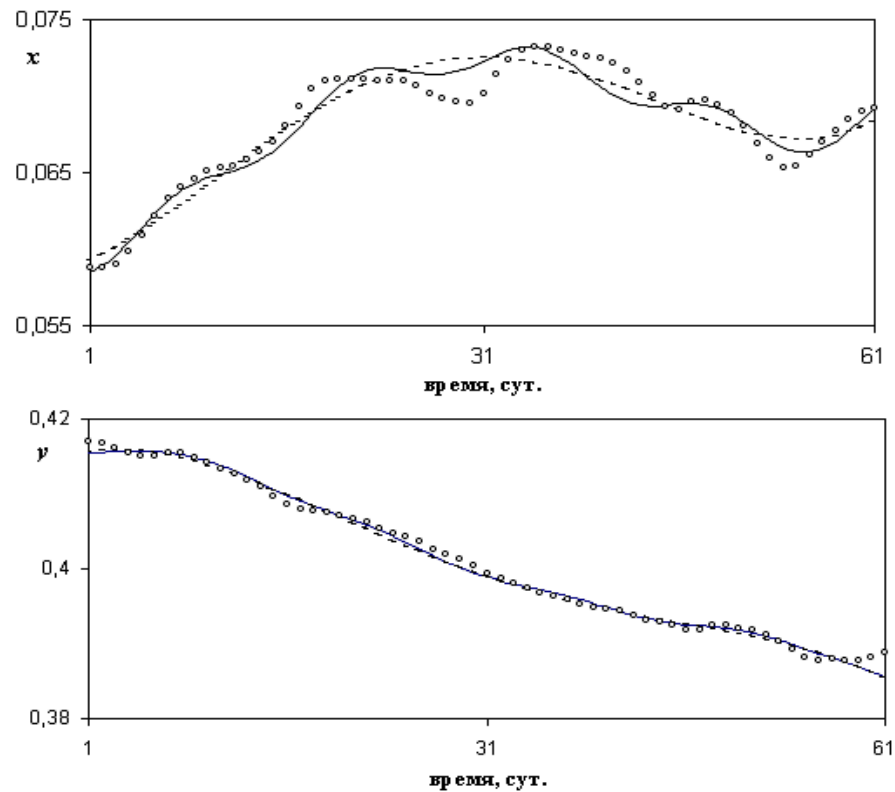


Рис. 6. Интерполяция траектории полюса на 60-ти суточном интервале времени (с 01.10.2005 по 30.11.2005) с учётом двухнедельного колебания (сплошная линия) и без учёта (пунктирная линия); точки – данные МСВЗ.

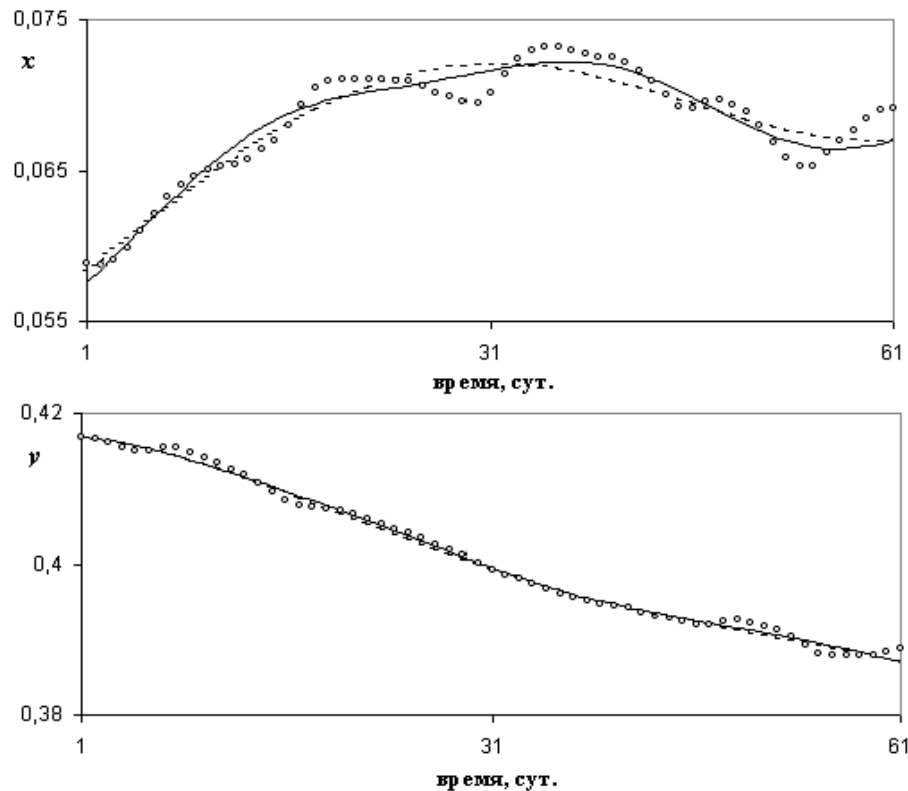


Рис. 7. Интерполяция траектории полюса на 60-ти суточном интервале времени (с 01.10.2005 по 30.11.2005) с учётом месячной частоты (сплошная линия) и без учёта (пунктирная линия); точки – данные МСВЗ.

Из сравнения рисунков можно заключить, что наибольший вклад в высокочастотные колебания полюса вносят возмущения с двухнедельной частотой. Известно [11], что амплитуда лунной деклинационной (двухнедельной) волны  $M_f$  в несколько раз превосходит амплитуду лунной месячной волны  $M_m$  :

$$M_f = 13.661, \quad A_{M_f} = 121 \cdot 10^{-5} c,$$

$$M_m = 27.667, \quad A_{M_m} = 45 \cdot 10^{-5} c.$$

Выбор короткого интервала времени для определения коэффициентов годичной и чандлеровской составляющих обусловлен необходимостью получения некоторой “средней” кривой, относительно которой можно выявить высокочастотные колебания (Следует отметить, что в этом случае значения коэффициентов долгопериодических составляющих не являются истинными, т.е. не пригодны для составления долгосрочного прогноза). В противном случае при выборе длительного интервала интерполяции, кривая определяемая долгопериодическими составляющими будет далека от средней и выявить высокочастотные колебания не удаётся, что видно из рис.8.

На рисунке приводятся результаты интерполяции с помощью расширенной модели, учитывающей двухнедельные колебания. Для определения коэффициентов долгопериодических и

двухнедельной составляющих интервалы интерполяции выбирались равными 7-ми месяцам (с 01.5.2005 по 30.11.2005) и 60-ти суткам (с 01.10.2005 по 30.11.2005) соответственно.

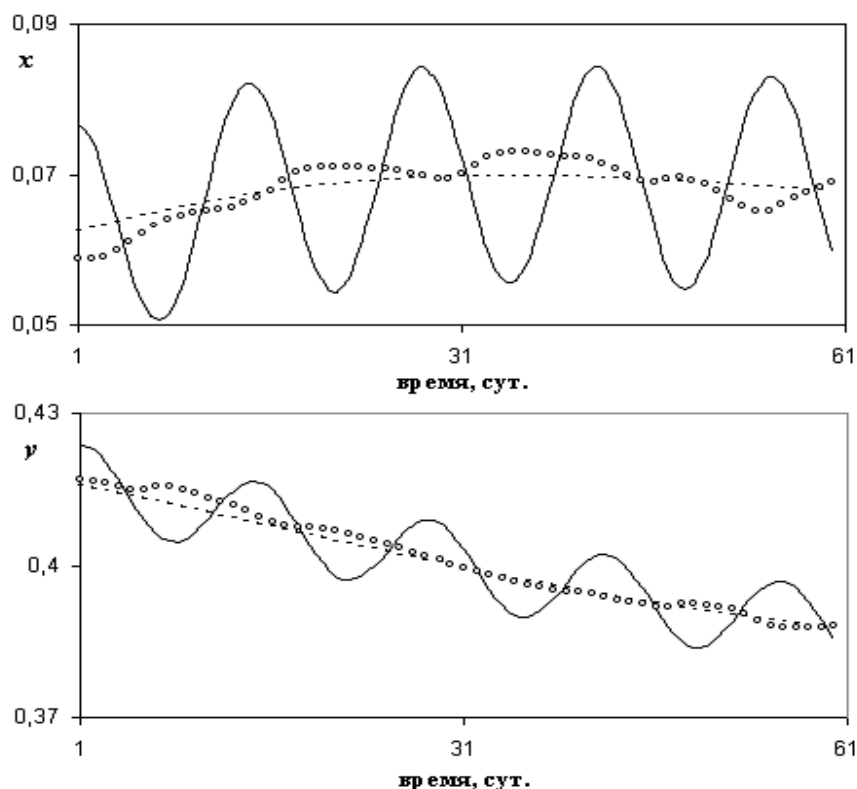


Рис. 8. Результат интерполяции траектории полюса на 60 суток (с 01.10.2005 по 30.11.2005) с увеличенным интервалом интерполяции (с 01.5.2005 по 30.11.2005) долгопериодических составляющих с учётом двухнедельной частоты (сплошная линия) и без учёта (пунктирная линия); точки – данные МСВЗ.

## Выводы

1. Построены высокоточная интерполяция колебаний полюса на восьмилетнем интервале времени (1996 – 2003 гг.) и удовлетворительный двухлетний прогноз (2004 – 2005 гг.).
2. Проведено сопоставление теоретических кривых (прогноза) и реализовавшегося движения на основе данных измерений МСВЗ.
3. Установлено влияние гравитационных возмущений Луны с месячным и двухнедельным периодами на колебания полюса. Получена оценка амплитуды и дано объяснение относительной малости высокочастотных гармоник.

## Список литературы

1. IERS Annual Reports. 1990 July 1991 bis 1999 July 2000. Central Bureau of IERS. Observatoire de Paris. 2000 July 2001 bis 2002 July 2003. Verlag BKG Frankfurt am Mein. <http://hpiers.obspm.fr>
2. Бартенев В. А., Звонарь В.Д., Козлов А.Г. и др., Глобальная космическая навигационная система ГЛОНАСС: перспективы развития. // Космонавтика и ракетостроение. - 2004, вып. 4, с. 29–36.
3. Акуленко Л.Д., Кумакшев С.А., Марков Ю.Г. и др. // Астрономический журнал - 2002, т. 79, N 10, с. 81 – 89.
4. Веретенников В.Г., Марков Ю.Г., Сами Эль-Хафез Динамический анализ эволюционных процессов в движении вязкоупругих небесных тел // Космические исследования РАН. - 1997. Т. 35. №5, с. 36–53.
5. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды - М.:Изд-во МГУ. 1990. 310с.
6. Бондаренко В.В., Веретенников В.Г., Марков Ю.Г. Математическое моделирование некоторых задач динамики деформируемых тел // Тезисы докладов международной конференции “Устойчивость, управление и динамика твердого тела”. - Донецк. 1996. с 13.
7. Бондаренко В.В., Веретенников В.Г., Марков Ю.Г. Нелинейный динамический анализ механических систем с диссипацией энергии. // Тезисы докладов Симпозиума IUTAM/IFToMM “Синтез нелинейных динамических систем”.- Рига. Латвия. 1998. с. 21.
8. Акуленко Л.Д., Кумакшев С.А., Марков Ю.Г. и др., Гравитационно-приливная модель колебаний полюса деформируемой Земли // Космонавтика и ракетостроение. - 2005, вып. 4, с. 103–111.
9. Акуленко Л.Д., Кумакшев С.А., Марков Ю.Г. и др. // Астрономический журнал - 2002, т. 79, N 10, с. 952 – 960.
10. Губанов В.С., Обобщённый метод наименьших квадратов. Теория и применение в астрометрии. С.-Пб.: Наука, 1997, 318 с.
11. Мориц Г., Мюллер А., Вращение Земли: теория и наблюдения. Киев: Наук. думка, 1992, 512с.

---

## Сведения об авторе

Перепёлкин Вадим Владимирович, аспирант кафедры теоретической механика Московского авиационного института (государственного технического университета).



