Отзыв

официального оппонента на диссертацию Ветчанина Евгения Владимировича «Качественный анализ характерных особенностей поведения гидродинамических и неголономных систем с периодическими управлениями на основе конечномерных моделей» на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.02.01 – «Теоретическая механика»

Диссертация посвящена исследованию двух классов задач теоретической механики, связанных с проблемой создания автономных робототехнических систем, способных передвигаться за счет внутренних механизмов (роторов и (или) подвижных масс), которые создают необходимые силы инерции, либо за счет внешних периодических воздействий, создаваемых самой системой. Первый класс задач связан с самопродвижением тел в жидкости, второй – с вращением твердого тела с неподвижной точкой и самопродвижением сферической оболочки по однородной плоскости. Эта **тема актуальна** как для теории, поскольку при ее разработке возникают новые задачи исследования конечномерных систем дифференциальных уравнений с периодически изменяющимися параметрами, так и для практики, в связи с необходимостью внедрения автономных аппаратов для военно-промышленного комплекса, изучения водных глубин, реализации образовательных программ технических вузов и университетов по робототехнике.

Диссертация состоит из введения, двух частей основного текста, разбитых на шесть глав, заключения и списка литературы (202 наименования).

Во **введении** обоснованы актуальность темы, ее новизна, теоретическая и практическая значимость, обсуждается ее проработанность, дан обзор литературы по теме диссертации, обозначена ее цель, приведено краткое содержание глав, перечислены методы исследования.

В **первой главе** рассматривается плоскопараллельное движение в жидкости гладкого эллиптического профиля с внутренним осесимметричным ротором цилиндрической формы. Предполагается, что ось вращения ротора, совпадающая с его осью симметрии, перпендикулярна плоскости движения профиля, то есть положение центра масс системы не изменяется. На профиль действуют сила за счет наличия присоединенных масс жидкости, сила, обусловленная ее циркуляционным движением вокруг профиля, и диссипативная сила между профилем и жидкостью. Момент силы тяжести уравновешивается моментом Архимедовой силы. Изменение циркуляции и кинетического момента ротора происходят с одинаковым периодом. Для случая постоянной циркуляции и отсутствия диссипации показано, что, в силу близости кинетического момента системы к постоянному значению, ее импульсы и кинетический момент ограничены во все время движения: здесь траектории профиля находятся в ограниченной части плоскости движения. При отсутствии циркуляции и диссипации неограниченное продвижение профиля возможно только при отличном от нуля начальном импульсе, динамика профиля (в среднем) происходит по направлению вектора импульса. Для профиля круговой формы, периодического изменения циркуляции и значениях параметров и начальных условий из некоторого диапазона численно показано, что в системе устанавливается периодическое движение. При помощи метода асимптотических разложений Пуанкаре построено приближение для соответствующего (обнаруженного численно) периодического решения рассматриваемых уравнений при специально подобранных значениях параметров и доказано, что ему отвечает неограниченное продвижение профиля в жидкости. Малый параметр, по которому проводилось разложение, характеризует малое отклонение центра масс системы «профиль+ротор» от геометрического центра профиля. Также численно исследовалась задача о возможности неограниченного (в целом, близкого к прямолинейному) продвижения профиля круговой и эллиптической формы при произвольных значениях параметров. Показано, что для профиля эллиптической формы могут реализовываться квазипериодические и хаотические режимы движения.

Во **второй главе** рассматривается плоскопараллельное движение в жидкости гладкого профиля, содержащего подвижную точечную массу. Учитываются действующая на профиль сила за счет наличия присоединенных масс жидкости, сила, обусловленная ее циркуляционным движением вокруг профиля, и диссипативная сила между профилем и жидкостью. Циркуляция предполагается постоянной, момент силы тяжести уравновешивается моментом Архимедовой силы. Точечная масса создает параметрическое возмущение, за счет которого профиль перемещается в жидкости. Показано, что в отсутствии циркуляции и диссипации траектории профиля всегда остаются в ограниченной части плоскости движения; при отличной от нуля циркуляции траектории неограничены лишь в случае неограниченного ускорения профиля. Для профиля эллиптической формы путем исследования отображения Пуанкаре построенной системы дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами указаны случаи возникновения предельных циклов, квазипериодических режимов и странных аттракторов. С использованием численных методов показано, что при отсутствии циркуляции возможно неограниченное продвижение профиля.

В **третьей главе** рассматривается плоскопараллельное движение в жидкости гладкого профиля эллиптической формы под действием внешних периодических сил и момента, изменяющихся с одинаковой частотой. Такие возмущения могут быть реализованы при помощи двигателей, способных периодически втягивать и выбрасывать воду. Учитываются действующая на профиль сила за счет наличия присоединенных масс жидкости, сила, обусловленная ее циркуляционным движением вокруг профиля, и диссипативная сила между профилем и жидкостью. Циркуляция предполагается постоянной, момент силы тяжести уравновешивается моментом Архимедовой силы. Показано, что в отсутствие диссипации и внешних возмущений рассматриваемая динамическая система консервативна, и траектории профиля ограничены в плоскости движения. Проведено аналитическое исследование динамики уравновешенного кругового профиля: показано, что уравнения его движения совпадают с уравнениями движения заряженной частицы единичной массы по плоскости в переменном электрическом и постоянном магнитном полях. Полученный автором результат позволяет существенно расширить представление о динамических свойствах системы и способах их реализации. Показано, что при нулевом среднем значении возмущающего момента динамика профиля может развиваться по одному из трех сценариев: скорость и перемещение профиля ограничены во все время движения; скорость профиля растет линейно во времени, а его перемещение – линейно или квадратично; скорость профиля остается ограниченной, а его перемещение – растет линейно или квадратично во времени. При отличном от нуля среднем значении возмущающего момента поступательная скорость профиля остается ограниченной с растущей во времени частотой, а траектория центра профиля близка к окружности – рассматриваемая консервативная система демонстрирует асимптотическую устойчивость по части переменных (за исключением угла и угловой скорости поворота профиля). Исследована задача о динамике профиля эллиптической формы под действием периодической силы, направленной вдоль одной из главных осей инерции, и отсутствующем внешнем моменте, получен первый интеграл уравнений движения, рассмотрено влияние присоединенных масс. Для кругового профиля в вязкой жидкости при наличии внешних периодических сил и момента построено решение уравнений в виде степенного ряда (при нулевом моменте) или кратного ряда (при ненулевом моменте). Показано, что при нулевом моменте поступательная и угловая скорости профиля ограничены во времени; при ненулевом моменте получено выражение для средней скорости профиля и доказана возможность его неограниченного перемещения. Для профиля эллиптической формы в вязкой жидкости под действием внешних периодических сил и момента доказана ограниченность кинетической энергии и исследованы возможности возникновения регулярных и странных аттракторов. Полученные результаты подтверждаются подробными численными расчетами.

В **четвертой главе** рассматривается движение робота – твердого тела с неподвижной точкой, содержащего внутри осесимметричные роторы и подвижные тяжелые точечные массы. Центр масс робота совпадает с неподвижной точкой; оси вращения роторов – с их осями симметрии; изменение угловых скоростей роторов и движение внутренних масс происходят с одинаковым периодом. Предполагается, что динамика внутренних масс не приводит к смещению центра масс робота и направлений главных осей инерции. В частности, такое предположение справедливо, если внутренние массы существенно меньше массы робота или движутся вдоль его главных осей инерции. Рассматриваемый в работе (в рамках сделанных предположений – диагональный) тензор инерции системы соответствует ситуации, когда вдоль главных осей инерции симметрично относительно центра масс (неподвижной точки) колеблются по две точечные массы. На тело действуют момент диссипативных сил в неподвижной точке опоры и постоянный крутящий момент. При постоянном тензоре инерции тела и отсутствии диссипативного и внешнего моментов реализуются стационарные (перманентные) режимы вращения тела, отвечающие случаю Эйлера-Пуансо (гиростатический момент – суммарный кинетический момент ротора и точечных масс – равен нулю), случаю Жуковского-Вольтерра (гиростатический момент постоянный, отличный от нуля) и случаю Лагранжа (гиростатический момент отсутствует, тензор инерции имеет две одинаковые компоненты). В работе исследуются вопросы сохранения и устойчивости этих перманентных вращений при наличии или отсутствии диссипативного момента в точке опоры тела и различных законах периодического изменения тензора инерции и вектора гиростатического момента. При отсутствии диссипации, внешнего и гиростатического моментов и периодическом возмущении тензора инерции, сохраняющем его диагональный вид (это отвечает периодическому возмущению случая Эйлера-Пуансо), перманентные вращения вокруг каждой из осей инерции робота сохраняются и могут, в зависимости от амплитуды и частоты возмущения, быть сделаны как устойчивыми, так и неустойчивыми. При малой амплитуде возмущения это показано путем сведения системы в вариациях к уравнению Матье, при произвольных возмущениях – численно-аналитически, путем анализа матрицы монодромии системы в вариациях. При помощи метода гармонического баланса построены уравнения для границ областей устойчивости на плоскости параметров частота-амплитуда возмущения. При отсутствии диссипации и внешнего момента, постоянном гиростатическом моменте и периодическом возмущении тензора инерции, сохраняющем его диагональный вид (это отвечает периодическому возмущению случая Жуковского-Вольтерра), в окрестности перманентных вращений возникают периодические решения, которые могут исчезать при увеличении амплитуды возмущения. Если гиростатический момент направлен вдоль одной из осей инерции робота, то перманентные вращения (в одну или другую сторону) будут происходить вокруг той же оси. Исследование задачи проводится при помощи тех же подходов, что и выше. При отсутствии диссипации, внешнего момента и гиростатического момента и периодическом возмущении диагональных элементов тензора инерции, два из которых в невозмущенном состоянии равны друг другу (это отвечает периодическому возмущению случая Лагранжа), показано, что перманентные вращения вокруг наименьшей оси инерции всегда неустойчивы, а вокруг других осей, в зависимости от амплитуды и частоты возмущения, могут быть сделаны как устойчивыми, так и неустойчивыми. При отсутствии гиростатического момента и наличии диссипации и внешнего момента, направленного вдоль одной из осей инерции, система допускает перманентное вращение вокруг этой оси, которое может быть сделано устойчивым при должном выборе коэффициентов диссипации, невозмущенных моментов инерции робота и параметров возмущения. В отсутствии диссипации и внешнего момента периодическое изменение моментов инерции может привести к возникновению динамического хаоса по сценарию расщепления сепаратрис.

В **пятой главе** рассматривается качение робота – уравновешенной сферической оболочки, содержащей осесимметричный ротор и подвижные точечные массы, по однородной опорной плоскости. Предполагается, что движение оболочки происходит без проскальзывания и верчения. Ось вращения ротора совпадает с его осью симметрии; изменение его угловой скорости и движение внутренних масс происходят с одинаковым периодом. Рассматриваемый в работе (диагональный) тензор инерции робота отвечает ситуации, когда вдоль его главных осей инерции симметрично относительно центра масс колеблются по две точечные массы. Основное внимание уделяется исследованию устойчивости плоскопараллельных движений робота при помощи качественного и численного анализа. Показаны ситуации, когда эти (в общем случае квазипериодические) движения оказываются устойчивыми или неустойчивыми. Для численного подтверждения сделанных выводов найден старший показатель Ляпунова, и, помимо этого, применялся подход, основанный на представлениях технической устойчивости. Показано, что вблизи плоскопараллельных движений динамика робота близка к консервативной. Путем анализа движений робота из состояния покоя, а также на ненулевом уровне интеграла момента указаны также проявления свойств неконсервативности исследуемой нелинейной системы дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, аналогичные тем, которые наблюдаются в диссипативных системах: возникновение предельных циклов, притягивающих или отталкивающих торов, странных аттракторов и репеллеров. Исследуются бифуркации, приводящие к потере устойчивости предельных циклов и возникновению регулярных и странных аттракторов.

В **шестой главе** в той же постановке, что и в пятой главе, изучается качение неуравновешенной сферической оболочки по однородной опорной плоскости. Предполагается, что движение внутренних масс не приводит к смещению центра масс системы и направлений главных осей инерции. В отличие от пятой главы, динамические уравнения системы не допускают интеграла момента, что усложняет их исследование. Изучены плоскопараллельные движения робота, описывающие его качение вдоль главных плоскостей инерции (гиростатический момент при этом перпендикулярен плоскости инерции). Рассмотрены случаи возникновения хаотических режимов при малом периодическом по времени возмущении момента инерции системы. Несомненным достоинством работы служит нахождение интеграла Мельникова в явной форме, что позволяет оценить возможность расщепления сепаратрис возмущенной системы и выяснить условия возникновения хаоса при их трансверсальном пересечении. Также в главе 6 ставится задача стабилизации верхнего неустойчивого положения равновесия робота за счет выбора периодических законов изменения тензора инерции (сохраняющих его диагональный вид) и вектора гиростатического момента, которые обеспечивают существование вблизи этого положения устойчивого периодического движения. (Как и в главе 5, структура тензора инерции отвечает случаю, когда вдоль главных осей инерции робота симметрично относительно центра масс колеблются по две материальные точки). Найдены условия гироскопической стабилизации верхнего положения равновесия системы за счет вращения ротора с постоянной угловой скоростью.

Рассматривается возможность стабилизации верхнего положения равновесия робота периодически изменяющимся гиростатическим моментом при постоянном моменте инерции, проводится гармоническая аппроксимация устойчивого периодического движения вблизи верхнего положения равновесия при помощи Фурье-анализа, показавшая его схожесть с прецессионным движением. Для исследования нижнего положения равновесия робота его уравнения движения сведены к уравнению вида Матье, откуда были получены соответствующие условия устойчивости и неустойчивости.

В **заключении** приведены основные результаты работы.

Итогом работы является конструктивное исследование динамики твердого тела (робота) с периодическими управлениями, создаваемыми за счет периодического движения внутренних масс и роторов, либо путем приложения внешних периодических воздействий. Построенные конечномерные математические модели описывают различные условия движения робота в жидкости или на плоскости (в том числе с неподвижной точкой).

Все это свидетельствует о высокой квалификации автора диссертации, его умении использовать широкий спектр теоретических и численных методов в исследовании важных задач теоретической и прикладной механики. **Все результаты, представленные в диссертации, являются новыми, математически строго обоснованы и получены автором лично**. Они докладывались на всероссийских и международных научных конференциях, на семинарах в ведущих российских научных учреждениях и опубликованы в научной печати. Это подтверждает **достоверность полученных результатов**.

По работе имеются следующие **замечания**.

1. Как известно, метод Пуанкаре обеспечивает существование точного решения системы (1.43), (1.51) и его близость к построенным функциям (1.55) в некотором диапазоне значений малого параметра лишь на конечном интервале времени. При проведении исследований, связанных с вопросами устойчивости движения, нужно распространить эти результаты на бесконечный интервал времени, чего в работе сделано не было. Заметим, что доказательство можно провести без

большого труда, что сводит данное замечание лишь к упреку автору. Для рассматриваемого им случая норма матрицы Коши системы в отклонениях от решения порождающей по Пуанкаре системы (1.45)–(1.47) может быть ограничена экспоненциальной функцией времени с отрицательным показателем степени, откуда, используя результаты Р.П. Кузьминой, получаем требуемое утверждение (см. Р.П. Кузьмина. Асимптотические методы для обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Эдиториал УРСС, 2003. 336 с.). К тому же автором проводился численный анализ, всегда необходимый при использовании асимптотических результатов при конечных значениях малых параметров, который подтверждает сделанные им выводы.

2. Не выписано и не проверялось условие, обеспечивающее плоскопараллельное движение шара без проскальзывания. Оно неизбежно должно налагать ограничения на возможные коэффициенты трения шара и опорной плоскости, а также на амплитуду и частоту движения ротора и материальных точек. В частности, такая проверка представляется необходимой для траектории точки контакта шара и опорной плоскости зубчатого вида, показанной на рис. 5.13 и рис. 5.19. Наличие зубцов говорит о большой вероятности возникновения их относительного скольжения. Следовало бы показать, что, если это так, то скольжение кратковременно и не искажает общего вида траектории.

3. В замечании 6.1.5 обсуждается случай $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ обращения в нуль угловой скорости шара, когда нарушается взаимооднозначность соответствия между координатами векторов $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\gamma}$ и введенными автором координатами l, g, L и G. Из первого уравнения связи (6.2), отвечающего отсутствию проскальзывания шара относительно опорной плоскости, следует, что в этом случае скорость шара удовлетворяет равенству $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ – происходит его остановка. Следует заметить, что при $\mathbf{v} \approx \mathbf{0}$ и $\boldsymbol{\omega} \approx \mathbf{0}$ к анализу системы при помощи неголономной модели качения шара следует относиться с осторожностью: учет его микропроскальзывания $\mathbf{u}$ дает соотношение $\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \mathbf{u}$, ($\mathbf{r}$ – радиус-вектор точки контакта шара и плоскости) в котором каждое их слагаемых левой части может иметь тот же порядок малости,

что и правая часть. В этом случае предельный переход $\mathbf{u} \to \mathbf{0}$, как правило, не приводит к условию непроскальзывания.

4. В главах 5 и 6 следовало бы уделить больше внимания физическому смыслу получаемых результатов. В частности, чем определялся выбор параметров и как изменяются динамические переменные системы (скорость, угловая скорость шара и т.д.).

Имеются **несущественные погрешности**: ряд используемых в диссертации обозначений не определен или неудачен. Во всей работе не указаны размерности параметров и начальных условий по переменным, которые используются при численных расчетах. Введенное в формуле (1.1) обозначение ω для угловой скорости профиля трудно отличить от почти такого же по начертанию обозначения для постоянной частоты изменения кинетического момента ротора и циркуляции из (1.12). Не введено обозначение для Ω, применяемое в формуле (5.14) и далее. Однако, исходя из изложения, ясно, что это частота, определяемая периодом вращения ротора и движения материальных точек. Обозначения I_{11}, I_{22} и I_{33} на рис. 5.6 не определены в тексте работы. Исходя из изложения понятно, что это диагональные элементы тензора инерции системы. Отсутствует определение обозначения μ (стр. 209 и далее), характеризующего смещение центра масс системы. Часть обозначений системы (6.6) не соответствует своим аналогам из (5.14).

Есть **ряд неточностей в формулировках**, не влияющих на понимание сути работы. На стр. 27, 60 и 84 есть фраза (и ее близкие аналоги) «кинетическая энергия жидкости примет диагональный вид», тогда как имеется в виду, что диагональный вид примет матрица кинетической энергии. В пункте 2 выводов по главе 1 следовало бы напомнить о написанном на стр. 39 и 40: утверждение о том, что уравнения движения допускают предельный цикл, сделано на основании численных расчетов. При описании постановок задач в начале глав 1 и 2 нужно было указать, что, как и в главе 3, профиль обладает нулевой плавучестью (моменты силы тяжести и Архимедовой силы уравновешивают друг друга). На стр. 201 написано, что «неконсервативность рассматриваемой системы при движении на нулевом уровне интеграла $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{M}) = G = 0$ проявляется в виде существования предельных циклов и аттракторов, возникающих вследствие каскада удвоения периода», тогда как этот результат, полученный численно при конкретных значениях параметров, требует смягчения формулировки «проявляется» на «может проявляться». То же относится и к выводу (курсивным шрифтом) в конце стр. 205 для случая $G \neq 0$. В замечании 6.2.2 не указано, по отношению к какой величине значение M предполагается «большим».

В работе присутствует ряд **опечаток**. В верхней строке на стр. 105 имеется в виду не система (3.48), а система (3.47). В верхней части стр. 168 нужно заменить «терять устойчивость» на «теряет устойчивость». В первой строке на стр. 171 нужно заменить «в отсутствие диссипации…, внешнего момента… и гиростатического момента» на «при наличии диссипации…, внешнего момента… и отсутствии гиростатического момента…».

Отмеченные замечания и шероховатости не умаляют значимости диссертационного исследования.

Автореферат диссертации правильно и полно отражает ее содержание.

Считаю, что диссертация «Качественный анализ характерных особенностей поведения гидродинамических и неголономных систем с периодическими управлениями на основе конечномерных моделей» удовлетворяет всем требованиям Положения ВАК РФ, предъявляемым к докторским диссертациям, а ее автор Евгений Владимирович Ветчанин заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.02.01 – «Теоретическая механика».

Официальный оппонент:

Влахова Анастасия Владимировна, доктор физико-математических наук, доцент по специальности 01.02.01 – Теоретическая механика, профессор кафедры прикладной механики и управления Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова». Адрес: 119991, Российская Федерация, Москва, Ленинские горы, д. 1, Московский государственный университет

имени М.В. Ломоносова. Телефон: +7(495)939-10-00, Факс: +7(495)939-01-26, сайт: www.msu.ru, E-mail: info@rector.msu.ru.

Специальность, по которой официальным оппонентом защищена диссертация: 01.02.01 – Теоретическая механика.

Контактные данные А.В. Влаховой: телефон: +7(495)939-33-83, +7(910)-416-83-67, e-mail: vlakhova@mail.ru.

Адрес подразделения: 119991, Российская Федерация, Москва, Ленинские горы, д. 1, механико-математический факультет, кафедра прикладной механики и управления. Телефон: +7(495)939-33-83; e-mail: pkruch@mech.math.msu.su, сайт подразделения: http://www.damc.ru/.

«22» апреля 2022 г. **А.В. Влахова**

Подпись профессора А.В. Влаховой заверяю.
Декан механико-математического факультета
МГУ имени М.В. Ломоносова,
член-корреспондент РАН, профессор

«22» апреля 2022 г. **А.И. Шафаревич**