

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ  
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК (ИПРИМ РАН)**

На правах рукописи



**Русских Сергей Владимирович**

**НЕЛИНЕЙНАЯ МЕХАНИКА УПРУГИХ ТРАНСФОРМИРУЕМЫХ И  
УПРАВЛЯЕМЫХ КОСМИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

Специальность 01.02.04 – «Механика деформируемого твердого тела»

Диссертация на соискание ученой степени  
доктора физико-математических наук

Научный консультант:  
д.т.н., профессор,  
Заслуженный деятель науки РФ,  
Шклярчук Федор Николаевич

Москва – 2021 г.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	6
1. НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА УПРУГИХ КОСМИЧЕСКИХ СИСТЕМ.....	32
1.1. Уравнения динамики больших космических конструкций.....	32
1.1.1. Формулировка задачи.....	32
1.1.2. Нелинейные уравнения движения.....	38
1.1.3. Упругие и гравитационные силы.....	43
1.1.4. Линеаризованные уравнения движения.....	45
1.2. Динамика космического аппарата с выпускаемой тросовой системой..	48
1.2.1. Пространственное движение космического аппарата с тросом.....	48
1.2.2. Плоское движение космического аппарата с тросом.....	53
2. УРАВНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ СТЕРЖНЕВЫХ И ТРОСОВЫХ СИСТЕМ.....	56
2.1. Нелинейная динамика космического аппарата с присоединенной упругой стержневой системой.....	57
2.1.1. Постановка задачи.....	57
2.1.2. Уравнения движения.....	60
2.1.3. Уравнения движения в матричном виде.....	67
2.1.4. Тросовые растяжимые элементы.....	68
2.1.5. Редуцирование системы по квазистатическому изгибу.....	70
2.1.6. Исследования сходимости интегрирования уравнений движения.	72
2.1.7. Примеры расчета.....	73
2.1.8. Редуцирование системы для «легких» стержней.....	99
2.1.9. Редуцирование стержневой системы, описанной в неподвижной системе координат.....	101
2.2. Нелинейные колебания упругих панелей солнечных батарей космического аппарата.....	105
2.2.1. Постановка задачи.....	105
2.2.2. Численное решение системы уравнений.....	108

2.2.3. Примеры расчета.....	110
2.3. Основные выводы и результаты по главе 2.....	116
3. ДИНАМИКА РАЗВЕРТЫВАНИЯ И ФОРМООБРАЗОВАНИЕ КОСМИЧЕСКОЙ ЗОНТИЧНОЙ АНТЕННЫ.....	118
3.1. Описание предлагаемой конструкции антенны и формулировка задач развертывания и формообразования.....	119
3.2. Развертывание многозвенных радиальных стержней.....	122
3.2.1. Постановка задачи.....	122
3.2.2. Уравнения движения.....	124
3.2.3. Примеры расчета.....	130
3.3. Формообразование пологой космической антенны зонтичного типа...	141
3.3.1. Постановка задачи.....	141
3.3.2. Решение системы уравнений.....	145
3.3.3. Примеры расчета.....	146
3.4. Формообразование зонтичной антенны при сильном изгибе радиальных стержней.....	158
3.4.1. Постановка задачи.....	158
3.4.2. Алгоритм решения задачи.....	162
3.4.3. Верификация на примере сильного изгиба консольного стержня..	164
3.4.4. Примеры расчета.....	167
3.5. Основные выводы и результаты по главе 3.....	171
4. ТЕРМОУПРУГИЕ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЯ, СОЕДИНЕННОГО С КОСМИЧЕСКИМ АППАРАТОМ.....	173
4.1. Постановка задачи.....	174
4.2. Температура оболочки изогнутого стержня при солнечном нагреве....	176
4.3. Конечно-элементная модель стержня.....	178
4.4. Уравнения термоупругих колебаний стержня, соединенного с космическим аппаратом.....	180
4.5. Исследование сходимости решений уравнений термоупругих колебаний стержня.....	182

4.6. Примеры расчета.....	186
4.6.1. Решение без учета теплоизлучения.....	186
4.6.2. Учет теплоизлучения и лучистого теплообмена.....	187
4.7. Основные выводы и результаты по главе 4.....	192
5. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ СОСТАВНЫХ СИСТЕМ СО СВЯЗЯМИ.....	193
5.1. Составление общих уравнений в обобщенных координатах.....	194
5.2. Нелинейная динамика упругих стержней при больших пространственных перемещениях и поворотах.....	196
5.3. Нелинейная динамика троса.....	200
5.4. Колебания упругой балки с тяжелым поворачивающимся телом на конце.....	204
5.4.1. Уравнения нелинейных колебаний балки.....	204
5.4.2. Уравнения колебаний системы с освобожденными связями.....	208
5.4.3. Примеры расчета.....	210
5.5. Основные выводы и результаты по главе 5.....	212
6. УПРАВЛЕНИЕ УПРУГИМИ СИСТЕМАМИ ПРИ КОНЕЧНЫХ ПОВОРОТАХ И ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ.....	213
6.1. Терминальное управление поворотом упругой линейной системы с постоянными параметрами с устранением колебаний.....	216
6.1.1. Постановка задачи силового управления упругой системой при повороте.....	216
6.1.2. Кинематическое управление упругой системой.....	221
6.1.3. Устранение колебаний путем подбора управляющего воздействия в виде тригонометрического ряда.....	223
6.1.4. Примеры расчета.....	227
6.2. Устранение колебаний путем настройки собственных частот линейной системы с постоянными параметрами.....	241
6.2.1. Метод устранения колебаний путем настройки собственных частот упругой системы.....	241
6.2.2. Примеры расчета.....	245

6.3. Терминальное управление линейными системами с постоянными и переменными параметрами с устранением колебаний с использованием метода Бубнова-Галеркина.....	253
6.3.1. Задача о конечном передвижении тяжелого твердого тела на тросе переменной длины в линейной постановке.....	253
6.3.2. Решение задачи управления малыми колебаниями математического маятника переменной длины при конечном передвижении точки подвеса.....	268
6.4. Терминальное управление нелинейными системами с устранением колебаний с использованием метода Бубнова-Галеркина.....	277
6.4.1. Конечное передвижение тяжелого твердого тела на тросе переменной длины с устранением нелинейных колебаний в момент остановки .....	277
6.4.2. Устранение нелинейных колебаний математического маятника переменной длины в момент остановки при конечном передвижении точки подвеса.....	290
6.5. Основные выводы и результаты по главе 6.....	298
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	300
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	303

## ВВЕДЕНИЕ

Задачи нелинейной механики упругих трансформируемых и управляемых космических систем и конструкций со стержневыми и тросовыми элементами являются теоретически и практически важными и актуальными на современном этапе развития фундаментальной и прикладной науки и космической техники.

Большой научный вклад в механику упругих и трансформируемых космических систем с частями или элементами, совершающими относительное движение, внесли: Асланов В.С., Белецкий В.В., Борзых С.В., Бужинский В.А., Докучаев Л.В., Дорошин А.В., Закржевский А.Е., Зимин В.Н., Иванов В.А., Климов Д.М., Колесников К.С., Лиходед А.Н., Лопатин А.В., Паничкин В.И., Тестоедов Н.А., Усюкин В.И., Шмаков В.П., Craig R.R., Meirovich L., Modi V.J., Nurre G.S., Padill C.E. и др.

Вопросы нелинейной механики деформирования и устойчивости упругих систем рассматриваются в работах Вольмира А.С., Данилина А.Н., Лурье А.И., Новожилова В.В., Паймушина В.В., Пшеничнова С.Г., Светлицкого В.А. и др.

Наиболее значимые работы по управлению упругими конструкциями принадлежат Акуленко Л.Д., Воронову А.А., Ганиеву Р.Ф., Гришаниной Т.В., Колесникову К.С., Матюхину В.И., Рабиновичу Б.И., Разыграеву А.П., Ротенбергу Я.Н., Соколову Б.Н., Черноусько Ф.Л., Crawley E.F., Wada B.K. и др.

Используемые в настоящее время космические аппараты представляют собой, как правило, сложные конструкции, состоящие из различных элементов. После выведения на орбиту эти системы, предварительно компактно упакованные, претерпевают существенные изменения формы, приобретая конфигурацию, определяемую функциональным предназначением космического аппарата. К таким системам относятся панели солнечных батарей, штанги гравитационной стабилизации и удлинители для установки специальных приборов, космические манипуляторы и краны, собираемые на орбите ферменные конструкции, антенные конструкции, тросовые системы и т.д.

Перспективы применения на околоземной орбите крупногабаритных конструкций, состоящих из стержневых элементов, прорабатывались с конца 60-х годов XX века в СССР и США. В 1970-х годах американские специалисты предложили доставлять на орбиту частично собранные на Земле энергетические модульные блоки, а затем проводить их сборку. К таким собранным модулям в виде пространственной стержневой системы присоединялась антенна связи, ферменную конструкцию которой планировалось изготавливать из углепластика. Каждую секцию такой антенны в составе плотных упаковок предполагалось доставлять на орбиту в грузовом отсеке космического корабля «Спейс Шаттл». В настоящее время на Международной космической станции используются крупногабаритные ферменные конструкции (ITS – Integrated Truss Structure), которые используются для негерметичного хранения различных грузов, установки радиаторов, солнечных батарей, различного оборудования. Также из стержневых элементов состоят космические манипуляторы и краны.

Динамике упругих стержневых систем при больших перемещениях и углах поворота посвящена обширная литература [1 – 5 и др.]. В монографии [5] особое внимание уделено методам анализа механического поведения больших космических конструкций, в частности, действия внешних и внутренних силовых факторов. Значительное внимание уделено инженерному анализу конструкций из стержневых элементов, рассмотрены вопросы управления и обеспечения точности рабочих поверхностей. Большие космические системы, образованные из стержневых элементов, имеют многочисленные практические приложения с различными задачами в динамике космических конструкций [6 – 12 и др.]. В [13] выполнено численное исследование динамики углового движения малого космического аппарата с массой на выдвигаемой упругой балке.

В конечно-элементных моделях гибких стержневых систем, используемых в комплексах ANSYS, NASTRAN, FEMAP, ABAQUS и др., наряду с изгибом и кручением обычно учитывается и продольное растяжение стержней. Это приводит к сравнительно простым и разряженным системам дифференциальных уравнений для узловых перемещений и углов поворота [6]. Однако вследствие

большой жесткости элементов на растяжение по сравнению с изгибом и кручением в таких конечно-элементных моделях присутствуют высокочастотные осцилляции, связанные с продольными перемещениями. Поэтому дифференциальные уравнения движения таких систем являются уравнениями «жесткого типа» и проявляют склонность к вычислительной неустойчивости на больших интервалах времени. Этому вопросу была посвящена работа [14], в которой была рассмотрена задача динамики плоского движения тела с системой последовательно соединенных упруговязкими шарнирами гибких нерастяжимых стержней при больших углах поворота. Каждый стержень перемещается и поворачивается как твердое тело и изгибается по двум заданным формам. Приведены формулы для коэффициентов нелинейных уравнений движения системы с произвольным числом стержней. Динамика плоской стержневой системы с тросовыми растяжимыми элементами с произвольным числом стержней во вращающейся системе координат рассмотрена в работах [15 – 24].

Космические аппараты являются нерегулярными составными конструкциями, которые наряду с недеформируемыми и достаточно жесткими отсеками имеют весьма гибкие разворачиваемые на орбите в условиях невесомости части или элементы (панели солнечных батарей, штанги гравитационной стабилизации, стержневые и оболочечные антенны и пр.). Такие элементы имеют очень низкие собственные частоты колебаний и оказывают значительное влияние на динамику и устойчивость возмущенного движения управляемых космических аппаратов [7, 25 – 28 и др.].

Среди нелинейных задач динамики упругих трансформируемых космических аппаратов важное место занимают задачи раскрытия на орбите панелей солнечных батарей или моделирующих их упругих стержней из сложенного состояния в плоское фиксированное положение [29 – 35 и др.]. Для разворачивания стержневой системы, на которой могут располагаться гравитационный стабилизатор, блоки приборов и т.д., требуется зафиксировать положение стержней в определенный момент времени. Для этого могут

использоваться упруговязкие зажимы, зажимы сухого трения или тросовые элементы [36 – 38].

В работах [29, 30] секции солнечных батарей считаются абсолютно жесткими; они раскрываются из сложенного состояния за счет предварительно напряженных торсионных пружин в шарнирах и тросов с роликами, синхронизирующих движение и фиксацию панелей. В работе [31] с целью более точного определения реакций в шарнирах секции солнечных батарей считаются упругими и моделируются балками, работающими на растяжение и изгиб с учетом поперечного сдвига. Нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных для плоского движения раскрываемой системы при малых упругих относительных перемещениях с учетом кинематических соотношений и условий соединения секций интегрируются численно методом конечных разностей.

Метод многих тел со связями в приложении к задачам раскрытия упругих солнечных батарей представлен в [32 – 34] и ряде других работ. При численном интегрировании уравнений на больших интервалах времени составной системы с большим числом секций возникают вычислительные трудности, связанные с накоплением погрешностей на шагах интегрирования и «использование такого подхода теряет практический смысл» [35]. В таких случаях более рациональным является использование уравнений Эйлера-Лагранжа с предварительным удовлетворением кинематических условий сопряжения тел (секций), [35]. Недостатком такого подхода является трудоемкость получения нелинейных уравнений движения составной системы упругих тел в обобщенных координатах с весьма громоздкими выражениями для ее нелинейных коэффициентов. В работе [35] сформулирована задача динамики пространственного движения при конечных углах поворота космического аппарата с панелями солнечных батарей, состоящими из недеформируемых секций, которые соединены между собой упругими шарнирами, и приведены результаты расчета для конкретного спутника с 2-мя панелями солнечных батарей по 5 секций в каждой.

В работах [39 – 41] получены нелинейные уравнения нестационарных антисимметричных колебаний в связанной с космическим аппаратом системе

координат двух одинаковых панелей солнечных батарей с произвольным числом последовательно расположенных недеформируемых секций, соединенных с аппаратом и между собой упруговязкими шарнирами, при конечном повороте системы по крену.

Идеи использования тросовых элементов в космическом пространстве, в частности для создания искусственной силы тяжести, страховки и буксировки, принадлежит Циолковскому К.Э. На заре космонавтики Цандер Ф.А. и Кондратюк Ю.В. предлагали проекты использования тросов в качестве гибких связей между космическими конструкциями, в том числе некоторых видов солнечного паруса и орбитальной станции [36 – 38]. Разработка современных математических моделей гибких тросовых систем космического назначения началась в середине 70-х годов XX века. В 1972–74 гг. сотрудники Смитсоновской астрофизической лаборатории (США) Grossi M. и Colombo G. высказали предложения по развертыванию с борта космического корабля «Спейс Шаттл» длинного (от 20 до 100 км) электропроводного кабеля-троса для радиофизических, магнитосферных, геофизических и других исследований; также предполагалось изучение динамических и прочностных свойств неэлектропроводного троса. Результаты моделирования и первых экспериментов по использованию тросовых систем в космонавтике приведены в работах [42 – 44].

В работах [36 – 38, 45 – 48 и др.] представлены общие математические модели движения космических тел с тросовыми элементами, которые функционируют на круговых орбитах. В [45] особое внимание уделено воздействию гравитационных, аэродинамических и электромагнитных сил, внутреннего трения в тросе и других возмущающих факторов на поведение тросовой системы на орбите. Описано большое разнообразие динамических процессов в космических тросовых системах: ротация и либрация; движение с ослаблением троса; обрыв троса; развертывание и свертывание троса; демпфирование колебаний; волны в тросе; движение петель «бегущего» троса; дестабилизирующее действие аэродинамических и электромагнитных сил.

Следует отметить, что практически во всех построенных математических моделях [45] учитывается весомость и растяжимость троса. В работе [49] рассмотрена динамика космических тросовых систем, в частности построена многоточечная математическая модель движения несущего космического аппарата относительно его центра масс под действием периодической силы натяжения троса, а также рассмотрены результаты численного моделирования развертывания троса.

Обзор современного уровня развития моделей тросовых систем показывает, что данные системы как новая и перспективная область освоения космического пространства, находится на пороге широкого практического использования своих преимуществ. В [50] рассмотрены возможности применения вращающихся космических тросовых систем. На этой основе канадский проект VICEPS (проект 1990-х годов) при поддержке NASA является значительным шагом в развитии вращающихся тросовых систем. Возможность достаточно простых изменений длины троса, силы его натяжения и скорости вращения системы позволили предложить использование троса для исследования физики космической плазмы и физики высокой атмосферы и магнитосферы. За последние годы много внимания было уделено использованию электродинамических связей, которые могут быть использованы для коррекции орбиты космического аппарата, для снабжения его электроэнергией, для удаления с орбит отработавших свой срок аппаратов и их частей и другого космического мусора [51, 52]. Эволюция орбиты космической тросовой системы при буксировке отработанных космических частей с учетом влияния аэродинамического сопротивления атмосферы рассмотрена в [53]. В работе [54] представлена математическая модель динамики упругой тросовой системы, ориентированной по радиусу планеты, при относительном движении по ней на орбите массы (космический лифт).

В [10] представлены общие нелинейные уравнения пространственного и плоского движения космического аппарата с выпускаемым тросом в центральном гравитационном поле Земли. В [17] представлена математическая модель развертываемой стержневой системы, присоединенной к космическому аппарату,

к некоторым шарнирным узлам которой присоединены растяжимые тросовые элементы, служащие в качестве фиксаторов формы при построении космической стержневой фермы. Математическая модель нелинейной динамики выпускаемого с космического аппарата в гравитационном поле Земли длинного тяжелого растяжимого троса с управляемым твердым телом на конце представлена в [55]. Это тело движется под действием заданной регулируемой реактивной силы со скоростью, направленной в каждый момент времени на наблюдаемый спутник, движущийся по близкой орбите. Цель операции: сближение управляемого тела со спутником; захват с помощью специального приспособления типа «кошек»; притягивание спутника к космическому аппарату с целью «снятия» его с орбиты.

На космических аппаратах в качестве антенн, удлинителей для различных приборов, а также штанг гравитационной стабилизации [56 – 60 и др.] могут использоваться выдвигаемые тонкостенные стержни, образуемые навитой на барабан двухслойной предварительно напряженной металлической лентой. Если два слоя ленты, сваренных по боковым кромкам, после схода с барабана выгибаются в разные стороны, то получается трубчатый стержень с замкнутым контуром поперечного сечения, близким по форме к окружности. Такие стержни могут иметь большую длину. При поворотах космического аппарата и под воздействием солнечных лучей они совершают термоупругие колебания. При определенных условиях в результате взаимодействия упругих и инерционных сил и температуры тонкостенные стержни, подвергающиеся солнечному нагреву, могут быть динамически неустойчивыми, совершая колебания типа термоупругого флаттера. Вопросы о построении решений нестационарных динамических задач связанной термоупругости рассмотрены в [61, 62].

В работе [63] на основании дистанционных измерений было описано динамическое поведение спутника со стержнями гравитационной стабилизации после выхода из тени Земли в результате солнечного нагрева стержней, вызывающего их термоупругие колебания. В последующих работах [64 – 69 и др.] были выполнены аналитические исследования колебаний и динамической неустойчивости консольно-закрепленных тонкостенных стержней при солнечном

нагреве в приближенной линейризованной постановке с использованием разложения поперечных перемещений в ряд по собственным формам колебаний с оценками в одночленном и двухчленном приближениях.

В [70] была рассмотрена в нелинейной постановке статическая задача сильного изгиба длинного пустотелого тонкостенного стержня кругового поперечного сечения, подвергающегося солнечному нагреву с учетом влияния изгиба на угол падения солнечных лучей на поверхность стержня и с учетом внешнего и внутреннего излучения.

В наиболее общей постановке термоупругие изгибные колебания тонкостенного стержня с круговым поперечным сечением, соединенного упруго-вязким шарниром с космическим аппаратом и подвергающегося прямому солнечному излучению с учетом теплового потока, теряемого за счет внешнего излучения в космическое пространство, и лучистого теплообмена на внутренней поверхности оболочки стержня, с учетом изменения углов падения солнечных лучей на поверхность стержня за счет его изгиба и поворота вместе с аппаратом, рассмотрены в [71 – 73]. Вопросы динамической устойчивости упругих тонкостенных стержней при солнечном нагреве обсуждаются в [74].

Первое применение антенны с параболическим рефлектором относится к 1937 г., когда американские инженеры Гроут Ребер на основе идей Карла Янского сконструировали радиотелескоп. Обширное применение параболических антенн в военной и научной областях и для передачи информации началось в 40-х годах XX века [75, 76]. С началом космических полетов параболические рефлекторы стали применяться в составе бортовых радиотехнических систем космических аппаратов. В настоящее время системы с параболическими (или близкими к ним) рефлекторами имеют следующее применение: 1) телекоммуникационные спутники, обеспечивающие подвижную и стационарную связь на Земле, доступ в Интернет, ретрансляцию теле- и радиопрограмм; 2) специализированные виды связи – военного назначения, систем спасения, связь между различными космическими аппаратами; 3) дистанционное зондирование Земли, как в военных, так и в прикладных и научных целях.

Наиболее распространенный тип рефлекторов, применяемый в настоящее время – жесткие конструкции из углепластиков с габаритными размерами 1-3 метра. Второй тип конструкции – раскладные рефлекторы, с поверхностью, выполненной из радиоотражающего сетеполотна. Их габариты находятся в пределах 2-12 метров. Рефлекторы на базе раскладных структур с сетеполотном имеют низкую удельную массу и очень малый объем в сложенном состоянии, что и позволяет реализовывать такие крупногабаритные антенны [77]. К недостаткам таких рефлекторов относятся сложность конструкции (количество кинематических узлов может достигать сотен) и низкая точность отражающей поверхности, обусловленная грубой аппроксимацией теоретической поверхности – поверхность сетеполотна соответствует ей только в точках крепления к каркасу. Жесткие рефлекторы лишены такого принципиального недостатка, но их габаритный размер ограничен пространством под обтекателем ракеты-носителя. Существует несколько путей решения этой проблемы – создание раскладных конструкций с заранее заданной формой (например, космический радиотелескоп «Радиоастрон») или изменение формы стержневых элементов, образующих раскладной каркас так, чтобы сетеполотно образовывало отражающую поверхность не только в шарнирных узлах соединения стержней, но и на всей длине этих стержней.

Вопросы проектирования и расчета складных антенн зонтичного типа рассмотрены в работах [78 – 80 и др.]. Подробный обзор конструкций современных трансформируемых космических антенн представлен в статьях [81, 82], в том числе антенн зонтичного типа [83 – 90]. Применение метода конечных элементов и современных коммерческих программных комплексов для численного моделирования статики и динамики крупногабаритных космических антенн рассмотрено в работах [91 – 97 и др.]. Космическим зонтичным антеннам, их конструкции и задачам проектирования, посвящены многочисленные патенты от ведущих научных коллективов космической промышленности Российской Федерации [98 – 105 и др.]. В работе [106] отмечается, что одной из проблем динамики современных и перспективных космических аппаратов является анализ

влияния упругих деформаций крупногабаритных элементов конструкций, например параболических рефлекторов, на искажения формы их отражающих поверхностей.

Таким образом, составные космические антенны достаточно больших размеров должны доставляться в космос в сложенном состоянии и затем под действием упругих сил предварительного напряжения «быстро» разворачиваться с сопровождающими этот процесс упругими нелинейными колебаниями. Обычно эта задача рассматривается отдельно от статической задачи формообразования.

Необходимая форма антенны в развернутом рабочем состоянии достигается при проектировании конструкции как статически неопределимой свободной системы с определением требуемых для получения этой формы внутренних усилий и упругих перемещений силовых элементов. Для этого надо решить обратную геометрически нелинейную задачу упругого деформирования системы с ограничениями и определить требуемые размеры и параметры жесткости составляющих элементов. Такой подход используется для решения задачи формообразования путем упругого деформирования циклически симметричной пологой антенны зонтичного типа с гибкими нерастяжимыми радиальными стержнями, подвергающимися продольно-поперечному изгибу с учетом реакций растяжимых тросов, которые связывают в плоскостях параллелей соответствующие узлы радиальных стержней. Нагружение осуществляется осевой силой, создаваемой демпфирующим гидроцилиндром с предварительно напряженной пружиной. Задачи разворачивания предлагаемой конструкции антенны рассмотрены в работах [107 – 111], а задачи формообразования пологой конфигурации антенны, а в случае сильного изгиба радиальных стержней – в [108, 109, 111 – 115].

В линейных задачах динамики нерегулярных упругих конструкций, описываемых математическими моделями с большим числом степеней свободы, часто используется метод подконструкций (подсистем) – суперэлементов, модуль-элементов, отсеков, которые позволяют существенно сократить размерность системы для более устойчивого расчета. Метод суперэлементов впервые

предложен в работе [116], где обсуждались вопросы расчета авиационных конструкций путем предварительного их разделения на несколько составных компонент. Эти идеи получили дальнейшее развитие в работах [117 – 120 и др.]. Метод отсеков (или, по терминологии Постнова В.А. [121], метод модуль-элементов) предполагает использование аналитических решений для оболочек, пластин, тонкостенных стержней.

Уравнения для каждой подконструкции составляются отдельно; при этом можно использовать различные расчетные модели и методы и редуцировать число неизвестных параметров путем статической конденсации и преобразования к нормальным координатам, представляющим несколько низших собственных форм колебаний закрепленной или свободной подконструкции [122 – 125 и др.]. Геометрические условия соединения подконструкций на контактных границах удовлетворяются в отдельных точках (узлах), по методу наименьших квадратов или по методу Бубнова-Галеркина. При соединении упругих тел на малых участках контактной границы возникают локальные податливости тел, которые можно описывать «безынерционными» обобщенными координатами или после их исключения – эквивалентными пружинами [6, 124, 125].

Этот подход для составных упругих в общем случае нелинейных систем также может быть реализован путем использования уравнений Лагранжа или принципа Даламбера-Лагранжа в обобщенных координатах с неопределенными множителями и геометрическими связями [126 – 130 и др.]. При этом для уменьшения числа переменных могут быть использованы различные варианты исключения неопределенных множителей (реакций удержания связей) и точного выполнения некоторых условий связей с исключением такого же числа обобщенных координат. Оставшиеся связи в виде алгебраических уравнений присоединяются к дифференциальным уравнениям движения и образуют замкнутую систему дифференциально-алгебраических уравнений. Такие системы обычно являются «жесткими» и для их численного решения требуется использовать специальные методы, которым особое внимание уделено в работах [130 – 136 и др.].

В [137 – 139] рассматривается общий подход к описанию нестационарного движения двух упругих систем, описываемых нелинейными дифференциальными уравнениями в обобщенных координатах с алгебраическими уравнениями геометрических связей. В качестве примеров подсистем рассмотрены: гибкий нерастяжимый стержень, изгибаемый в двух плоскостях и закручиваемый (звено космического крана-манипулятора); растяжимый весомый трос, совершающий трехмерные нелинейные колебания. На примере упругой на изгиб нерастяжимой консольной балки с тяжелым вращающимся телом на конце показано, что этот подход эквивалентен подходу получения уравнений из уравнений Лагранжа 2-го рода в обобщенных координатах с учетом предварительного удовлетворения геометрических связей.

Задачи управления составными трансформируемыми системами и системами, совершающими конечные передвижения (перемещения и повороты) с деформациями отдельных частей или элементов, являются актуальными для быстроходных манипуляционных роботов [140 – 144 и др.], виброударных механизмов [138 – 148 и др.], ракет с разделяющимися ступенями [149 – 151 и др.] и космических конструкций [11, 152 – 158 и др.]. Общие вопросы теории управления большими системами, включая задачи управляемого передвижения системы из одного состояния в другое, рассмотрены в работах [26, 159 – 163 и др.], а задачи и методы управления колебаниями – в работах [164 – 168 и др.]. В большинстве работ упругие колебания, которые сопровождают конечные передвижения систем или их частей, считаются малыми и описываются нормальными координатами, представляющими относительные движения по собственным формам колебаний. В этом случае линейные задачи терминального управления с учетом начальных и конечных условий сводятся к системам интегральных уравнений для нормальных координат (в теории управления они называются уравнениями моментов). Поскольку решение задачи определения закона управления не является единственным, то она часто рассматривается как задача оптимального управления с минимизацией некоторого дополнительного функционала, зависящего от неизвестных параметров движения и управления.

Для решения интегральных уравнений для собственных форм колебаний, подлежащих гашению, управляющие функции обычно ищутся в виде кусочно-линейных функций с неизвестными параметрами [140, 164, 165] или в виде рядов заданных функций с неизвестными коэффициентами. В работах [169 – 171] для управления поперечными колебаниями балки с грузами на конце в качестве таких функций использовались синусы и косинусы с частотами собственных колебаний системы. Поскольку периоды собственных колебаний обычно значительно меньше заданного времени управления, то в этом случае весьма малые отклонения по времени управления, а также малые различия собственных частот математической модели и реальной системы приводят к большим отклонениям конечных перемещений и скоростей от требуемых нулевых значений. В результате колебания в реальной системе под действием найденных таким образом высокочастотных управляющих воздействий гаситься не будут. Управляемая система при высокочастотном управляющем воздействии будет неробастной – малые отклонения по времени от установленного интервала управления или малые расхождения по динамическим характеристикам расчетной модели и реальной системы могут приводить к большим ошибкам. Кроме того, искомые управляющие воздействия (например, силы и моменты) должны быть практически реализуемыми и, как реакции взаимодействия, не должны возбуждать ответные колебания в системе управления и в несущей конструкции. Это особенно важно для упругих управляемых космических систем, обладающих плотным спектром низких собственных частот и требующих весьма высокой точности выполнения операций.

В работах [6, 172 – 174] предложен альтернативный подход для определения силовых или кинематических управляющих воздействий для конечных передвижений упругой системы за заданное время из одного состояния в другое с гашением упругих колебаний по нескольким низшим собственным формам в конечный момент времени. Для этого используются «простые» управляющие финитные функции (например, в виде одной волны синуса или полуволны косинуса и др.) при условии, что частоты подлежащих гашению

нескольких низших собственных форм колебаний системы находятся в определенных соотношениях со временем управления.

Задачи управления являются важными и актуальными для подъемно-транспортных механизмов, которые можно рассматривать как механические маятниковые системы с переменными параметрами, совершающие большие перемещения и повороты. В работах [175, 176] рассмотрены колебания двойного маятника с вибрирующей точкой подвеса, в работе [177] – устойчивость управляемых движений такого маятника переменной длины, а в [178] – управление пространственным движением многозвенного маятника. Анализ конкретных задач стабилизации или терминального управления для систем типа одинарного или двойного маятника с подвижной точкой подвеса приведены в работах [179 – 184 и др.]. Решение подобных задач управления колебаниями упругих нелинейных систем и систем с переменными параметрами представляет большие математические и вычислительные трудности. Такие задачи обычно решаются различными приближенными и численными методами [165].

Задачи устранения нестационарных колебаний по нескольким низшим собственным формам упругой системы в момент остановки после конечного поворота по заданному закону путем предварительной настройки собственных частот по отношению к «простой» заданной управляющей функции рассматриваются в общей постановке и на конкретных примерах в работах [39 – 41, 185 – 188]. Управление конечным поворотом упругой системы из одного состояния в другое с гашением колебаний в момент окончания операции путем подбора управляющей функции в виде конечного ряда синусов или косинусов рассмотрено в [19, 20, 71, 189, 190]. С помощью этого подхода решена задача конечного поперечного передвижения упругого стержня с массой на конце с гашением колебаний в момент остановки [191, 192].

Применение метода Бубнова-Галеркина для гашения нелинейных колебаний математического маятника переменной длины при конечном передвижении из одного состояния покоя в другое приводится в работах [193, 194]. Управляющая функция при кинематическом управлении задана в виде

конечного ряда по синусам. Аналогичный подход используется в задаче устранения колебаний тяжелого твердого тела, подвешенного на тросе переменной длины, при его конечном передвижении из одного состояния покоя в другое [188, 194 – 197]. Решения задачи приводятся для линейной постановки при малых углах поворота троса и тела и для умеренно больших углов в нелинейной постановке.

**Актуальность темы** связана с недостаточной проработанностью некоторых частных задач механики больших упругих космических конструкций, в частности динамики систем с гибкими стержнями и тросовыми элементами, совершающими в общем случае нелинейные движения с большими перемещениями и углами поворота. Из обзора литературы можно сделать вывод о необходимости построения адекватных и точных математических моделей произвольной размерности для верификации современных программных комплексов расчета динамики механических систем. Анализ конструкций современных космических антенн зонтичного типа показал, что в настоящее время существует проблема выведения на орбиту Земли антенн с диаметром отражающего зеркала более 6 метров с достаточной точностью формы поверхности. Предложенные ранее способы управления механическими системами при совершении терминальных движений с гашением колебаний в момент остановки в некоторых случаях дают некорректные результаты. Поэтому для построения удобных управляющих импульсов необходимо разработать алгоритмы, позволяющие эффективно гасить заданное число собственных форм колебаний. Все это в целом обуславливает актуальность исследований, представленных в данной работе.

**Целями и задачами диссертационной работы** являются:

1. Получение уравнений нелинейной динамики развертывания плоской стержневой системы, состоящей из произвольного числа упругих нерастяжимых стержней, связанных между собой и с космическим аппаратом упруговязкими узловыми шарнирами. Решение задачи развертывания системы солнечных

батарей, соединенной с космическим аппаратом и состоящей из произвольного числа недеформируемых секций.

2. Разработка метода решения задачи формообразования циклически симметричной космической антенны зонтичного типа с упругими радиальными стержнями для получения наиболее точного соответствующего заданной форме параболоида вращения отражающей поверхности произвольного диаметра. Построение математической модели разворачивания из транспортировочного положения и формообразования до заданной поверхности.

3. Исследование нелинейной динамики тонкостенного стержня круглого поперечного сечения, соединенного с космическим аппаратом и подвергающегося прямому солнечному излучению.

4. Разработка общего подхода получения уравнений движения упругих составных нелинейных систем с геометрическими связями.

5. Решение задач гашения нестационарных колебаний по нескольким низшим собственным формам упругой системы при ее повороте и перемещении из одного состояния в другое с оценками точности. Разработка способов гашения остаточных колебаний, основанных на подборе управляющего импульса в виде конечных рядов тригонометрических функций или в виде простой заданной функции путем «настройки» собственных частот системы.

**Структура и объем диссертации.** Результаты исследований изложены на 324 страницах машинописного текста, иллюстрированного 213 рисунками и содержащего 18 таблиц. Диссертация состоит из введения, 6 глав с кратким введением и заключением с выводами по каждой главе, общего заключения, списка публикаций и литературы, состоящего из 205 ссылок.

**В первой главе** представлены общие нелинейные и линеаризованные уравнения динамики больших упругих космических конструкций с тросовыми элементами в центральном гравитационном поле Земли для перемещений и конечных углов поворота системы как твердого тела и для обобщенных координат, представляющих относительные упругие перемещения при конечных

деформациях. Рассмотрена динамика пространственного и плоского движения космического аппарата с выпускаемым тросом в центральном гравитационном поле Земли.

**Во второй главе** рассмотрена нелинейная динамика в подвижной системе координат плоской стержневой системы, состоящей из произвольного числа упругих нерастяжимых стержней, связанных между собой на концах упруговязкими узловыми шарнирами, допускающими большие углы поворота. Стержневая система присоединена к недеформируемому космическому аппарату, который совершает поворот относительно своего центра масс и перемещения по горизонтальной и вертикальной оси как свободное твердое тело. Между двумя любыми шарнирами может присутствовать в качестве связи растяжимый трос, длина которого может изменяться по заданному закону. Выполнено исследование сходимости численного интегрирования полученных уравнений движения. Рассмотрены численные примеры: расчета реакции системы на произвольный возмущающий импульс; разворачивания системы за счет сил предварительно сжатых пружин и за счет центробежных и инерционных сил, создаваемых движением космического аппарата; разворачивание ферменной конструкции с тросовыми элементами, в том числе с программно изменяемыми их длинами. Представлена постановка задачи, которая получается путем редуцирования исходной системы по квазистатическому изгибу: из уравнений движения исключаются «быстрые» переменные, представляющие собой изгиб каждого стержня.

Рассматривается нестационарное вращательное движение и нелинейные колебания в плоскости крена космического аппарата с двумя упругими панелями солнечных батарей. Каждая панель состоит из произвольного числа недеформируемых секций, которые связаны между собой и с космическим аппаратом упруговязкими шарнирами, допускающими большие углы поворота. На основе полученных уравнений рассмотрены примеры расчета реакции системы на приложение к космическому аппарату управляющего воздействия и

выполнен анализ разворачивания панелей солнечных батарей при различных начальных условиях.

**В третьей главе** рассматривается предложенная автором расчетная схема циклически симметричной антенны зонтичного типа, состоящей из радиальных многозвенных нерастяжимых стержней, которые связаны между собой в узлах по параллелям растяжимыми тросами. Сначала решается нелинейная динамическая задача разворачивания многозвенного упругого на изгиб радиального стержня антенны под действием предварительно напряженных пружин в шарнирах с выходом их на упоры в заданном прямолинейном положении под некоторым углом к оси системы, в котором тросовые элементы становятся прямолинейными, но еще ненапрянутыми; это предварительное состояние системы с выравниваем положений всех стержней циклически симметричной системы обеспечивается за счет медленного хода гидроцилиндра.

Затем решается квазистатическая задача формообразования антенны при переводе ее из предварительного состояния в конечное за счет продольно-поперечного изгиба стержней и натяжения тросов под действием медленно изменяющейся осевой силы, создаваемой гидроцилиндром. Получены уравнения геометрически нелинейного деформирования системы для перемещений и углов поворота в узловых точках стержня. Математическая модель формообразования антенны приведена в двух постановках – для пологой параболы и для случая сильного изгиба радиальных стержней. В последнем случае выполнена верификация модели путем сопоставления результатов расчета с известной задачей сильного изгиба консольного стержня под действием продольной сжимающей силы (эластика Эйлера).

**В четвертой главе** представлена математическая модель термоупругих изгибных колебаний тонкостенного стержня с круговым поперечным сечением, соединенного упруговязким шарниром с космическим аппаратом и подвергающегося прямому солнечному излучению с учетом теплового потока, теряемого за счет внешнего излучения в космическое пространство, и лучистого теплообмена на внутренней поверхности оболочки стержня. Выполнены

исследования сходимости численного интегрирования связанных уравнений термоупругости и теплопроводности. Показаны результаты численного решения на конкретных примерах со сравнениями различных расчетных случаев, в том числе решений без учета теплоизлучения и с учетом теплоизлучения и лучистого теплообмена; выполнена оценка влияния составляющих инерционных сил стержня на его характер колебаний при солнечном нагреве.

**В пятой главе** предложен общий подход получения уравнений движения упругих составных систем с геометрическими связями на основании принципа возможных перемещений (Даламбера-Лагранжа) путем использования уравнений в обобщенных координатах отдельных систем с учетом неизвестных реакций взаимодействия и присоединения к этим уравнениям условий связи.

В качестве примеров подсистем рассмотрены: гибкий нерастяжимый стержень, изгибаемый в двух плоскостях и закручиваемый, который представляет собой гибкое звено космического крана-манипулятора; растяжимый весомый трос, совершающий трехмерные нелинейные колебания.

На основании этого подхода выполнено сравнение двух вариантов численного решения задачи о переходных нелинейных колебаниях упругой нерастяжимой балки с поворачивающимся по заданному закону тяжелым твердым телом на ее конце, причем в первом варианте условие связи конца балки и тела по перемещениям и углу поворота выполняется точно, а во втором варианте – условие равенства продольного перемещения тела и конца нерастяжимой балки записывается в виде нелинейного алгебраического соотношения.

**В шестой главе** рассматриваются терминальные задачи управления нестационарными колебаниями упругой системы при ее конечном передвижении из одного состояния покоя или ускоренного движения в другое состояние. Для решения этой задачи в линейной и нелинейной постановках предложено несколько различных подходов. Для линейных систем с постоянными коэффициентами используется разложение по собственным формам колебаний, уравнения в нормальных координатах которых решаются аналитически точно.

Управляющая функция представляется несколькими членами ряда по синусам или косинусам с неизвестными коэффициентами, которые определяются из начальных и конечных условий.

Для линейной системы с постоянными коэффициентами, совершающей многократно одноподобные операции, устранение колебаний в конце каждой операции осуществляется за счет «настройки» нескольких низших собственных частот путем минимизации записанной для них квадратичной функции варьируемых параметров системы.

Для решения задачи управления линейной системой с переменными параметрами и нелинейной системой, описываемых в обобщенных координатах, последние ищутся в виде разложений по заданным базисным функциям времени с неизвестными коэффициентами, которые определяются по методу Бубнова-Галеркина. Управляющая функция ищется в виде конечного ряда по синусам, неизвестные коэффициенты которого определяются из начальных и конечных условий. При этом для нелинейной системы по методу Бубнова-Галеркина получают нелинейные алгебраические уравнения, которые решаются по методу последовательных приближений.

Рассмотрены примеры решения линейных и нелинейных задач устранения колебаний в момент окончания передвижения: упругого консольного стержня с массой на конце; космического аппарата с упругими панелями солнечных батарей при конечном повороте по крену; математического маятника переменной длины; твердого тела, перемещаемого на тросе переменной длины из одного состояния покоя в другое.

**Научная новизна диссертационной работы** заключается в получении следующих основных результатов:

1. Новая математическая модель нелинейной динамики в подвижной системе координат плоской стержневой системы произвольной размерности с тросовыми элементами, присоединенной к космическому аппарату.

2. Динамика развертывания солнечных батарей космического аппарата, состоящих из произвольного числа панелей. Уравнения движения системы с аналитическими выражениями для всех коэффициентов представлены впервые.

3. Разработка математической модели и решения задач развертывания и формообразования космической антенны зонтичного типа в двух постановках. Подобный подход в образовании отражающей поверхности с высокой точностью и с большим диаметром представлен впервые.

4. Решение актуальных задач расчета термоупругих нестационарных колебаний тонкостенного стержня, соединенного с космическим аппаратом, с учетом теплового потока, теряемого за счет внешнего излучения в космическое пространство, и лучистого теплообмена на внутренней поверхности оболочки стержня.

5. Методика получения уравнений движения составных нелинейных систем с геометрическими связями.

6. Разработка новых эффективных методов устранения нестационарных колебаний упругих линейных и нелинейных систем при их конечных перемещениях и поворотах за заданное время в момент окончания операции.

### **Теоретическая и практическая ценность и значимость работы:**

Представленные в главе 1 общие уравнения динамики больших космических конструкций могут служить теоретической основой для получения нелинейных уравнений движения при рассмотрении частных задач.

Полученные результаты в главе 2 позволяют решать разнообразные плоские задачи развертывания стержневых систем для получения необходимых конфигураций, в том числе ферменных конструкций с удерживающими связями в виде тросовых элементов. Уравнения для космического аппарата с панелями солнечных батарей позволяют проводить расчеты их развертывания из транспортировочного положения в конечное рабочее состояние.

Методы, описанные в главе 3, позволяют получать различные конфигурации отражающей поверхности космических антенн зонтичного типа.

Представленные алгоритмы позволяют определять необходимые параметры элементов антенны для получения ее заданной формы.

Представленные в главе 4 уравнения нелинейной динамики космического аппарата с упругим тонкостенным стержнем, который подвергается прямому солнечному нагреву, позволяют рассчитывать термоупругие колебания стержня при поворотах космического аппарата, с высокой степенью точности оценивать динамическую устойчивость системы типа термоупругого флаттера.

Подход, изложенный в главе 5, является общей теоретической основой для получения уравнений движения составных нелинейных систем с геометрическими связями, в качестве подсистем которых могут использоваться гибкие нерастяжимые изгибаемые в двух плоскостях и закручиваемые стержни или растяжимые весомые тросы.

Новые и оригинальные эффективные методы, описанные в главе 6, устранения нестационарных колебаний упругих линейных и нелинейных систем, совершающих конечные перемещения и повороты, позволяют получать решения конкретных прикладных задач космической техники.

На различных этапах работа поддерживалась грантами РФФИ: № 15-08-06259 – «Динамика и устойчивость упругих управляемых космических систем» (руководитель – Шклярчук Ф.Н.); № 18-08-00778 – «Пассивное и активное управление конечными передвижениями и нестационарными колебаниями упругих систем» (руководитель – Шклярчук Ф.Н.); № 18-38-00300 – «Динамика раскрытия космической зонтичной антенны с циклически симметричным каркасом, образованным многозвенными гибкими стержнями и тросами» (руководитель – Русских С.В.).

#### **Методология и методы исследования:**

Уравнения нелинейной динамики, представленные в работе, были получены на основе принципа возможных перемещений (Даламбера-Лагранжа) и с использованием уравнений Лагранжа 2-го рода. При их выводе использовался метод Ритца и разложение неизвестных перемещений в ряды по базисным

функциям координат, коэффициенты которых принимались за обобщенные координаты. В задачах устранения колебаний для определения управляющих воздействий был использован метод Бубнова-Галеркина во временной области.

Численное интегрирование полученных систем нелинейных дифференциальных уравнений осуществлялось на основе методов компьютерной алгебры, в частности, метода Адамса, метода Рунге-Кутты, метода обратного дифференцирования (BDF) и комбинированного метода решения алгебро-дифференциальных систем. При решении систем линейных алгебраических уравнений использовался метод Гаусса, а нелинейных алгебраических уравнений – метод последовательных приближений.

### **Основные положения и результаты, выносимые на защиту:**

1. Разработанная модель движения плоской стержневой системы произвольной размерности, присоединенной к космическому аппарату в подвижной системе координат.

2. Разработанная модель разворачивания панелей солнечных батарей космического аппарата с произвольным числом составляющих секций.

3. Предложенная конструкция космической зонтичной антенны и методы расчета ее разворачивания и формообразования до заданной поверхности.

4. Представленная модель термоупругих колебаний стержня, соединенного со свободным по углу поворота космическим аппаратом и подвергающегося прямому солнечному излучению.

5. Предложенный подход получения уравнений движения составных нелинейных систем с геометрическими связями.

6. Предложенные методы эффективного устранения нестационарных колебаний упругих систем при их конечных перемещениях и поворотах в момент окончания операции.

**Обоснованность и достоверность полученных результатов** подтверждается:

1. Строгим и корректным использованием известных методов механики деформируемого твердого тела и математическим обоснованием предлагаемых методов и подходов.

2. Сравнениями полученных численных результатов с имеющимися в литературе для частных случаев.

3. Решением тестовых задач для проверки численных алгоритмов решения систем разрешающих уравнений.

4. Исследованием сходимости результатов расчета при решении систем нелинейных дифференциальных уравнений для нескольких неизвестных.

**Апробация работы:** основные результаты диссертационной работы доложены на международных научных конференциях, семинарах и симпозиумах, в том числе:

1. Всероссийская научная конференция с международным участием «Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред», Москва, ИПРИМ РАН, 15-17 декабря 2015 г.

2. XXII Международный симпозиум «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова, Калужская область, Кременки, 15-19 февраля 2016 г.

3. Всероссийская научно-техническая конференция «Механика и математическое моделирование в технике», Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана, 17-19 мая 2016 г.

4. 15-ая Международная конференция «Авиация и космонавтика – 2016», Москва, МАИ, 14-18 ноября 2016 г.

5. 6-ая Всероссийская научная конференция с международным участием «Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред» им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского, Москва, ИПРИМ РАН, 16-18 ноября 2016 г.

6. XXIII Международный симпозиум «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова, Калужская область, Кременки, 13-17 февраля 2017 г.

7. 16-ая Международная конференция «Авиация и космонавтика – 2017», Москва, МАИ, 20-24 ноября 2017 г.

8. 7-ая Всероссийская научная конференция с международным участием «Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред» им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского, Москва, ИПРИМ РАН, 21-23 ноября 2017 г.

9. XXIV Международный симпозиум «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова, Калужская область, Кременки, 19-23 марта 2018 г.

10. 17-ая Международная конференция «Авиация и космонавтика – 2018», Москва, МАИ, 19-23 ноября 2018 г.

11. 8-ая Всероссийская научная конференция с международным участием «Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред» им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского, Москва, ИПРИМ РАН, 18-19 декабря 2018 г.

12. 1-ая Общероссийская научно-практическая конференция «Вопросы инновационного развития аэрокосмического комплекса России», Москва, МАИ, декабрь 2018 г.

13. XXV Международный симпозиум «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова, Калужская область, Кременки, 18-22 марта 2019 г.

14. Третья молодежная конференция «Инновационная деятельность в науке и технике. Создание космических аппаратов. Актуальные проблемы и пути их решения», Московская область, Истра, 25 апреля 2019 г.

15. 9-ая Всероссийская научная конференция с международным участием «Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных

сред» им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского посвященная 30-летию ИПРИМ РАН, Москва, ИПРИМ РАН, 19-21 ноября 2019 г.

16. XXVI Международный симпозиум «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова, Калужская область, Кременки, 16-20 марта 2020 г.

17. 19-ая Международная конференция «Авиация и космонавтика – 2020», Москва, МАИ, 23 – 27 ноября 2020 г.

18. XXVII Международный симпозиум «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова, Калужская область, Кременки, 17-21 мая 2021 г.

**Личный вклад автора:** представленные в диссертации научные результаты получены лично автором. Вклад автора в публикации, выполненные в соавторстве, состоял в анализе известного теоретического материала, формулировке постановок задач, выполнении аналитических исследований и численных расчетов. Во всех случаях использования результатов других исследований в работе приводятся ссылки на источники информации.

**Публикации:** список научных трудов по диссертационной работе составляет 41 публикацию, в том числе 17 работ в рецензируемых научных изданиях, из которых 5 работ опубликовано в иностранных и отечественных журналах из баз данных Scopus и Web Of Science, а также 1 учебное пособие.

**Благодарности:** автор выражает глубокую благодарность своему научному консультанту, Заслуженному деятелю науки РФ, д.т.н., профессору Шклярчуку Федору Николаевичу за постоянную поддержку и участие в совместных исследованиях, а также д.ф.-м.н., профессору Гришаниной Татьяне Витальевне за ценные замечания и рекомендации и организационную поддержку.

# 1. НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА УПРУГИХ КОСМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Космические конструкции (аппараты) являются нерегулярными составными системами, которые наряду с достаточно жесткими отсеками имеют части и элементы, которые разворачиваются или собираются на орбите в условиях невесомости, подвергаются малым нагрузкам и поэтому могут быть весьма гибкими (панели солнечных батарей, штанги гравитационной стабилизации, стержневые и оболочечные антенны, выпускаемые тросы с субспутниками и пр.). Относительные движения и колебания таких частей (элементов) оказывают значительное влияние на динамику и устойчивость управляемых космических систем и космических аппаратов. Возникает много различных задач динамики космических систем, в которых необходимо учитывать относительные движения (колебания) присоединенных гибких частей и элементов. При этом упругие перемещения и повороты гибких элементов могут быть большими, и в таких случаях для описания их колебаний необходимо использовать геометрически нелинейную теорию деформирования упругих тел с конечными деформациями.

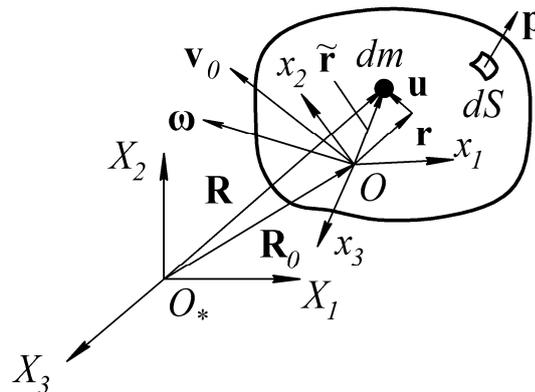
Представлены [10] общие нелинейные и линеаризованные уравнения динамики больших упругих космических конструкций с тросовыми элементами в центральном гравитационном поле для перемещений и конечных углов поворота системы как твердого тела и для обобщенных координат, представляющих относительные упругие перемещения при конечных деформациях в квадратичном приближении [198 – 201].

## *1.1. Уравнения динамики больших космических конструкций*

### **1.1.1. Формулировка задачи**

Рассмотрим упругую систему (тело), которая совершает поступательное и вращательное движения, сопровождаемые колебаниями [5, 7 – 9, 11]. Будем считать, что деформации тела являются упругими и конечными в квадратичном

приближении, а углы поворота его элементов, обусловленные деформациями, – умеренно большими (здесь угол считается умеренно большим или конечным, если  $\sin \vartheta \approx \vartheta$ ,  $\cos \vartheta \approx 1 - \vartheta^2/2$ , и малым, если  $\sin \vartheta \approx \vartheta$ ,  $\cos \vartheta \approx 1$ ). Колебания тела будем рассматривать в связанной с ним подвижной системе координат  $Ox_1x_2x_3$  (рис. 1.1.1). Эта система может быть «локально» связанной с какой-либо точкой тела или его недеформируемым элементом (частью). В некоторых случаях систему  $Ox_1x_2x_3$  удобно жестко связать с движущимся как бы «затвердевшим» телом, из решения задачи динамики которого могут быть найдены параметры движения этой системы. Тогда по отношению к такой системе координат упругое тело будет «плавающим», т. е. наряду с упругими деформациями оно будет иметь возможность совершать дополнительные конечные повороты и перемещения как твердое тело относительно этой системы координат.



**Рис. 1.1.1.** Упругое тело и связанная система координат

Положение рассматриваемой подвижной «самолетной» системы координат относительно инерциальной системы  $O_*X_1X_2X_3$  характеризуется радиус-вектором  $\mathbf{R}_0 = [X_{01}(t) \ X_{02}(t) \ X_{03}(t)]^T$  и углами поворота  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  представляющими углы крена, рыскания и тангажа соответственно. Эти углы, их производные по времени  $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3$  и последовательность вращений тела ( $\theta_2 \rightarrow \theta_3 \rightarrow \theta_1$ ) показаны на рис. 1.1.2. Будем считать, что в исходном положении тела направления осей  $x_1, x_2, x_3$  совпадают с направлениями осей  $X_1, X_2, X_3$

соответственно.

Векторы скорости поступательного (в точке  $O$ ) и вращательного движений системы  $Ox_1x_2x_3$  относительно системы  $O_*X_1X_2X_3$  обозначим через

$$\mathbf{v}_0 = [v_{01}(t) v_{02}(t) v_{03}(t)]^T, \quad \boldsymbol{\omega} = [\omega_1(t) \omega_2(t) \omega_3(t)]^T,$$

где  $v_{0k}(t)$ ,  $\omega_k(t)$  – проекции этих векторов на ось  $Ox_k$ . При этом из рис. 1.1.2 можно получить кинематические соотношения:

$$\mathbf{v}_0 = \Lambda \dot{\mathbf{R}}_0, \quad \boldsymbol{\omega} = \Lambda \dot{\boldsymbol{\theta}}, \quad \boldsymbol{\theta} = [\theta_1 \theta_2 \theta_3]^T; \quad (1.1.1)$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} c_2c_3 & s_3 & -s_2c_3 \\ s_1s_2 - c_1c_2s_3 & c_1c_3 & s_1c_2 + c_1s_2s_3 \\ c_1s_2 + s_1c_2s_3 & -s_1c_3 & c_1c_2 - s_1s_2s_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & s_3 & 0 \\ 0 & c_1c_3 & s_1 \\ 0 & -s_1c_3 & c_1 \end{bmatrix};$$

$$s_k = \sin \theta_k, \quad c_k = \cos \theta_k, \quad (k=1,2,3).$$

Матрица направляющих косинусов  $\Lambda$  обладает свойством  $\Lambda^{-1} = \Lambda^T$ .

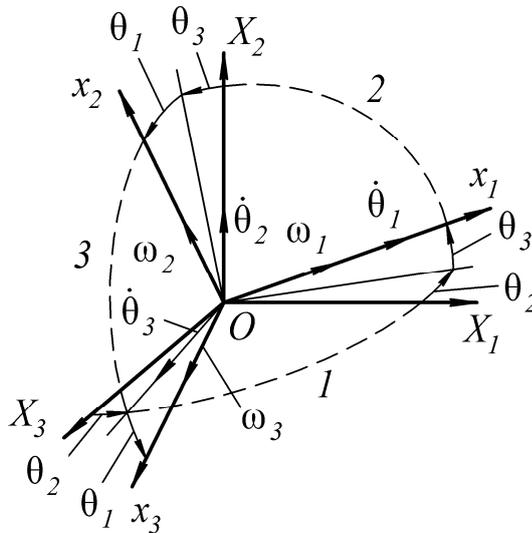


Рис. 1.1.2. Подвижная система координат

Радиус-вектор  $\mathbf{R}$  и векторы абсолютной скорости  $\mathbf{v}$  и абсолютного ускорения  $\mathbf{a}$  любой точки движущегося и колеблющегося упругого тела (см. рис. 1.1.1):

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{R}_0 + \tilde{\mathbf{r}}, \quad \tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r} + \mathbf{u}; \\ \mathbf{v} &= \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \tilde{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{u}}, \quad \mathbf{a}_0 = \dot{\mathbf{v}}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_0; \\ \mathbf{a} &= \mathbf{a}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \tilde{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \tilde{\mathbf{r}}) + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{u}} + \ddot{\mathbf{u}}, \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

где  $\mathbf{r} = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$  – радиус-вектор исходного положения рассматриваемой точки (элемента массы  $dm$ );  $\mathbf{u} = [u_1 \ u_2 \ u_3]^T$  – вектор перемещений тела, обусловленных его колебаниями относительно системы  $Ox_1x_2x_3$ ;  $\mathbf{a}_0$  – ускорение точки  $O$ .

Конечные деформации (относительные удлинения  $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}$  и углы сдвига  $\gamma_{12}, \gamma_{23}, \gamma_{31}$ ) выражаются через проекции перемещения на оси подвижной системы координат  $u_1(x_1, x_2, x_3, t), u_2(x_1, x_2, x_3, t), u_3(x_1, x_2, x_3, t)$  на основании квадратично нелинейных соотношений [8]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)^2 \right], \quad \dots; \\ \gamma_{12} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{\partial u_3}{\partial x_2}, \quad \dots; \\ &\quad (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1), \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

которые справедливы при  $\partial u_1 / \partial x_1 \ll 1, (\partial u_1 / \partial x_2)^2 \ll 1, \dots (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1)$ .

В прикладных теориях (расчетных моделях) деформирования упругих тел могут быть использованы различные кинематические или динамические допущения. Например, если тело (или его часть) считается абсолютно жестким, то его перемещения выражаются через конечные углы поворота линейно-квадратичными зависимостями. Если при изгибных колебаниях стержня считать его ось  $x_1$  нерастяжимой ( $\varepsilon_{11} = 0$ ), то на основании (1.1.3) продольное перемещение  $u_1$  будет квадратичным образом выражаться через прогибы  $u_2, u_3$ . В случае нелинейных преимущественно поперечных колебаний пластин и пологих оболочек можно пренебречь инерцией в тангенциальных направлениях и путем интегрирования квазистатических уравнений равновесия с учетом закона Гука и конечных деформаций (1.1.3) можно выразить тангенциальные перемещения через прогиб квадратичным образом.

Таким образом, в геометрически нелинейных задачах на основании метода Ритца и метода конечных элементов (МКЭ) перемещения упругого тела в общем случае могут быть представлены в виде разложения [7]:

$$\mathbf{u} = \sum_i q_i \boldsymbol{\varphi}_i + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j q_i q_j \boldsymbol{\Psi}_{ij}, \quad (1.1.4)$$

где  $q_i(t)$  – обобщенные координаты;  $i, j = 1, 2, \dots, n$  при описании движения тела в локально связанной системе координат и  $i, j = 0_1, 0_2, \dots, 0_6, 1, 2, \dots, n$  – в плавающей системе координат;  $\boldsymbol{\varphi}_i(x_1, x_2, x_3)$ ,  $\boldsymbol{\Psi}_{ij}(x_1, x_2, x_3)$  – заданные вектор-функции, которые выбираются в классе возможных перемещений тела согласно принятой расчетной модели (стержень, пластина и пр.) с учетом определенных допущений; при этом функции  $\boldsymbol{\Psi}_{ij}$  выражаются через  $\boldsymbol{\varphi}_i$  и  $\boldsymbol{\varphi}_j$  и являются симметричными, т.е.  $\boldsymbol{\Psi}_{ij} = \boldsymbol{\Psi}_{ji}$ . Обобщенные координаты  $q_i$  при  $i = 1, 2, \dots, n$  представляют упругие деформации тела, а при  $i = 0_1, 0_2, \dots, 0_6$  – перемещения и повороты недеформируемого тела. В частности, если не используются никакие допущения, связывающие различные компоненты перемещений, то можно принять  $\boldsymbol{\Psi}_{ij} \equiv \mathbf{0}$ . Однако в этом случае для тонких тел при преимущественно поперечных колебаниях сходимость решения нелинейной задачи может оказаться слабой и потребуется большое число заданных функций  $\boldsymbol{\varphi}_i$  для аппроксимации тангенциальных перемещений, поскольку последние связаны с нормальными перемещениями почти квазистатически.

В качестве функций  $\boldsymbol{\varphi}_i$  при  $i = 1, 2, \dots, n$  удобно использовать собственные формы малых колебаний рассматриваемой упругой системы. При этом можно ограничиться небольшим числом  $n$  этих функций, представляющих низшие формы колебаний, и с учетом их ортогональности упростить уравнения. Для локально связанной с упругим телом системы координат  $Ox_1x_2x_3$  для  $\boldsymbol{\varphi}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) можно использовать формы собственных колебаний этого тела, закрепленного в точке  $O$  или на какой-либо его жесткой части. Например, для космического аппарата с жестким центральным телом и присоединенными к нему упругими элементами (панелями солнечных батарей, штангами гравитационной стабилизации, удлинительными фермами и пр.) в качестве функций  $\boldsymbol{\varphi}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) можно использовать собственные формы колебаний этих элементов,

закрепленных на неподвижном центральном теле.

Для плавающей системы координат  $Ox_1x_2x_3$ , связанной с условно затвердевшим телом, для функций  $\varphi_i$  ( $i=1,2,\dots,n$ ) можно использовать формы собственных упругих колебаний свободного тела. Последние ортогональны как друг с другом, так и с формами перемещений и малых поворотов твердого тела. Для данного случая вектор-функции, соответствующие степеням свободы системы как твердого тела, при  $i=0_1,0_2,\dots,0_6$  имеют вид [6]:

$$\begin{aligned}
 \varphi_{0_1} &= \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, & \varphi_{0_2} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, & \varphi_{0_3} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}, & \varphi_{0_4} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ -x_3 \\ x_2 \end{Bmatrix}; \\
 \varphi_{0_5} &= \begin{Bmatrix} x_3 \\ 0 \\ -x_1 \end{Bmatrix}, & \varphi_{0_6} &= \begin{Bmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{Bmatrix}, & \psi_{0_40_4} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ -x_2 \\ -x_3 \end{Bmatrix}, & \psi_{0_40_5} &= \begin{Bmatrix} x_2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}; \\
 \psi_{0_40_6} &= \begin{Bmatrix} x_3 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, & \psi_{0_50_5} &= \begin{Bmatrix} -x_1 \\ 0 \\ -x_3 \end{Bmatrix}, & \psi_{0_50_6} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_2 \end{Bmatrix}, & \psi_{0_60_6} &= \begin{Bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ 0 \end{Bmatrix}; \\
 \psi_{ij} &= \mathbf{0} & \text{при} & & i, j &= 0_1, 0_2, 0_3.
 \end{aligned} \tag{1.1.5}$$

При этом  $q_{0_1}, q_{0_2}, q_{0_3}$  представляют перемещения в направлении осей  $x_1, x_2, x_3$  соответственно, а  $q_{0_4}, q_{0_5}, q_{0_6}$  – конечные углы поворота относительно этих осей. Выражения (1.1.5) для конечных углов поворота получены из формулы для перемещений твердого тела при его повороте  $\mathbf{u} = (\mathbf{\Lambda}^T - \mathbf{E})\mathbf{r}$  путем разложения матрицы  $\mathbf{\Lambda}^T$  по степеням  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  с точностью до квадратичных членов включительно.

Для удобства дальнейших вычислений векторное произведение будем заменять матричным:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \overset{\vee}{\mathbf{a}} \mathbf{b},$$

где верхним знаком  $\vee$  обозначается кососимметричная матрица, образованная из компонент соответствующего вектора как

$$\mathbf{a} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}, \quad \overset{\vee}{\mathbf{a}} = -\overset{\vee}{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Выполняются следующие тождества, которые могут быть использованы при преобразованиях уравнений:

$$\begin{aligned} \overset{\vee}{\mathbf{a}}\mathbf{b} + \mathbf{b}\overset{\vee}{\mathbf{a}} &= \mathbf{0}, \quad \overset{\vee}{\mathbf{a}}\overset{\vee}{\mathbf{b}}\mathbf{c} + \overset{\vee}{\mathbf{b}}\overset{\vee}{\mathbf{c}}\mathbf{a} + \overset{\vee}{\mathbf{c}}\overset{\vee}{\mathbf{a}}\mathbf{b} = \mathbf{0}, \\ \overset{\vee}{\mathbf{a}}\overset{\vee}{\mathbf{b}} &= \mathbf{b}\mathbf{a}^T - \mathbf{a}\mathbf{b}^T, \quad \mathbf{a}^T\overset{\vee}{\mathbf{b}}\overset{\vee}{\mathbf{c}} = \mathbf{b}^T\overset{\vee}{\mathbf{c}}\overset{\vee}{\mathbf{a}}, \\ \overset{\vee}{\mathbf{a}}\overset{\vee}{\mathbf{b}}\overset{\vee}{\mathbf{a}} &= -\overset{\vee}{\mathbf{b}}\overset{\vee}{\mathbf{a}}\overset{\vee}{\mathbf{a}} = -\overset{\vee}{\mathbf{b}}\mathbf{a}(\mathbf{a}^T\mathbf{b}) = (\mathbf{a}^T\mathbf{b})\overset{\vee}{\mathbf{a}}\mathbf{b} = -\overset{\vee}{\mathbf{b}}(\mathbf{a}^T\mathbf{b})\mathbf{a}. \end{aligned} \quad (1.1.6)$$

### 1.1.2. Нелинейные уравнения движения

Уравнения движения системы для векторов  $\mathbf{v}_0$ ,  $\boldsymbol{\omega}$  и обобщенных координат  $q_i$  можно составить на основе принципа возможных перемещений (обобщенное в соответствии с кинестатикой название принципа Д'Аламбера – Лагранжа):

$$\delta\Pi = \delta A_p + \delta A_{\text{ин}}, \quad (1.1.7)$$

где  $\Pi[\mathbf{u}]$  – потенциальная энергия деформации системы;  $\delta A_p$  – вариация работы гравитационных и поверхностных сил:

$$\delta A_p = \int_V \delta \mathbf{u}_*^T \mathbf{g} \, dm + \int_S \delta \mathbf{u}_*^T \mathbf{p} \, dS; \quad (1.1.8)$$

$\delta A_{\text{ин}}$  – вариация работы инерционных сил:

$$\delta A_{\text{ин}} = - \int_V \delta \mathbf{u}_*^T \mathbf{a} \, dm. \quad (1.1.9)$$

Здесь  $\delta \mathbf{u}_*$  – вариация перемещения любой точки тела с учетом вариаций смещения  $\delta \mathbf{u}_0 = \boldsymbol{\Lambda} \delta \mathbf{R}_0$  и малого поворота  $\delta \boldsymbol{\theta}$  подвижной системы координат:

$$\delta \mathbf{u}_* = \delta \mathbf{u}_0 + \delta \boldsymbol{\theta} \times \tilde{\mathbf{r}} + \delta \mathbf{u}; \quad (1.1.10)$$

$\mathbf{g}$  – вектор массовых сил тяготения;  $\mathbf{p}$  – вектор поверхностной нагрузки;  $dm = \rho dV$  – масса элемента тела, сохраняющая свое значение в процессе его деформирования;  $\rho(x_1, x_2, x_3)$  – плотность тела;  $dV$ ,  $dS$  – элементы объема и

площади поверхности тела. Из выражения (1.1.4) с учетом  $\Psi_{ij} = \Psi_{ji}$  получаем:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{u} &= \sum_i \delta q_i \tilde{\Phi}_i, & \dot{\mathbf{u}} &= \sum_i \dot{q}_i \tilde{\Phi}_i; \\ \ddot{\mathbf{u}} &= \sum_i \ddot{q}_i \tilde{\Phi}_i + \sum_i \sum_j \dot{q}_i \dot{q}_j \Psi_{ij}, & \tilde{\Phi}_i &= \Phi_i + \sum_j q_j \Psi_{ij}. \end{aligned} \quad (1.1.11)$$

Поскольку вариации  $\delta \mathbf{u}_0$ ,  $\delta \boldsymbol{\theta}$  и  $\delta q_i$  произвольны и независимы, из принципа возможных перемещений (1.1.7) с учетом (1.1.8) – (1.1.11) следуют уравнения движения:

$$\begin{aligned} \int_V \mathbf{a} dm &= \mathbf{P}, & \int_V \check{\mathbf{r}} \mathbf{a} dm &= \mathbf{M}; \\ \int_V \tilde{\Phi}_i^T \mathbf{a} dm + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} &= Q_i, & (i=1,2,\dots,n), \end{aligned} \quad (1.1.12)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathbf{P}_g + \mathbf{P}_p, & \mathbf{P}_g &= \int_V \mathbf{g} dm, & \mathbf{P}_p &= \int_S \mathbf{p} dS; \\ \mathbf{M} &= \mathbf{M}_g + \mathbf{M}_p, & \mathbf{M}_g &= \int_V \check{\mathbf{r}} \mathbf{g} dm, & \mathbf{M}_p &= \int_S \check{\mathbf{r}} \mathbf{p} dS; \\ Q_i &= Q_{g,i} + Q_{p,i}, & Q_{g,i} &= \int_V \tilde{\Phi}_i^T \mathbf{g} dm, & Q_{p,i} &= \int_S \tilde{\Phi}_i^T \mathbf{p} dS. \end{aligned} \quad (1.1.13)$$

Нагрузка  $\mathbf{P}$  может включать в себя аэродинамические и управляющие силы, реакции подвижных компонентов (манипуляторов, вращающихся роторов, протекающей по каналам и плескающейся в полостях жидкости и пр.). Такие подсистемы (звенья) отделяются от рассматриваемой конструкции, и их действие заменяется неизвестными реакциями. Эти реакции и уравнения движения подсистем записываются через их обобщенные координаты и кинематические параметры упругой системы. Реакции подсистем учитываются в выражениях (1.1.13), а уравнения подсистем и систем управления с обратными связями добавляются к уравнениям (1.1.12).

Уравнения (1.1.12) могут быть также составлены другим способом: как уравнения Эйлера – Лагранжа для скоростей  $\mathbf{v}_0$ ,  $\boldsymbol{\omega}$  и уравнения Лагранжа для обобщенных координат  $q_i$ :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \mathbf{v}_0} \right) + \boldsymbol{\omega} \times \frac{\partial T}{\partial \mathbf{v}_0} &= \mathbf{P}; \\
\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\omega}} \right) + \boldsymbol{\omega} \times \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\omega}} + \mathbf{v}_0 \times \frac{\partial T}{\partial \mathbf{v}_0} &= \mathbf{M}; \\
\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} &= Q_i, \quad (i=1,2,\dots,n),
\end{aligned} \tag{1.1.14}$$

где  $T$  – кинетическая энергия системы:

$$T = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{v}^T \mathbf{v} dm. \tag{1.1.15}$$

Сначала рассмотрим случай, когда движение тела описывается в локально связанной с ним системе координат. После преобразований с учетом (1.1.6) уравнения (1.1.12) или, что то же самое, уравнения (1.1.14) записываются в виде:

$$\begin{aligned}
m \mathbf{a}_0 - \overset{\vee}{\tilde{\mathbf{L}}}_0 \dot{\boldsymbol{\omega}} + \sum_j \tilde{\mathbf{L}}_j \ddot{q}_j - (\overset{\vee}{\boldsymbol{\omega}} \tilde{\mathbf{L}}_0 + 2 \sum_j \overset{\vee}{\tilde{\mathbf{L}}}_j \dot{q}_j) \boldsymbol{\omega} + \sum_j \sum_k \tilde{\mathbf{L}}_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k &= \mathbf{P}; \\
-\overset{\vee}{\tilde{\mathbf{L}}}_0^T \mathbf{a}_0 + \overset{\vee}{\tilde{\mathbf{I}}}_{00} \dot{\boldsymbol{\omega}} + \sum_j \tilde{\mathbf{S}}_{0j} \ddot{q}_j + (\overset{\vee}{\boldsymbol{\omega}} \tilde{\mathbf{I}}_{00} + 2 \sum_j \overset{\vee}{\tilde{\mathbf{I}}}_{0j} \dot{q}_j) \boldsymbol{\omega} + \sum_j \sum_k \tilde{\mathbf{S}}_{0,jk} \dot{q}_j \dot{q}_k &= \mathbf{M}; \\
\tilde{\mathbf{L}}_i^T \mathbf{a}_0 + \tilde{\mathbf{S}}_{0i}^T \dot{\boldsymbol{\omega}} + \sum_j \tilde{m}_{ij} \ddot{q}_j - (\boldsymbol{\omega}^T \tilde{\mathbf{I}}_{0i}^T + 2 \sum_j \tilde{\mathbf{S}}_{ij}^T \dot{q}_j) \boldsymbol{\omega} + \\
+ \sum_j \sum_k \tilde{m}_{i,jk} \dot{q}_j \dot{q}_k + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} &= Q_i; \\
(i=1,2,\dots,n),
\end{aligned} \tag{1.1.16}$$

где

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_0 &= \dot{\mathbf{v}}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_0, \quad m = \int_V dm, \quad \tilde{\mathbf{L}}_0 = \int_V \tilde{\mathbf{r}} dm, \quad \tilde{\mathbf{L}}_i = \int_V \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_i dm; \\
\tilde{\mathbf{L}}_{ij} &= \int_V \boldsymbol{\psi}_{ij} dm, \quad \tilde{\mathbf{I}}_{00} = - \int_V \overset{\vee}{\tilde{\mathbf{r}}} \overset{\vee}{\tilde{\mathbf{r}}} dm, \quad \tilde{\mathbf{I}}_{0i} = - \int_V \overset{\vee}{\tilde{\mathbf{r}}} \overset{\vee}{\tilde{\boldsymbol{\varphi}}}_i dm; \\
\tilde{\mathbf{S}}_{0i} &= \int_V \overset{\vee}{\tilde{\mathbf{r}}} \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_i dm, \quad \tilde{\mathbf{S}}_{0,ij} = \int_V \overset{\vee}{\tilde{\mathbf{r}}} \boldsymbol{\psi}_{ij} dm, \quad \tilde{\mathbf{S}}_{ij} = \int_V \overset{\vee}{\tilde{\boldsymbol{\varphi}}}_i \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_j dm; \\
\tilde{m}_{ij} &= \int_V \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_i^T \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_j dm, \quad \tilde{m}_{i,jk} = \int_V \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_i^T \boldsymbol{\psi}_{jk} dm, \quad (i,j,k=1,2,\dots,n).
\end{aligned} \tag{1.1.17}$$

Здесь инерционные характеристики, отмеченные сверху волной, вычисляются для деформированного тела и зависят от обобщенных координат в силу того, что от

них зависят функции  $\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r} + \mathbf{u}$  и  $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_i$ , как (1.1.4) и (1.1.11).

Например, матрица (тензор) инерции деформированного тела  $\tilde{\mathbf{I}}_{00}$  зависит от обобщенных координат до четвертой степени включительно. При практических расчетах, считая упругие перемещения малыми по сравнению с габаритными размерами системы (так как углы поворота элементов тела, обусловленные упругими деформациями, умеренно большие), в уравнениях (1.1.16) с учетом (1.1.17) можно ограничиться нелинейными членами не выше третьего или даже второго порядка по координатам  $q_i$ .

Если ограничиться нелинейными членами второго порядка, то коэффициенты (1.1.17) могут быть представлены в виде:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{L}}_0 &\approx \mathbf{L}_0 + \sum_k \mathbf{L}_k q_k + \frac{1}{2} \sum_k \sum_l \mathbf{L}_{kl} q_k q_l, & \tilde{\mathbf{L}}_j &\approx \mathbf{L}_j + \sum_k \mathbf{L}_{jk} q_k; \\
\tilde{\mathbf{I}}_{00} &\approx \mathbf{I}_{00} + \sum_k (\mathbf{I}_{0k} + \mathbf{I}_{0k}^T) q_k + \sum_k \sum_l (\mathbf{I}_{kl} + \frac{1}{2} [\mathbf{I}_{0,kl} + \mathbf{I}_{0,kl}^T]) q_k q_l; \\
\tilde{\mathbf{I}}_{0j} &\approx \mathbf{I}_{0j} + \sum_k (\mathbf{I}_{kj} + \mathbf{I}_{0,kj}^T) q_k + \sum_k \sum_l (\mathbf{I}_{k,jl} + \frac{1}{2} \mathbf{I}_{j,kl}^T) q_k q_l; \\
\tilde{\mathbf{S}}_{0j} &\approx \mathbf{S}_{0j} + \sum_k (\mathbf{S}_{kj} + \mathbf{S}_{0,kj}) q_k + \sum_k \sum_l (\mathbf{S}_{k,jl} - \frac{1}{2} \mathbf{S}_{j,kl}) q_k q_l; \\
\tilde{\mathbf{S}}_{ij} &\approx \mathbf{S}_{ij} + \sum_k (\mathbf{S}_{i,jk} - \mathbf{S}_{j,ik}) q_k, & \tilde{\mathbf{S}}_{0,jk} &\approx \mathbf{S}_{0,jk}; \\
\tilde{m}_{ij} &\approx m_{ij} + \sum_m (m_{i,jk} + m_{j,ik}) q_k, & \tilde{m}_{i,jk} &\approx m_{i,jk}.
\end{aligned} \tag{1.1.18}$$

Коэффициенты правых частей этих выражений определяются по формулам (1.1.17), если в них опустить верхний знак ( $\sim$ ) и, кроме того, учесть дополнительные обозначения:

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_{jk} &= -\int_V \overset{\vee}{\boldsymbol{\varphi}}_j \overset{\vee}{\boldsymbol{\varphi}}_k dm, & \mathbf{I}_{0,jk} &= -\int_V \overset{\vee}{\mathbf{r}} \overset{\vee}{\boldsymbol{\psi}}_{jk} dm; \\
\mathbf{I}_{k,jl} &= -\int_V \overset{\vee}{\boldsymbol{\varphi}}_k \overset{\vee}{\boldsymbol{\psi}}_{jl} dm, & \mathbf{S}_{k,jl} &= \int_V \overset{\vee}{\boldsymbol{\varphi}}_k \overset{\vee}{\boldsymbol{\psi}}_{jl} dm.
\end{aligned} \tag{1.1.19}$$

Для решения задачи динамики упругой системы, движущейся под действием заданных внешних нагрузок и гравитационных сил, к уравнениям (1.1.16) с учетом (1.1.13) добавляются кинематические соотношения (1.1.1) в

виде:

$$\dot{\mathbf{R}}_0 = \mathbf{\Lambda}^T \mathbf{v}_0, \quad \dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{A}^{-1} \boldsymbol{\omega}. \quad (1.1.20)$$

В результате получается замкнутая система нелинейных дифференциальных уравнений: двенадцать уравнений первого порядка для двенадцати компонент векторных функций  $\mathbf{R}_0$ ,  $\boldsymbol{\theta}$ ,  $\mathbf{v}_0$ ,  $\boldsymbol{\omega}$  и  $n$  уравнений для обобщенных координат  $q_1, q_2, \dots, q_n$ .

В случае если используется плавающая система координат, связанная с затвердевшим телом, сначала составляются уравнения движения твердого тела (они следуют из (1.1.16) при  $q_i = 0$ ):

$$m\mathbf{a}_0 - \check{\mathbf{L}}_0 \check{\dot{\boldsymbol{\omega}}} - \check{\boldsymbol{\omega}} \check{\mathbf{L}}_0 \boldsymbol{\omega} = \mathbf{P}, \quad -\check{\mathbf{L}}_0^T \mathbf{a}_0 + \mathbf{I}_{00} \check{\dot{\boldsymbol{\omega}}} + \check{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{I}_{00} \boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}. \quad (1.1.21)$$

Из уравнений (1.1.20), (1.1.21) при заданных начальных условиях определяются функции  $\mathbf{R}_0$ ,  $\boldsymbol{\theta}$ ,  $\mathbf{v}_0$ ,  $\boldsymbol{\omega}$ .

Затем записываются уравнения для обобщенных координат  $q_i$  с учетом смещений и конечных углов поворота упругого тела относительно подвижной системы координат:

$$\begin{aligned} & \sum_j \tilde{m}_{ij} \ddot{q}_j - 2\boldsymbol{\omega}^T \sum_j \tilde{\mathbf{S}}_{ij} \dot{q}_j + \sum_j \sum_k \tilde{m}_{i,jk} \dot{q}_j \dot{q}_k + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = \\ & = Q_i - \tilde{\mathbf{L}}_i^T \mathbf{a}_0 - \tilde{\mathbf{S}}_{0i}^T \check{\dot{\boldsymbol{\omega}}} + \boldsymbol{\omega}^T \tilde{\mathbf{I}}_{0i}^T \boldsymbol{\omega}, \quad (i = 0_1, \dots, 0_6, 1, \dots, n). \end{aligned} \quad (1.1.22)$$

Для  $i, k = 0_1, \dots, 0_6, 1, \dots, n$  эти уравнения аналогичны последней группе уравнений (1.1.16). Правые части уравнений (1.1.22) при  $i = 0_1, \dots, 0_6$  в силу уравнений (1.1.21) с учетом (1.1.17), (1.1.18) упрощаются: в них остаются только члены, зависящие от обобщенных координат  $q_j$ .

Уравнения (1.1.22) или, что то же самое, уравнения для обобщенных координат (1.1.16) при известных  $\mathbf{a}_0(t)$  и  $\boldsymbol{\omega}(t)$  можно использовать также в случае управляемой системы, когда какая-либо её точка или жесткая часть совершает заданное программное движение. Кроме того, они могут быть использованы для упругой системы, присоединенной к достаточно жесткому массивному телу, на движение которого колебания присоединенной системы практически не

оказывают влияния. При этом первые уравнения (1.1.16) можно использовать для определения управляющих сил и моментов, входящих в  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{M}$ , или для определения реакций несущего тела.

При построении уравнений (1.1.22) для свободной упругой системы удобно связанную систему координат совместить с главными центральными осями затвердевшего тела, а в качестве заданных функций  $\varphi_i$  использовать собственные формы упругих колебаний свободного тела. В этом случае с учетом условий ортогональности всех функций  $\varphi_i$  ( $i = 0_1, \dots, 0_6, 1, \dots, n$ ) существенно упрощаются коэффициенты (1.1.17), (1.1.18) и уравнения (1.1.22), если последние записать в скалярной форме.

Заметим, что пределами применимости уравнений (1.1.16) и (1.1.22) наряду с физическими ограничениями для малых деформаций (1.1.3) являются ограничения на углы поворота элементов тела  $\partial u_k / \partial x_i$  при  $k, j = 1, 2, 3$  ( $k \neq i$ ) в системе координат  $Ox_1x_2x_3$ . Эти конечные углы практически не должны превышать  $30^\circ$ . При использовании уравнений (1.1.16), когда в (1.1.4)  $i, j = 1, \dots, n$ , углы поворота элементов тела полностью обусловлены его упругими деформациями. При использовании уравнений (1.1.22), когда  $i, j = 0_1, \dots, 0_6, 1, \dots, n$ , эти углы включают в себя также конечные углы поворота абсолютно твердого тела  $q_{0_4}, q_{0_5}, q_{0_6}$ , которые также должны оставаться достаточно малыми.

### 1.1.3. Упругие и гравитационные силы

Потенциальная энергия деформации упругого тела записывается в виде

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_T)^T \boldsymbol{\sigma} dV = \frac{1}{2} \int_V (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_T)^T \mathbf{C} (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_T) dV, \quad (1.1.23)$$

где  $\boldsymbol{\varepsilon}$ ,  $\boldsymbol{\sigma}$  – векторы, составленные из компонент деформаций и напряжений:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_{11} \ \varepsilon_{22} \ \varepsilon_{33} \ \gamma_{12} \ \gamma_{23} \ \gamma_{31}]^T, \quad \boldsymbol{\sigma} = [\sigma_{11} \ \sigma_{22} \ \sigma_{33} \ \tau_{12} \ \tau_{23} \ \tau_{31}]^T;$$

вектор  $\boldsymbol{\varepsilon}_T$  представляет начальные нестесненные температурные или технологические деформации;  $\mathbf{C}$  – симметричная матрица коэффициентов

упругости, входящих в уравнения закона Гука  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_T)$ . С учетом соотношений (1.1.3) и разложения (1.1.4) выражение  $\Pi$  записывается в обобщенных координатах. В случае тонких тел (стержней, пластин и оболочек) для форм преимущественно поперечных колебаний, при которых тангенциальные перемещения значительно меньше нормальных, последние по методу Ритца обычно представляются в виде линейных зависимостей от обобщенных координат. При этом конечные деформации (1.1.3) и, соответственно, тангенциальные перемещения зависят от обобщенных координат квадратичным образом, как (1.1.4). Тогда выражение  $\Pi$  в обобщенных координатах будет содержать нелинейные члены до четвертого порядка, а обобщенные упругие силы  $\partial\Pi/\partial q_i$  – до третьего порядка включительно.

Определим силы тяготения, действующие на вращающуюся деформируемую крупногабаритную конструкцию в центральном гравитационном поле. Располагая начало инерциальной системы координат  $O_*X_1X_2X_3$  в центре этого поля и используя закон всемирного тяготения, в случае  $|\tilde{\mathbf{r}}/\mathbf{R}_0| \ll 1$  можно получить следующее приближенное выражение для вектора  $\mathbf{g}$  [7]:

$$\mathbf{g} = -g_0 \left[ \mathbf{v} + \frac{1}{|\mathbf{R}_0|} (\tilde{\mathbf{r}} - 3(\mathbf{v}^T \tilde{\mathbf{r}}) \mathbf{v}) \right], \quad g_0 = \gamma \frac{M_{\text{пл}}}{\mathbf{R}_0^2}, \quad \mathbf{v} = \Lambda \frac{\mathbf{R}_0}{|\mathbf{R}_0|}, \quad (1.1.24)$$

где  $g_0$  – ускорение свободного падения в точке  $O$ ;  $\mathbf{v}$  – единичный вектор, направленный вдоль  $\mathbf{R}_0$  и записываемый в проекциях на оси подвижной системы;  $M_{\text{пл}}$  – масса планеты, кг;  $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}^2)$  – универсальная постоянная тяготения (для Земли  $M_{\text{пл}} = 5,9763 \cdot 10^{24} \text{ кг}$ ;  $R_{\text{пл}} = 6,3711 \cdot 10^6 \text{ м}$ ).

Гравитационные силы и моменты (1.1.13) с учетом (1.1.24) записываются в виде:

$$\mathbf{P}_g = -g_0 \left[ m\mathbf{v} + \frac{1}{|\mathbf{R}_0|} (\tilde{\mathbf{L}}_0 - 3(\mathbf{v}^T \tilde{\mathbf{L}}_0) \mathbf{v}) \right], \quad \mathbf{M}_g = -g_0 \left[ \tilde{\mathbf{L}}_0 \mathbf{v} - \frac{3}{|\mathbf{R}_0|} \mathbf{v}^{\vee T} \tilde{\mathbf{I}}_{00} \mathbf{v} \right]; \quad (1.1.25)$$

$$Q_{g,i} = -g_0 \left[ \tilde{\mathbf{L}}_i^T \mathbf{v} + \frac{1}{|\mathbf{R}_0|} (3\mathbf{v}^T \tilde{\mathbf{I}}_{0i} \mathbf{v} - 2\tilde{m}_{0i}) \right],$$

где

$$\begin{aligned}\tilde{m}_{0i} &= \int_V \tilde{\mathbf{r}}^T \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_i dm \approx m_{0i} + \sum_k (m_{ik} + m_{0,ik}) q_k + \sum_k \sum_l (m_{k,il} + m_{i,kl}) q_k q_l; \\ m_{0i} &= \int_V \mathbf{r}^T \boldsymbol{\varphi}_i dm, \quad m_{0,ik} = \int_V \mathbf{r}^T \boldsymbol{\psi}_{ik} dm.\end{aligned}\tag{1.1.26}$$

#### 1.1.4. Линеаризованные уравнения движения

Пусть решена задача для некоторого невозмущенного движения. Кинематические параметры такого движения будем обозначать как  $\mathbf{v}^0$ ,  $\boldsymbol{\omega}^0$ ,  $\mathbf{R}_0^0$ ,  $\boldsymbol{\theta}^0$ ,  $q_1^0, \dots, q_n^0$  и  $\mathbf{u}^0$ . Перемещение упругого тела в возмущенном движении может быть представлено в виде

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^0 + \mathbf{u}^1,\tag{1.1.27}$$

где  $\mathbf{u}^1$  – вектор малых дополнительных перемещений.

Инерционные, гравитационные и поверхностные нагрузки в возмущенном движении представляются аналогичным образом:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}^0 + \mathbf{a}^1, \quad \mathbf{g} = \mathbf{g}^0 + \mathbf{g}^1, \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}^0 + \mathbf{p}^1;\tag{1.1.28}$$

при этом возмущения  $\mathbf{a}^1$ ,  $\mathbf{g}^1$  и  $\mathbf{p}^1$  должны быть линеаризованы в зависимости от перемещения  $\mathbf{u}^1$  и его производных. Согласно (1.1.2) и (1.1.24) получаем:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}^1 &= \overset{\vee}{\boldsymbol{\omega}}^0 \mathbf{u}^1 + \overset{\vee}{\boldsymbol{\omega}}^0 \overset{\vee}{\boldsymbol{\omega}}^0 \mathbf{u}^1 + 2 \overset{\vee}{\boldsymbol{\omega}}^0 \dot{\mathbf{u}}^1 + \ddot{\mathbf{u}}^1; \\ \mathbf{g}^1 &= -g_0 \frac{1}{|\mathbf{R}_0^0|} [\mathbf{u}^1 - 3(\mathbf{v}^{0T} \mathbf{u}^1) \mathbf{v}^0], \quad \mathbf{v}^0 = \boldsymbol{\Lambda}^0 \frac{\mathbf{R}_0^0}{|\mathbf{R}_0^0|}.\end{aligned}\tag{1.1.29}$$

Принцип возможных перемещений для возмущенного движения упругого тела при конечных деформациях (1.1.3) с учетом (1.1.27), (1.1.28) записывается в виде:

$$\delta \Pi^1 = \delta A_p^1 + \delta A_{\text{ин}}^1,\tag{1.1.30}$$

$$\begin{aligned} \Pi^1 &= \frac{1}{2} \int_V (\boldsymbol{\varepsilon}^{1T} \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}^1 + 2\boldsymbol{\varepsilon}^{11T} \boldsymbol{\sigma}^0) dV; \\ \delta A_p^1 &= \int_V \delta \mathbf{u}^{1T} \mathbf{g}^1 dm + \int_S \delta \mathbf{u}^{1T} \mathbf{p}^1 dS, \quad \delta A_{\text{ин}}^1 = - \int_V \delta \mathbf{u}^{1T} \mathbf{a}^1 dm. \end{aligned} \quad (1.1.31)$$

Здесь в выражении для приращения потенциальной энергии в возмущенном движении  $\Pi^1$  компоненты векторов деформаций  $\boldsymbol{\varepsilon}^1 = [\varepsilon_{11}^1 \ \varepsilon_{22}^1 \ \varepsilon_{33}^1 \ \gamma_{12}^1 \ \gamma_{23}^1 \ \gamma_{31}^1]^T$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}^{11} = [\varepsilon_{11}^{11} \ \varepsilon_{22}^{11} \ \varepsilon_{33}^{11} \ \gamma_{12}^{11} \ \gamma_{23}^{11} \ \gamma_{31}^{11}]^T$  на основании (1.1.3) определяются по формулам [6, 8]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^1 &= \frac{\partial u_1^1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2^0}{\partial x_1} \frac{\partial u_2^1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3^0}{\partial x_1} \frac{\partial u_3^1}{\partial x_1}, \quad \dots; \\ \varepsilon_{11}^{11} &= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u_2^1}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_3^1}{\partial x_1} \right)^2 \right], \quad \dots; \\ \gamma_{12}^1 &= \frac{\partial u_1^1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2^1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3^0}{\partial x_1} \frac{\partial u_3^1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3^0}{\partial x_2} \frac{\partial u_3^1}{\partial x_1}, \quad \dots; \\ \gamma_{12}^{11} &= \frac{\partial u_3^1}{\partial x_1} \frac{\partial u_3^1}{\partial x_2}, \quad \dots, \quad (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1); \end{aligned} \quad (1.1.32)$$

$\boldsymbol{\sigma}^0 = \mathbf{C}(\boldsymbol{\varepsilon}^0 - \boldsymbol{\varepsilon}_r)$  представляет собой вектор напряжений, действующих в теле в невозмущенном движении; компоненты вектора деформаций в невозмущенном движении  $\boldsymbol{\varepsilon}^0$  определяются по формулам (1.1.3) при  $\mathbf{u}_1 \rightarrow \mathbf{u}_1^0$ ,  $\mathbf{u}_2 \rightarrow \mathbf{u}_2^0$ ,  $\mathbf{u}_3 \rightarrow \mathbf{u}_3^0$ .

Поскольку в невозмущенном движении перемещения упругого тела по методу Ритца записываются в виде (1.1.4), то при использовании той же самой модели деформирования дополнительные перемещения в возмущенном движении при любом выборе подвижной системы координат  $Ox_1x_2x_3$  (локально связанной или плавающей) будут иметь вид

$$\mathbf{u}^1 = \sum_{i=0_1}^n q_i^1 (\boldsymbol{\varphi}_i + \sum_{j=0_1}^n q_j^0 \boldsymbol{\psi}_{ij}), \quad (1.1.33)$$

где первые шесть обобщенных координат при  $i = 0_1, \dots, 0_6$  представляют степени свободы системы как твердого тела:  $q_{0_1}^1, q_{0_2}^1, q_{0_3}^1$  – перемещения полюса (который в недеформированном состоянии совпадает с точкой  $O$ ) вдоль осей  $x_1, x_2, x_3$ ;  $q_{0_4}^1, q_{0_5}^1, q_{0_6}^1$  – малые углы поворота относительно этих осей.

Приращение потенциальной энергии в возмущенном движении  $\Pi^1$  с учетом выражений для деформаций (1.1.32) и перемещений (1.1.33) записывается в обобщенных координатах:

$$\Pi^1 = \frac{1}{2} \sum_{i=0_1}^n \sum_{j=0_1}^n k_{ij} q_i^1 q_j^1, \quad (1.1.34)$$

где  $k_{ij}$  – коэффициенты обобщенных жесткостей, учитывающие напряженно-деформированное состояние в невозмущенном движении;  $k_{ij} = k_{ji}$ ;  $k_{ij} = 0$  при  $i, j = 0_1, 0_2, 0_3$ .

Из принципа возможных перемещений (1.1.30) с учетом (1.1.31), (1.1.29), (1.1.33), (1.1.34) получаем линеаризованные уравнения возмущенного движения в обобщенных координатах:

$$\sum_{j=0_1}^n [m_{ij}^* \ddot{q}_j^1 + d_{ij} \dot{q}_j^1 + (k_{ij} + b_{ij}) q_j^1] = Q_i^1, \quad (i = 0_1, \dots, 0_6, 1, \dots, n), \quad (1.1.35)$$

где

$$\begin{aligned} m_{ij}^* &= m_{ij} + \sum_k (m_{i,jk} + m_{j,ik}) q_k^0; \\ d_{ij} &= -2\boldsymbol{\omega}^{0T} \mathbf{S}_{ij} - 2 \sum_k [\boldsymbol{\omega}^{0T} (\mathbf{S}_{i,jk} - \mathbf{S}_{j,ik}) q_k^0 - m_{i,jk} \dot{q}_k^0]; \\ b_{ij} &= -\boldsymbol{\omega}^{0T} \mathbf{I}_{ij} \boldsymbol{\omega}^0 - \dot{\boldsymbol{\omega}}^{0T} \mathbf{S}_{ij} - \sum_k [\{\boldsymbol{\omega}^{0T} (\mathbf{I}_{i,jk} + \mathbf{I}_{j,ik}) \boldsymbol{\omega}^0 + \\ &+ \dot{\boldsymbol{\omega}}^{0T} (\mathbf{S}_{i,jk} - \mathbf{S}_{j,ik})\} q_k^0 + 2\boldsymbol{\omega}^{0T} \mathbf{S}_{i,jk} \dot{q}_k^0 - m_{i,jk} \ddot{q}_k^0]; \\ Q_i^1 &= Q_{p,i}^1 + Q_{g,i}^1, \quad Q_{p,i}^1 = \int_S \boldsymbol{\varphi}_i^T \mathbf{p}^1 dS + \sum_k q_k^0 \int_S \boldsymbol{\psi}_{ik} \mathbf{p}^1 dS; \end{aligned} \quad (1.1.36)$$

$$Q_{g,i}^1 = -g_0 \frac{1}{|\mathbf{R}_0^0|} \sum_{j=0_1}^n \{3\mathbf{v}^{0T} [\mathbf{I}_{ij} + \sum_k (\mathbf{I}_{i,jk} + \mathbf{I}_{j,ik}^T) q_k^0] \mathbf{v}^0 - 2m_{ij}^*\} q_j^1.$$

Здесь  $k = 1, \dots, n$  при описании невозмущенного движения в локально связанной системе координат и  $k = 0_1, \dots, 0_6, 1, \dots, n$  – в плавающей системе координат. Коэффициенты (1.1.36) записаны с точностью до линейных членов относительно  $q_k^0(t)$ .

Если в невозмущенном движении  $\boldsymbol{\omega}^0 = \text{const}$ ,  $\mathbf{v}^0 = \text{const}$ ,  $q_k^0 = \text{const}$ , то

коэффициенты  $m_{ij}^*$ ,  $d_{ij}$ ,  $k_{ij}$ ,  $b_{ij}$  будут постоянными; при этом  $d_{ij} = -d_{ji}$ ,  $b_{ij} = b_{ji}$  и система (1.1.35) при  $Q_{p,i}^1 \equiv 0$  с учетом  $Q_{g,i}^1$  будет консервативной гироскопической системой.

В случае, когда в невозмущенном движении система рассматривается как недеформируемая ( $\mathbf{u}^0 \equiv \mathbf{0}$ ), в выражениях (1.1.36) следует положить  $q_k^0 \equiv 0$ . Для этого частного случая уравнения возмущенного движения (1.1.35) можно также получить непосредственно путем линеаризации уравнений (1.1.22) с учетом (1.1.18) при  $\psi_{ij} = \mathbf{0}$ .

## ***1.2. Динамика космического аппарата с выпускаемой тросовой системой***

### **1.2.1. Пространственное движение космического аппарата с тросом**

Рассмотрим динамику пространственного движения космического аппарата (КА) с выпускаемым тросом в центральном гравитационном поле [5, 7]. КА считаем абсолютно жестким. С ним связываем подвижную систему координат  $Ox_1x_2x_3$  с началом в произвольной точке. Трос, который выпускается в некоторой точке  $x_1^*$ ,  $x_2^*$ ,  $x_3^*$  по заданному закону, считается растяжимым и абсолютно гибким. В расчетной модели трос разбивается на участки (конечные элементы) с длинами  $l_i$ , а его распределенная масса заменяется системой сосредоточенных в узлах масс  $m_i$ . При этом масса полезного груза на конце троса входит в  $m_1$ . Участки выпущенной части троса ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) считаются прямолинейными (рис. 1.2.1). Используются обозначения, введенные в разд. 1.1.

В качестве основных неизвестных принимаем:

1) координаты положения и углы поворота КА относительно инерциальной системы координат  $O_*X_1X_2X_3$

$$\mathbf{R}_0 = [X_{0,1} X_{0,2} X_{0,3}]^T, \quad \boldsymbol{\theta} = [\theta_1 \theta_2 \theta_3]^T;$$

2) линейные и мгновенные угловые скорости подвижной системы координат  $Ox_1x_2x_3$  в проекциях на её оси

$$\mathbf{v}_0 = [v_{0,1}v_{0,2}v_{0,3}]^T, \quad \boldsymbol{\omega} = [\omega_1\omega_2\omega_3]^T;$$

3) положения узловых точек троса в подвижной системе координат

$$\mathbf{r}_i = [x_{i,1}x_{i,2}x_{i,3}]^T, \quad (i=1,2,\dots,n).$$

Векторы абсолютного ускорения любой точки недеформируемого тела КА и  $i$ -й массы троса в проекциях на оси подвижной системы координат на основании (1.1.2) определяются как

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \mathbf{a}_0 + \overset{\vee}{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \overset{\vee}{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{r}, \quad \mathbf{a}_0 = \overset{\vee}{\dot{\mathbf{v}}}_0 + \boldsymbol{\omega} \mathbf{v}_0; \\ \mathbf{a}_i &= \mathbf{a}_0 + \overset{\vee}{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{r}_i + \boldsymbol{\omega} \overset{\vee}{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{r}_i + 2\overset{\vee}{\boldsymbol{\omega}} \dot{\mathbf{r}}_i + \ddot{\mathbf{r}}_i. \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

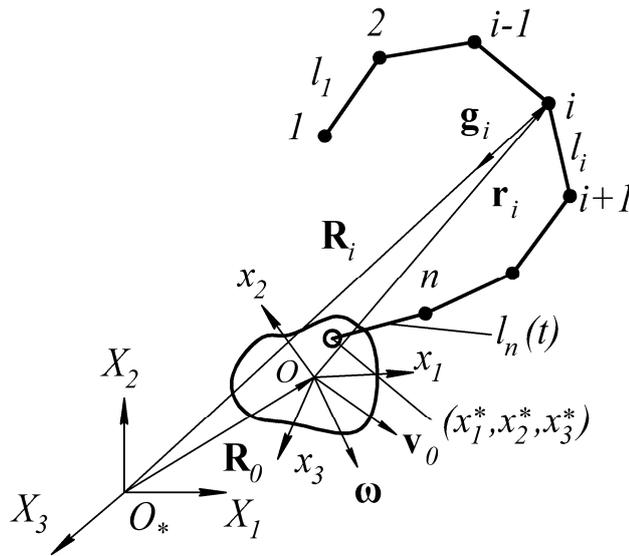


Рис. 1.2.1. Космический аппарат с выпускаемой тросовой системой

Уравнения движения системы (1.1.12) с учетом (1.1.13) для КА с выпускаемым растяжимым тросом в гравитационном поле для интервала времени между выходом  $n$ -й и  $(n+1)$ -й сосредоточенных масс троса записываются в виде:

$$\begin{aligned} \int_{V_0} \mathbf{a} dm + \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{a}_i &= \mathbf{P}_g + \mathbf{P}_p, \quad \int_{V_0} \mathbf{r} \mathbf{a} dm + \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i \mathbf{a}_i = \mathbf{M}_g + \mathbf{M}_p; \\ m_i \mathbf{a}_i + \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{r}_i} &= m_i \mathbf{g}_i + \mathbf{P}_i, \quad (i=1,\dots,n). \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_g &= \int_{V_0} \mathbf{g} dm + \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{g}_i, & \mathbf{P}_p &= \int_{S_0} \mathbf{p} ds + \sum_{i=1}^n \mathbf{P}_i; \\ \mathbf{M}_g &= \int_{V_0} \mathbf{r} \mathbf{g} dm + \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i \mathbf{g}_i, & \mathbf{M}_p &= \int_{S_0} \mathbf{r} \mathbf{p} ds + \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \mathbf{P}_i; \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

$\mathbf{P}_g$ ,  $\mathbf{P}_p$ ,  $\mathbf{M}_g$ ,  $\mathbf{M}_p$  – векторы равнодействующих гравитационных и поверхностных сил и моментов, действующих на КА и трос;  $\mathbf{P}_i$  – векторы поверхностных сил, приведенных к узлам троса  $i=1,2,\dots,n$ ;  $\Pi$  – потенциальная энергия растяжения троса.

Вектор сил тяготения в любой точке движущегося и вращающегося КА в центральном гравитационном поле, в центре которого расположено начало инерциальной системы координат  $O_*X_1X_2X_3$ , при  $|\mathbf{r}/R_0| \ll 1$  записывается приближенно в виде (1.1.24).

Векторы сил тяготения в узлах троса  $\mathbf{g}_i$  можно определить точно как

$$\mathbf{g}_i = -\gamma \frac{M_{\text{пл}}}{|\mathbf{R}_i|^3} \Lambda \mathbf{R}_i = -g_0 \frac{\mathbf{R}_0^2}{|\mathbf{R}_i|^3} (|\mathbf{R}_0| \mathbf{v} + \mathbf{r}_i), \quad (1.2.4)$$

где

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{R}_0 + \Lambda^T \mathbf{r}_i. \quad (1.2.5)$$

Потенциальная энергия растяжения троса как системы прямолинейных конечных элементов записывается в виде

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{N_i^2 l_i}{EF_i}, \quad (1.2.6)$$

где

$$N_i = EF_i \frac{\tilde{l}_i - l_i}{l_i} \quad (1.2.7)$$

представляет растягивающее усилие на  $i$ -м участке, а  $\tilde{l}_i$  – длину деформированного  $i$ -го участка:

$$\tilde{l}_i = \sqrt{(x_{1,i} - x_{1,i+1})^2 + (x_{2,i} - x_{2,i+1})^2 + (x_{3,i} - x_{3,i+1})^2} = \sqrt{(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i+1})^2}. \quad (1.2.8)$$

Используя выражения (1.2.6), (1.2.8), получаем:

$$\mathbf{P}_{N,i} = \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{r}_i} = -\frac{N_{i-1}}{\tilde{l}_{i-1}}(\mathbf{r}_{i-1} - \mathbf{r}_i) + \frac{N_i}{\tilde{l}_i}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i+1}). \quad (1.2.9)$$

Подставляя ускорения (1.2.1) в уравнения (1.2.2), записываем их в виде

$$\begin{aligned} m\mathbf{a}_0 - \overset{\vee}{\mathbf{L}}\overset{\vee}{\dot{\boldsymbol{\omega}}} + \sum_{i=1}^n m_i \overset{\vee}{\ddot{\mathbf{r}}}_i - (\overset{\vee}{\boldsymbol{\omega}}\overset{\vee}{\mathbf{L}} + 2\sum_{i=1}^n m_i \overset{\vee}{\dot{\mathbf{r}}}_i)\overset{\vee}{\boldsymbol{\omega}} &= \mathbf{P}_g + \mathbf{P}_p; \\ \overset{\vee}{\mathbf{L}}\mathbf{a}_0 + \overset{\vee}{\mathbf{I}}\overset{\vee}{\dot{\boldsymbol{\omega}}} + \sum_{i=1}^n m_i \overset{\vee}{\mathbf{r}}_i \overset{\vee}{\ddot{\mathbf{r}}}_i + (\overset{\vee}{\boldsymbol{\omega}}\overset{\vee}{\mathbf{I}} - 2\sum_{i=1}^n m_i \overset{\vee}{\mathbf{r}}_i \overset{\vee}{\dot{\mathbf{r}}}_i)\overset{\vee}{\boldsymbol{\omega}} &= \mathbf{M}_g + \mathbf{M}_p; \\ m_i \mathbf{a}_0 - m_i \overset{\vee}{\mathbf{r}}_i \overset{\vee}{\dot{\boldsymbol{\omega}}} + m_i \overset{\vee}{\ddot{\mathbf{r}}}_i - m_i (\overset{\vee}{\boldsymbol{\omega}}\overset{\vee}{\mathbf{r}}_i + 2\overset{\vee}{\dot{\mathbf{r}}}_i)\overset{\vee}{\boldsymbol{\omega}} &= m_i \mathbf{g}_i + \mathbf{P}_i - \mathbf{P}_{N,i}; \\ &(i = 1, 2, \dots, n), \end{aligned} \quad (1.2.10)$$

где  $m$ ,  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{I}$  – масса, вектор моментов масс и матрица инерции КА с деформируемым тросом в рассматриваемый момент времени:

$$m = \int_{V_0} dm + \sum_{i=1}^n m_i, \quad \mathbf{L} = \int_{V_0} \mathbf{r} dm + \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i, \quad \mathbf{I} = -\int_{V_0} \overset{\vee}{\mathbf{r}} \overset{\vee}{\mathbf{r}} dm - \sum_{i=1}^n m_i \overset{\vee}{\mathbf{r}}_i \overset{\vee}{\mathbf{r}}_i. \quad (1.2.11)$$

Последний участок троса при  $i = n$  имеет в общем случае переменную длину  $l_n(t)$ , которая входит только в выражение (1.2.7) для  $N_n$ .

В выражении (1.2.9) для последнего уравнения (1.2.10) при  $i = n$  координаты вектора  $\mathbf{r}_{n+1}$  являются известными координатами точки крепления (или выпуска) троса, т.е.  $x_{n+1,1} = x_1^*$ ,  $x_{n+1,2} = x_2^*$ ,  $x_{n+1,3} = x_3^*$ ,  $\mathbf{r}_{n+1} = \mathbf{r}^*$ .

При учете внутреннего демпфирования троса по модели Фойгхта усилия вместо (1.2.7) определяются по формуле

$$N_i = EF_i \left( \frac{\tilde{l}_i - l_i}{l_i} + \eta_i \frac{\tilde{\dot{l}}_i - \dot{l}_i}{l_i} \right), \quad (1.2.12)$$

где  $\eta_i$  – коэффициент вязкого демпфирования  $i$ -го участка троса. Из (1.2.8) получаем:

$$\tilde{\dot{l}}_i = \frac{1}{\tilde{l}_i} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i+1}) (\dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{r}}_{i+1}). \quad (1.2.13)$$

При этом  $\dot{l}_i = 0$  для  $i \neq n$ ,  $\dot{l}_n = V^*(t)$ ,  $\dot{\mathbf{r}}_{n+1} = \mathbf{0}$ , где  $V^*(t)$  – скорость выпуска троса в точке  $\mathbf{r}^*$  КА.

Векторы гравитационных сил и моментов (1.2.3), входящих в первые два уравнения (1.2.10), записываются в виде

$$\mathbf{P}_g = \mathbf{P}_g^0 + \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{g}_i, \quad \mathbf{M}_g = \mathbf{M}_g^0 + \sum_{i=1}^n m_i \overset{\vee}{\mathbf{r}}_i \mathbf{g}_i, \quad (1.2.14)$$

где  $\mathbf{P}_g^0$ ,  $\mathbf{M}_g^0$  – векторы сил и моментов центрального гравитационного поля, действующие на КА:

$$\mathbf{P}_g^0 = -g_0 \left[ m^0 \mathbf{v} + \frac{1}{|\mathbf{R}_0|} (\mathbf{L}^0 - 3(\mathbf{v}^T \mathbf{L}^0) \mathbf{v}) \right], \quad \mathbf{M}_g^0 = -g_0 \left[ \mathbf{L}^0 \mathbf{v} - \frac{3}{|\mathbf{R}_0|} \mathbf{v} \mathbf{I}^0 \mathbf{v} \right]; \quad (1.2.15)$$

$m^0$ ,  $\mathbf{L}^0$ ,  $\mathbf{I}^0$  – масса, вектор моментов масс и матрица инерции КА без троса:

$$m^0 = \int_{V_0} dm, \quad \mathbf{L}^0 = \int_{V_0} \mathbf{r} dm, \quad \mathbf{I}^0 = - \int_{V_0} \mathbf{r} \mathbf{r} dm. \quad (1.2.16)$$

Уравнения (1.2.10) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} m^0 (\dot{\overset{\vee}{\mathbf{v}}}_0 + \overset{\vee}{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{v}_0) - \overset{\vee}{\mathbf{L}}^0 \dot{\overset{\vee}{\boldsymbol{\omega}}} - \overset{\vee}{\boldsymbol{\omega}} \overset{\vee}{\mathbf{L}}^0 \overset{\vee}{\boldsymbol{\omega}} &= \mathbf{P}_g^0 + \mathbf{P}_p^0 + \mathbf{P}_T; \\ \overset{\vee}{\mathbf{L}}^0 (\dot{\overset{\vee}{\mathbf{v}}}_0 + \overset{\vee}{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{v}_0) + \mathbf{I}^0 \dot{\overset{\vee}{\boldsymbol{\omega}}} + \overset{\vee}{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{I}^0 \overset{\vee}{\boldsymbol{\omega}} &= \mathbf{M}_g^0 + \mathbf{M}_p^0 + \mathbf{r}^* \mathbf{P}_T; \\ m_i (\dot{\overset{\vee}{\mathbf{v}}}_0 + \overset{\vee}{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{v}_0 - \overset{\vee}{\mathbf{r}}_i \dot{\overset{\vee}{\boldsymbol{\omega}}} + \ddot{\overset{\vee}{\mathbf{r}}}_i - \overset{\vee}{\boldsymbol{\omega}} \overset{\vee}{\mathbf{r}}_i \overset{\vee}{\boldsymbol{\omega}} + 2 \overset{\vee}{\boldsymbol{\omega}} \dot{\overset{\vee}{\mathbf{r}}}_i) &= m_i \mathbf{g}_i + \mathbf{P}_i - \mathbf{P}_{N,i}; \\ &(i = 1, 2, \dots, n), \end{aligned} \quad (1.2.17)$$

где

$$\mathbf{P}_p^0 = \int_{S_0} \mathbf{p} dS, \quad \mathbf{M}_p^0 = \int_{S_0} \mathbf{r} \mathbf{p} dS, \quad \mathbf{P}_T = \frac{N_n}{\tilde{l}_n} (\mathbf{r}_n - \mathbf{r}^*). \quad (1.2.18)$$

Уравнения (1.2.17) соответствуют случаю, когда трос мысленно отделяют от КА на  $n$ -м участке и его действие на КА заменяют вектором реакций  $\mathbf{P}_T$ . Первые два уравнения (1.2.17) являются уравнениями движения КА с учетом реакции троса  $\mathbf{P}_T$ .

Уравнения (1.2.17) с учетом (1.2.9), (1.2.12), (1.2.14), (1.2.18) объединяются с дифференциальными соотношениями (1.1.20):

$$\dot{\mathbf{R}}_0 = \mathbf{A}^T \mathbf{v}_0, \quad \dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{A}^{-1} \boldsymbol{\omega}.$$

В результате получается замкнутая система уравнений для определения всех  $3(n+4)$  компонентов векторов. Эта система нелинейных дифференциальных уравнений при заданных внешних нагрузках, представленных векторами  $\mathbf{P}_p(t)$ ,  $\mathbf{M}_p(t)$ ,  $\mathbf{P}_i(t)$  ( $i=1,2,\dots,n$ ), и заданных начальных условиях интегрируется численно.

Аэродинамические нагрузки зависят от параметров движения системы и поэтому являются неизвестными. Их необходимо определить в зависимости от этих параметров и включить в число поверхностных сил.

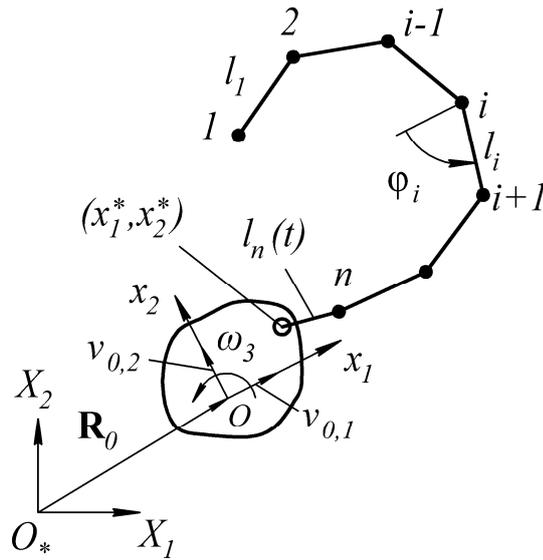
Усилия в тросе  $N_i$  не могут быть сжимающими. Поэтому если при движении троса на каком-либо его участке  $N_i < 0$ , то при интегрировании уравнений необходимо в данные моменты времени считать  $N_i = 0$ . Это означает, что трос на этом участке складывается.

В случае выпускаемого троса в момент выхода  $t_{n+1}$  очередной массы  $m_{n+1}$  к уравнениям (1.2.17) добавляется уравнение при  $i = n+1$  для  $\mathbf{r}_{n+1}$  с начальными условиями  $\mathbf{r}_{n+1}(t_{n+1}) = \mathbf{r}^*$ ,  $\dot{\mathbf{r}}_{n+1}(t_{n+1}) = V^*(t_{n+1}) \cdot \bar{\mathbf{e}}^*$ , где  $\bar{\mathbf{e}}^* = (\mathbf{r}_n - \mathbf{r}^*) / |\mathbf{r}_n - \mathbf{r}^*|$  — единичный вектор, указывающий направление выхода троса. Расширенная система уравнений (1.1.20), (1.2.17) интегрируется до выхода следующей массы и так далее.

Полученные здесь уравнения для КА с гибким тросом с определенными упрощениями могут быть использованы для шлангов заправки топливом самолетов в воздухе, для провисающих проводов, буксировочных тросов и пр.

### 1.2.2. Плоское движение космического аппарата с тросом

При движении КА с растяжимым тросом в плоскости, например,  $O_*X_1X_2$  (рис. 1.2.2) во всех соотношениях и уравнениях разд. 1.2.1 следует положить  $X_{0,3} = 0$ ,  $\theta_1 = \theta_2 = 0$ ,  $v_{0,3} = 0$ ,  $\omega_1 = \omega_2 = 0$ ,  $x_{i,3} = 0$ .



**Рис. 1.2.2.** Плоское движение космического аппарата с тросом

При этом предполагается, что КА является симметричным относительно плоскости  $O_*X_1X_2$ , или  $L_3^0 = 0$ ,  $I_{13}^0 = I_{23}^0 = 0$ ,  $x_{i,3}^* = 0$ , а гравитация и все внешние силы действуют в этой плоскости.

Тогда векторные уравнения (1.2.10) с учетом (1.2.9) записываются в проекциях на оси подвижной системы координат  $Ox_1x_2$  в виде [202]:

$$\begin{aligned}
 ma_{0,1} - L_2\dot{\omega}_3 + \sum_{i=1}^n m_i \ddot{x}_{i,1} - (\omega_3^2 L_1 + 2\omega_3 \sum_{i=1}^n m_i \dot{x}_{i,2}) &= P_{g,1} + P_{S,1}; \\
 ma_{0,2} + L_1\dot{\omega}_3 + \sum_{i=1}^n m_i \ddot{x}_{i,2} - (\omega_3^2 L_2 - 2\omega_3 \sum_{i=1}^n m_i \dot{x}_{i,1}) &= P_{g,2} + P_{S,2}; \\
 -L_2 a_{0,1} + L_1 a_{0,2} + I_{33} \dot{\omega}_3 + \sum_{i=1}^n m_i (-x_{i,2} \ddot{x}_{i,1} + x_{i,1} \ddot{x}_{i,2}) & \\
 + 2\omega_3 \sum_{i=1}^n m_i (x_{i,1} \dot{x}_{i,1} + x_{i,2} \dot{x}_{i,2}) &= M_{g,3} + M_{S,3}; \\
 m_i a_{0,1} - m_i x_{i,2} \dot{\omega}_3 + m_i \ddot{x}_{i,1} - m_i (\omega_3^2 x_{i,1} + 2\omega_3 \dot{x}_{i,2}) - & \\
 - \frac{N_{i-1}}{\tilde{l}_{i-1}} x_{i-1,1} + \left( \frac{N_{i-1}}{\tilde{l}_{i-1}} + \frac{N_i}{\tilde{l}_i} \right) x_{i,1} - \frac{N_i}{\tilde{l}_i} x_{i+1,1} &= m_i g_{i,1} + P_{i,1}; \\
 m_i a_{0,2} + m_i x_{i,1} \dot{\omega}_3 + m_i \ddot{x}_{i,2} - m_i (\omega_3^2 x_{i,2} - 2\omega_3 \dot{x}_{i,1}) - & \\
 - \frac{N_{i-1}}{\tilde{l}_{i-1}} x_{i-1,2} + \left( \frac{N_{i-1}}{\tilde{l}_{i-1}} + \frac{N_i}{\tilde{l}_i} \right) x_{i,2} - \frac{N_i}{\tilde{l}_i} x_{i+1,2} &= m_i g_{i,2} + P_{i,2}; \\
 (i = 1, 2, \dots, n) &
 \end{aligned} \tag{1.2.19}$$

Здесь нижние индексы 1, 2, 3 указывают на то, что величины являются проекциями на оси  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  соответственно. Проекции ускорения  $\mathbf{a}_0$  (1.2.1):

$$a_{0,1} = \dot{v}_{0,1} - \omega_3 v_{0,2}, \quad a_{0,2} = \dot{v}_{0,2} + \omega_3 v_{0,1}. \quad (1.2.20)$$

Уравнения (1.1.20) в рассматриваемом случае плоской задачи записываются в виде

$$\begin{aligned} \dot{X}_{0,1} &= v_{0,1} \cos \theta_3 - v_{0,2} \sin \theta_3; \\ \dot{X}_{0,2} &= v_{0,1} \sin \theta_3 + v_{0,2} \cos \theta_3, \quad \dot{\theta}_3 = \omega_3 \end{aligned} \quad (1.2.21)$$

и добавляются к уравнениям (1.2.19).

Проекции гравитационных сил и моментов  $\mathbf{g}_i$ ,  $\mathbf{P}_g$ ,  $\mathbf{M}_g$  в уравнениях (1.2.19) по формулам (1.2.4), (1.2.15) или (1.2.14) выражаются через неизвестные функции  $X_{0,1}$ ,  $X_{0,2}$ ,  $\theta_3$ ,  $x_{i,1}$ ,  $x_{i,2}$  ( $i = 1, \dots, n$ ).

В системе  $6 + 2n$  дифференциальных уравнений (1.2.19), (1.2.21) неизвестными являются  $X_{0,1}$ ,  $X_{0,2}$ ,  $v_{0,1}$ ,  $v_{0,2}$ ,  $\theta_3$ ,  $\omega_3$ ,  $x_{i,1}$ ,  $x_{i,2}$  ( $i = 1, \dots, n$ ).

Дифференциальные уравнения движения (1.2.17) преобразуются к дифференциальным уравнениям первого порядка и затем решаются совместно с дифференциальными кинематическими соотношениями (1.1.20). Численное интегрирование выполняется методом Рунге – Кутты – Вернера пятого и шестого порядков с автоматическим выбором шага интегрирования, основанного на оценке локальной погрешности [12].

## 2. УРАВНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ СТЕРЖНЕВЫХ И ТРОСОВЫХ СИСТЕМ

Рассматривается нелинейная динамика плоской стержневой системы, состоящей из упругих нерастяжимых стержней, связанных между собой на концах упруговязкими узловыми шарнирами, допускающими большие углы поворота. Стержневая система присоединена к недеформируемому космическому аппарату, который совершает поворот относительно своего центра масс и перемещения по горизонтальной и вертикальной оси как свободное твердое тело. Движение рассматриваемой системы описывается в подвижной системе координат. Перемещения каждого стержня характеризуются его конечным поворотом как твердого тела относительно прямой, проходящей через два соседних шарнирных узла, и изгибом с малыми поперечными перемещениями. Уравнения движения получены в скоростях для космического аппарата и в выбранных обобщенных координатах для стержневой системы на основании принципа возможных перемещений.

На основании полученных уравнений рассмотрены задачи развертывания стержневой системы из одного положения в другое при помощи включения упруговязких зажимов, интегрированных в узловые шарниры, за счет упругих, центробежных и инерционных сил.

Представлена постановка задачи, в которой между двумя любыми шарнирами может присутствовать в качестве связи растяжимый трос, длина которого может изменяться по заданному закону по времени. Рассмотрены задачи развертывания ферменной конструкции, в качестве фиксаторов положения которой выступают растяжимые тросы, из одного состояния в другое за счет упругих или инерционных сил, а также сил натяжения растяжимых тросов переменной длины.

Представлена постановка задачи, которая получается путем редуцирования исходной системы уравнений по квазистатическому изгибу. Из уравнений движения исключаются «быстрые» движения, которые представляют собой изгиб

каждого стержня, т.е. первые и вторые производные от углов между касательной к изогнутой оси стержня и его недеформированной осью.

Рассматривается нестационарное вращательное движение и нелинейные колебания в плоскости крена космического аппарата с двумя упругими панелями солнечных батарей. Космический аппарат и секции панелей солнечных батарей считаются недеформируемыми; они связаны между собой упруговязкими шарнирами, допускающими большие углы поворота. Космический аппарат совершает поворот относительно своей оси как твердое тело. Движение рассматриваемой упругой системы описывается в связанной системе координат. Уравнения движения получены на основании принципа возможных перемещений.

Основные результаты работы по данной главе опубликованы в [15 – 24, 39 – 41, 55].

## ***2.1. Нелинейная динамика космического аппарата с присоединенной упругой стержневой системой***

### **2.1.1. Постановка задачи**

Рассматривается присоединенная к космическому аппарату (КА) плоская стержневая система, состоящая из упругих произвольно ориентированных нерастяжимых стержней, связанных между собой на концах упруговязкимим узловыми шарнирами, допускающими большие углы поворота, рис. 2.1.1. Погонные массы  $m_k$  и изгибные жесткости  $EI_k$  стержней считаются постоянными в пределах их длин  $l_k$ ,  $k=1,2,\dots,n$ . В шарнирных узлах  $k=0,1,\dots,n$  имеются сосредоточенные массы  $\mu_k$  и пружины с угловой жесткостью  $\kappa_k$  и вязким демпфированием  $\nu_k$ . В некоторых узлах система может иметь стационарные или переменные (управляемые) изломы с заданными углами  $\theta(t)$ .

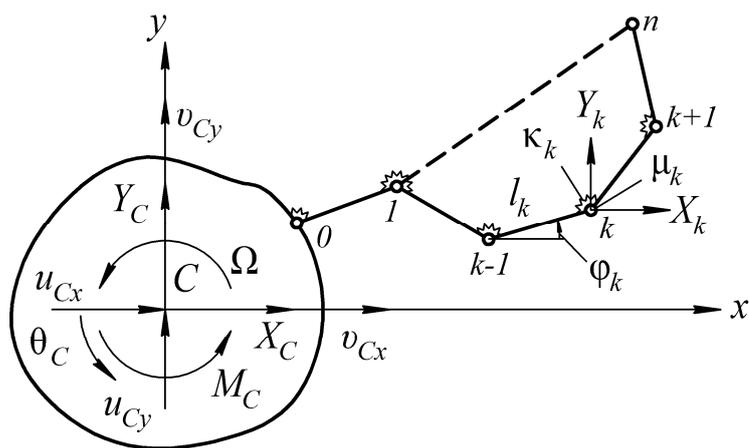


Рис. 2.1.1. Общий вид рассматриваемой системы

Движение свободной составной системы (КА плюс стержневая система) описывается в подвижной системе координат  $S_{xy}$ , связанной с недеформируемым твердым телом (КА), с началом в его центре масс. Параметры КА: масса –  $M_0$ , момент инерции относительно центра тяжести –  $J_0$ . Проекции скорости точки  $C$  на оси подвижной системы координат обозначим через  $v_{cx}(t)$ ,  $v_{cy}(t)$ , а угловую скорость КА – через  $\Omega(t)$ . Кинематика КА определяется проекциями на оси подвижной системы координат перемещениями центра тяжести  $u_{cx}$  и  $u_{cy}$ , а также углом поворота  $\theta_c$ .

Пассивное управление изменением формы системы производится за счет освобождения связей предварительно напряженных узловых пружин с последующим торможением на ограничителях. Активное управление системой осуществляется за счет приложенной системы сил и моментов: на КА действует момент  $M_c(t)$  и силы  $X_c(t)$  и  $Y_c(t)$ , приложенные в его центре тяжести; в каждом шарнирном узле действуют силы  $X_k(t)$  и  $Y_k(t)$ ,  $k=1,2,\dots,n$ . Все силы записываются в проекциях на оси подвижной системы координат  $S_{xy}$ .

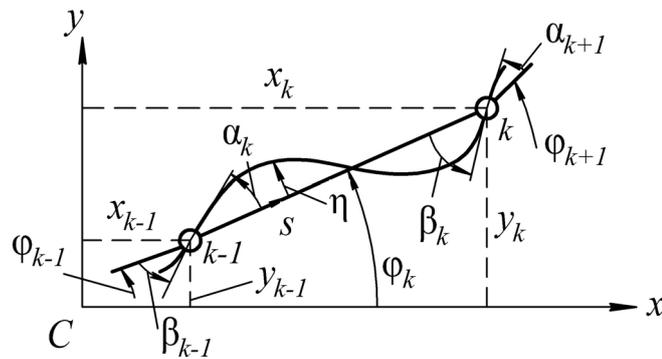
Перемещения  $k$ -го стержня относительно подвижной системы координат обусловлены его поворотом как твердого тела на угол  $\varphi_k(t)$ , отсчитываемый от оси  $x$  (т.е. поворотом прямой, проходящей через узлы  $k-1$  и  $k$ ), и изгибом относительно этой прямой. Изгибное (поперечное) перемещение  $\eta_k(s,t)$  точки  $s$

$k$ -го стержня как элемента будем считать малым и упругим, рис. 2.1.2. Оно представляется в виде

$$\begin{aligned} \eta_k(s, t) &= \alpha_k(t)\sigma_k(s) + \beta_k(t)\tau_k(s); \\ \sigma_k(s) &= \frac{s}{l_k^2}(l_k - s)^2, \quad \tau_k(s) = -\frac{s^2}{l_k^2}(l_k - s). \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

В выражении (2.1.1)  $\alpha_k(t)$  и  $\beta_k(t)$  – углы между касательной к изогнутой оси стержня и его недеформированной осью в  $k$ -ом шарнирном узле. Разность углов поворота левого ( $k+1$ )-го стержня и правого края  $k$ -го стержня в шарнире  $k$  с учетом излома на угол  $\theta_k$  будет (рис. 2.1.2)

$$\Delta\varphi_k = (\varphi_{k+1} + \alpha_{k+1}) - (\varphi_k + \beta_k) - \theta_k. \quad (2.1.2)$$



**Рис. 2.1.2.** Стержневой элемент системы

Координаты  $k$ -го узла деформированной стержневой системы:

$$x_k = x_0 + \sum_{j=1}^k l_j \cos \varphi_j, \quad y_k = y_0 + \sum_{j=1}^k l_j \sin \varphi_j, \quad (2.1.3)$$

где  $x_0, y_0$  – постоянные координаты узла  $k=0$ , расположенного на КА.

Координаты точки  $s$   $k$ -го стержня с учетом его изгиба по форме (2.1.1):

$$\begin{aligned} x &= x_k - (l_k - s) \cos \varphi_k - \eta_k \sin \varphi_k; \\ y &= y_k - (l_k - s) \sin \varphi_k + \eta_k \cos \varphi_k. \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

Проекции ускорения в точке  $s$   $k$ -го стержня на оси  $x$  и  $y$  подвижной системы координат определяются по формулам:

$$\begin{aligned} a_x &= \dot{v}_{cx} - \Omega v_{cy} - \dot{\Omega}y - \Omega^2x - 2\Omega\dot{y} + \ddot{x}; \\ a_y &= \dot{v}_{cy} + \Omega v_{cx} + \dot{\Omega}x - \Omega^2y + 2\Omega\dot{x} + \ddot{y}. \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

Ускорения в  $k$ -ом узле  $a_{xk}$ ,  $a_{yk}$  получаются из (2.1.5) при заменах  $x \rightarrow x_k$ ,  $y \rightarrow y_k$ :

$$\begin{aligned} a_{xk} &= \dot{v}_{cx} - \Omega v_{cy} - \dot{\Omega}y_k - \Omega^2x_k - 2\Omega\dot{y}_k + \ddot{x}_k; \\ a_{yk} &= \dot{v}_{cy} + \Omega v_{cx} + \dot{\Omega}x_k - \Omega^2y_k + 2\Omega\dot{x}_k + \ddot{y}_k. \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

### 2.1.2. Уравнения движения

Потенциальная энергия узловых пружин и изгиба стержней по форме (2.1.1) с учетом (2.1.2),  $\varphi_0 = 0$  и  $\beta_0 = 0$ :

$$P = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \kappa_k (\Delta\varphi_k)^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{4EI_k}{l_k} (\alpha_k^2 + \beta_k^2 + \alpha_k\beta_k). \quad (2.1.7)$$

Ее вариация представляется в виде

$$\delta P = \sum_{k=0}^{n-1} \kappa_k \Delta\varphi_k \delta\Delta\varphi_k + \sum_{k=1}^n \frac{4EI_k}{l_k} \left( (\alpha_k + \frac{1}{2}\beta_k) \delta\alpha_k + (\frac{1}{2}\alpha_k + \beta_k) \delta\beta_k \right)$$

с учетом выражений:  $\delta\Delta\varphi_k = (\delta\varphi_{k+1} + \delta\alpha_{k+1}) - (\delta\varphi_k + \delta\beta_k)$ ;  $\delta\theta_k = 0$  ( $k = 0, 1, \dots, n-1$ );  $\delta\varphi_0 = 0$ ;  $\delta\beta_0 = 0$ . Слагаемые в  $\delta P$ , содержащие  $\theta_k$  ( $k = 0, 1, \dots, n-1$ ), при формировании системы дифференциальных уравнений записываются в их правые части.

Уравнения движения составной системы составляются на основе принципа возможных перемещений:

$$\delta P - \delta A_d - \delta A_m - \delta A_p = 0. \quad (2.1.8)$$

Вариация работы демпфирующих моментов в упруговязких шарнирах с учетом  $\Delta\dot{\varphi}_k = (\dot{\varphi}_{k+1} + \dot{\alpha}_{k+1}) - (\dot{\varphi}_k + \dot{\beta}_k) - \dot{\theta}_k$ ;  $\dot{\varphi}_0 = 0$ ;  $\dot{\beta}_0 = 0$  записывается как

$$\delta A_d = - \sum_{k=0}^{n-1} v_k \Delta\dot{\varphi}_k \delta\Delta\varphi_k. \quad (2.1.9)$$

Выражения в  $\delta A_d$ , содержащие  $\dot{\theta}_k$  ( $k = 0, 1, \dots, n-1$ ), при формировании системы дифференциальных уравнений записываются в их правые части.

Вариация работы инерционных сил распределенных масс стержней и сосредоточенных масс в узлах:

$$\begin{aligned} \delta A_m = & - \sum_{k=1}^n \left\{ \delta u_{cx} \left[ \int_0^{l_k} m_k a_x ds + \mu_k a_{xk} + M_0 (\dot{v}_{cx} - \Omega v_{cy}) \right] + \right. \\ & + \delta u_{cy} \left[ \int_0^{l_k} m_k a_y ds + \mu_k a_{yk} + M_0 (\dot{v}_{cy} + \Omega v_{cx}) \right] + \\ & + \delta \theta_c \left[ \int_0^{l_k} m_k (a_y x - a_x y) ds + \mu_k (a_{yk} x_k - a_{xk} y_k) + J_0 \dot{\Omega} \right] + \\ & \left. + \int_0^{l_k} m_k [a_x \delta x + a_y \delta y] ds + \mu_k (a_{xk} \delta x_k + a_{yk} \delta y_k) \right\}. \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

Вариация работы внешних сил и моментов, приложенных к системе:

$$\begin{aligned} \delta A_p = & \delta u_{cx} (X_c + \sum_{k=1}^n X_k) + \delta u_{cy} (Y_c + \sum_{k=1}^n Y_k) + \\ & + \delta \theta_c [M_c + \sum_{k=1}^n (Y_k x_k - X_k y_k)] + \sum_{k=1}^n (X_k \delta x_k + Y_k \delta y_k). \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

С использованием формул (2.1.3), (2.1.4) вариации  $\delta x_k$ ,  $\delta y_k$  выражаются через  $\delta \varphi_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ), а вариации  $\delta x$ ,  $\delta y$  – через  $\delta \varphi_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) и  $\delta \alpha_k$ ,  $\delta \beta_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ). Вариации  $\delta \alpha_k$ ,  $\delta \beta_k$  также входят в выражение для  $\delta \eta_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ). После этого уравнение (2.1.8) с учетом выражений (2.1.5) – (2.1.7), (2.1.9) – (2.1.11) записывается через вариации  $\delta u_{cx}$ ,  $\delta u_{cy}$ ,  $\delta \theta_c$ ,  $\delta \varphi_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ),  $\delta \alpha_k$ ,  $\delta \beta_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ). Приравнявая к нулю коэффициенты при этих вариациях, получаем систему из  $3n + 3$  обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка для неизвестных скоростей  $v_{cx}$ ,  $v_{cy}$ ,  $\Omega$  и обобщенных координат  $\varphi_j$ ,  $\alpha_r$ ,  $\beta_r$  ( $j, r = 1, 2, \dots, n$ ):

$$\begin{aligned}
L_{ux} &= X_C + \sum_{k=1}^n X_k; \\
L_{uy} &= Y_C + \sum_{k=1}^n Y_k; \\
L_{\theta C} &= M_C + \sum_{k=1}^n [Y_k(x_0 + \sum_{j=1}^k l_j c_j) - X_k(y_0 + \sum_{j=1}^k l_j s_j)]; \\
L_{\varphi k} - \kappa_{k-1} \varphi_{k-1} + (\kappa_{k-1} + \kappa_k) \varphi_k - \kappa_k \varphi_{k+1} + \kappa_{k-1} \alpha_k - \kappa_k \alpha_{k+1} - \\
&\quad - \kappa_{k-1} \beta_{k-1} + \kappa_k \beta_k - v_{k-1} \dot{\varphi}_{k-1} + (v_{k-1} + v_k) \dot{\varphi}_k - v_k \dot{\varphi}_{k+1} + \\
&\quad + v_{k-1} \dot{\alpha}_k - v_k \dot{\alpha}_{k+1} - v_{k-1} \dot{\beta}_{k-1} + v_k \dot{\beta}_k = \\
&= \kappa_{k-1} \theta_{k-1} - \kappa_k \theta_k + v_{k-1} \dot{\theta}_{k-1} - v_k \dot{\theta}_k + l_k c_k \sum_{j=k}^n Y_j - l_k s_k \sum_{j=k}^n X_j; \\
L_{\alpha k} - \kappa_{k-1} \varphi_{k-1} + \kappa_{k-1} \varphi_k + (\kappa_{k-1} + \frac{4EI_k}{l_k}) \alpha_k - \kappa_{k-1} \beta_{k-1} + \frac{2EI_k}{l_k} \beta_k + \\
&\quad - v_{k-1} \dot{\varphi}_{k-1} + v_{k-1} \dot{\varphi}_k + v_{k-1} \dot{\alpha}_k - v_{k-1} \dot{\beta}_{k-1} = \kappa_{k-1} \theta_{k-1} + v_{k-1} \dot{\theta}_{k-1}; \\
L_{\beta k} + \kappa_k \varphi_k - \varphi_{k+1} \kappa_k + \frac{2EI_k}{l_k} \alpha_k - \kappa_k \alpha_{k+1} + (\kappa_k + \frac{4EI_k}{l_k}) \beta_k + \\
&\quad + v_k \dot{\varphi}_k - v_k \dot{\varphi}_{k+1} - v_k \dot{\alpha}_{k+1} + v_k \dot{\beta}_k = -\kappa_k \theta_k - v_k \dot{\theta}_k.
\end{aligned} \tag{2.1.12}$$

В уравнениях (2.1.12):  $k=1,2,\dots,n$ ;  $\kappa_n=0$ ,  $v_n=0$ . Введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
M &= M_0 + \sum_{k=1}^n [\mu_k + m_k l_k], \quad M_k = \sum_{j=k}^n [\mu_j + m_j l_j] - \frac{m_k l_k}{2}; \\
J &= J_0 + \sum_{k=1}^n \{ (\mu_k + m_k l_k) [(x_0 + \sum_{j=1}^k l_j c_j)^2 + (y_0 + \sum_{j=1}^k l_j s_j)^2] - \\
&\quad - m_k l_k^2 [c_k x_0 + s_k y_0 + \sum_{j=1}^k l_j c_{kj}] + \frac{m_k l_k^3}{3} \};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_k &= \sin \varphi_k, \quad c_k = \cos \varphi_k, \quad s_{kj} = \sin(\varphi_k - \varphi_j), \quad c_{kj} = \cos(\varphi_k - \varphi_j); \\
\delta_{kj} &= 0 \quad \text{при } k \neq j, \quad \delta_{kj} = 1 \quad \text{при } k = j,
\end{aligned}$$

где  $M$  – полная масса рассматриваемой системы;  $M_k$  – «отсеченная» масса системы, начиная с  $k$ -го шарнира;  $J$  – момент инерции системы, значение которого зависит от положения стержней на плоскости  $S_{xy}$  подвижной системы координат.

Нелинейные дифференциальные выражения  $L_{ux}$ ,  $L_{uy}$ ,  $L_{\theta C}$ ,  $L_{\varphi k}$ ,  $L_{\alpha k}$ ,  $L_{\beta k}$ ,

входящие в (2.1.12), имеют вид:

$$\begin{aligned} L_{ux} = & m_{ux}^{vx} \dot{v}_{Cx} + m_{ux}^{vy} \dot{v}_{Cy} + m_{ux}^{\Omega} \dot{\Omega} + \sum_{k=1}^n [m_{ux}^{\varphi k} \ddot{\varphi}_k] + \sum_{k=1}^n [m_{ux}^{\alpha k} \ddot{\alpha}_k] + \sum_{k=1}^n [m_{ux}^{\beta k} \ddot{\beta}_k] + \\ & + g_{ux}^{\Omega vx} \Omega v_{Cx} + g_{ux}^{\Omega vy} \Omega v_{Cy} + g_{ux}^{\Omega} \Omega^2 + \sum_{k=1}^n [g_{ux}^{\Omega \varphi k} (2\Omega \dot{\varphi}_k + \dot{\varphi}_k^2)] + \\ & + \sum_{k=1}^n [g_{ux}^{\alpha k \beta k} (\dot{\alpha}_k - \dot{\beta}_k)(\Omega + \dot{\varphi}_k)]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_{uy} = & m_{uy}^{vx} \dot{v}_{Cx} + m_{uy}^{vy} \dot{v}_{Cy} + m_{uy}^{\Omega} \dot{\Omega} + \sum_{k=1}^n [m_{uy}^{\varphi k} \ddot{\varphi}_k] + \sum_{k=1}^n [m_{uy}^{\alpha k} \ddot{\alpha}_k] + \sum_{k=1}^n [m_{uy}^{\beta k} \ddot{\beta}_k] + \\ & + g_{uy}^{\Omega vx} \Omega v_{Cx} + g_{uy}^{\Omega vy} \Omega v_{Cy} + g_{uy}^{\Omega} \Omega^2 + \sum_{k=1}^n [g_{uy}^{\Omega \varphi k} (2\Omega \dot{\varphi}_k + \dot{\varphi}_k^2)] + \\ & + \sum_{k=1}^n [g_{uy}^{\alpha k \beta k} (\dot{\alpha}_k - \dot{\beta}_k)(\Omega + \dot{\varphi}_k)]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_{\theta C} = & m_{\theta C}^{vx} \dot{v}_{Cx} + m_{\theta C}^{vy} \dot{v}_{Cy} + m_{\theta C}^{\Omega} \dot{\Omega} + \sum_{k=1}^n [m_{\theta C}^{\varphi k} \ddot{\varphi}_k] + \sum_{k=1}^n [m_{\theta C}^{\alpha k} \ddot{\alpha}_k] + \sum_{k=1}^n [m_{\theta C}^{\beta k} \ddot{\beta}_k] + \\ & + g_{\theta C}^{\Omega vx} \Omega v_{Cx} + g_{\theta C}^{\Omega vy} \Omega v_{Cy} + g_{\theta C}^{\Omega} \Omega^2 + \sum_{k=1}^n [g_{\theta C}^{\Omega \varphi k} (2\Omega \dot{\varphi}_k + \dot{\varphi}_k^2)] + \\ & + \sum_{k=1}^n [g_{\theta C}^{\alpha k \beta k} (\dot{\alpha}_k - \dot{\beta}_k)(\Omega + \dot{\varphi}_k)]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_{\varphi k} = & m_{\varphi k}^{vx} \dot{v}_{Cx} + m_{\varphi k}^{vy} \dot{v}_{Cy} + m_{\varphi k}^{\Omega} \dot{\Omega} + \sum_{j=1}^n [m_{\varphi k}^{\varphi j} \ddot{\varphi}_j] + \sum_{j=1}^n [m_{\varphi k}^{\alpha j} \ddot{\alpha}_j] + \sum_{j=1}^n [m_{\varphi k}^{\beta j} \ddot{\beta}_j] + \\ & + g_{\varphi k}^{\Omega vx} \Omega v_{Cx} + g_{\varphi k}^{\Omega vy} \Omega v_{Cy} + g_{\varphi k}^{\Omega} \Omega^2 + \sum_{j=1}^n [g_{\varphi k}^{\Omega \varphi j} (2\Omega \dot{\varphi}_j + \dot{\varphi}_j^2)] + \\ & + \sum_{j=1}^n [g_{\varphi k}^{\alpha j \beta j} (\dot{\alpha}_j - \dot{\beta}_j)(\Omega + \dot{\varphi}_j)]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_{\alpha k} = & m_{\alpha k}^{vx} \dot{v}_{Cx} + m_{\alpha k}^{vy} \dot{v}_{Cy} + m_{\alpha k}^{\Omega} \dot{\Omega} + \sum_{j=1}^n [m_{\alpha k}^{\varphi j} \ddot{\varphi}_j] + \sum_{j=1}^n [m_{\alpha k}^{\alpha j} \ddot{\alpha}_j] + \sum_{j=1}^n [m_{\alpha k}^{\beta j} \ddot{\beta}_j] + \\ & + g_{\alpha k}^{\Omega vx} \Omega v_{Cx} + g_{\alpha k}^{\Omega vy} \Omega v_{Cy} + g_{\alpha k}^{\Omega} \Omega^2 + \sum_{j=1}^n [g_{\alpha k}^{\Omega \varphi j} (2\Omega \dot{\varphi}_j + \dot{\varphi}_j^2)] + \\ & + \sum_{j=1}^n [g_{\alpha k}^{\alpha j \beta j} (\dot{\alpha}_j - \dot{\beta}_j)(\Omega + \dot{\varphi}_j)]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_{\beta k} = & m_{\beta k}^{\text{ux}} \dot{v}_{Cx} + m_{\beta k}^{\text{vy}} \dot{v}_{Cy} + m_{\beta k}^{\Omega} \dot{\Omega} + \sum_{j=1}^n [m_{\beta k}^{\varphi j} \ddot{\varphi}_j] + \sum_{j=1}^n [m_{\beta k}^{\alpha j} \ddot{\alpha}_j] + \sum_{j=1}^n [m_{\beta k}^{\beta j} \ddot{\beta}_j] + \\
& + g_{\beta k}^{\Omega \text{ux}} \Omega v_{Cx} + g_{\beta k}^{\Omega \text{vy}} \Omega v_{Cy} + g_{\beta k}^{\Omega} \Omega^2 + \sum_{j=1}^n [g_{\beta k}^{\Omega \varphi j} (2\Omega \dot{\varphi}_j + \dot{\varphi}_j^2)] + \\
& + \sum_{j=1}^n [g_{\beta k}^{\alpha j \beta j} (\dot{\alpha}_j - \dot{\beta}_j)(\Omega + \dot{\varphi}_j)].
\end{aligned}$$

Коэффициенты этих выражений:

$$m_{ux}^{\text{ux}} = M, \quad m_{ux}^{\text{vy}} = m_{uy}^{\text{ux}} = 0;$$

$$m_{ux}^{\Omega} = m_{\theta C}^{\text{ux}} = -\sum_{k=1}^n [(\mu_k + m_k l_k)(y_0 + \sum_{j=1}^k l_j s_j) - s_k \frac{m_k l_k^2}{2} + (\alpha_k - \beta_k) c_k \frac{m_k l_k^2}{12}];$$

$$m_{ux}^{\varphi k} = m_{\varphi k}^{\text{ux}} = -l_k s_k M_k - (\alpha_k - \beta_k) c_k \frac{m_k l_k^2}{12};$$

$$m_{ux}^{\alpha k} = m_{\alpha k}^{\text{ux}} = -s_k \frac{m_k l_k^2}{12}, \quad m_{ux}^{\beta k} = m_{\beta k}^{\text{ux}} = s_k \frac{m_k l_k^2}{12};$$

$$g_{ux}^{\Omega \text{ux}} = 0, \quad g_{ux}^{\Omega \text{vy}} = -g_{uy}^{\Omega \text{ux}} = -M;$$

$$g_{ux}^{\Omega} = -g_{\theta C}^{\Omega \text{ux}} = -\sum_{k=1}^n [(\mu_k + m_k l_k)(x_0 + \sum_{j=1}^k l_j c_j) - c_k \frac{m_k l_k^2}{2} - (\alpha_k - \beta_k) s_k \frac{m_k l_k^2}{12}];$$

$$g_{ux}^{\Omega \varphi k} = -g_{\varphi k}^{\Omega \text{ux}} = -l_k c_k M_k + (\alpha_k - \beta_k) s_k \frac{m_k l_k^2}{12}, \quad g_{ux}^{\alpha k \beta k} = -c_k \frac{m_k l_k^2}{6};$$

$$m_{uy}^{\text{vy}} = M;$$

$$m_{uy}^{\Omega} = m_{\theta C}^{\text{vy}} = \sum_{k=1}^n [(\mu_k + m_k l_k)(x_0 + \sum_{j=1}^k l_j c_j) - c_k \frac{m_k l_k^2}{2} - (\alpha_k - \beta_k) s_k \frac{m_k l_k^2}{12}];$$

$$m_{uy}^{\varphi k} = m_{\varphi k}^{\text{vy}} = l_k c_k M_k - (\alpha_k - \beta_k) s_k \frac{m_k l_k^2}{12};$$

$$m_{uy}^{\alpha k} = m_{\alpha k}^{\text{vy}} = c_k \frac{m_k l_k^2}{12}, \quad m_{uy}^{\beta k} = m_{\beta k}^{\text{vy}} = -c_k \frac{m_k l_k^2}{12};$$

$$g_{uy}^{\Omega \text{vy}} = 0;$$

$$g_{uy}^{\Omega} = -g_{\theta C}^{\Omega \text{vy}} = -\sum_{k=1}^n [(\mu_k + m_k l_k)(y_0 + \sum_{j=1}^k l_j s_j) - s_k \frac{m_k l_k^2}{2} + (\alpha_k - \beta_k) c_k \frac{m_k l_k^2}{12}];$$

$$g_{uy}^{\Omega \varphi k} = -g_{\varphi k}^{\Omega \text{vy}} = -l_k s_k M_k - (\alpha_k - \beta_k) c_k \frac{m_k l_k^2}{12}, \quad g_{uy}^{\alpha k \beta k} = -s_k \frac{m_k l_k^2}{6};$$

$$m_{\theta C}^{\Omega} = J - \sum_{k=1}^n [(\alpha_k - \beta_k)(s_k x_0 - c_k y_0 + \sum_{j=1}^k l_j s_{kj}) \frac{m_k l_k^2}{6}];$$

$$m_{\theta C}^{\phi k} = m_{\phi k}^{\Omega} = l_k (c_k x_0 + s_k y_0) M_k + l_k \sum_{j=1}^n [l_j c_{kj} \times \left\{ \begin{array}{l} M_j, j > k \\ M_k, j \leq k \end{array} \right\}] - \frac{m_k l_k^3}{6} + \\ + \sum_{j=k}^n [(\alpha_j - \beta_j) (l_k \frac{m_j l_j^2}{12} s_{kj} - \delta_{kj} \frac{m_k l_k^2}{12} (s_k x_0 - c_k y_0 + \sum_{i=1}^k l_i s_{ki}))];$$

$$m_{\theta C}^{\alpha k} = m_{\alpha k}^{\Omega} = \frac{m_k l_k^2}{12} (c_k x_0 + s_k y_0 + \sum_{j=1}^k l_j c_{kj}) - \frac{m_k l_k^3}{20};$$

$$m_{\theta C}^{\beta k} = m_{\beta k}^{\Omega} = -\frac{m_k l_k^2}{12} (c_k x_0 + s_k y_0 + \sum_{j=1}^k l_j c_{kj}) + \frac{m_k l_k^3}{30};$$

$$g_{\theta C}^{\Omega} = 0;$$

$$g_{\theta C}^{\Omega \phi k} = -g_{\phi k}^{\Omega} = -l_k (s_k x_0 - c_k y_0) M_k - l_k \sum_{j=1}^n [l_j s_{kj} \times \left\{ \begin{array}{l} M_j, j > k \\ M_k, j \leq k \end{array} \right\}] + \\ + \sum_{j=k}^n [(\alpha_j - \beta_j) (l_k \frac{m_j l_j^2}{12} c_{kj} - \delta_{kj} \frac{m_k l_k^2}{12} (c_k x_0 + s_k y_0 + \sum_{i=1}^k l_i c_{ki}))];$$

$$g_{\theta C}^{\alpha \beta k} = -(s_k x_0 - c_k y_0 + \sum_{j=1}^k l_j s_{kj}) \frac{m_k l_k^2}{6};$$

$$m_{\phi k}^{\phi j} = m_{\phi j}^{\phi k} = l_k l_j c_{kj} \times \left\{ \begin{array}{l} M_j, j > k \\ M_k, j \leq k \end{array} \right\} - \delta_{kj} \frac{m_k l_k^3}{6} + s_{kj} \times \left\{ \begin{array}{l} (\alpha_j - \beta_j) l_k \frac{m_j l_j^2}{12}, j > k \\ -(\alpha_k - \beta_k) l_j \frac{m_k l_k^2}{12}, j \leq k \end{array} \right\};$$

$$m_{\phi k}^{\alpha j} = m_{\alpha j}^{\phi k} = \left\{ \begin{array}{l} c_{kj} l_k \frac{m_j l_j^2}{12}, j > k \\ \delta_{kj} \frac{m_k l_k^3}{30}, j \leq k \end{array} \right\}, \quad m_{\phi k}^{\beta j} = m_{\beta j}^{\phi k} = -\left\{ \begin{array}{l} c_{kj} l_k \frac{m_j l_j^2}{12}, j > k \\ \delta_{kj} \frac{m_k l_k^3}{20}, j \leq k \end{array} \right\};$$

$$g_{\phi k}^{\Omega \phi j} = -g_{\phi j}^{\Omega \phi k} = l_k l_j s_{kj} \times \left\{ \begin{array}{l} M_j, j > k \\ M_k, j \leq k \end{array} \right\} + \\ + c_{kj} \times \left\{ \begin{array}{l} -(\alpha_j - \beta_j) l_k \frac{m_j l_j^2}{12}, j > k \\ (\alpha_k - \beta_k) l_j \frac{m_k l_k^2}{12} - \delta_{kj} (\alpha_k - \beta_k) \frac{m_k l_k^3}{12}, j \leq k \end{array} \right\};$$

$$g_{\varphi k}^{\alpha j \beta j} = \begin{cases} s_{kj} l_k \frac{m_j l_j^2}{6}, j > k \\ 0, j \leq k \end{cases};$$

$$m_{\alpha k}^{\alpha j} = m_{\alpha j}^{\alpha k} = \delta_{kj} \frac{m_k l_k^3}{105}, \quad m_{\alpha k}^{\beta j} = m_{\beta j}^{\alpha k} = -\delta_{kj} \frac{m_k l_k^3}{140};$$

$$g_{\alpha k}^{\Omega ux} = c_k \frac{m_k l_k^2}{12}, \quad g_{\alpha k}^{\Omega vy} = s_k \frac{m_k l_k^2}{12};$$

$$g_{\alpha k}^{\Omega} = \frac{m_k l_k^2}{12} (s_k x_0 - c_k y_0 + \sum_{j=1}^k l_j s_{kj}) - \left( \frac{m_k l_k^3}{105} \alpha_k - \frac{m_k l_k^3}{140} \beta_k \right);$$

$$g_{\alpha k}^{\Omega \varphi j} = \begin{cases} -\delta_{kj} \left( \frac{m_k l_k^3}{105} \alpha_k - \frac{m_k l_k^3}{140} \beta_k \right), j \geq k \\ s_{kj} l_j \frac{m_k l_k^2}{12}, j < k \end{cases}, \quad g_{\alpha k}^{\alpha j \beta j} = 0;$$

$$m_{\beta k}^{\beta j} = m_{\beta j}^{\beta k} = \delta_{kj} \frac{m_k l_k^3}{105};$$

$$g_{\beta k}^{\Omega ux} = -c_k \frac{m_k l_k^2}{12}, \quad g_{\beta k}^{\Omega vy} = -s_k \frac{m_k l_k^2}{12};$$

$$g_{\beta k}^{\Omega} = -\frac{m_k l_k^2}{12} (s_k x_0 - c_k y_0 + \sum_{j=1}^k l_j s_{kj}) + \left( \frac{m_k l_k^3}{140} \alpha_k - \frac{m_k l_k^3}{105} \beta_k \right);$$

$$g_{\beta k}^{\Omega \varphi j} = \begin{cases} \delta_{kj} \left( \frac{m_k l_k^3}{140} \alpha_k - \frac{m_k l_k^3}{105} \beta_k \right), j \geq k \\ -s_{kj} l_j \frac{m_k l_k^2}{12}, j < k \end{cases}, \quad g_{\beta k}^{\alpha j \beta j} = 0.$$

При решении полученной системы уравнений можно определить перемещения и угол поворота КА из следующих дифференциальных соотношений:

$$\dot{u}_{cx} - \Omega u_{cy} = v_{cx}, \quad \dot{u}_{cy} + \Omega u_{cx} = v_{cy}, \quad \dot{\theta}_c = \Omega. \quad (2.1.13)$$

### 2.1.3. Уравнения движения в матричном виде

Для интегрирования с помощью стандартной программы полученная система нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка (2.1.12) записывается в матричном виде:

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{N}\mathbf{z} + \mathbf{D}\mathbf{p} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2, \quad (2.1.14)$$

где:

$\mathbf{q} = [u_{cx} \ u_{cy} \ \theta_c \ \varphi_1 \ \dots \ \varphi_n \ \alpha_1 \ \dots \ \alpha_n \ \beta_1 \ \dots \ \beta_n]_{(3n+3) \times 1}^T$  – вектор перемещений и углов поворота;

$\mathbf{p} = [v_{cx} \ v_{cy} \ \Omega \ \dot{\varphi}_1 \ \dots \ \dot{\varphi}_n \ \dot{\alpha}_1 \ \dots \ \dot{\alpha}_n \ \dot{\beta}_1 \ \dots \ \dot{\beta}_n]_{(3n+3) \times 1}^T$  – вектор линейных и угловых скоростей;

$\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{r}, t)_{(3n+3) \times (3n+3)}$  – симметричная нелинейная матрица инерции, коэффициенты которой зависят от обобщенных координат;

$\mathbf{K} = \mathbf{K}(t)_{(3n+3) \times (3n+3)}$  и  $\mathbf{D} = \mathbf{D}(t)_{(3n+3) \times (3n+3)}$  – симметричные матрицы жесткости и демпфирования соответственно;

$\mathbf{r} = [\mathbf{p} \ \mathbf{q}]_{(6n+6) \times 1}^T$ ;  $\mathbf{z} = [\Omega v_{cx} \ \Omega v_{cy} \ \Omega^2 \{2\Omega\dot{\varphi}_m + \dot{\varphi}_m^2\} \{(\dot{\alpha}_m - \dot{\beta}_m)(\Omega + \dot{\varphi}_m)\}]_{(2n+3) \times 1}^T$  ( $m$  последовательно принимает значения от 1 до  $n$ ) – вектор нелинейных частей;

$\mathbf{N} = \mathbf{N}(\mathbf{r}, t)_{(3n+3) \times (2n+3)}$  – матрица нелинейных частей, коэффициенты которой зависят от обобщенных координат, причем квадратная матрица, получающаяся из первых  $(n + 3)$  строк и столбцов, является антисимметричной;

$\mathbf{Q}_1_{(3n+3) \times 1}$  – вектор правых частей, обусловленный приложенными силами и моментами;

$\mathbf{Q}_2_{(3n+3) \times 1}$  – вектор правых частей, обусловленный возможными управляемыми изломами в узлах.

С учетом выражения (2.1.13), которое позволяет связать дифференциальными соотношениями векторы  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{p}$ , окончательная матричная запись системы дифференциальных уравнений движения представляется в виде:

$$\mathbf{E}\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = [\mathbf{F}_1(\mathbf{r}, t) \mathbf{F}_2(\mathbf{r}, t)]_{(6n+6) \times 1}^T, \quad (2.1.15)$$

где:

$\mathbf{E}_{(6n+6) \times (6n+6)}$  – единичная матрица;

$$\mathbf{F}_2(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{E}}\mathbf{p} + \mathbf{R};$$

$\tilde{\mathbf{E}}_{(3n+3) \times (3n+3)}$  – единичная матрица;

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{r}, t) = [\Omega u_{cy} \quad -\Omega u_{cx} \quad 0 \quad \dots \quad 0]_{(3n+3) \times 1}^T;$$

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{r}, t) = -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{Nz} - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{Dp} - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{Kq} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{Q}_1 + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{Q}_2.$$

Система уравнений (2.1.15) решалась в программном комплексе компьютерной алгебры PTC MathCAD 15.0 с помощью стандартной программы решения систем дифференциальных уравнений AdamsBDF, реализующая метод Адамса («не жесткие системы») и метод обратного дифференцирования («жесткие системы») с автоматическим выбором между ними исходя из входных данных. Данный алгоритм является удобным для интегрирования систем уравнений типа (2.1.15).

#### 2.1.4. Тросовые растяжимые элементы

Пассивное управление изменением формы системы производится за счет освобождения связей предварительно напряженных узловых пружин и за счет сил натяжения тросовых элементов, расположенных между двумя произвольными шарнирными узлами. Распределенная масса троса приводится к узлам, поэтому в пределах длины элементы, концы которого соединяются с узлами, он считается безынерционным. Пусть между двумя узлами с номерами  $r$  и  $p$  ( $p > r$ ) расположен упругий на растяжение регулируемый трос (например, на рис. 2.1.1 – штриховая линия, связывающая узел 1 и  $n$ ) с переменной длиной:

$$\tilde{l}_{rp}^0 = l_{rp}^0 + \Delta l_{rp}, \quad (2.1.16)$$

где  $l_{rp}^0 = \sqrt{(x_p^0 - x_r^0)^2 + (y_p^0 - y_r^0)^2}$  – начальная геометрическая длина троса ( $x_p^0, y_p^0$  – начальные координаты узла  $p$ ,  $x_r^0, y_r^0$  – начальные координаты узла  $r$ ),  $\Delta l_{rp}$  – переменная длина троса, изменяющаяся по заданному закону по времени.

Для учета троса в выражение для потенциальной энергии системы (2.1.7) следует добавить  $\Pi \rightarrow \Pi + \Pi_{rp}$ , где

$$\Pi_{rp} = \frac{1}{2} \frac{EF_{rp}}{\tilde{l}_{rp}^0} (l_{rp} - \tilde{l}_{rp}^0)^2, \quad (2.1.17)$$

где  $EF_{rp}$  – жесткость на растяжение-сжатие,  $l_{rp} = \sqrt{(x_p - x_r)^2 + (y_p - y_r)^2}$  – текущая длина троса. Координаты узлов с номерами  $r$  и  $p$  вычисляются следующим образом (2.1.3):

$$\begin{aligned} x_r &= x_0 + \sum_{j=1}^r l_j \cos \varphi_j, & y_r &= y_0 + \sum_{j=1}^r l_j \sin \varphi_j; \\ x_p &= x_0 + \sum_{j=1}^p l_j \cos \varphi_j, & y_p &= y_0 + \sum_{j=1}^p l_j \sin \varphi_j. \end{aligned}$$

Тросовые элементы не работают на сжатие, поэтому используются следующие условия: при  $l_{rp} > \tilde{l}_{rp}^0$  выражение для  $\Pi_{rp}$  с учетом (2.1.16) вычисляется по формуле (2.1.17), при  $l_{rp} \leq \tilde{l}_{rp}^0$  следует принимать  $\Pi_{rp} = 0$ .

Вариация вклада в потенциальную энергию троса, расположенного между узлами с номерами  $r$  и  $p$ , записывается в виде:

$$\delta \Pi_{rp} = EF_{rp} \left( \frac{1}{\tilde{l}_{rp}^0} - \frac{1}{l_{rp}} \right) \sum_{i=r+1}^p \sum_{j=r+1}^p l_i l_j s_{ij} \cdot \delta \varphi_j, \quad (2.1.18)$$

где  $s_{ij} = \sin(\varphi_i - \varphi_j)$ .

Нелинейная система  $3n + 3$  дифференциальных уравнений, записанная в матричном виде (2.1.14) дополняется следующим образом:

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{p}} + \mathbf{Nz} + \mathbf{Dp} + \mathbf{Kq} + \mathbf{T} = \mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2, \quad (2.1.19)$$

где  $\mathbf{T}_{(3n+3) \times 1}$  – вектор тросовых элементов, ненулевыми элементами которого являются коэффициенты, полученные из выражений (2.1.18) при различных вариациях  $\delta\varphi_j$  ( $j=1,2,\dots,n$ ). Система уравнений (2.1.19) решается в программном комплексе компьютерной алгебры PTC MathCAD 15.0 с помощью стандартных программы решения систем «жестких» дифференциальных уравнений BDF – метод обратного дифференцирования или Radau – модифицированный метод Рунге-Кутты 5-го порядка RADAU5.

### 2.1.5. Редуцирование системы по квазистатическому изгибу

Проведем редуцирование полученной системы уравнений движения КА с присоединенной стержневой системой по квазистатическому изгибу, т.е. исключим «быстрые» движения, которые представляют собой изгиб каждого стержня. Для этого:

1. В уравнениях движения (2.1.12) уберем слагаемые, содержащие  $\dot{\alpha}_k$  и  $\dot{\beta}_k$ ,  $k=1,2,\dots,n$ ;
2. В выражениях для дифференциальных операторов  $L_{ux}$ ,  $L_{uy}$ ,  $L_{\theta C}$ ,  $L_{\varphi k}$ ,  $L_{\alpha k}$ ,  $L_{\beta k}$ , входящих в (2.1.12), уберем слагаемые, содержащие  $\ddot{\alpha}_k$  и  $\ddot{\beta}_k$ , а также  $\dot{\alpha}_k - \dot{\beta}_k$ ,  $k=1,2,\dots,n$ ;
3. В коэффициентах, входящих в выражения для дифференциальных операторов, исключим их зависимость от самих углов изгиба  $\alpha_k$  и  $\beta_k$  и их разности  $\alpha_k - \beta_k$ ,  $k=1,2,\dots,n$ .

В результате из двух последних модифицированных уравнений системы (2.1.12) с учетом преобразованных выражений для  $L_{\alpha k}$  и  $L_{\beta k}$  можно получить выражения для углов  $\alpha_k$  и  $\beta_k$  через  $\dot{v}_{Cx}$ ,  $\dot{v}_{Cy}$ ,  $\dot{\Omega}$ ,  $\dot{\varphi}_k$ ,  $\Omega v_{Cx}$ ,  $\Omega v_{Cy}$ ,  $\Omega^2$ ,  $(2\Omega\dot{\varphi}_k + \dot{\varphi}_k^2)$ ,  $\varphi_k$  и  $\dot{\varphi}_k$ ,  $k=1,2,\dots,n$ , полученные путем решения системы линейных алгебраических уравнений порядка  $2n$ . Эти выражения будут линейными, так как была исключена зависимость коэффициентов, входящих в выражения для

дифференциальных операторов, от углов изгиба. Далее они подставляются в уравнения первые четыре уравнения (2.1.12) и с учетом модифицированных выражений для операторов  $L_{ux}$ ,  $L_{uy}$ ,  $L_{\theta C}$ ,  $L_{\varphi k}$  формируется запись новой редуцированной системы дифференциальных уравнений движения в матричном виде, аналогично (2.1.14):

$$\tilde{\mathbf{M}}\dot{\tilde{\mathbf{r}}} + \tilde{\mathbf{N}}\tilde{\mathbf{z}} + \tilde{\mathbf{D}}\tilde{\mathbf{p}} + \tilde{\mathbf{K}}\tilde{\mathbf{q}} = \tilde{\mathbf{Q}}, \quad (2.1.20)$$

где:

$\tilde{\mathbf{q}} = [u_{Cx} \ u_{Cy} \ \theta_C \ \varphi_1 \ \dots \ \varphi_n]_{(n+3) \times 1}^T$  – вектор перемещений и углов поворота редуцированной системы;

$\tilde{\mathbf{p}} = [v_{Cx} \ v_{Cy} \ \Omega \ \dot{\varphi}_1 \ \dots \ \dot{\varphi}_n]_{(n+3) \times 1}^T$  – вектор линейных и угловых скоростей редуцированной системы;

$\tilde{\mathbf{M}} = \tilde{\mathbf{M}}(\tilde{\mathbf{r}}, t)_{(n+3) \times (n+3)}$  – нелинейная несимметричная матрица инерции редуцированной системы, коэффициенты которой зависят от обобщенных координат;

$\tilde{\mathbf{K}} = \tilde{\mathbf{K}}(t)_{(n+3) \times (n+3)}$  и  $\tilde{\mathbf{D}} = \tilde{\mathbf{D}}(t)_{(n+3) \times (n+3)}$  – несимметричные матрицы жесткости и демпфирования редуцированной системы;

$\tilde{\mathbf{r}} = [\tilde{\mathbf{p}} \ \tilde{\mathbf{q}}]_{(2n+6) \times 1}^T$ ;  $\tilde{\mathbf{z}} = [\Omega v_{Cx} \ \Omega v_{Cy} \ \Omega^2 \{2\Omega \dot{\varphi}_m + \dot{\varphi}_m^2\}]_{(n+3) \times 1}^T$  ( $m$  последовательно принимает значения от 1 до  $n$ ) – вектор нелинейных частей редуцированной системы;

$\tilde{\mathbf{N}} = \tilde{\mathbf{N}}(\tilde{\mathbf{r}}, t)_{(n+3) \times (n+3)}$  – матрица нелинейных частей редуцированной системы;

$\tilde{\mathbf{Q}}_{(n+3) \times 1}$  – вектор правых частей, обусловленный приложенными силами и моментами, редуцированной системы.

Система уравнений (2.1.20), аналогично (2.1.14) и (2.1.19) решается в программном комплексе компьютерной алгебры РТС MathCAD 15.0 с помощью стандартных программы решения систем дифференциальных уравнений.

### 2.1.6. Исследования сходимости уравнений движения

Для оценки сходимости при интегрировании систем нелинейных дифференциальных уравнений с помощью алгоритма AdamsBDF на продолжительных интервалах времени решалась тестовая задача со следующими исходными данными:  $n = 4$ ;  $l_k = 1,5$  м,  $m_k = 1,696$  кг/м,  $EI_k = 1,374 \times 10^4$  Па·м<sup>4</sup>,  $\mu_k = 0,5$  кг ( $k = 1,2,3,4$ );  $\kappa_0 = 6000$  Н·м/рад,  $\nu_0 = 0,02$  Н·м·с/рад,  $\kappa_k = 4000$  Н·м/рад,  $\nu_k = 0,01$  Н·м·с/рад ( $k = 1,2,3$ );  $M_0 = 122,5$  кг,  $J_0 = 10$  кг·м<sup>2</sup>,  $x_0 = y_0 = 0,35$  м. Нагрузка на рассматриваемую систему:  $M_c(t) = 1500$  Н·м при  $0 \leq t \leq 1$  с,  $M_c(t) = 0$  при  $t > 1$  с;  $X_c(t) = 500$  Н при  $0 \leq t \leq 1$  с,  $X_c(t) = 0$  при  $t > 1$  с;  $Y_c(t) = 500$  Н при  $0 \leq t \leq 1$  с,  $Y_c(t) = 0$  при  $t > 1$  с.

Для оценки сходимости вычислений было проведено два вида исследования: интегрирование системы с варьируемым шагом на заданном интервале; интегрирование системы с заданным постоянным шагом на различных больших интервалах. Сравнение результатов в рамках одного исследования проводилось по «медленным» движениям системы (угол поворота стержня как твердого тела –  $\varphi_k$ ) и по «быстрым» движениям системы (первая производная от угла изгиба левого конца стержня –  $\dot{\alpha}_k$ ).

В первом случае рассматривалось интегрирование на интервале  $0 \leq t \leq 2$  с при изменении количества разбиений отрезка  $n$  от 20 до 10000. Результаты приведены в табл. 2.1.1 для момента времени  $t = 1$  с. Во втором случае рассматривалось интегрирование системы на интервалах от  $0 \leq t \leq 30$  с до  $0 \leq t \leq 480$  с с постоянным количеством разбиений отрезка  $n = 10000$  и со сравнениями одноименных величин в некоторые моменты времени. Результаты приведены в табл. 2.1.2.

Результаты показывают, что процесс интегрирования является стабильным, в том числе и на больших интервалах интегрирования.

**Табл. 2.1.1.** Исследование сходимости интегрирования уравнений движения

$n$	Шаг интегрирования по времени, с	$\varphi_4$ , рад	$\dot{\alpha}_1$ , рад/с
20	0,1	0,49135614	0,39532537
50	0,04	0,49135615	0,39535410
100	0,02	0,49135614	0,39531046
1000	0,002	0,49135614	0,39532279
10000	0,0002	0,49135614	0,39532646

**Табл. 2.1.2.** Исследование сходимости интегрирования уравнений движения

Текущий момент времени, с	Интервал интегрирования, с	$\varphi_4$ , рад	$\dot{\alpha}_1$ , рад/с
30	30	0,013610716	-0,29871016
	60	0,013610794	-0,29881655
	120	0,013610431	-0,29870484
	240	0,013610312	-0,29894626
	480	0,013610362	-0,29848985
60	60	0,48224818	-1,0100441
	120	0,48224767	-1,0101415
	240	0,48224762	-1,0100451
	480	0,48224758	-1,0102209
120	120	-0,22652627	-0,56379181
	240	-0,22652624	-0,56371960
	480	-0,22652622	-0,56374700
240	240	0,50494089	0,48113081
	480	0,50494062	0,48114561

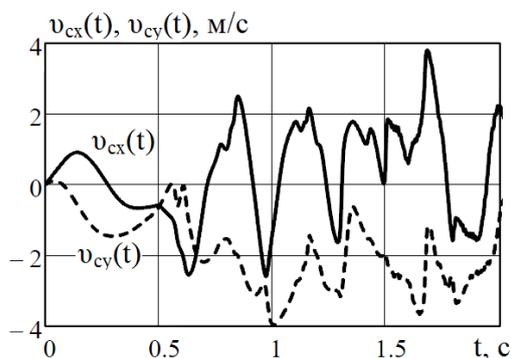
### 2.1.7. Примеры расчета

#### Реакция системы на произвольный возмущающий импульс

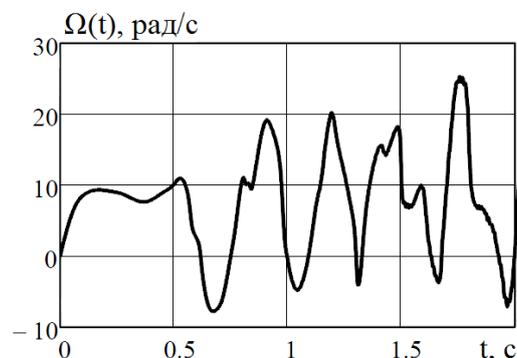
В качестве примера расчета рассмотрим задачу о реакции системы на произвольный возмущающий импульс. Исходные данные:  $n = 4$ ;  $l_k = 1,5$  м,  $m_k = 1,696$  кг/м,  $EI_k = 1,374 \times 10^4$  Па·м<sup>4</sup>,  $\mu_k = 0,5$  кг ( $k = 1,2,3,4$ );  $\kappa_0 = 2000$  Н·м/рад,  $v_0 = 0,02$  Н·м·с/рад,  $\kappa_k = 500$  Н·м/рад,  $v_k = 0,01$  Н·м·с/рад ( $k = 1,2,3$ );

$M_0 = 122,5$  кг,  $J_0 = 10$  кг·м<sup>2</sup>,  $x_0 = y_0 = 0,35$  м. Нагрузка –  $M_c(t) = 1500$  Н·м при  $0 \leq t \leq 1$  с,  $M_c(t) = 0$  при  $t > 1$  с;  $X_c(t) = 500$  Н при  $0 \leq t \leq 1$  с,  $X_c(t) = 0$  при  $t > 1$  с;  $Y_c(t) = 500$  Н при  $0 \leq t \leq 1$  с,  $Y_c(t) = 0$  при  $t > 1$  с. Интегрирование проводилось на интервале  $0 \leq t \leq 2$  с при  $n = 10000$ .

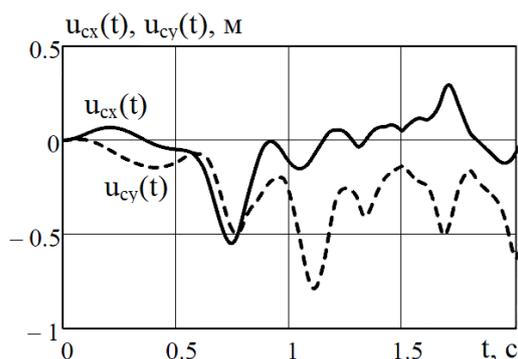
На рис. 2.1.3 показан график изменения линейных скоростей движения КА  $v_{cx}(t)$  и  $v_{cy}(t)$ , на рис. 2.1.4 – изменение угловой скорости  $\Omega(t)$ . На рис. 2.1.5 изображен график изменения перемещения центра тяжести КА  $u_{cx}(t)$  и  $u_{cy}(t)$ , на рис. 2.1.6 – изменение угла поворота  $\theta_c(t)$ .



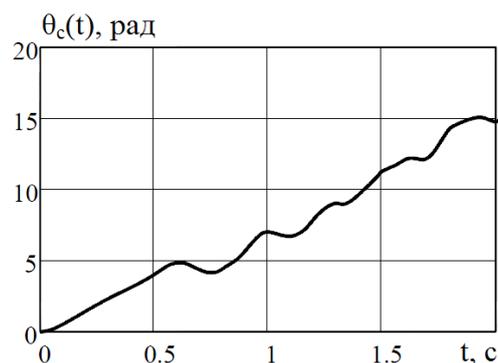
**Рис. 2.1.3.** Проекции скорости движения центра тяжести КА



**Рис. 2.1.4.** Угловая скорость вращения КА



**Рис. 2.1.5.** Перемещения центра тяжести КА



**Рис. 2.1.6.** Угол поворота КА

На рис. 2.1.7 показана форма аппарата со стержнями в подвижной системе координат в начальный момент времени  $t = 0$  с и в момент времени  $t = 0,4$  с (для

отображения изгиба стержней выбран масштабный коэффициент 25, так как максимальный прогиб стержней в рассматриваемый момент времени равен 0,015 м).

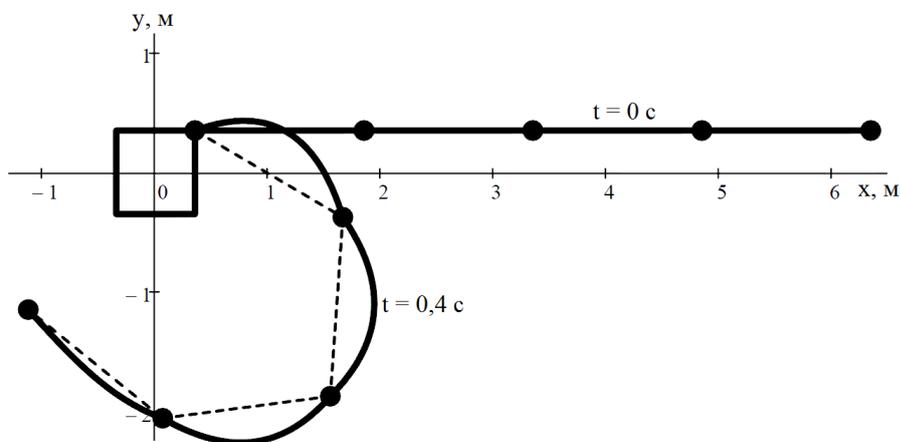


Рис. 2.1.7. КА со стержневой системой

#### Задачи развертывания стержневой системы

Рассматривается КА с присоединенной стержневой системой со следующими параметрами:  $n = 4$ ;  $l_k = 1,5$  м,  $m_k = 1,696$  кг/м,  $EI_k = 1,374 \times 10^4$  Па·м<sup>4</sup>,  $\mu_k = 0,5$  кг ( $k = 1,2,3,4$ );  $M_0 = 122,5$  кг,  $J_0 = 10$  кг·м<sup>2</sup>,  $x_0 = y_0 = 0,35$  м.

Решается задача развертывания стержневой системы, стержни которой в начальный момент времени прижаты друг к другу и ориентированы в направлении оси  $Sy$ , а узловые пружины, при их наличии, предварительно напряжены. Начальные условия для стержней при  $t = 0$  записываются в виде:  $\varphi_1 = \varphi_3 = \pi/2$ ,  $\varphi_2 = \varphi_4 = -\pi/2$ ,  $\dot{\varphi}_k = 0$ ,  $\alpha_k = 0$ ,  $\dot{\alpha}_k = 0$ ,  $\beta_k = 0$ ,  $\dot{\beta}_k = 0$  ( $k = 1,2,3,4$ ). В раскрытом положении стержни должны быть приближенно параллельны оси  $Sx$ , т.е.  $\varphi_k \approx 0$ ,  $k = 1,2,3,4$ . Это осуществляется с помощью упруговязких зажимов, которые имитируются увеличением жесткостей в шарнирах до значения  $10^7$  Н·м/рад и появлением демпфирования с коэффициентом 10 Н·м·с/рад, как только достигаются условия  $|\varphi_k - \varphi_{k-1}| < 0,01$  рад при  $k = 2,3,4$  или  $|\varphi_1| < 0,01$  рад.

Рассмотрено три способа перевода стержневой системы в плоское горизонтальное положение: 1) освобождение связей предварительно напряженных узловых пружин; 2) раскрытие за счет центробежных сил предварительно раскрученного КА; 3) раскрытие за счет инерционных сил КА под действием горизонтальной внешней силы.

1) Развертывание системы за счет сил упругости. В первом способе параметры жесткости и вязкости узловых шарниров приняты равными  $\kappa_0 = 2 \text{ Н}\cdot\text{м/рад}$ ,  $\kappa_k = 1 \text{ Н}\cdot\text{м/рад}$  ( $k = 1, 2, 3$ ),  $\nu_k = 0$  ( $k = 0, 1, 2, 3$ ). Внешние силы и моменты, действующие на систему, отсутствуют:  $M_C(t) = 0$ ,  $X_C(t) = Y_C(t) = 0$ ,  $X_k(t) = Y_k(t) = 0$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ). Интегрирование системы при начальных условиях  $u_{Cx} = u_{Cy} = 0$ ,  $\theta_C = 0$ ,  $v_{Cx} = v_{Cy} = 0$  и  $\Omega = 0$  проводилось на интервале  $0 \leq t \leq T = 8 \text{ с}$  с числом разбиений  $N = 8000$ .

Последовательность и время срабатывания зажимов:  $k = 3$  – при  $t = t_4 = 2,471 \text{ с}$ ;  $k = 0$  – при  $t = t_1 = 2,630 \text{ с}$ ;  $k = 2$  – при  $t = t_3 = 3,007 \text{ с}$ ;  $k = 1$  – при  $t = t_2 = 7,041 \text{ с}$ . На рис. 2.1.8 показаны последовательные положения системы при фиксации стержней в подвижной системе координат  $S_{xy}$ . Для наглядности здесь и далее шарнирные узлы соединены пунктирной линией, а сплошная линия, показывающая изогнутую ось стержня, построена с масштабным коэффициентом 50. Максимальные прогибы (по модулю) стержней при фиксации зажимов  $k = 3$  –  $3,37 \times 10^{-5} \text{ м}$  на первом стержне;  $k = 0$  –  $1,65 \times 10^{-3} \text{ м}$  на третьем стержне;  $k = 2$  –  $2,96 \times 10^{-3} \text{ м}$  на третьем стержне;  $k = 1$  –  $5,84 \times 10^{-3} \text{ м}$  на первом стержне.

На рис. 2.1.9 изображены графики изменения углов поворота стержней как твердого тела  $\varphi_k(t)$ ,  $k = 1, 2, 3, 4$ . На рис. 2.1.10 показан график изменения угла поворота КА  $\theta_C(t)$ , а на рис. 2.1.11 – графики изменения перемещения КА  $u_{Cx}(t)$  и  $u_{Cy}(t)$ . Здесь и далее на графиках кружочками (O) отмечены моменты включения зажимов в шарнирах  $k = 0, 1, 2, 3$ .

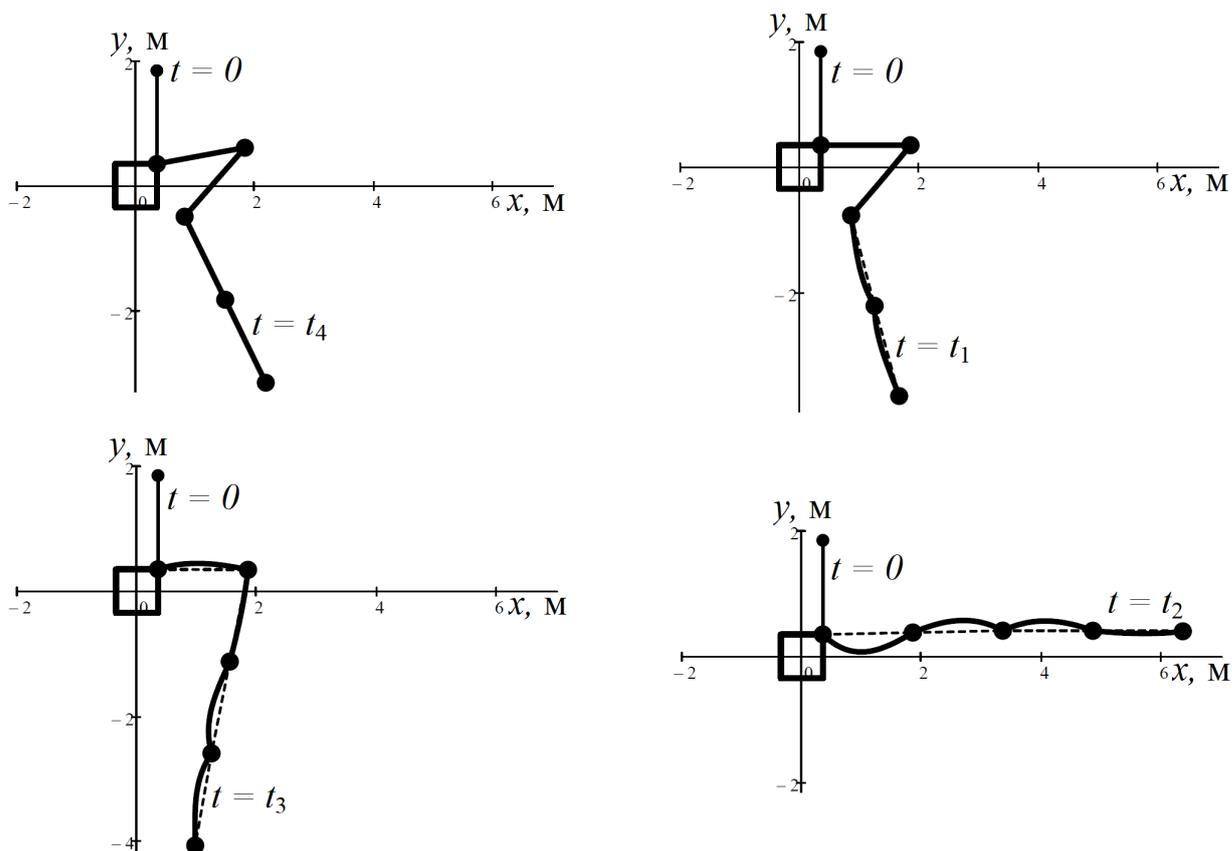


Рис. 2.1.8. Последовательное разворачивание стержневой системы

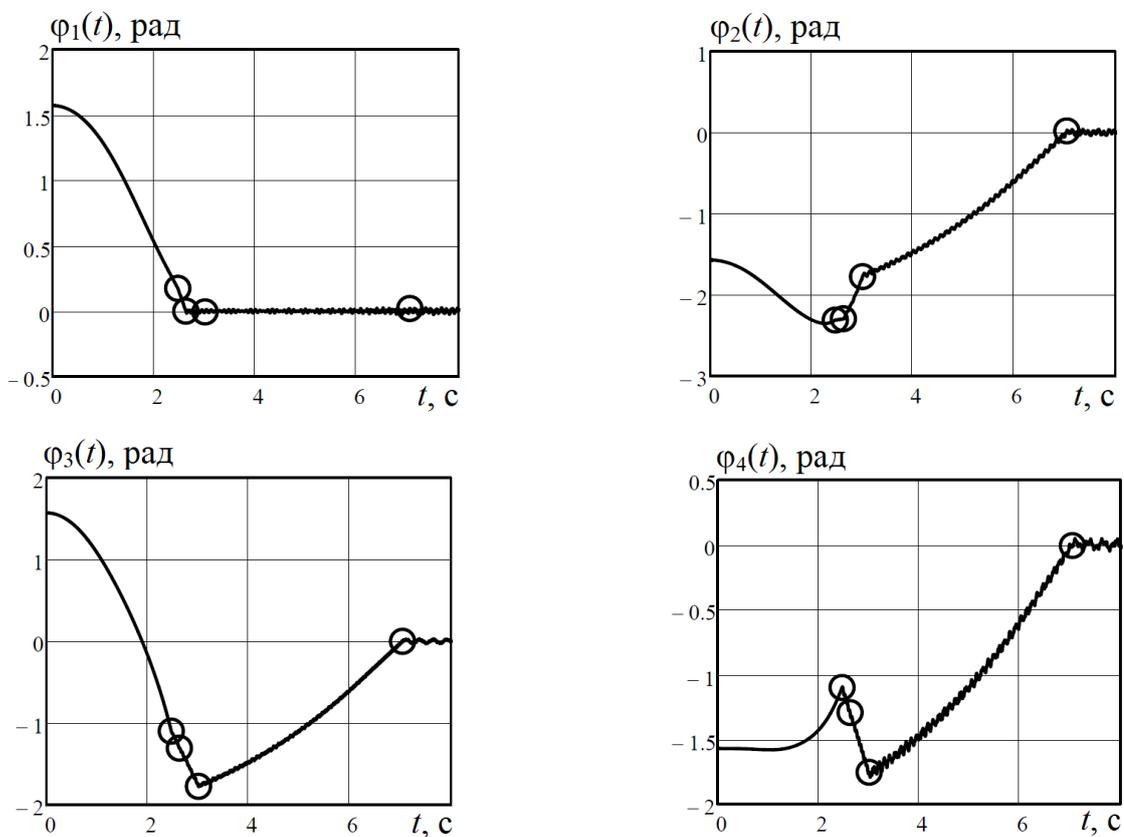


Рис. 2.1.9. Углы поворота стержней как твердого тела

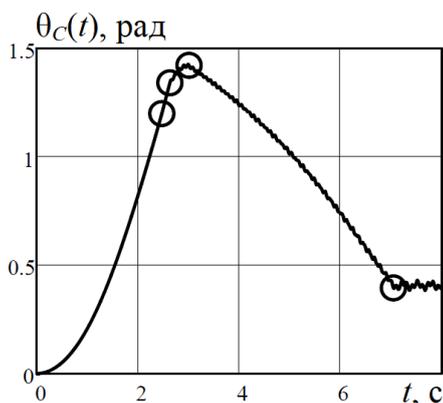


Рис. 2.1.10. Угол поворота КА

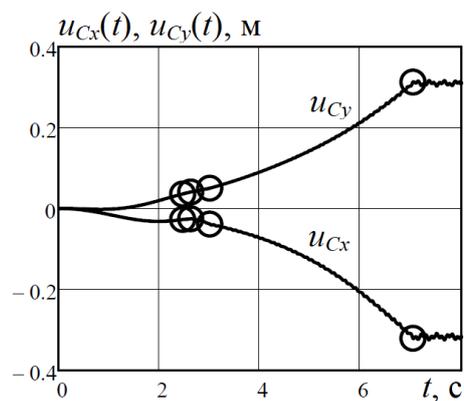


Рис. 2.1.11. Перемещение КА

2) Развертывание системы за счет центробежных сил. Во втором способе параметры жесткости и вязкости узловых шарниров считались равными нулю ( $\kappa_k = 0$ ,  $\nu_k = 0$  для  $k = 0,1,2,3$ ). Внешние силы и моменты, действующие на систему, отсутствуют:  $M_C(t) = 0$ ,  $X_C(t) = Y_C(t) = 0$ ,  $X_k(t) = Y_k(t) = 0$  ( $k = 1,2,3,4$ ). Интегрирование системы при начальных условиях  $u_{Cx} = u_{Cy} = 0$ ,  $\theta_C = 0$ ,  $v_{Cx} = v_{Cy} = 0$  и  $\Omega = \pi/2$  рад/с проводилось на интервале  $0 \leq t \leq T = 5$  с с числом разбиений  $N = 5000$ .

Последовательность и время срабатывания зажимов:  $k = 0$  – при  $t = t_1 = 1,609$  с;  $k = 2$  – при  $t = t_3 = 3,091$  с;  $k = 3$  – при  $t = t_4 = 3,384$  с;  $k = 1$  – при  $t = t_2 = 3,946$  с. На рис. 2.1.12 показаны последовательные положения системы при фиксации стержней в подвижной системе координат  $S_{xy}$ . Максимальные прогибы (по модулю) стержней при фиксации зажимов  $k = 0$  –  $1,28 \times 10^{-5}$  м на первом стержне;  $k = 2$  –  $7,36 \times 10^{-4}$  м на первом стержне;  $k = 3$  –  $2,11 \times 10^{-3}$  м на первом стержне;  $k = 1$  –  $4,16 \times 10^{-3}$  м на третьем стержне.

На рис. 2.1.13 изображены графики изменения углов поворота стержней как твердого тела  $\varphi_k(t)$ ,  $k = 1,2,3,4$ . На рис. 2.1.14, а показан график изменения угла поворота КА  $\theta_C(t)$ , а на рис. 2.1.15 – графики изменения перемещения КА  $u_{Cx}(t)$  и  $u_{Cy}(t)$ .

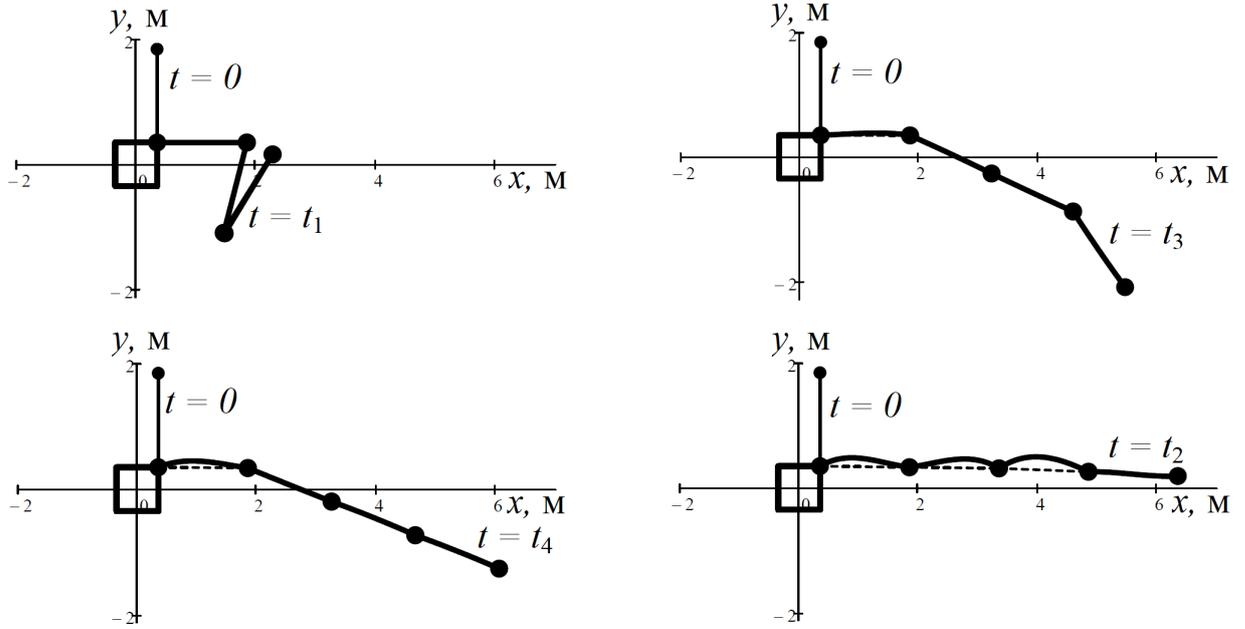


Рис. 2.1.12. Последовательное разворачивание стержневой системы

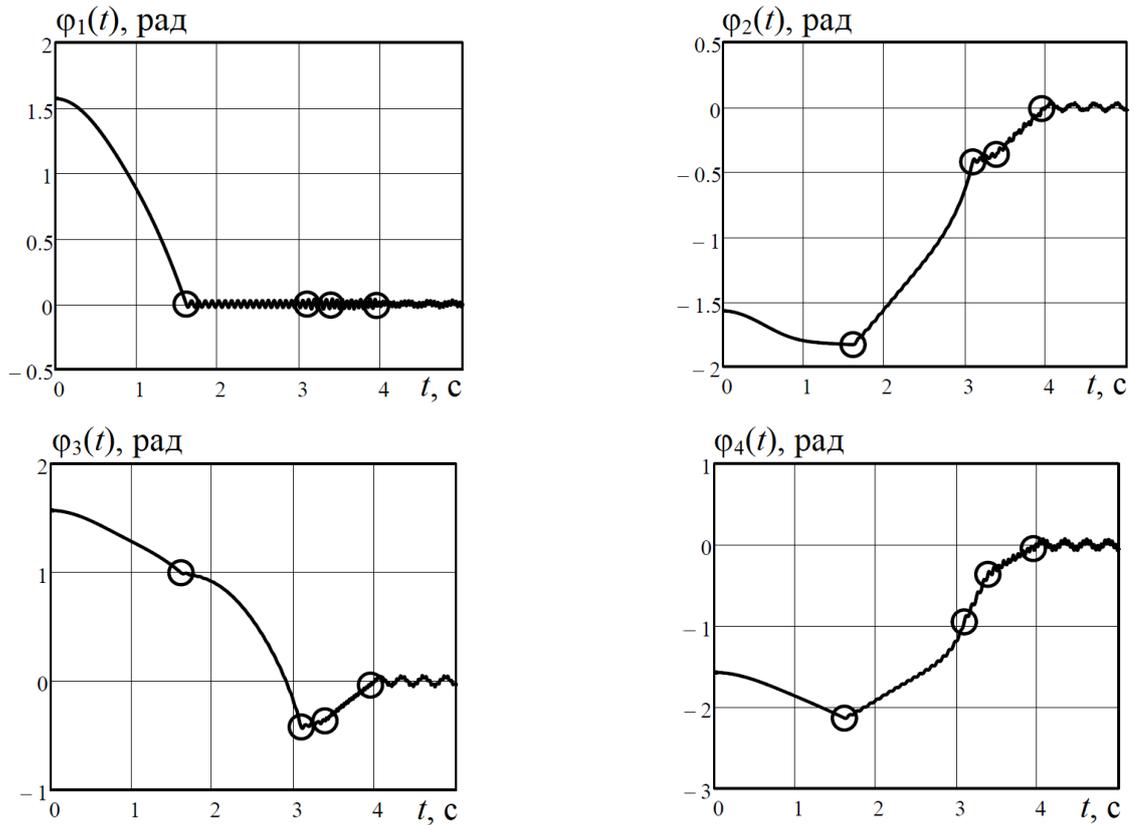


Рис. 2.1.13. Углы поворота стержней как твердого тела

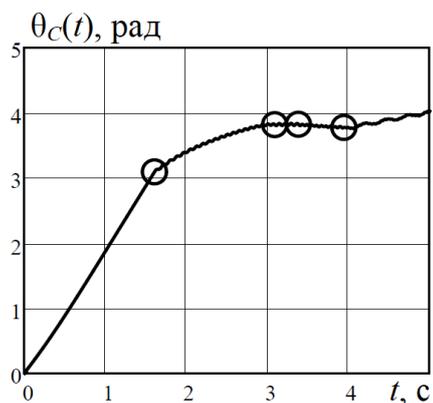


Рис. 2.1.14. Угол поворота КА

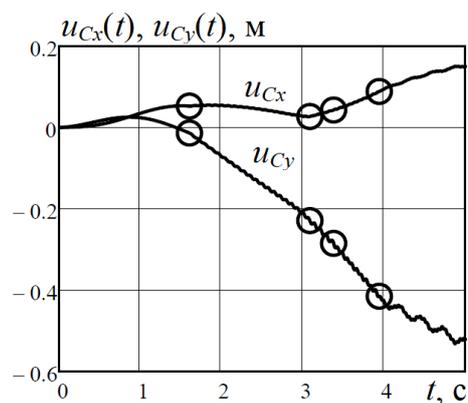
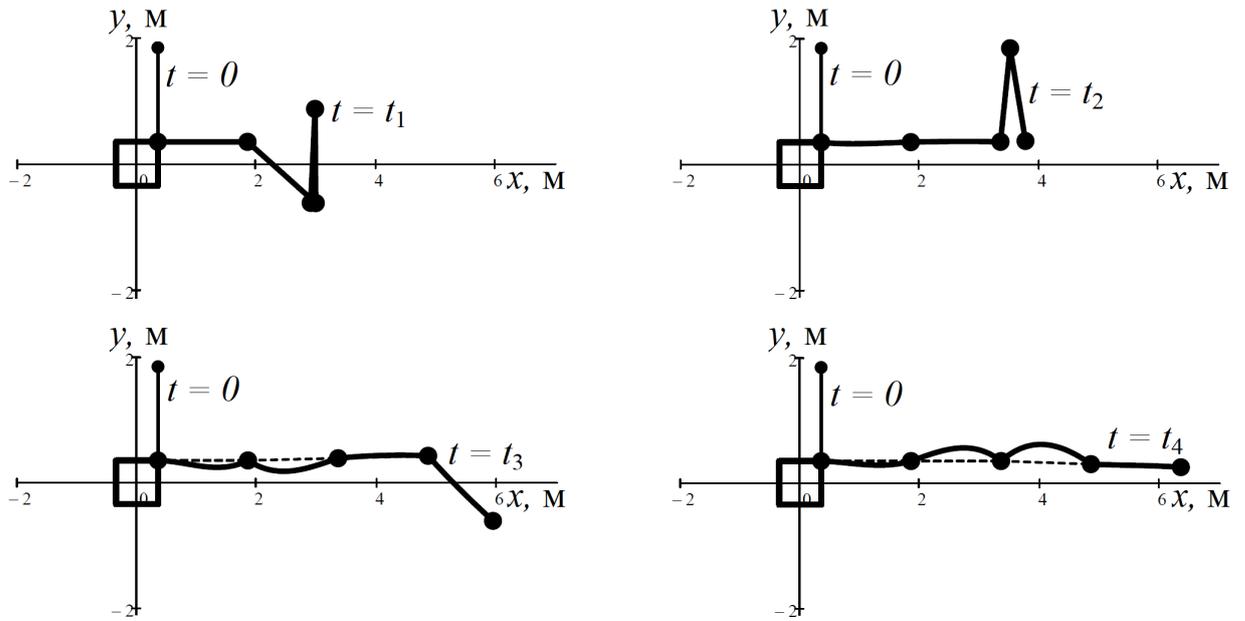


Рис. 2.1.15. Перемещение КА

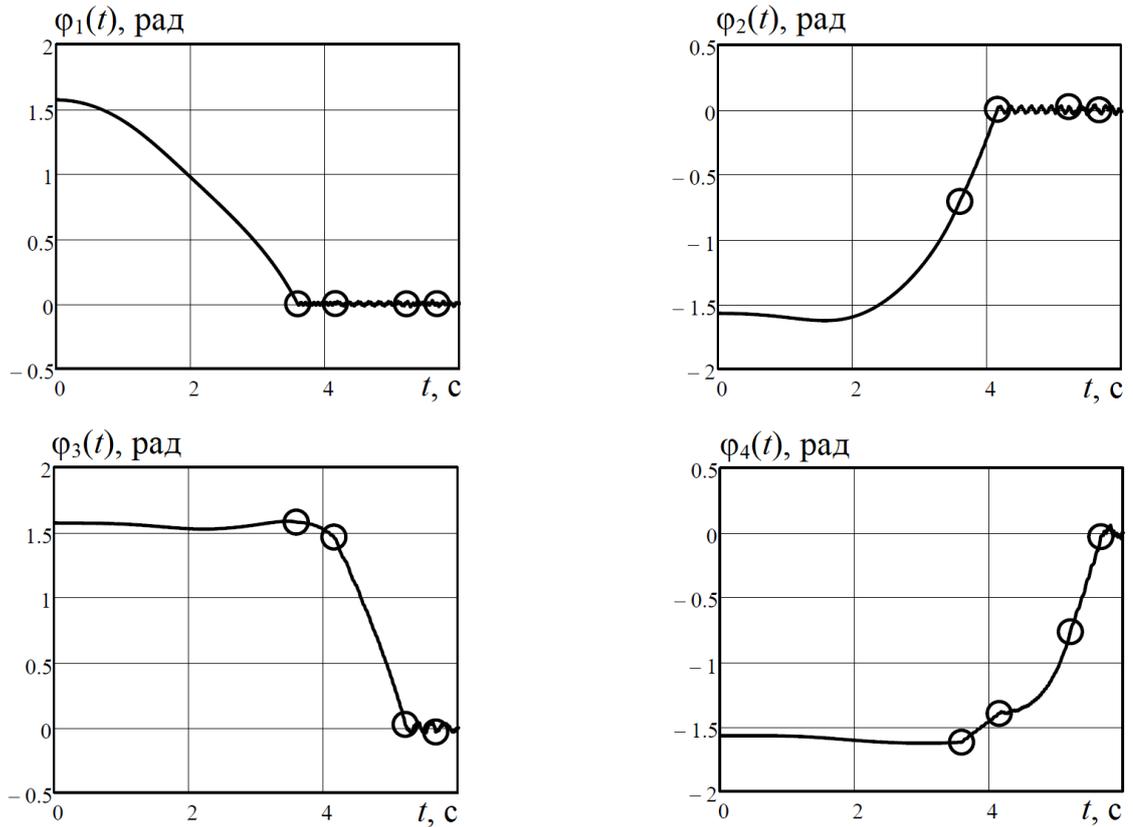
3) Развертывание системы за счет инерционных сил. В третьем способе параметры жесткости и вязкости узловых шарниров считались равными нулю ( $\kappa_k = 0$ ,  $\nu_k = 0$  для  $k = 0, 1, 2, 3$ ). Внешние силы и моменты, действующие на систему:  $M_C(t) = 0$ ,  $X_C(t) = -50$  Н,  $Y_C(t) = 0$ ,  $X_k(t) = Y_k(t) = 0$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ). Интегрирование системы при начальных условиях  $u_{Cx} = u_{Cy} = 0$ ,  $\theta_C = 0$ ,  $v_{Cx} = v_{Cy} = 0$  и  $\Omega = 0$  проводилось на интервале  $0 \leq t \leq T = 6$  с с числом разбиений  $N = 6000$ .

Последовательность и время срабатывания зажимов:  $k = 0$  – при  $t = t_1 = 3,598$  с;  $k = 1$  – при  $t = t_2 = 4,159$  с;  $k = 2$  – при  $t = t_3 = 5,218$  с;  $k = 3$  – при  $t = t_4 = 5,671$  с. На рис. 2.1.16 показаны последовательные положения системы при фиксации стержней в подвижной системе координат  $S_{xy}$ . Максимальные прогибы (по модулю) стержней при фиксации зажимов  $k = 0$  –  $1,24 \times 10^{-5}$  м на втором стержне;  $k = 1$  –  $4,90 \times 10^{-4}$  м на первом стержне;  $k = 2$  –  $3,76 \times 10^{-3}$  м на втором стержне;  $k = 3$  –  $5,77 \times 10^{-3}$  м на третьем стержне.

На рис. 2.1.17 изображены графики изменения углов поворота стержней как твердого тела  $\varphi_k(t)$ ,  $k = 1, 2, 3, 4$ . На рис. 2.1.18 показан график изменения угла поворота КА  $\theta_C(t)$ , а на рис. 2.1.19 – графики изменения перемещения КА  $u_{Cx}(t)$  и  $u_{Cy}(t)$ .



**Рис. 2.1.16.** Последовательное разворачивание стержневой системы



**Рис. 2.1.17.** Углы поворота стержней как твердого тела

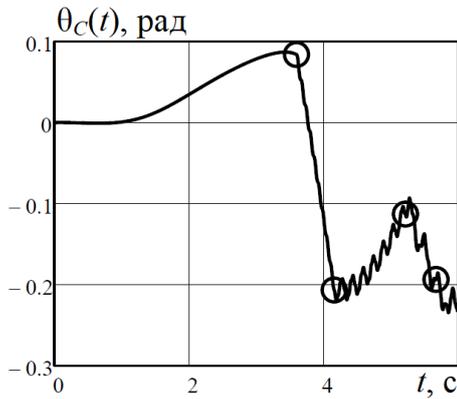


Рис. 2.1.18. Угол поворота КА

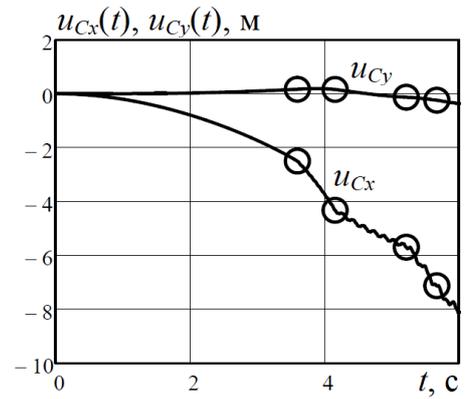


Рис. 2.1.19. Перемещение КА

### Задачи развертывания ферменной конструкции с тросовыми элементами

Рассматривается КА с присоединенной стержневой системой со следующими параметрами:  $n = 4$ ;  $l_k = 1,5$  м,  $m_k = 1,696$  кг/м,  $EI_k = 1,374 \times 10^4$  Па·м<sup>4</sup>,  $\mu_k = 0,5$  кг ( $k = 1,2,3,4$ );  $M_0 = 122,5$  кг,  $J_0 = 10$  кг·м<sup>2</sup>,  $x_0 = y_0 = 0,35$  м. Между узлами 0 и 2, 1 и 3, 2 и 4 присутствуют тросы с жесткостями  $EF_{02} = EF_{13} = EF_{24} = 6,597 \times 10^5$  Па·м<sup>2</sup>.

Решается задача развертывания ферменной стержневой системы, стержни которой в начальный момент времени прижаты друг к другу и ориентированы в направлении оси  $S_y$ , а узловые пружины, при их наличии, предварительно напряжены. Начальные условия для стержней при  $t = 0$  записываются в виде:  $\varphi_1 = \varphi_3 = \pi/2$ ,  $\varphi_2 = \varphi_4 = -\pi/2$ ,  $\dot{\varphi}_k = 0$ ,  $\alpha_k = 0$ ,  $\dot{\alpha}_k = 0$ ,  $\beta_k = 0$ ,  $\dot{\beta}_k = 0$  ( $k = 1,2,3,4$ ). В раскрытом положении углы между соседними стержнями должны быть равны  $|\varphi_k - \varphi_{k-1}| = \pi/2$  рад при  $k = 2,3,4$ , что обеспечивается соответствующими длинами тросов или в начальном значении, или их значениями после программного изменения длины.

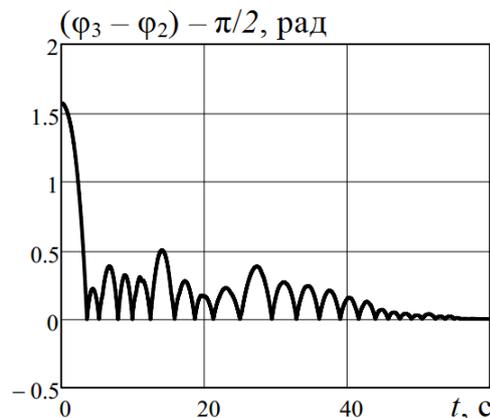
Условие  $P_{rp} = 0$  при  $l_{rp} \leq \tilde{l}_{rp}^0$  реализуется путем обнуления жесткости соответствующего троса:  $EF_{rp} = 0$  при  $l_{rp} \leq \tilde{l}_{rp}^0$ .

Рассмотрены четыре задачи: 1) развертывание системы за счет центробежных сил предварительно раскрученного КА; 2) развертывание за счет

инерционных сил КА под действием горизонтальной внешней силы; 3) развертывание системы за счет горизонтальной силы в 4-м шарнире, имитирующей реактивную силу; 4) развертывание системы за счет упругих сил предварительно напряженных пружин с программным изменением длины связывающих узлы тросов.

1) Развертывание системы за счет центробежных сил. В первой задаче параметры жесткости и вязкости узловых шарниров приняты равными  $\kappa_k = 0,25 \text{ Н}\cdot\text{м}/\text{рад}$ ,  $\nu_k = 0,1 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}/\text{рад}$  ( $k = 0,1,2,3$ ). Внешние силы и моменты, действующие на систему, отсутствуют:  $M_C(t) = 0$ ,  $X_C(t) = Y_C(t) = 0$ ,  $X_k(t) = Y_k(t) = 0$  ( $k = 1,2,3,4$ ). Начальные длины тросов постоянной длины ( $\Delta l_{02} = \Delta l_{13} = \Delta l_{24} = 0$ ) приняты равными  $l_{02}^0 = l_{13}^0 = l_{24}^0 = 2,121 \text{ м}$  для выполнения условия  $|\varphi_k - \varphi_{k-1}| = \pi/2 \text{ рад}$  ( $k = 2,3,4$ ) в конечном положении развертывания. Интегрирование системы при начальных условиях  $u_{Cx} = u_{Cy} = 0$ ,  $\theta_C = 0$ ,  $v_{Cx} = v_{Cy} = 0$  и  $\Omega = 0,5 \text{ рад}/\text{с}$  проводилось на интервале  $0 \leq t \leq T = 60 \text{ с}$  с числом разбиений  $N = 60000$ .

Характер развертывания ферменных стержневых систем с постоянными по длине тросами проиллюстрирован на рис. 2.1.20. На нем представлен график изменения параметра  $(\varphi_3 - \varphi_2) - \pi/2$  по всему интервалу интегрирования.



**Рис. 2.1.20.** Характер развертывания системы с тросами постоянной длины

На рис. 2.1.20 видно, что до некоторого момента времени (пока расстояние между соответствующими шарнирными узлами не станет равным длине троса) стержни движутся под действием упругих сил узловой пружины. Затем происходит натяжение троса до некоторого значения, в нем возникает упругая восстанавливающая сила, которая при превышении соответствующей упругой силы узловой пружины начнет перемещать стержни в обратном направлении, после чего трос при соблюдении условия  $l_{rp} \leq \tilde{l}_{rp}^0$  выключится из работы. По инерции стержни продолжат двигаться в обратном направлении до некоторого положения, пока упругая сила в шарнире не превысит необходимое значение. Этот процесс повторяется, пока остаточные колебания стержней не прекратятся.

Последовательность и время первого срабатывания соответствующего троса: трос между узлами 2 и 4 – при  $t = t_{24} = 3,578$  с; трос между узлами 1 и 3 – при  $t = t_{13} = 3,600$  с; трос между узлами 0 и 2 – при  $t = t_{02} = 4,868$  с. На рис. 2.1.21 показаны положения системы в моменты времени  $t = t_{24}$ ,  $t = t_{13}$ ,  $t = t_{02}$  и  $t = 60$  с в подвижной системе координат  $S_{xy}$ . Для наглядности здесь и далее шарнирные узлы соединены пунктирной линией, сплошная линия, показывающая изогнутую ось стержня, построена с масштабным коэффициентом 50, и натянутый в данный момент трос изображен тонкой сплошной линией.

На рис. 2.1.22 изображены графики изменения углов поворота стержней как твердого тела  $\varphi_k(t)$ ,  $k = 1, 2, 3, 4$ . На рис. 2.1.23 показаны графики изменения угла поворота  $\theta_C(t)$  и перемещения  $u_{Cx}(t)$  и  $u_{Cy}(t)$  КА.

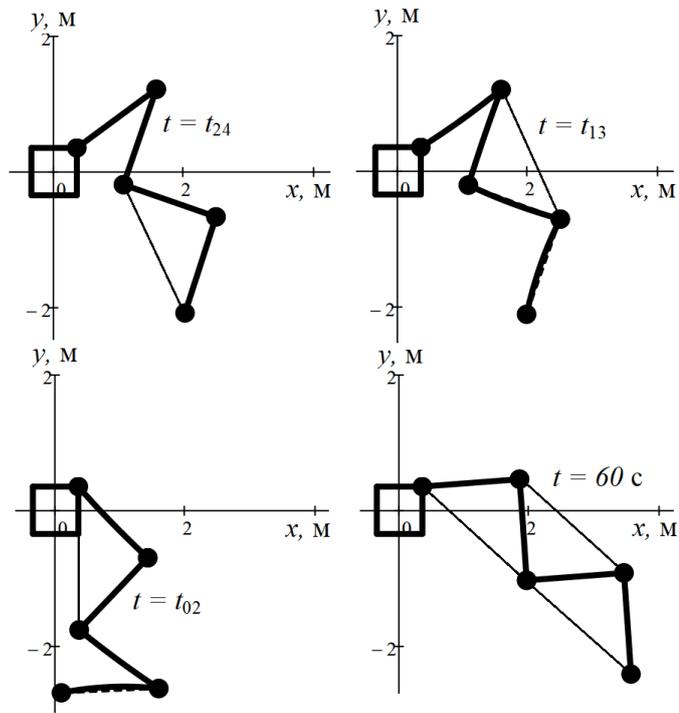


Рис. 2.1.21. Последовательные положения системы

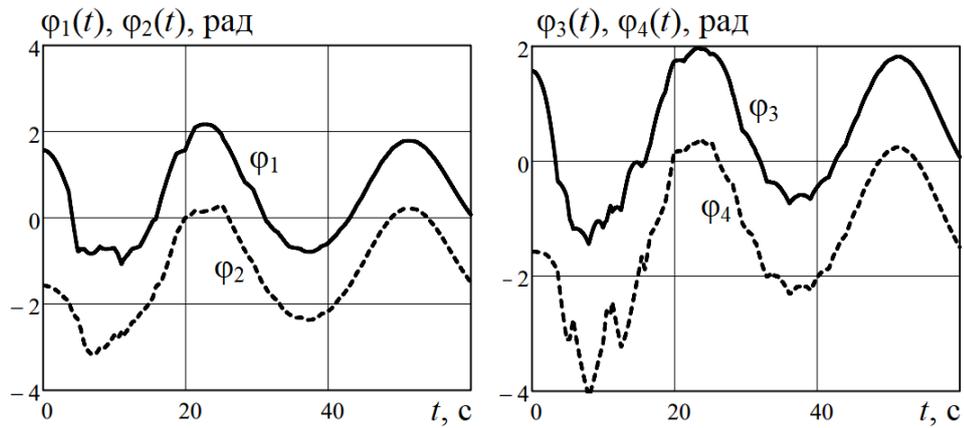


Рис. 2.1.22. Углы поворота стержней как твердого тела

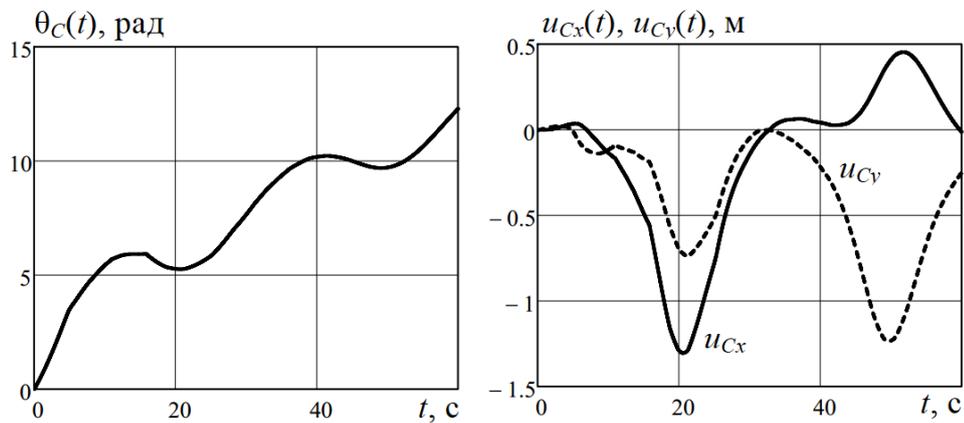


Рис. 2.1.23. Углы поворота и перемещения КА

2) Развертывание системы за счет инерционных сил. Во второй задаче параметры жесткости и вязкости узловых шарниров приняты равными  $\kappa_k = 0,5 \text{ Н}\cdot\text{м}/\text{рад}$ ,  $\nu_k = 0,1 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}/\text{рад}$  ( $k = 0,1,2,3$ ). Внешние силы и моменты, действующие на систему:  $M_C(t) = 0$ ,  $X_C(t) = -5 \text{ Н}$ ,  $Y_C(t) = 0$ ,  $X_k(t) = Y_k(t) = 0$  ( $k = 1,2,3,4$ ). Начальные длины тросов постоянной длины взяты аналогично первой задаче:  $l_{02}^0 = l_{13}^0 = l_{24}^0 = 2,121 \text{ м}$ . Интегрирование системы при начальных условиях  $u_{Cx} = u_{Cy} = 0$ ,  $\theta_C = 0$ ,  $v_{Cx} = v_{Cy} = 0$  и  $\Omega = 0$  проводилось на интервале  $0 \leq t \leq T = 40 \text{ с}$  с числом разбиений  $N = 40000$ .

Последовательность и время первого срабатывания соответствующего троса: трос между узлами 2 и 4 – при  $t = t_{24} = 2,719 \text{ с}$ ; трос между узлами 1 и 3 – при  $t = t_{13} = 2,910 \text{ с}$ ; трос между узлами 0 и 2 – при  $t = t_{02} = 4,147 \text{ с}$ . На рис. 2.1.14 показаны положения системы в моменты времени  $t = t_{24}$ ,  $t = t_{13}$ ,  $t = t_{02}$  и  $t = 40 \text{ с}$  в подвижной системе координат  $C_{xy}$ .

На рис. 2.1.25 представлены графики изменения углов поворота стержней как твердого тела  $\varphi_k(t)$ ,  $k = 1,2,3,4$ , на рис. 2.1.26 – угла поворота  $\theta_C(t)$  и перемещения  $u_{Cx}(t)$  и  $u_{Cy}(t)$  КА.

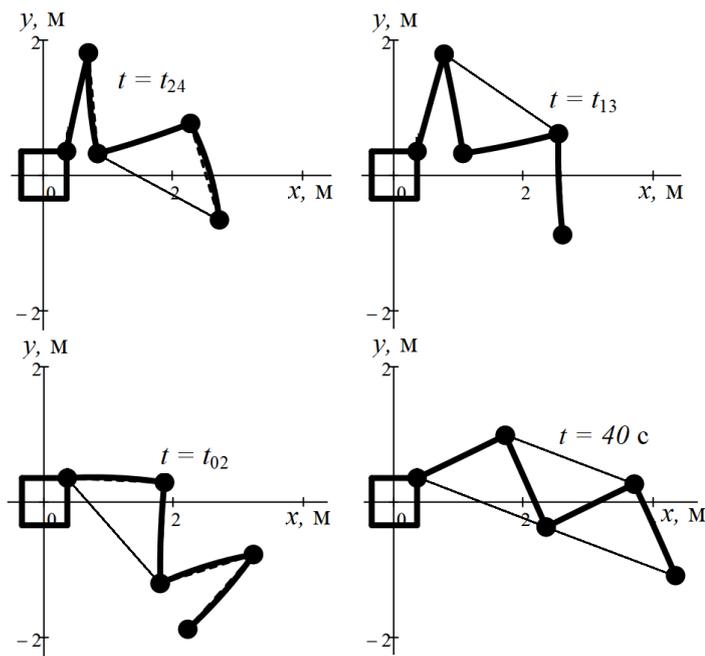


Рис. 2.1.24. Последовательные положения системы

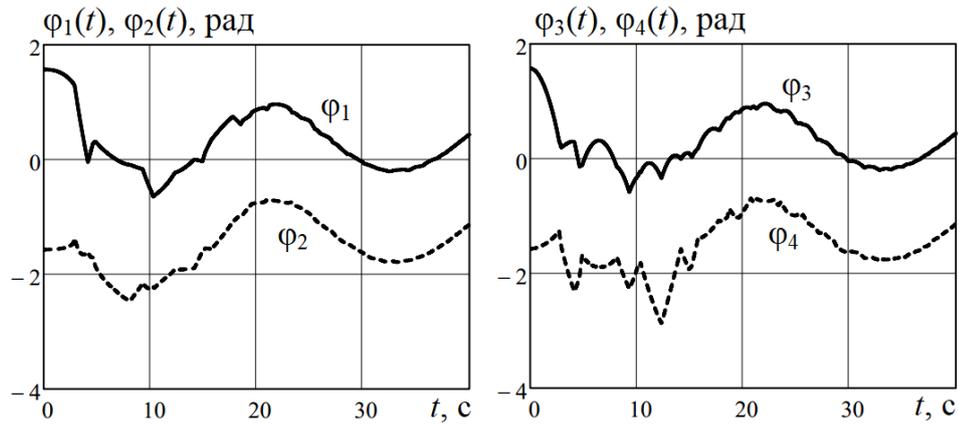


Рис. 2.1.25. Углы поворота стержней как твердого тела

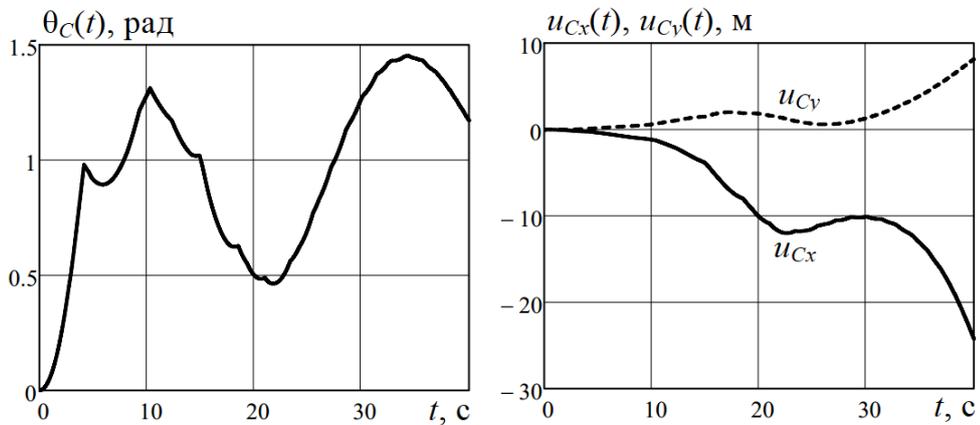


Рис. 2.1.26. Углы поворота и перемещения КА

3) Развертывание системы за счет узловой горизонтальной силы. В данной задаче рассматривается развертывание за счет горизонтальной силы в 4-м узловом шарнире, которая, например, может имитировать небольшой реактивный двигатель (к примеру, на сжатом воздухе). Приняты следующие параметры системы:  $\kappa_k = 0,25$  Н·м/рад,  $\nu_k = 0,1$  Н·м·с/рад ( $k = 0,1,2,3$ ). Внешние силы и моменты, действующие на систему, принимаются равными –  $M_C(t) = 0$ ,  $X_C(t) = Y_C(t) = 0$ ,  $X_k(t) = 0$  ( $k = 1,2,3,4$ ),  $Y_k(t) = 0$  ( $k = 1,2,3$ ),  $Y_4(t) = 1$  Н. Начальные длины тросов –  $l_{02}^0 = l_{13}^0 = l_{24}^0 = 2,121$  м. Интегрирование системы при начальных условиях  $u_{Cx} = u_{Cy} = 0$ ,  $\theta_C = 0$ ,  $v_{Cx} = v_{Cy} = 0$  и  $\Omega = 0$  проводилось на интервале  $0 \leq t \leq T = 40$  с с числом разбиений  $N = 40000$ .

Последовательность и время первого срабатывания соответствующего троса: трос между узлами 2 и 4 – при  $t = t_{24} = 2,124$  с; трос между узлами 1 и 3 – при  $t = t_{13} = 3,508$  с; трос между узлами 0 и 2 – при  $t = t_{02} = 4,512$  с. На рис. 2.1.27 показаны положения системы в моменты времени  $t = t_{24}$ ,  $t = t_{13}$ ,  $t = t_{02}$  и  $t = 40$  с в подвижной системе координат  $S_{xy}$ .

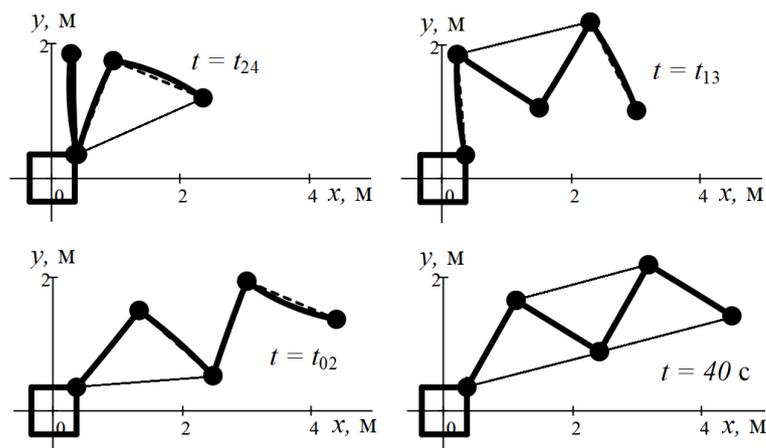


Рис. 2.1.27. Последовательные положения системы

На рис. 2.1.28 изображены графики изменения углов поворота стержней как твердого тела  $\varphi_k(t)$ ,  $k = 1, 2, 3, 4$ . На рис. 2.1.29 представлены графики изменения угла поворота  $\theta_C(t)$  и перемещения  $u_{Cx}(t)$  и  $u_{Cy}(t)$  КА.

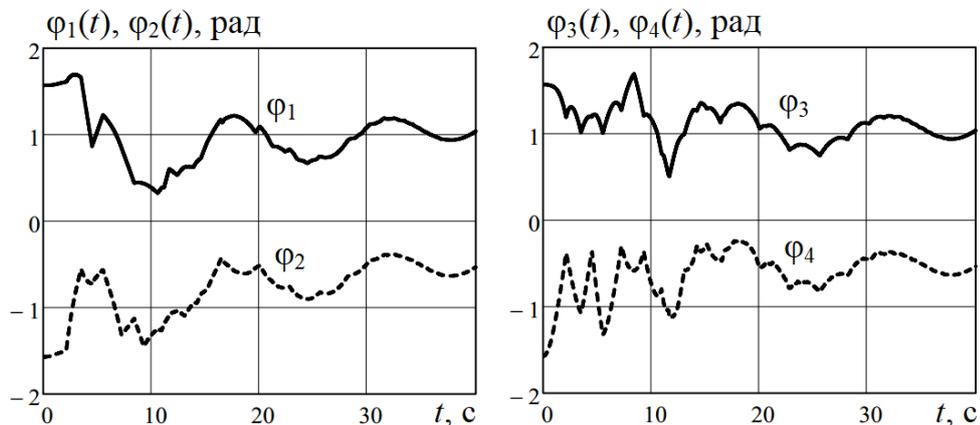


Рис. 2.1.28. Углы поворота стержней как твердого тела

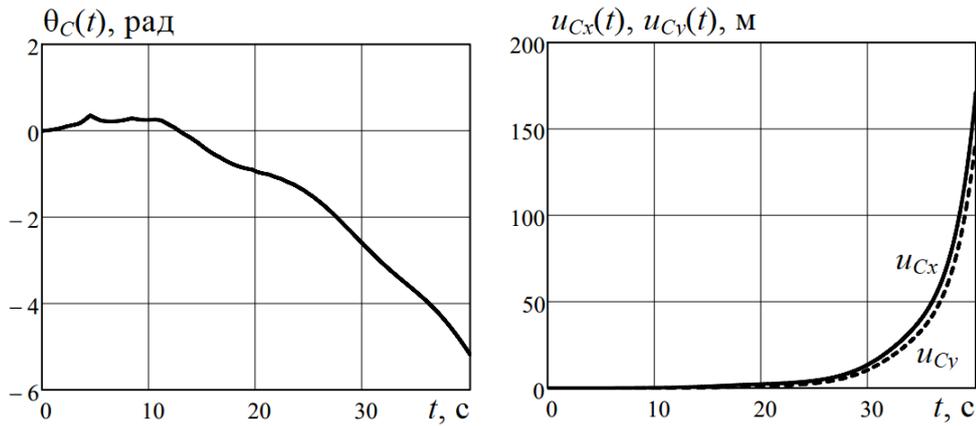
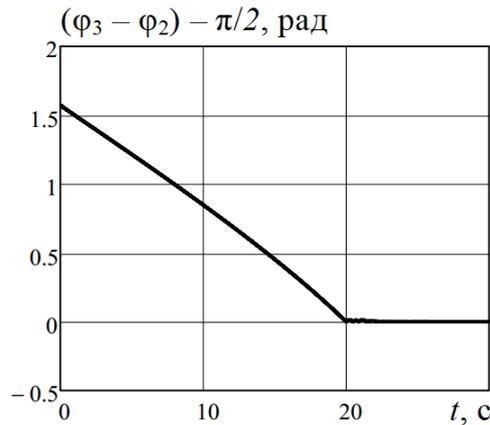


Рис. 2.1.29. Углы поворота и перемещения КА

4) Развертывание системы за счет изменения длины тросов. В четвертой задаче параметры жесткости и вязкости узловых шарниров приняты равными  $\kappa_0 = 0,5$  Н·м/рад,  $\nu_0 = 2,5$  Н·м·с/рад,  $\kappa_k = 1,0$  Н·м/рад,  $\nu_k = 0,1$  Н·м·с/рад ( $k = 1,2,3$ ). Внешние силы и моменты, действующие на систему, отсутствуют:  $M_C(t) = 0$ ,  $X_C(t) = Y_C(t) = 0$ ,  $X_k(t) = Y_k(t) = 0$  ( $k = 1,2,3,4$ ) – развертывание системы происходит за счет упругих сил предварительно напряженных пружин с постоянно действующими ограничениями в виде программно изменяющихся длин, связывающих узлы тросов. Начальные геометрические длины тросов приняты равными нулю:  $l_{02}^0 = l_{13}^0 = l_{24}^0 = 0$ . Каждый трос одновременно в процессе раскрытия за  $t = 20$  с равномерно увеличивает свою длину таким образом, что бы было выполнено условие  $|\varphi_k - \varphi_{k-1}| = \pi/2$  рад ( $k = 2,3,4$ ) в конечном положении развертывания. Таким образом,  $\Delta l_{02}(0) = \Delta l_{13}(0) = \Delta l_{24}(0) = 0$  и  $\Delta l_{02}(20) = \Delta l_{13}(20) = \Delta l_{24}(20) = 2,121$  м и скорость увеличения длины троса составляет примерно 0,106 м/с. Интегрирование системы при начальных условиях  $u_{Cx} = u_{Cy} = 0$ ,  $\theta_C = 0$ ,  $v_{Cx} = v_{Cy} = 0$  и  $\Omega = 0$  проводилось на интервале  $0 \leq t \leq T = 30$  с с числом разбиений  $N = 30000$ .

Характер развертывания ферменных стержневых систем с тросами, длина которых в процессе изменяется по программному закону, проиллюстрирован на рис. 2.1.30 – график изменения параметра  $(\varphi_3 - \varphi_2) - \pi/2$  по всему интервалу интегрирования. По нему видно, что в отличие от рис. 2.1.20, процесс раскрытия

идет более гладко, без рывков, что естественно уменьшает нагрузки на узловые шарниры. Тросы плавно подводятся до состояния  $l_{rp} = \tilde{l}_{rp}^0$ , и остаточные колебания после занятия конечного положения системы быстро гасятся за счет демпфирования в шарнирах. Следует заметить, что не обязательно начинать выпускать тросы одновременно. Можно, к примеру, для большей гладкости процесса выпустить тросы поочередно.



**Рис. 2.1.30.** Характер развертывания системы с тросами переменной длины

На рис. 2.1.31 показаны положения системы в моменты времени  $t = 5$  с,  $t = 10$  с,  $t = 20$  с и  $t = 30$  с в подвижной системе координат  $S_{xy}$ .

На рис. 2.1.32 изображены графики изменения углов поворота стержней как твердого тела  $\varphi_k(t)$ ,  $k = 1, 2, 3, 4$ . На рис. 2.1.33 показаны графики изменения угла поворота  $\theta_C(t)$  и перемещения  $u_{Cx}(t)$  и  $u_{Cy}(t)$  КА. Графики, представленные на рис. 2.1.32 и рис. 2.1.33, отличаются более плавным характером изменения соответствующих величин по сравнению с предыдущими задачами.

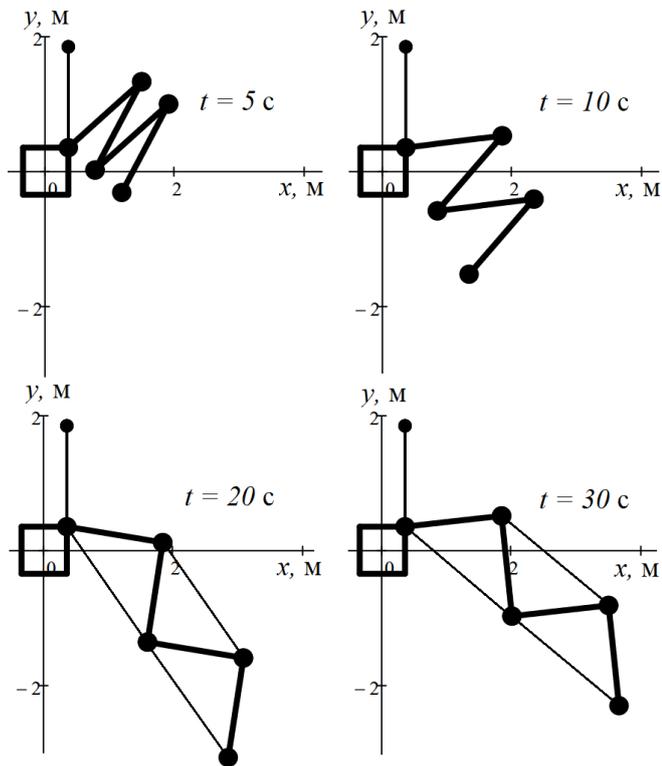


Рис. 2.1.31. Последовательные положения системы

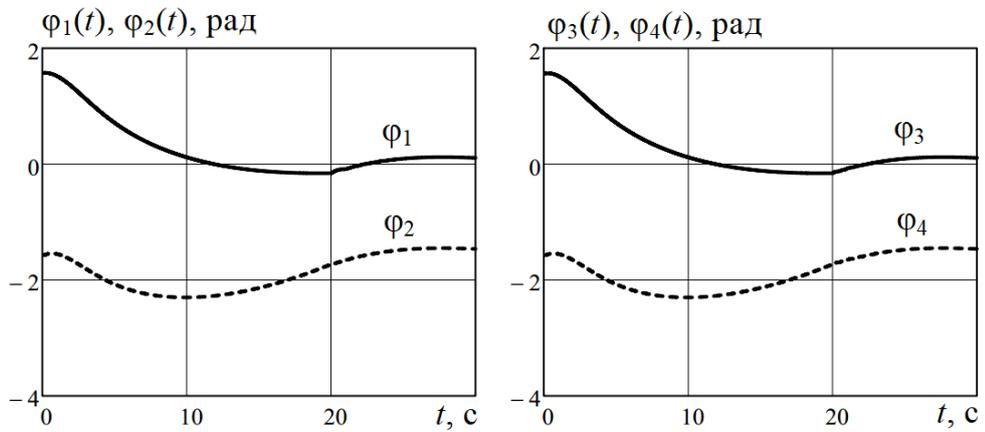
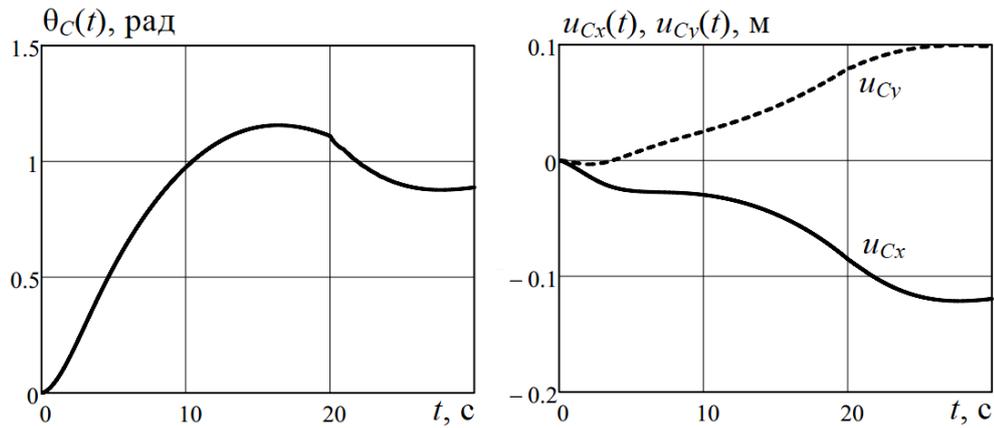


Рис. 2.1.32. Углы поворота стержней как твердого тела



**Рис. 2.1.33.** Углы поворота и перемещения КА

Сравнение общей и редуцированной по квазистатическому изгибу постановок

Рассмотрим КА со стержневой системой, состоящей из  $n = 2$  элементов, и приведем несколько примеров расчета с необходимыми пояснениями. Общие для всех примеров расчета исходные данные:  $M_0 = 122,5$  кг,  $J_0 = 10$  кг·м<sup>2</sup>,  $x_0 = y_0 = 0,35$  м. При  $t = 0$  КА находится в покое, если не указано другое.

1) Реакция системы на произвольный возмущающий импульс. Рассмотрим задачу о реакции системы на произвольный возмущающий импульс в двух постановках. Исходные данные:  $l_k = 3,0$  м,  $m_k = 0,339$  кг/м,  $EI_k = 439,8$  Па·м<sup>4</sup>,  $\mu_k = 1,0$  кг ( $k = 1,2$ );  $\kappa_0 = 1500$  Н·м/рад,  $\nu_0 = 0,10$  Н·м·с/рад,  $\kappa_1 = 1200$  Н·м/рад,  $\nu_1 = 0,05$  Н·м·с/рад. Нагрузка –  $M_C(t) = 150$  Н·м при  $0 \leq t \leq 1$  с,  $M_C(t) = 0$  при  $t > 1$  с;  $X_C(t) = 100$  Н при  $0 \leq t \leq 1$  с,  $X_C(t) = 0$  при  $t > 1$  с;  $Y_C(t) = 50$  Н при  $0 \leq t \leq 1$  с,  $Y_C(t) = 0$  при  $t > 1$  с. Интегрирование при начальных условиях  $\varphi_k = 0$ ,  $\dot{\varphi}_k = 0$ ,  $\alpha_k = 0$ ,  $\dot{\alpha}_k = 0$ ,  $\beta_k = 0$ ,  $\dot{\beta}_k = 0$  ( $k = 1,2$ ) проводилось на интервале  $0 \leq t \leq 5$  с при числе разбиений отрезка интегрирования  $N = 5000$ .

В табл. 2.1.3 приведены результаты решения задачи в двух постановках путем сравнения одноименных величин в моменты времени  $t = 1$  с и  $t = 2$  с.

**Табл. 2.1.3.** Сравнение результатов при действии на систему возмущающего импульса

	$t = 1$ с		$t = 2$ с	
	Общ. пост.	Ред. пост.	Общ. пост.	Ред. пост.
$u_{Cx}$ , м	0,243	0,243	0,199	0,187
$u_{Cy}$ , м	-0,122	-0,122	-0,177	-0,174
$\theta_C$ , рад	1,508	1,507	3,020	3,065
$v_{Cx}$ , м/с	0,587	0,583	-0,106	-0,143
$v_{Cy}$ , м/с	-0,314	-0,309	-0,937	-0,925
$\Omega$ , рад/с	-0,545	-0,603	4,596	4,553
$\varphi_1$ , рад	-0,532	-0,524	-0,342	-0,379
$\varphi_2$ , рад	-0,913	-0,892	-0,920	-0,957
$\alpha_1$ , рад	0,421	0,414	0,291	0,318
$\alpha_2$ , рад	0,079	0,073	0,199	0,194
$\beta_1$ , рад	-0,272	-0,265	-0,305	-0,312
$\beta_2$ , рад	-0,038	-0,033	-0,096	-0,094

Для  $u_{Cx}$ ,  $u_{Cy}$ ,  $\theta_C$ ,  $v_{Cx}$ ,  $v_{Cy}$  и  $\Omega$  значения могут значительно отличаться в момент времени  $t = 2$  с, т.е. после снятия управляющего импульса. Для  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta_1$  и  $\beta_2$  значения отличаются, в основном, для момента времени  $t = 1$  с, т.е. в момент окончания действия возмущающего воздействия.

На рис. 2.1.34 – 2.1.36 изображены соответственно зависимости  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ ,  $\alpha_1$  и  $\beta_1$ ,  $\alpha_2$  и  $\beta_2$  от времени для интервала  $0 \leq t \leq 2$  с. Здесь и далее на графиках сплошной линией показана общая постановка задачи, пунктирной линией – редуцированная постановка. На рис. 2.1.37 показаны линии изгиба всех стержней системы в подвижной системе координат  $S_{xy}$  в момент времени  $t = 1$  с.

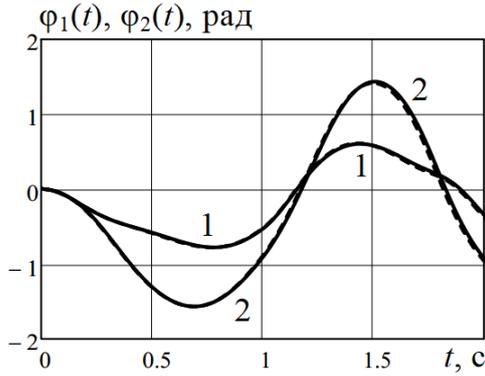


Рис. 2.1.34. Зависимости  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  от  $t$

1 –  $\varphi_1(t)$ ; 2 –  $\varphi_2(t)$

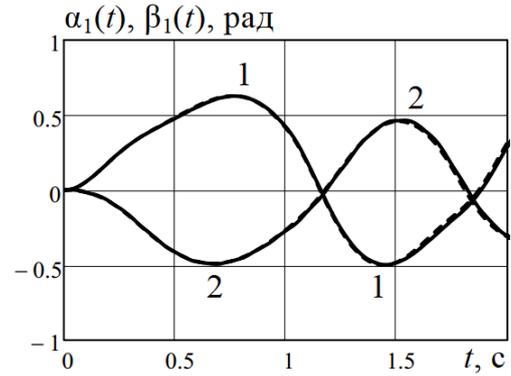


Рис. 2.1.35. Зависимости  $\alpha_1$  и  $\beta_1$  от  $t$

1 –  $\alpha_1(t)$ ; 2 –  $\beta_1(t)$

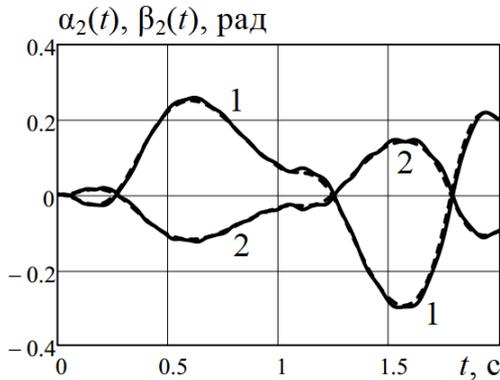


Рис. 2.1.36. Зависимости  $\alpha_2$  и  $\beta_2$  от  $t$

1 –  $\alpha_2(t)$ ; 2 –  $\beta_2(t)$

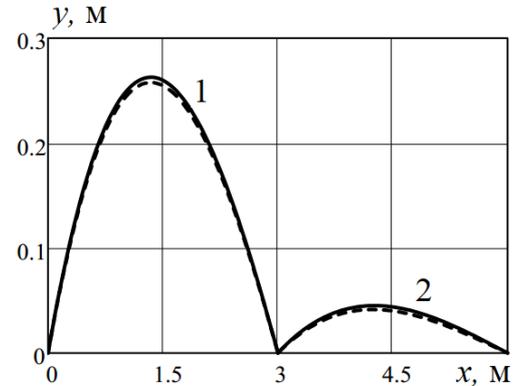


Рис. 2.1.37. Линии прогибов стержней

1 – стержень  $k=1$ ; 2 – стержень  $k=2$

2) Развертывание системы за счет центробежных сил. Здесь и далее (пункте 3) решается задача развертывания стержневой системы, стержни которой в начальный момент времени прижаты друг к другу и ориентированы в направлении оси  $Sy$ , а узловые пружины, при их наличии, предварительно напряжены. Начальные условия для стержней при  $t=0$  записываются в виде:  $\varphi_1 = \pi/2$ ,  $\varphi_2 = -\pi/2$ ,  $\dot{\varphi}_k = 0$ ,  $\alpha_k = 0$ ,  $\dot{\alpha}_k = 0$ ,  $\beta_k = 0$ ,  $\dot{\beta}_k = 0$  ( $k=1,2$ ). В раскрытом положении стержни должны быть приближенно параллельны оси  $Sx$ , т.е.  $\varphi_k \approx 0$ ,  $k=1,2$ . Это осуществляется с помощью упруговязких зажимов, которые имитируются увеличением жесткостей в шарнирах до значения  $10^7$  Н·м/рад и

появлением демпфирования с коэффициентом  $10 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}/\text{рад}$ , как только достигаются условия  $|\varphi_2 - \varphi_1| < 0,01 \text{ рад}$  или  $|\varphi_1| < 0,01 \text{ рад}$ .

Исходные данные:  $l_k = 2,0 \text{ м}$ ,  $m_k = 1,357 \text{ кг/м}$ ,  $EI_k = 7,037 \times 10^3 \text{ Па}\cdot\text{м}^4$ ,  $\mu_k = 0,5 \text{ кг}$  ( $k = 1,2$ ). Жесткости и вязкости узловых шарниров отсутствуют ( $\kappa_k = 0$ ,  $\nu_k = 0$  для  $k = 0,1$ ). Внешние силы и моменты, действующие на систему, отсутствуют:  $M_C(t) = 0$ ,  $X_C(t) = Y_C(t) = 0$ . Интегрирование при начальном условии  $\Omega = 1 \text{ рад/с}$  проводилось на интервале  $0 \leq t \leq 5 \text{ с}$  при числе разбиений отрезка интегрирования  $N = 5000$ .

Последовательность и время срабатывания зажимов в общей постановке:  $k = 0$  при  $t = t_{1f} = 2,903 \text{ с}$ ;  $k = 1$  при  $t = t_{2f} = 4,356 \text{ с}$ . Последовательность и время срабатывания зажимов в редуцированной постановке:  $k = 0$  при  $t = t_{1r} = 2,903 \text{ с}$ ;  $k = 1$  при  $t = t_{2r} = 4,352 \text{ с}$ .

В табл. 2.1.4 приведены результаты решения задачи в двух постановках путем сравнения одноименных величин в моменты времени фиксации зажимов  $k = 0$  и  $k = 1$ .

**Табл. 2.1.4.** Сравнение результатов при разворачивании системы за счет действия центробежных сил

	Фиксация $k = 0$		Фиксация $k = 1$	
	Общ. пост. $t_{1f} = 2,903 \text{ с}$	Ред. пост. $t_{1r} = 2,903 \text{ с}$	Общ. пост. $t_{2f} = 4,356 \text{ с}$	Ред. пост. $t_{1r} = 4,352 \text{ с}$
$u_{Cx}$ , м	0,047	0,047	0,047	0,047
$u_{Cy}$ , м	-0,021	-0,021	-0,146	-0,146
$\theta_C$ , рад	3,450	3,450	3,928	3,928
$v_{Cx}$ , м/с	0,043	0,043	0,042	0,042
$v_{Cy}$ , м/с	-0,071	-0,095	-0,071	-0,093
$\Omega$ , рад/с	1,234	1,234	0,385	0,397

Табл. 2.1.4. Продолжение

$\varphi_1$ , рад	$-4,090 \times 10^{-4}$	$-4,076 \times 10^{-4}$	-0,012	-0,014
$\varphi_2$ , рад	-1,841	-1,841	-0,011	-0,014
$\alpha_1$ , рад	$6,486 \times 10^{-5}$	$5,701 \times 10^{-5}$	0,012	0,014
$\alpha_2$ , рад	$1,110 \times 10^{-5}$	$7,481 \times 10^{-6}$	$-1,536 \times 10^{-3}$	$-9,075 \times 10^{-4}$
$\beta_1$ , рад	$-6,794 \times 10^{-5}$	$-6,027 \times 10^{-5}$	$-2,584 \times 10^{-3}$	$-6,202 \times 10^{-3}$
$\beta_2$ , рад	$-9,139 \times 10^{-6}$	$-5,760 \times 10^{-6}$	$1,668 \times 10^{-3}$	$6,987 \times 10^{-4}$

Как видно из табл. 2.1.4 основные параметры движения системы остаются практически неизменными при применении двух подходов к решению задачи. Различия по значениям параметров наблюдаются лишь при вычислении углов изгиба  $\alpha_1$  и  $\beta_1$ ,  $\alpha_2$  и  $\beta_2$ , хотя общий характер зависимостей  $\alpha_1(t)$ ,  $\beta_1(t)$ ,  $\alpha_2(t)$  и  $\beta_2(t)$  остается неизменным.

На рис. 2.1.38 и рис. 2.1.39 показаны линии изгиба всех стержней системы в подвижной системе координат  $S_{xy}$  в момент времени фиксации зажимов  $k = 0$  и  $k = 1$ , соответственно. Общий характер прогиба стержней при переходе от общей постановки к редуцированной сохраняется.

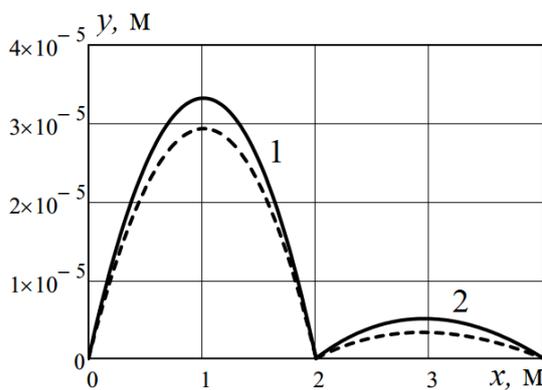


Рис. 2.1.38. Линии прогибов стержней  
1 – стержень  $k = 1$ ; 2 – стержень  $k = 2$

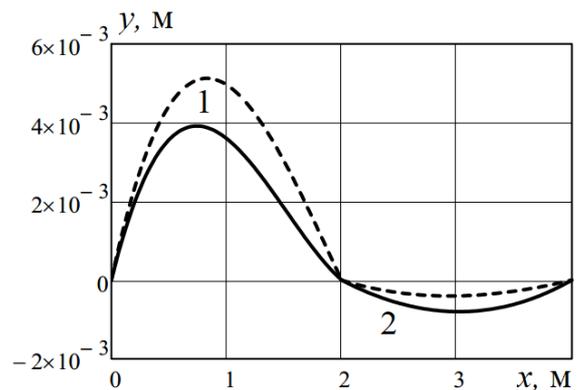


Рис. 2.1.39. Линии прогибов стержней  
1 – стержень  $k = 1$ ; 2 – стержень  $k = 2$

Следует отметить, что интегрирование уравнений движения численными методами с помощью стандартной программы AdamsBDF в пакете MathCad по редуцированной постановке идет в среднем 3 – 4 раза быстрее по времени работы алгоритма, чем по общей постановке. Это объясняется тем, что из системы убираются «быстрые» движения, которые существенно замедляют процесс интегрирования системы дифференциальных уравнений.

3) Развертывание системы за счет инерционных сил. Исходные данные:  $l_k = 2,0$  м,  $m_k = 1,357$  кг/м,  $EI_k = 7,037 \times 10^3$  Па·м<sup>4</sup>,  $\mu_k = 0,5$  кг ( $k = 1,2$ ). Жесткости и вязкости узловых шарниров отсутствуют ( $\kappa_k = 0$ ,  $\nu_k = 0$  для  $k = 0,1$ ). Внешние силы и моменты, действующие на систему:  $M_C(t) = 0$ ,  $X_C(t) = -70$  Н,  $Y_C(t) = 0$ . Интегрирование системы проводилось на интервале  $0 \leq t \leq 5$  с при числе разбиений отрезка интегрирования  $N = 5000$ .

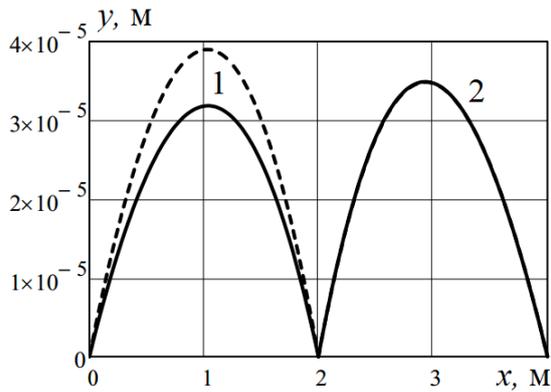
Последовательность и время срабатывания зажимов в общей постановке:  $k = 0$  при  $t = t_{1f} = 3,397$  с;  $k = 1$  при  $t = t_{2f} = 3,807$  с. Последовательность и время срабатывания зажимов в редуцированной постановке:  $k = 0$  при  $t = t_{1r} = 3,397$  с;  $k = 1$  при  $t = t_{2r} = 3,805$  с.

В табл. 2.1.5 приведены результаты решения задачи в двух постановках путем сравнения одноименных величин в моменты времени фиксации зажимов  $k = 0$  и  $k = 1$ . Как видно из табл. 2.1.5, как и в прошлом расчетном случае, основные параметры движения системы остаются практически неизменными при применении двух подходов к решению задачи. Различия по значениям параметров наблюдаются лишь при вычислении углов изгиба  $\alpha_1$  и  $\beta_1$ ,  $\alpha_2$  и  $\beta_2$ , хотя общий характер зависимостей  $\alpha_1(t)$ ,  $\beta_1(t)$ ,  $\alpha_2(t)$  и  $\beta_2(t)$  остается неизменным.

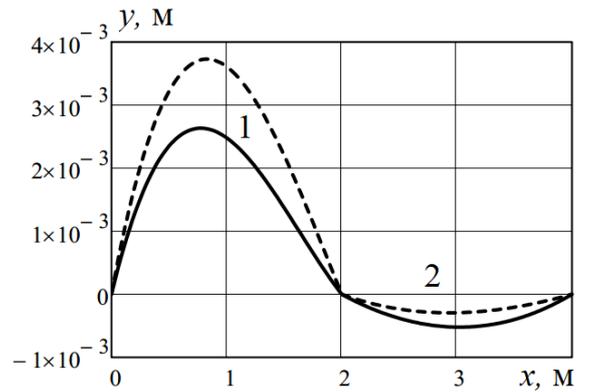
**Табл. 2.1.5.** Сравнение результатов при разворачивании системы за счет действия инерционных сил

	Фиксация $k = 0$		Фиксация $k = 1$	
	Общ. пост. $t_{1f} = 3,397$ с	Ред. пост. $t_{1r} = 3,807$ с	Общ. пост. $t_{2f} = 3,397$ с	Ред. пост. $t_{1r} = 3,805$ с
$u_{Cx}$ , м	-3,247	-3,247	-5,087	-5,071
$u_{Cy}$ , м	0,113	0,113	0,056	0,057
$\theta_C$ , рад	0,012	0,012	-0,238	-0,238
$v_{Cx}$ , м/с	-1,873	-1,873	-2,025	-2,026
$v_{Cy}$ , м/с	0,051	0,051	-0,467	-0,466
$\Omega$ , рад/с	-0,088	-0,088	-1,026	-1,042
$\varphi_1$ , рад	$-4,321 \times 10^{-4}$	$-4,306 \times 10^{-4}$	$-7,58 \times 10^{-3}$	$-9,939 \times 10^{-3}$
$\varphi_2$ , рад	-0,752	-0,752	$-7,679 \times 10^{-3}$	-0,010
$\alpha_1$ , рад	$5,891 \times 10^{-5}$	$7,323 \times 10^{-5}$	$7,57 \times 10^{-3}$	$9,927 \times 10^{-3}$
$\alpha_2$ , рад	$7,883 \times 10^{-5}$	$7,841 \times 10^{-5}$	$-9,905 \times 10^{-4}$	$-6,61 \times 10^{-4}$
$\beta_1$ , рад	$-6,829 \times 10^{-5}$	$-8,258 \times 10^{-5}$	$-2,354 \times 10^{-3}$	$-4,514 \times 10^{-3}$
$\beta_2$ , рад	$-6,014 \times 10^{-5}$	$-6,037 \times 10^{-5}$	$1,09 \times 10^{-3}$	$5,089 \times 10^{-4}$

На рис. 2.1.40 и рис. 2.1.41 показаны линии изгиба всех стержней системы в подвижной системе координат  $S_{xy}$  в момент времени фиксации зажимов  $k = 0$  и  $k = 1$ , соответственно. Общий характер прогиба стержней при переходе от общей постановки к редуцированной сохраняется, как и в предыдущем расчетном случае.



**Рис. 2.1.40.** Линии прогибов стержней  
1 – стержень  $k = 1$ ; 2 – стержень  $k = 2$



**Рис. 2.1.41.** Линии прогибов стержней  
1 – стержень  $k = 1$ ; 2 – стержень  $k = 2$

В этом расчетном случае, как и в прошлом, время интегрирования системы дифференциальных уравнений в редуцированной постановке меньше в 3 – 4 раза по сравнению с общей постановкой.

### 2.1.8. Редуцирование системы для «легких» стержней

Если масса каждого стержня  $m_k l_k$  мала по сравнению с узловой массой  $\mu_k$ , расположенной в шарнирном узле, то можно редуцировать данную систему следующим образом: привести массу каждого стержня к узловым массам (по половине массы стержня к каждому соседнему узлу) и рассмотреть уравнение движения системы невесомых стержней, имеющих изгибную жесткость и соединенных массивными узловыми шарнирами. В этом случае существенно упрощается аналитический вывод уравнений движения, так как в выражении (2.1.10) для вариации работы инерционных сил все слагаемые, стоящие под

знаком интегралов  $\int_0^{l_k} (...) ds$  можно опустить.

В качестве примера рассмотрим систему, в которой масса каждого стержня одинакова и остается постоянной, а узловые массы также одинаковы и варьируются, принимая значения от 2-х до 32-х масс стержней. Рассматривается решение данной задачи в точной и редуцированной постановке.

Исходные данные для расчета:  $n = 4$ ;  $l_k = 1,5$  м,  $m_k = 0,509$  кг/м,  $EI_k = 1,374 \times 10^4$  Па·м<sup>4</sup>,  $M_k = 0,763$  кг – масса стержня, ( $k = 1,2,3,4$ );  $\kappa_0 = 7000$  Н·м/рад,  $\nu_0 = 0,02$  Н·м·с/рад,  $\kappa_k = 5000$  Н·м/рад,  $\nu_k = 0,01$  Н·м·с/рад ( $k = 1,2,3$ );  $M_0 = 122,5$  кг,  $J_0 = 10$  кг·м<sup>2</sup>,  $x_0 = y_0 = 0,35$  м. Нагрузка на рассматриваемую систему:  $M_c(t) = 1000$  Н·м при  $0 \leq t \leq 1$  с,  $M_c(t) = 0$  при  $t > 1$  с;  $X_c(t) = 400$  Н при  $0 \leq t \leq 1$  с,  $X_c(t) = 0$  при  $t > 1$  с;  $Y_c(t) = 400$  Н при  $0 \leq t \leq 1$  с,  $Y_c(t) = 0$  при  $t > 1$  с. Отношение общей массы шарнирных грузов к общей массе стержней по условию равно 2, 4, 8, 16 и 32.

Сравнение результатов расчета проводилось по «медленным» движениям, в качестве которых рассматривались углы поворота стержней как твердого тела –  $\varphi_k$ , перемещения и углы поворота КА –  $u_{cx}$  и  $\theta_c$ . Результаты приведены в табл. 2.1.6 для момента времени  $t = 1$  с.

На рис. 2.1.42 и рис. 2.1.43 показаны график изменения угла поворота  $\varphi_1(t)$  для точного решения и решения для редуцированной системы при отношении массы шарнирных грузов к массе стержней равной, соответственно, 2 и 32. Видно, что на рис. 2.1.43 в масштабе графика, решения практически совпадают.

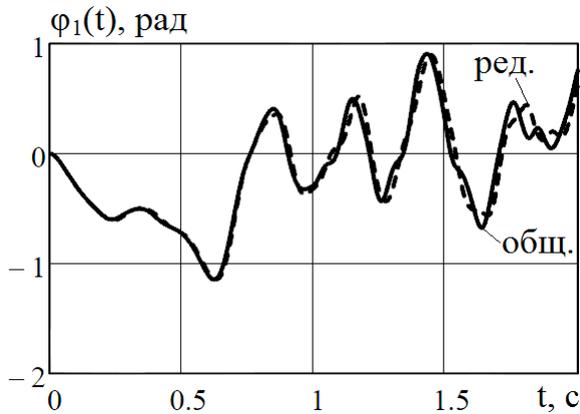
Анализируя результаты, представленные в табл. 2.1.6 и на рис. 2.1.42 и рис. 2.1.43, можно сделать вывод, что при малых массах стержней по сравнению с узловыми массами, можно пользоваться редуцированной системой, которая имеет по сравнению с общим случаем, более простые уравнения движения.

**Табл. 2.1.6.** Сравнение общего решения и решения для редуцированной системы

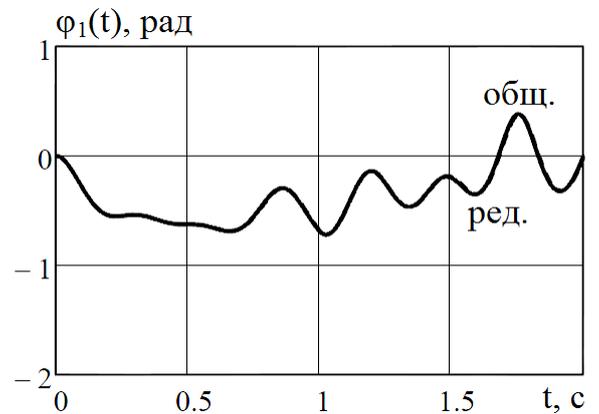
Отношение масс	Вид расчета	$\varphi_1$ , град	$\varphi_4$ , град	$u_{cx}$ , м	$\theta_c$ , рад
2	Общ.	-16,436	21,920	0,194	4,046
	Ред.	-18,122	17,160	0,192	4,040
4	Общ.	14,277	22,652	0,258	2,240
	Ред.	13,212	20,339	0,246	2,255

Табл. 2.1.6. Продолжение

8	Общ.	-60,441	-142,412	0,104	3,611
	Ред.	-60,982	-142,663	0,103	3,627
16	Общ.	-44,534	-180,568	0,354	2,849
	Ред.	-44,189	-180,659	0,355	2,844
32	Общ.	-39,314	-177,633	0,627	1,894
	Ред.	-38,930	-177,281	0,629	1,887



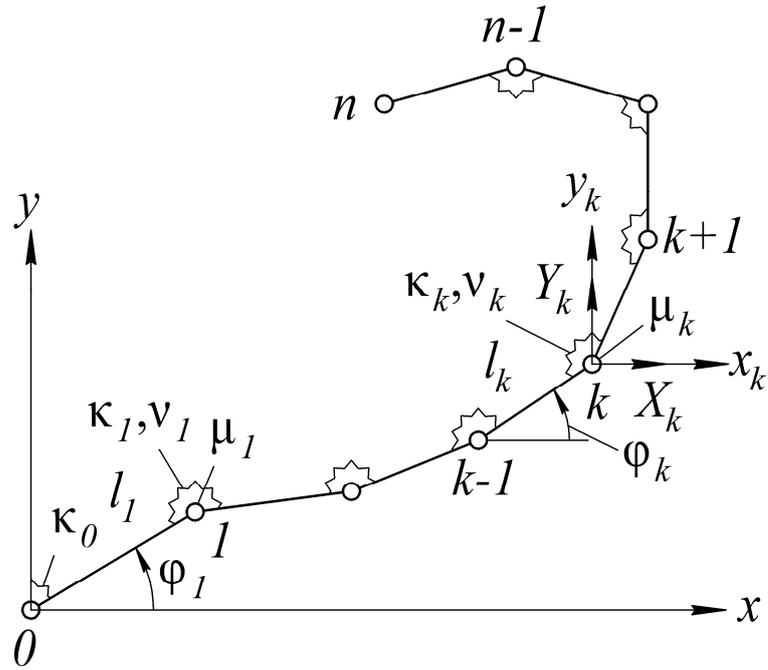
**Рис. 2.1.42.** Сравнение общего решения и решения для редуцированной системы при отношении масс 2



**Рис. 2.1.43.** Сравнение общего решения и решения для редуцированной системы при отношении масс 32

### 2.1.9. Редуцирование стержневой системы, описанной в неподвижной системе координат

В работе [14] была получена система нелинейных дифференциальных уравнений движения для плоской стержневой системы в неподвижной системе координат, рис. 2.1.44.



**Рис. 2.1.44.** Плоская стержневая система в неподвижной системе координат

Проведем редуцирование системы уравнений движения стержневой системы по квазистатическому изгибу, т.е. исключим «быстрые» движения, которые представляют собой изгиб каждого стержня. Эти уравнения движения, аналогично 2.1.12, записываются в матрично-алгебраическом виде:

$$\begin{aligned}
 & L_\varphi + [v_{kj}^{\varphi\varphi}] \dot{\varphi} + [v_{kj}^{\varphi\alpha}] \dot{\alpha} + [v_{kj}^{\varphi\beta}] \dot{\beta} + \\
 & \quad + [\kappa_{kj}^{\varphi\varphi}] \varphi + [\kappa_{kj}^{\varphi\alpha}] \alpha + [\kappa_{kj}^{\varphi\beta}] \beta = Q; \\
 & L_\alpha + [v_{kj}^{\alpha\varphi}] \dot{\varphi} + [v_{kj}^{\alpha\alpha}] \dot{\alpha} + [v_{kj}^{\alpha\beta}] \dot{\beta} + \\
 & \quad + [\kappa_{kj}^{\alpha\varphi}] \varphi + [\kappa_{kj}^{\alpha\alpha}] \alpha + [\kappa_{kj}^{\alpha\beta}] \beta + \tilde{K}(\alpha + \frac{1}{2}\beta) = 0; \\
 & L_\beta + [v_{kj}^{\beta\varphi}] \dot{\varphi} + [v_{kj}^{\beta\alpha}] \dot{\alpha} + [v_{kj}^{\beta\beta}] \dot{\beta} + \\
 & \quad + [\kappa_{kj}^{\beta\varphi}] \varphi + [\kappa_{kj}^{\beta\alpha}] \alpha + [\kappa_{kj}^{\beta\beta}] \beta + \tilde{K}(\frac{1}{2}\alpha + \beta) = 0,
 \end{aligned} \tag{2.1.21}$$

где

$\varphi = [\varphi_1 \ \varphi_2 \ \dots \ \varphi_n]^T$  – вектор углов поворота стержней как твердых тел;

$n$  – количество стержней в системе;

$\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n]^T$  и  $\boldsymbol{\beta} = [\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n]^T$  – векторы углов между касательной к изогнутой оси стержня и его недеформированной осью в левом и правом шарнирном узле, соответственно;

$[v_{kj}^{**}]$  и  $[k_{kj}^{**}]$  – матрицы коэффициентов демпфирования и жесткости, соответственно;

$\mathbf{Q}$  – вектор обобщенных сил;

$$\tilde{\mathbf{K}} = \text{diag}\left[\frac{4EI_k}{l_k}\right], \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Дифференциальные операторы  $L_\varphi$ ,  $L_\alpha$  и  $L_\beta$ , входящие в (2.1.21), представляются в виде:

$$\begin{aligned} L_\varphi = \{L_{\varphi_k}\}_n &= [m_{kj}^{\varphi\varphi}] \ddot{\boldsymbol{\phi}} + [m_{kj}^{\varphi\alpha}] \ddot{\boldsymbol{\alpha}} + [m_{kj}^{\varphi\beta}] \ddot{\boldsymbol{\beta}} + \\ &+ [g_{kj}^{\varphi\varphi}] \boldsymbol{\Lambda} \dot{\boldsymbol{\phi}} + 2[g_{kj}^{\varphi\alpha}] \boldsymbol{\Lambda} \dot{\boldsymbol{\alpha}} + 2[g_{kj}^{\varphi\beta}] \boldsymbol{\Lambda} \dot{\boldsymbol{\beta}}; \\ L_\alpha = \{L_{\alpha_k}\}_n &= [m_{kj}^{\alpha\varphi}] \ddot{\boldsymbol{\phi}} + [m_{kj}^{\alpha\alpha}] \ddot{\boldsymbol{\alpha}} + [m_{kj}^{\alpha\beta}] \ddot{\boldsymbol{\beta}} + [g_{kj}^{\alpha\varphi}] \boldsymbol{\Lambda} \dot{\boldsymbol{\phi}}; \\ L_\beta = \{L_{\beta_k}\}_n &= [m_{kj}^{\beta\varphi}] \ddot{\boldsymbol{\phi}} + [m_{kj}^{\beta\alpha}] \ddot{\boldsymbol{\alpha}} + [m_{kj}^{\beta\beta}] \ddot{\boldsymbol{\beta}} + [g_{kj}^{\beta\varphi}] \boldsymbol{\Lambda} \dot{\boldsymbol{\phi}}, \end{aligned} \quad (2.1.22)$$

где

$[m_{kj}^{**}]$  и  $[g_{kj}^{**}]$  – матрицы инерционных коэффициентов и нелинейных частей, соответственно;

$$\boldsymbol{\Lambda} = \text{diag}(\dot{\phi}_k), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Структура уравнений (2.1.21) с учетом (2.1.22) позволяет записать процедуру редуцирования по квазистатическому изгибу в общем виде и для любого количества стержней  $n$ . Для этого во втором и третьем уравнении (2.1.21) пренебрегаем членами, содержащими  $\ddot{\boldsymbol{\alpha}}$  и  $\ddot{\boldsymbol{\beta}}$ , а также  $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$  и  $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ :

$$\begin{aligned} [m_{kj}^{\alpha\varphi}] \ddot{\boldsymbol{\phi}} + [g_{kj}^{\alpha\varphi}] \boldsymbol{\Lambda} \dot{\boldsymbol{\phi}} + [v_{kj}^{\alpha\varphi}] \dot{\boldsymbol{\phi}} + [k_{kj}^{\alpha\varphi}] \boldsymbol{\phi} + [k_{kj}^{\alpha\alpha}] \boldsymbol{\alpha} + [k_{kj}^{\alpha\beta}] \boldsymbol{\beta} + \tilde{\mathbf{K}} \left( \boldsymbol{\alpha} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\beta} \right) &= 0; \\ [m_{kj}^{\beta\varphi}] \ddot{\boldsymbol{\phi}} + [g_{kj}^{\beta\varphi}] \boldsymbol{\Lambda} \dot{\boldsymbol{\phi}} + [v_{kj}^{\beta\varphi}] \dot{\boldsymbol{\phi}} + [k_{kj}^{\beta\varphi}] \boldsymbol{\phi} + [k_{kj}^{\beta\alpha}] \boldsymbol{\alpha} + [k_{kj}^{\beta\beta}] \boldsymbol{\beta} + \tilde{\mathbf{K}} \left( \frac{1}{2} \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (2.1.23)$$

Два уравнения (2.1.23) можно объединить в одно, введя вектор  $\boldsymbol{\gamma} = [\boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\beta}]^T$ :

$$[m_{kj}^{\gamma\varphi}] \ddot{\boldsymbol{\phi}} + ([g_{kj}^{\gamma\varphi}] \boldsymbol{\Lambda} + [v_{kj}^{\gamma\varphi}]) \dot{\boldsymbol{\phi}} + [k_{kj}^{\gamma\varphi}] \boldsymbol{\phi} + [b_{kj}^{\gamma\gamma}] \boldsymbol{\gamma} = 0, \quad (2.1.24)$$

где

$$[m_{kj}^{\gamma\varphi}] = \begin{bmatrix} [m_{kj}^{\alpha\varphi}] \\ [m_{kj}^{\beta\varphi}] \end{bmatrix}, \quad [g_{kj}^{\gamma\varphi}] = \begin{bmatrix} [g_{kj}^{\alpha\varphi}] \\ [g_{kj}^{\beta\varphi}] \end{bmatrix}, \quad [v_{kj}^{\gamma\varphi}] = \begin{bmatrix} [v_{kj}^{\alpha\varphi}] \\ [v_{kj}^{\beta\varphi}] \end{bmatrix}, \quad [k_{kj}^{\gamma\varphi}] = \begin{bmatrix} [k_{kj}^{\alpha\varphi}] \\ [k_{kj}^{\beta\varphi}] \end{bmatrix};$$

$$[b_{kj}^{\gamma\gamma}] = \begin{bmatrix} [k_{kj}^{\alpha\alpha}] + \tilde{\mathbf{K}} & [k_{kj}^{\alpha\beta}] + \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{K}} \\ [k_{kj}^{\beta\alpha}] + \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{K}} & [k_{kj}^{\beta\beta}] + \tilde{\mathbf{K}} \end{bmatrix}.$$

В первом уравнении (2.1.21) также пренебрегаем членами с  $\ddot{\mathbf{a}}$  и  $\ddot{\mathbf{\beta}}$ ,  $\dot{\mathbf{a}}$  и  $\dot{\mathbf{\beta}}$ :

$$[m_{kj}^{\varphi\varphi}] \ddot{\mathbf{\phi}} + [g_{kj}^{\varphi\varphi}] \Lambda \dot{\mathbf{\phi}} + [v_{kj}^{\varphi\varphi}] \dot{\mathbf{\phi}} + [k_{kj}^{\varphi\varphi}] \mathbf{\phi} + [[k_{kj}^{\varphi\alpha}] [k_{kj}^{\varphi\beta}]] \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{Q}. \quad (2.1.25)$$

С учетом симметрии матриц жесткости, преобразуем последний член уравнения (2.1.25):

$$[[k_{kj}^{\varphi\alpha}] [k_{kj}^{\varphi\beta}]] = [[k_{kj}^{\alpha\varphi}]^T [k_{kj}^{\beta\varphi}]^T] = [k_{kj}^{\gamma\varphi}]^T.$$

В результате этих преобразований получаем редуцированную систему из двух уравнений (2.1.24) и (2.1.25), не содержащих  $\ddot{\mathbf{a}}$  и  $\ddot{\mathbf{\beta}}$ , а также  $\dot{\mathbf{a}}$  и  $\dot{\mathbf{\beta}}$ , в которые вектора  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{\beta}$  входят линейно:

$$[m_{kj}^{\gamma\varphi}] \ddot{\mathbf{\phi}} + ([g_{kj}^{\gamma\varphi}] \Lambda + [v_{kj}^{\gamma\varphi}]) \dot{\mathbf{\phi}} + [k_{kj}^{\gamma\varphi}] \mathbf{\phi} + [b_{kj}^{\gamma\gamma}] \boldsymbol{\gamma} = 0; \quad (2.1.26)$$

$$[m_{kj}^{\varphi\varphi}] \ddot{\mathbf{\phi}} + [g_{kj}^{\varphi\varphi}] \Lambda \dot{\mathbf{\phi}} + [v_{kj}^{\varphi\varphi}] \dot{\mathbf{\phi}} + [k_{kj}^{\varphi\varphi}] \mathbf{\phi} + [k_{kj}^{\gamma\varphi}]^T \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{Q}.$$

Обращая постоянную матрицу  $[b_{kj}^{\gamma\gamma}]$ , из первого уравнения (2.1.26) находим вектор  $\boldsymbol{\gamma}$  и подставляем его во второе уравнение (2.1.26). В результате получим матричное уравнение для вектора  $\mathbf{\phi}$ :

$$([m_{kj}^{\varphi\varphi}] - [k_{kj}^{\gamma\varphi}]^T [b_{kj}^{\gamma\gamma}]^{-1} [m_{kj}^{\gamma\varphi}]) \ddot{\mathbf{\phi}} + ([g_{kj}^{\varphi\varphi}] - [k_{kj}^{\gamma\varphi}]^T [b_{kj}^{\gamma\gamma}]^{-1} [g_{kj}^{\gamma\varphi}]) \Lambda \dot{\mathbf{\phi}} +$$

$$+ ([v_{kj}^{\varphi\varphi}] - [k_{kj}^{\gamma\varphi}]^T [b_{kj}^{\gamma\gamma}]^{-1} [v_{kj}^{\gamma\varphi}]) \dot{\mathbf{\phi}} + ([k_{kj}^{\varphi\varphi}] - [k_{kj}^{\gamma\varphi}]^T [b_{kj}^{\gamma\gamma}]^{-1} [k_{kj}^{\gamma\varphi}]) \mathbf{\phi} = \mathbf{Q}. \quad (2.1.27)$$

Размерность уравнения (2.1.27) составляет  $n$ , в отличие от размерности  $3n$  системы (2.1.21). После решения уравнения (2.1.27), по найденным векторам  $\mathbf{\phi}$ ,  $\dot{\mathbf{\phi}}$  и  $\ddot{\mathbf{\phi}}$  из первого уравнения (2.1.26) находится вектор  $\boldsymbol{\gamma}$ .

## 2.2. Нелинейные колебания упругих панелей солнечных батарей космического аппарата

### 2.2.1. Постановка задачи

Рассматривается поворот по крену на конечный (большой) угол  $\varphi(t)$  симметричного относительно продольной плоскости КА с двумя одинаковыми плоскими панелями солнечных батарей (СБ), каждая из которых состоит из  $n$  недеформируемых секций, последовательно соединенных с КА и между собой упруговязкими шарнирами с коэффициентами жесткости  $\kappa_k$  и демпфирования  $\nu_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, n-1$ , рис. 2.2.1.

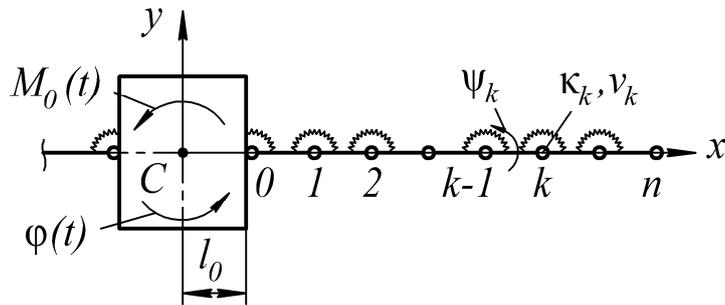


Рис. 2.2.1. КА с упругими панелями СБ

Колебания СБ в связанной с КА и вращающейся с угловой скоростью  $\Omega = \dot{\varphi}$  системе координат  $Cxy$  описываются относительными конечными углами поворота  $\psi_k$  секций СБ,  $k = 1, 2, \dots, n$ . Координаты  $k$ -го шарнирного узла СБ и любой точки  $x_{k-1} \leq x \leq x_k$   $k$ -ой секции в деформированном положении с локальной координатой  $\xi = x - x_{k-1}$  при  $x_0 = l_0$  будут равны:

$$\begin{aligned}
 x_k &= l_0 + \sum_{i=1}^k l_i c_i, & y_k &= \sum_{i=1}^k l_i s_i; \\
 x &= x_k - (l_k - \xi) c_k, & y &= y_k - (l_k - \xi) s_k; \\
 c_k &= \cos \psi_k, & s_k &= \sin \psi_k;
 \end{aligned}
 \tag{2.2.1}$$

Ускорения  $k$ -го шарнирного узла и любой точки  $k$ -ой секции СБ во вращающейся системе координат записываются в виде:

$$\begin{aligned} a_{k,x} &= -\dot{\Omega}y_k - \Omega^2 x_k - 2\Omega\dot{y}_k + \ddot{x}_k, & a_{k,y} &= \dot{\Omega}x_k - \Omega^2 y_k + 2\Omega\dot{x}_k + \ddot{y}_k; \\ a_x &= -\dot{\Omega}y - \Omega^2 x - 2\Omega\dot{y} + \ddot{x}, & a_y &= \dot{\Omega}x - \Omega^2 y + 2\Omega\dot{x} + \ddot{y}. \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

Отсюда с учетом (2.2.1) получим:

$$\begin{aligned} a_x &= a_{k,x} - (l_k - \xi)\alpha_{k,x}, & a_y &= a_{k,y} - (l_k - \xi)\alpha_{k,y}; \\ \alpha_{k,x} &= -\dot{\Omega}s_k - \Omega^2 c_k - 2\Omega c_k \dot{\psi}_k - \ddot{\psi}_k s_k - c_k \dot{\psi}_k^2; \\ \alpha_{k,y} &= \dot{\Omega}c_k - \Omega^2 s_k - 2\Omega s_k \dot{\psi}_k + \ddot{\psi}_k c_k - s_k \dot{\psi}_k^2; \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

Потенциальная энергия деформации пружин двух СБ и вариация работы управляющего момента  $M_0(t)$ , приложенного к КА, записываются в виде:

$$\Pi = 2 \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \kappa_k (\psi_{k+1} - \psi_k)^2, \quad \delta A_p = M_0 \delta\varphi, \quad \psi_0 = 0. \quad (2.2.4)$$

Вариация работы сил вязкого демпфирования в шарнирах:

$$\delta A_d = -2 \sum_{k=0}^{n-1} v_k (\dot{\psi}_{k+1} - \dot{\psi}_k) (\delta\psi_{k+1} - \delta\psi_k), \quad \dot{\psi}_0 = 0, \quad \delta\psi_0 = 0. \quad (2.2.5)$$

Вариация работы инерционных сил системы с обратным знаком:

$$-\delta A_m = \delta\varphi J_0 \ddot{\varphi} + 2 \sum_{k=1}^n [\mu_k (\delta x_k^* a_{k,x} + \delta y_k^* a_{k,y}) + \int_0^{l_k} m_k (\delta x^* a_x + \delta y^* a_y) d\xi], \quad (2.2.6)$$

где  $J_0$  – момент инерции КА;  $\mu_k$  – масса  $k$ -го узла с пружиной и демпфером;  $m_k$  – погонная масса  $k$ -ой секции СБ;  $\delta x^* = -y\delta\varphi + \delta x$ ,  $\delta y^* = x\delta\varphi + \delta y$ . Вариации перемещений  $k$ -го шарнирного узла секции СБ в (2.2.6) записываются аналогично с заменами  $x \rightarrow x_k$ ,  $y \rightarrow y_k$ ,  $\delta x \rightarrow \delta x_k$ ,  $\delta y \rightarrow \delta y_k$ :  $\delta x_k^* = -y_k \delta\varphi + \delta x_k$ ,  $\delta y_k^* = x_k \delta\varphi + \delta y_k$ .

С учетом (2.2.1) получим:

$$\delta x^* = \delta x_k^* + (l_k - \xi)(s_k \delta\varphi + s_k \delta\psi_k), \quad \delta y^* = \delta y_k^* - (l_k - \xi)(c_k \delta\varphi + c_k \delta\psi_k). \quad (2.2.7)$$

Для составления уравнений движения системы в обобщенных координатах  $\varphi$ ,  $\psi_1$ ,  $\psi_2$ , ...,  $\psi_n$  будем использовать принцип возможных перемещений:

$$\delta\Pi - \delta A_p - \delta A_d - \delta A_m = 0. \quad (2.2.8)$$

Вариация работы инерционных сил (2.2.6) с учетом (2.2.1) – (2.2.3), (2.2.7) и тождества для преобразования двойных сумм [14]

$$\sum_{k=1}^n p_k \sum_{j=1}^k r_j f_{kj} = \sum_{k=1}^n r_k \sum_{j=k}^n p_j f_{jk}$$

записывается в виде:

$$-\delta A_m = L_0 \delta \varphi + \sum_{k=1}^n L_k \delta \psi_k. \quad (2.2.9)$$

Здесь

$$\begin{aligned} L_0 &= J\ddot{\varphi} + \sum_{k=1}^n g_{0k} (2\dot{\varphi}\dot{\psi}_k + \dot{\psi}_k^2) + \sum_{k=1}^n m_{ok} \ddot{\psi}_k; \\ L_k &= m_{ok} \ddot{\varphi} - g_{0k} \dot{\varphi}^2 + \sum_{j=1}^n g_{kj} (2\dot{\varphi}\dot{\psi}_j + \dot{\psi}_j^2) + \sum_{j=1}^n m_{kj} \ddot{\psi}_j, \quad k = 1, 2, \dots, n; \\ J &= J_0 + 2 \sum_{k=1}^n \{ [\mu_k + m_k l_k] [(\sum_{j=1}^k l_j s_j)^2 + (l_0 + \sum_{j=1}^k l_j c_j)^2] - \\ &\quad - m_k l_k^2 [s_k \sum_{j=1}^k l_j s_j + c_k (l_0 + \sum_{j=1}^k l_j c_j)] + \frac{1}{3} m_k l_k^3 \}; \\ g_{0k} &= - \sum_{j=k}^n l_k l_j s_{kj} M_j - M_k (l_0 l_k s_k + \sum_{j=1}^k l_k l_j s_{kj}); \\ m_{ok} &= \sum_{j=k}^n l_k l_j c_{kj} M_j + M_k (-l_k^2 + l_0 l_k c_k + \sum_{j=1}^k l_k l_j c_{kj}) - \frac{1}{3} m_k l_k^3; \\ g_{kj} &= l_k l_j s_{kj} M_j \quad \text{при } k \leq j, \quad g_{kj} = l_k l_j s_{kj} M_k \quad \text{при } k > j; \\ m_{kj} &= l_k l_j c_{kj} M_j - \delta_{kj} \frac{1}{3} m_k l_k^3 \quad \text{при } k \leq j, \quad m_{kj} = l_k l_j c_{kj} M_k \quad \text{при } k > j; \\ M_j &= 2 \sum_{i=j}^n (\mu_i + m_i l_i) - m_j l_j; \\ \delta_{kj} &= 1 \quad \text{при } k = j, \quad \delta_{kj} = 0 \quad \text{при } k \neq j; \\ s_{kj} &= \sin(\psi_k - \psi_j), \quad c_{kj} = \cos(\psi_k - \psi_j). \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

Далее, подставляя в уравнение (2.2.8) выражения (2.2.4) – (2.2.6), (2.2.7) и учитывая, что коэффициенты при произвольных независимых вариациях  $\delta\varphi$ ,  $\delta\psi_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  должны равняться нулю, получаем систему нелинейных дифференциальных уравнений для неизвестных функций  $\varphi$ ,  $\psi_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ :

$$\begin{aligned}
L_0 &= M_0(t); \\
L_k + 2[-\kappa_{k-1}\psi_{k-1} + (\kappa_{k-1} + \kappa_k)\psi_k - \kappa_k\psi_{k+1} - \\
&\quad - v_{k-1}\dot{\psi}_{k-1} + (v_{k-1} + v_k)\dot{\psi}_k - v_k\dot{\psi}_{k+1}] = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n,
\end{aligned} \tag{2.2.11}$$

где  $\psi_0 = \dot{\psi}_0 = 0$ ,  $\kappa_n = v_n = 0$ .

### 2.2.2. Численное решение системы уравнений

Полученная система  $n+1$  нелинейных дифференциальных уравнений (2.2.11) с учетом (2.2.10) записывается в матричном виде

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} + \mathbf{G}\mathbf{z} = \mathbf{Q}(t) \tag{2.2.12}$$

для векторов  $\mathbf{q} = [\varphi \ \psi_1 \ \dots \ \psi_n]^T$ ,  $\mathbf{z} = [\dot{\varphi}^2 \ 2\dot{\varphi}\dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_1^2 \ \dots \ 2\dot{\varphi}\dot{\psi}_n + \dot{\psi}_n^2]^T$ ,  $\mathbf{Q}(t) = [M_0(t) \ 0 \ \dots \ 0]^T$ , где  $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{K}$  – симметричные матрицы инерции, демпфирования и жесткости,  $\mathbf{G}(\mathbf{q})$  – кососимметричная матрица сил вращательных движений КА и секций СБ. При малых относительных углах поворота секций СБ ( $|\psi_k| \ll 1$ ) уравнения (2.2.12) можно линеаризовать по этим углам, считая угол  $\varphi(t)$  конечным. Кроме того, если угловая скорость поворота  $\Omega$  мала, то можно пренебречь членами, содержащими  $\Omega^2$  и  $\Omega\dot{\psi}_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ . Тогда уравнения (2.2.12) при конечных углах поворота системы  $\varphi(t)$  будут линейными по всем переменным параметрам.

Для численного интегрирования матричное дифференциальное уравнение второго порядка (2.2.12) приводится к дифференциальному уравнению первого порядка; для этого наряду с вектором  $\mathbf{q}$  в качестве неизвестного рассматривается также вектор обобщенных скоростей  $\mathbf{p} = [\dot{\varphi} \ \dot{\psi}_1 \ \dots \ \dot{\psi}_n]^T$ . С учетом этого уравнение (2.2.12) с дополнительным соотношением  $\mathbf{E}\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{E}\mathbf{p} = 0$  записывается в виде матричного уравнения первого порядка

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{C}\mathbf{r} = \mathbf{R}(t); \tag{2.2.13}$$

$$\mathbf{r} = \begin{Bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & 0 \\ 0 & \mathbf{E} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{K} \\ -\mathbf{E} & 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} - \mathbf{G}(2\Omega\mathbf{p} + \mathbf{p}^2 - 2\Omega^2\mathbf{1}_0) \\ 0 \end{bmatrix},$$

где  $\mathbf{1}_0 = [1 \ 0 \ \dots \ 0]^T$ .

Уравнение (2.2.13) после умножения его слева на  $\mathbf{A}^{-1}$  при заданных начальных условиях и заданном моменте  $M_0(t)$  интегрируется численно в программном комплексе компьютерной алгебры PTC MathCAD 15.0 с помощью стандартной программы для систем дифференциальных уравнений AdamsBDF методом Адамса (для нежестких систем) и методом обратного дифференцирования (для жестких систем) с автоматическим выбором между ними, исходя из входных данных. Этот алгоритм является удобным для интегрирования систем уравнений типа (2.2.13).

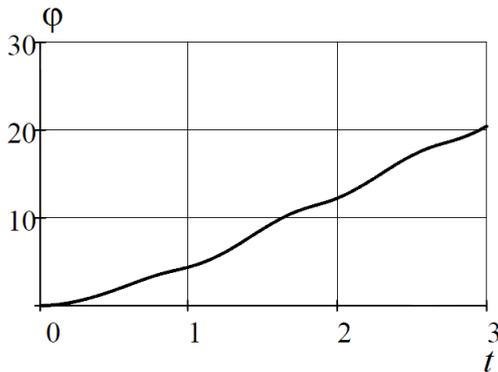
Для оценки сходимости результатов численного интегрирования рассматриваемой системы нелинейных дифференциальных уравнений с помощью этого алгоритма на различных продолжительных интервалах времени и при различных шагах разбиения интервала решалась тестовая задача для СБ с четырьмя секциями ( $n = 4$ ). Были проведены расчеты со сравнениями результатов: 1) интегрирование системы с варьируемым шагом на заданном интервале; 2) интегрирование системы с заданным постоянным шагом на различных больших интервалах. Полученные результаты показывают, что процесс интегрирования является стабильным и достаточно точным, в том числе и на больших интервалах времени.

### 2.2.3. Примеры расчета

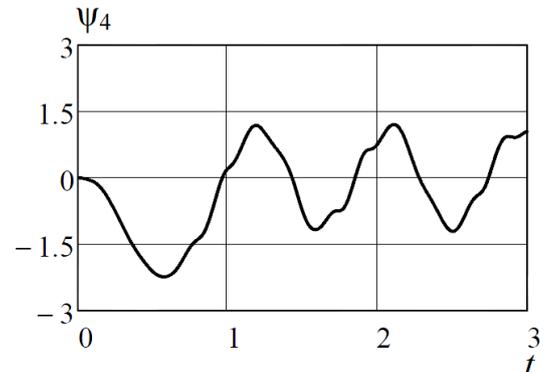
#### Реакция системы при действии на КА момента

Рассмотрена система со следующими параметрами:  $n = 4$ ,  $J_0 = 83,3 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ ,  $l_0 = 0,5 \text{ м}$ ,  $l_k = 0,75 \text{ м}$ ,  $m_k = 2,0 \text{ кг/м}$ ,  $\mu_k = 1,0 \text{ кг}$  ( $k = 1,2,3,4$ ),  $\kappa_0 = 450 \text{ Н}\cdot\text{м/рад}$ ,  $\nu_0 = 0,04 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с/рад}$ ,  $\kappa_k = 400 \text{ Н}\cdot\text{м/рад}$ ,  $\nu_k = 0,02 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с/рад}$  ( $k = 1,2,3$ ),  $M_0(t) = 1500 \text{ Н}\cdot\text{м}$  при  $0 \leq t \leq 1 \text{ с}$ ,  $M_0(t) = 0$  при  $t > 1 \text{ с}$ . При этих данных периоды колебаний по низшей и по высшей собственным формам малых упругих колебаний равны  $T_1 = 1,518 \text{ с}$  и  $T_4 = 0,085 \text{ с}$  соответственно. Интегрирование системы (2.2.13) проводилось на интервале  $0 \leq t \leq T = 3 \text{ с}$  с числом шагов интегрирования  $N = 6000$ . Начальные условия при  $t = 0$ :  $\varphi = 0$ ,  $\dot{\varphi} = 0$ ,  $\psi_k = 0$ ,  $\dot{\psi}_k = 0$  ( $k = 1,2,3,4$ ).

На рис. 2.2.2 и рис. 2.2.3 показаны графики изменения угла поворота КА  $\varphi(t)$  (рад) и угла поворота четвертой секции СБ  $\psi_4(t)$  (рад).



**Рис. 2.2.2.** Угол поворота КА



**Рис. 2.2.3.** Угол поворота четвертой секции СБ

На рис. 2.2.4 изображена деформированная форма правой СБ в подвижной системе координат  $S_{xy}$  (координаты – м) в моменты времени: 1 –  $t = 0 \text{ с}$ ; 2 –  $t = 0,5 \text{ с}$ ; 3 –  $t = 2 \text{ с}$ .

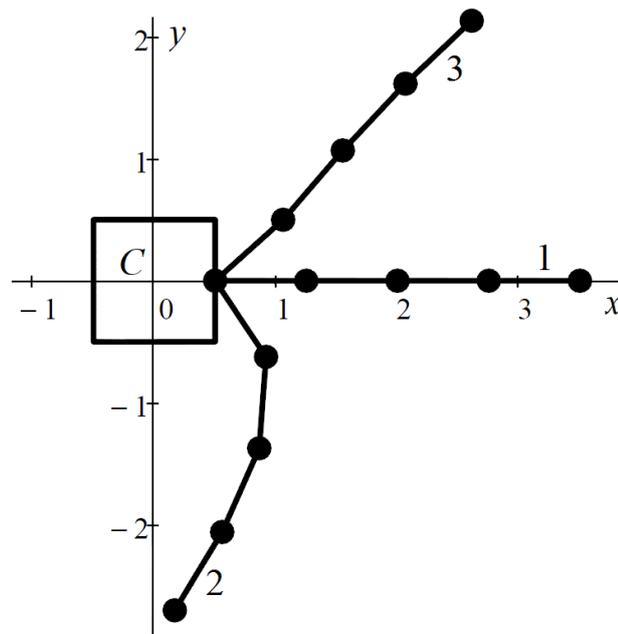


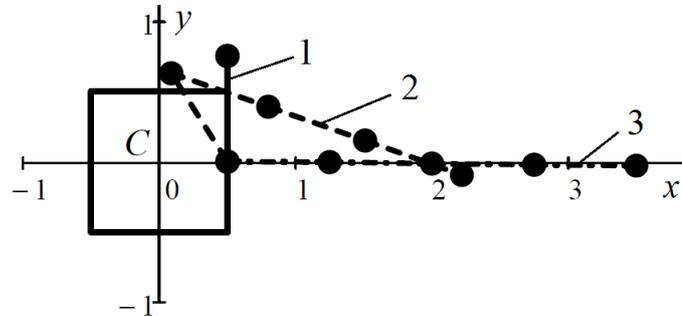
Рис. 2.2.4. Деформированная форма правой СБ

### Развертывание СБ

Рассмотрим задачу антисимметричного развертывания двух СБ; секции каждой СБ в начальном положении прижаты друг к другу и ориентированы в направлении оси  $Sy$ , а узловые пружины, при их наличии, предварительно напряжены. Начальные условия для правой СБ при  $t=0$ :  $\psi_1 = \psi_3 = \pi/2$ ,  $\psi_2 = \psi_4 = -\pi/2$ ,  $\dot{\psi}_k = 0$  при  $k=1,2,3,4$ . В раскрытом положении СБ должны быть параллельны оси  $Sx$  и  $\psi_k \approx 0$ ,  $k=1,2,3,4$ . Это осуществляется с помощью зажимов, которые имитируются увеличением жесткостей в шарнирах до значения  $10^7$  Н·м/рад, как только достигаются условия  $|\psi_k - \psi_{k-1}| < 0,01$  рад при  $k=1,2,3,4$ ,  $\psi_0 = 0$ .

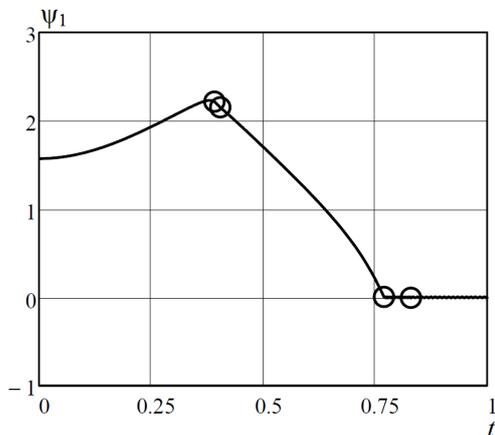
1) Освобождение связей предварительно напряженных узловых пружин. В первом способе параметры жесткости и вязкости узловых шарниров приняты равными  $\kappa_k = 10$  Н·м/рад и  $\nu_k = 0$  ( $k=0,1,2,3$ ). Интегрирование системы (2.2.13) при начальных условиях  $\varphi = 0$ ,  $\dot{\varphi} = 0$  проводилось на интервале  $0 \leq t \leq T = 1$  с с числом разбиений  $N = 2000$ . Последовательность и время срабатывания зажимов:

$k = 2$  – при  $t = 0,3915$  с,  $k = 3$  – при  $t = 0,4045$  с,  $k = 0$  – при  $t = 0,7700$  с,  $k = 1$  – при  $t = 0,8300$  с. На рис. 2.2.5 показаны положения системы в подвижной системе координат  $Cxy$  (координаты – м) в моменты времени  $t = 0$  (сплошная линия 1),  $t = 0,4045$  с (пунктирная линия 2),  $t = 0,8300$  с (штрихпунктирная линия 3).

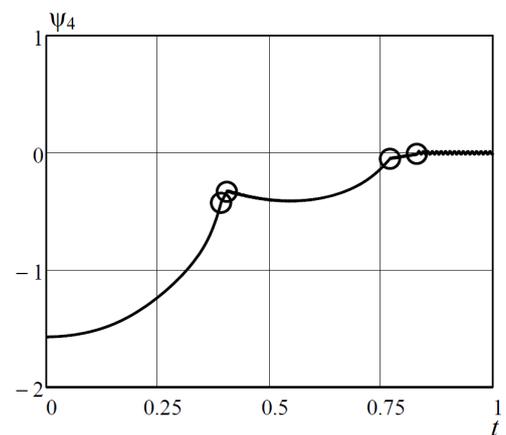


**Рис. 2.2.5.** Положения правой СБ в моменты включения зажимов

На рис. 2.2.6 и рис. 2.2.7 изображены графики изменения углов поворота в радианах первой  $\psi_1(t)$  и четвертой  $\psi_4(t)$  секции СБ, где кружочками (O) отмечены моменты включения зажимов в шарнирах  $k = 0,1,2,3$ .



**Рис. 2.2.6.** Угол поворота первой секции СБ

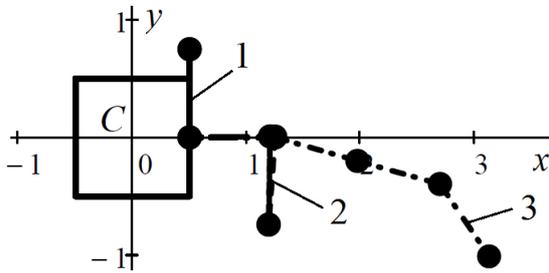


**Рис. 2.2.7.** Угол поворота четвертой секции СБ

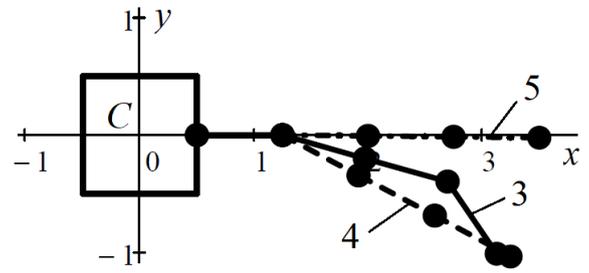
2) Раскрытие за счет центробежных сил предварительно раскрученного КА.

Во втором способе в момент времени параметры жесткости и вязкости узловых шарниров считались равными нулю ( $\kappa_k = 0$ ,  $\nu_k = 0$ ,  $k = 0,1,2,3$ ). Интегрирование

системы (2.2.13) при начальных условиях для КА  $\varphi = 0$ ,  $\dot{\varphi} = \Omega = \pi/2$  рад/с проводилось на интервале  $0 \leq t \leq T = 7$  с с числом разбиений  $N = 14000$ . Последовательность и время срабатывания зажимов:  $k = 0$  – при  $t = 1,2845$  с,  $k = 2$  – при  $t = 3,6140$  с,  $k = 3$  – при  $t = 3,7745$  с,  $k = 1$  – при  $t = 6,7040$  с. На рис. 2.2.8 и рис. 2.2.9 показаны положения системы в подвижной системе координат  $Cxy$  (координаты – м) в следующие моменты времени: на рис. 2.2.8 1 –  $t = 0$ , 2 –  $t = 1,2845$  с, 3 –  $t = 3,6140$  с; рис. 2.2.9 3 –  $t = 3,6140$  с, 4 –  $t = 3,7745$  с, 5 –  $t = 6,7040$  с.

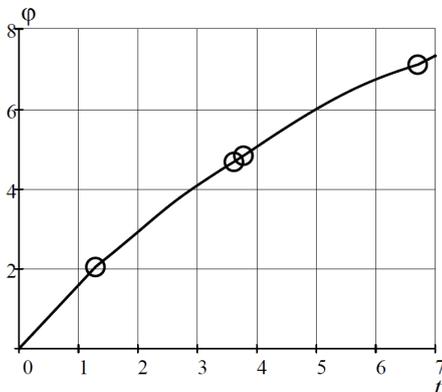


**Рис. 2.2.8.** Положения правой СБ в моменты включения зажимов

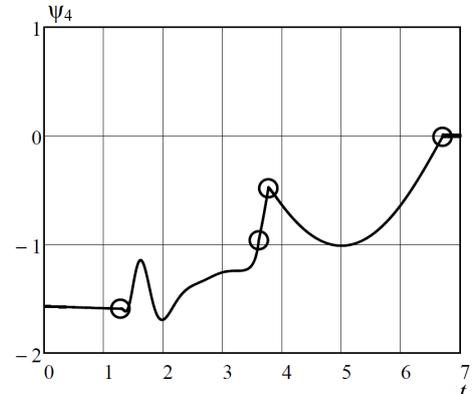


**Рис. 2.2.9.** Положения правой СБ в моменты включения зажимов

На рис. 2.2.10 и рис. 2.2.11 изображены графики изменения угла поворота КА  $\varphi(t)$  (рад) и угла поворота четвертой секции СБ  $\psi_4(t)$  (рад), где кружочками (O) показаны моменты включения зажимов в узлах  $k = 0, 1, 2, 3$ .



**Рис. 2.2.10.** Угол поворота первой секции СБ



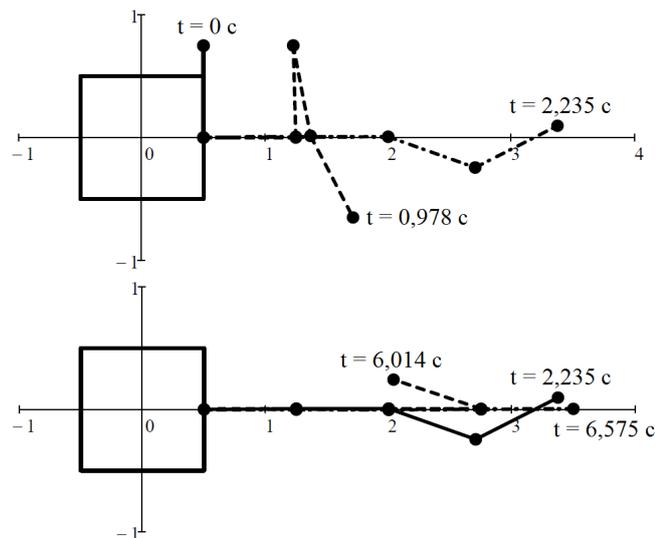
**Рис. 2.2.11.** Угол поворота четвертой секции СБ

Рассмотрим другой вариант перевода панелей СБ из транспортировочного положения в рабочее. По прежнему, в раскрытом положении СБ должны быть параллельны оси  $Cx$  и  $\psi_k \approx 0$ ,  $k = 1, 2, 3, 4$ . В отличие от предыдущих расчетных случаев имитация зажимов осуществляется увеличением жесткостей в них до значения  $10^7$  Н·м/рад, как только достигаются условия  $|\psi_k| < 0,001$  рад при  $k = 1, 2, 3, 4$ .

Исходные данные: присоединенные узловые массы  $\mu_k = 1$  кг, погонные массы панелей  $m_k = 2$  кг/м, размеры секций солнечных батарей  $l_k = 0,75$  м ( $k = 1, 2, 3, 4$ ); момент инерции космического аппарата  $J_0 = 83,3$  кг·м<sup>2</sup>; координаты узла  $k = 0$ :  $x_0 = 0,5$  м,  $y_0 = 0$ . Начальные условия для правой СБ при  $t = 0$ :  $\psi_1 = \psi_3 = \pi/2$ ,  $\psi_2 = \psi_4 = -\pi/2$ ,  $\dot{\psi}_k = 0$  при  $k = 1, 2, 3, 4$ .

1) Освобождение связей предварительно напряженных узловых пружин.

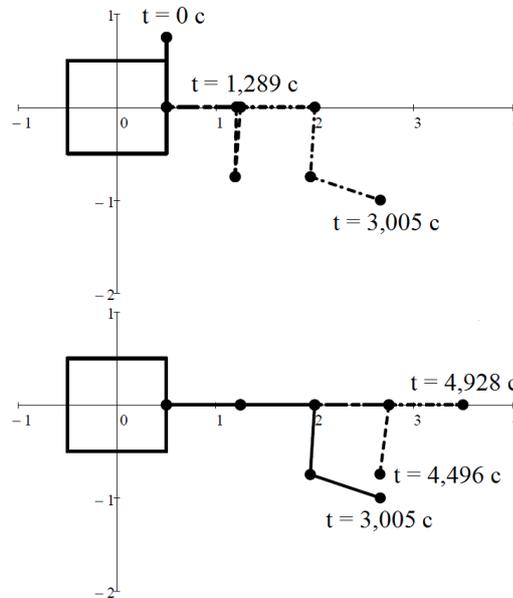
Примем следующие значения угловых жесткостей пружин:  $\kappa_0 = \kappa_3 = 5$  Н·м/рад;  $\kappa_1 = \kappa_2 = 4$  Н·м/рад. На рис. 2.2.12 показана форма аппарата в моменты времени фиксации панелей.



**Рис. 2.2.12.** Форма аппарата в моменты включения зажимов

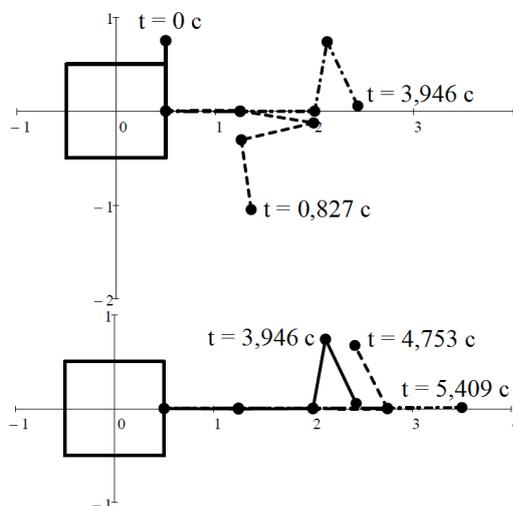
2) Раскрытие за счет центробежных сил предварительно раскрученного КА.

Начальная угловая скорость вращения по крену составляет  $\dot{\phi} = \Omega = \pi/2$  рад/с. На рис. 2.2.13 представлена форма аппарата с панелями в моменты времени фиксации при шарнирном соединении секций СБ, т.е. при  $\kappa_k = 0$ ,  $k = 0,1,2,3$ .



**Рис. 2.2.13.** Форма аппарата в моменты включения зажимов

На рис. 2.2.14 представлена форма аппарата с панелями в моменты времени фиксации при значении угловых жесткостей пружин  $\kappa_0 = \kappa_3 = 5$  Н·м/рад;  $\kappa_1 = \kappa_2 = 4$  Н·м/рад.



**Рис. 2.2.14.** Форма аппарата в моменты включения зажимов

### *2.3. Основные выводы и результаты по главе 2*

1. Рассмотрена нелинейная динамика плоской стержневой системы, состоящей из упругих нерастяжимых стержней, связанных между собой на концах упруговязкими узловыми шарнирами. Получена система дифференциальных уравнений с аналитическими выражениями для всех ее коэффициентов и выполнено преобразование системы для решения с помощью стандартной программы. Приведены обобщения математической модели, которые учитывают наличие троса между произвольными шарнирными узлами. Выполнена оценка сходимости при интегрировании полученной системы уравнений движения с точки зрения количества шагов на больших интервалах по времени.

2. Представлена упрощенная математическая модель задачи, которая получается путем редуцирования исходной системы уравнений по квазистатическому изгибу – из уравнений движения исключаются «быстрые» движения, которые представляют собой изгиб каждого стержня. Рассмотрены примеры расчета с необходимыми сравнениями между двумя подходами и оценками точности.

3. Рассмотрены примеры расчета реакции системы на произвольный возмущающий импульс и задачи развертывания стержневой системы из одного положения в другое за счет упругих, центробежных и инерционных сил.

4. Рассмотрены примеры расчета развертывания ферменной стержневой системы из начального (транспортировочного) положения в конечное с помощью сил упругости, инерционных и центробежных сил, а также сил натяжения тросов при заданном изменении их длины.

5. Показан способ редуцирования системы в случае относительно легких стержней по сравнению с узловыми шарнирными массами.

6. Получены нелинейные уравнения нестационарных антисимметричных колебаний в связанной с симметричным КА системе координат двух одинаковых панелей СБ с произвольным числом последовательно расположенных

недеформируемых секций, соединенных с КА и между собой упруговязкими шарнирами, при конечном повороте системы по крену.

7. Приведены несколько примеров с результатами расчетов и анализом точности решений: конечный поворот системы под действием управляющего момента, приложенного к КА; раскрытие панелей СБ из сложенного состояния в плоское под действием заданных нагрузок или при предварительном напряженном состоянии узловых пружин.

### 3. ДИНАМИКА РАЗВЕРТЫВАНИЯ И ФОРМООБРАЗОВАНИЕ КОСМИЧЕСКОЙ ЗОНТИЧНОЙ АНТЕННЫ

Рассматривается циклически симметричная зонтичная антенна, каркас которой состоит из гибких нерастяжимых радиальных стержней, связанных в узлах по параллелям растяжимыми тросами. В начальном транспортировочном положении многозвенные стержни уложены в упаковки, ориентированные в направлении оси системы. После устранения связей упаковок стержни разворачиваются в радиальных плоскостях под действием упругих пружин, соединяющих звенья, и фиксируются в прямолинейных положениях под заданным углом по отношению к оси, при котором все тросы, связывающие однотипные узлы стержней, принимают форму правильных многоугольников, оставаясь при этом ненапряженными. Далее под действием силы демпфирующего гидроцилиндра с предварительно сжатыми пружинами корневые части всех стержней медленно поворачиваются до упоров. В конечном положении радиальные стержни, соединенные в узлах натянутыми тросами, принимают изогнутую форму. Жесткости тросов на растяжение определяются так, чтобы радиальные и осевые координаты узлов изогнутых стержней совпадали с координатами точек заданной поверхности вращения.

Представлен алгоритм решения статической задачи формообразования пологой антенны после ее раскрытия. Деформированная форма антенны образуется за счет продольно-поперечного изгиба радиальных стержней и натяжения тросовых элементов под действием осевой силы, создаваемой гидроцилиндром. Задача расчета требуемых жесткостей элементов стержня и тросов решается в геометрически нелинейной постановке по методу конечных элементов в комбинации с методом последовательных приближений.

Рассмотрена нелинейная динамика раскрытия космической зонтичной антенны из транспортировочного сложенного положения в предварительное раскрытое положение перед ее формообразованием до заданной поверхности. Каркас антенны моделируется системой упругих нерастяжимых стержней, концы

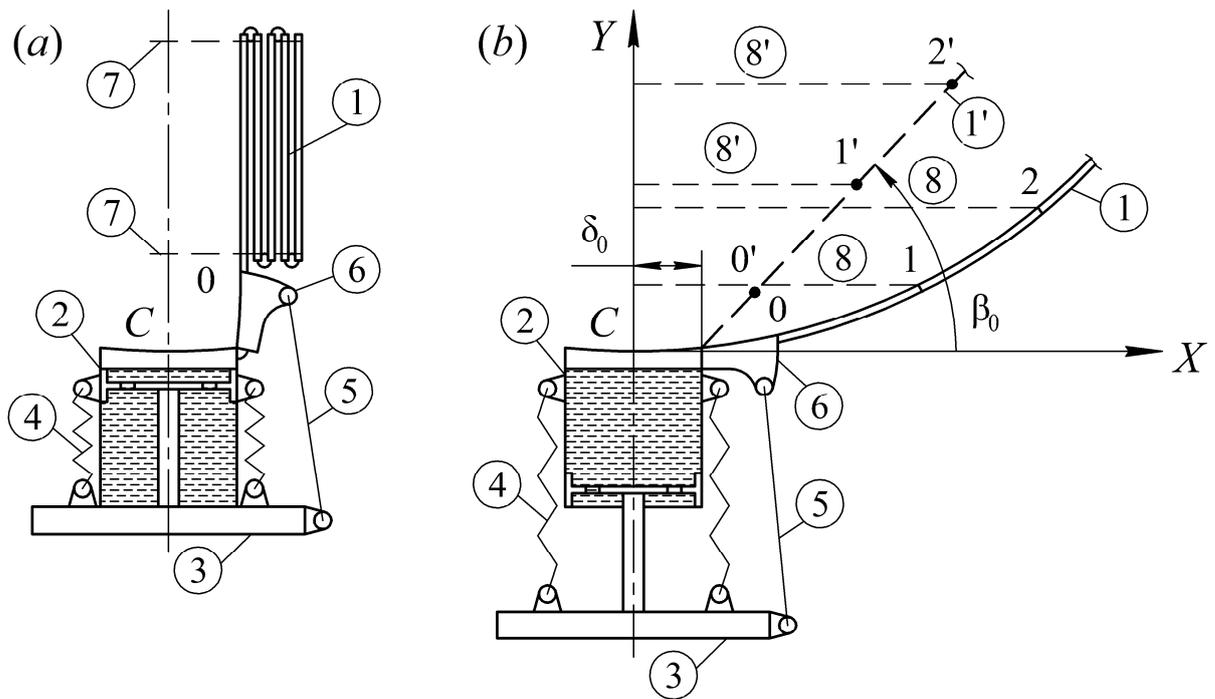
которых связаны между собой упруговязкими узловыми шарнирами, допускающими большие углы поворота. Движение системы описано в неподвижной системе координат. Уравнения нелинейной динамики получены с помощью принципа возможных перемещений. На базе полученных уравнений решена задача развертывания антенны из одного положения в другое с помощью предварительно напряженных пружин с упорами (зажимами) в узловых шарнирах.

Построена модель сильного квазистатического изгиба гибкого нерастяжимого стержня с учетом действующих на него в узлах неизвестных радиальных реакций натянутых тросов. Звенья стержня рассматриваются как последовательно соединенные между собой в узлах «консольные» элементы в местных системах координат, которые могут совершать большие перемещения и повороты. Изгиб каждого элемента описывается двумя заданными функциями, усадка элемента за счет изгиба учитывается в квадратичном приближении. Полученные нелинейные уравнения деформирования системы с учетом геометрических связей в узлах решаются по методу последовательных приближений. По полученным значениям реакций тросов затем при заданных координатах узлов определяются требуемые жесткости тросов на растяжение.

Основные результаты работы по данной главе опубликованы в [107 – 115].

### ***3.1. Описание предлагаемой конструкции антенны и формулировка задач развертывания и формообразования***

Схема предлагаемой циклически симметричной космической антенны зонтичного типа с  $n$  радиальными стержнями 1, каждый из которых состоит из  $m$  звеньев, показана на рис. 3.1.1 в сложенном состоянии (а) и в конечном деформированном состоянии (b).



**Рис. 3.1.1.** Схема антенны в сложенном состоянии (а) и в конечном состоянии (б)

Раскрытие и формообразование антенны происходит следующим образом. По сигналу устраняется удерживающая связь между корпусом демпфирующего гидроцилиндра 2 и штоком 3 и начинается медленное движение штока под действием предварительно сжатых пружин 4, за счет чего с помощью тросов 5 и рычагов 6 упаковки стержней 1 поворачиваются в радиальных плоскостях. При некотором отклонении упаковок разрываются связи 7 и многозвенные стержни с упругими шарнирными соединениями разворачиваются с фиксацией на упорах в прямолинейном положении. Считается, что в некотором заданном отклоненном положении (1', рис. 3.1.1, б) выпрямившихся стержней (при угле  $\beta_0$  между осью  $X$  и осью стержня) в силу выбора начальных длин участков тросов 8, соединяющих в плоскостях параллелей соответствующие узлы  $k = 1, 2, \dots, m$  стержней, эти участки становятся прямолинейными (без провисаний), но еще ненапрянутыми. При этом все тросы  $k = 1, 2, \dots, m$  будут иметь форму правильных  $n$ -угольников. Следует заметить, что после быстрого (динамического) раскрытия упаковок упруго соединенных звеньев, каждый из  $n$  стержней станет прямолинейным в отклоненном на угол  $\tilde{\beta}_n > \beta_0$  положении с некоторым

разбросом по времени и по углам  $\tilde{\beta}_n$ . Отклонения стержней при медленном (квазистатическом) ходе штока 3 демпфирующего гидроцилиндра будут выравниваться под действием соединяющих их тросов  $k = 1, 2, \dots, m$  поскольку во всех  $n$  элементах каждого из этих тросов усилия при циклической симметрии системы должны быть одинаковы.

При повороте рычагов 6 до упора тросы будут растягиваться, а стержни изгибаться в радиальных плоскостях под действием реакций тросов в узлах  $k = 1, 2, \dots, m$ . Конечная изогнутая форма 1 стержня с растянутыми тросами 8 показана на рис. 3.1.1, в. Полотно антенны соединяется со стержнями в отдельных точках, включая узлы; в сложенном состоянии оно находится в пространстве между упаковками стержней. При раскрытии и формообразовании составной конструкции антенны реакции полотна не учитываются.

Осесимметричная поверхность антенны имеет заданную форму  $Y = F(X)$ , рис. 3.1.1, в. При проектировании и расчете составной циклической симметричной конструкции антенны требуется, чтобы координаты узловых точек  $k = 1, 2, \dots, m$  изогнутых радиальных стержней совпадали с соответствующими координатами поверхности антенны  $X_k, Y_k = F(X_k), k = 0, 1, \dots, m$ . Центральный участок  $C - 0$  после поворота рычага 6 до упора считается абсолютно жестким и профилированным по форме  $Y = F(X)$ ;  $X = Y = 0$  в точке  $C$  и  $X_0 = a_0, Y_0 = F(a_0), \theta_0 = \arctg(F'(a_0))$  в точке  $0$ . Упругая часть стержня состоит из  $m$  звеньев примерно одинаковой длины  $a_k, k = 1, 2, \dots, m$  (для удобства складывания их в упаковки). При заданных значениях  $a_k$  координаты узлов изогнутого нерастяжимого стержня  $X_k, k = 1, 2, \dots, m$  вычисляются последовательно из соотношений

$$a_k = \int_{X_{k-1}}^{X_k} \sqrt{1 + F'^2} dX, \quad k = 1, 2, \dots, m$$

с использованием метода итераций. Изгибная жесткость каждого звена  $EI_k$  в пределах его длины  $a_k$  считается постоянной.

### 3.2. Развертывание многозвенных радиальных стержней

#### 3.2.1. Постановка задачи

Рассмотрим в неподвижной системе координат  $CXY$  плоскую стержневую систему, состоящую из упругих произвольно ориентированных нерастяжимых стержней, концы которых связаны между собой упруговязкими узловыми шарнирами, допускающими большие углы поворота (рис. 3.2.1). Погонные массы  $m_k$  и изгибные жесткости  $EI_k$  стержней в пределах их длин  $a_k$  ( $k=1,2,\dots,p$ ) приняты постоянными. В шарнирных узлах  $k=1,2,\dots,p$  присутствуют сосредоточенные массы  $\mu_k$ , а в узлах  $k=1,2,\dots,p-1$  – пружины с угловой жесткостью  $\kappa_k$  и вязким демпфированием  $\nu_k$ . Данная система жестко присоединена в узле 0 к абсолютно жесткому стержню с длиной  $a_0$  и моментом инерции  $J_0$ , другой конец которого совмещен упруговязким шарниром с жесткостью  $\kappa_0$  и коэффициентом демпфирования  $\nu_0$  с началом координат – точкой  $C$  ( $\delta_0 = 0$ ). Таким образом, этот жесткий элемент  $a_0$ , который в данной постановке задачи считается прямолинейным (6, рис. 3.1.1), и первый упругий стержень  $a_1$  образуют совместный составной конечный элемент.

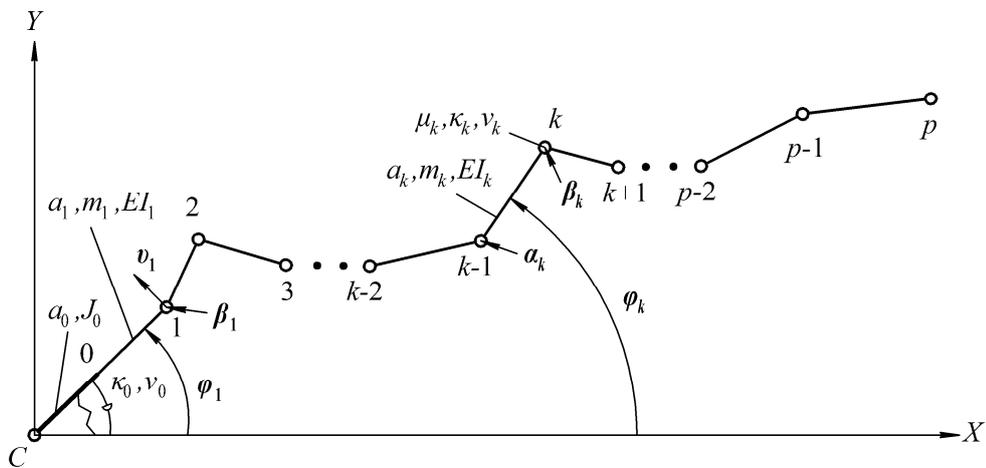


Рис. 3.2.1. Плоская стержневая система

Перемещения составного стержня относительно неподвижной системы координат  $CXY$  обусловлены его поворотом как твердого тела на угол  $\varphi_1(t)$ , отсчитываемый от оси  $CX$ , т.е. поворотом прямой, проходящей через узлы  $C$  и  $1$ , и изгибом относительно этой прямой. Изгибное (поперечное) перемещение  $\psi_1(\xi, t)$  точки  $\xi$  ( $0 \leq \xi \leq a_1$ ) упругого стержня 1 как элемента будем считать малым и упругим и представим в виде (рис. 3.2.2):

$$\psi_1(\xi, t) = v_1(t)\rho_1(\xi) + \beta_1(t)\eta_1(\xi), \quad (3.2.1)$$

где  $v_1(t)$  – поперечное перемещение конца стержня 1;  $\beta_1(t)$  – угол между касательной к изогнутой оси стержня и его недеформированной осью на конце;  $\rho_1(\xi)$  и  $\eta_1(\xi)$  – аппроксимационные координатные функции, которые находятся из условий консольного закрепления стержня 1 к жесткому элементу 0:

$$\psi_1^{IV}(\xi, t) = 0; \quad \psi_1(0, t) = 0; \quad \psi_1'(0, t) = 0; \quad \psi_1(a_1, t) = v_1(t); \quad \psi_1'(a_1, t) = \beta_1(t).$$

Откуда находится вид аппроксимационных функций:

$$\rho_1(\xi) = \frac{3\xi^2}{a_1^2} - \frac{2\xi^3}{a_1^3}, \quad \eta_1(\xi) = \frac{\xi^3}{a_1^2} - \frac{\xi^2}{a_1}. \quad (3.2.2)$$

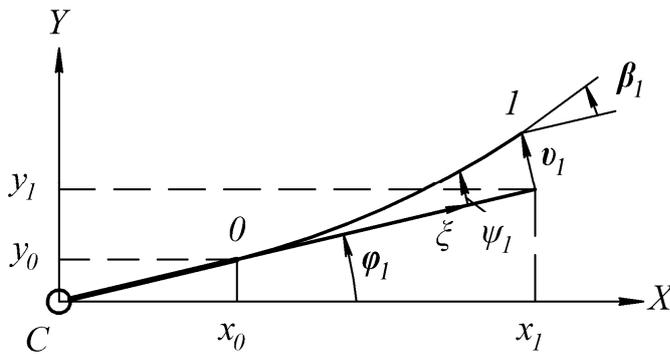


Рис. 3.2.2. Составной конечный элемент

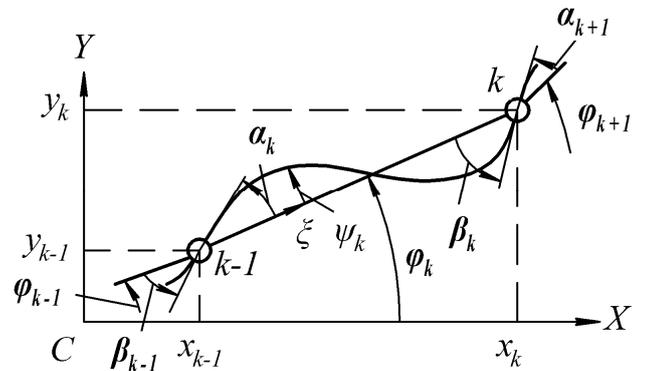


Рис. 3.2.3. Конечный элемент в виде упругого стержня

Перемещения  $k$ -го упругого стержня относительно неподвижной системы координат  $CXY$  также обусловлены его поворотом как твердого тела на угол  $\varphi_k(t)$ , т.е. поворотом прямой, проходящей через узлы  $k-1$  и  $k$ , и изгибом

относительно этой прямой. Изгибное перемещение  $\psi_k(\xi, t)$  точки  $\xi$  ( $0 \leq \xi \leq a_k$ ) записывается в виде (рис. 3.2.3):

$$\psi_k(\xi, t) = \alpha_k(t)\rho_k(\xi) + \beta_k(t)\eta_k(\xi), \quad (3.2.3)$$

где  $\alpha_k(t)$  и  $\beta_k(t)$  – углы между касательной к изогнутой оси стержня и его недеформированной осью;  $\rho_k(\xi)$  и  $\eta_k(\xi)$  – аппроксимационные координатные функции, задаваемые в виде [9]:

$$\rho_k(\xi) = \frac{1}{a_k^2} \xi(a_k - \xi)^2, \quad \eta_k(\xi) = -\frac{1}{a_k^2} \xi^2(a_k - \xi). \quad (3.2.4)$$

Известные координаты узла 1 соединения составного элемента и упругих стержней (рис. 3.2.1)

$$x_1 = (a_0 + a_1) \cos \varphi_1 - v_1 \sin \varphi_1, \quad y_1 = (a_0 + a_1) \sin \varphi_1 + v_1 \cos \varphi_1 \quad (3.2.5)$$

позволяют записать координаты  $k$ -го узла деформированной стержневой системы:

$$x_k = x_1 + \sum_{j=2}^k a_j \cos \varphi_j, \quad y_k = y_1 + \sum_{j=2}^k a_j \sin \varphi_j. \quad (3.2.6)$$

Координаты точки  $\xi$   $k$ -го стержня с учетом его изгиба и выражений (3.2.3) и (3.2.4) имеют вид:

$$x = x_k - (a_k - \xi) \cos \varphi_k - \psi_k \sin \varphi_k, \quad y = y_k - (a_k - \xi) \sin \varphi_k + \psi_k \cos \varphi_k. \quad (3.2.7)$$

Разность углов поворота левого ( $k+1$ )-го стержня и правого края  $k$ -го стержня в шарнире  $k$  определяется выражением

$$\Delta \varphi_k = (\varphi_{k+1} + \alpha_{k+1}) - (\varphi_k + \beta_k). \quad (3.2.8)$$

### 3.2.2. Уравнения движения

Уравнения движения для составного элемента получим на основании уравнений Лагранжа 2-го рода, записанных для обобщенных координат  $\varphi_1(t)$ ,  $v_1(t)$  и  $\beta_1(t)$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_1}{\partial \dot{\phi}_1} \right) - \frac{\partial T_1}{\partial \phi_1} + \frac{\partial \Pi_1}{\partial \phi_1} = 0, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_1}{\partial \dot{v}_1} \right) - \frac{\partial T_1}{\partial v_1} + \frac{\partial \Pi_1}{\partial v_1} = 0; \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_1}{\partial \dot{\beta}_1} \right) - \frac{\partial T_1}{\partial \beta_1} + \frac{\partial \Pi_1}{\partial \beta_1} = 0. \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

Кинетическая  $T_1$  и потенциальная  $\Pi_1$  энергия с учетом (3.2.1) и (3.2.2) записывается в виде:

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2} J_0 \dot{\phi}_1^2 + \frac{1}{2} \int_0^{a_1} m_1 [\dot{\phi}_1(\xi + a_0) + \dot{\psi}_1]^2 d\xi; \\ \Pi_1 &= \frac{1}{2} \int_0^{a_1} EI_1 \psi_1''^2 d\xi + \frac{1}{2} \kappa_0 (\phi_1 - \theta_0^*)^2, \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

где штрихом обозначена производная по координате, точкой – по времени. Вариация работы силы демпфирования в точке С:

$$-\delta A_{d1} = v_0 \dot{\phi}_1 \delta \phi_1. \quad (3.2.11)$$

Отдельно с учетом (3.2.5) запишем вариацию работы инерционных сил для учета присоединенной массы  $\mu_1$ :

$$-\delta A_{m1} = \mu_1 (\ddot{x}_1 \delta x_1 + \ddot{y}_1 \delta y_1). \quad (3.2.12)$$

Выражения  $-\delta A_{d1}$  и  $-\delta A_{m1}$  при составлении уравнений движения должны быть учтены отдельно.

Уравнения движения присоединенной стержневой системы получим на основании принципа возможных перемещений, записанного для обобщенных координат  $\phi_k(t)$ ,  $\alpha_k(t)$  и  $\beta_k(t)$ ,  $k = 2, 3, \dots, p$ .

$$\delta \Pi_k - \delta A_{dk} - \delta A_{mk} = 0. \quad (3.2.13)$$

Потенциальная энергия узловых пружин и изгиба стержней  $\Pi_k$  с учетом (3.2.8) определяется как

$$\Pi_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{p-1} \kappa_k (\Delta \phi_k)^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^p \frac{4EI_k}{a_k} (\alpha_k^2 + \beta_k^2 + \alpha_k \beta_k). \quad (3.2.14)$$

Вариация работы сил демпфирования упруго-вязких шарнирных элементов представляется по форме, аналогичной записи вариации потенциальной энергии (3.2.14)  $\delta \Pi_k$ :

$$-\delta A_{dk} = \sum_{k=1}^{p-1} v_k (\dot{\varphi}_{k+1} - \dot{\varphi}_k + \dot{\alpha}_{k+1} - \dot{\beta}_k) (\delta\varphi_{k+1} - \delta\varphi_k + \delta\alpha_{k+1} - \delta\beta_k). \quad (3.2.15)$$

Вариация работы инерционных сил распределенных масс стержней и сосредоточенных масс в узлах с учетом выражений (3.2.16) и (3.2.7) записывается в виде:

$$-\delta A_{mk} = \sum_{k=2}^p [\mu_k (\ddot{x}_k \delta x_k + \ddot{y}_k \delta y_k) + m_k \int_0^{a_k} (\ddot{x} \delta x + \ddot{y} \delta y) d\xi]. \quad (3.2.16)$$

При составлении уравнений использовались правила перестановки пределов суммирования и слагаемых суммирования для одинарных, двойных и тройных сумм:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} a_k \delta b_k &= \sum_{k=2}^n a_{k-1} \delta b_{k-1}, \quad \sum_{k=2}^n a_k \sum_{j=2}^k b_j = \sum_{k=2}^n b_k \sum_{j=k}^n a_j; \\ \sum_{k=2}^n p_k \sum_{j=2}^k \sum_{i=2}^k r_j f_{ij} &= \sum_{k=2}^n r_k \sum_{j=k}^n \sum_{i=2}^j p_j f_{ik}; \\ \sum_{j=k}^n p_j \sum_{i=2}^j r_i &= \sum_{j=2}^n r_j \sum_{i=j}^n p_i - \sum_{j=2}^k r_j \sum_{i=j}^k p_i + p_k \sum_{j=2}^k r_j; \\ \sum_{j=k}^n p_j \sum_{i=2}^j r_i f_{ik} &= \sum_{j=2}^n r_j \left\{ \begin{array}{l} f_{jk} \sum_{i=k}^n p_i, \quad j \leq k \\ f_{jk} \sum_{i=j}^n p_i, \quad j > k \end{array} \right\}. \end{aligned} \quad (3.2.17)$$

Подстановка выражений (3.2.10) в уравнения (3.2.9), учет (3.2.11) и (3.2.12) и подстановка (3.2.14) – (3.2.16) в уравнения (3.2.13) и применение правил (3.2.17) позволяет записать систему нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, описывающую движение данной механической системы, в алгебраическом виде:

$$\begin{aligned} L_{\varphi_1} + (\kappa_1) \varphi_1 + (\kappa_1) \beta_1 + (-\kappa_1) \varphi_2 + (-\kappa_1) \alpha_2 + \\ + (v_1) \dot{\varphi}_1 + (v_1) \dot{\beta}_1 + (-v_1) \dot{\varphi}_2 + (-v_1) \dot{\alpha}_2 = \kappa_0 \theta_0^*; \\ L_{v_1} + \left( \frac{12EI_1}{a_1^3} \right) v_1 + \left( -\frac{6EI_1}{a_1^2} \right) \beta_1 = 0; \end{aligned} \quad (3.2.18)$$

$$\begin{aligned}
& L_{\beta 1} + (\kappa_1)\varphi_1 + \left(-\frac{6EI_1}{a_1^2}\right)v_1 + \left(\frac{4EI_1}{a_1} + \kappa_1\right)\beta_1 + (-\kappa_1)\varphi_2 + (-\kappa_1)\alpha_2 + \\
& + (v_1)\dot{\varphi}_1 + (v_1)\dot{\beta}_1 + (-v_1)\dot{\varphi}_2 + (-v_1)\dot{\alpha}_2 = 0; \\
& L_{\varphi k} + (-\kappa_{k-1})\varphi_{k-1} + (\kappa_{k-1} + \kappa_k)\varphi_k + (-\kappa_k)\varphi_{k+1} + \\
& + (\kappa_{k-1})\alpha_k + (-\kappa_k)\alpha_{k+1} + (-\kappa_{k-1})\beta_{k-1} + (\kappa_k)\beta_k + \\
& + (-v_{k-1})\dot{\varphi}_{k-1} + (v_{k-1} + v_k)\dot{\varphi}_k + (-v_k)\dot{\varphi}_{k+1} + \\
& + (v_{k-1})\dot{\alpha}_k + (-v_k)\dot{\alpha}_{k+1} + (-v_{k-1})\dot{\beta}_{k-1} + (v_k)\dot{\beta}_k = 0;
\end{aligned} \tag{3.2.18}$$

$$\begin{aligned}
& L_{\alpha k} + (-\kappa_{k-1})\varphi_{k-1} + (\kappa_{k-1})\varphi_k + \left(\kappa_{k-1} + \frac{4EI_k}{a_k}\right)\alpha_k + (-\kappa_{k-1})\beta_{k-1} + \left(\frac{2EI_k}{a_k}\right)\beta_k + \\
& + (-v_{k-1})\dot{\varphi}_{k-1} + (v_{k-1})\dot{\varphi}_k + (v_{k-1})\dot{\alpha}_k + (-v_{k-1})\dot{\beta}_{k-1} = 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& L_{\beta k} + (\kappa_k)\varphi_k + (-\kappa_k)\varphi_{k+1} + \left(\frac{2EI_k}{a_k}\right)\alpha_k + (-\kappa_k)\alpha_{k+1} + \left(\kappa_k + \frac{4EI_k}{a_k}\right)\beta_k + \\
& + (v_k)\dot{\varphi}_k + (-v_k)\dot{\varphi}_{k+1} + (-v_k)\dot{\alpha}_{k+1} + (v_k)\dot{\beta}_k = 0;
\end{aligned}$$

$$k = 2, 3, \dots, p; \quad \varphi_{p+1} = \dot{\varphi}_{p+1} \equiv 0; \quad \alpha_{p+1} = \dot{\alpha}_{p+1} \equiv 0; \quad \kappa_p \equiv 0; \quad v_p \equiv 0.$$

В уравнениях (3.2.18)  $L_{\varphi 1}$ ,  $L_{v 1}$ ,  $L_{\beta 1}$ ,  $L_{\varphi k}$ ,  $L_{\alpha k}$ ,  $L_{\beta k}$  – нелинейные дифференциальные операторы, которые записываются в виде:

$$\begin{aligned}
L_{\varphi 1} = & m_{\varphi\varphi}^{11}\ddot{\varphi}_1 + m_{\varphi v}^{11}\ddot{v}_1 + m_{\varphi\beta}^{11}\ddot{\beta}_1 + \sum_{k=2}^p m_{\varphi\varphi}^{1k}\ddot{\varphi}_k + \sum_{k=2}^p m_{\varphi\alpha}^{1k}\ddot{\alpha}_k + \sum_{k=2}^p m_{\varphi\beta}^{1k}\ddot{\beta}_k + \\
& + g_{\varphi\varphi}^{11}\dot{\varphi}_1^2 + g_{\varphi v}^{11}2\dot{\varphi}_1\dot{v}_1 + g_{\varphi\beta}^{11}2\dot{\varphi}_1\dot{\beta}_1 + \sum_{k=2}^p g_{\varphi\varphi}^{1k}\dot{\varphi}_k^2 + \sum_{k=2}^p g_{\varphi\alpha}^{1k}2\dot{\varphi}_k\dot{\alpha}_k + \sum_{k=2}^p g_{\varphi\beta}^{1k}2\dot{\varphi}_k\dot{\beta}_k;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_{v 1} = & m_{v\varphi}^{11}\ddot{\varphi}_1 + m_{vv}^{11}\ddot{v}_1 + m_{v\beta}^{11}\ddot{\beta}_1 + \sum_{k=2}^p m_{v\varphi}^{1k}\ddot{\varphi}_k + \sum_{k=2}^p m_{v\alpha}^{1k}\ddot{\alpha}_k + \sum_{k=2}^p m_{v\beta}^{1k}\ddot{\beta}_k + \\
& + g_{v\varphi}^{11}\dot{\varphi}_1^2 + g_{vv}^{11}2\dot{v}_1\dot{v}_1 + g_{v\beta}^{11}2\dot{v}_1\dot{\beta}_1 + \sum_{k=2}^p g_{v\varphi}^{1k}\dot{\varphi}_k^2 + \sum_{k=2}^p g_{v\alpha}^{1k}2\dot{v}_k\dot{\alpha}_k + \sum_{k=2}^p g_{v\beta}^{1k}2\dot{v}_k\dot{\beta}_k;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_{\beta 1} = & m_{\beta\varphi}^{11}\ddot{\varphi}_1 + m_{\beta v}^{11}\ddot{v}_1 + m_{\beta\beta}^{11}\ddot{\beta}_1 + \sum_{k=2}^p m_{\beta\varphi}^{1k}\ddot{\varphi}_k + \sum_{k=2}^p m_{\beta\alpha}^{1k}\ddot{\alpha}_k + \sum_{k=2}^p m_{\beta\beta}^{1k}\ddot{\beta}_k + \\
& + g_{\beta\varphi}^{11}\dot{\varphi}_1^2 + g_{\beta v}^{11}2\dot{\beta}_1\dot{v}_1 + g_{\beta\beta}^{11}2\dot{\beta}_1\dot{\beta}_1 + \sum_{k=2}^p g_{\beta\varphi}^{1k}\dot{\varphi}_k^2 + \sum_{k=2}^p g_{\beta\alpha}^{1k}2\dot{\beta}_k\dot{\alpha}_k + \sum_{k=2}^p g_{\beta\beta}^{1k}2\dot{\beta}_k\dot{\beta}_k;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_{\varphi k} = & m_{\varphi\varphi}^{k1}\ddot{\varphi}_1 + m_{\varphi v}^{k1}\ddot{v}_1 + m_{\varphi\beta}^{k1}\ddot{\beta}_1 + \sum_{j=2}^p m_{\varphi\varphi}^{kj}\ddot{\varphi}_j + \sum_{j=2}^p m_{\varphi\alpha}^{kj}\ddot{\alpha}_j + \sum_{j=2}^p m_{\varphi\beta}^{kj}\ddot{\beta}_j + \\
& + g_{\varphi\varphi}^{k1}\dot{\varphi}_1^2 + g_{\varphi v}^{k1}2\dot{\varphi}_1\dot{v}_1 + g_{\varphi\beta}^{k1}2\dot{\varphi}_1\dot{\beta}_1 + \sum_{j=2}^p g_{\varphi\varphi}^{kj}\dot{\varphi}_j^2 + \sum_{j=2}^p g_{\varphi\alpha}^{kj}2\dot{\varphi}_j\dot{\alpha}_j + \sum_{j=2}^p g_{\varphi\beta}^{kj}2\dot{\varphi}_j\dot{\beta}_j;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_{\alpha k} &= m_{\alpha\varphi}^{k1} \ddot{\phi}_1 + m_{\alpha\nu}^{k1} \ddot{v}_1 + m_{\alpha\beta}^{k1} \ddot{\beta}_1 + \sum_{j=2}^p m_{\alpha\varphi}^{kj} \ddot{\phi}_j + \sum_{j=2}^p m_{\alpha\alpha}^{kj} \ddot{\alpha}_j + \sum_{j=2}^p m_{\alpha\beta}^{kj} \ddot{\beta}_j + \\
&+ g_{\alpha\varphi}^{k1} \dot{\phi}_1^2 + g_{\alpha\nu}^{k1} 2\dot{\phi}_1 \dot{v}_1 + g_{\alpha\beta}^{k1} 2\dot{\phi}_1 \dot{\beta}_1 + \sum_{j=2}^p g_{\alpha\varphi}^{kj} \dot{\phi}_j^2 + \sum_{j=2}^p g_{\alpha\alpha}^{kj} 2\dot{\phi}_j \dot{\alpha}_j + \sum_{j=2}^p g_{\alpha\beta}^{kj} 2\dot{\phi}_j \dot{\beta}_j; \\
L_{\beta k} &= m_{\beta\varphi}^{k1} \ddot{\phi}_1 + m_{\beta\nu}^{k1} \ddot{v}_1 + m_{\beta\beta}^{k1} \ddot{\beta}_1 + \sum_{j=2}^p m_{\beta\varphi}^{kj} \ddot{\phi}_j + \sum_{j=2}^p m_{\beta\alpha}^{kj} \ddot{\alpha}_j + \sum_{j=2}^p m_{\beta\beta}^{kj} \ddot{\beta}_j + \\
&+ g_{\beta\varphi}^{k1} \dot{\phi}_1^2 + g_{\beta\nu}^{k1} 2\dot{\phi}_1 \dot{v}_1 + g_{\beta\beta}^{k1} 2\dot{\phi}_1 \dot{\beta}_1 + \sum_{j=2}^p g_{\beta\varphi}^{kj} \dot{\phi}_j^2 + \sum_{j=2}^p g_{\beta\alpha}^{kj} 2\dot{\phi}_j \dot{\alpha}_j + \sum_{j=2}^p g_{\beta\beta}^{kj} 2\dot{\phi}_j \dot{\beta}_j.
\end{aligned}$$

Коэффициенты, входящие в эти операторы, с учетом симметрии и антисимметрии определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}
m_{\varphi\varphi}^{11} &= J_0 + \frac{m_1 a_1}{3} (3a_0^2 + 3a_0 a_1 + a_1^2) + M((a_0 + a_1)^2 + v_1^2); \\
m_{\varphi\nu}^{11} &= m_{\nu\varphi}^{11} = \frac{m_1 a_1}{20} (10a_0 + 7a_1) + M(a_0 + a_1), \quad m_{\varphi\beta}^{11} = m_{\beta\varphi}^{11} = -\frac{m_1 a_1^2}{60} (5a_0 + 3a_1); \\
m_{\varphi\varphi}^{1k} &= m_{\varphi\varphi}^{k1} = a_k M_k \chi_1 + (\alpha_k - \beta_k) b_k \chi_2, \quad m_{\varphi\alpha}^{1k} = m_{\alpha\varphi}^{k1} = b_k \chi_1, \quad m_{\varphi\beta}^{1k} = m_{\beta\varphi}^{k1} = -b_k \chi_1; \\
m_{\nu\nu}^{11} &= \frac{13}{35} m_1 a_1 + M; \\
m_{\nu\beta}^{11} &= m_{\beta\nu}^{11} = -\frac{11}{210} m_1 a_1^2, \quad m_{\nu\varphi}^{1k} = m_{\varphi\nu}^{k1} = a_k c_{1k} M_k + (\alpha_k - \beta_k) b_k s_{1k}; \\
m_{\nu\alpha}^{1k} &= m_{\alpha\nu}^{k1} = b_k c_{1k}, \quad m_{\nu\beta}^{1k} = m_{\beta\nu}^{k1} = -b_k c_{1k}; \\
m_{\beta\beta}^{11} &= f_1; \\
m_{\beta\varphi}^{1k} &= m_{\varphi\beta}^{k1} = m_{\beta\alpha}^{1k} = m_{\alpha\beta}^{k1} = m_{\beta\beta}^{1k} = m_{\beta\beta}^{k1} = 0; \\
m_{\varphi\varphi}^{kj} &= \begin{cases} a_j a_k c_{jk} M_k + (\alpha_k - \beta_k) a_j s_{jk} b_k & j < k \\ a_k^2 (M_k - \frac{m_k a_k}{6}) + f_k (\alpha_k^2 + \beta_k^2) - g_k (2\alpha_k \beta_k) & j = k; \\ a_j a_k c_{jk} M_j - (\alpha_j - \beta_j) a_k s_{jk} b_j & j > k \end{cases} \\
m_{\varphi\alpha}^{kj} &= m_{\alpha\varphi}^{kj} = \begin{cases} 0 & j < k \\ e_k & j = k \\ a_k c_{jk} b_j & j > k \end{cases}, \quad m_{\varphi\beta}^{kj} = m_{\beta\varphi}^{kj} = \begin{cases} 0 & j < k \\ -d_k & j = k \\ -a_k c_{jk} b_j & j > k \end{cases}; \\
m_{\alpha\alpha}^{kj} &= \delta_{kj} f_k; \\
m_{\alpha\beta}^{kj} &= m_{\beta\alpha}^{kj} = -\delta_{kj} g_k; \\
m_{\beta\beta}^{kj} &= \delta_{kj} f_k;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \mathbf{g}_{\varphi\varphi}^{11} = 0; \\
& \mathbf{g}_{\varphi\psi}^{11} = -\mathbf{g}_{\psi\varphi}^{11} = \nu_1 M, \quad \mathbf{g}_{\varphi\beta}^{11} = -\mathbf{g}_{\beta\varphi}^{11} = 0, \quad \mathbf{g}_{\varphi\varphi}^{1k} = -\mathbf{g}_{\varphi\varphi}^{k1} = a_k M_k \chi_3 - (\alpha_k - \beta_k) b_k \chi_2; \\
& \mathbf{g}_{\varphi\alpha}^{1k} = -\mathbf{g}_{\alpha\varphi}^{k1} = b_k \chi_3, \quad \mathbf{g}_{\varphi\beta}^{1k} = -\mathbf{g}_{\beta\varphi}^{k1} = -b_k \chi_3; \\
& \mathbf{g}_{\psi\psi}^{11} = 0; \\
& \mathbf{g}_{\psi\beta}^{11} = -\mathbf{g}_{\beta\psi}^{11} = 0 = 0, \quad \mathbf{g}_{\psi\varphi}^{1k} = -\mathbf{g}_{\varphi\psi}^{k1} = a_k s_{1k} M_k - (\alpha_k - \beta_k) b_k c_{1k}; \\
& \mathbf{g}_{\psi\alpha}^{1k} = -\mathbf{g}_{\alpha\psi}^{k1} = b_k s_{1k}, \quad \mathbf{g}_{\psi\beta}^{1k} = -\mathbf{g}_{\beta\psi}^{k1} = -b_k s_{1k}; \\
& \mathbf{g}_{\beta\beta}^{11} = 0; \\
& \mathbf{g}_{\beta\varphi}^{1k} = -\mathbf{g}_{\varphi\beta}^{k1} = \mathbf{g}_{\beta\alpha}^{1k} = -\mathbf{g}_{\alpha\beta}^{k1} = \mathbf{g}_{\beta\beta}^{1k} = -\mathbf{g}_{\beta\beta}^{k1} = 0; \\
& \mathbf{g}_{\varphi\varphi}^{kj} = \begin{cases} -a_j a_k s_{jk} M_k + (\alpha_k - \beta_k) a_j c_{jk} b_k & j < k \\ 0 & j = k \\ -a_j a_k s_{jk} M_j - (\alpha_j - \beta_j) a_k c_{jk} b_j & j > k \end{cases}; \\
& \mathbf{g}_{\varphi\alpha}^{kj} = -\mathbf{g}_{\alpha\varphi}^{kj} = \begin{cases} 0 & j < k \\ \alpha_k f_k - \beta_k g_k & j = k \\ -a_k s_{jk} b_j & j > k \end{cases}, \quad \mathbf{g}_{\varphi\beta}^{kj} = -\mathbf{g}_{\beta\varphi}^{kj} = \begin{cases} 0 & j < k \\ -\alpha_k g_k + \beta_k f_k & j = k \\ a_k s_{jk} b_j & j > k \end{cases}; \\
& \mathbf{g}_{\alpha\alpha}^{kj} = 0; \\
& \mathbf{g}_{\alpha\beta}^{kj} = -\mathbf{g}_{\beta\alpha}^{kj} = 0; \\
& \mathbf{g}_{\beta\beta}^{kj} = 0,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
& c_{1k} = \cos(\varphi_1 - \varphi_k), \quad s_{1k} = \sin(\varphi_1 - \varphi_k), \quad c_{jk} = \cos(\varphi_j - \varphi_k), \quad s_{jk} = \sin(\varphi_j - \varphi_k); \\
& \chi_1 = c_{1k}(a_0 + a_1) - s_{1k}\nu_1, \quad \chi_2 = c_{1k}\nu_1 - s_{1k}(a_0 + a_1), \quad \chi_3 = c_{1k}\nu_1 + s_{1k}(l_0 + l_1); \\
& b_k = \frac{m_k a_k^2}{12}, \quad d_k = \frac{m_k a_k^3}{20}, \quad e_k = \frac{m_k a_k^3}{30}, \quad f_k = \frac{m_k a_k^3}{105}, \quad g_k = \frac{m_k l_k^3}{140}; \\
& M = \mu_1 + \sum_{k=2}^p (\mu_k + m_k a_k), \quad M_k = \sum_{j=k}^p (\mu_j + m_j a_j) - \frac{m_k a_k}{2}, \quad \delta_{kj} = \begin{cases} 0 & k \neq j \\ 1 & k = j \end{cases}.
\end{aligned}$$

Систему уравнений (3.2.18) для интегрирования с помощью стандартной программы в одном из комплексов компьютерной алгебры удобно записать в матричном виде:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} + \mathbf{Nz} = \mathbf{Q}, \quad (3.2.19)$$

где  $\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{q})_{3p \times 3p}$  – симметричная нелинейная матрица инерции, коэффициенты которой зависят от обобщенных координат;  $\mathbf{D} = \mathbf{D}(t)_{3p \times 3p}$  и  $\mathbf{K} = \mathbf{K}(t)_{3p \times 3p}$  – симметричные матрицы демпфирования и жесткости соответственно;  $\mathbf{N} = \mathbf{N}(\mathbf{q})_{3p \times 3p}$  – антисимметричная нелинейная матрица, коэффициенты которой зависят от обобщенных координат;  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(t)_{3p \times 1}$  – вектор обобщенных сил;  $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t)_{3p \times 1}$  – вектор обобщенных координат (перемещений и углов поворота);  $\mathbf{z} = \mathbf{z}(\dot{\mathbf{q}})_{3p \times 1}$  – вектор нелинейных составляющих обобщенных координат:

$$\mathbf{q} = [\varphi_1 \quad \nu_1 \quad \beta_1 \quad \varphi_2 \quad \dots \quad \varphi_p \quad \alpha_2 \quad \dots \quad \alpha_p \quad \beta_2 \quad \dots \quad \beta_p]^T;$$

$$\mathbf{z} = [\dot{\varphi}_1^2 \quad 2\dot{\varphi}_1\dot{\nu}_1 \quad 2\dot{\varphi}_1\dot{\beta}_1 \quad \dot{\varphi}_2^2 \quad \dots \quad \dot{\varphi}_p^2 \quad 2\dot{\varphi}_2\dot{\alpha}_2 \quad \dots \quad 2\dot{\varphi}_p\dot{\alpha}_p \quad 2\dot{\varphi}_2\dot{\beta}_2 \quad \dots \quad 2\dot{\varphi}_p\dot{\beta}_p]^T.$$

Система уравнений (3.2.19) решалась в программном комплексе компьютерной алгебры РТС MathCAD 15.0 с помощью стандартных программ решения системы дифференциальных уравнений жесткого типа: BDF – метод обратного дифференцирования; Radau – метод RADAU5. По предварительным пробным вычислениям было установлено, что алгоритм Radau обладает лучшей устойчивостью при вычислениях с мелким шагом на больших интервалах времени. Алгоритм RADAU5, представляющий собой модифицированный метод Рунге-Кутты 5-го порядка для жестких систем, использовался в примере расчета.

### 3.2.3. Примеры расчета

Рассмотрим несколько примеров задач разворачивания зонтичной антенны со следующими параметрами, общими для всех примеров расчета:  $a_0 = 0,25$  м;  $J_0 = 0,021$  кг·м<sup>2</sup>;  $\kappa_0 = 10^5$  Н·м/рад;  $\nu_0 = 10^5$  Н·м·с/рад;  $a_k = 1,25$  м,  $m_k = 2$  кг/м,  $\mu_k = 0,1$  кг ( $k = 1, 2, \dots, p$ );  $\theta_0 = \pi/8$ ,  $\theta_0^* = \pi/4 + \theta_0/2 = 5\pi/16$ .

Решается задача разворачивания стержневой системы с помощью упругих сил предварительно сжатых пружин в шарнирных узлах, стержни которой в начальный момент времени прижаты друг другу под углом  $\pi/90$ , т.е. при  $t = 0$ :

Для  $p = 4$ :  $\varphi_1 = \varphi_3 = \theta_0^*$ ,  $\varphi_2 = \varphi_4 = -\pi + \theta_0^* + \pi/90 = -487\pi/720$ ;

Для  $p = 6$ :  $\varphi_1 = \varphi_3 = \varphi_5 = \theta_0^*$ ,  $\varphi_2 = \varphi_4 = \varphi_6 = -\pi + \theta_0^* + \pi/90 = -487\pi/720$ ;

Для  $p = 8$ :  $\varphi_1 = \varphi_3 = \varphi_5 = \varphi_7 = \theta_0^*$ ,  $\varphi_2 = \varphi_4 = \varphi_6 = \varphi_8 = -\pi + \theta_0^* + \pi/90 = -487\pi/720$ ;

$\nu_1 = 0$ ;  $\beta_1 = 0$ ;  $\alpha_k = 0$ ,  $\beta_k = 0$  ( $k = 2, 3, \dots, p$ );  $\dot{\varphi}_1 = 0$ ;  $\dot{\nu}_1 = 0$ ;  $\dot{\beta}_1 = 0$ ;  $\dot{\varphi}_k = 0$ ,  $\dot{\alpha}_k = 0$ ,  $\dot{\beta}_k = 0$  ( $k = 2, 3, \dots, p$ ).

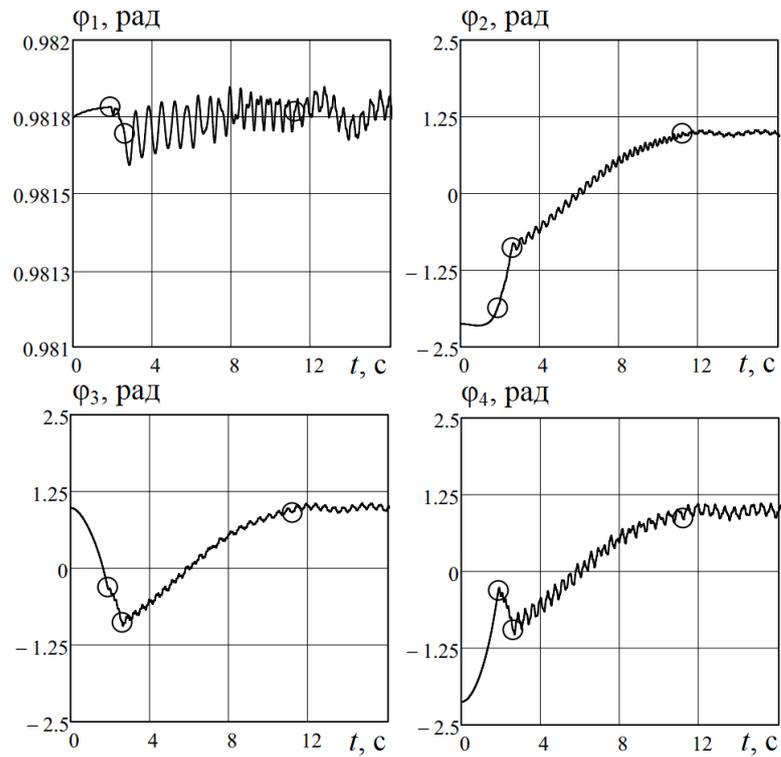
В раскрытом положении стержневые элементы должны быть приближенно направлены вдоль оси, наклоненной к  $CX$  на угол  $\theta_0^*$ . Это осуществляется с помощью упруговязких зажимов, имитируемых увеличением жесткостей в шарнирах до  $\kappa_k = 10^7$  Н·м/рад ( $k = 1, 2, \dots, p$ ) и появлением демпфирования с коэффициентом  $\nu_k = 10^7$  Н·м·с/рад ( $k = 1, 2, \dots, p$ ), как только будут достигнуты условия  $|\varphi_k - \varphi_{k-1}| \leq 10^{-3}$  рад,  $k = 2, 3, \dots, p$ .

Пример №1. Пусть  $p = 4$ ; принимаем  $EI_k = 500$  Па·м<sup>4</sup> ( $k = 1, 2, \dots, 4$ );  $\kappa_k = 1$  Н·м/рад,  $\nu_k = 0,2$  Н·м·с/рад ( $k = 1, 2, 3$ ). Интегрирование системы при описанных выше начальных условиях производилось на интервале  $0 \leq t \leq 20$  с при количестве разбиений  $2 \cdot 10^5$ .

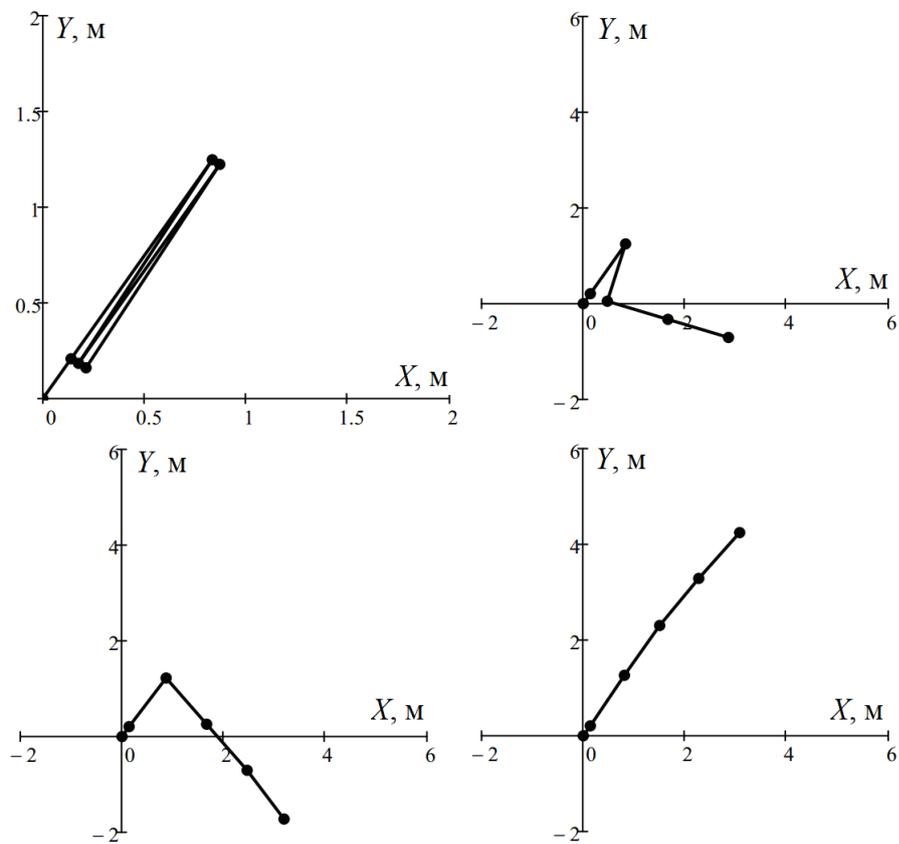
Последовательность и время срабатывания зажимов:  $t = t_1 = 1,870$  с –  $k = 3$ ;  $t = t_2 = 2,596$  с –  $k = 2$ ;  $t = t_3 = 11,164$  с –  $k = 1$ .

На рис. 3.2.4 приведены зависимости углов поворота стержней как твердых тел  $\varphi_k$  ( $k = 1, 2, \dots, 4$ ) от времени, соответственно. Здесь и далее на подобных графиках символом круг ( $\circ$ ) отмечены моменты включения зажимов в шарнирах.

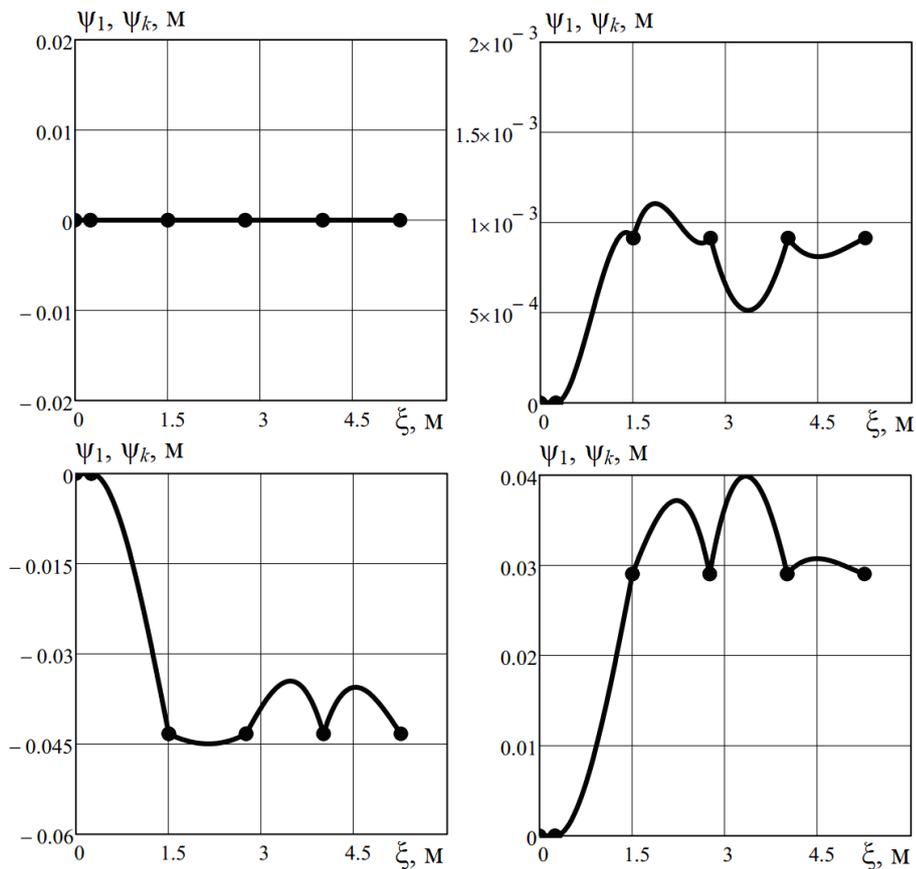
На рис. 3.2.5 показаны последовательные положения системы при фиксации стержней в заданном положении в неподвижной системе координат  $CXY$ . Шарнирные узлы соединены сплошной линией, которая показывает угловое положение стержня как твердого тела. На рис. 3.2.6 представлены формы изгиба стержней (упругие линии) при фиксации упруговязких шарниров.



**Рис. 3.2.4.** Угловое положение элементов радиального стержня при раскрытии для  $p = 4$



**Рис. 3.2.5.** Последовательное разворачивание системы для  $p = 4$

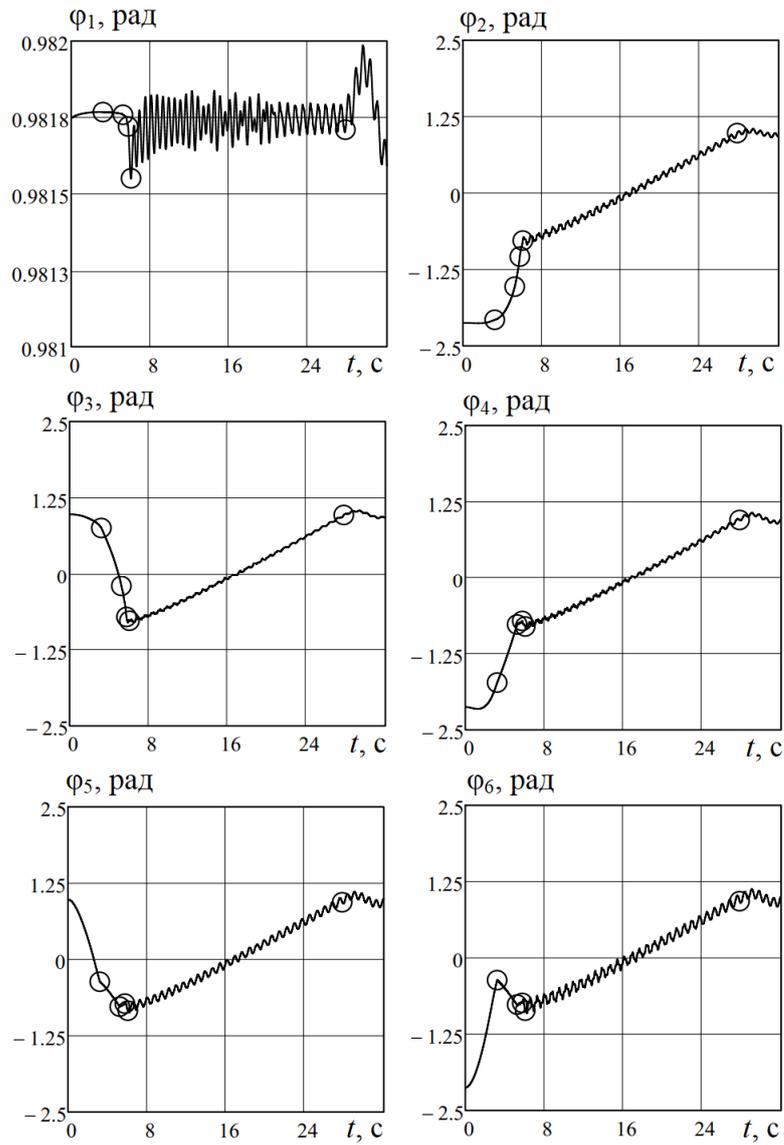


**Рис. 3.2.6.** Изгиб стержневых элементов при фиксации шарниров для  $p = 4$

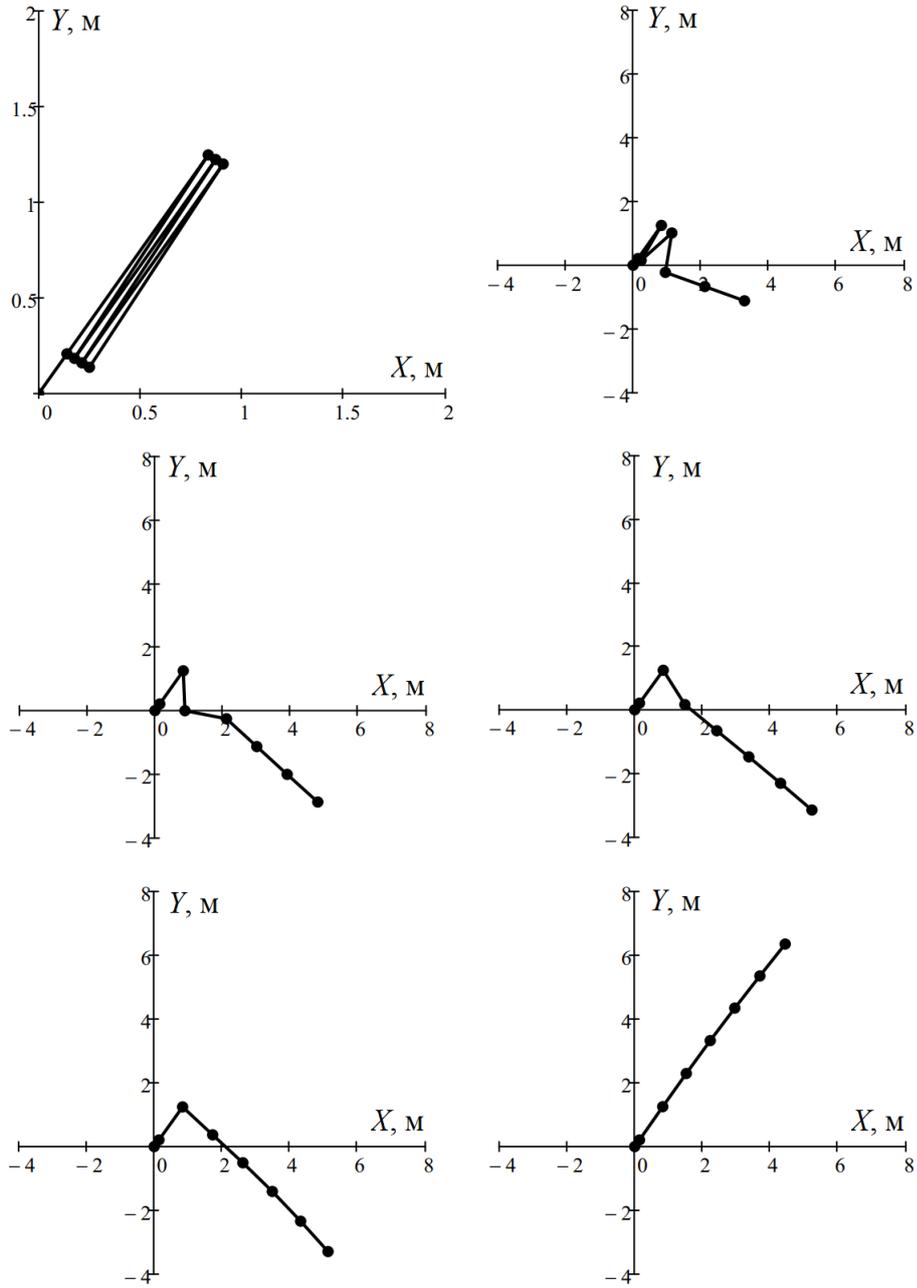
Пример №2. Пусть  $p = 6$ ; принимаем  $EI_k = 1000 \text{ Па} \cdot \text{м}^4$  ( $k = 1, 2, \dots, 6$ );  $\kappa_k = 0,5 \text{ Н} \cdot \text{м}/\text{рад}$ ,  $\nu_k = 0,4 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}/\text{рад}$  ( $k = 1, 2, \dots, 5$ ). Интегрирование системы при описанных выше начальных условиях производилось на интервале  $0 \leq t \leq 32 \text{ с}$  при количестве разбиений  $3,2 \cdot 10^5$ .

Последовательность и время срабатывания зажимов:  $t = t_1 = 3,228 \text{ с} - k = 5$ ;  
 $t = t_2 = 5,252 \text{ с} - k = 4$ ;  $t = t_3 = 5,763 \text{ с} - k = 3$ ;  $t = t_4 = 6,074 \text{ с} - k = 2$ ;  
 $t = t_5 = 27,794 \text{ с} - k = 1$ .

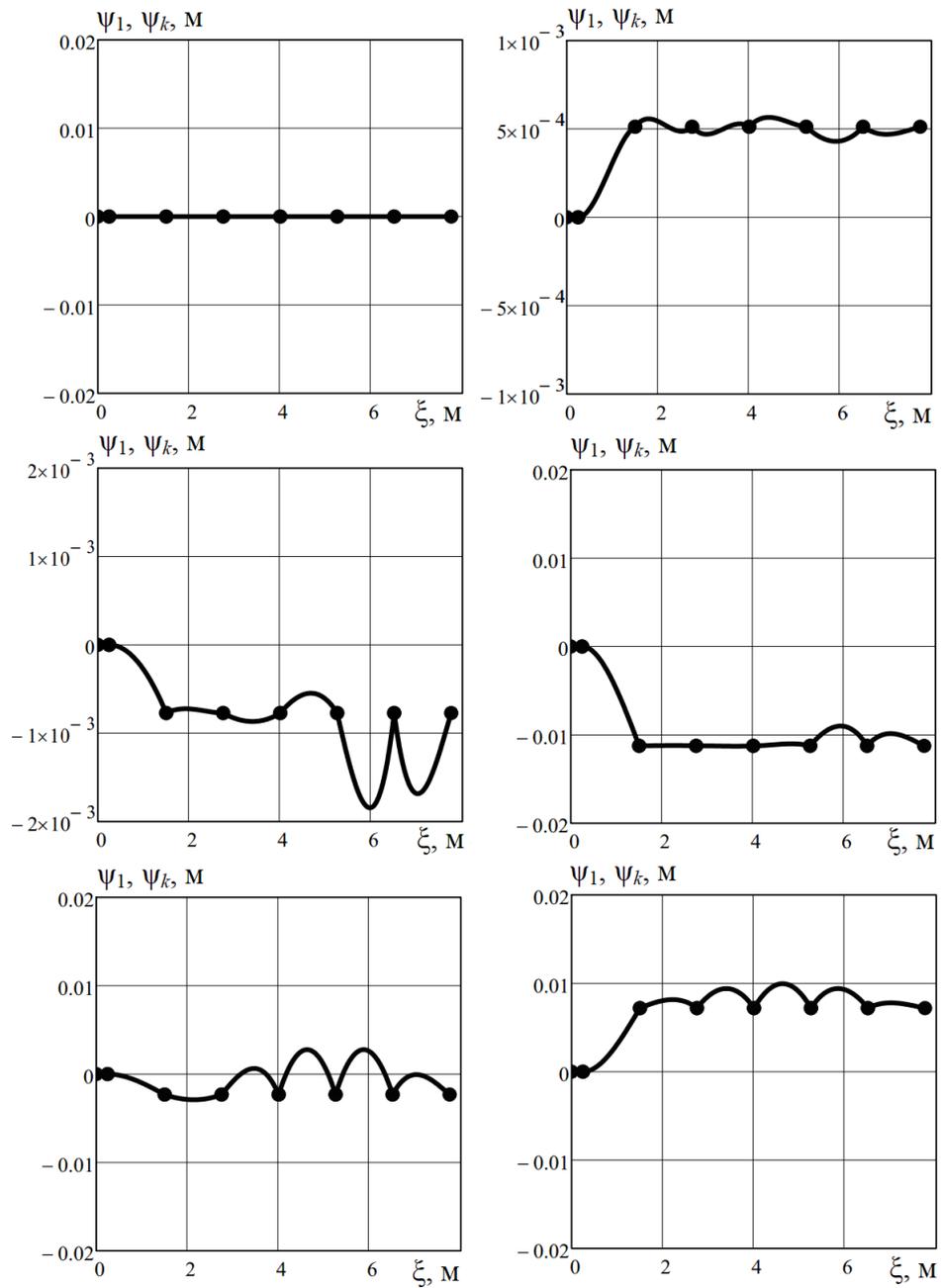
На рис. 3.2.7 приведены зависимости углов поворота стержней как твердых тел  $\varphi_k$  ( $k = 1, 2, \dots, 6$ ) от времени, соответственно. На рис. 3.2.8 показаны последовательные положения системы при фиксации стержней в заданном положении в неподвижной системе координат  $CXY$ . На рис. 3.2.9 представлены формы изгиба стержней (упругие линии) при фиксации упруговязких шарниров.



**Рис. 3.2.7.** Угловое положение элементов радиального стержня при раскрытии для  $p = 6$



**Рис. 3.2.8.** Последовательное развертывание системы для  $p = 6$

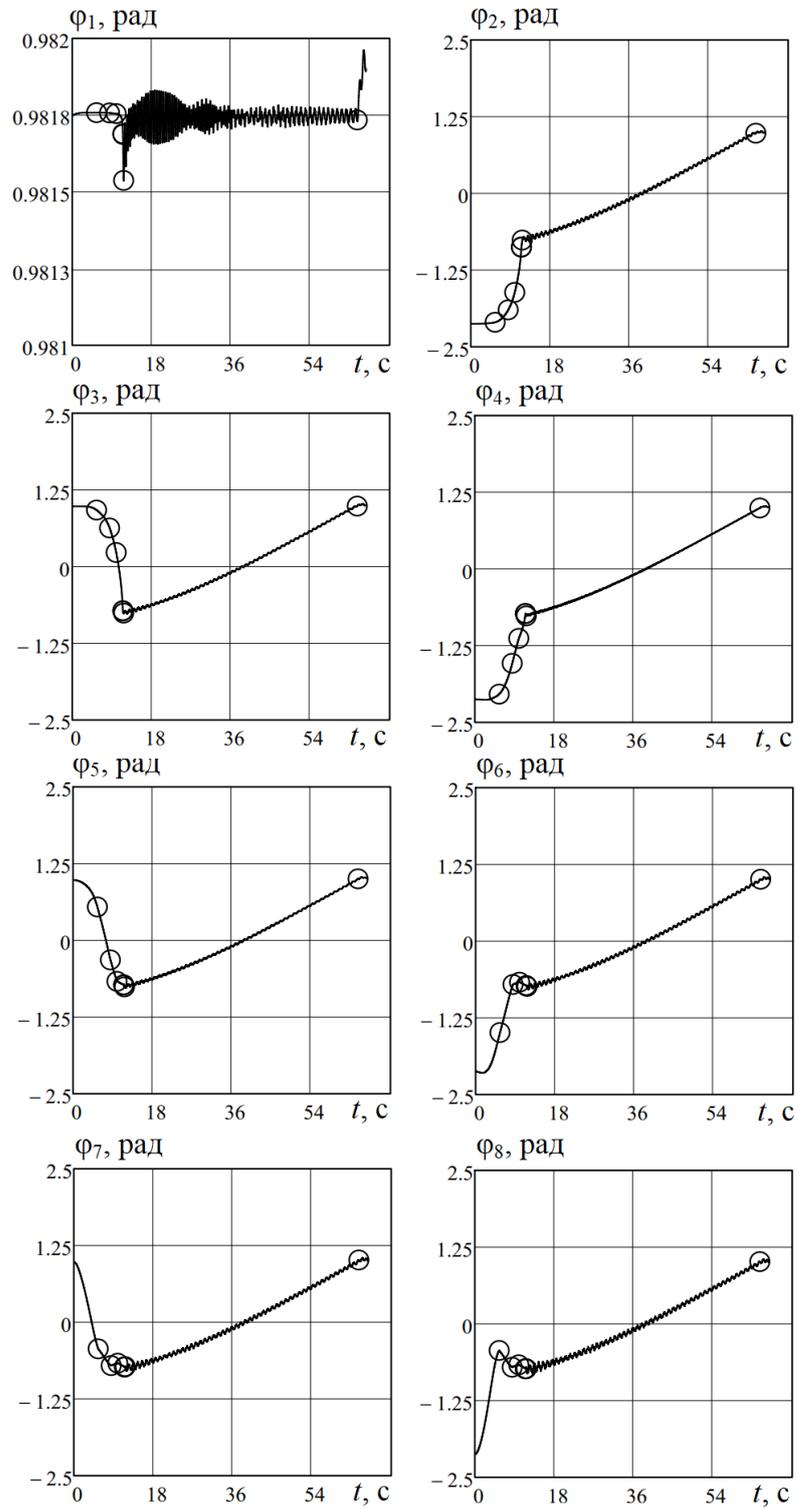


**Рис. 3.2.9.** Изгиб стержневых элементов при фиксации шарниров для  $p = 6$

Пример №3. Пусть  $p = 8$ ; принимаем  $EI_k = 2000 \text{ Па}\cdot\text{м}^4$  ( $k = 1, 2, \dots, 8$ );  $\kappa_k = 0,25 \text{ Н}\cdot\text{м}/\text{рад}$ ,  $\nu_k = 0,4 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}/\text{рад}$  ( $k = 1, 2, \dots, 7$ ). Интегрирование системы при описанных выше начальных условиях производилось на интервале  $0 \leq t \leq 68 \text{ с}$  при количестве разбиений  $6,8 \cdot 10^5$ .

Последовательность и время срабатывания зажимов:  $t = t_1 = 5,529 \text{ с} - k = 7$ ;  
 $t = t_2 = 8,492 \text{ с} - k = 6$ ;  $t = t_3 = 9,979 \text{ с} - k = 5$ ;  $t = t_4 = 11,484 \text{ с} - k = 4$ ;  
 $t = t_5 = 11,487 \text{ с} - k = 3$ ;  $t = t_6 = 11,676 \text{ с} - k = 2$ ;  $t = t_7 = 64,654 \text{ с} - k = 1$ .

На рис. 3.2.10 приведены зависимости углов поворота стержней как твердых тел  $\varphi_k$  ( $k = 1, 2, \dots, 8$ ) от времени, соответственно. На рис. 3.2.11 показаны последовательные положения системы при фиксации стержней в заданном положении в неподвижной системе координат  $CXY$ . На рис. 3.2.12 представлены формы изгиба стержней (упругие линии) при фиксации упруговязких шарниров.



**Рис. 3.2.10.** Угловое положение элементов радиального стержня при раскрытии

для  $p = 8$

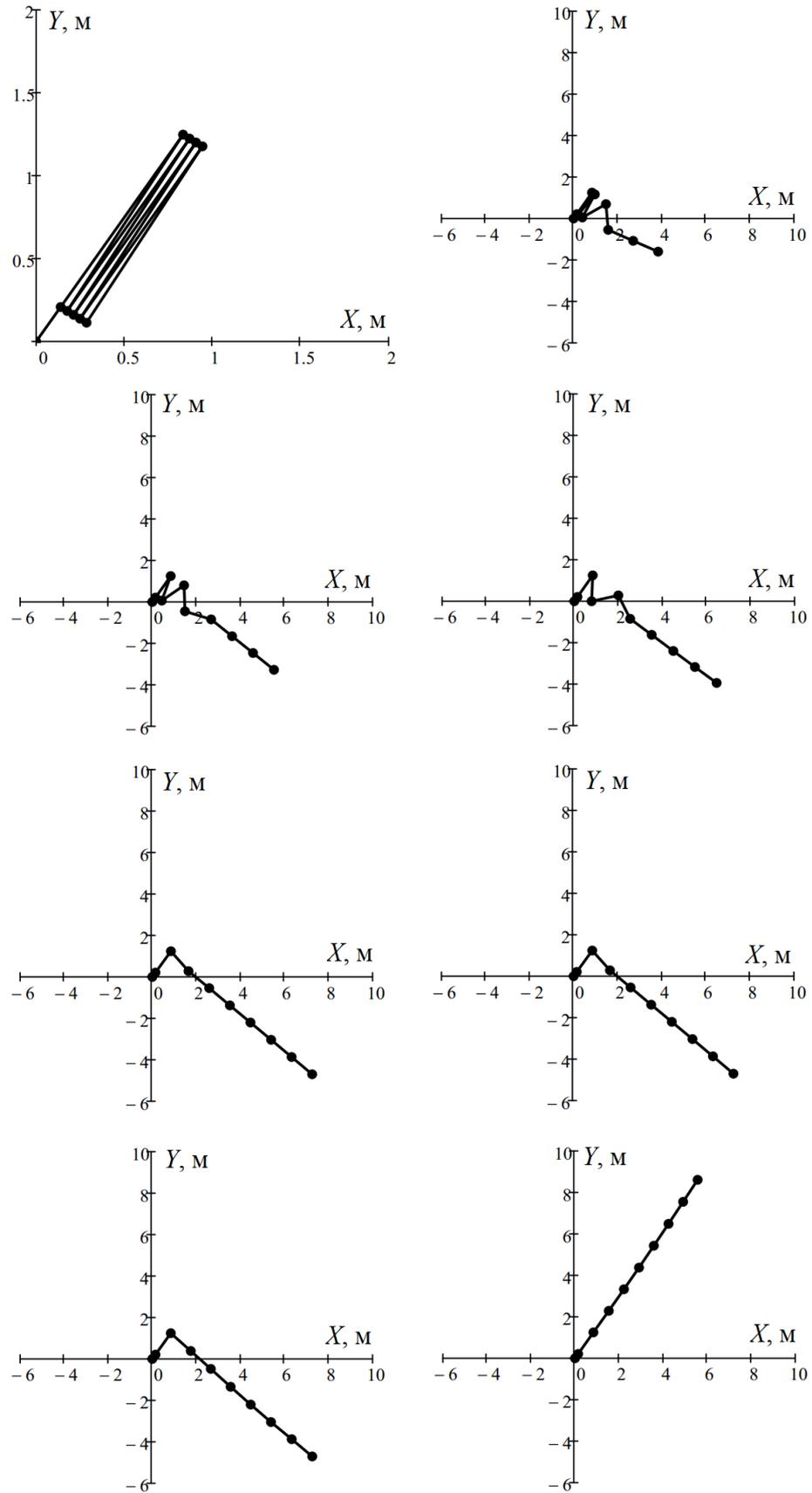


Рис. 3.2.11. Последовательное разворачивание системы для  $p = 8$

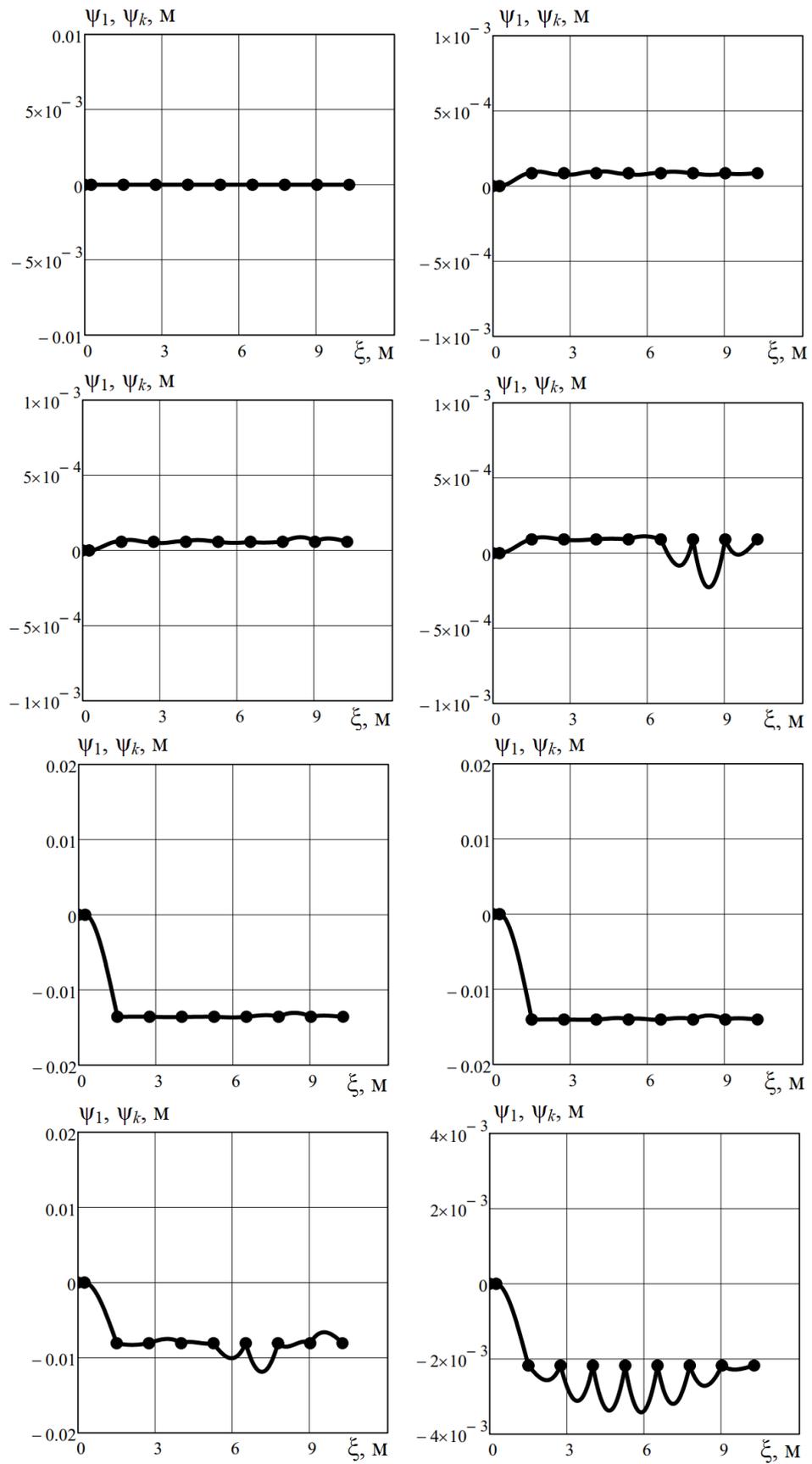
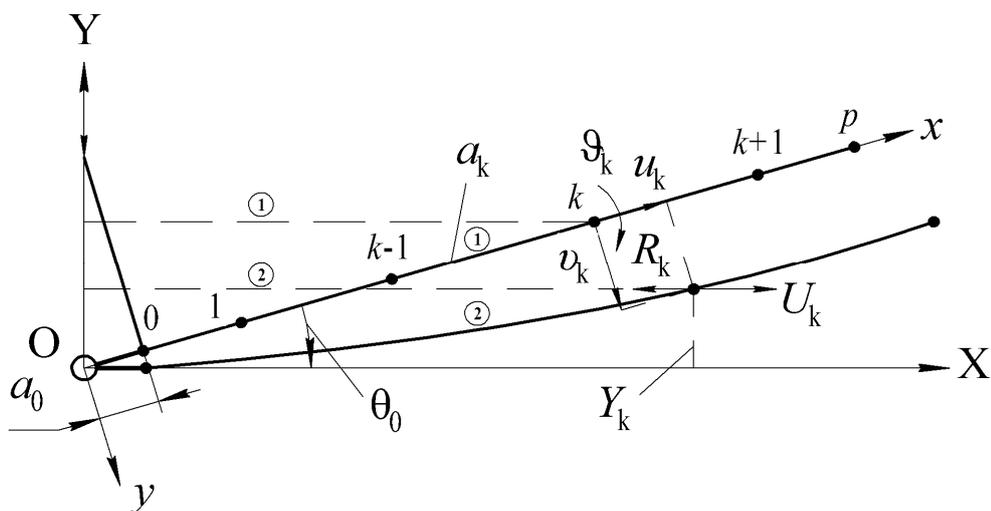


Рис. 3.2.12. Изгиб стержневых элементов при фиксации шарниров для  $p = 8$

### 3.3. Формообразование пологой космической антенны зонтичного типа

#### 3.3.1. Постановка задачи

Форму нерастяжимого деформированного за счет продольно-поперечного изгиба радиального стержня в случае пологой конфигурации антенны будем рассматривать в системе координат  $OXY$ , рис. 3.3.1. Наряду с этим будем использовать систему координат  $Oxy$ , ось  $x$  которой направлена по оси недеформированного прямолинейного стержня под некоторым углом  $\theta_0$  к оси  $X$ . Этот угол будем считать умеренным ( $\sin \theta_0 \approx \theta_0$ ,  $\cos \theta_0 \approx 1 - \theta_0^2/2$ ) и будем считать, что при этом угле все тросовые элементы, соединяющие по параллелям соответствующие узлы  $x = const$  на радиальных стержнях, принимают прямолинейную форму, но являются не нагруженными.



**Рис. 3.3.1.** Радиальный стержень с  $k$ -м тросом в исходном недеформированном (1) и конечном деформированном (2) состояниях

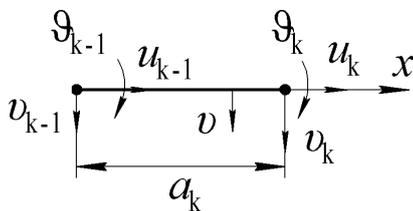
На рис. 3.3.1 показан радиальный стержень в начальном недеформированном (1) и конечном деформированном (2) состояниях. Здесь же показаны продольное  $u_k$  и поперечное  $v_k$  перемещения и угол поворота  $\vartheta_k$  узла  $x = x_k$  при продольно-поперечном изгибе стержня под действием радиальной силы

$R_k$ , создаваемой натяжением троса, проходящего через узлы  $x = x_k$  всех стержней;  $U_k$  – радиальное перемещение точки  $k$ . Углы поворота  $\vartheta_k$  также как  $\theta_0$  будем считать умеренными ( $\sin \vartheta_k \approx \vartheta_k$ ,  $\cos \vartheta_k \approx 1 - \vartheta_k^2/2$ ). В конечном состоянии при  $k = 0$ :

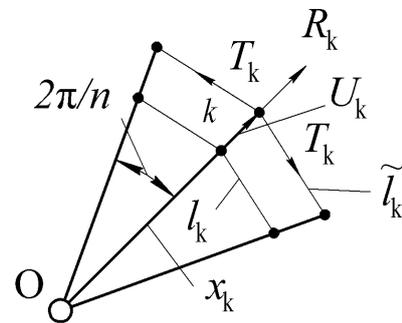
$$x_0 = a_0, \quad \vartheta_0 = \theta_0, \quad v_0 = a_0 \operatorname{tg} \theta_0, \quad u_0 = -a_0(1 - \cos \theta_0). \quad (3.3.1)$$

Для расчета деформированного состояния стержня при продольно-поперечном изгибе будем использовать метод конечных элементов (МКЭ); в качестве конечных элементов (КЭ) будем рассматривать звенья стержня, совмещая узлы с шарнирами, рис. 3.3.2. Жесткость  $k$ -го КЭ на изгиб  $EI_k$  на его длине  $a_k$  считается постоянной. Здесь будем рассматривать случай, когда в конечном деформированном состоянии радиальный стержень представляет собой пологую параболу, уравнение которой в дискретных точках  $X_k$  при  $k = 1, 2, \dots, p$  задается в виде  $Y_k = \lambda(X_k - a_0)^2$ , где  $\lambda$  – коэффициент формы параболы; координаты  $X_k$ , соответствующие координатам  $x_k$ , с учетом условия нерастяжимости стержня определяются путем численного решения уравнений вида

$$\int_0^{X_k} \sqrt{1 + 4\lambda x^2} dx - (X_k - a_0) = 0.$$



**Рис. 3.3.2.** Перемещения  $k$ -го КЭ упругого стержня



**Рис. 3.3.3.** Радиальное перемещение и усилия от натяжения троса в  $k$ -м узле

Реакцию растяжимого  $k$ -го троса  $R_k$  в узле  $k$  выразим через усилие в тросе  $T_k$  и затем через радиальное перемещение этого узла  $U_k$  (рис. 3.3.3):

$$R_k = 2T_k \sin \frac{\pi}{n}, \quad T_k = EF_k \varepsilon_k, \quad \varepsilon_k = \frac{\tilde{l}_k - l_k}{l_k} = \frac{U_k}{x_k};$$

$$R_k = 2 \frac{EF_k}{x_k} U_k \sin \frac{\pi}{n},$$
(3.3.2)

где  $EF_k$  – жесткость на растяжение  $k$ -го троса, соединяющего узлы  $k$  всех стержней;  $l_k = 2x_k \sin(\pi/n)$  – длина  $k$ -го троса.

Поперечное и продольное перемещения стержня в узле  $k$ , а также поперечная и продольная составляющие силы  $R_k$ :

$$v_k = \frac{x_k \sin \theta_0 - Y_k}{\cos \theta_0}, \quad U_k = u_k \cos \theta_0 + v_k \sin \theta_0;$$

$$P_k = -R_k \cos \theta_0, \quad Q_k = -R_k \sin \theta_0.$$
(3.3.3)

Поперечные перемещения  $k$ -го КЭ стержня постоянной изгибной жесткости  $EI_k$  без учета сдвига поперечного сечения (рис. 3.3.2) представим в виде, [9]:

$$v(\xi) = \vartheta_{k-1} \psi_0(\xi) + v_{k-1} \varphi_0(\xi) + \vartheta_k \psi_1(\xi) + v_k \varphi_1(\xi), \quad \xi = \frac{x - x_{k-1}}{a_k};$$

$$\psi_0(\xi) = a_k \xi (1 - \xi)^2, \quad \varphi_0(\xi) = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3;$$

$$\psi_1(\xi) = -a_k \xi^2 (1 - \xi), \quad \varphi_1(\xi) = 3\xi^2 - 2\xi^3.$$
(3.3.4)

Продольные перемещения узлов  $k$ -го КЭ с учетом (3.3.4) при продольной деформации

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \approx \frac{1}{a_k} [u_k - u_{k-1} + \frac{1}{2} \int_0^{a_k} \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 dx] = 0$$

будут определяться следующим образом:

$$u_k = u_{k-1} - \left[ \frac{3}{5} \frac{1}{a_k} (v_k - v_{k-1})^2 - \frac{1}{10} (v_k - v_{k-1})(\vartheta_{k-1} + \vartheta_k) + \right.$$

$$\left. + \frac{a_k}{15} (\vartheta_{k-1}^2 + \vartheta_k^2) - \frac{a_k}{30} \vartheta_{k-1} \vartheta_k \right].$$
(3.3.5)

Потенциальная энергия продольно-поперечного изгиба сжатого  $k$ -го КЭ, [9]:

$$\begin{aligned} \Pi_k = \frac{1}{2} [ & b_k (\nu_k - \nu_{k-1})^2 + 2c_k (\nu_{k-1} - \nu_k) (\vartheta_{k-1} + \vartheta_k) + \\ & + d_k (\vartheta_{k-1}^2 + \vartheta_k^2) + 2e_k \vartheta_{k-1} \vartheta_k ], \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

где

$$\begin{aligned} b_k &= 12 \frac{EI_k}{a_k^3} - \frac{6}{5} \frac{1}{a_k} N_k, & c_k &= 6 \frac{EI_k}{a_k^2} - \frac{1}{10} N_k; \\ d_k &= 4 \frac{EI_k}{a_k} - \frac{2}{15} a_k N_k, & e_k &= 2 \frac{EI_k}{a_k} + \frac{a_k}{30} N_k; \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

$N_k = -\sum_{i=k}^p P_k$  – сжимающая сила в  $k$ -м КЭ; с учетом (3.3.3) получаем, что

$$N_k = \cos \theta_0 \sum_{i=k}^p R_i.$$

Уравнения равновесия системы будем составлять на основе принципа возможных перемещений:

$$\delta \Pi = \delta A_Q, \quad \Pi = \sum_{k=1}^p \Pi_k, \quad \delta A_Q = \sum_{k=1}^p Q_k \delta \nu_k. \quad (3.3.8)$$

При этом вариация работы продольных сил  $\delta A_P = \sum_{k=1}^p P_k \delta u_k$  учитывается в выражении потенциальной энергии  $\Pi = \Pi^0 + \Pi^P$ , т.к.  $\delta \Pi^P = -\delta A_P$ .

В результате с учетом (3.3.6) и (3.3.8) получим систему уравнений деформирования стержня:

$$\begin{aligned} e_k \vartheta_{k-1} + (d_k + d_{k+1}) \vartheta_k + e_{k+1} \vartheta_{k+1} + c_k \nu_{k-1} + (c_{k+1} - c_k) \nu_k - c_{k+1} \nu_{k+1} &= 0; \\ -c_k \vartheta_{k-1} + (c_{k+1} - c_k) \vartheta_k - c_{k+1} \vartheta_{k+1} - b_k \nu_{k-1} + (b_k + b_{k+1}) \nu_k + b_{k+1} \nu_{k+1} &= Q_k; \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

$$k = 1, 2, \dots, p.$$

Здесь  $\vartheta_0 = \theta_0$ ,  $\nu_0 = a_0 \operatorname{tg} \theta_0$  и  $\nu_k = \frac{x_k \sin \theta_0 - Y_k}{\cos \theta_0}$  при  $k = 1, 2, \dots, p$  являются

известными величинами, а неизвестными являются углы поворота  $\vartheta_k$  и силы  $R_k$  при  $k = 1, 2, \dots, p$  с учетом замены (3.3.3)  $P_k = -R_k \cos \theta_0$ ,  $Q_k = -R_k \sin \theta_0$  и

$N_k = \cos \theta_0 \sum_{i=k}^p R_i$ . В уравнениях (3.3.9) при  $k = p$  следует учесть, что  $b_{p+1} = 0$ ,  $c_{p+1} = 0$ ,  $d_{p+1} = 0$ ,  $e_{p+1} = 0$ .

Таким образом, разрешив (3.3.9) относительно  $R_k$  и  $\vartheta_k$ , из выражения (3.3.2), предварительно определив  $u_k$  из (3.3.5), а затем  $U_k$  по формулам (3.3.3), можно найти необходимые жесткости тросов  $EF_k$ , которые будут удерживать радиальный стержень в требуемом деформированном положении.

### 3.3.2. Решение системы уравнений

Система алгебраических уравнений (3.3.9) является нелинейной и решается численно в программной среде РТС MathCad 15.0 методом последовательных приближений. Для этого систему (3.3.9) запишем в матричном блочном виде для векторов  $\boldsymbol{\theta} = [\vartheta_1 \ \vartheta_2 \ \dots \ \vartheta_p]^T$  и  $\mathbf{v} = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_p]^T$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{\vartheta\vartheta} \boldsymbol{\theta} + \mathbf{K}_{\vartheta v} \mathbf{v} &= \mathbf{F}_\vartheta; \\ \mathbf{K}_{v\vartheta} \boldsymbol{\theta} + \mathbf{K}_{vv} \mathbf{v} &= \mathbf{F}_v, \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

где

$$\mathbf{K}_{v\vartheta} = \mathbf{K}_{\vartheta v}^T, \quad \mathbf{F}_\vartheta = \begin{bmatrix} -e_1 \vartheta_0 - c_1 v_0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_v = \begin{bmatrix} -\theta_0 R_1 + c_1 \vartheta_0 + b_1 v_0 \\ -\theta_0 R_2 \\ \dots \\ -\theta_0 R_p \end{bmatrix}.$$

Из первого уравнения (3.3.10) выражаем вектор  $\boldsymbol{\theta}$

$$\boldsymbol{\theta} = \mathbf{K}_{\vartheta\vartheta}^{-1} \mathbf{F}_\vartheta - \mathbf{K}_{\vartheta\vartheta}^{-1} \mathbf{K}_{\vartheta v} \mathbf{v}$$

и подставляем его во второе уравнение (3.3.10):

$$[\mathbf{K}_{vv} - \mathbf{K}_{v\vartheta} \mathbf{K}_{\vartheta\vartheta}^{-1} \mathbf{K}_{\vartheta v}] \mathbf{v} = \mathbf{F}_v - \mathbf{K}_{v\vartheta} \mathbf{K}_{\vartheta\vartheta}^{-1} \mathbf{F}_\vartheta. \quad (3.3.11)$$

Матричную систему уравнений (3.3.11) решаем методом последовательных приближений:

1) В первом приближении полагаем  $N_1, N_2, \dots, N_p = 0$  и по формулам для коэффициентов (3.3.7) определяем матрицы  $\mathbf{K}_{99}^{(0)}, \mathbf{K}_{9v}^{(0)}, \mathbf{K}_{v9}^{(0)}$  и  $\mathbf{K}_{vv}^{(0)}$ . Из системы (3.3.11) при известных векторах  $\mathbf{F}_9$  и  $\mathbf{v}$  находим  $\mathbf{F}_v^{(1)}$  для первого приближения, откуда определяются реакции  $R_1^{(1)}, R_2^{(1)}, \dots, R_n^{(1)}$  и  $N_k^{(1)} = \cos \theta_0 \sum_{i=k}^p R_i^{(1)}$ .

2) Во втором приближении с учетом  $N_k^{(1)}$  ( $k=1,2,\dots,p$ ) определяем коэффициенты (3.3.7), матрицы  $\mathbf{K}_{99}^{(1)}, \mathbf{K}_{9v}^{(1)}, \mathbf{K}_{v9}^{(1)}$  и  $\mathbf{K}_{vv}^{(1)}$  и затем из уравнения (3.3.11) находим вектор  $\mathbf{F}_v^{(2)}$  второго приближения и реакции  $R_1^{(2)}, R_2^{(2)}, \dots, R_n^{(2)}$  и  $N_k^{(2)} = \cos \theta_0 \sum_{i=k}^p R_i^{(2)}$ .

3) Приближения повторяются пока не будет достигнута необходимая точность на шаге с номером  $v$  по  $R_k$  ( $k=1,2,\dots,p$ ), например, по условию  $\max |R_k^{(v)} - R_k^{(v-1)}| < 10^{-6}$ .

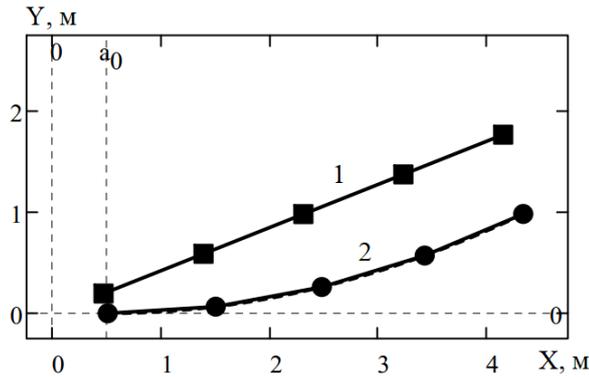
### 3.3.3. Примеры расчета

Рассмотрим задачу формообразования антенны со следующими параметрами:  $a_0 = 0,5$  м;  $a_k = 1$  м ( $k=1,2,\dots,p$ ); материал стержней – алюминий ( $E = 7 \cdot 10^{10}$  Па,  $\rho = 2,7 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>);  $\theta_0 = \pi/8$  рад;  $\lambda = 1/15$ ; материал тросов – нейлон ( $E = 1 \cdot 10^9$  Па,  $\rho = 10^3$  кг/м<sup>3</sup>); количество радиальных стержней варьируется:  $n = 12, 16, 20, 24$ . Каждое звено (КЭ) длиной  $a_k$  представляет собой тонкостенную трубку со срединным радиусом  $r_k^0$  и толщиной стенки  $\delta_k$  ( $k=1,2,\dots,p$ ), которые считаются известными и варьируются в различных вариантах расчета. Трос имеет сплошное круглое сечение с неизвестным радиусом  $r_k$  для  $k$ -го троса.

Пример №1. Рассмотрим случай  $p=4$ . При этом максимальный диаметр антенны в рабочем положении составляет около 9,0 м. Стержни имеют

следующие параметры:  $r_1^0 = 5$  мм,  $r_2^0 = 3$  мм,  $r_3^0 = 3$  мм,  $r_4^0 = 2$  мм;  $\delta_1 = 1$  мм,  $\delta_2 = 1$  мм,  $\delta_3 = 2$  мм,  $\delta_4 = 1$  мм.

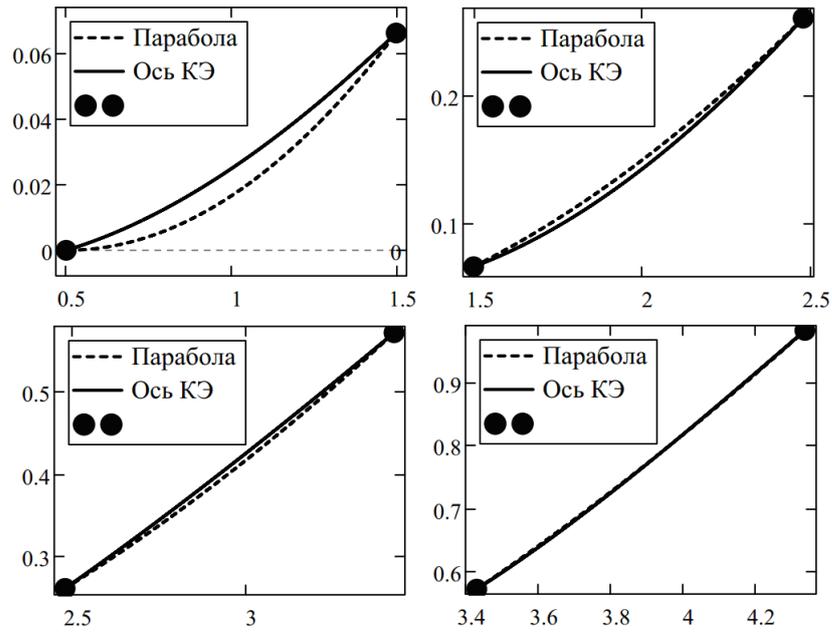
Форма радиального стержня антенны в начальном недеформированном положении (1) и требуемом конечном деформированном положении в виде участка пологой параболы (2) представлена на рис. 3.3.4.



**Рис. 3.3.4.** Начальная (1) и требуемая конечная формы антенны в виде параболы (2) для примера №1

Результаты расчетов при  $p = 4$  и  $n = 12, 16, 20, 24$  жесткостей тросов  $EF_k$ , Па·м<sup>2</sup> и радиусов их поперечных сечений  $r_k$ , мм представлены в табл. 3.3.1. Количество итераций при решении нелинейной системы алгебраических уравнений методом последовательных приближений для всех  $n$  равно 72.

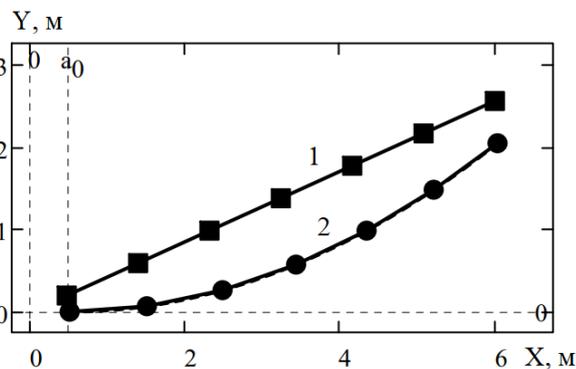
Максимальные отклонения поперечного перемещения формы деформированного КЭ стержня и соответствующего участка параболы составляют:  $k = 1$  — 8,3 мм;  $k = 2$  — 7,1 мм;  $k = 3$  — 8,4 мм;  $k = 4$  — 2,3 мм; сравнения представлены на рис. 3.3.5.



**Рис. 3.3.5.** Отклонения формы радиального стержня для примера №1

Пример №2. Рассмотрим случай  $p = 6$ . При этом максимальный диаметр антенны в рабочем положении составляет около 12,0 м. Стержни имеют следующие радиусы и толщины стенок:  $r_1^0 = 6$  мм,  $r_2^0 = 4$  мм,  $r_3^0 = 5$  мм,  $r_4^0 = 3$  мм,  $r_5^0 = 4$  мм,  $r_6^0 = 2$  мм;  $\delta_1 = 1$  мм,  $\delta_2 = 1$  мм,  $\delta_3 = 1$  мм,  $\delta_4 = 1$  мм,  $\delta_5 = 1$  мм,  $\delta_6 = 1$  мм.

Форма радиального стержня антенны в начальном недеформированном положении (1) и требуемом конечном деформированном положении в виде участка пологой параболы (2) представлена на рис. 3.3.6.



**Рис. 3.3.6.** Начальная (1) и требуемая конечная формы антенны в виде параболы (2) для примера №2

Результаты расчетов при  $p = 6$  и  $n = 12, 16, 20, 24$  жесткостей тросов  $EF_k$  и радиусов их поперечных сечений  $r_k$  представлены в табл. 3.3.1. Количество итераций при решении нелинейной системы алгебраических уравнений методом последовательных приближений для всех  $n$  равно 71.

Максимальные отклонения поперечного перемещения формы деформированного КЭ стержня и соответствующего участка параболы составляют:  $k = 1 - 7,9$  мм;  $k = 2 - 6,5$  мм;  $k = 3 - 8,0$  мм;  $k = 4 - 3,8$  мм;  $k = 5 - 8,5$  мм;  $k = 6 - 2,1$  мм; сравнения представлены на рис. 3.3.7.

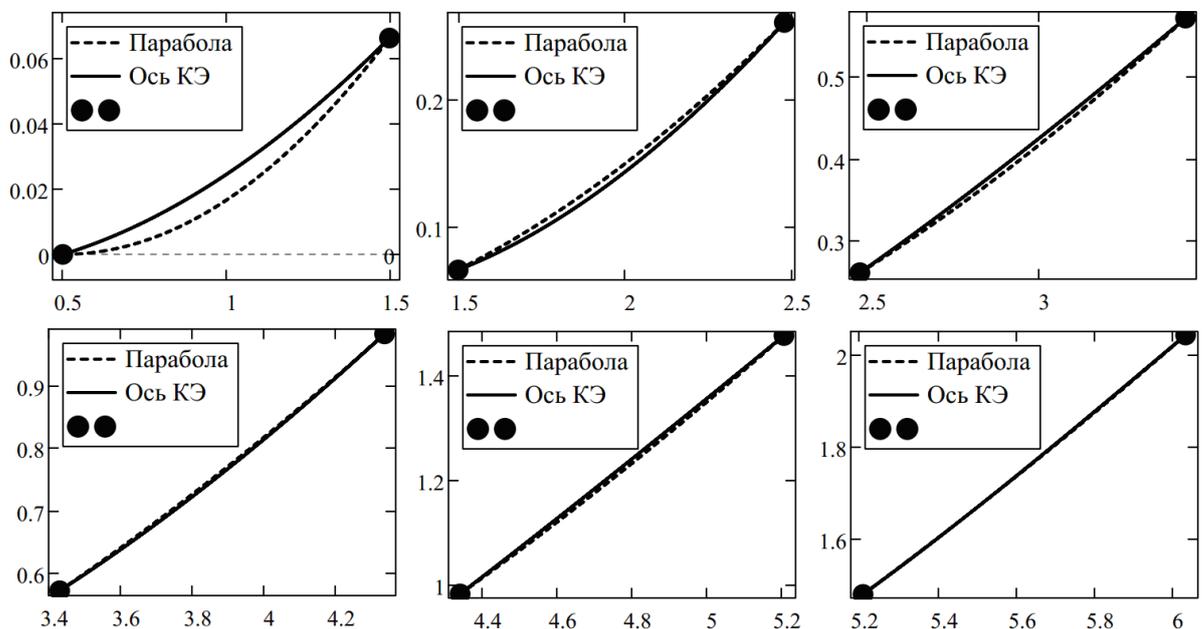


Рис. 3.3.7. Отклонения формы радиального стержня для примера №2

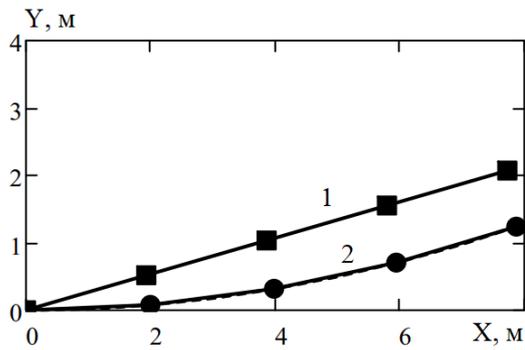
Табл. 3.3.1. Результаты расчета параметров антенны (пример №1 и №2)

$n$	$k$	Пример №1		Пример №2	
		$EF_k, \text{Па}\cdot\text{м}^2$	$r_k, \text{мм}$	$EF_k, \text{Па}\cdot\text{м}^2$	$r_k, \text{мм}$
12	1	297,446	0,308	163,547	0,228
	2	16,538	0,073	22,836	0,085
	3	18,045	0,076	82,444	0,162
	4	42,170	0,116	6,766	0,046
	5	–	–	16,175	0,072
	6	–	–	91,079	0,170
16	1	394,61	0,354	216,972	0,263
	2	21,940	0,084	30,296	0,098
	3	23,939	0,087	109,376	0,187
	4	55,945	0,133	8,977	0,053
	5	–	–	21,459	0,083
	6	–	–	120,831	0,196
20	1	492,121	0,396	270,587	0,293
	2	27,362	0,093	37,783	0,110
	3	29,855	0,097	136,403	0,208
	4	69,769	0,149	11,195	0,060
	5	–	–	26,762	0,092
	6	–	–	150,688	0,219
24	1	589,802	0,433	324,296	0,321
	2	32,793	0,102	45,282	0,120
	3	35,781	0,107	163,478	0,228
	4	83,618	0,163	13,417	0,065
	5	–	–	32,074	0,101
	6	–	–	180,599	0,240

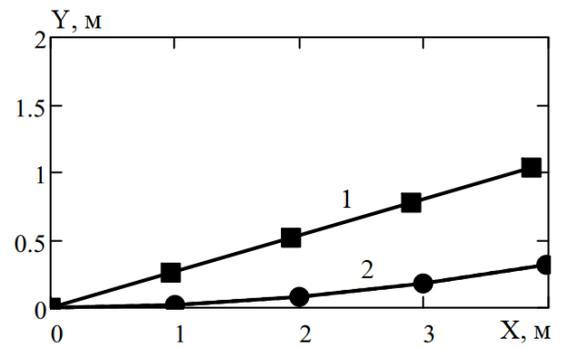
Рассмотрим задачу формообразования более пологой антенны со следующими параметрами:  $a_0 = 0,5$  м; материал стержней – алюминий ( $E = 7 \cdot 10^{10}$  Па,  $\rho = 2,7 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>);  $\theta_0 = \pi/12$  рад;  $\lambda = 1/50$ ; материал тросов – нейлон ( $E = 1 \cdot 10^9$  Па,  $\rho = 10^3$  кг/м<sup>3</sup>); количество радиальных стержней варьируется:  $n = 8, 12, 16, 20$  (для примера №3 и №4) или  $n = 12, 16, 20, 24$  (для примера №5, №6 и №7).

Пример №3. Пусть  $p = 4$ ,  $a_k = 2$  м ( $k = 1, 2, \dots, p$ ). При этом максимальный диаметр антенны в рабочем положении составляет около 16,0 м. Стержни имеют следующие радиусы и толщины стенок:  $r_1^0 = 16$  мм,  $r_2^0 = 12$  мм,  $r_3^0 = 8$  мм,  $r_4^0 = 6$  мм;  $\delta_1 = 3$  мм,  $\delta_2 = 2$  мм,  $\delta_3 = 2$  мм,  $\delta_4 = 1$  мм. Форма радиального стержня антенны в начальном недеформированном положении (1) и требуемом конечном деформированном положении в виде участка пологой параболы (2) представлена на рис. 3.3.8. Количество итераций при решении нелинейной системы алгебраических уравнений методом последовательных приближений для всех  $n$  равно 95. Результаты расчета параметров конструкции антенны приведены в табл. 3.3.2.

Пример №4. Рассмотрим случай, когда стержни имеют большую жесткость на изгиб, а длина их меньше. Принимаем:  $p = 4$ ,  $a_k = 1$  м,  $k = 1, 2, \dots, p$  (максимальный габарит антенны – 8,0 м);  $r_1^0 = 25$  мм,  $r_2^0 = 20$  мм,  $r_3^0 = 15$  мм,  $r_4^0 = 10$  мм;  $\delta_1 = 4$  мм,  $\delta_2 = 3$  мм,  $\delta_3 = 2$  мм,  $\delta_4 = 1$  мм. Форма полученной параболы показана на рис. 3.3.9, а сводка параметров – в табл. 3.3.2. Количество итераций – 222.



**Рис. 3.3.8.** Начальная (1) и требуемая конечная формы антенны в виде параболы (2) для примера №3

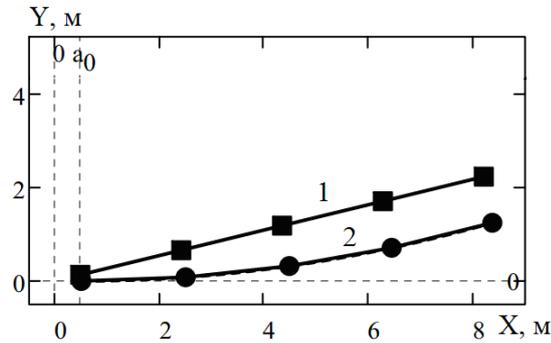


**Рис. 3.3.9.** Начальная (1) и требуемая конечная формы антенны в виде параболы (2) для примера №4

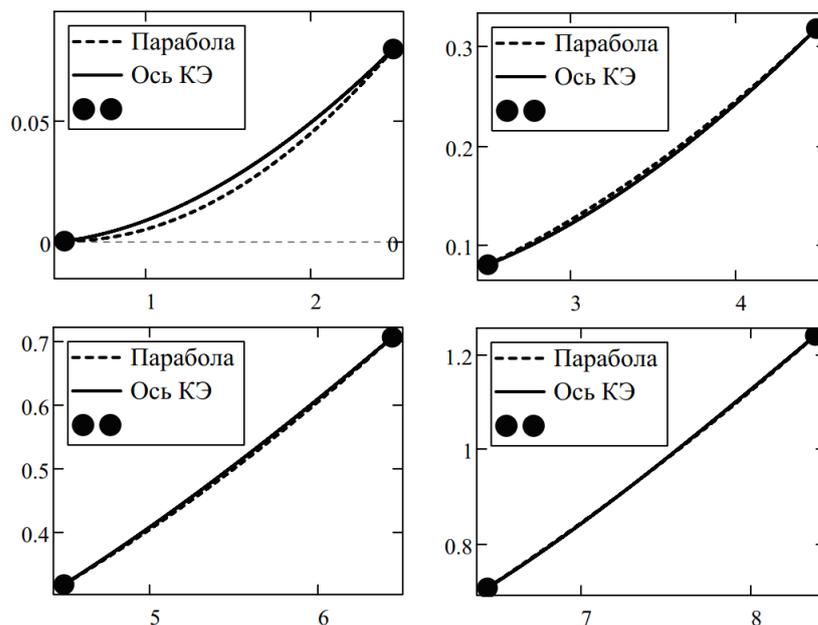
**Табл. 3.3.2.** Результаты расчета параметров антенны (пример №3 и №4)

$n$	$k$	Пример №3			Пример №4		
		$EF_k, \text{Па}\cdot\text{м}^2$	$r_k, \text{мм}$	Масса, кг	$EF_k, \text{Па}\cdot\text{м}^2$	$r_k, \text{мм}$	Масса, кг
8	1	$2,089 \cdot 10^4$	2,578	25,912	$2,121 \cdot 10^5$	8,217	29,805
	2	$3,970 \cdot 10^3$	1,124		$7,462 \cdot 10^4$	4,874	
	3	788,409	0,501		$1,939 \cdot 10^4$	2,484	
	4	321,142	0,320		$3,808 \cdot 10^3$	1,101	
12	1	$3,088 \cdot 10^4$	3,135	38,869	$3,136 \cdot 10^5$	9,992	44,708
	2	$5,870 \cdot 10^3$	1,367		$1,103 \cdot 10^5$	5,926	
	3	$1,166 \cdot 10^3$	0,609		$2,867 \cdot 10^4$	3,021	
	4	474,832	0,389		$5,630 \cdot 10^3$	1,339	
16	1	$4,097 \cdot 10^4$	3,611	51,825	$4,161 \cdot 10^5$	11,509	59,611
	2	$7,787 \cdot 10^3$	1,574		$1,464 \cdot 10^5$	6,826	
	3	$1,547 \cdot 10^3$	0,702		$3,803 \cdot 10^4$	3,479	
	4	629,943	0,448		$7,469 \cdot 10^3$	1,542	
20	1	$5,110 \cdot 10^4$	4,033	64,781	$5,189 \cdot 10^5$	12,852	74,514
	2	$9,711 \cdot 10^3$	1,758		$1,826 \cdot 10^5$	7,623	
	3	$1,929 \cdot 10^3$	0,784		$4,743 \cdot 10^4$	3,885	
	4	785,605	0,500		$9,314 \cdot 10^3$	1,722	

Пример №5. Пусть  $p=4$ ,  $a_k=2$  м,  $k=1,2,\dots,p$  (максимальный габарит антенны – 17,0 м);  $r_1^0=12$  мм,  $r_2^0=10$  мм,  $r_3^0=10$  мм,  $r_4^0=8$  мм;  $\delta_1=3$  мм,  $\delta_2=2$  мм,  $\delta_3=2$  мм,  $\delta_4=1$  мм. Форма полученной антенны параболической формы показана на рис. 3.3.10, сводка полученных при расчете параметров – в табл. 3.3.3. Количество итераций при решении нелинейной системы алгебраических уравнений – 90. Максимальные отклонения поперечного перемещения формы деформированного КЭ стержня и соответствующего участка параболы составляют:  $k=1$  – 4,5 мм;  $k=2$  – 4,6 мм;  $k=3$  – 5,5 мм;  $k=4$  – 2,7 мм; сравнения представлены на рис. 3.3.11.

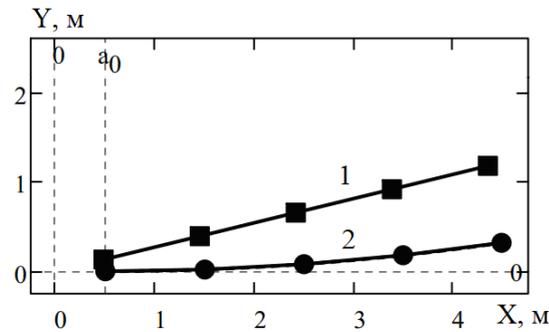


**Рис. 3.3.10.** Начальная (1) и требуемая конечная формы антенны в виде параболы (2) для примера №5

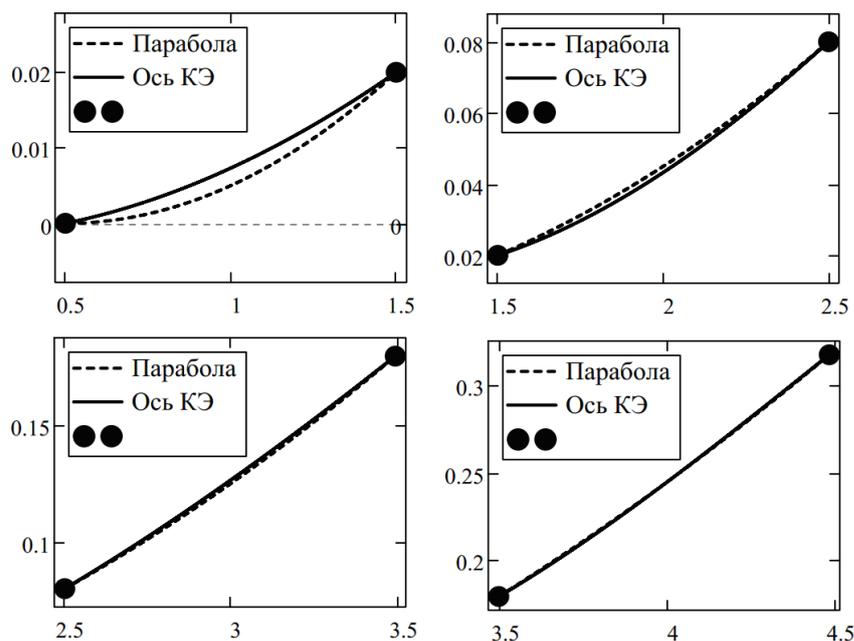


**Рис. 3.3.11.** Отклонения формы радиального стержня для примера №5

**Пример №6.** Пусть  $p=4$ ,  $a_k=1$  м,  $k=1,2,\dots,p$  (максимальный габарит антенны – 9,0 м);  $r_1^0=12$  мм,  $r_2^0=10$  мм,  $r_3^0=10$  мм,  $r_4^0=8$  мм;  $\delta_1=4$  мм,  $\delta_2=2$  мм,  $\delta_3=2$  мм,  $\delta_4=1$  мм. Форма полученной антенны параболической формы показана на рис. 3.3.12, сводка полученных при расчете параметров – в табл. 3.3.3. Количество итераций при решении нелинейной системы алгебраических уравнений – 193. Максимальные отклонения поперечного перемещения формы деформированного КЭ стержня и соответствующего участка параболы составляют:  $k=1$  – 2,3 мм;  $k=2$  – 1,8 мм;  $k=3$  – 1,5 мм;  $k=4$  – 0,7 мм; сравнения представлены на рис. 3.3.13.



**Рис. 3.3.12.** Начальная (1) и требуемая конечная формы антенны в виде параболы (2) для примера №6

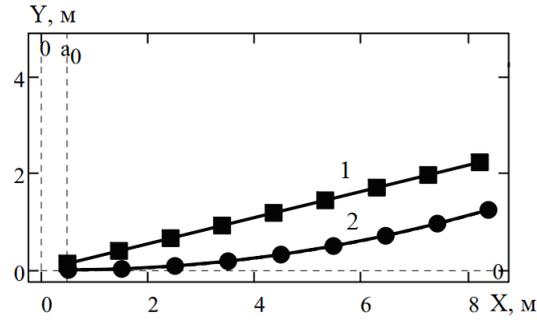


**Рис. 3.3.13.** Отклонения формы радиального стержня для примера №6

Табл. 3.3.3. Результаты расчета параметров антенны (пример №5 и №6)

$n$	$k$	Пример №5			Пример №6		
		$EF_k, \text{Па}\cdot\text{м}^2$	$r_k, \text{мм}$	Масса, кг	$EF_k, \text{Па}\cdot\text{м}^2$	$r_k, \text{мм}$	Масса, кг
12	1	$5,978\cdot 10^3$	1,379	34,407	$1,673\cdot 10^3$	0,730	19,785
	2	843,748	0,518		$7,584\cdot 10^3$	1,554	
	3	516,081	0,405		515,586	0,405	
	4	$1,301\cdot 10^3$	0,644		$3,476\cdot 10^3$	1,052	
16	1	$7,931\cdot 10^3$	1,589	45,875	$2,219\cdot 10^3$	0,840	26,380
	2	$1,119\cdot 10^3$	0,597		$1,006\cdot 10^4$	1,790	
	3	684,665	0,467		684,009	0,467	
	4	$1,727\cdot 10^3$	0,741		$4,612\cdot 10^3$	1,212	
20	1	$9,891\cdot 10^3$	1,774	57,344	$2,767\cdot 10^3$	0,939	32,975
	2	$1,396\cdot 10^3$	0,667		$1,255\cdot 10^4$	1,998	
	3	853,850	0,521		853,031	0,521	
	4	$2,153\cdot 10^3$	0,828		$5,751\cdot 10^3$	1,353	
24	1	$1,185\cdot 10^4$	1,942	68,813	$3,316\cdot 10^3$	1,027	39,570
	2	$1,673\cdot 10^3$	0,73		$1,504\cdot 10^4$	2,188	
	3	$1,023\cdot 10^3$	0,571		$1,022\cdot 10^3$	0,570	
	4	$2,581\cdot 10^3$	0,906		$6,893\cdot 10^3$	1,481	

Пример №7. Пусть  $p=8$ ,  $a_k=1$  м,  $k=1,2,\dots,p$  (максимальный габарит антенны – 9,0 м);  $r_1^0=30$  мм,  $r_2^0=18$  мм,  $r_3^0=18$  мм,  $r_4^0=12$  мм,  $r_5^0=10$  мм,  $r_6^0=8$  мм,  $r_7^0=6$  мм,  $r_8^0=4$  мм;  $\delta_1=6$  мм,  $\delta_2=4$  мм,  $\delta_3=4$  мм,  $\delta_4=3$  мм,  $\delta_5=2$  мм,  $\delta_6=2$  мм,  $\delta_7=2$  мм,  $\delta_8=1$  мм. Форма полученной антенны параболической формы показана на рис. 3.3.14, сводка полученных при расчете параметров – в табл. 3.3.4. Количество итераций при решении нелинейной системы алгебраических уравнений – 244.



**Рис. 3.3.14.** Начальная (1) и требуемая конечная формы антенны в виде параболы (2) для примера №7

**Табл. 3.3.4.** Результаты расчета параметров антенны (пример №7)

$k$	$n$	$EF_k, \text{Па}\cdot\text{м}^2$	$r_k, \text{мм}$	Масса, кг	$n$	$EF_k, \text{Па}\cdot\text{м}^2$	$r_k, \text{мм}$	Масса, кг
1	12	$1,032\cdot 10^6$	18,124	96,537	20	$1,707\cdot 10^6$	23,312	160,895
2		$1,093\cdot 10^5$	5,898			$1,808\cdot 10^5$	7,587	
3		$2,696\cdot 10^4$	2,930			$4,461\cdot 10^4$	3,768	
4		$2,241\cdot 10^4$	2,671			$3,708\cdot 10^4$	3,436	
5		$1,196\cdot 10^3$	0,617			$1,978\cdot 10^3$	0,793	
6		847,374	0,519			$1,402\cdot 10^3$	0,668	
7		$1,040\cdot 10^3$	0,575			$1,721\cdot 10^3$	0,740	
8		292,698	0,305			484,65	0,393	
1	16	$1,369\cdot 10^6$	20,875	128,716	24	$2,046\cdot 10^6$	25,521	193,074
2		$1,450\cdot 10^5$	6,794			$2,167\cdot 10^5$	8,306	
3		$3,577\cdot 10^4$	3,374			$5,347\cdot 10^4$	4,125	
4		$2,973\cdot 10^4$	3,076			$4,444\cdot 10^4$	3,761	
5		$1,586\cdot 10^3$	0,711			$2,371\cdot 10^3$	0,869	
6		$1,124\cdot 10^3$	0,598			$1,680\cdot 10^3$	0,731	
7		$1,380\cdot 10^3$	0,663			$2,063\cdot 10^3$	0,810	
8		388,311	0,352			580,387	0,430	

Максимальные отклонения поперечного перемещения формы деформированного КЭ стержня и соответствующего участка параболы составляют:  $k = 1 - 2,6$  мм;  $k = 2 - 2,2$  мм;  $k = 3 - 1,8$  мм;  $k = 4 - 1,1$  мм;  $k = 5 - 0,44$  мм;  $k = 6 - 0,34$  мм;  $k = 7 - 0,88$  мм;  $k = 8 - 0,84$  мм; сравнения представлены на рис. 3.3.15.

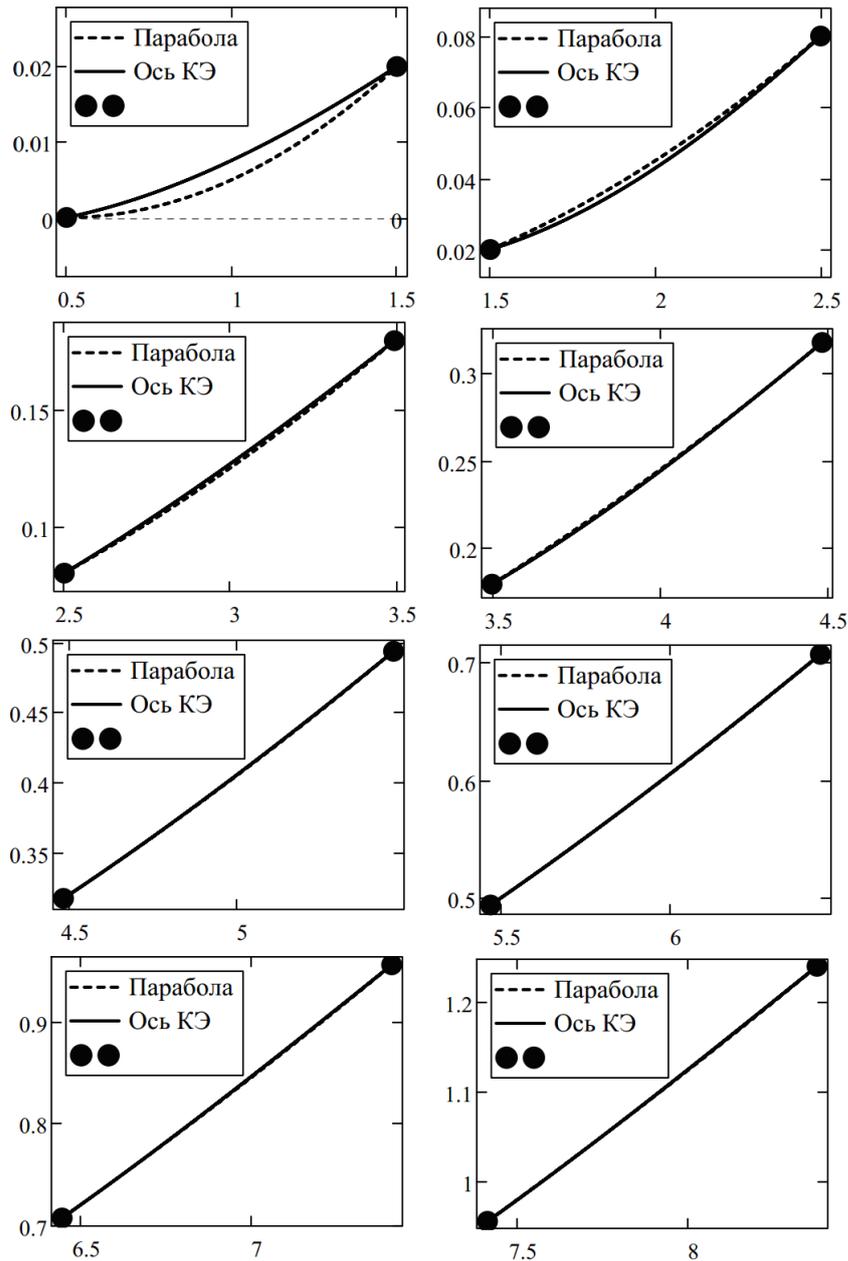


Рис. 3.3.15. Отклонения формы радиального стержня для примера №7

### 3.4. Формообразование зонтичной антенны при сильном изгибе радиальных стержней

#### 3.4.1. Постановка задачи

Для описания сильного изгиба стержня каждое его звено  $k = 1, 2, \dots, m$  будем рассматривать как конечный элемент (КЭ) в местной системе координат  $xu$ , который в узле  $k-1$  жестко связан с  $(k-1)$ -м КЭ, рис. 3.4.1.

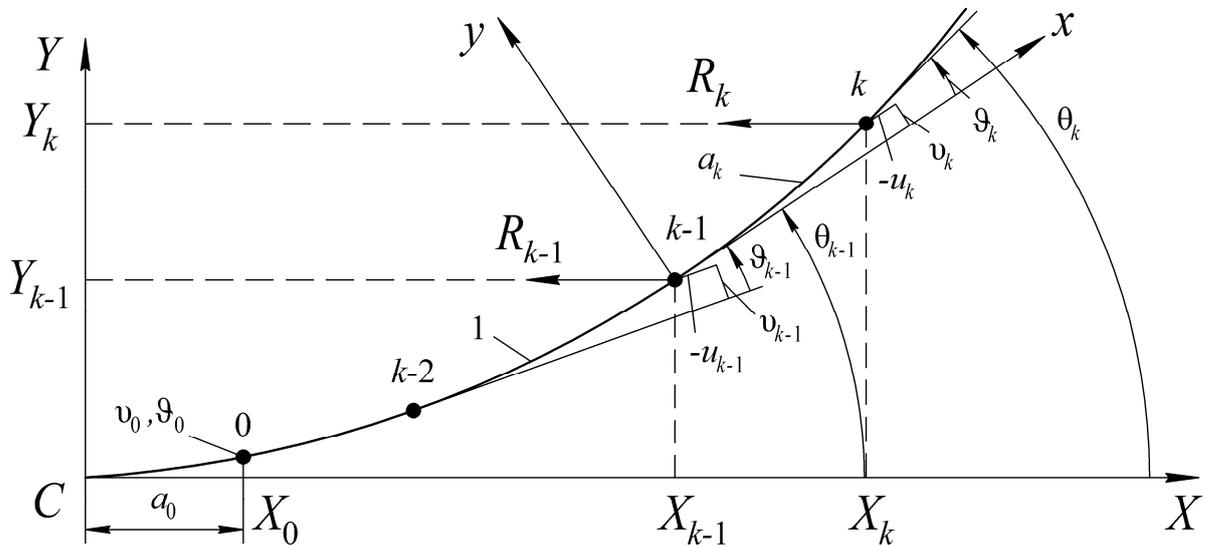


Рис. 3.4.1. Конечно-элементная модель сильного изгиба радиального стержня

Координаты и угол наклона оси стержня в узле  $k-1$  равны  $X_{k-1}$ ,  $Y_{k-1}$ ,  $\theta_{k-1}$ . Относительное поперечное перемещение  $v(x)$  и угол поворота  $\vartheta(x)$   $k$ -го КЭ как консольного стержня длины  $a_k$  записываются в виде (3.2.2):

$$\begin{aligned} v(x) &= v_k \varphi_k(x) + \vartheta_k \psi_k(x), \quad \vartheta(x) = v'(x); \\ \varphi_k(x) &= 3 \frac{x^2}{a_k^2} - 2 \frac{x^3}{a_k^3}, \quad \psi_k(x) = \frac{x^3}{a_k^2} - \frac{x^2}{a_k}, \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

где штрихом обозначена производная по координате  $x$ . Продольное перемещение  $u_k$  конца КЭ за счет сильного изгиба при условии, что стержень является нерастяжимым ( $\varepsilon = u' + 0.5v'^2 = 0$ ), с учетом (3.4.1) записывается как

$$u_k = -\frac{1}{2} \int_0^{a_k} (v')^2 dx = -\frac{1}{2} \left( \frac{6}{5a_k} v_k^2 - \frac{1}{10} v_k \vartheta_k + \frac{a_k}{15} \vartheta_k^2 \right). \quad (3.4.2)$$

Потенциальная энергия изгиба стержня

$$\Pi = \sum_{k=1}^m \Pi_k, \quad \Pi_k = \frac{1}{2} \frac{12EI_k}{a_k^3} (v_k^2 - a_k v_k \vartheta_k + \frac{a_k^2}{3} \vartheta_k^2). \quad (3.4.3)$$

Перемещения и углы поворота в узлах стержня  $k=1,2,\dots,m$  определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} X_k &= a_0 + \sum_{i=1}^k [(a_i + u_i) \cos \theta_{i-1} - v_i \sin \theta_{i-1}]; \\ Y_k &= v_0 + \sum_{i=1}^k [(a_i + u_i) \sin \theta_{i-1} + v_i \cos \theta_{i-1}]; \\ \theta_k &= \vartheta_0 + \sum_{i=1}^k \vartheta_i. \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

Вариация работы сил  $R_k$  на перемещениях  $\delta X_k$  (рис. 3.4.1) записывается в виде:

$$-\delta A = \sum_{k=1}^m R_k \delta X_k = \sum_{k=1}^m R_k \sum_{i=1}^k (\xi_i + y_i \sum_{j=1}^{i-1} \delta \vartheta_j), \quad (3.4.5)$$

где с учетом (3.4.2) и (3.4.4) введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \xi_i &= (p_i c_{i-1} - q_i) \delta v_i + q_i c_{i-1} \delta \vartheta_i, \quad y_i = -[(a_i + u_i) s_{i-1} + v_i c_{i-1}]; \\ p_i &= -\frac{1}{5} \left( \frac{6}{a_i} v_i - \frac{1}{4} \vartheta_i \right), \quad q_i = -\frac{1}{5} \left( \frac{a_i}{3} \vartheta_i - \frac{1}{4} v_i \right), \quad u_i = \frac{1}{2} (p_i v_i + q_i \vartheta_i); \\ c_i &= \cos \theta_i, \quad s_i = \sin \theta_i. \end{aligned}$$

Двойная и тройная суммы в (3.4.5) преобразуются как

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m R_k \sum_{i=1}^k \xi_i &= \sum_{k=1}^m \xi_k \sum_{i=k}^m R_i; \\ \sum_{k=1}^m R_k \sum_{i=1}^k y_i \sum_{j=1}^{i-1} \delta \vartheta_j &= \sum_{k=1}^{m-1} \delta \vartheta_k \sum_{i=k+1}^m y_i \sum_{j=i}^m R_j. \end{aligned}$$

Тогда получим:

$$\begin{aligned}
-\delta A = \sum_{k=1}^m [\delta v_k (c_{k-1} p_k - s_{k-1}) \sum_{i=k}^m R_i + \\
+ \delta \vartheta_k (q_k c_{k-1} \sum_{i=k}^m R_i + (1 - \delta_{km}) \sum_{i=k+1}^m y_i \sum_{j=i}^m R_j)],
\end{aligned} \tag{3.4.6}$$

где  $\delta_{km}$  – символ Кронекера ( $\delta_{km} = 0$  при  $k \neq m$ ,  $\delta_{km} = 1$  при  $k = m$ )

Уравнения равновесия изогнутого стержня в обобщенных координатах  $v_k$  и  $\vartheta_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ , получаются на основании принципа возможных перемещений  $\delta\Pi - \delta A = 0$  и с учетом (3.4.3), (3.4.6) записываются в виде:

$$\begin{aligned}
\frac{12EI_k}{a_k^3} (v_k - \frac{a_k}{2} \vartheta_k) + (c_{k-1} p_k - s_{k-1}) \sum_{i=k}^m R_i = 0; \\
\frac{12EI_k}{a_k^3} (-\frac{a_k}{2} v_k + \frac{a_k^2}{3} \vartheta_k) + q_k c_{k-1} \sum_{i=k}^m R_i + (1 - \delta_{km}) \sum_{i=k+1}^m y_i \sum_{j=i}^m R_j = 0; \\
k = 1, 2, \dots, m.
\end{aligned} \tag{3.4.7}$$

Приведем уравнения (3.4.7) к безразмерному виду. Для этого введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
\bar{v}_k = \frac{v_k}{a_k}, \quad \bar{u}_k = \frac{u_k}{a_k} = \frac{1}{2} (p_k \bar{v}_k + \bar{q}_k \vartheta_k); \\
p_k = -\frac{1}{5} (6\bar{v}_k - \frac{1}{4} \vartheta_k), \quad \bar{q}_k = -\frac{1}{5} (\frac{1}{3} \vartheta_k - \frac{1}{4} \bar{v}_k); \\
\xi_k^v = c_{k-1} p_k - s_{k-1}, \quad \xi_k^\vartheta = c_{k-1} \bar{q}_k, \quad \eta_i = \frac{y_i}{a_i} = -[(1 + \bar{u}_i) s_{i-1} + \bar{v}_i c_{i-1}].
\end{aligned} \tag{3.4.8}$$

С учетом (3.4.8) уравнения (3.4.7) записываются в виде:

$$\begin{aligned}
\frac{12EI_k}{a_k^2} (\bar{v}_k - \frac{1}{2} \vartheta_k) + \xi_k^v \sum_{i=k}^m R_i = 0; \\
\frac{12EI_k}{a_k^2} (-\frac{1}{2} \bar{v}_k + \frac{1}{3} \vartheta_k) + \xi_k^\vartheta \sum_{i=k}^m R_i + (1 - \delta_{km}) \sum_{i=k+1}^m \eta_i \sum_{j=i}^m R_j = 0; \\
k = 1, 2, \dots, m.
\end{aligned}$$

Преобразуем двойную сумму во втором уравнении:

$$\sum_{i=k+1}^m \eta_i \sum_{j=i}^m R_j = \sum_{i=k+1}^m R_i \sum_{j=k+1}^i \eta_j = \sum_{i=k+1}^m R_i \zeta_{ki};$$

$$\zeta_{ki} = \sum_{j=k+1}^i \eta_j = \begin{cases} 0, & i < k+1 \\ \eta_{k+1} + \eta_{k+2} + \dots + \eta_i, & i \geq k+1 \end{cases};$$

В результате уравнения (3.4.7) для обобщенных координат  $\bar{v}_k$  и  $\vartheta_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$  будут иметь вид:

$$\frac{12EI_k}{a_k^2} (\bar{v}_k - \frac{1}{2} \vartheta_k) + \xi_k^v \sum_{i=k}^m R_i = 0;$$

$$\frac{12EI_k}{a_k^2} (-\frac{1}{2} \bar{v}_k + \frac{1}{3} \vartheta_k) + \xi_k^g \sum_{i=k}^m R_i + (1 - \delta_{km}) \sum_{i=k+1}^m R_i \zeta_{ki} = 0; \quad (3.4.9)$$

$$k = 1, 2, \dots, m.$$

Уравнения (3.4.9) для их численного решения запишем в матричном виде в зависимости от векторов перемещений  $\mathbf{V} = \{\bar{v}_k\}$ , углов поворота  $\mathbf{\Omega} = \{\vartheta_k\}$  и реакций тросов  $\mathbf{R} = \{R_k\}$ :

$$12\mathbf{G}(\mathbf{V} - \frac{1}{2}\mathbf{\Omega}) + \mathbf{A}\mathbf{R} = 0;$$

$$12\mathbf{G}(-\frac{1}{2}\mathbf{V} + \frac{1}{3}\mathbf{\Omega}) + \mathbf{B}\mathbf{R} = 0, \quad (3.4.10)$$

где матрица жесткости  $\mathbf{G}$  и нелинейные матрицы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  порядка  $m$  имеют вид:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \ddots & & & & \\ & \frac{EI_k}{a_k^2} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \xi_1^v & \xi_1^v & \dots & \xi_1^v & \xi_1^v \\ 0 & \xi_2^v & \dots & \xi_2^v & \xi_2^v \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \xi_{m-1}^v & \xi_{m-1}^v \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \xi_m^v \end{bmatrix}; \quad (3.4.11)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \xi_1^g & \xi_1^g & \dots & \xi_1^g & \xi_1^g \\ 0 & \xi_2^g & \dots & \xi_2^g & \xi_2^g \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \xi_{m-1}^g & \xi_{m-1}^g \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \xi_m^g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \zeta_{12} & \dots & \zeta_{1,m-1} & \zeta_{1,m} \\ 0 & 0 & \dots & \zeta_{2,m-1} & \zeta_{2,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \zeta_{m-1,m} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

### 3.4.2. Алгоритм решения задачи

Формообразование поверхности вращения (или в данном случае – изогнутого радиального стержня каркаса, на который накладывается с некоторым натяжением мягкая оболочка) согласно уравнению  $Y = F(X)$  может осуществляться в пределах рассматриваемых элементов за счет выбора реакций  $R_k$  натянутых тросов, расположенных в плоскостях параллелей, или за счет изгибных жесткостей  $EI_k$  элементов радиальных стержней, или за счет изменения тех и других одновременно. Решение такой нелинейной задачи является неединственным и в некоторых областях изменения указанных параметров оно может не существовать.

Здесь рассматривается случай, когда уравнение заданной формы  $Y = F(X)$  удовлетворяется в точках  $k = 1, 2, \dots, m$  за счет регулируемых реакций тросов  $R_k$  только по координатам  $X_k$  и  $Y_k = F(X_k)$ , а углы наклона  $\theta_k$  в этих точках остаются свободными, т.е. не требуется выполнение условия  $\theta_k = \arctg(F'(X_k))$ . Жесткости  $EI_k$  элементов изгибаемого стержня считаются заданными.

Эквивалентное перемещение  $v_k$  изогнутого стержня, точно соответствующее заданной форме по координатам  $X_k$ ,  $Y_k = F(X_k)$  определяется из кинематических соотношений:

$$v_k = -(X_k - X_{k-1}) \cos \theta_{k-1} + (Y_k - Y_{k-1}) \sin \theta_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad (3.4.12)$$

где  $\theta_k = \vartheta_0 + \sum_{i=1}^k \vartheta_i$ ,  $\vartheta_0 = \arctg(F'(X_0))$ ; углы  $\vartheta_i$  при  $i = 1, 2, \dots, m$  считаются неизвестными наряду с реакциями  $R_k$  при  $k = 1, 2, \dots, m$ .

В результате безразмерные перемещения  $\bar{u}_k$ ,  $\bar{v}_k$  и параметры (3.4.8), входящие в уравнения (3.4.9) и, соответственно, в нелинейные матрицы  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  (3.4.11), зависят от неизвестных углов  $\vartheta_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ . Таким образом, при выполнении кинематических соотношений (3.4.12) основными неизвестными будут  $\vartheta_k$  и  $R_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ , т.е. – векторы  $\mathbf{\Omega} = \{\vartheta_k\}$  и  $\mathbf{R} = \{R_k\}$ , для определения

которых имеем уравнения (3.4.10). Для удобства решения систему двух матричных уравнений (3.4.10) путем исключения вектора  $\mathbf{R}$  приведем к одному уравнению, содержащему только неизвестные параметры  $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_m$ :

$$\mathbf{G}\boldsymbol{\Omega} = \left(\frac{1}{2}\mathbf{A} + \mathbf{B}\right)\left(\frac{1}{3}\mathbf{A} + \frac{1}{2}\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{G}\mathbf{V} = \mathbf{P}. \quad (3.4.13)$$

Это уравнение с учетом системы соотношений (3.4.12) решается методом последовательных приближений по схеме  $\mathbf{G}\boldsymbol{\Omega}^{(r+1)} = \mathbf{P}^{(r)}$ , где  $r = 0, 1, \dots$  – номер приближения по набору неизвестных параметров  $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_m$ ;  $\mathbf{P}^{(r)}$  – вектор (правая часть уравнения (3.4.13)), зависящий от  $\vartheta_1^{(r)}, \vartheta_2^{(r)}, \dots, \vartheta_m^{(r)}$ . В начальном (нулевом) приближении при  $r = 0$  для углов  $\vartheta_k$  будем использовать точные значения  $\vartheta_k^{(0)} = \vartheta_k^0$ , соответствующие заданной форме изогнутого стержня  $Y = F(X)$  в точках  $k$ , которые определяются как  $\vartheta_k^0 = \theta_k^0 - \vartheta_0 - \sum_{i=1}^{k-1} \vartheta_i^0$  при  $\theta_k^0 = \arctg(F'(X_k))$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ .

После получения сходящегося с заданной точностью решения для вектора  $\boldsymbol{\Omega} = \{\vartheta_k\}$  вычисляется вектор реакций тросов  $\mathbf{R}$  из уравнения, которое получается из системы (3.4.10) путем исключения вектора  $\mathbf{G}\boldsymbol{\Omega}$ :

$$\mathbf{R} = -\left(\frac{1}{3}\mathbf{A} + \frac{1}{2}\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{G}\mathbf{V}. \quad (3.4.14)$$

В исходном состоянии после раскрытия системы радиальный стержень 1' является прямолинейным и отклоненным по отношению к оси  $X$  на некоторый угол  $\beta_0$ , рис. 3.1.1, б. Координаты точки  $k' = 1', 2', \dots, m'$  стержня в исходном состоянии равны  $X_{k'} = L_{k'} \cos \beta_0$ , где  $L_{k'} = (a_0 - \delta_0) + \sum_{i=1}^k a_i$  – расстояние между шарниром, соединяющим гидроцилиндр 2 с поворотным кронштейном 6 (рис. 3.1.1, а), и точкой  $k'$ . Длина  $k$ -го троса в виде правильного  $n$ -угольника, соединяющего по параллели  $k$ -ые точки всех  $n$  радиальных стержней, выбирается так, что в исходном состоянии он является нерастянутым и не имеет провисаний. После поворота кронштейна 6 до упора (угол наклона стержня в

корневой точке 0 станет равным  $\vartheta_0$ )  $k$ -ый трос натянется с усилием  $T_k = F_k \sigma(\varepsilon_k)$ , где  $F_k$  – площадь поперечного сечения,  $\sigma(\varepsilon_k)$  – растягивающее напряжение в  $k$ -ом тросе. Относительное удлинение  $k$ -го троса в конечном натянутом состоянии будет равно

$$\varepsilon_k = \frac{X_k}{X_{k'}} - 1, \quad (3.4.15)$$

где  $X_k$  – известная координата узла  $k$  в конечном деформированном состоянии (т.е. координата заданной формы), а  $X_{k'} = L_{k'} \cos \beta_0$  – координата узла  $k'$  в исходном недеформированном положении стержня.

Реакция  $k$ -го троса в  $k$ -ом узле стержня определяется из уравнения равновесия узла:

$$R_k = 2T_k \sin \frac{\pi}{n} = 2F_k \sigma(\varepsilon_k) \sin \frac{\pi}{n}. \quad (3.4.16)$$

При линейно-упругом деформировании тросов  $\sigma(\varepsilon_k) = E_T \varepsilon_k$  при  $\varepsilon_k > 0$  и  $\sigma(\varepsilon_k) = 0$  при  $\varepsilon_k \leq 0$ , где  $E_T$  – модуль упругости материала троса. По найденным значениям  $R_k$  можно определить необходимые площади  $F_k$  или жесткости на растяжение  $E_T F_k$  тросов для получения формы  $Y_k = F(X_k)$  изогнутых радиальных стержней.

### 3.4.3. Верификация на примере сильного изгиба консольного стержня

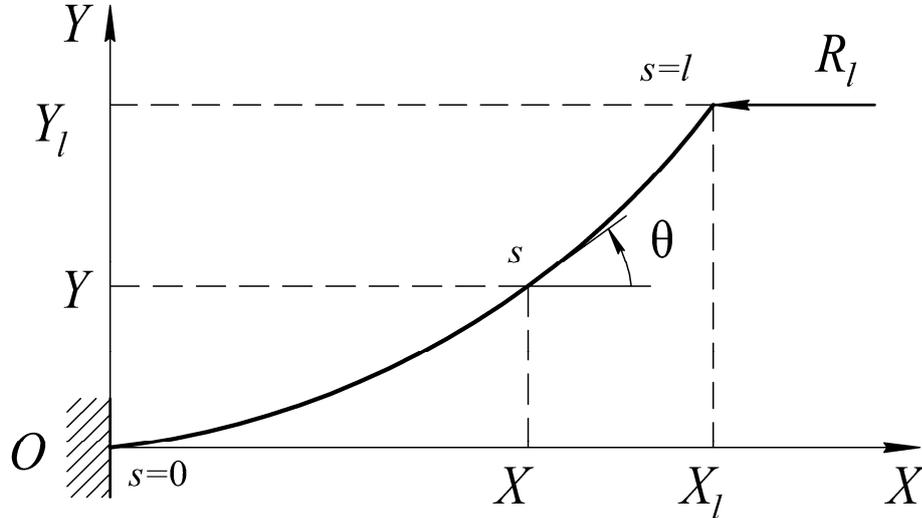
Для верификации разработанной КЭ-модели сильного изгиба стержня, описываемой уравнениями (3.4.9), рассмотрим стержень длиной  $l$  с постоянной изгибной жесткостью  $EI$ , который неподвижно закреплен на конце  $s = 0$  и нагружен на конце  $s = l$  продольной сжимающей силой  $R_l$ , превышающей критическую силу потери устойчивости (эластика Эйлера). Дифференциальные уравнения изгиба нерастяжимого стержня (рис. 3.4.2) записываются в виде:

$$\frac{dX}{ds} = \cos \theta, \quad \frac{dY}{ds} = \sin \theta, \quad \frac{d\theta}{ds} = \frac{R_l}{EI} (Y_l - Y), \quad (3.4.17)$$

где

$$Y_l = Y(l), \quad R_l > \frac{\pi^2 EI}{4 l^2}.$$

Начальные условия при  $s = 0$ :  $X = 0$ ,  $Y = 0$ ,  $\theta = 0$ .



**Рис. 3.4.2.** Продольное сжатие нерастяжимого стержня (эластика Эйлера)

Выполнены сравнения решений дифференциальных уравнений (3.4.17) с решениями системы алгебраических уравнений (3.4.9) для КЭ-модели при трех различных значениях параметра  $\nu = R_l l^2 / EI$ : 2,5; 3,0; 3,5. Использовались следующие значения начальных (нулевых) приближений  $\bar{Y}_l = Y_l / l < 1$  для «пристрелки» при численных решениях уравнений (3.4.17) методом последовательных приближений в комбинации с методом Адамса:  $\bar{Y}_l = 0,25$  и  $\bar{Y}_l = 0,40$  при  $\nu = 2,5$ ;  $\bar{Y}_l = 0,50$  и  $\bar{Y}_l = 0,75$  при  $\nu = 3,0$ ;  $\bar{Y}_l = 0,65$  и  $\bar{Y}_l = 0,90$  при  $\nu = 3,5$  (два начальных значения  $\bar{Y}_l$  для одного  $\nu$  приводят к одному и тому же результату). Результаты сходящихся с точностью до  $10^{-9}$  решений для углов поворота  $\theta(s/l)$  в точках  $s/l = 1/4, 1/2, 3/4, 1.0$  приведены в табл. 3.4.1 в строках I.

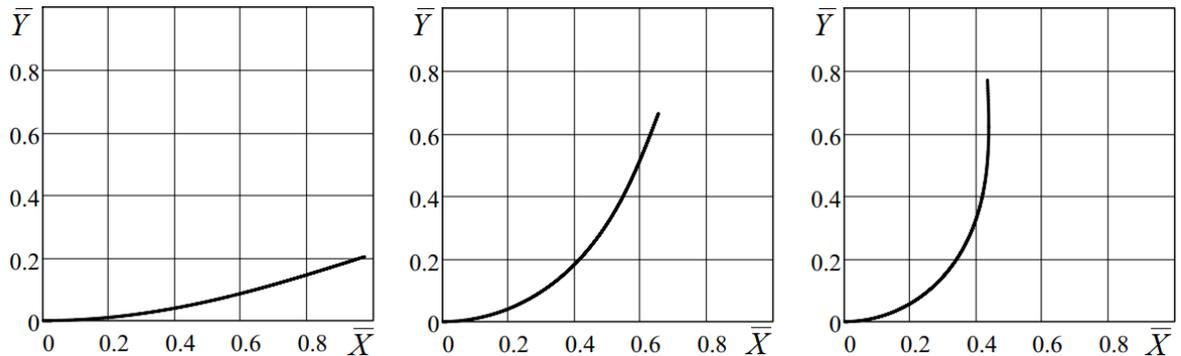
При использовании КЭ-модели стержень делился на  $m = 4$  и  $m = 8$  одинаковых «консольных» КЭ ( $a_k = l/m$ ,  $EI_k = EI$ ,  $R_k = 0$  при  $k = 1, 2, \dots, m-1$ ). В качестве нулевого приближения при решении уравнений (3.4.9) методом последовательных приближений в этом случае использовались результаты

решения уравнений (3.4.17) для  $\theta(s/l)$ . Полученные решения для рассмотренных случаев  $(\nu, m)$  приведены в табл. 3.4.1 (строки II и III для  $m=4$  и  $m=8$ , соответственно).

**Табл. 3.4.1.** Верификация полученной КЭ-модели сильного изгиба стержня

$\nu$	Вар.	$\bar{Y}_l$	$\theta(1/4)$	$\theta(1/2)$	$\theta(3/4)$	$\theta(1)$
2,5	I	0,2037	0,1241	0,2290	0,2990	0,3236
	II	0,1879	0,1141	0,2107	0,2752	0,2978
	III	0,1995	0,1214	0,2241	0,2926	0,3166
3,0	I	0,6636	0,4825	0,8806	1,1368	1,2245
	II	0,6678	0,4839	0,8844	1,1423	1,2304
	III	0,6640	0,4824	0,8806	1,1369	1,2246
3,5	I	0,7704	0,6503	1,1739	1,5002	1,6095
	II	0,7772	0,6532	1,1823	1,5116	1,6213
	III	0,7713	0,6506	1,1747	1,5014	1,6107

На рис. 3.4.3 показаны формы изгиба стержня в безразмерных координатах  $\bar{X} = X/l$ ,  $\bar{Y} = Y/l$  для значений  $\nu = R_l^2/EI$ , равных 2,5; 3,0; 3,5, соответственно.



**Рис. 3.4.3.** Формы изгиба стержня для значений  $\nu$ , равных 2,5; 3,0; 3,5

Сравнения результатов решения уравнений (3.4.17) и (3.4.9) показывают, что КЭ-модель сильного изгиба стержня имеет достаточно высокую точность.

### 3.4.4. Примеры расчета

Рассмотрим параболическую антенну с формой  $Y = \lambda X^2$  при трех значениях параметра  $\lambda$ :  $1/15$ ,  $1/10$ ,  $1/5$ ; число радиальных стержней  $n = 24$ . Углы наклона стержней в начальном прямолинейном положении (рис. 3.1.1, б), в котором участки тросов, соединяющих  $k$ -ые узлы стержней, также являются прямолинейными и ненапрянутыми, приняты равными  $\beta_0 = 60^\circ$  при  $\lambda = 1/15$  и  $\lambda = 1/10$ ,  $\beta_0 = 70^\circ$  при  $\lambda = 1/5$ . Длина центрального недеформируемого участка равна  $a_0 = 0,25$  м ( $\delta_0 = 0$ ). Максимальный диаметр антенны составляет около 20 м.

Выполнены расчеты сильного изгиба радиальных стержней антенны под действием реакций растянутых тросов в конечном деформированном состоянии циклически симметричной системы. Результаты получены путем решения нелинейных алгебраических уравнений (3.4.13), (3.4.14) по методу последовательных приближений с точностью до  $10^{-9}$  относительно неизвестных  $\theta_k$ ,  $R_k$  с учетом условий связи (3.4.12), обеспечивающих точное выполнение заданной формы антенны в узлах по координатам  $X_k$ ,  $Y_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ . При этом в качестве начальных приближений для  $\theta_k$  использовались значения  $\theta_k^0$  заданной формы, т.е.  $\theta_k^{(0)} = \theta_k^0$ .

Рассмотрены два расчетных случая для каждой из 3-х антенн, отличающихся значением  $\lambda$ :

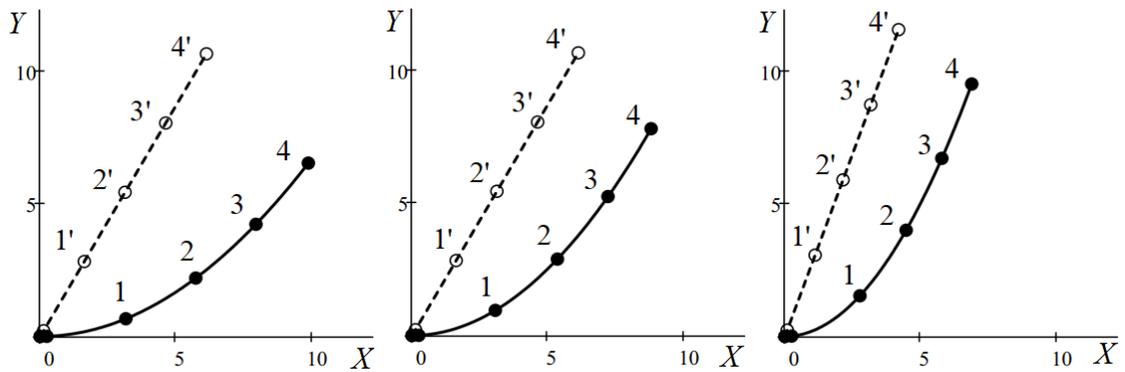
1) Радиальный стержень антенны делится на 4 упругих звена ( $m = 4$ ,  $k = 1, 2, 3, 4$ ) длиной  $a_k = 3$  м; заданные изгибные жесткости этих звеньев  $EI_k$ , Па·м<sup>4</sup> и проектные углы наклона в узлах заданной формы  $\theta_k^0 = \arctg(2\lambda X_k)$  представлены в табл. 3.4.2. Формы радиального стержня в начальном недеформированном состоянии (пунктирная линия) и в требуемом конечном деформируемом состоянии (сплошная линия) для  $m = 4$  при  $\lambda = 1/15, 1/10, 1/5$  представлены на рис. 3.4.4, соответственно, в координатах  $X$ ,  $Y$ , м.

2) Радиальный стержень делится на 6 упругих звеньев ( $m = 6, k = 1, 2, \dots, 6$ ) длиной  $a_k = 2$  м; для этого случая значения  $EI_k$ , Па·м<sup>4</sup> и углы  $\theta_k^0$  представлены в табл. 3.4.3. Формы радиального стержня в начальном и требуемом конечном состояниях при  $\lambda = 1/15, 1/10, 1/5$  представлены на рис. 3.4.5, соответственно, в координатах  $X, Y$ , м.

Полученные значения  $\theta_k, R_k, N$ , а также относительные деформации растяжения тросов  $\varepsilon_k$  и требуемые для получения заданной формы антенны жесткости тросов на растяжение  $E_T F_k$  (Па·м<sup>2</sup>), которые определяются по формуле  $R_k = 2E_T F_k \varepsilon_k \sin(\pi/n)$ , приведены в табл. 3.4.2 и табл. 3.4.3 соответственно для случаев  $m = 4$  и  $m = 6, k = 1, 2, \dots, m$ .

**Табл. 3.4.2.** Исходные данные и результаты расчета при  $m = 4$

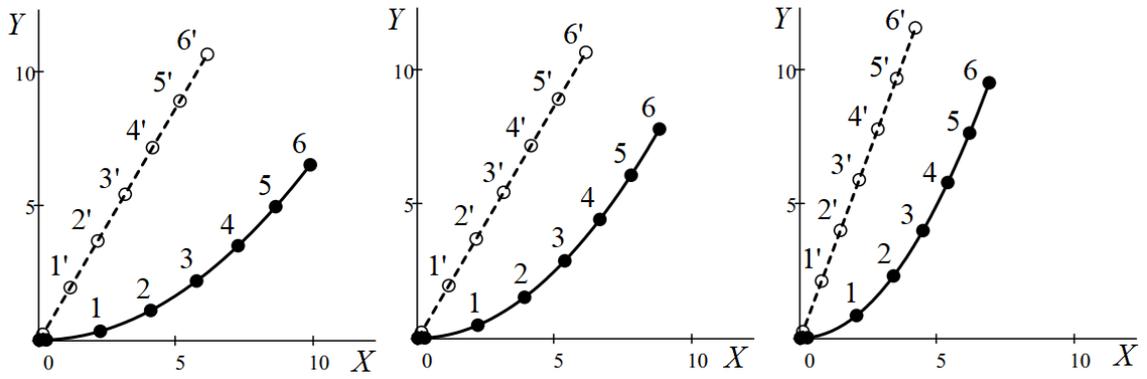
$\lambda$	$k$	$EI_k$	$\theta_k^0$	$\theta_k$	$R_k$	$\varepsilon_k$	$E_T F_k$
$\frac{1}{15}$	1	1978,3237	0,3986	0,3885	47,8979	0,9467	193,8079
	2	1643,2336	0,6526	0,6483	41,6127	0,8361	190,6416
	3	1213,0318	0,8143	0,8099	6,1016	0,7195	32,4871
	4	671,2248	0,9214	0,9019	17,6858	0,6136	110,4073
$\frac{1}{10}$	1	1978,3237	0,5503	0,5342	96,4922	0,8935	413,6997
	2	1643,2336	0,8197	0,8182	54,8316	0,7167	293,0548
	3	1213,0318	0,9651	0,9608	5,4540	0,5634	37,0847
	4	671,2248	1,0545	1,0391	13,6527	0,4397	118,9434
$\frac{1}{5}$	1	1978,3237	0,8352	0,8165	217,5199	1,5098	551,8955
	2	1643,2336	1,0604	1,0634	54,1653	1,1016	188,3499
	3	1213,0318	1,1626	1,1585	1,7656	0,8357	8,0929
	4	671,2248	1,2224	1,2129	8,6875	0,6491	51,2688



**Рис. 3.4.4.** Формы радиального стержня в начальном и конечном положениях для  $n = 24$ ,  $m = 4$  и  $\lambda = 1/15$ ,  $\lambda = 1/10$ ,  $\lambda = 1/5$

**Табл. 3.4.3.** Исходные данные и результаты расчета при  $m = 6$

$\lambda$	$k$	$EI_k$	$\theta_k^0$	$\theta_k$	$R_k$	$\varepsilon_k$	$E_T F_k$
$\frac{1}{15}$	1	7656,4383	0,2876	0,2822	260,5498	0,9728	1025,9801
	2	6684,4295	0,4961	0,4961	105,2135	0,9113	442,2760
	3	6013,2047	0,6526	0,6458	151,509	0,8352	694,9330
	4	4204,6526	0,7681	0,7717	10,4413	0,7567	52,8544
	5	4204,6526	0,8547	0,8465	5,4236	0,6820	30,4614
	6	1631,6882	0,9214	0,9109	66,9765	0,6131	418,4988
$\frac{1}{10}$	1	7656,4383	0,4116	0,3987	592,7990	0,9427	2408,7411
	2	6013,2047	0,6609	0,6611	326,3337	0,8311	1504,1060
	3	5193,4296	0,8197	0,8157	105,8771	0,7147	567,4419
	4	4204,6526	0,9250	0,9277	2,8618	0,6095	17,9877
	5	4204,6526	0,9993	0,9927	10,1289	0,5179	74,9241
	6	1631,6882	1,0545	1,0459	50,4612	0,4386	440,6749
$\frac{1}{5}$	1	7656,4383	0,6849	0,6686	1225,6470	1,6655	2819,0376
	2	6684,4295	0,9357	0,9416	428,9441	1,3402	1226,0534
	3	6684,4295	1,0604	1,0561	43,6339	1,0934	152,8741
	4	5193,4296	1,1352	1,1358	36,4977	0,9070	154,1510
	5	4204,6526	1,1856	1,1817	12,6620	0,7617	63,6785
	6	1631,6882	1,2224	1,2165	30,3713	0,6449	180,4132



**Рис. 3.4.5.** Формы радиального стержня в начальном и конечном положениях для  $n = 24$ ,  $m = 6$  и  $\lambda = 1/15$ ,  $\lambda = 1/10$ ,  $\lambda = 1/5$

В табл. 3.4.4 и табл. 3.4.5 для случаев  $m = 4$  и  $m = 6$ , соответственно, приведено сравнение точности решения путем сравнения изгибающих моментов  $M_k$ , Н·м,  $k = 1, 2, \dots, m - 1$ , в узлах стержня в конечном деформированном состоянии:

I – вычисленные из уравнения равновесия отсеченной части при найденных реакциях  $R_k$ :

$$M_k = \sum_{i=k+1}^m R_k (Y_i - Y_k);$$

II – найденные при решении нелинейной задачи в перемещениях по методу конечных элементов средние значения в узле:

$$M_k = 1/2(M_k(a_k) + M_{k+1}(0)),$$

где

$$M_k(a_k) = EI_k v''(a_k) = 2EI_k/a_k (-3\bar{v}_k + 2\vartheta_k);$$

$$M_{k+1}(0) = EI_{k+1} v''(0) = 2EI_{k+1}/a_{k+1} (3\bar{v}_{k+1} - 2\vartheta_{k+1}).$$

Результаты сравнения показывают высокую точность, полученную при решении нелинейных алгебраических уравнений КЭ-модели методом последовательных приближений.

**Табл. 3.4.4.** Результаты расчета изгибающих моментов в узлах стержня при  $m = 4$ 

$\lambda$	Вар.	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$
$\frac{1}{15}$	I	188,3897	88,6112	40,5765
	II	193,7100	90,1060	40,9970
$\frac{1}{10}$	I	222,0288	79,5639	34,7384
	II	230,6572	80,9606	34,9822
$\frac{1}{5}$	I	211,5091	52,4085	24,2377
	II	225,4776	53,1092	24,3086

**Табл. 3.4.5.** Результаты расчета изгибающих моментов в узлах стержня при  $m = 6$ 

$\lambda$	Вар.	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$
$\frac{1}{15}$	I	835,2111	573,4939	317,5385	209,1970	104,0202
	II	848,8874	579,8688	319,7085	209,9830	104,5593
$\frac{1}{10}$	I	1026,0813	512,9911	283,3631	185,9495	86,4142
	II	1055,8608	520,2044	284,7586	186,4288	86,7087
$\frac{1}{5}$	I	1295,6631	485,1380	277,4441	135,6802	56,7180
	II	1351,8396	490,7088	278,1707	135,9047	56,8058

### 3.5. Основные выводы и результаты по главе 3

1. Предложена расчетная схема циклически симметричной космической антенны зонтичного типа, состоящей из радиальных гибких нерастяжимых стержней, которые связаны между собой в узлах по параллелям растяжимыми тросами. Формообразование антенны происходит за счет продольно-поперечного изгиба стержней при натяжении тросов под действием медленно изменяющейся осевой силы, создаваемой гидроцилиндром с предварительно напряженной пружиной.

2. Решена нелинейная задача динамики развертывания многозвенного, упругого на изгиб радиального стержня антенны под действием предварительно напряженных пружин в шарнирах с выходом их на упоры в заданном

прямолинейном положении под некоторым углом к оси системы, в котором тросовые элементы становятся прямолинейными, но еще ненапрянутыми. Получена система нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка произвольной при произвольном числе звеньев с аналитическими выражениями для всех коэффициентов уравнений.

3. Получены уравнения геометрически нелинейного деформирования системы и их решения по методу последовательных приближений при заданных осевых перемещениях узловых точек по форме пологой параболы. Определяются радиальные реакции и радиальные перемещения в узлах в конечном деформированном состоянии системы и по ним устанавливаются жесткости тросов на растяжение, при которых радиальные стержни приобретают требуемую искривленную форму.

4. Построена модель сильного изгиба нерастяжимого стержня антенны с использованием «консольных» конечных элементов (звеньев), допускающих большие перемещения и повороты как твердых тел и относительные упругие перемещения с двухчленной аппроксимацией по длине элемента с учетом его усадки за счет изгиба в квадратичном приближении. Полученные нелинейные уравнения решаются методом последовательных приближений относительно неизвестных реакций тросов при заданных значениях изгибных жесткостей элементов стержня и заданных радиальных и осевых координат узлов, точно соответствующих форме моделируемой антенны. По найденным значениям реакций тросов с учетом найденных их перемещений в узлах определяются необходимые для обеспечения заданной формы антенны жесткости тросов на растяжение.

5. Выполнена оценка точности разработанной модели сильного изгиба радиального стержня путем сравнения с численным решением задачи изгиба консольного стержня под действием продольной сжимающей силы (эластика Эйлера), превышающей критическую силу потери устойчивости стержня.

#### 4. ТЕРМОУПРУГИЕ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЯ, СОЕДИНЕННОГО С КОСМИЧЕСКИМ АППАРАТОМ

Рассматриваются термоупругие изгибные колебания тонкостенного стержня с круговым поперечным сечением, соединенного упруго-вязким шарниром с космическим аппаратом и подвергающегося прямому солнечному излучению с учетом теплового потока, теряемого за счет внешнего излучения в космическое пространство, и лучистого теплообмена на внутренней поверхности оболочки стержня. Учитывается изменение углов падения солнечных лучей на поверхность стержня за счет его изгиба и поворота вместе с космическим аппаратом.

Уравнение нестационарной теплопроводности тонкой цилиндрической оболочки стержня решается путем разложения тепловых потоков и температуры в ряд по косинусам в окружном направлении с удержанием только осесимметричной и антисимметричной гармоник, пренебрегая изменением температуры в осевом направлении. Оно приводится к двум связанным между собой и с перемещениями стержня нелинейным дифференциальным уравнениям первого порядка по времени для осесимметричной и антисимметричной составляющих температуры в рассматриваемом поперечном сечении стержня.

Для решения нестационарной задачи термоупругости и теплопроводности стержня используется метод конечных элементов. При этом по длине конечного элемента изгиб аппроксимируется точным решением статической задачи, а температура – линейной функцией. Потенциальная энергия термоупругого изгиба конечного элемента стержня записывается через его поперечные перемещения, углы поворота и антисимметричные составляющие температуры на концах. При вычислении кинетической энергии вращения системы и относительных изгибных колебаний стержня с твердым телом на конце, стержень моделируется сосредоточенными массами и моментами инерции, приведенным к сечениям, разделяющие конечные элементы.

Получена система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений для неизвестных функций – угла поворота космического аппарата,

поперечных перемещений, углов поворота, осесимметричных и антисимметричных составляющих температуры в расчетных сечениях конечно-элементной модели стержня.

Основные результаты работы по данной главе опубликованы в [71 – 74].

#### 4.1. Постановка задачи

Рассмотрим плоское нестационарное движение КА с присоединенным к нему тонкостенным стержнем круглого поперечного сечения с грузом на конце, рис. 4.1.1. Под действием приложенного к КА управляющего момента  $M_0(t)$  и нестационарного солнечного нагрева с учетом теплоизлучения стержень совершает термоупругие колебания в плоскости падения солнечных лучей и поворачивается вместе с КА на угол  $\varphi(t)$  относительно центра масс системы, который при этом движении системы остается неподвижным. Стержень соединен с КА с помощью упруго-вязкого шарнира и в исходном недеформированном состоянии при постоянной температуре является прямолинейным. Стержень направлен вдоль оси  $x$  связанной с КА подвижной (вращающейся с угловой скоростью  $\dot{\varphi}(t)$ ) системы координат  $Ox_0y_0$  с началом в центре масс, рис. 4.1.1.

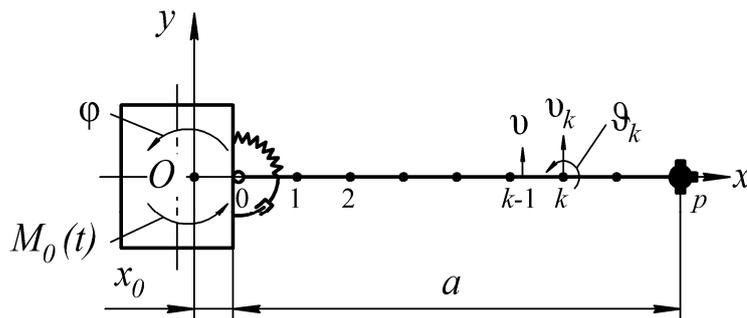
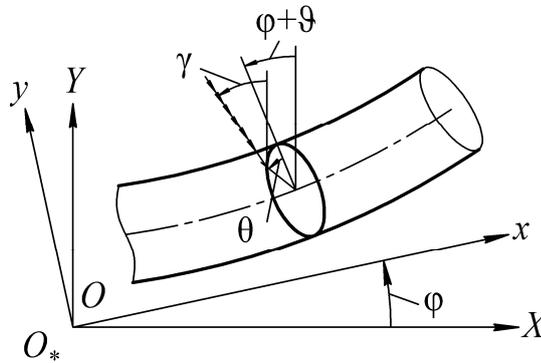


Рис. 4.1.1. Модель КА с присоединенным тонкостенным стержнем

Поперечные перемещения стержня  $v(x,t)$  относительно оси  $x$ , возникающие при вращении и термоупругих колебаниях, будем считать малыми, а его продольными перемещениями будем пренебрегать. Для стержня со

свободным концом, когда отсутствует стеснение продольных перемещений, и продольная сила в его поперечных сечениях близка к нулю, колебания можно считать малыми при  $|\vartheta| \leq 0.5$  рад, где  $\vartheta = \partial v / \partial x = v'$ . Угол  $\varphi$  может быть большим.

Косинус угла между постоянным направлением солнечных лучей под углом  $\gamma$  в неподвижной системе координат  $O_*XY$  и нормалью к поверхности повернутого на угол  $\varphi$  и искривленного стержня с круглым недеформируемым поперечным сечением равен  $\cos(\gamma - \varphi - \vartheta) \cos \theta$ , рис. 4.1.2.



**Рис. 4.1.2.** Направление теплового потока от прямого солнечного излучения

Тепловой поток от прямого солнечного излучения на единицу внешней поверхности оболочки:

$$q^* = \nu A_s S_0 \frac{L_0^2}{L^2} \cos(\gamma - \varphi - \vartheta) \cos \theta \quad \text{при} \quad \frac{\pi}{2} \geq \theta \geq -\frac{\pi}{2}; \quad (4.1.1)$$

$$q^* = 0 \quad \text{при} \quad \frac{\pi}{2} < \theta < -\frac{\pi}{2},$$

где  $A_s$  – коэффициент поглощения внешней поверхности стержня;  $S_0 = 1400$  Вт/м<sup>2</sup>;  $L_0 = 149 \cdot 10^9$  м – среднее расстояние от Земли до Солнца;  $L$  – расстояние от КА до Солнца, [203, 204];  $\nu(t)$  – коэффициент, учитывающий затененность стержня ( $0 \leq \nu \leq 1$ ;  $\nu = 0$  в тени планеты или КА и  $\nu = 1$  при прямом солнечном освещении в космосе). Отраженный поток солнечного излучения от поверхности КА и планеты не учитывается.

Тепловой поток, теряемый за счет внешнего излучения в космическое пространство:

$$q^e = c_0 \varepsilon^e \tau^4, \quad \tau = T/100^\circ, \quad (4.1.2)$$

где  $c_0 = 5,77 \text{ Вт/м}^2$ ;  $\varepsilon^e$  – коэффициент черноты внешней поверхности оболочки.

Тепловой поток лучистого теплообмена на внутренней поверхности цилиндрической оболочки  $q^i$  определяется из интегрального уравнения [203, 204] и зависит от коэффициентов  $c_0$  и  $\varepsilon^i$ , где  $\varepsilon^i$  – коэффициент черноты внутренней поверхности оболочки.

Для получения уравнений термоупругих изгибных колебаний стержня с учетом его поворота вместе с КА на угол  $\varphi(t)$  будем использовать метод конечных элементов. При этом стержень длиной  $a$  делится на конечные элементы поперечными сечениями  $x = x_k$  с длинами  $l_k = x_k - x_{k-1}$  ( $k = 1, 2, \dots, p$ ), начиная от шарнира ( $k = 0, x = x_0$ ) до конца стержня ( $k = p, x = x_p = x_0 + a$ ). В качестве обобщенных координат рассматриваются  $v_k = v(x_k, t)$  и  $\vartheta_k = v'(x_k, t)$  при  $k = 0, 1, 2, \dots, p$ ;  $v_0 = 0$  при шарнирном соединении стержня с КА.

#### ***4.2. Температура оболочки изогнутого стержня при солнечном нагреве***

Согласно (4.1.1), (4.1.2) тепловой поток при малых искривлениях стержня медленно изменяется в осевом направлении. Поэтому при определении температуры оболочки  $T(x, \theta, t)$  ее изменением по длине стержня будем пренебрегать ( $\partial^2 T / \partial x^2 \approx 0$ ) и будем считать ее постоянной в пределах толщины тонкой оболочки. Тогда уравнение нестационарной теплопроводности оболочки стержня в окружном направлении  $\theta$  с учетом (4.1.2), (4.1.2) записывается в виде:

$$c\rho h \frac{\partial T}{\partial t} = h\lambda \frac{\partial^2 T}{r^2 \partial \theta^2} + q^* - q^e - q^i, \quad (4.2.1)$$

где  $r, h$  – радиус и толщина оболочки;  $\rho, c, \lambda$  – плотность, удельная теплоемкость и коэффициент теплопроводности материала.

Решение уравнения (4.2.1) представим в виде ряда:

$$T(x, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x, t) \cos n\theta,$$

который для безразмерных температур  $\tau$  записывается в виде:

$$\tau = \sum_{n=0}^{\infty} \tau_n \cos n\theta. \quad (4.2.2)$$

Потоки  $q^*$ ,  $q^e$  и  $q^i$  также представляются в виде рядов по  $\cos n\theta$ .

Оценки, полученные при решении статической задачи термоупругого изгиба тонкостенного стержня при солнечном нагреве с учетом теплового излучения [70], показывают, что основной вклад в (4.2.2) при изгибе и изгибных колебаниях стержня в плоскости  $x\theta$  имеют члены с  $\tau_0$  и  $\tau_1$ . При  $\tau = \tau_0 + \tau_1 \cos \theta$  уравнения теплового баланса для гармоник  $n = 0$  и  $n = 1$ , которые получаются из уравнения (4.2.1) с учетом (4.1.2), (4.1.2) и решений для  $q_n^i$ , будут:

$$\begin{aligned} c\rho h \cdot 100^\circ \dot{\tau}_0 + c_0 \varepsilon^e F_0(\tau_0, \tau_1) &= \frac{1}{\pi} q^0 \cos(\gamma - \varphi - \vartheta); \\ c\rho h \cdot 100^\circ \dot{\tau}_1 + \frac{h\lambda}{r^2} 100^\circ \tau_1 + c_0 \left( \varepsilon^e + \frac{4\varepsilon^i}{4 - \varepsilon^i} \right) F_1(\tau_0, \tau_1) &= \frac{1}{2} q^0 \cos(\gamma - \varphi - \vartheta); \quad (4.2.3) \\ F_0 = \tau_0^4 + 3\tau_0^2 \tau_1^2 + \frac{3}{8} \tau_1^4, \quad F_1 = 4\tau_0^3 \tau_1 + 3\tau_0 \tau_1^3, \quad q^0 &= A_s S_0 \frac{L_0^2}{L^2}. \end{aligned}$$

В пределах длины конечного элемента температура аппроксимируется по линейному закону ( $\xi = x - x_{k-1}$ ) [6]:

$$\tau_0 = \tau_{0,k-1} \left(1 - \frac{\xi}{l_k}\right) + \tau_{0,k} \frac{\xi}{l_k}, \quad \tau_1 = \tau_{1,k-1} \left(1 - \frac{\xi}{l_k}\right) + \tau_{1,k} \frac{\xi}{l_k}. \quad (4.2.4)$$

Уравнения (4.2.3) с учетом (4.2.4) записываются для всех расчетных сечений  $k = 0, 1, 2, \dots, p$  путем замен  $\tau_0 \rightarrow \tau_{0,k}$ ,  $\tau_1 \rightarrow \tau_{1,k}$ ,  $\vartheta \rightarrow \vartheta_k$ ,  $F_0 \rightarrow F_{0,k}$ ,  $F_1 \rightarrow F_{1,k}$ :

$$\begin{aligned} c\rho h \cdot 100^\circ \dot{\tau}_{0,k} + c_0 \varepsilon^e F_{0,k}(\tau_{0,k}, \tau_{1,k}) &= \frac{1}{\pi} q^0 \cos(\gamma - \varphi - \vartheta_k); \\ c\rho h \cdot 100^\circ \dot{\tau}_{1,k} + \frac{h\lambda}{r^2} 100^\circ \tau_{1,k} + c_0 \left( \varepsilon^e + \frac{4\varepsilon^i}{4 - \varepsilon^i} \right) F_{1,k}(\tau_{0,k}, \tau_{1,k}) &= \quad (4.2.5) \\ &= \frac{1}{2} q^0 \cos(\gamma - \varphi - \vartheta_k), \end{aligned}$$

где  $F_{0,k} = \tau_{0,k}^4 + 3\tau_{0,k}^2 \tau_{1,k}^2 + \frac{3}{8}\tau_{1,k}^4$ ,  $F_{1,k} = 4\tau_{0,k}^3 \tau_{1,k} + 3\tau_{0,k} \tau_{1,k}^3$ . Система уравнений (4.2.5) – система нелинейных уравнений нестационарной теплопроводности для температур  $\tau_{0,0}, \tau_{1,0}, \tau_{0,1}, \tau_{1,1}, \dots, \tau_{0,p}, \tau_{1,p}$ , зависящих от углов поворота  $\vartheta_0, \vartheta_1, \dots, \vartheta_p$ .

### 4.3. Конечно-элементная модель стержня

В конечно-элементной модели стержня в качестве обобщенных координат, как было отмечено ранее, рассматриваются поперечные перемещения  $v_k$  и углы поворота  $\vartheta_k$  в узлах, обусловленные его изгибом;  $k = 0, 1, 2, \dots, p$ . Погонную массу  $m = 2\pi r h$  и погонный массовый момент инерции  $i = \pi r^3 h$  будем заменять сосредоточенными в узлах массами  $\mu_k$ , моментами инерции  $i_k$  и статическими моментами  $s_k$ , рис. 4.3.1.

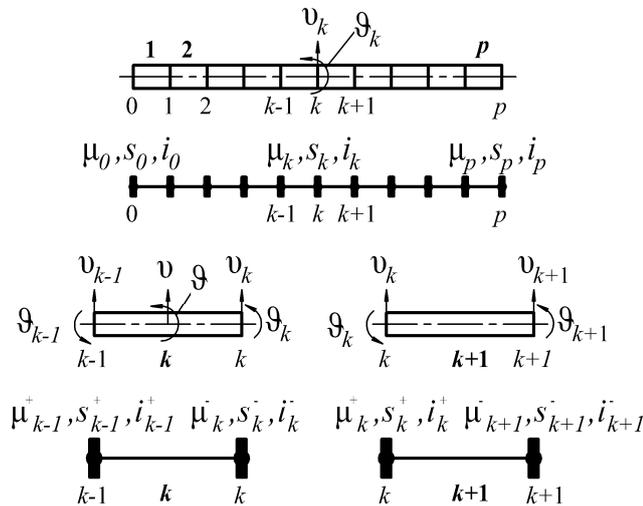


Рис. 4.3.1. Конечно-элементная модель стержня

Пусть стержень длиной  $a$  делится на конечные элементы с одинаковой длиной  $l_k = l$ . Представим его в виде дискретной системы сосредоточенных в узлах элементов с параметрами  $\mu_k, i_k$  и  $s_k$ , соединенных невесомыми, абсолютно

жесткими стержнями, рис. 4.3.1. Эти параметры определим так, чтобы кинетическая энергия конечного элемента (КЭ), как абсолютно твердого тела, с распределенной массой и с сосредоточенными массами была одинаковой.

Кинетическая энергия  $k$ -го КЭ ( $k=1,2,\dots,p$ ) однородной балки при повороте и поперечном перемещении, рис. 4.3.1, с учетом  $\vartheta = \vartheta_{k-1}$ ,  $v = v_{k-1} + \vartheta_{k-1}x$ ,  $v_k = v_{k-1} + \vartheta_{k-1}l$ ,  $\vartheta_k = \vartheta_{k-1}$  записывается в виде:

$$T_k = \frac{1}{2} \int_0^l (m\dot{v}^2 + i\dot{\vartheta}^2) dx = \frac{1}{2} [ml\dot{v}_{k-1}^2 + ml^2\dot{v}_{k-1}\dot{\vartheta}_{k-1} + (\frac{ml^3}{3} + il)\dot{\vartheta}_{k-1}^2]. \quad (4.3.1)$$

Для  $k$ -го КЭ с сосредоточенными параметрами выражение для кинетической энергии представляется следующим образом:

$$T_k = (\frac{1}{2}\mu_{k-1}^+\dot{v}_{k-1}^2 + s_{k-1}^+\dot{v}_{k-1}\dot{\vartheta}_{k-1} + \frac{1}{2}i_{k-1}^+\dot{\vartheta}_{k-1}^2) + (\frac{1}{2}\mu_k^-\dot{v}_k^2 + s_k^-\dot{v}_k\dot{\vartheta}_k + \frac{1}{2}i_k^-\dot{\vartheta}_k^2)$$

или выполняя группировку

$$T_k = \frac{1}{2}(\mu_{k-1}^+ + \mu_k^-)\dot{v}_{k-1}^2 + (s_{k-1}^+ + s_k^- + \mu_k^-l)\dot{v}_{k-1}\dot{\vartheta}_{k-1} + \frac{1}{2}(i_{k-1}^+ + i_k^- + \mu_k^-l^2 + 2s_k^-l)\dot{\vartheta}_{k-1}^2. \quad (4.3.2)$$

В (4.3.2) учтено, что для однородной балки  $\mu_{k-1}^+ = \mu_k^-$ ,  $s_{k-1}^+ = -s_k^-$ ,  $i_{k-1}^+ = i_k^-$ . При этом:  $\mu_k = \mu_k^- + \mu_k^+$ ,  $s_k = s_k^- + s_k^+$ ,  $i_k = i_k^- + i_k^+$ ,  $k \neq 0, p$ .

Сравнивая (4.3.1) и (4.3.2) получим:

$$\mu_{k-1}^+ + \mu_k^- = ml, \quad s_{k-1}^+ + s_k^- + \mu_k^-l = \frac{ml^2}{2}, \quad i_{k-1}^+ + i_k^- + \mu_k^-l^2 + 2s_k^-l = \frac{ml^3}{3} + il.$$

По определению  $s_{k-1}^+ = \mu_{k-1}^+ \frac{l}{4}$ ,  $s_k^- = -\mu_k^- \frac{l}{4}$ , поэтому получаем:

$$\mu_k^- = \frac{ml}{2}, \quad \mu_{k-1}^+ = \frac{ml}{2}, \quad i_k^- = \frac{il}{2} + \frac{ml^3}{24}, \quad i_{k-1}^+ = \frac{il}{2} + \frac{ml^3}{24}.$$

Окончательно для узлов  $k=1,2,\dots,p-1$  имеем:

$$\mu_k = \mu_k^- + \mu_k^+ = ml, \quad s_k = s_k^- + s_k^+ = 0, \quad i_k = i_k^- + i_k^+ = il + \frac{ml^3}{12}. \quad (4.3.3)$$

Для узла  $k=0$ :

$$\mu_0 = \mu_0^+ = \frac{ml}{2}, \quad s_0 = s_0^+ = \frac{ml^2}{8}, \quad i_0 = i_0^+ = \frac{il}{2} + \frac{ml^3}{24}. \quad (4.3.4)$$

Для узла  $k = p$  необходимо учесть наличие груза на конце стержня:

$$\begin{aligned} \mu_p = \mu_p^- + \mu_\Gamma = \frac{ml}{2} + \mu_\Gamma, \quad s_p = -s_p^- + s_\Gamma = -\frac{ml^2}{8} + s_\Gamma; \\ i_p = i_p^- + i_\Gamma = \frac{il}{2} + \frac{ml^3}{24} + i_\Gamma, \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

где  $\mu_\Gamma, s_\Gamma, i_\Gamma$  – масса, статический момент и момент инерции груза, присоединенного на конце стержня при  $x = x_p$ .

В пределах длины  $k$ -го КЭ стержня при  $0 \leq \xi \leq l_k$  используем линейную аппроксимацию температуры (4.2.4) и квазистатическую аппроксимацию поперечного перемещения [6]:

$$\begin{aligned} v = v_{k-1}\eta_1(\xi) + \vartheta_{k-1}\psi_1(\xi) + v_k\eta_2(\xi) + \vartheta_k\psi_2(\xi); \\ \eta_1(\xi) = 1 - 3\frac{\xi^2}{l_k^2} + 2\frac{\xi^3}{l_k^3}, \quad \psi_1(\xi) = \xi - 2\frac{\xi^2}{l_k} + \frac{\xi^3}{l_k^2}; \\ \eta_2(\xi) = 3\frac{\xi^2}{l_k^2} - 2\frac{\xi^3}{l_k^3}, \quad \psi_2(\xi) = -\frac{\xi^2}{l_k} + \frac{\xi^3}{l_k^2}. \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

#### **4.4. Уравнения термоупругих колебаний стержня, соединенного с космическим аппаратом**

Кинетическая энергия вращающейся с угловой скоростью  $\dot{\phi}$  относительно центра масс системы с шарнирно присоединенным стержнем, совершающим малые поперечные колебания, с учетом (4.3.3), (4.3.4), (4.3.5) записывается в виде:

$$\begin{aligned} K = \frac{1}{2} J \dot{\phi}^2 + \sum_{k=0}^p [(\mu_k x_k + s_k) \dot{\phi} \dot{v}_k + (s_k x_k + i_k) \dot{\phi} \dot{\vartheta}_k + \\ + \frac{1}{2} (\mu_k \dot{v}_k^2 + 2s_k \dot{v}_k \dot{\vartheta}_k + i_k \dot{\vartheta}_k^2)], \end{aligned} \quad (4.4.1)$$

где  $J$  – момент инерции КА с присоединенным недеформируемым стержнем относительно их центра масс.

Потенциальная энергия поворота в упругом шарнире и термоупругого изгиба стержня:

$$\Pi = \frac{1}{2} \kappa_0 \vartheta_0^2 + \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_0+a} EI (v'' + 2 \frac{\alpha}{r} 100^\circ \tau_1) v'' dx, \quad (4.4.2)$$

где  $\kappa_0$  – жесткость упругого шарнира по углу поворота  $\vartheta_0$ ;  $EI$  – изгибная жесткость тонкостенного стержня с моментом инерции поперечного сечения  $I = \pi r^3 h$ ;  $\alpha$  – коэффициент температурного расширения материала стержня.

В результате для конечно-элементной модели стержня выражение (4.4.2) с учетом (4.2.4) и (4.3.6) записывается в виде:

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \kappa_0 \vartheta_0^2 + \\ & + \sum_{k=1}^p \left\{ \frac{1}{2} \cdot \frac{12EI}{l_k^3} [(v_k - v_{k-1} - l_k \vartheta_{k-1})^2 - \right. \\ & \left. - l_k (v_k - v_{k-1} - l_k \vartheta_{k-1})(\vartheta_k - \vartheta_{k-1}) + \frac{1}{3} l_k^2 (\vartheta_k - \vartheta_{k-1})^2] + \right. \\ & \left. + EI \frac{\alpha}{r} 100^\circ [\tau_{1,k-1} (\frac{v_k - v_{k-1}}{l_k} - \vartheta_{k-1}) - \tau_{1,k} (\frac{v_k - v_{k-1}}{l_k} - \vartheta_k)] \right\}. \end{aligned} \quad (4.4.3)$$

Вариация работы управляющего момента  $M_0(t)$  и демпфирующего момента  $D_0(\dot{\vartheta}_0, \vartheta_0)$  в шарнире:

$$\delta A = M_0 \delta \varphi - D_0 \delta \vartheta_0. \quad (4.4.4)$$

Для обобщенных координат  $\varphi, \vartheta_0, v_1, \vartheta_1, \dots, v_p, \vartheta_p$  уравнения движения составляются как уравнения Лагранжа с учетом (4.4.1), (4.4.3), (4.4.4):

$$\begin{aligned} J \ddot{\varphi} + \sum_{k=0}^p [(\mu_k x_k + s_k) \ddot{v}_k + (s_k x_k + i_k) \ddot{\vartheta}_k] &= M_0(t); \\ (s_0 x_0 + i_0) \ddot{\varphi} + i_0 \ddot{\vartheta}_0 + D_0(\dot{\vartheta}_0, \vartheta_0) + (\kappa_0 + 4 \frac{EI}{l_1}) \vartheta_0 - 6 \frac{EI}{l_1^2} v_1 + 2 \frac{EI}{l_1} \vartheta_1 - \\ - \frac{\alpha EI}{r} 100^\circ \tau_{1,0} &= 0; \end{aligned} \quad (4.4.5)$$

$$\begin{aligned}
& (\mu_k x_k + s_k) \ddot{\varphi} + \mu_k \ddot{v}_k + s_k \ddot{\vartheta}_k + 6EI \left[ -\frac{2}{l_k^3} v_{k-1} + \left( \frac{2}{l_k^3} + \frac{2}{l_{k+1}^3} \right) v_k - \frac{2}{l_{k+1}^3} v_{k+1} - \right. \\
& \left. - \frac{1}{l_k^2} \vartheta_{k-1} - \left( \frac{1}{l_k^2} - \frac{1}{l_{k+1}^2} \right) \vartheta_k + \frac{1}{l_{k+1}^2} \vartheta_{k+1} \right] + EI \frac{\alpha}{r} 100^\circ \left[ \frac{1}{l_k} \tau_{1,k-1} - \right. \\
& \left. - \left( \frac{1}{l_k} + \frac{1}{l_{k+1}} \right) \tau_{1,k} + \frac{1}{l_{k+1}} \tau_{1,k+1} \right] = 0;
\end{aligned} \tag{4.4.5}$$

$$\begin{aligned}
& (s_k x_k + i_k) \ddot{\varphi} + s_k \ddot{v}_k + i_k \ddot{\vartheta}_k + 6EI \left[ \frac{1}{l_k^2} v_{k-1} - \left( \frac{1}{l_k^2} - \frac{1}{l_{k+1}^2} \right) v_k - \frac{1}{l_{k+1}^2} v_{k+1} + \right. \\
& \left. + \frac{1}{3l_k} \vartheta_{k-1} + \left( \frac{2}{3l_k} + \frac{2}{3l_{k+1}} \right) \vartheta_k + \frac{1}{3l_{k+1}} \vartheta_{k+1} \right] + \delta_{kp} \frac{\alpha EI}{r} 100^\circ \tau_{1,p} = 0.
\end{aligned}$$

Здесь  $k = 1, 2, \dots, p$ ,  $v_{p+1} = \vartheta_{p+1} = \tau_{1,p+1} = 0$ ;  $\delta_{kp} = 1$  при  $k = p$  и  $\delta_{kp} = 0$  при  $k \neq p$ .

Система уравнений (4.4.5) – система линейных уравнений термоупругих колебаний для обобщенных координат  $\varphi$ ,  $\vartheta_0$ ,  $v_1$ ,  $\vartheta_1$ , ...,  $v_p$ ,  $\vartheta_p$ , зависящих от температур  $\tau_{1,0}$ ,  $\tau_{1,1}$ , ...,  $\tau_{1,p}$ . Связанные системы уравнений термоупругих колебаний (4.4.5) и теплопроводности (4.2.5) объединяются и решаются совместно.

#### **4.5. Исследование сходимости решений уравнений термоупругих колебаний стержня**

В результате получается связанная система дифференциальных уравнений (4.2.5), (4.4.5), описывающих поворот КА, термоупругие колебания стержня и его нестационарную теплопроводность с учетом теплоизлучения и влияния угла поворота КА и изгиба стержня на углы падения солнечных лучей и, соответственно, на солнечный нагрев.

Данная система уравнений для интегрирования с помощью стандартной программы записывается в матричном виде (первому уравнению соответствует (4.4.5), второму – (4.2.5)):

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} + \mathbf{C}\boldsymbol{\tau} = \mathbf{Q}_1, \quad \mathbf{T}\dot{\boldsymbol{\tau}} + \mathbf{N}\mathbf{z} + \mathbf{B}\boldsymbol{\tau} = \mathbf{Q}_2, \tag{4.5.1}$$

где  $\mathbf{q} = [\varphi \vartheta_0 v_1 \vartheta_1 \dots v_p \vartheta_p]^T$  – вектор узловых перемещений и углов поворота;  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{K}$  – линейные симметричные матрицы инерции, демпфирования и жесткости;  $\boldsymbol{\tau} = [\tau_{0,0} \tau_{1,0} \tau_{0,1} \tau_{1,1} \dots \tau_{0,p} \tau_{1,p}]^T$  – вектор узловых температур;  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{T}$  – линейные симметричные матрицы температурных коэффициентов;  $\mathbf{z}$  – нелинейный вектор узловых температур;  $\mathbf{N}$  – нелинейная матрица температурных коэффициентов, коэффициенты которой зависят от вектора  $\boldsymbol{\tau}$ ;  $\mathbf{Q}_1$  – вектор правых частей, обусловленный приложенным моментом к аппарату;  $\mathbf{Q}_2$  – нелинейный вектор правых частей, слагаемые которого зависят от вектора  $\mathbf{q}$ .

Система уравнений (4.5.1) решалась в программном комплексе компьютерной алгебры PTC MathCAD 15.0 с помощью стандартной программы решения систем дифференциальных уравнений AdamsBDF, реализующая метод Адамса («нежесткие системы») и метод обратного дифференцирования («жесткие системы») с автоматическим выбором между ними, исходя из входных данных.

Для оценки сходимости и устойчивости при интегрировании системы (4.5.1) с помощью алгоритма AdamsBDF рассматривалась тестовая задача со следующими исходными данными КА, стержня и груза: масса и собственный момент инерции КА равны  $m_0 = 1200$  кг,  $J_0 = 200$  кг·м<sup>2</sup>; тонкостенный стержень из стали –  $\rho = 7800$  кг/м<sup>3</sup>,  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Па,  $a = 30$  м,  $r = 0,025$  м,  $h = 0,0001$  м,  $\alpha = 1,1 \cdot 10^{-5}$  1/К,  $c = 462$  Дж/кг·К,  $\lambda = 50$  Вт/м,  $A_s = 0,5$ ,  $L_0/L = 1$ ,  $\varepsilon^e = 0,56$ ,  $\varepsilon^i = 0,56$ ; груз –  $\mu_r = 10$  кг,  $i_r = 7,5$  кг·м<sup>2</sup>,  $s_r = 0$ . Коэффициенты жесткости и демпфирования упруго-вязкого шарнира:  $\kappa_0 = 100$  Н·м/рад,  $d_0 = 0$ . Внешняя нагрузка отсутствует:  $M_0(t) = 0$ ; угол падения солнечных лучей:  $\gamma = -\pi/3$  рад. Начальные условия при  $t = 0$ :  $\varphi = 0$ ,  $\dot{\varphi} = 0$ ;  $\vartheta_0 = 0$ ,  $\dot{\vartheta}_0 = 0$ ;  $v_k = 0$ ,  $\dot{v}_k = 0$ ,  $\vartheta_k = 0$ ,  $\dot{\vartheta}_k = 0$  ( $k = 1, 2, \dots, p$ );  $\tau_{0,k} = 1,73$ ,  $\tau_{1,k} = 0$  ( $k = 0, 1, \dots, p$ ).

Было проведено три исследования: интегрирование системы с варьируемым числом конечных элементов; интегрирование системы с варьируемым шагом на заданном интервале; интегрирование системы с заданным постоянным шагом на

различных больших интервалах. Сравнение результатов в рамках одного исследования проводилось по следующим параметрам системы: по углу поворота  $\text{КА} - \varphi$ ; по прогибу конца стержня  $- \upsilon_p$ ; по углу поворота конца стержня  $- \vartheta_p$ ; по температуре на конце стержня  $- \tau_{0,p}$  и  $\tau_{1,p}$ .

В первом случае интегрирование системы (4.5.1) выполнялось на интервале  $0 \leq t \leq t_k = 50$  с при числе разбиений интервала интегрирования  $N = 500$ . Количество конечных элементов  $p$ , на которые разбивался стержень, варьировалось от 4 до 12, соответственно длина конечного элемента  $l$  изменялась в пределах от 7,5 м до 2,5 м. Результаты приведены в табл. 4.5.1 для момента времени  $t = 10$  с.

**Табл. 4.5.1.** Сравнение при варьировании количества конечных элементов

$p$	$\varphi$ , рад	$\upsilon_p$ , м	$\vartheta_p$ , рад	$\tau_{0,p}$	$\tau_{1,p}$
4	0,032680431	-1,0434073	-0,066200214	1,7532017	0,043436004
6	0,032723947	-1,0441737	-0,066084485	1,7532025	0,043437122
8	0,032739105	-1,0444319	-0,066050211	1,7532028	0,043437608
10	0,032746338	-1,0445590	-0,065984435	1,7532030	0,043437803
12	0,032750295	-1,0446286	-0,065945279	1,7532030	0,043437891

Во втором случае интегрирование системы (4.5.1) выполнялось на интервале  $0 \leq t \leq t_k = 50$  с при изменении числа разбиений интервала интегрирования  $N$  от 100 до 1000. При этом шаг интегрирования  $\Delta t = t_k / N$  изменялся от 0,5 с до 0,05 с. Количество конечных элементов, на которые разбивался стержень, равнялось  $p = 10$ . Результаты приведены в табл. 4.5.2 для момента времени  $t = 10$  с.

**Табл. 4.5.2.** Сравнение при варьировании шага интегрирования

$N$	$\varphi$ , рад	$\upsilon_p$ , м	$\vartheta_p$ , рад	$\tau_{0,p}$	$\tau_{1,p}$
100	0,030874582	-0,98558421	-0,063143062	1,7522358	0,041835849
200	0,032059213	-1,02293530	-0,065021666	1,7528401	0,042838704
400	0,032633178	-1,04099990	-0,065830769	1,7531425	0,043338096
500	0,032746338	-1,04455900	-0,065984435	1,7532030	0,043437803
1000	0,032970945	-1,05162090	-0,066285762	1,7533239	0,043637042

В третьем случае интегрирование системы (4.5.1) выполнялось на продолжительных интервалах времени от  $0 \leq t \leq t_k = 50$  с до  $0 \leq t \leq t_k = 800$  с при постоянном числе разбиений интервала  $N = 500$ . Количество конечных элементов, на которые разбивался стержень, равнялось  $p = 10$ . Сравнение проводилось по одноименным величинам в моменты времени  $t = t_c$ . Результаты приведены в табл. 4.5.3.

**Табл. 4.5.3.** Сравнение на больших интервалах интегрирования

$t_c$	$t_k$	$\varphi$ , рад	$\upsilon_p$ , м	$\vartheta_p$ , рад	$\tau_{0,p}$	$\tau_{1,p}$
50	50	0,072348895	-2,3209319	-0,16731775	1,8530482	0,14894003
	100	0,072408238	-2,3226027	-0,16714886	1,8527955	0,14877993
	200	0,072566054	-2,3271625	-0,16690402	1,8522901	0,14845882
	400	0,073023367	-2,3407763	-0,16653113	1,8512798	0,14781289
	800	0,074352787	-2,3815806	-0,16709064	1,8492598	0,14650391
100	100	0,092729053	-2,9723653	-0,21252581	1,9746109	0,19340531
	200	0,092141853	-2,9541472	-0,21198724	1,9741456	0,19333046
	400	0,091066747	-2,9208913	-0,21127281	1,9732139	0,19317832
	800	0,089483891	-2,8720226	-0,21004337	1,9713458	0,19286456

Табл. 4.5.3. Продолжение

200	200	0,107229560	-3,4289562	-0,23329043	2,1746664	0,19756662
	400	0,107322920	-3,4321992	-0,23384390	2,1739859	0,19760476
	800	0,106747650	-3,4151913	-0,23428349	2,1726191	0,19767624
400	400	0,094994992	-3,0400115	-0,20933493	2,3981260	0,17750607
	800	0,092224609	-2,9523820	-0,20506176	2,3975894	0,17756232

Результаты вычислений показывают, что процесс интегрирования при изменении различных параметров в заданных пределах является стабильным и сходящимся. Относительно небольшие расхождения наблюдаются при интегрировании на больших интервалах при вычислении прогиба конца стержня  $u_p$ , что видно из табл. 4.5.3.

#### 4.6. Примеры расчета

##### 4.6.1. Решение без учета теплоизлучения

Рассмотрим случай, когда в математической модели колебаний стержня не учитывается тепловой поток, теряемый за счет внешнего излучения в космическое пространство, и пренебрегается лучистый теплообмен на внутренней поверхности цилиндрической оболочки пустотелого стержня.

Определим реакцию стержня на внезапное действие солнечных лучей после выхода из тени. Примем следующие параметры КА, стержня и груза: масса и собственный момент инерции КА равны  $m_0 = 1200$  кг,  $J_0 = 200$  кг·м<sup>2</sup>; тонкостенный стержень из стали –  $\rho = 7800$  кг/м<sup>3</sup>,  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Па,  $a = 30$  м,  $r = 0,025$  м,  $h = 0,0001$  м,  $\alpha = 1,1 \cdot 10^{-5}$  1/К,  $c = 462$  Дж/кг·К,  $\lambda = 50$  Вт/м,  $A_s = 0,5$ ,  $L_0/L = 1$ ; груз –  $\mu_r = 10$  кг,  $i_r = 7,5$  кг·м<sup>2</sup>,  $s_r = 0$ . Коэффициенты жесткости и демпфирования упруго-вязкого шарнира:  $c_0 = 100$  Н·м/рад,  $d_0 = 0$ .

На рис. 4.6.1 – 4.6.3 приведены зависимости  $\varphi(t)$ ,  $\nu_p(t)$  и  $\vartheta_p(t)$  при выходе КА из тени при  $t=0$ ,  $M_0(t)=0$  для различных углов  $\gamma$  падения солнечных лучей на стержень: 1 –  $\gamma=0$ ; 2 –  $\gamma=-30^\circ$ ; 3 –  $\gamma=-45^\circ$ ; 4 –  $\gamma=-60^\circ$ .

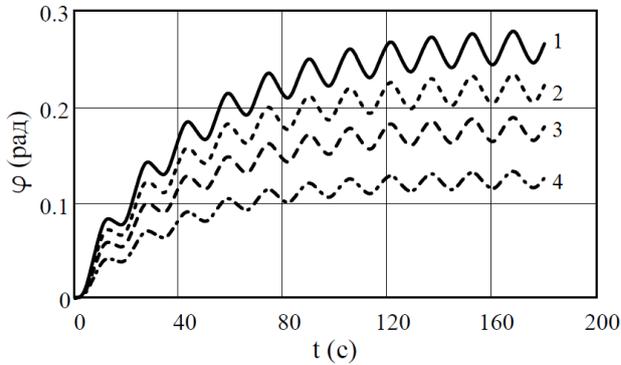


Рис. 4.6.1. Зависимость  $\varphi$  от  $t$

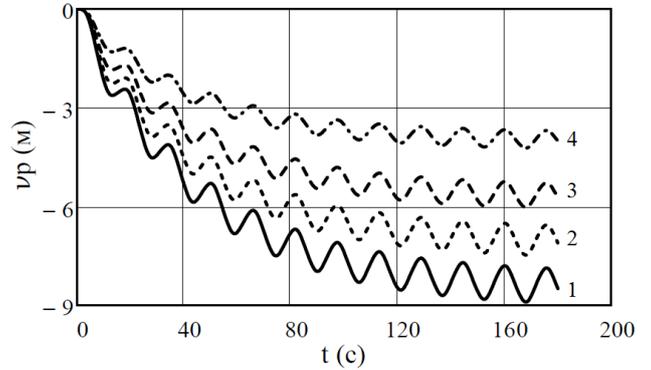


Рис. 4.6.2. Зависимость  $\nu_p$  от  $t$

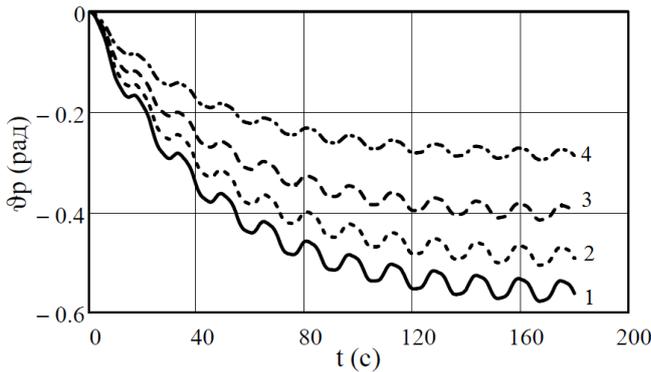


Рис. 4.6.3. Зависимость  $\vartheta_p$  от  $t$

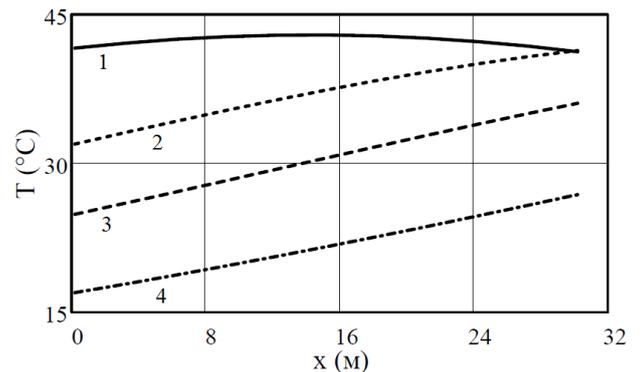


Рис. 4.6.4. Распределение температуры по длине стержня

На рис. 4.6.4 для этих случаев показано распределение температуры  $T_1(x,t)$  по длине стержня в момент времени  $t=180$  с, при котором температуры вышли на стационарный режим.

#### 4.6.2. Учет теплоизлучения и лучистого теплообмена

Исходные параметры системы, общие для всех примеров расчета: масса и собственный момент инерции КА равны  $m_0=1200$  кг,  $J_0=200$  кг·м<sup>2</sup>;

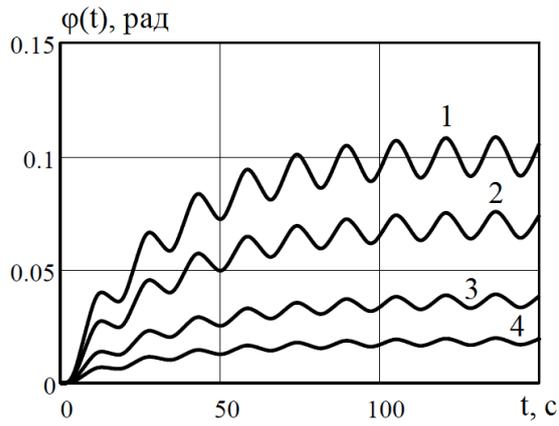
тонкостенный стержень из стали –  $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$ ,  $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ ,  $a = 30 \text{ м}$ ,  
 $r = 0,025 \text{ м}$ ,  $h = 0,0001 \text{ м}$ ,  $\alpha = 1,1 \cdot 10^{-5} \text{ 1/К}$ ,  $c = 462 \text{ Дж/кг}\cdot\text{К}$ ,  $\lambda = 50 \text{ Вт/м}$ ,  $A_s = 0,5$ ,  
 $L_0/L = 1$ ,  $\varepsilon^e = 0,56$ ,  $\varepsilon^i = 0,56$ ; груз –  $\mu_T = 10 \text{ кг}$ ,  $i_T = 5,5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ ,  $s_T = 0$ .  
 Коэффициенты жесткости и демпфирования упруго-вязкого шарнира:  
 $\kappa_0 = 100 \text{ Н}\cdot\text{м/рад}$ ,  $d_0 = 0,05 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с/рад}$ . Внешняя нагрузка отсутствует:  $M_0(t) = 0$ .  
 Количество конечных элементов, на которые разбивается стержень,  $p = 12$ .  
 Начальные условия при  $t = 0$ :  $\varphi = 0$ ,  $\dot{\varphi} = 0$ ;  $\vartheta_0 = 0$ ,  $\dot{\vartheta}_0 = 0$ ;  $v_k = 0$ ,  $\dot{v}_k = 0$ ,  $\vartheta_k = 0$ ,  
 $\dot{\vartheta}_k = 0$  ( $k = 1, 2, \dots, p$ );  $\tau_{0,k} = 1,73$ ,  $\tau_{1,k} = 0$  ( $k = 0, 1, \dots, p$ ). Интегрирование ведется на  
 интервале  $0 \leq t \leq t_k = 150 \text{ с}$  с количеством разбиений отрезка  $N = 1500$ .

#### Реакция стержня на действие солнечных лучей после выхода из тени

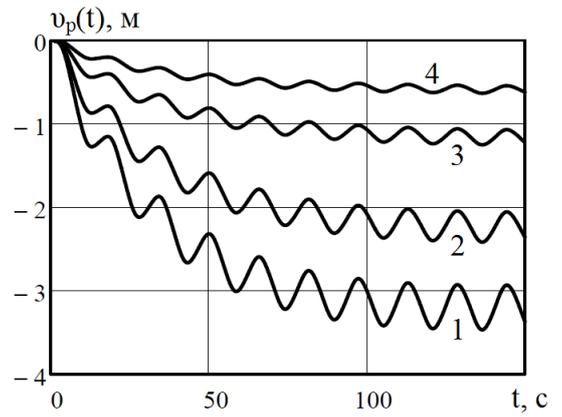
Рассмотрим задачу о внезапном действии солнечных лучей на КА со стержнем после выхода из тени. При этом считается, что коэффициент затененности  $v = 0$  при  $t = 0$  и  $v = 1$  при  $t > 0$ .

На рис. 4.6.5 – 4.6.8 приведены зависимости  $\varphi(t)$ ,  $v_p(t)$ ,  $\vartheta_p(t)$  и  $T_p(t) = T_{0,p}(t) + T_{1,p}(t)$  (т.е. согласно (4.2.2) при  $\theta = 0$ ) при варьировании угла падения солнечных лучей от  $\gamma = -85^\circ$  до  $\gamma = -60^\circ$ : 1 –  $\gamma = -60^\circ$ ; 2 –  $\gamma = -70^\circ$ ; 3 –  $\gamma = -80^\circ$ ; 4 –  $\gamma = -85^\circ$ . Эти значения углов соответствуют случаю, когда солнечные лучи освещают стержень со стороны свободного конца или груза  $x = x_p = x_0 + a$ .

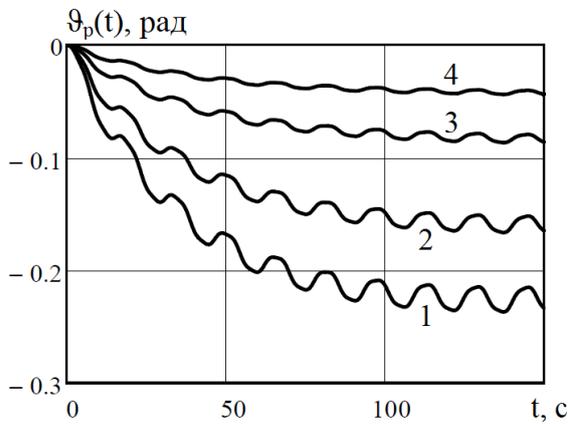
На рис. 4.6.9 – 4.6.12 приведены зависимости  $\varphi(t)$ ,  $v_p(t)$ ,  $\vartheta_p(t)$  и  $T_p(t) = T_{0,p}(t) + T_{1,p}(t)$  при варьировании угла падения солнечных лучей от  $\gamma = 60^\circ$  до  $\gamma = 85^\circ$ : 1 –  $\gamma = 60^\circ$ ; 2 –  $\gamma = 70^\circ$ ; 3 –  $\gamma = 80^\circ$ ; 4 –  $\gamma = 85^\circ$ . Эти значения углов соответствуют случаю, когда солнечные лучи освещают стержень со стороны закрепленного конца или шарнира  $x = x_0$ .



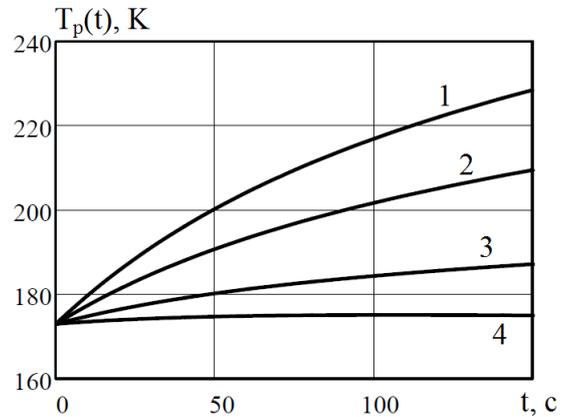
**Рис. 4.6.5.** Зависимость  $\varphi$  от  $t$  при варьировании от  $\gamma = -85^0$  до  $\gamma = -60^0$



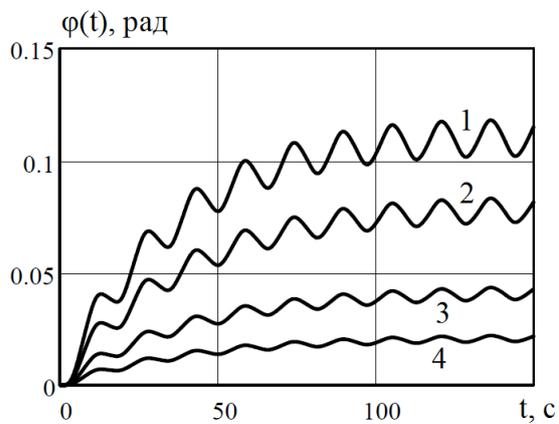
**Рис. 4.6.6.** Зависимость  $v_p$  от  $t$  при варьировании от  $\gamma = -85^0$  до  $\gamma = -60^0$



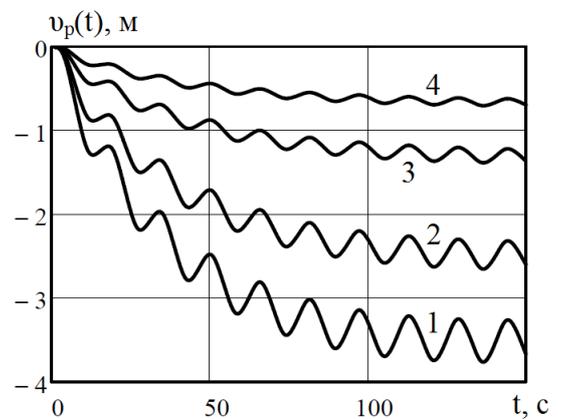
**Рис. 4.6.7.** Зависимость  $\vartheta_p$  от  $t$  при варьировании от  $\gamma = -85^0$  до  $\gamma = -60^0$



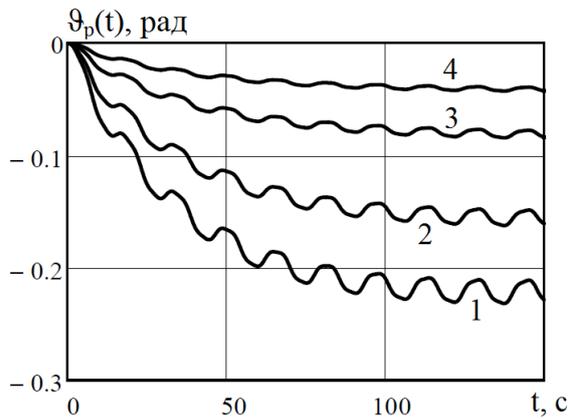
**Рис. 4.6.8.** Зависимость  $T_p$  от  $t$  при варьировании от  $\gamma = -85^0$  до  $\gamma = -60^0$



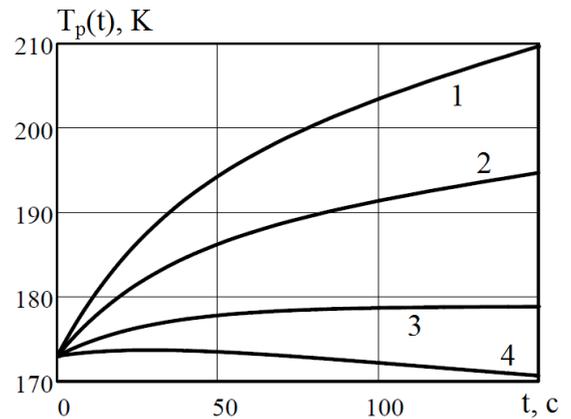
**Рис. 4.6.9.** Зависимость  $\varphi$  от  $t$  при варьировании от  $\gamma = 60^0$  до  $\gamma = 85^0$



**Рис. 4.6.10.** Зависимость  $v_p$  от  $t$  при варьировании от  $\gamma = 60^0$  до  $\gamma = 85^0$



**Рис. 4.6.11.** Зависимость  $\vartheta_p$  от  $t$  при варьировании от  $\gamma = 60^\circ$  до  $\gamma = 85^\circ$

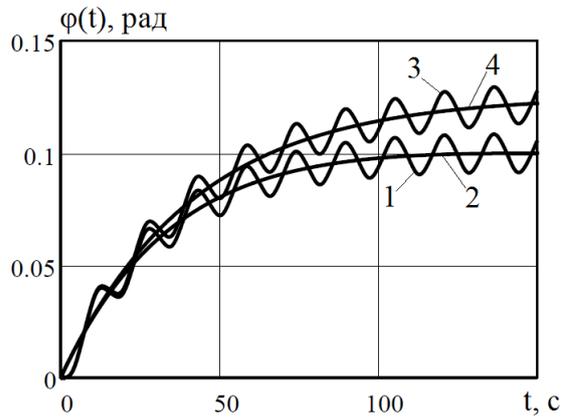


**Рис. 4.6.12.** Зависимость  $T_p$  от  $t$  при варьировании от  $\gamma = 60^\circ$  до  $\gamma = 85^\circ$

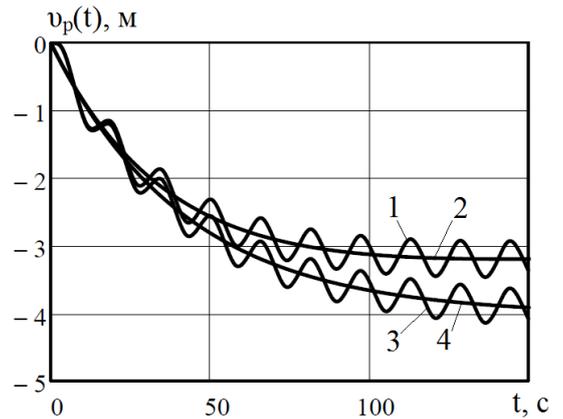
### Сравнение решений, полученных с учетом излучения и без излучения

Рассмотрим задачу о выходе из тени КА с тонкостенным стержнем при угле падения солнечных лучей  $\gamma = -60^\circ$  в двух постановках: с учетом излучения и без учета. Также рассмотрим два частных случая для данных постановок, при которых не учитываются инерционные силы стержня. Это позволит оценить влияние нагрева стержня на общий характер движения системы.

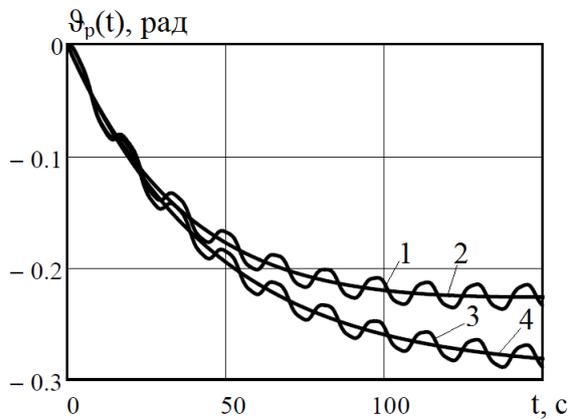
На рис. 4.6.13 – 4.6.16 приведены зависимости  $\varphi(t)$ ,  $v_p(t)$ ,  $\vartheta_p(t)$  и  $T_{1,p}(t)$  для четырех описанных выше вариантов: 1 – с учетом излучения и инерционных сил стержня; 2 – с учетом излучения и без учета инерционных сил стержня; 3 – без учета излучения и с учета инерционных сил стержня; 4 – без учета излучения и инерционных сил стержня. По рис. 4.6.16 в масштабе графиков видно, что инерционные силы стержня не оказывают влияния на распределение температуры  $T_{1,p}$ .



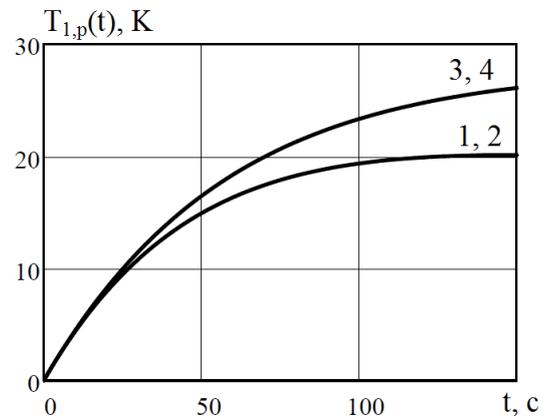
**Рис. 4.6.13.** Зависимость  $\varphi$  от  $t$



**Рис. 4.6.14.** Зависимость  $v_p$  от  $t$



**Рис. 4.6.15.** Зависимость  $\vartheta_p$  от  $t$

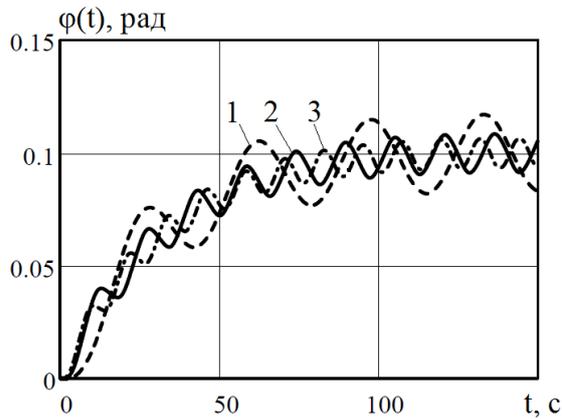


**Рис. 4.6.16.** Зависимость  $T_p$  от  $t$

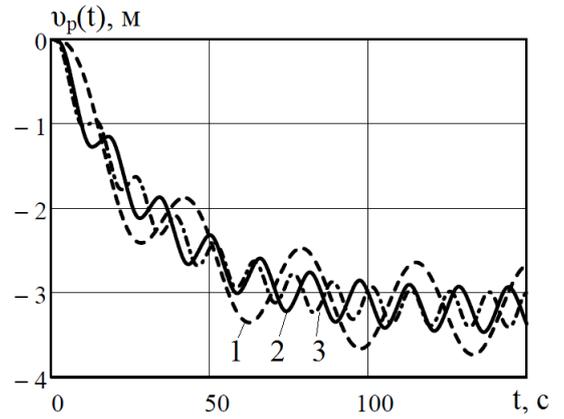
### Влияние параметров шарнира на колебания стержня

Рассмотрим влияние жесткости упруго-вязкого шарнира  $\kappa_0$  на характер колебаний стержня при угле падения солнечных лучей  $\gamma = -60^\circ$  с учетом излучения. Как показывают исследования [73, 74], коэффициент демпфирования существенного влияния на колебательный процесс не вносит.

На рис. 4.6.17 и 4.6.18 приведены зависимости  $\varphi(t)$ ,  $v_p(t)$  для нескольких значений  $\kappa_0$ : 1 –  $\kappa_0 = 10$  Н·м/рад; 2 –  $\kappa_0 = 100$  Н·м/рад; 3 –  $\kappa_0 = 1000$  Н·м/рад. Следует отметить, что влияние жесткости упруго-вязкого шарнира на распределение температуры стержня незначительное.



**Рис. 4.6.17.** Зависимость  $\varphi$  от  $t$



**Рис. 4.6.18.** Зависимость  $v_p$  от  $t$

#### ***4.7. Основные выводы и результаты по главе 4***

1. Получено решение нестационарной задачи динамики КА с присоединенным к нему упругим тонкостенным стержнем, подвергающимся действию солнечных лучей с учетом теплоизлучения и изменения угла падения лучей за счет поворота КА и термоупругих колебаний стержня.

2. Выполнена оценка сходимости и устойчивости решения полученной системы нелинейных дифференциальных уравнений.

3. Проведена оценка влияния инерционных сил стержня и учета теплоизлучения на характер движения рассматриваемой системы

## 5. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ СОСТАВНЫХ СИСТЕМ СО СВЯЗЯМИ

Рассматривается нестационарное движение двух упругих систем, описываемых нелинейными дифференциальными уравнениями в обобщенных координатах. Считается, что в исходном состоянии или в процессе трансформации эти две системы соединяются между собой в конечном числе точек упругими или геометрическими голономными связями. На основании принципа возможных перемещений (Даламбера-Лагранжа) получены уравнения движения составной системы в тех же самых обобщенных координатах с учетом связей. При этом упругие связи учитываются путем добавления потенциальной энергии деформации соединительных элементов, которая выражается с использованием условий соединения через обобщенные координаты двух систем. Геометрические связи учитываются в вариационном уравнении путем добавления вариации работы неизвестных реакций удержания связей при их малых возможных изменениях и выражаются через вариации обобщенных координат рассматриваемых систем. Из этого расширенного вариационного уравнения получают уравнения составной системы, к которым добавляются алгебраические уравнения геометрических связей. Этот подход эквивалентен подходу получения уравнений в обобщенных координатах с неопределенными множителями Лагранжа, представляющими реакции в связях.

В качестве примеров подсистем в подвижных координатах рассмотрены: гибкий нерастяжимый стержень, изгибаемый в двух плоскостях и закручиваемый (звено космического крана-манипулятора); растяжимый весомый трос, совершающий трехмерные нелинейные колебания.

Рассмотрена система, состоящая из упругой на изгиб, нерастяжимой консольной балки, совершающей нелинейные в квадратичном приближении продольно-поперечные колебания, на конце которой шарнирно присоединено тяжелое твердое тело, поворачивающееся на конечный угол. Изгиб балки представляется по методу Ритца двумя обобщенными координатами. Две линейные связи по перемещениям балки и тела в шарнире удовлетворяются

точно, а третья нелинейная связь, представляющая условие нерастяжимости балки, добавляется к уравнениям движения системы, включающим неизвестную реакцию удержания этой связи.

Основные результаты работы по данной главе опубликованы в [137 – 139].

### 5.1. Составление общих уравнений в обобщенных координатах

Уравнения движения двух или более несвязанных между собой упругих нелинейных систем в обобщенных координатах записываются в символическом виде:

$$L_i^{(k)}(\bar{\mathbf{q}}_j^{(k)}, t) = \mathbf{Q}_i^{(k)}(t), \quad i = 1, 2, \dots, n_k, \quad k = 1, 2, \quad (5.1.1)$$

где  $\mathbf{q}_j^{(k)}$ ,  $\mathbf{Q}_i^{(k)}(t)$  – обобщенные координаты и обобщенные силы  $k$ -ой системы;  $L_i^{(k)}$  – нелинейный дифференциальный оператор; верхней стрелкой обозначается совокупность всех обобщенных координат  $k$ -ой системы, т.е.  $\bar{\mathbf{q}}_j^{(k)} \rightarrow \mathbf{q}_1^{(k)}, \mathbf{q}_2^{(k)}, \dots, \mathbf{q}_{n_k}^{(k)}$ .

При соединении рассматриваемых систем друг с другом по перемещениям и конечным углам поворота в определенных точках систем (или – по обобщенным координатам) должны удовлетворяться в общем случае нелинейные геометрические связи

$$f_r(\bar{\mathbf{q}}_j^{(1)}, \bar{\mathbf{q}}_j^{(2)}, \dots, t) = 0, \quad r = 1, 2, \dots, s. \quad (5.1.2)$$

Для упругих связей записывается потенциальная энергия деформации и выражается через обобщенные координаты систем; например, для  $p$ -ой упругой связи –  $P_p(\bar{\mathbf{q}}_j^{(1)}, \bar{\mathbf{q}}_j^{(2)}, \dots)$ .

Уравнения движения составной системы со связями могут быть получены как уравнения Лагранжа в обобщенных координатах с неопределенными множителями [126, 127] или на основании вариационного принципа возможных перемещений (Даламбера-Лагранжа) с учетом вариации работы неизвестных реакций  $N_r$  при малых возможных изменениях связей  $\delta f_r$  в виде:

$$\sum_{i,k} (L_i^{(k)} - Q_i^{(k)}) \delta q_i^{(k)} + \sum_p \delta \Pi_p - \sum_r N_r \delta f_r = 0, \quad (5.1.3)$$

где

$$\delta \Pi_p = \sum_{i,k} \frac{\partial \Pi_p}{\partial q_i^{(k)}} \delta q_i^{(k)}, \quad \delta f_r = \sum_{i,k} \frac{\partial f_r}{\partial q_i^{(k)}} \delta q_i^{(k)}. \quad (5.1.4)$$

В результате в силу произвольности и независимости вариаций  $\delta q_i^{(k)}$ , уравнения движения составной системы с учетом связей (5.1.2) будут иметь вид:

$$L_i^{(k)} - Q_i^{(k)} + \sum_p \frac{\partial \Pi_p}{\partial q_i^{(k)}} - \sum_r N_r \frac{\partial f_r}{\partial q_i^{(k)}} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n_k, \quad k = 1, 2; \quad (5.1.5)$$

к этим уравнениям необходимо добавить условия связей (5.1.2).

Для решения связанной системы уравнений (5.1.2), (5.1.5) для неизвестных функций  $q_i^{(k)}(t)$ ,  $N_r(t)$  при  $i = 1, 2, \dots, n_k$ ,  $k = 1, 2$ ,  $r = 1, 2, \dots, s$  необходимо использовать методы численного интегрирования систем дифференциально-алгебраических уравнений [129, 131, 132]. Если геометрические связи  $f_r = 0$  заменить соответствующими дифференциальными связями  $\dot{f}_r = 0$ , то тогда можно использовать методы численного интегрирования систем дифференциальных уравнений.

Систему уравнений (5.1.2), (5.1.5) можно редуцировать (по крайней мере – по части переменных), удовлетворяя некоторые (в первую очередь линейные) или все связи (5.1.2) и исключить из уравнений (5.1.5) соответствующие реакции связей  $N_r$ . При этом редуцированная система уравнений становится весьма громоздкой.

При практических расчетах иногда используется следующий вычислительный прием: абсолютно жесткие связи заменяются упругими связями с «достаточно большими коэффициентами жесткости». В этом случае структура уравнений «несвязанных» систем (5.1.1) сохраняется; добавляются только линейные упругие связи между ними. Это упрощает численное решение задачи интегрирования уравнений по времени; однако требует оценки вычислительной сходимости при принимаемых значениях коэффициентов жесткости.

## 5.2. Нелинейная динамика упругих стержней при больших пространственных перемещениях и поворотах

Рассмотрим тонкий стержень с постоянным поперечным сечением, который представляет собой звено космического крана или манипулятора для сборки на орбите больших конструкций из однотипных элементов. Стержни соединяются между собой на краях через посредство одного или двух твердых тел с управляющими элементами, обеспечивающими относительные повороты соединяемых концов стержней. Динамику пространственного движения одного отделенного от системы упругого стержня будем описывать в векторном виде в рамках общего подхода, изложенного в главе 1. Стержень рассматривается в связанной с ним подвижной системе координат  $Ox_1x_2x_3$ , ось  $Ox_1$  которой совпадает с прямолинейной осью стержня в его недеформированном состоянии, а оси  $Ox_2$ ,  $Ox_3$  лежат в главных плоскостях изгиба стержня, рис. 5.2.1.

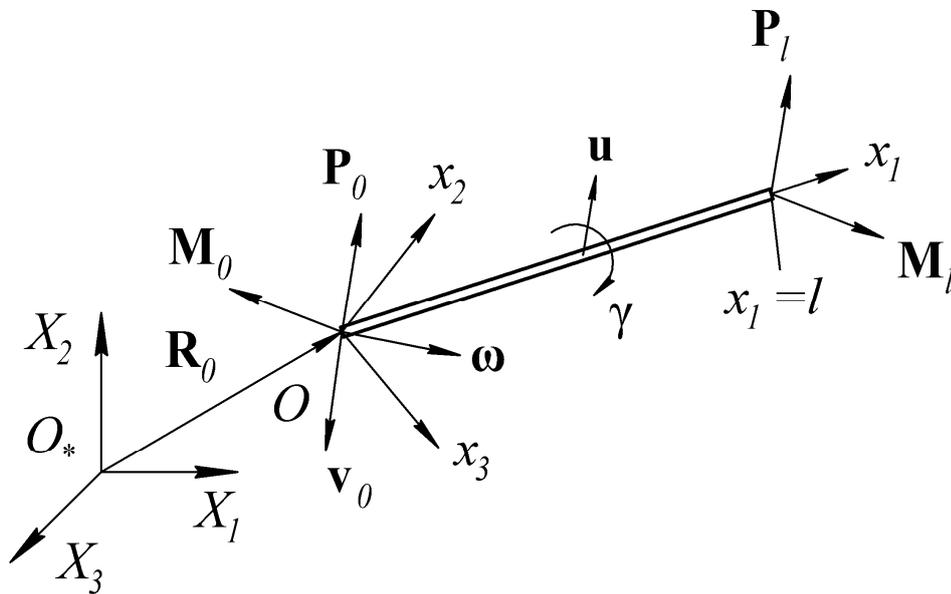


Рис. 5.2.1. Отделенный от системы упругий стержень

Положение подвижной системы координат рассматриваемого стержня относительно инерциальной системы  $O_*X_1X_2X_3$  характеризуется радиус вектором  $\mathbf{R}_0 = [X_{01}(t) X_{02}(t) X_{03}(t)]^T$  и вектором самолетных углов поворота

$\boldsymbol{\theta} = [\theta_1(t) \theta_2(t) \theta_3(t)]^T$ , представляющими углы крена, рыскания и тангажа, соответственно. Векторы скорости поступательного (в точке  $O$ ) и вращательного движений системы  $Ox_1x_2x_3$  относительно системы  $O_*X_1X_2X_3$  обозначаются через  $\mathbf{v}_0 = [v_{01}(t) v_{02}(t) v_{03}(t)]^T$  и  $\boldsymbol{\omega} = [\omega_1(t) \omega_2(t) \omega_3(t)]^T$ , рис. 5.2.1. Кинематические соотношения между векторами  $\mathbf{v}_0$ ,  $\boldsymbol{\omega}$  и векторами  $\mathbf{R}_0$ ,  $\boldsymbol{\theta}$  записываются в виде [6]  $\mathbf{v}_0 = \Lambda \dot{\mathbf{R}}_0$ ,  $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{A} \dot{\boldsymbol{\theta}}$ , где  $\Lambda$ ,  $\mathbf{A}$  – квадратные матрицы 3-го порядка, зависящие от параметров  $s_k = \sin \theta_k$ ,  $c_k = \cos \theta_k$ ,  $k=1,2,3$ . Матрица  $\Lambda$  обладает свойством  $\Lambda^{-1} = \Lambda^T$ .

Радиус-вектор  $\mathbf{R}$  и векторы абсолютной скорости  $\mathbf{v}$  и абсолютного ускорения  $\mathbf{a}$  любой точки оси движущегося упругого стержня (рис. 5.2.1) будут:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{R}_0 + \Lambda^T \tilde{\mathbf{r}}, \quad \tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r} + \mathbf{u}; \\ \mathbf{v} &= \mathbf{v}_0 + \overset{\vee}{\boldsymbol{\omega}} \tilde{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{u}}, \quad \mathbf{a}_0 = \dot{\mathbf{v}}_0 + \overset{\vee}{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{v}_0, \quad \mathbf{a} = \mathbf{a}_0 + \overset{\vee}{\dot{\boldsymbol{\omega}}} \tilde{\mathbf{r}} + \overset{\vee}{\boldsymbol{\omega}} \overset{\vee}{\boldsymbol{\omega}} \tilde{\mathbf{r}} + 2 \overset{\vee}{\boldsymbol{\omega}} \dot{\mathbf{u}} + \ddot{\mathbf{u}}. \end{aligned} \quad (5.2.1)$$

Здесь  $\mathbf{r} = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$  – радиус-вектор точек оси стержня;  $\mathbf{u} = [u_1 \ u_2 \ u_3]^T$  – вектор перемещений оси стержня, обусловленных его упругими перемещениями;  $\mathbf{a}_0$  – ускорение точки  $O$ ; векторное произведение для удобства вычислений заменяется матричным как:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \overset{\vee}{\mathbf{a}} \mathbf{b}, \quad \mathbf{a} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}, \quad \overset{\vee}{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тонкий стержень длины  $l$  заменяется упругой осью с приведенной к ней погонной массой  $m = \text{const}$ ; в этом случае

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1(\xi, t) \\ u_2(\xi, t) \\ u_3(\xi, t) \end{bmatrix}, \quad \xi = \frac{x_1}{l}.$$

Ось стержня считается нерастяжимой:

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)^2 \right] = 0. \quad (5.2.2)$$

Стержень работает на изгиб в плоскостях  $x_1x_2$  и  $x_1x_3$  с жесткостями  $EI_2$  и  $EI_3$ , а также на кручение относительно оси  $x_1$  с углом  $\gamma(x_1, t)$  и жесткостью на кручение  $GJ_1$ . Потенциальная энергия изгиба и кручения стержня:

$$\Pi = \frac{1}{2} EI_2 \int_0^l \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 dx_1 + \frac{1}{2} EI_3 \int_0^l \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)^2 dx_1 + \frac{1}{2} GJ_1 \int_0^l \left( \frac{\partial \gamma}{\partial x_1} \right)^2 dx_1. \quad (5.2.3)$$

Поперечные перемещения стержня с умеренными прогибами, соответствующими нелинейным деформациям в квадратичном приближении, представим по методу Ритца с учетом  $u_2 = u_3 = 0$  при  $x_1 = 0, l$  в виде

$$u_2(\xi, t) = q_1(t)\varphi_1(\xi) + q_2(t)\varphi_2(\xi), \quad u_3(\xi, t) = q_3(t)\varphi_3(\xi) + q_4(t)\varphi_4(\xi), \quad (5.2.4)$$

а угол закручивания с учетом  $\gamma = 0$  при  $x_1 = 0$  – в виде

$$\gamma(\xi, t) = \frac{1}{l} q_5(t)\varphi_5(\xi), \quad (5.2.5)$$

где  $q_i(t)$  – обобщенные координаты,  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ .

Подходящие базовые функции, обеспечивающие необходимые углы поворота на краях деформируемого стержня, берутся в виде:

$$\varphi_1(\xi) = \varphi_3(\xi) = \xi(1 - \xi^2), \quad \varphi_2(\xi) = \varphi_4(\xi) = -(1 - \xi)\xi^2, \quad \varphi_5(\xi) = \xi, \quad (5.2.6)$$

или

$$\varphi_1(\xi) = \varphi_3(\xi) = \sin(\pi\xi), \quad \varphi_2(\xi) = \varphi_4(\xi) = \sin(2\pi\xi), \quad \varphi_5(\xi) = \xi. \quad (5.2.7)$$

Продольное перемещение нерастяжимого стержня за счет «усадки» определяется путем интегрирования условия (5.2.2) с учетом (5.2.4):

$$u_1(x_1, t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 q_i(t)q_j(t)\psi_{ij}(x_1) + \frac{1}{2} \sum_{i=3}^4 \sum_{j=3}^4 q_i(t)q_j(t)\psi_{ij}(x_1); \quad (5.2.8)$$

$$\psi_{ij}(x_1) = - \int_0^{x_1} \varphi'_i(x_1)\varphi'_j(x_1)dx_1.$$

Далее будем считать изгиб стержня слабым, полагая  $u_1(x_1, t) \approx 0$ .

Для вывода уравнения движения мысленно изолированного упругого стержня с реакциями связей с другими системами (твердыми телами, управляющими устройствами, тросовыми элементами, пр.) удобно использовать принцип возможных перемещений:

$$\delta\Pi - \delta A_p - \delta A_g - \delta A_{ин} = 0. \quad (5.2.9)$$

Здесь произвольными являются: вариация перемещения в точке  $x_1 = 0$  стержня –  $\delta\mathbf{u}_0$ ; вариация угла поворота стержня как твердого тела относительно точки  $x_1 = 0$  –  $\delta\boldsymbol{\theta}$ ; вариации перемещений изгиба  $\delta u(x_1, t)$  и кручения  $\delta\gamma(x_1, t)$  стержня. Вариация угла поворота в произвольной точке  $x_1$  за счет изгиба и закручивания стержня будет

$$\delta\boldsymbol{\theta}^T + \delta\left[\gamma - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right]^T.$$

Вариация работы сосредоточенных сил  $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_l$  и моментов  $\mathbf{M}_0, \mathbf{M}_l$ , действующих на концах стержня  $x_1 = 0$  и  $x_1 = l$  (см. рис. 5.2.1) будет:

$$\begin{aligned} \delta A_p = & \delta\mathbf{u}_0^T \mathbf{P}_0 + [\delta\mathbf{u}_0^T + \delta\boldsymbol{\theta}^T \check{\mathbf{r}}(l)] \mathbf{P}_l + [\delta\boldsymbol{\theta}^T + \delta\left[0 - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \Big|_0 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \Big|_0\right]^T] \mathbf{M}_0 + \\ & + [\delta\boldsymbol{\theta}^T + \delta\left[\gamma - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \Big|_l \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \Big|_l\right]^T] \mathbf{M}_l. \end{aligned} \quad (5.2.10)$$

Здесь векторы  $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_l$  и  $\mathbf{M}_0, \mathbf{M}_l$  включают инерционные силы и моменты, а также – реакции взаимодействия с другими системами.

Вариация работы сил тяжести стержня записывается в виде

$$\delta A_g = -mg_0 \int_0^l [\delta\mathbf{u}_0^T + \delta\boldsymbol{\theta}^T \check{\mathbf{r}} + \delta\mathbf{u}^T] \boldsymbol{\Lambda} dx_1, \quad (5.2.11)$$

где  $m$  – погонная масса стержня;  $g_0$  – ускорение свободного падения;  $\boldsymbol{\Lambda}$  – матрица направляющих косинусов углов между осями подвижной и инерциальной (или неподвижной) систем координат.

Вариация работы инерционных сил стержня:

$$\delta A_{ин} = -m \int_0^l [\delta\mathbf{u}_0^T + \delta\boldsymbol{\theta}^T \check{\mathbf{r}} + \delta\mathbf{u}^T] \mathbf{a} dx_1. \quad (5.2.12)$$

Далее перемещения  $u_2, u_3$  и угол закручивания  $\gamma$ , записанные в обобщенных координатах  $q_1(t), q_2(t), q_3(t), q_4(t), q_5(t)$  в виде (5.2.4), (5.2.5), подставляются в выражения (5.2.1), (5.2.3), (5.2.10) – (5.2.12), с учетом которых вариационное уравнение (5.2.9) приводится к виду

$$\delta \mathbf{u}_0^T [\dots]_{u_0} + \delta \boldsymbol{\theta}^T [\dots]_{\theta} + \sum_{i=1}^5 \delta q_i [\dots]_i = 0. \quad (5.2.13)$$

Отсюда получаем систему уравнений пространственного движения свободного упругого стержня:

$$[\dots]_{u_0} = 0, \quad [\dots]_{\theta} = 0, \quad [\dots]_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5. \quad (5.2.14)$$

В случае составной системы учитываются связи и неизвестные реакции связей между подсистемами.

### 5.3. Нелинейная динамика троса

Тросы часто используются для буксировки различных объектов, включая летательные и космические аппараты, а также – в качестве соединительных элементов подвижных частей подъемно-транспортных механизмов, кранов и в качестве проводов воздушных линий электропередач.

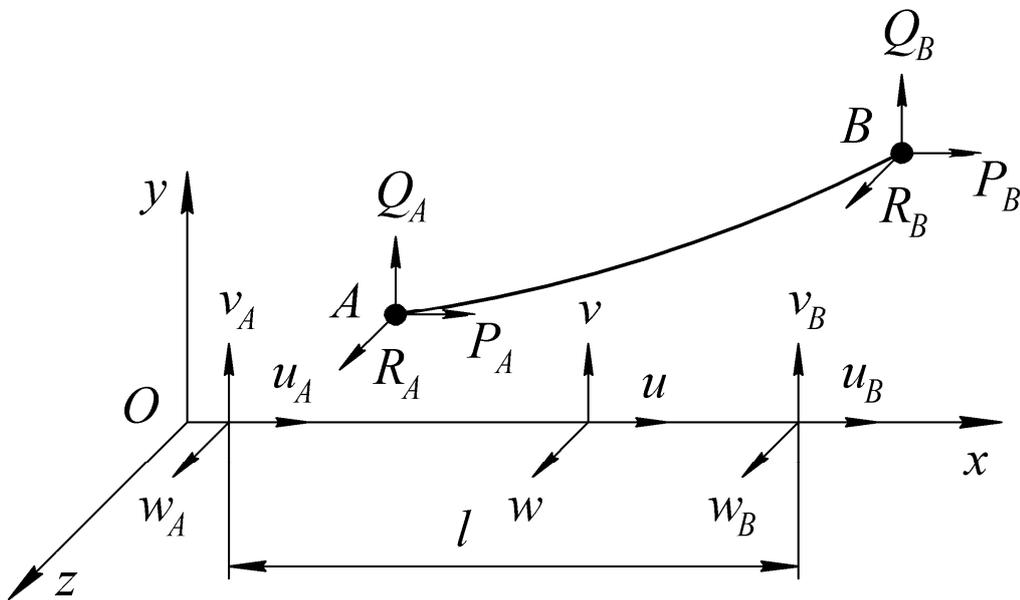


Рис. 5.3.1. Участок растяжимого троса

Рассмотрим участок растяжимого троса, соединяющего два подвижных узла (точки)  $A$  и  $B$ , который в исходном недеформированном состоянии имеет длину  $l$ , рис. 5.3.1. Будем считать, что в возмущенном движении деформация удлинения

троса  $\varepsilon$  является упругой, а углы отклонения оси троса во всех его точках от координатной оси  $x$  являются умеренными ( $\vartheta_y \approx \partial v / \partial x$ ,  $\vartheta_z \approx \partial w / \partial x$  не превышают величины 0,3). На концах троса  $x=0$ ,  $x=l$  заданы (как функции времени  $t$ ) перемещения  $u_A, v_A, w_A, u_B, v_B, w_B$  или соответствующие им силы  $P_A, Q_A, R_A, P_B, Q_B, R_B$ . Для упрощения задачи при преимущественно поперечных низкочастотных колебаниях троса будем пренебрегать как малыми величинами распределенной продольной нагрузки, так и продольными силами инерции –  $p_x \approx 0$ ,  $m\ddot{u} \approx 0$ . Уравнения геометрически нелинейных колебаний троса в обобщенных координатах получим по методу Ритца на основе принципа возможных перемещений  $\delta\Pi - \delta A_p - \delta A_{ин} = 0$  в квадратичном приближении при условиях

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \ll 1, \quad \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \ll 1, \quad \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \ll 1.$$

Сначала для общности будем считать, что все компоненты перемещений на концах троса в точках  $A$  и  $B$  неизвестны, а соответствующие им силы заданы (силовое возбуждение). Если какие-либо компоненты перемещений на концах троса являются заданными функциями времени (кинематическое возбуждение), то соответствующие им силы (реакции) являются неизвестными. В случае, если, например, в точке  $B$ , трос соединяется с другой системой, движение которой неизвестно, то в этой точке перемещения и соответствующие силы являются неизвестными; тогда для связанных систем добавляются кинематические и силовые условия их сопряжения.

Перемещения троса при его растяжении с поперечными отклонениями представим в виде:

$$\begin{aligned} u(\xi, t) &= (1 - \xi)u_A(t) + \xi u_B(t) + \sum_i q_{x,i}(t) \sin(i\pi\xi); \\ v(\xi, t) &= (1 - \xi)v_A(t) + \xi v_B(t) + \sum_i q_{y,i}(t) \sin(i\pi\xi); \\ w(\xi, t) &= (1 - \xi)w_A(t) + \xi w_B(t) + \sum_i q_{z,i}(t) \sin(i\pi\xi), \end{aligned} \quad (5.3.1)$$

где  $\xi = x/l$ ;  $q_{x,i}(t)$ ,  $q_{y,i}(t)$ ,  $q_{z,i}(t)$  – неизвестные коэффициенты;  $i = 1, 2, \dots$

Нелинейная деформация растяжения троса в квадратичном приближении при  $p_x \approx 0$ ,  $m\ddot{u} \approx 0$  записывается так же, как для элемента стержня постоянного поперечного сечения (5.2.2):

$$\varepsilon = \frac{1}{l} [u_B - u_A + \frac{1}{2l} \int_0^1 [(\frac{\partial v}{\partial \xi})^2 + (\frac{\partial w}{\partial \xi})^2] d\xi]. \quad (5.3.2)$$

Потенциальная энергия растяжения троса с учетом (5.3.1) и (5.3.2) будет

$$\Pi_p = \frac{1}{2} \frac{EF}{l} [(u_B - u_A) + \frac{1}{2l} [(v_B - v_A)^2 + (w_B - w_A)^2 + \frac{\pi^2}{2} \sum_i i^2 (q_{y,i}^2 + q_{z,i}^2)]]^2. \quad (5.3.3)$$

Для сравнительно толстых тросов (канатов, металлических проводов) будем учитывать изгибную жесткость  $EI = \text{const}$ ; даже если она весьма мала. Это позволит устранить неоднозначность формы изгиба троса при его кратковременных сжатиях и будет способствовать устойчивому счету. При этом будем пренебрегать влиянием краевых изгибов, считая, что трос на концах  $x = 0$ ,  $x = l$  шарнирно соединен с другими системами. Потенциальная энергия изгиба троса с учетом (5.3.1) записывается в виде:

$$\Pi_u = \frac{1}{2} \frac{EI}{l^3} \int_0^1 [(\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2})^2 + (\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2})^2] d\xi = \frac{1}{2} \frac{EI}{l^3} \frac{\pi^4}{2} \sum_i i^4 (q_{y,i}^2 + q_{z,i}^2). \quad (5.3.4)$$

Потенциальная энергия растяжения и изгиба троса будет  $\Pi = \Pi_p + \Pi_u$ .

Вариации работы распределенных нагрузок  $p_y(\xi, t)$ ,  $p_z(\xi, t)$  и сосредоточенных сил в точках  $A$  и  $B$  на концах троса  $x = 0$ ,  $x = l$  с учетом (5.3.1) будут:

$$\begin{aligned} \delta A_P = & P_A \delta u_A + P_B \delta u_B + (\bar{Q}_A + Q_A) \delta v_A + (\bar{Q}_B + Q_B) \delta v_B + \\ & + \sum_i \bar{Q}_i \delta q_{y,i} + (\bar{R}_A + R_A) \delta w_A + (\bar{R}_B + R_B) \delta w_B + \sum_i \bar{R}_i \delta q_{z,i}, \end{aligned} \quad (5.3.5)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{Q}_A = \int_0^1 p_y (1 - \xi) d\xi, \quad \bar{Q}_B = \int_0^1 p_y \xi d\xi, \quad \bar{Q}_i = \int_0^1 p_y \sin(i\pi\xi) d\xi; \\ \bar{R}_A = \int_0^1 p_z (1 - \xi) d\xi, \quad \bar{R}_B = \int_0^1 p_z \xi d\xi, \quad \bar{R}_i = \int_0^1 p_z \sin(i\pi\xi) d\xi \end{aligned}$$

– обобщенные силы распределенных нагрузок.

Вариация работы инерционных сил сосредоточенных масс  $M_A$  и  $M_B$  в точках  $A$  и  $B$  и распределенной массы троса  $m$  с учетом (5.3.1) после вычисления интегралов записывается в виде:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{ml}\delta A_{ин} = & \delta u_A[\mu_A \ddot{u}_A] + \delta u_B[\mu_B \ddot{u}_B] + \\
& + \delta v_A[(\frac{1}{3} + \mu_A)\ddot{v}_A + \frac{1}{6}\ddot{v}_B + \sum_j \frac{1}{j\pi} \ddot{q}_{y,j}] + \\
& + \delta v_B[\frac{1}{6}\ddot{v}_A + (\frac{1}{3} + \mu_B)\ddot{v}_B - \sum_j \frac{\cos(j\pi)}{j\pi} \ddot{q}_{y,j}] + \\
& + \sum_i \delta q_{y,i}[\frac{1}{i\pi} \ddot{v}_A - \frac{\cos(i\pi)}{i\pi} \ddot{v}_B + \frac{1}{2} \ddot{q}_{y,i}] + \\
& + \delta w_A[(\frac{1}{3} + \mu_A)\ddot{w}_A + \frac{1}{6}\ddot{w}_B + \sum_j \frac{1}{j\pi} \ddot{q}_{z,j}] + \\
& + \delta w_B[\frac{1}{6}\ddot{w}_A + (\frac{1}{3} + \mu_B)\ddot{w}_B - \sum_j \frac{\cos(j\pi)}{j\pi} \ddot{q}_{z,j}] + \\
& + \sum_i \delta q_{z,i}[\frac{1}{i\pi} \ddot{w}_A - \frac{\cos(i\pi)}{i\pi} \ddot{w}_B + \frac{1}{2} \ddot{q}_{z,i}],
\end{aligned} \tag{5.3.6}$$

где  $\mu_A = M_A/ml$ ,  $\mu_B = M_B/ml$ .

Если рассматриваемый участок троса соединяется с другими участками, то для последних также надо записать вариации  $\delta\Pi$ ,  $\delta A_P$  и  $\delta A_{ин}$  и объединить их все с учетом кинематических (по перемещениям) и силовых (по реакциям взаимодействия) условиям сопряжения.

Уравнения принципа возможных перемещений для составной системы с учетом кинематических связей записывается в виде

$$\sum_k L_k \delta q_k = 0,$$

где  $\delta q_k$  – линейно-независимые произвольные вариации обобщенных координат ( $\delta q_k \neq 0$ ). Для выполнения вариационного уравнения необходимо, чтобы  $L_k = 0$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Это будут уравнения движения составной системы в обобщенных координатах.

## 5.4. Колебания упругой балки с тяжелым поворачивающимся телом на конце

### 5.4.1. Уравнения нелинейных колебаний балки

Рассмотрим упругую консольно закрепленную нерастяжимую балку постоянного поперечного сечения, на конце которой при  $x=l$  шарнирно присоединено тяжелое абсолютно твердое тело, совершающее неустановившееся вращательное движение с большим углом поворота, рис. 5.4.1. Колебания гибкой балки будем считать умеренно большими и нелинейными в квадратичном приближении, инерцией в продольном направлении и инерцией вращения поперечных сечений балки будем пренебрегать. Относительный угол поворота тела  $\varphi(t)$  будем считать заданным.

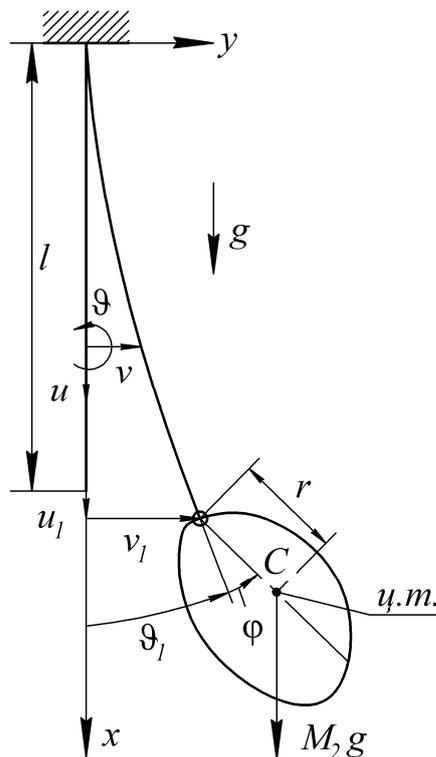


Рис. 5.4.1. Балка с поворачивающимся телом на конце

Продольное перемещение  $u$  при изгибе выражается через поперечное перемещение  $v$  из условия нерастяжимости оси балки

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 = 0;$$

откуда путем интегрирования с учетом  $u(0, t) = 0$ ,  $u(l, t) = u_1(t)$  получаем:

$$u_1 = -\frac{1}{2} \int_0^l \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx. \quad (5.4.1)$$

В качестве обобщенных координат будем рассматривать перемещение  $v_1$  и угол поворота  $\vartheta_1$  на конце балки при  $x = l$ . Поперечное перемещение выразим через эти координаты приближенно как для конечного элемента при изгибе без учета поперечных сдвигов [205]:

$$\begin{aligned} v(x, t) &= v_1(t)\varphi_1(x) + \vartheta_1(t)\psi_1(x); \\ \varphi_1(x) &= 3\frac{x^2}{l^2} - 2\frac{x^3}{l^3}, \quad \psi_1(x) = -\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}. \end{aligned} \quad (5.4.2)$$

Угол поворота поперечного сечения определяется как  $\vartheta(x, t) = \frac{\partial v(x, t)}{\partial x}$ .

С учетом (5.4.1) и (5.4.2) продольное перемещение конца балки  $u_1$  записывается в виде:

$$u_1 = -\left( \frac{3}{5l} v_1^2 - \frac{1}{10} v_1 \vartheta_1 + \frac{l}{15} \vartheta_1^2 \right) = -\frac{1}{2} l \left( p \frac{v_1}{l} + q \vartheta_1 \right), \quad (5.4.3)$$

где

$$p(v_1, \vartheta_1) = \frac{6}{5} \frac{v_1}{l} - \frac{1}{10} \vartheta_1, \quad q(v_1, \vartheta_1) = -\frac{1}{10} \frac{v_1}{l} + \frac{2}{15} \vartheta_1. \quad (5.4.4)$$

Условие (5.4.3) с учетом (5.4.4) будем рассматривать как нелинейную геометрическую связь.

Нелинейные уравнения колебаний рассматриваемой системы (рис. 5.4.1) в обобщенных координатах  $v_1(t)$  и  $\vartheta_1(t)$  с учетом всех геометрических связей составим по методу Лагранжа.

Кинетическая энергия балки с постоянной погонной массой  $m$ :

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2} m \int_0^l \dot{v}^2 dx = \frac{1}{2} (m_{vv} \dot{v}_1^2 + 2m_{v\vartheta} \dot{v}_1 \dot{\vartheta}_1 + m_{\vartheta\vartheta} \dot{\vartheta}_1^2); \\ m_{vv} &= \frac{13}{35} ml, \quad m_{v\vartheta} = -\frac{11}{210} ml^2, \quad m_{\vartheta\vartheta} = \frac{1}{105} ml^3. \end{aligned} \quad (5.4.5)$$

Потенциальная энергия балки с постоянной изгибной жесткостью  $EI$ :

$$\Pi_1 = \frac{1}{2} EI \int_0^l \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 dx = \frac{1}{2} (k_{vv} v_1^2 + 2k_{v\vartheta} v_1 \vartheta_1 + k_{\vartheta\vartheta} \vartheta_1^2); \quad (5.4.6)$$

$$k_{vv} = 12 \frac{EI}{l^3}, \quad k_{v\vartheta} = -6 \frac{EI}{l^2}, \quad k_{\vartheta\vartheta} = 4 \frac{EI}{l}.$$

Кинетическая энергия поступательного и вращательного движений тела:

$$T_2 = \frac{1}{2} M_2 (\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2) + \frac{1}{2} J_C \dot{\theta}^2,$$

где  $M_2$  и  $J_C$  – масса и момент инерции относительно центра тяжести (точка  $C$ ) присоединенного тела. Координаты центра тяжести тела  $x_C$ ,  $y_C$  и полный угол его поворота  $\theta$  будут (рис. 5.4.1):

$$x_C = l + u_1 + r \cos \theta, \quad y_C = v_1 + r \sin \theta, \quad \theta = \vartheta_1 + \varphi.$$

С учетом этих выражений получаем:

$$T_2 = \frac{1}{2} [\dot{u}_1^2 + \dot{v}_1^2 + 2r(-\dot{u}_1 \sin \theta + \dot{v}_1 \cos \theta) \dot{\theta}] + \frac{1}{2} J_2 (\dot{\vartheta}_1 + \dot{\varphi})^2, \quad (5.4.7)$$

где  $J_2 = J_C + M_2 r^2$ ;  $r$  – расстояние от шарнира до центра тяжести тела (рис. 5.4.1).

Потенциальная энергия силы тяжести тела:

$$\Pi_2 = M_2 g (-u_1 + r(1 - \cos \theta)). \quad (5.4.8)$$

С учетом выражений (5.4.2), (5.4.5) – (5.4.8) уравнения Лагранжа для обобщенных координат  $v_1$  и  $\vartheta_1$  при  $\theta = \vartheta_1 + \varphi$  записываются в виде системы нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} & (m_{vv} + M_2(1 + p^2)) \ddot{v}_1 + (m_{v\vartheta} + M_2 lpq + M_2 r(p \sin \theta + \cos \theta)) \ddot{\vartheta}_1 + \\ & + k_{vv} v_1 + k_{v\vartheta} \vartheta_1 + M_2 (p \dot{p} \dot{v}_1 + p \dot{q} l \dot{\vartheta}_1) + \\ & + M_2 r (\ddot{\varphi} (p \sin \theta + \cos \theta) + \dot{\theta}^2 (p \cos \theta - \sin \theta)) + M_2 gp = 0; \\ & (m_{v\vartheta} + M_2 lpq + M_2 r(p \sin \theta + \cos \theta)) \ddot{v}_1 + \\ & + (m_{\vartheta\vartheta} + M_2 lq(lq + 2r \sin \theta) + J_2) \ddot{\vartheta}_1 + k_{v\vartheta} v_1 + k_{\vartheta\vartheta} \vartheta_1 + \\ & + M_2 (l(p \dot{q} \dot{v}_1 + q \dot{q} l \dot{\vartheta}_1) + r \sin \theta (\dot{p} \dot{v}_1 + \dot{q} l \dot{\vartheta}_1)) + \\ & + M_2 r l q (\ddot{\varphi} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta) + J_2 \ddot{\varphi} + M_2 g (ql + r \sin \theta) = 0. \end{aligned} \quad (5.4.9)$$

Введем безразмерную координату  $\bar{v}_1 = v_1/l$  и безразмерное время  $\tau = t/T$ , где  $T$  – некоторый характерный промежуток времени; производную по  $\tau$  будем обозначать штрихом. Тогда система (5.4.9) записывается в безразмерном виде:

$$\begin{aligned}
 & (\mu_{11} + 1 + p^2)\bar{v}_1'' + (\mu_{12} + pq + \bar{r}(p \sin \theta + \cos \theta))\vartheta_1'' + \\
 & \quad + \kappa_{11}\bar{v}_1 + \kappa_{12}\vartheta_1 + (pp'\bar{v}_1' + pq'\vartheta_1') + \\
 & \quad + \bar{r}(p(\varphi'' \sin \theta + \theta'^2 \cos \theta) + (\varphi'' \cos \theta - \theta'^2 \sin \theta)) + \bar{g}p = 0; \\
 & (\mu_{12} + pq + \bar{r}(p \sin \theta + \cos \theta))\bar{v}_1'' + (\mu_{22} + q^2 + 2q\bar{r} \sin \theta + j_2)\vartheta_1'' + \\
 & \quad + \kappa_{12}\bar{v}_1 + \kappa_{22}\vartheta_1 + (pq'\bar{v}_1' + qq'\vartheta_1') + \bar{r} \sin \theta (p'\bar{v}_1' + q'\vartheta_1') + \\
 & \quad + \bar{r}q(\varphi'' \sin \theta + \theta'^2 \cos \theta) + j_2\varphi'' + \bar{g}(q + \bar{r} \sin \theta) = 0,
 \end{aligned} \tag{5.4.10}$$

где:

$$\begin{aligned}
 q(\bar{v}_1, \vartheta_1) &= \frac{6}{5}\bar{v}_1 - \frac{1}{10}\vartheta_1, \quad p(\bar{v}_1, \vartheta_1) = -\frac{1}{10}\bar{v}_1 + \frac{2}{15}\vartheta_1; \\
 \mu_{11} &= \frac{13}{35} \frac{ml}{M_2}, \quad \mu_{12} = -\frac{11}{210} \frac{ml}{M_2}, \quad \mu_{22} = \frac{1}{105} \frac{ml}{M_2}; \\
 \kappa_{11} &= 12 \frac{EI}{M_2 l^3} T^2, \quad \kappa_{12} = -6 \frac{EI}{M_2 l^3} T^2, \quad \kappa_{22} = 4 \frac{EI}{M_2 l^3} T^2; \\
 j_2 &= \frac{J_2}{M_2 l^2}, \quad \bar{r} = \frac{r}{l}, \quad \bar{g} = \frac{gT^2}{l}.
 \end{aligned}$$

Учитывая, что продольно-поперечный изгиб балки рассматривается в квадратичном приближении по  $v_1$  и  $\vartheta_1$ , в уравнениях (5.4.10) при заданном  $\varphi(t)$  можно положить

$$\sin \theta \approx \vartheta_1 \cos \varphi + (1 - \frac{1}{2}\vartheta_1^2) \sin \varphi, \quad \cos \theta \approx (1 - \frac{1}{2}\vartheta_1^2) \cos \varphi - \vartheta_1 \sin \varphi$$

и затем пренебречь нелинейными членами с  $v_1$  и  $\vartheta_1$  выше второго порядка. Однако при численном решении удобнее использовать непосредственно более компактные уравнения (5.4.10).

Из уравнений (5.4.10) получаются линеаризованные уравнения для малых величин  $\bar{v}_1$  и  $\vartheta_1$ :

$$\begin{aligned}
& (1 + \mu_{11})\bar{v}_1'' + (\mu_{12} + \bar{r} \cos \varphi)\vartheta_1'' + (-2\bar{r}\varphi' \sin \varphi)\bar{v}_1' + \\
& + (\kappa_{11} + \frac{6}{5}(\bar{r}(\varphi'' \sin \varphi + \varphi'^2 \cos \varphi) + \bar{g}))\bar{v}_1 + \\
& + (\kappa_{12} - \frac{11}{10}\bar{r}(\varphi'' \sin \varphi + \varphi'^2 \cos \varphi) - \frac{1}{10}\bar{g})\vartheta_1 + \\
& + \bar{r}(\varphi'' \cos \varphi - \varphi'^2 \sin \varphi) = 0; \\
& (\mu_{12} + \bar{r} \cos \varphi)\bar{v}_1'' + (\mu_{22} + j_2)\vartheta_1'' + \\
& + (\kappa_{12} - \frac{1}{10}(\bar{r}(\varphi'' \sin \varphi + \varphi'^2 \cos \varphi) + \bar{g}))\bar{v}_1 + \\
& + (\kappa_{22} + \bar{g}\bar{r} \cos \varphi + \frac{2}{15}(\bar{r}(\varphi'' \sin \varphi + \varphi'^2 \cos \varphi) + \bar{g}))\vartheta_1 + \\
& + j_2\varphi'' + \bar{g}\bar{r} \sin \theta = 0.
\end{aligned} \tag{5.4.11}$$

#### 5.4.2. Уравнения колебаний системы с освобожденными связями

Отделим тело от балки (рис. 5.4.2) и для него введем новые обобщенные координаты:  $u_2$  и  $v_2$  – продольное и поперечное перемещения точки подвеса твердого тела;  $\theta$  – угол поворота тела. Для балки обобщенными координатами по-прежнему будут являться перемещение  $v_1$  и угол поворота  $\vartheta_1$  на ее конце. Реакции присоединенного тела при его движении будем обозначать через  $N$ ,  $P$  и  $M$ . Геометрические связи шарнирного соединения тела с концом упругой балки записываются в виде:

$$u_2 - u_1 = 0, \quad v_2 - v_1 = 0, \quad \theta - (\vartheta_1 + \varphi) = 0. \tag{5.4.12}$$

Уравнения поперечных колебаний балки с учетом действующих на ее конце сил (реакций тела, рис. 5.4.2) в обобщенных координатах  $v_1$  и  $\vartheta_1$  имеют вид:

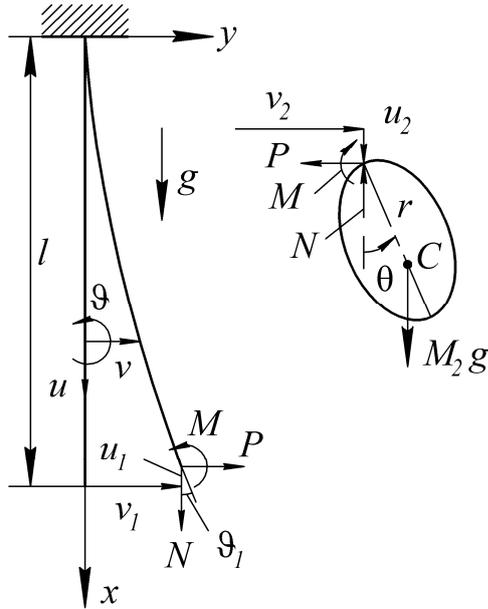
$$\begin{aligned}
m_{vv}\ddot{v}_1 + m_{v\vartheta}\ddot{\vartheta}_1 + k_{vv}v_1 + k_{v\vartheta}\vartheta_1 + pN &= P; \\
m_{v\vartheta}\ddot{v}_1 + m_{\vartheta\vartheta}\ddot{\vartheta}_1 + k_{v\vartheta}v_1 + k_{\vartheta\vartheta}\vartheta_1 + qLN &= M.
\end{aligned} \tag{5.4.13}$$

Продольная растягивающая сила входит в уравнения (5.4.13) нелинейно.

Уравнения плоского движения свободного твердого тела под действием реакций балки (рис. 5.4.2) записываются в переменных  $u_2$ ,  $v_2$  и  $\theta$ :

$$\begin{aligned}
M_2 \ddot{v}_2 + M_2 r (\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) &= -P; \\
M_2 r (-\ddot{u}_2 \sin \theta + \ddot{v}_2 \cos \theta + g \sin \theta) + J_2 \ddot{\theta} &= -M; \\
M_2 (\ddot{u}_2 - r \dot{\theta} \sin \theta - r \dot{\theta}^2 \cos \theta - g) &= -N.
\end{aligned} \tag{5.4.14}$$

В итоге, получаем замкнутую нелинейную систему 5-ти дифференциальных уравнений (5.4.13), (5.4.14) и 3-х алгебраических уравнений связи (5.4.12).



**Рис. 5.4.2.** Балка и тело с освобожденными кинематическими связями

Далее для уменьшения числа уравнений реакции  $N$ ,  $P$  и  $M$  выражаем через левые части уравнений (5.4.14) и подставляем их в уравнения (5.4.13), удовлетворяя при этом второе и третье условия связей (5.4.12). Преобразованные таким образом уравнения (5.4.13) для переменных  $v_1$ ,  $\vartheta_1$  и  $u_2$  при  $\theta = \vartheta_1 + \varphi$  запишем в безразмерном виде, обозначая  $\bar{u}_2 = u_2/l$ :

$$\begin{aligned}
(1 + \mu_{11}) \bar{v}_1'' + (\mu_{12} + \bar{r}(p \sin \theta + \cos \theta)) \vartheta_1'' + (-p) \bar{u}_2'' + \\
+ \kappa_{11} \bar{v}_1 + \kappa_{12} \vartheta_1 + \\
+ \bar{r}(p(\varphi'' \sin \theta + \theta'^2 \cos \theta) + (\varphi'' \cos \theta - \theta'^2 \sin \theta)) + \bar{g}p = 0; \\
(\mu_{12} + \bar{r} \cos \theta) \bar{v}_1'' + (\mu_{22} + q\bar{r} \sin \theta + j_2) \vartheta_1'' + (-q - \bar{r} \sin \theta) \bar{u}_2'' + \\
+ \kappa_{12} \bar{v}_1 + \kappa_{22} \vartheta_1 + \\
+ \bar{r}q(\varphi'' \sin \theta + \theta'^2 \cos \theta) + j_2 \varphi'' + \bar{g}(q + \bar{r} \sin \theta) = 0.
\end{aligned} \tag{5.4.15}$$

Система двух уравнений (5.4.15) дополняется первой геометрической связью (5.4.12), которая с учетом выражения (5.4.3) принимает вид:

$$\bar{u}_2 + \frac{1}{2}(\bar{v}_1 p(\bar{v}_1, \vartheta_1) + \vartheta_1 q(\bar{v}_1, \vartheta_1)) = 0. \quad (5.4.16)$$

Таким образом, получается система дифференциально-алгебраических уравнений (5.4.15) и (5.4.16). Если соотношение (5.4.16) продифференцировать по безразмерному времени  $\tau$ , то с учетом обозначений (5.4.4) оно запишется в виде дифференциального уравнения:

$$\bar{u}'_2 + p\bar{v}'_1 + q\vartheta'_1 = 0. \quad (5.4.17)$$

Если условие (5.4.17) еще раз продифференцировать по  $\tau$  и подставить полученное выражение  $\bar{u}''_2$  в уравнения (5.4.15), то получим уравнения (5.4.10) для системы с учетом связей.

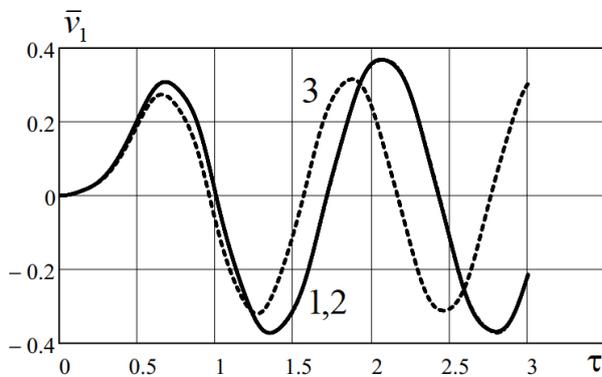
### 5.4.3. Примеры расчета

В качестве примера рассмотрим нелинейные колебания упругой нерастяжимой балки с тяжелым твердым телом на ее конце, поворачивающимся по заданному закону на большой угол  $\varphi(t)$ . Примем следующие размерные параметры системы:  $l = 2,5$  м;  $EI = 1000$  Па·м<sup>4</sup>;  $m = 2$  кг/м;  $M_2 = 12$  кг;  $J_C = 1$  кг·м<sup>2</sup>;  $r = 0,5$  кг;  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>; при этом период малых колебаний балки с телом на конце, повернутым на угол  $\varphi = \pi/2$  равен  $T_1 \approx 1,6$  с. Закон изменения угла поворота тела примем в виде:  $\varphi(t) = \pi \cdot \sin(\pi t/2T)$  при  $t \leq T$ ;  $\varphi(t) = \pi$  при  $t > T$ . Здесь величина  $T = 0,85$  с, представляющая время поворота тела на угол  $\varphi = \pi$ , выбрана путем проб так, чтобы колебания балки были умеренно большими. Величину  $T$  рассматриваем в качестве характерного времени при приведении уравнений к безразмерному виду с безразмерным временем  $\tau = t/T$ .

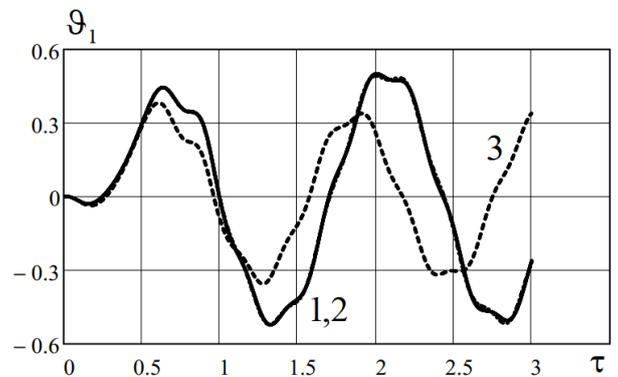
При интегрировании уравнений для неизвестных функций  $\bar{v}_1(\tau)$  и  $\vartheta_1(\tau)$  принимались нулевые начальные условия при  $\tau = 0$ :  $\bar{v}_1(0) = 0$ ;  $\bar{v}'_1(0) = 0$ ;  $\vartheta_1(0) = 0$ ;  $\vartheta'_1(0) = 0$ . В случае, когда функция  $\bar{u}_2(\tau)$  рассматривалась как независимая

переменная и алгебраическое условие связи (5.4.16) дифференцировалось дважды и добавлялось к дифференциальным уравнениям движения (5.4.15), принимались также начальные условия  $\bar{u}_2(0) = 0$ ,  $\bar{u}'_2(0) = 0$ . Численное интегрирование дифференциальных уравнений осуществлялось методом BDF в программном комплексе компьютерной алгебры PTC MathCad 15.0 с постоянным шагом  $\Delta\tau = 10^{-5}$ .

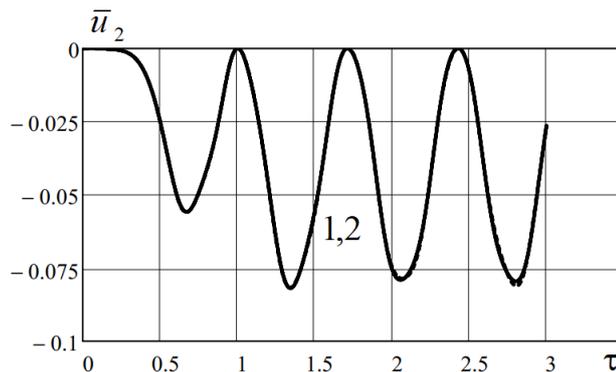
На рис. 5.4.3 – 5.4.5 приведены результаты расчетов в виде графиков функций  $\bar{v}_1(\tau)$ ,  $\vartheta_1(\tau)$  и  $\bar{u}_2(\tau)$ , соответственно.



**Рис. 5.4.3.** Безразмерное поперечное перемещение конца балки



**Рис. 5.4.4.** Угол поворота конца балки



**Рис. 5.4.5.** Безразмерное продольное перемещение конца балки

Сплошными линиями 1 на рис. 5.4.3 – 5.4.5 показаны результаты решения уравнений (5.4.10) для  $\bar{v}_1(\tau)$  и  $\vartheta_1(\tau)$ , полученных с учетом всех геометрических связей в шарнире, соединяющим балку и тело. Штрихпунктирными линиями 2,

которые в пределах масштаба графиков практически совпадают с линиями 1, показаны результаты решения уравнений (5.4.15) для  $\bar{v}_1(\tau)$ ,  $\vartheta_1(\tau)$  и  $\bar{u}_2(\tau)$  с добавлением продифференцированного дважды условия нелинейной геометрической связи (5.4.16). Пунктирными линиями на рис. 5.4.3 и рис. 5.4.4 показаны результаты решения линеаризованных уравнений (5.4.11) для  $\bar{v}_1(\tau)$  и  $\vartheta_1(\tau)$  с учетом всех линейных геометрических связей при  $\bar{u}_1 \approx \bar{u}_2 \approx 0$ . На рис. 5.4.5 линия 1 построена на основании численного решения для  $\bar{v}_1(\tau)$  и  $\vartheta_1(\tau)$  и формулы (5.4.16).

### ***5.5. Основные выводы и результаты по главе 5***

1. Предложен подход получения уравнений движения составных нелинейных систем с геометрическими связями путем использования известных уравнений отдельных свободных подсистем в их подвижных системах координат с учетом неизвестных реакций взаимодействия.

2. В качестве примеров подсистем в подвижных координатах рассмотрены: гибкий нерастяжимый стержень, изгибаемый в двух плоскостях и закручиваемый (звено космического крана-манипулятора); растяжимый весомый трос, совершающий трехмерные нелинейные колебания.

3. Выполнено сравнение двух вариантов численного решения задачи о переходных нелинейных колебаниях составной системы – упругой нерастяжимой балки с поворачивающимся по заданному закону тяжелым твердым телом на ее конце. В первом варианте условия связи конца балки и тела по перемещениям и углу поворота выполняются точно путем исключения «алгебраических» переменных. Во втором варианте нелинейные связи – условия равенства продольного перемещения тела и конца нерастяжимой балки выполняется путем численного решения связанной системы дифференциально-алгебраических уравнений.

## 6. УПРАВЛЕНИЕ УПРУГИМИ СИСТЕМАМИ ПРИ КОНЕЧНЫХ ПОВОРОТАХ И ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ

Рассматривается произвольная трехмерная упругая система (тело), совершающая управляемый конечный поворот относительно некоторой неподвижной оси и малые нестационарные колебания. Колебания системы происходят за счет внешней нагрузки (силовое управление) или инерционной нагрузки переносного вращательного движения несущего тела (кинематическое управление). Используются линейные уравнения колебаний в нормальных координатах, представляющих движения по собственным формам колебаний: свободной по углу поворота системы, включая поворот ее как твердого тела, в случае силового управления; закрепленной по углу поворота системы в случае кинематического управления. Предполагается, что действующая на систему нагрузка (силовая или инерционная), пропорциональна некоторой управляющей финитной функции времени из определенного класса. Решается следующая задача: для заданной управляющей функции повернуть систему за определенное время из одного положения покоя в другое на заданный конечный угол и устранить в момент остановки упругие колебания по нескольким низшим собственным формам.

На основании точных решений уравнений в нормальных координатах с удовлетворением нулевых начальных и конечных условий получены соотношения между временем поворота системы при действии заданной управляющей функции и частотами устраняемых собственных форм колебаний. Для выполнения этих соотношений одновременно для нескольких собственных частот производится их «настройка» путем минимизации записанной для них положительно определенной квадратичной функции варьированием параметров системы.

Также рассмотрен случай, когда неизвестная управляющая функция (закон управления) ищется на рассматриваемом интервале времени в виде ряда по синусам (а также – по косинусам) с неизвестными коэффициентами. На

основании точного решения уравнений в нормальных координатах с начальными и конечными условиями задача сводится к системе линейных алгебраических уравнений для неизвестных коэффициентов.

Рассматриваются нестационарные поперечные колебания упругого консольного стержня с массой на правом конце при управляемом перемещении вдоль вертикальной направляющей левого конца. Изгибные колебания стержня ищутся в виде разложения по собственным формам колебаний. Ставится следующая задача: найти закон управляемого передвижения левого конца стержня, при котором он перемещается на требуемое расстояние за заданное время с одновременным гашением упругих колебаний по нескольким низшим собственным формам в момент остановки. В качестве неизвестной функции рассматривается ускорение левого конца стержня, которое считается пропорциональным некоторой финитной функции. Эта финитная функция в свою очередь записывается в виде ряда по синусам или косинусам с неизвестными коэффициентами на заданном времени управляемого движения.

Рассматривается линейная и нелинейная задачи конечного передвижения тяжелого твердого тела, подвешенного на нерастяжимом безынерционном тросе переменной длины с управляемым горизонтальным перемещением точки подвеса. Требуется переместить тело за определенное время из начального положения покоя в заданное конечное положение покоя. При этом закон изменения длины троса считается заданным, а управляемое перемещение точки его подвеса – неизвестным.

Приближенное решение задачи кинематического управления, описываемой двумя нелинейными дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами для умеренно больших углов поворота натянутого троса и тела, ищется в рядах с неизвестными коэффициентами по методу Бубнова-Галеркина с использованием заданных базисных функций времени, удовлетворяющих некоторым начальным и конечным условиям. Ускорение точки подвеса троса ищется в виде конечного ряда по синусам с неизвестными коэффициентами. Получена связанная система нелинейных алгебраических уравнений для всех

неизвестных коэффициентов, в которую входят уравнения метода Бубнова-Галеркина и невыполненные при выборе базисных функций начальные и конечные условия. Эта система уравнений решается по методу последовательных приближений с использованием в первом приближении решений линеаризованных уравнений.

Такие задачи одновременного вертикального и горизонтального перемещения тяжелых грузов с устранением их колебаний (например, – на мостовом кране) имеют большое практическое значение для уменьшения времени операции, особенно, если число таких однотипных операций велико.

Для оценки эффективности метода Бубнова-Галеркина и его точности по сравнению с численным решением рассматриваются линейные и нелинейные колебания математического маятника переменной длины на подвижном подвесе. Ставится следующая задача: переместить точку крепления маятника за заданное время на заданное расстояние с одновременным гашением собственных форм колебаний в момент остановки. Управляющая функция при кинематическом управлении конечным передвижением задается в виде ряда по синусам. Неизвестная искомая функция, представляющая собой угол поворота маятника, согласно методу Бубнова-Галеркина записывается в виде разложения с неизвестными коэффициентами по заданным функциям времени. Далее формируется система линейных алгебраических уравнений, порядок которой зависит от числа аппроксимирующих функций.

Основные результаты работы по данной главе опубликованы в [19, 20, 39 – 41, 71, 185 – 197].

## 6.1. Терминальное управление поворотом упругой линейной системы с постоянными параметрами с устранением колебаний

### 6.1.1. Постановка задачи силового управления упругой системы при повороте

Рассмотрим систему (тело), которая под действием нестационарной нагрузки совершает вращательное движение относительно некоторой неподвижной оси, сопровождаемое упругими колебаниями (рис. 6.1.1). Движение упругого тела описывается во вращающейся с неизвестной угловой скоростью  $\Omega = \dot{\theta}$  относительно оси  $z$  системе координат  $0xyz$ , угол поворота  $\theta(t)$  которой считается конечным (может быть большим), а относительные упругие перемещения считаются малыми. Упругое тело является свободным по углу поворота (вариация  $\delta\theta$  произвольна) и по упругим перемещениям. Если система свободна по всем степеням свободы твердого тела, то в этом случае ось  $z$  должна совпадать с одной из главных центральных осей такого тела, а главный вектор и проекции главного момента нагрузки на оси  $x$ ,  $y$  должны равняться нулю.

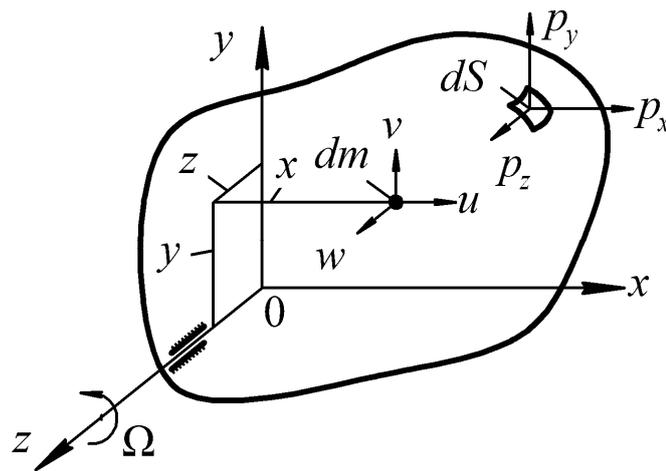


Рис. 6.1.1. Упругое тело, совершающее вращательное движение

Рассмотрим общую задачу управляемого конечного поворота системы по углу  $\theta(t)$  при разгоне или торможении и передвижении из одного состояния в

другое за заданное время  $T$ , который сопровождается ее нестационарными упругими колебаниями. В общем случае начальные и конечные условия для функции  $\theta(t)$  примем в виде

$$\dot{\theta}(0) = \Omega_0, \quad \theta(0) = 0, \quad \dot{\theta}(T) = \Omega_T, \quad \theta(T) = \theta_T, \quad (6.1.1)$$

где  $\Omega_0$ ,  $\Omega_T$ ,  $\theta_T$  – заданные величины, представляющие начальную и конечную угловые скорости и конечный угол поворота системы, соответственно. В частности, в задаче конечного поворота системы на угол  $\theta_T$  за время  $T$  из одного состояния покоя в другое следует считать  $\Omega_0 = \Omega_T = 0$ .

Кинетическая энергия вращающегося относительно оси  $z$  упругого тела (рис. 6.1.1)

$$K = \frac{1}{2} \int_V [(-\Omega(y+v) + \dot{u})^2 + (\Omega(x+u) + \dot{v})^2 + \dot{w}^2] dm$$

при достаточно малой угловой скорости  $\Omega(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$  и при малых упругих колебаниях, полагая  $x+u \approx x$ ,  $y+v \approx y$ , т.е. пренебрегая нелинейными членами третьего и четвертого порядка, представляющими центробежные и кориолисовы силы в относительном движении, записывается в виде

$$K = \frac{1}{2} \int_V [\Omega^2(x^2 + y^2) + 2\Omega(x\dot{v} - y\dot{u}) + (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2)] dm, \quad (6.1.2)$$

где  $dm = \rho dV$ ;  $\rho$ ,  $V$  – плотность и объем всех элементов системы.

Упругие перемещения системы, имеющей в относительном движении конечное число  $s$  степеней свободы, записываются в обобщенных координатах  $q_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, s$  как

$$u = \sum_{i=1}^s q_i U_i, \quad v = \sum_{i=1}^s q_i V_i, \quad w = \sum_{i=1}^s q_i W_i, \quad (6.1.3)$$

где  $U_i(x, y, z)$ ,  $V_i(x, y, z)$ ,  $W_i(x, y, z)$  – заданные функции, представляющие возможные перемещения системы, т.е. удовлетворяющие условиям непрерывности перемещений элементов согласно принятой модели их деформирования и геометрическим условиям их соединения (связям). Для системы, имеющей распределенные массы и характеристики упругости, для

приведения ее к системе с конечным числом степеней свободы используется метод Ритца или метод конечных элементов.

Угол поворота системы  $\theta$  является циклической обобщенной координатой, от которой потенциальная энергия не зависит; будем обозначать его как  $\theta = q_0(t)$ . Кинетическую энергию (6.1.2) с учетом (2.3) и  $\Omega = \dot{q}_0$  запишем в обобщенных координатах:

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^s \sum_{j=0}^s m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j;$$

$$m_{00} = J_z = \int_V (x^2 + y^2) dm, \quad m_{0i} = m_{i0} = \int_V (xV_i - yU_i) dm; \quad (6.1.4)$$

$$m_{ij} = \int_V (U_i U_j + V_i V_j + W_i W_j) dm, \quad i, j = 1, 2, \dots, s.$$

Малые упругие деформации элементов системы линейно зависят от их перемещений и, следовательно, от обобщенных координат. В результате потенциальная энергия деформации системы записывается в виде квадратичной формы обобщенных координат:

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^s \sum_{j=0}^s k_{ij} q_i q_j, \quad (6.1.5)$$

где  $k_{ij} = k_{ji}$  – коэффициенты жесткости;  $k_{00} = 0$ ,  $k_{0i} = 0$  при  $i = 1, 2, \dots, s$ . Потенциальной энергией гравитации, зависящей от угла поворота  $\theta$  и упругих перемещений системы, будем пренебрегать.

Вариация работы действующих на тело (рис. 6.1.1) поверхностных нагрузок  $p_x(x, y, z, t)$ ,  $p_y(x, y, z, t)$ ,  $p_z(x, y, z, t)$  при допущениях  $x + u \approx x$ ,  $y + v \approx y$  записывается в виде:

$$\delta A_p = \int_S [p_x(-y\delta\theta + \delta u) + p_y(x\delta\theta + \delta v) + p_z\delta w] dS = \sum_{i=0}^s Q_i \delta q_i;$$

$$Q_0 = M_z = \int_S (p_y x - p_x y) dS, \quad Q_i = \int_S (p_x U_i + p_y V_i + p_z W_i) dS; \quad (6.1.6)$$

$$i = 1, 2, \dots, s.$$

Уравнения движения системы в обобщенных координатах

$$\sum_{j=0}^s [m_{ij}\ddot{q}_j + k_{ij}q_j] = Q_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, s \quad (6.1.7)$$

запишем в матричном виде

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{Q}, \quad (6.1.8)$$

где  $\mathbf{q} = \{q_i\}$ ,  $\mathbf{Q} = \{Q_i\}$ ,  $\mathbf{M} = [m_{ij}]$ ,  $\mathbf{K} = [k_{ij}]$  – векторы и матрицы порядка  $s+1$  при  $i, j = 0, 1, 2, \dots, s$ .

Преобразуем уравнения (6.1.8) к нормальным координатам. Положим  $\mathbf{Q} \equiv 0$ ,  $\mathbf{q} = \mathbf{X} \sin \omega t$  и решим задачу о собственных колебаниях свободной по углу  $\theta$  упругой системы

$$[\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}]\mathbf{X} = 0 \rightarrow \omega_n, \mathbf{X}_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \leq s.$$

Вектор  $\mathbf{q}$  представляется в виде разложения по собственным формам колебаний, движения по которым описываются нормальными координатами  $f_n(t)$ :

$$\mathbf{q} = \sum_{n=0}^{\leq s} f_n \mathbf{X}_n. \quad (6.1.9)$$

С учетом условий ортогональности собственных векторов  $\mathbf{X}_m^T \mathbf{M} \mathbf{X}_n = 0$ ,  $\mathbf{X}_m^T \mathbf{K} \mathbf{X}_n = 0$  при  $m \neq n$  получаются уравнения для нормальных координат  $f_n(t)$ :

$$\begin{aligned} m_n (\ddot{f}_n + \omega_n^2 f_n) &= F_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \leq s; \\ m_n &= \mathbf{X}_n^T \mathbf{M} \mathbf{X}_n, \quad m_n \omega_n^2 = \mathbf{X}_n^T \mathbf{K} \mathbf{X}_n, \quad F_n = \mathbf{X}_n^T \mathbf{Q}. \end{aligned} \quad (6.1.10)$$

При  $n=0$  имеем  $\omega_0 = 0$ ,  $\mathbf{X}_0 = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]^T$ ,  $m_0 = J_z$ ,  $f_0 = \theta$ ,  $F_0 = M_z$ . Уравнение (6.1.10) при  $n=0$  представляет собой уравнение вращательного движения системы как абсолютно твердого тела:

$$J_z \ddot{\theta} = M_z(t). \quad (6.1.11)$$

Уравнения (6.1.10) при  $n=1, 2, \dots, \leq s$  описывают относительное движение свободно вращающейся системы по ее собственным формам колебаний. Считаем, что при  $t=0$  такие колебания отсутствуют ( $\dot{f}_n(0) = f_n(0) = 0$ ,  $n=1, 2, \dots, s$ ), и потребуем, чтобы при  $t \geq T$  они прекратились по  $p \leq s$  собственным формам:

$$\dot{f}_n(T) = 0, \quad f_n(T) = 0, \quad n = 1, 2, \dots, p. \quad (6.1.12)$$

При решении обратной задачи динамики пассивного силового управления поворотом системы и ее упругими колебаниями будем считать, что все нагрузки изменяются по времени пропорционально одной безразмерной функции  $\alpha_0 + \varphi(t)$ , где  $\alpha_0$  – некоторое число, а  $\varphi(t)$  – искомая управляющая функция, которая определяется из класса финитных функций, заданных при  $0 \leq t \leq T$  и удовлетворяющих условию:

$$\int_0^T \varphi(t) dt = 0. \quad (6.1.13)$$

В этом случае обозначим

$$M_z(t) = M_z^0(\alpha_0 + \varphi(t)), \quad F_n(t) = F_n^0(\alpha_0 + \varphi(t)), \quad n = 1, 2, \dots, \leq s. \quad (6.1.14)$$

Интегрируя уравнение (6.1.11) с учетом начальных условий (6.1.1) при  $t = 0$ , найдем:

$$\begin{aligned} \Omega = \dot{\theta} &= \frac{M_z^0}{J_z} (\alpha_0 t + \int_0^t \varphi(\tau) d\tau) + \Omega_0; \\ \theta &= \frac{M_z^0}{J_z} (\alpha_0 \frac{t^2}{2} + t \int_0^t \varphi(\tau) d\tau - \int_0^t \varphi(\tau) \tau d\tau) + \Omega_0 t. \end{aligned} \quad (6.1.15)$$

Отсюда с учетом конечных условий (6.1.1) при  $t = T$  и условия (6.1.13) получим соотношение:

$$\frac{M_z^0}{J_z} \alpha_0 T = \Omega_T - \Omega_0, \quad \frac{M_z^0}{J_z} \int_0^T \varphi(\tau) \tau d\tau = (\Omega_0 + \Omega_T) \frac{T}{2} - \theta_T; \quad (6.1.16)$$

число  $\alpha_0$  определяется из первого соотношения.

При выборе подходящих для управления финитных функций  $\varphi(t)$  при  $0 \leq t \leq T$  из класса (6.1.13) их можно сравнивать между собой по среднеквадратичной величине (норме) управляющего момента

$$\int_0^T (M_z)^2 dt = (M_z^0)^2 [\alpha_0 T + \int_0^T (\varphi(t))^2 dt]$$

и по его максимальному модулю

$$\max M_z(t) = M_z^0(\alpha_0 + \max |\varphi(t)|).$$

Кроме того желательно, чтобы управляющая функция  $\varphi(t)$  была приемлемой и удобной для практической реализации управления (например, чтобы она была достаточно гладкой и не содержала высокочастотных составляющих) и чтобы приводила к робастному управлению, незначительно зависящему от малых отклонений параметров системы и движения.

Энергетические затраты при повороте системы из одного состояния покоя в другое с помощью момента  $M_z(t) = M_z^0\varphi(t)$  можно оценить по величине работы  $A_1$  этого момента на участке разгона системы при  $0 \leq t < T/2$ :

$$A_1 = \int_0^{T/2} M_z(\tau)\dot{\theta}(\tau)d\tau = \frac{1}{2J_z} [M_z^0 \int_0^{T/2} \varphi(\tau)d\tau]^2. \quad (6.1.17)$$

Работа момента  $M_z^0\varphi(t)$  на участке торможения при  $T/2 < t \leq T$  будет  $A_2 = -A_1$ .

### 6.1.2. Кинематическое управление упругой системой

В данном случае функция  $\theta(t)$  и, соответственно, угловая скорость  $\Omega(t) = \dot{\theta}$  считаются заданными при  $0 \leq t \leq T$ . Например, если рассматриваемая упругая система соединена с несущим массивным твердым телом, то влиянием упругих колебаний присоединенной системы на движение несущего тела можно пренебречь.

Функцию  $\theta(t)$  определим как решение уравнения  $\ddot{\theta} = C(\alpha_0 + \varphi(t))$ , где  $C$  – произвольная постоянная, а  $\varphi(t)$  – управляющая финитная функция при  $0 \leq t \leq T$ , удовлетворяющая условию (6.1.13). Интегрируя это уравнение с учетом начальных условий (6.1.1) при  $t = 0$  найдем:

$$\Omega = \dot{\theta} = C(\alpha_0 t + \int_0^t \varphi(\tau) d\tau) + \Omega_0; \quad (6.1.18)$$

$$\theta = C(\alpha_0 \frac{t^2}{2} + t \int_0^t \varphi(\tau) d\tau - \int_0^t \varphi(\tau) \tau d\tau) + \Omega_0 t.$$

С учетом конечных условий (6.1.1) при  $t = T$  и условия (6.1.13) получим:

$$C\alpha_0 T = \Omega_T - \Omega_0, \quad C \int_0^T \varphi(\tau) \tau d\tau = (\Omega_0 + \Omega_T) \frac{T}{2} - \theta_T; \quad (6.1.19)$$

число  $\alpha_0$  определяется из первого соотношения, из второго – константа  $C$ .

В случае кинематического управления системой в отличие от рассмотренного выше силового управления угол  $\theta(t)$  задается и функции  $U_i(x, y, z)$ ,  $V_i(x, y, z)$ ,  $W_i(x, y, z)$  в (6.1.2) должны удовлетворять условиям абсолютно жесткого или упругого (без разрыва) соединения упругой системы с несущим телом по углу  $\theta$ . Упругие перемещения системы по-прежнему будем считать малыми, полагая в выражении кинетической энергии  $x + u \approx x$ ,  $y + v \approx y$ ; потенциальной энергией гравитации будем пренебрегать, а поверхностные нагрузки не будем учитывать ( $p_x \equiv 0$ ,  $p_y \equiv 0$ ,  $p_z \equiv 0$ ).

Уравнения колебаний системы в обобщенных координатах при заданной функции  $\theta(t)$  записываются в матричном виде:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = -\mathbf{M}_0\ddot{\theta}, \quad (6.1.20)$$

где  $\mathbf{q} = \{q_i\}$ ,  $\mathbf{M}_0 = \{m_{0i}\}$ ,  $\mathbf{M} = [m_{ij}]$ ,  $\mathbf{K} = [k_{ij}]$  – векторы и матрицы порядка  $s$  при  $i, j = 1, 2, \dots, s$ . Далее, полагая  $\ddot{\theta} = 0$ ,  $\mathbf{q} = \mathbf{X} \sin \omega t$ , решается задача о собственных колебаниях:

$$[\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}]\mathbf{X} = 0 \rightarrow \omega_n, \mathbf{X}_n, \quad n = 1, 2, \dots, \leq s,$$

где  $\omega_n$ ,  $\mathbf{X}_n$  – частоты и векторы собственных форм колебаний закрепленной по углу  $\theta$  упругой системы. Вектор  $\mathbf{q}$  представляется в виде разложения по собственным формам

$$\mathbf{q} = \sum_{n=0}^{\leq s} f_n \mathbf{X}_n \quad (6.1.21)$$

и с учетом условий ортогональности собственных векторов  $\mathbf{X}_m^T \mathbf{M} \mathbf{X}_n = 0$ ,  $\mathbf{X}_m^T \mathbf{K} \mathbf{X}_n = 0$  при  $m \neq n$  получаются уравнения для нормальных координат:

$$\begin{aligned} m_n (\ddot{f}_n + \omega_n^2 f_n) &= -m_{0n} \ddot{\theta}, \quad n = 1, 2, \dots, \leq s; \\ m_n &= \mathbf{X}_n^T \mathbf{M} \mathbf{X}_n, \quad m_n \omega_n^2 = \mathbf{X}_n^T \mathbf{K} \mathbf{X}_n, \quad m_{0n} = \mathbf{X}_n^T \mathbf{M}_0. \end{aligned} \quad (6.1.22)$$

Уравнения в нормальных координатах при силовом управлении (6.1.10) с учетом  $F_n(t) = F_n^0 \varphi(t)$  и при кинематическом управлении (6.1.22) с учетом  $-m_{0n} \ddot{\theta} = -m_{0n} C \varphi(t)$  отличаются в правых частях только постоянным множителем. Поскольку решения этих уравнений ищутся при нулевых начальных условиях и требуется, чтобы при  $t \geq T$  прекратились колебания по  $p \leq s$  собственным формам, т.е.  $\dot{f}_n(T) = 0$ ,  $f_n(T) = 0$ ,  $n = 1, 2, \dots, p$ , то этот постоянный множитель, представляющий различие уравнений в нормальных координатах при силовой и кинематическом управлениях, не играет никакой роли. В обоих случаях зависимости решений  $f_n(t)$  от заданных управляющих функций  $\varphi(t)$  при  $n = 1, 2, \dots, p$  будут аналогичными. Различие этих случаев только в том, что при силовом управлении используются собственные частоты и формы колебаний системы, свободной по углу поворота  $\theta$ , а при кинематическом управлении – закрепленной по углу поворота (при  $\theta = 0$ ).

### 6.1.3. Устранение колебаний путем подбора управляющего воздействия в виде тригонометрического ряда

Получим решение сформулированной задачи гашения упругих колебаний системы при конечном повороте с разгоном ( $\Omega_T > \Omega_0$ ) или с торможением ( $\Omega_T < \Omega_0$ ), а также при передвижении из одного состояния покоя в другое ( $\Omega_0 = 0$ ,  $\Omega_T = 0$ ,  $\alpha_0 = 0$ ), используя ряды тригонометрических функций.

Решение в виде ряда синусов

Представим управляющую функцию в виде:

$$\varphi(t) = \sum_k b_k \sin(k\sigma t), \quad \sigma = 2\pi/T, \quad k = 1, 2, \dots \quad (6.1.23)$$

Эта функция удовлетворяет условию (6.1.13). Угол поворота системы (6.1.15) с учетом первого соотношения (6.1.16) будет равен:

$$\theta(t) = \Omega_0 t + \frac{\Omega_T - \Omega_0}{T} \frac{t^2}{2} + \frac{M_z^0}{J_z} \sum_k b_k \frac{1}{k\sigma} \left( t - \frac{1}{k\sigma} \sin(k\sigma t) \right). \quad (6.1.24)$$

При  $t = T$  второе соотношение (6.1.16) записывается в виде:

$$\frac{M_z^0}{J_z} \frac{T}{\sigma} \sum_k \frac{1}{k} b_k = \theta_T - (\Omega_0 + \Omega_T) \frac{T}{2}. \quad (6.1.25)$$

Решение уравнений (6.1.10) с учетом (6.1.23) при  $n = 1, 2, \dots$ ,  $\omega_n \neq k\sigma$  и при начальных условиях  $\dot{f}_n(0) = 0$ ,  $f_n(0) = 0$  будет:

$$\begin{aligned} f_n(t) = & \frac{F_n^0}{m_n \omega_n^2} \left[ \frac{J_z}{M_z^0} \frac{\Omega_0 - \Omega_T}{T} (1 - \cos(\omega_n t)) + \right. \\ & \left. + \sum_k \frac{b_k}{1 - (k\sigma/\omega_n)^2} \left( \sin(k\sigma t) - \frac{k\sigma}{\omega_n} \sin(\omega_n t) \right) \right]. \end{aligned} \quad (6.1.26)$$

Конечные условия  $f_n(T) = 0$ ,  $\dot{f}_n(T) = 0$ ,  $n = 1, 2, \dots, p$  записываются в виде системы уравнений для коэффициентов  $b_k$  при  $k = 1, 2, \dots$ :

$$\begin{aligned} \sin(\omega_n T) \sum_k b_k \frac{k\sigma/\omega_n}{1 - (k\sigma/\omega_n)^2} &= \frac{J_z}{M_z^0} \frac{\Omega_0 - \Omega_T}{T} (1 - \cos(\omega_n T)); \\ (1 - \cos(\omega_n T)) \sum_k b_k \frac{k\sigma/\omega_n}{1 - (k\sigma/\omega_n)^2} &= -\frac{J_z}{M_z^0} \frac{\Omega_0 - \Omega_T}{T} \sin(\omega_n T). \end{aligned} \quad (6.1.27)$$

К этим уравнениям необходимо добавить уравнение (6.1.25) при  $k = 1, 2, \dots, 2p + 1$ . В результате для общего случая (при разгоне или торможении системы) будем иметь  $2p + 1$  уравнений для определения коэффициентов  $b_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, 2p + 1$ .

В частном случае при повороте системы на конечный угол  $\theta_T$  из одного состояния покоя ( $\Omega_0 = 0$ ) в другое ( $\Omega_T = 0$ ) уравнения (6.1.27) удовлетворяются при условиях

$$\sum_k b_k \frac{k\sigma/\omega_n}{1 - (k\sigma/\omega_n)^2} = 0, \quad n = 1, 2, \dots, p, \quad (6.1.28)$$

к которым необходимо добавить уравнение (6.1.25) при  $\Omega_0 = \Omega_T = 0$  и при  $k = 1, 2, \dots, p + 1$ . В этом случае будем иметь  $p + 1$  уравнений для определения коэффициентов  $b_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, p + 1$ .

Из уравнений (6.1.28) следует, что колебания по  $n$ -ой форме могут быть устранены также при одновременном выполнении условий [174]:

$$\sin(\omega_n T) = 0, \quad 1 - \cos(\omega_n T) = 0, \quad \omega_n \neq k\sigma, \quad n = 1, 2, \dots, p.$$

Пусть управляющая функция берется в виде одной волны синуса при  $k = 1$ ,  $\varphi(t) = b_1 \sin(\sigma t)$ . Тогда указанные выше условия могут быть выполнены путем настройки системы по собственным частотам, так чтобы  $\omega_n T = 2\pi\psi_n$ , где  $\psi_n$  – любое число из последовательности  $2, 3, 4, \dots$ . Для гашения колебаний одновременно по нескольким собственным формам ( $n = 1, 2, \dots, p$ ) необходимо, чтобы их собственные частоты  $\omega_n > \omega_{n-1}$  удовлетворяли условиям  $\omega_n T = 2\pi\psi_n$  при  $\psi_n > \psi_{n-1}$ .

### Решение в виде ряда косинусов

Примем управляющую функцию, удовлетворяя условие (6.1.13), в виде:

$$\varphi(t) = \sum_k a_k \cos\left(\frac{k\sigma}{2}t\right), \quad \sigma = \frac{2\pi}{T}, \quad k = 1, 3, 5, \dots \quad (6.1.29)$$

Угол поворота на основании (6.1.15) с учетом первого соотношения (6.1.16) будет равен:

$$\theta(t) = \Omega_0 t + \frac{\Omega_T - \Omega_0}{T} \frac{t^2}{2} + \frac{M_z^0}{J_z} \sum_k a_k \left(\frac{2}{k\sigma}\right)^2 \left(1 - \cos\left(\frac{k\sigma}{2}t\right)\right). \quad (6.1.30)$$

При  $t = T$  с учетом (6.1.29) должно выполняться второе соотношение (6.1.16):

$$2 \frac{M_z^0}{J_z} \sum_k a_k \left( \frac{2}{k\sigma} \right)^2 = \theta_T - (\Omega_0 + \Omega_T) \frac{T}{2}. \quad (6.1.31)$$

Общее решение уравнений в нормальных координатах (6.1.10) при  $M_z(t) = M_z^0(\alpha_0 + \varphi(t))$  с учетом (6.1.29) для  $n = 1, 2, \dots, s$  записывается в виде:

$$f_n(t) = \frac{F_n^0}{m_n \omega_n^2} [\alpha_0 (1 - \cos(\omega_n t)) + \sum_k \frac{a_k}{1 - (k\sigma/2\omega_n)^2} (\cos(\frac{k\sigma}{2}t) - \cos(\omega_n t))]. \quad (6.1.32)$$

Отсюда с учетом  $\alpha_0$  из первого соотношения (6.1.16) для колебаний по собственным формам, которые подлежат устранению при  $t = T$  ( $f_n(T) = 0$ ,  $\dot{f}_n(T) = 0$ ,  $n = 1, 2, \dots, p \leq s$ ), получаем уравнения для определения неизвестных коэффициентов  $a_k$  при  $k = 1, 3, 5, \dots$  и  $n = 1, 2, \dots, p$ :

$$(1 + \cos(\omega_n T)) \sum_k \frac{a_k}{1 - (k\sigma/2\omega_n)^2} = (1 - \cos(\omega_n T)) \frac{J_z}{M_z^0} \frac{\Omega_T - \Omega_0}{T}; \quad (6.1.33)$$

$$\sin(\omega_n T) \sum_k \frac{a_k}{1 - (k\sigma/2\omega_n)^2} = -\sin(\omega_n T) \frac{J_z}{M_z^0} \frac{\Omega_T - \Omega_0}{T}.$$

К этим уравнениям необходимо добавить уравнение (6.1.31). В результате из полученной системы  $2p + 1$  уравнений (6.1.31) и (6.1.33) можно определить  $2p + 1$  коэффициентов  $a_k$  при  $k = 1, 3, 5, \dots, 4p + 1$ . В частном случае при конечном повороте системы на угол  $\theta_T$  за время  $T$  из одного состояния покоя ( $\Omega_0 = 0$ ) в другое ( $\Omega_T = 0$ ) на основании (6.1.31) и (6.1.33) будем иметь систему  $p + 1$  уравнений при  $k = 1, 3, 5, \dots, 2p + 1$ :

$$\sum_k a_k \left( \frac{2}{k\sigma} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{J_z}{M_z^0} \theta_T, \quad \sum_k \frac{a_k}{1 - (k\sigma/2\omega_n)^2} = 0, \quad n = 1, 2, \dots, p, \quad (6.1.34)$$

из которой можно определить  $p + 1$  неизвестных коэффициентов  $a_1, a_3, \dots, a_{2p+1}$ .

### 6.1.4. Примеры расчета

#### Модель космического аппарата с двумя панелями солнечных батарей, совершающих малые колебания

В качестве одного из примеров для расчетов рассмотрим плоское движение по крену модели симметричного относительно плоскости  $y = 0$  космического аппарата (КА) с двумя одинаковыми плоскими панелями солнечных батарей (СБ), каждая из которых состоит из недеформируемых секций, соединенных между собой и с недеформируемым центральным телом упругими шарнирами (рис. 6.1.2).

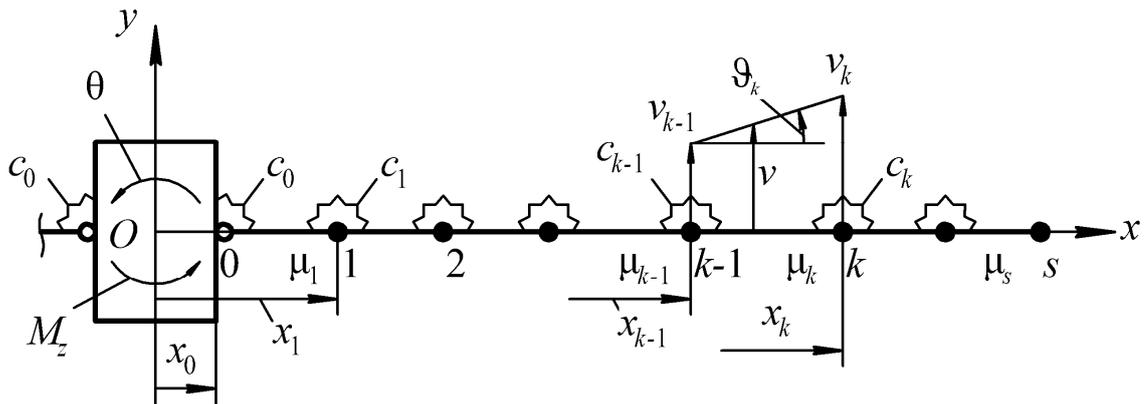


Рис. 6.1.2. КА с двумя панелями СБ

При повороте системы на конечный угол  $\theta(t)$  под действием управляющего момента  $M_z(t)$  ее центр масс  $O$  остается неподвижным. Поперечное перемещение и угол поворота  $k$ -ой секции правой панели СБ в относительном движении (во вращающейся с угловой скоростью  $\Omega = \dot{\theta}$  системе координат) при малых колебаниях ( $\sin \vartheta_k \approx \vartheta_k$ ,  $\cos \vartheta_k \approx 1$ ) будут:

$$v = v_{k-1} + \vartheta_k \xi, \quad \vartheta_k = \frac{1}{a_k}(v_k - v_{k-1}), \quad k = 1, 2, \dots, s;$$

$$a_k = x_k - x_{k-1}, \quad \xi = x - x_{k-1}, \quad 0 \leq \xi \leq a_k, \quad v_0 = \theta x_0, \quad \vartheta_0 = 0.$$

Кинетическая энергия КА с двумя панелями СБ, совершающими при конечном повороте малые антисимметричные колебания, согласно (6.1.2) при  $\Omega = \dot{\theta}$ ,  $u \approx 0$ ,  $w \approx 0$  записывается в виде:

$$K = \frac{1}{2} J_z \dot{\theta}^2 + \sum_{k=1}^s [\mu_k \dot{v}_k^2 + \frac{m_k a_k}{3} (\dot{v}_{k-1}^2 + \dot{v}_{k-1} \dot{v}_k + \dot{v}_k^2)] + \\ + 2\dot{\theta} \sum_{k=1}^s [\mu_k x_k \dot{v}_k + \frac{m_k a_k}{3} [(x_{k-1} + \frac{1}{2} x_k) \dot{v}_{k-1} + (\frac{1}{2} x_{k-1} + x_k) \dot{v}_k]]; \\ J_z = J_0 + 2 \sum_{k=1}^s [\mu_k x_k^2 + \frac{m_k a_k}{3} (x_{k-1}^2 + x_{k-1} x_k + x_k^2)],$$

где  $\mu_k$  – сосредоточенная масса в  $k$ -ом шарнирном узле;  $m_k$  – погонная вдоль оси  $x$  масса  $k$ -ой секции;  $J_0$  – момент инерции центрального тела КА.

Потенциальная энергия деформации пружин в упругих шарнирных узлах двух панелей СБ и вариация работы управляющего момента

$$\Pi = \sum_{k=0}^{s-1} c_k (\vartheta_{k+1} - \vartheta_k)^2, \quad \delta A_p = M_z \delta \theta,$$

где  $c_k$  – жесткость пружины по относительному углу поворота в  $k$ -ом узле.

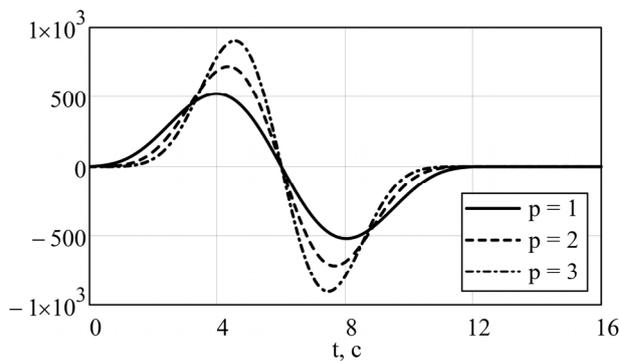
Уравнения колебаний системы получаются как уравнения Лагранжа в обобщенных координатах  $\theta, v_1, v_2, \dots, v_s$  и записываются в матричном виде (6.1.8) для вектора  $\mathbf{q} = [\theta \ v_1 \ v_2 \ \dots \ v_s]^T$ .

Расчеты выполнены для модели КА с двумя панелями СБ, описанного выше, со следующими исходными данными:  $J_0 = 166,67 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ ,  $x_0 = 0,5 \text{ м}$ ,  $s = 4$ ;  $a_k = 2,5 \text{ м}$ ,  $\mu_k = 5 \text{ кг}$ ,  $m_k = 3 \text{ кг/м}$ ,  $k = 1,2,3,4$ ;  $c_0 = 3000 \text{ Н}\cdot\text{м/рад}$ ,  $c_k = 2000 \text{ Н}\cdot\text{м/рад}$ ,  $k = 1,2,3$ . Собственные частоты колебаний исходной системы:  $\omega_0 = 0$ ,  $\omega_1 = 3,330 \text{ рад/с}$ ,  $\omega_2 = 7,399 \text{ рад/с}$ ,  $\omega_3 = 14,165 \text{ рад/с}$ ,  $\omega_4 = 22,349 \text{ рад/с}$ .

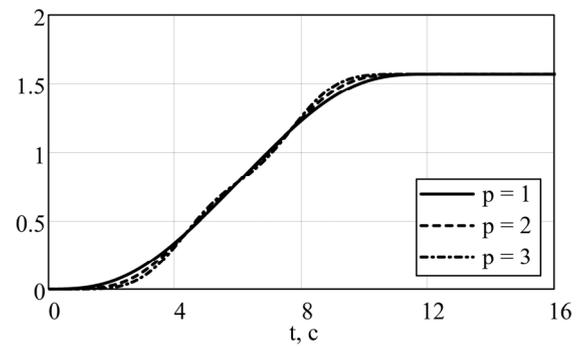
Пример №1. Приведем результаты решения в рядах по синусам (6.1.23) задачи управляемого поворота системы на угол  $\theta_T = \pi/2$  за время  $T = 12 \text{ с}$  из состояния покоя  $\Omega_0 = 0$  в конечное состояние покоя  $\Omega_T = 0$  с гашением упругих колебаний при  $t = T$  одновременно по  $p$  низшим собственным формам, причем

$p=1$ ,  $p=2$  или  $p=3$ . На рис. 6.1.3 – 6.1.5 приведены графики изменения по времени при конечном повороте по крену КА с панелями солнечных батарей соответственно: управляющего момента  $M_z(t)$ ; угла поворота  $\theta(t)$ ; угла поворота 4-ой секции панели СБ  $\vartheta_4(t)$ .

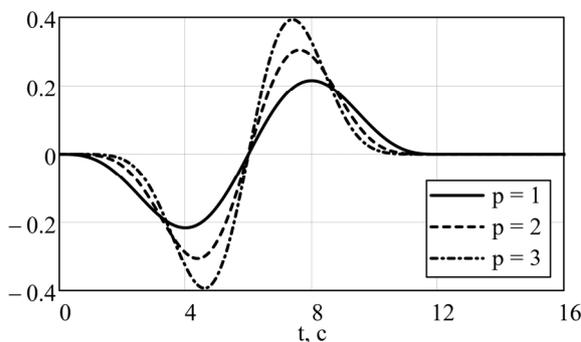
Пример №2. Получим решения задачи управляемого поворота системы на угол  $\theta_T = \pi/2$  за время  $T = 12$  с с гашением упругих колебаний при  $t = T$  одновременно по  $p$  нижшим собственным формам в рядах по косинусам (6.1.29). На рис. 6.1.6 – 6.1.8 для этого расчетного случая приведены графики соответственно для  $M_z(t)$ ,  $\theta(t)$ ,  $\vartheta_4(t)$ .



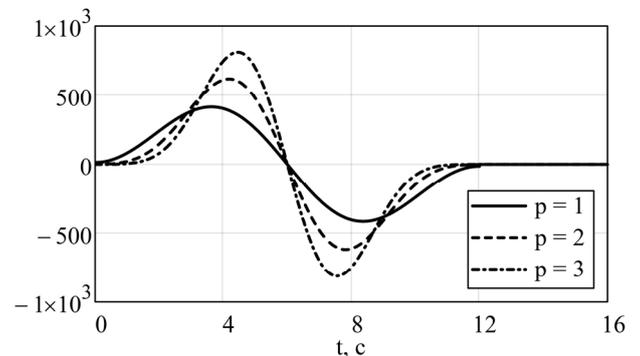
**Рис. 6.1.3.** Управляющий момент  $M_z(t)$  в примере №1



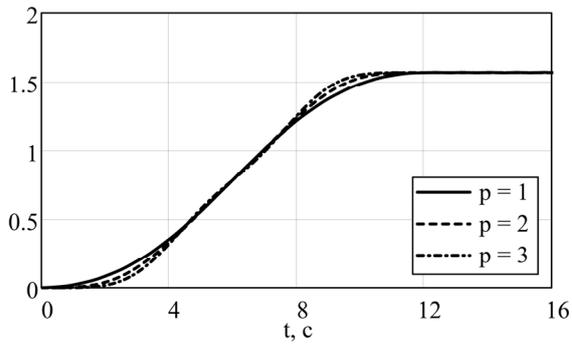
**Рис. 6.1.4.** Угол поворота  $\theta(t)$  КА в примере №1



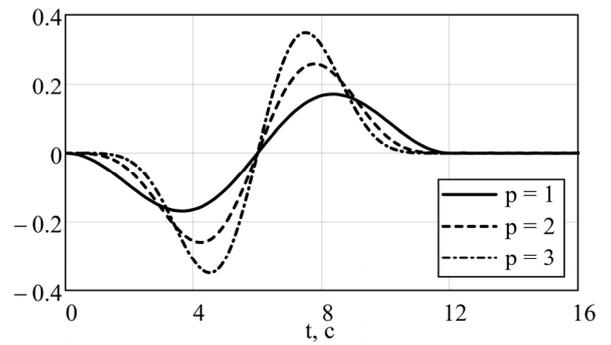
**Рис. 6.1.5.** Угол поворота  $\vartheta_4(t)$  секции панели СБ в примере №1



**Рис. 6.1.6.** Управляющий момент  $M_z(t)$  в примере №2



**Рис. 6.1.7.** Угол поворота  $\theta(t)$  КА в примере №2



**Рис. 6.1.8.** Угол поворота  $\vartheta_4(t)$  секции панели СБ в примере №2

Оценки колебаний при  $t > T$  по непогашенным высшим собственным формам ( $n > p$ ) показывают, что в обоих рассмотренных случаях эти «остаточные» колебания пренебрежимо малы (даже при  $p=1$ , как видно в масштабе графиков на рис. 6.1.4, 6.1.5, 6.1.7, 6.1.8). Это объясняется тем, что в рассмотренном примере отношение  $T/T_1=6,36$ , где  $T_1$  – период колебаний системы по первой собственной форме колебаний, является достаточно большим и динамическая реакция системы проявляется в основном вкладом первой формы собственных колебаний.

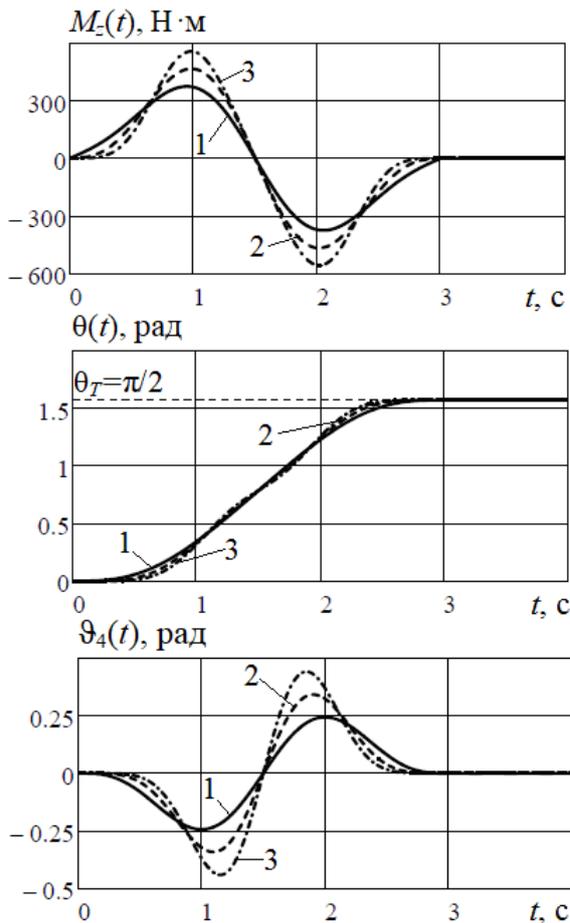
Если взять более короткое время  $T$ , то для данной системы колебания по углу  $\vartheta_4$  могут выйти за пределы применимости линейной теории ( $\sin \vartheta \approx \vartheta$ ,  $\cos \vartheta \approx 1$ ).

### Оценка влияния нелинейности колебаний панелей СБ

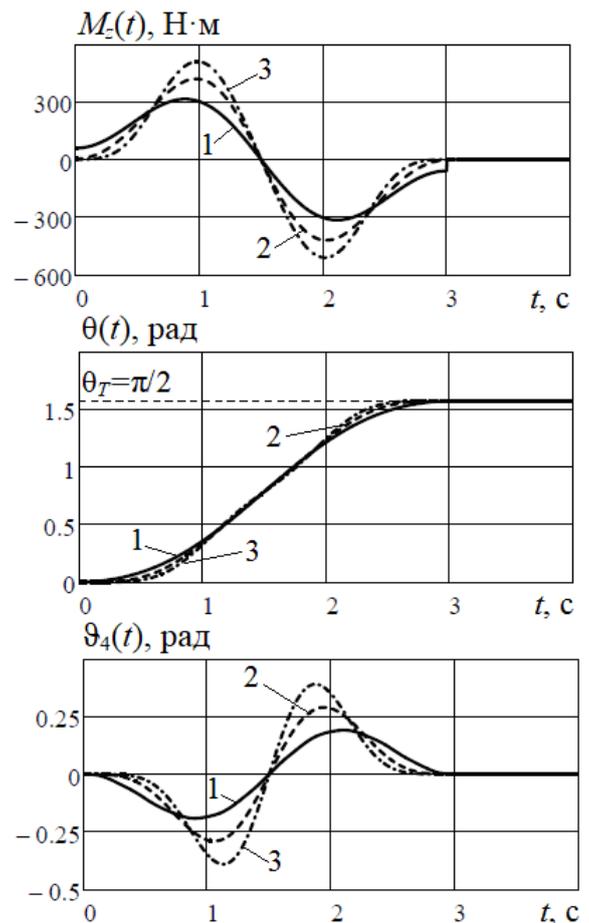
Оценим влияние нелинейности в описании движения панелей СБ при повороте КА на заданный угол при гашении остаточных колебаний в момент остановки. Нелинейные дифференциальные уравнения движения панелей СБ при умеренно больших углах  $\vartheta_k$  были получены в гл. 2, разд. 2.2. Рассмотрим способ управления при подборе управляющего импульса в виде тригонометрического ряда.

Расчеты выполнены для системы со следующими исходными данными:  $J_0 = 83,33 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ ,  $x_0 = 0,5 \text{ м}$ ,  $s = 4$ ;  $a_k = 1 \text{ м}$ ,  $\mu_k = 1 \text{ кг}$ ,  $m_k = 1,5 \text{ кг/м}$ ;  $c_0 = 1500 \text{ Н}\cdot\text{м/рад}$ ,  $c_k = 1000 \text{ Н}\cdot\text{м/рад}$ . Собственные частоты колебаний исходной системы:  $\omega_0 = 0$ ,  $\omega_1 = 6,067 \text{ рад/с}$ ,  $\omega_2 = 21,978 \text{ рад/с}$ ,  $\omega_3 = 54,177 \text{ рад/с}$ ,  $\omega_4 = 88,019 \text{ рад/с}$ .

На рис. 6.1.9 приведены результаты решения в рядах по синусам (6.1.23) задачи управляемого поворота системы на угол  $\theta_T = \pi/2$  за время  $T = 3 \text{ с}$  с гашением упругих колебаний при  $t = T$  одновременно по  $p$  низшим собственным формам: 1 –  $p = 1$ ; 2 –  $p = 2$ ; 3 –  $p = 3$ . Аналогичные результаты при решении той же самой задачи в рядах по косинусам (6.1.29) показаны на рис. 6.1.10.



**Рис. 6.1.9.** Зависимости  $M_z$ ,  $\theta$ ,  $\vartheta_4$  для решения в рядах по синусам

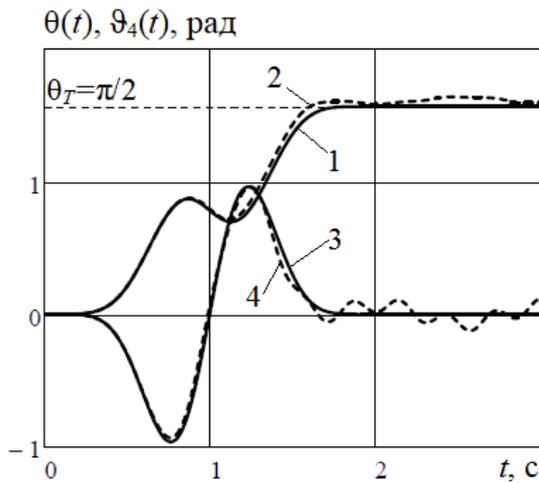


**Рис. 6.1.10.** Зависимости  $M_z$ ,  $\theta$ ,  $\vartheta_4$  для решения в рядах по косинусам

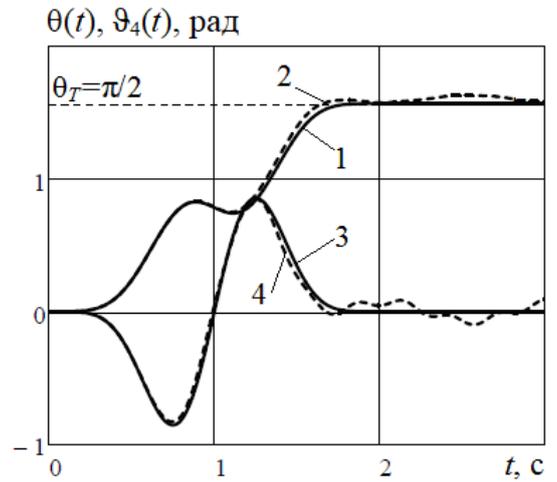
Время  $T = 3$  с выбрано таким образом, чтобы колебания для данной системы не выходили за пределы линейной теории ( $\sin \varphi_k \approx \varphi_k$ ,  $\cos \varphi_k \approx 1$ ,  $|\varphi_k| < 0,5$  рад). В этом случае решение задачи в данной постановке по линейной и нелинейной теории практически совпадают. Оценки колебаний при  $t > T$ , представляющих колебания по непогашенным высшим собственным формам ( $n > p$ ), показывают, что в обоих рассмотренных случаях эти «остаточные» колебания пренебрежимо малы (даже при  $p = 1$ , как видно в масштабе графиков на рис. 6.1.9 и рис. 6.1.10). Приведем численные значения размахов остаточных колебаний по углу  $\varphi_4(t)$ : ряд по синусам –  $p = 1 - 1,181 \times 10^{-3}$  рад,  $p = 2 - 9,393 \times 10^{-6}$  рад,  $p = 3 - 6,589 \times 10^{-6}$  рад; ряд по косинусам –  $p = 1 - 5,761 \times 10^{-4}$  рад,  $p = 2 - 2,866 \times 10^{-5}$  рад,  $p = 3 - 6,982 \times 10^{-6}$  рад.

Рассмотрим случай поворота данной системы на тот же самый угол  $\theta_T = \pi/2$  за время  $T = 2$  с. В данном случае колебания системы выходят за пределы применимости линейной теории ( $|\varphi_k| > 0,5$  рад). На рис. 6.1.11 и рис. 6.1.12 показано решение задачи в рядах по синусам и косинусам, соответственно, с гашением колебаний по  $p = 3$  низшим собственным формам: 1 – линейное решение для  $\theta(t)$ ; 2 – нелинейное решение для  $\theta(t)$ ; 3 – линейное решение для  $\vartheta_4(t)$ ; 4 – нелинейное решение для  $\vartheta_4(t)$ .

В масштабе графиков видно, что в этом случае остаточные колебания как по углу  $\theta(t)$ , так и по углу  $\vartheta_4(t)$  за счет нелинейности достаточно велики, что говорит о неприменимости линейной теории для решения задачи гашения колебаний в данном случае.



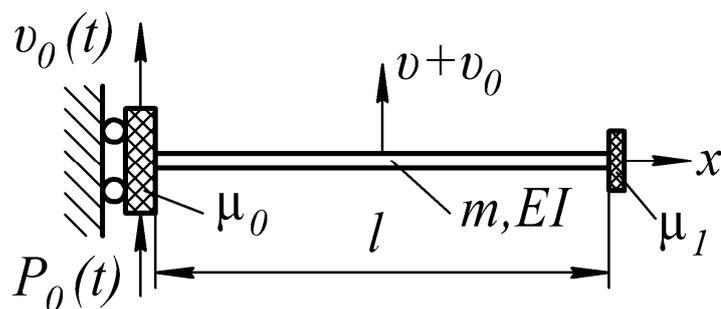
**Рис. 6.1.11.** Зависимости  $\theta$  и  $\vartheta_4$  для решения в рядах по синусам



**Рис. 6.1.12.** Зависимости  $\theta$  и  $\vartheta_4$  для решения в рядах по косинусам

### Конечное передвижение упругого стержня с массой на конце

Постановка задачи. Рассматриваются поперечные колебания в вертикальном направлении упругого стержня, консольно прикрепленного к подвижному основанию (рис. 6.1.13). Система имеет следующие параметры:  $EI$  и  $m$  – изгибная жесткость и погонная масса стержня;  $\mu_0$  и  $\mu_1$  – масса подвижного основания и масса, присоединенная на конце стержня  $x = l$ .



**Рис. 6.1.13.** Общий вид рассматриваемой системы

Перемещение левого конца стержня  $x=0$  и основания  $v_0(t)$  ищется на интервале  $0 \leq t \leq T$ , где  $T$  – заданное время управляемого конечного перемещения, которое подчиняется начальным и конечным условиям:

$$\dot{v}_0(0) = v_0(0) = 0, \quad \dot{v}_0(T) = 0, \quad v_0(T) = v_T. \quad (6.1.35)$$

Дополнительное поперечное перемещение  $v(\xi, t)$  за счет изгиба стержня представляется в виде разложения по собственным формам колебаний  $V_n(\xi)$ ,  $\xi = x/l$ :

$$v(\xi, t) = \sum_n V_n(\xi) f_n(t), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (6.1.36)$$

где  $f_n(t)$  – неизвестные нормальные координаты. Собственные формы колебаний неподвижно закрепленной консольной балки постоянного поперечного сечения с массой  $\mu_1$  на конце при нормировке  $V_n(1) \equiv 1$  записываются в виде:

$$\begin{aligned} V_n(\xi) &= C_n (\cosh(\kappa_n \xi) - \cos(\kappa_n \xi)) - S_n (\sinh(\kappa_n \xi) - \sin(\kappa_n \xi)); \\ C_n &= \frac{\sinh(\kappa_n) + \sin(\kappa_n)}{\Delta_n}, \quad S_n = \frac{\cosh(\kappa_n) + \cos(\kappa_n)}{\Delta_n}; \\ \Delta_n &= 2(\cosh(\kappa_n) \sin(\kappa_n) - \sinh(\kappa_n) \cos(\kappa_n)). \end{aligned}$$

Параметры  $\kappa_n$  для  $n = 1, 2, \dots$  находятся из частотного уравнения:

$$1 + \cosh(\kappa) \cos(\kappa) - \frac{\mu_1}{ml} \kappa (\cosh(\kappa) \sin(\kappa) - \sinh(\kappa) \cos(\kappa)) = 0;$$

после чего определяются собственные частоты колебаний  $\omega_n$ :

$$\omega_n^2 = \frac{EI}{ml^4} \kappa_n^4, \quad n = 1, 2, \dots$$

Дифференциальные уравнения движения системы в нормальных координатах записываются в виде:

$$\begin{aligned} m_n (\ddot{f}_n + \omega_n^2 f_n) &= -m_{0n} \ddot{v}_0(t), \quad n = 1, 2, \dots; \\ m_{0n} &= l \int_0^1 m V_n d\xi + \mu_1 V_n(1), \quad m_n = l \int_0^1 m V_n^2 d\xi + \mu_1 V_n^2(1). \end{aligned} \quad (6.1.37)$$

Реакция при конечном управляемом перемещении системы с массой  $M_0 = \mu_0 + ml + \mu_1$  может быть найдена из выражения:

$$P_0(t) = M_0 \ddot{v}_0 + \sum_n m_{0n} \ddot{f}_n. \quad (6.1.38)$$

При конечном перемещении рассматриваемой системы из состояния покоя при  $t=0$  с гашением  $N$  низших собственных форм колебаний в момент окончания операции  $t=T$  получаем следующие терминальные условия для  $f_n$ :

$$\begin{aligned} \dot{f}_n(0) = f_n(0) = 0, \quad n = 1, 2, \dots; \\ \dot{f}_n(T) = f_n(T) = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (6.1.39)$$

Вместо перемещения  $v_0(t)$  будем рассматривать в качестве неизвестной функции ускорение основания  $\ddot{v}_0(t)$ :

$$\ddot{v}_0 = \frac{l}{T^2} \varphi(t), \quad (6.1.40)$$

где  $\varphi(t)$  – безразмерная финитная функция при  $0 \leq t \leq T$ . С учетом (6.1.35) и (6.1.40)  $\varphi(t)$  должна удовлетворять условиям:

$$\int_0^T \varphi(t) dt = 0, \quad v_T = -\frac{l}{T^2} \int_0^T \varphi(t) t dt. \quad (6.1.41)$$

Из уравнений колебаний системы (6.1.37) с учетом (6.1.40) получаем:

$$\begin{aligned} f_n(t) = -\frac{1}{\omega_n} \frac{m_{0n}}{m_n} \frac{l}{T^2} \int_0^t \varphi(\tau) \sin[\omega_n(t-\tau)] d\tau \quad \text{при } 0 \leq t \leq T; \\ f_n(t) = -\frac{1}{\omega_n} \frac{m_{0n}}{m_n} \frac{l}{T^2} \int_0^T \varphi(\tau) \sin[\omega_n(t-\tau)] d\tau \quad \text{при } t > T. \end{aligned} \quad (6.1.42)$$

Решение в виде ряда по синусам. Представим функцию  $\varphi(t)$  в виде ряда по синусам, которые удовлетворяют начальным условиям (6.1.41):

$$\varphi(t) = \sum_k b_k \sin(k\Omega t), \quad \Omega = \frac{2\pi}{T}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (6.1.43)$$

где  $b_k$  – неизвестные коэффициенты разложения, подлежащие определению.

Подставляя (6.1.43) в выражения (6.1.42) получаем:

$$\begin{aligned} f_n(t) = -\frac{m_{0n}}{m_n} \frac{l}{T^2} \sum_k b_k \frac{1}{\omega_n^2 - k^2 \Omega^2} \left[ \sin(k\Omega t) - \frac{k\Omega}{\omega_n} \sin(\omega_n t) \right] \quad \text{при } 0 \leq t \leq T; \\ f_n(t) = -\frac{1}{\omega_n} \frac{m_{0n}}{m_n} \frac{l}{T^2} \left[ \sin(\omega_n(t-T)) - \sin(\omega_n t) \right] \sum_k b_k \frac{k\Omega}{\omega_n^2 - k^2 \Omega^2} \quad \text{при } t > T. \end{aligned} \quad (6.1.44)$$

Для гашения  $N$  собственных форм колебаний в момент  $t = T$  из конечных условий (6.1.39), а также с учетом второго выражения (6.1.41), получаем следующую систему  $N + 1$  линейных уравнений для нахождения коэффициентов  $b_k$  ( $k = 1, 2, \dots, N + 1$ ):

$$\sum_{k=1}^{N+1} b_k \frac{k\Omega}{\omega_n^2 - k^2\Omega^2} = 0, \quad \sum_{k=1}^{N+1} \frac{b_k}{k} = \frac{2\pi}{l} v_T, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (6.1.45)$$

Таким образом, во всех суммах по  $k$  в выражениях (6.1.43) и (6.1.44) необходимо положить  $k = 1, 2, \dots, N + 1$ .

Приведем формулы для коэффициентов  $b_k$  системы (6.1.45) при  $N = 1, 2, 3$ .

Для  $N = 1$ :

$$b_1 = \frac{8\pi v_T (\omega_1^2 - \Omega^2)}{3l\omega_1^2}, \quad b_2 = -\frac{4\pi v_T (\omega_1^2 - 4\Omega^2)}{3l\omega_1^2}.$$

Для  $N = 2$ :

$$b_1 = \frac{3\pi v_T (\omega_1^2 - \Omega^2)(\omega_2^2 - \Omega^2)}{l\omega_1^2 \omega_2^2}, \quad b_2 = -\frac{12\pi v_T (\omega_1^2 - 4\Omega^2)(\omega_2^2 - 4\Omega^2)}{5l\omega_1^2 \omega_2^2};$$

$$b_3 = \frac{3\pi v_T (\omega_1^2 - 9\Omega^2)(\omega_2^2 - 9\Omega^2)}{5l\omega_1^2 \omega_2^2}.$$

Для  $N = 3$ :

$$b_1 = \frac{16\pi v_T (\omega_1^2 - \Omega^2)(\omega_2^2 - \Omega^2)(\omega_3^2 - \Omega^2)}{5l\omega_1^2 \omega_2^2 \omega_3^2};$$

$$b_2 = -\frac{16\pi v_T (\omega_1^2 - 4\Omega^2)(\omega_2^2 - 4\Omega^2)(\omega_3^2 - 4\Omega^2)}{5l\omega_1^2 \omega_2^2 \omega_3^2};$$

$$b_3 = \frac{48\pi v_T (\omega_1^2 - 9\Omega^2)(\omega_2^2 - 9\Omega^2)(\omega_3^2 - 9\Omega^2)}{35l\omega_1^2 \omega_2^2 \omega_3^2};$$

$$b_4 = -\frac{8\pi v_T (\omega_1^2 - 16\Omega^2)(\omega_2^2 - 16\Omega^2)(\omega_3^2 - 16\Omega^2)}{35l\omega_1^2 \omega_2^2 \omega_3^2}.$$

Решение в виде ряда по косинусам. Функция  $\varphi(t)$  может быть также представлена в виде ряда по косинусам, которые удовлетворяют начальным условиям (6.1.41):

$$\varphi(t) = \sum_k a_k \cos\left(\frac{k\Omega}{2}t\right), \quad \Omega = \frac{2\pi}{T}, \quad k = 1, 3, \dots, \quad (6.1.46)$$

где  $a_k$  – неизвестные коэффициенты. Подставляя (6.1.46) в выражения для нормальной координаты (6.1.42), будем иметь:

$$\begin{aligned} f_n(t) &= \frac{m_{0n}}{m_n} \frac{l}{T^2} \sum_k a_k \frac{1}{\omega_n^2 - k^2 \Omega^2 / 4} [\cos(\omega_n t) - \cos\left(\frac{k\Omega}{2}t\right)] \text{ при } 0 \leq t \leq T; \\ f_n(t) &= \frac{m_{0n}}{m_n} \frac{l}{T^2} [\cos(\omega_n(t-T)) + \cos(\omega_n t)] \sum_k a_k \frac{1}{\omega_n^2 - k^2 \Omega^2 / 4} \text{ при } t > T. \end{aligned} \quad (6.1.47)$$

Для гашения  $N$  собственных форм колебаний в момент окончания операции из конечных условий (6.1.39) и второго выражения (6.1.41) получаем линейную систему  $N+1$  уравнений для нахождения коэффициентов  $b_k$  ( $k = 1, 3, \dots, 2N+1$ ):

$$\sum_{k=1,3,\dots}^{2N+1} a_k \frac{1}{\omega_n^2 - k^2 \Omega^2 / 4} = 0, \quad \sum_{k=1,3,\dots}^{2N+1} \frac{a_k}{k^2} = \frac{\pi^2}{2l} \upsilon_T, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (6.1.48)$$

Таким образом, во всех суммах по  $k$  в выражениях (6.1.46) и (6.1.47) по аналогии с предыдущим случаем необходимо положить  $k = 1, 3, \dots, 2N+1$ .

Приведем формулы для коэффициентов  $a_k$  системы (6.1.48) при  $N = 1, 2, 3$ .

Для  $N = 1$ :

$$a_1 = \frac{9\pi^2 \upsilon_T (4\omega_1^2 - \Omega^2)}{64l\omega_1^2}, \quad a_3 = -\frac{9\pi^2 \upsilon_T (4\omega_1^2 - 9\Omega^2)}{64l\omega_1^2}.$$

Для  $N = 2$ :

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{75\pi^2 \upsilon_T (4\omega_1^2 - \Omega^2)(4\omega_2^2 - \Omega^2)}{2048l\omega_1^2 \omega_2^2}, \quad a_3 = -\frac{225\pi^2 \upsilon_T (4\omega_1^2 - 9\Omega^2)(4\omega_2^2 - 9\Omega^2)}{4096l\omega_1^2 \omega_2^2}; \\ a_5 &= \frac{75\pi^2 \upsilon_T (4\omega_1^2 - 25\Omega^2)(4\omega_2^2 - 25\Omega^2)}{4096l\omega_1^2 \omega_2^2}. \end{aligned}$$

Для  $N = 3$ :

$$a_1 = \frac{1225\pi^2 v_T (4\omega_1^2 - \Omega^2)(4\omega_2^2 - \Omega^2)(4\omega_3^2 - \Omega^2)}{131072l\omega_1^2\omega_2^2\omega_3^2};$$

$$a_3 = -\frac{2205\pi^2 v_T (4\omega_1^2 - 9\Omega^2)(4\omega_2^2 - 9\Omega^2)(4\omega_3^2 - 9\Omega^2)}{131072l\omega_1^2\omega_2^2\omega_3^2};$$

$$a_5 = \frac{1225\pi^2 v_T (4\omega_1^2 - 25\Omega^2)(4\omega_2^2 - 25\Omega^2)(4\omega_3^2 - 25\Omega^2)}{131072l\omega_1^2\omega_2^2\omega_3^2};$$

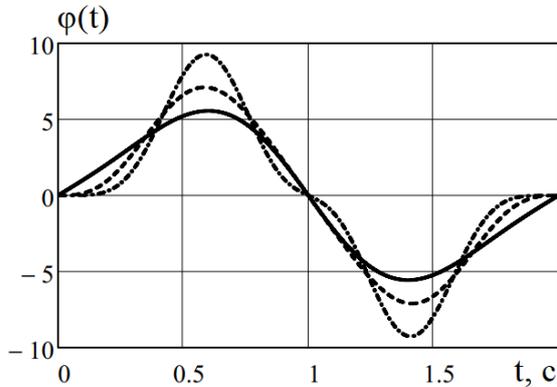
$$a_7 = -\frac{245\pi^2 v_T (4\omega_1^2 - 49\Omega^2)(4\omega_2^2 - 49\Omega^2)(4\omega_3^2 - 49\Omega^2)}{131072l\omega_1^2\omega_2^2\omega_3^2}.$$

Примеры расчета. В качестве примера расчета рассмотрим систему со следующими параметрами:  $l = 2$  м;  $\mu_0 = 5$  кг;  $\mu_1 = 25$  кг;  $m = 1,5$  кг/м;  $EI = 4000$  Н·м<sup>4</sup>;  $v_T = 3$  м;  $T = 2$  с. Количество гасимых собственных форм колебаний принимаем последовательно равными  $N = 1, 2, 3$ . При выбранных параметрах во всех расчетных случаях колебания консольного стержня с массой на конце остаются в рамках линейной теории, т.е. максимальный угол поворота поперечных сечений стержня  $|\vartheta(\xi, t)| \approx |v'(\xi, t)| \leq 0,5$  рад.

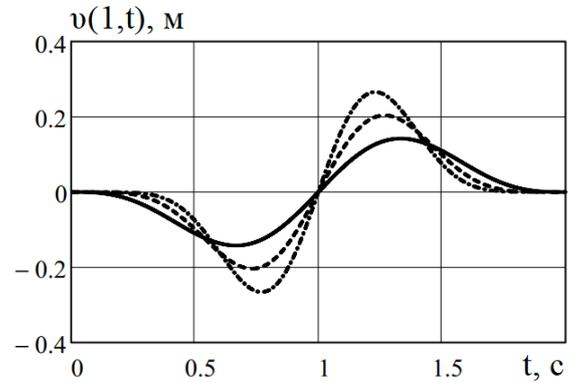
Собственные частоты колебаний рассматриваемой системы равны:  $\omega_1 = 7,639$  рад/с;  $\omega_2 = 200,490$  рад/с;  $\omega_3 = 646,582$  рад/с;  $\omega_4 = 1347,372$  рад/с.

Пример №1. Рассмотрим функцию  $\varphi(t)$  в виде ряда по синусам (6.1.43). Коэффициенты  $b_k$  имеют следующие значения: для  $N = 1$  –  $b_1 = 10,441$ ;  $b_2 = -2,032$ ; для  $N = 2$  –  $b_1 = 11,743$ ;  $b_2 = -3,654$ ;  $b_3 = -1,474$ ; для  $N = 3$  –  $b_1 = 12,526$ ;  $b_2 = -4,872$ ;  $b_3 = -3,368$ ;  $b_4 = 1,830$ . На рис. 6.1.14 показан вид функций  $\varphi(t)$  в виде ряда (6.1.43) при  $N = 1, 2, 3$ . Здесь и далее сплошная линия на графике соответствует  $N = 1$ , пунктирная линия –  $N = 2$ , штрихпунктирная линия –  $N = 3$ . На рис. 6.1.15 представлен график зависимости прогиба упругой балки на конце  $v(1, t)$ , а на рис. 6.1.16 – график изменения реакции  $P_0(t)$  при конечном перемещении упругой балки с массами  $\mu_0$  и  $\mu_1$  на концах. Следует отметить, что

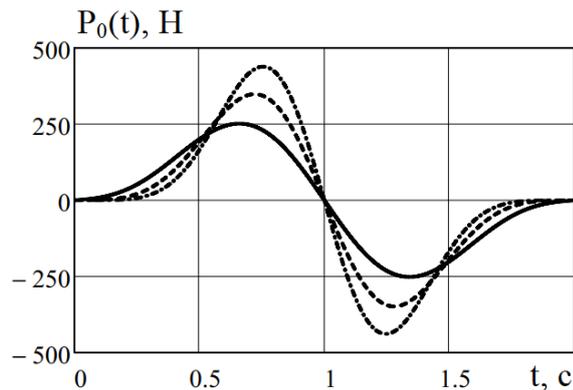
в данном расчетном случае даже при  $N=1$  остаточные колебания при  $t > T$  конца балки  $v(1,t)$  по непогашенным собственным формам  $n=2,3,\dots$  составляют менее  $10^{-6}$  м, а остаточная реакция  $P_0(t)$  не превышает 0,05 Н.



**Рис. 6.1.14.** Финитная функция для примера №1



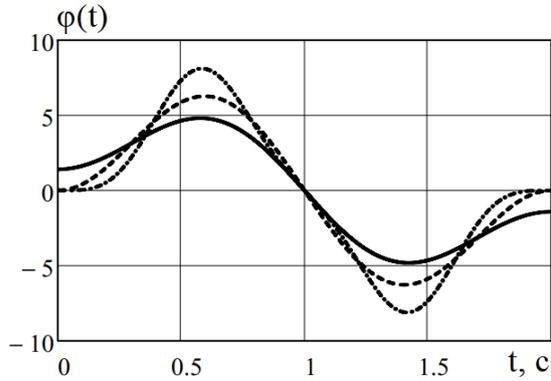
**Рис. 6.1.15.** Прогиб на конце балки для примера №1



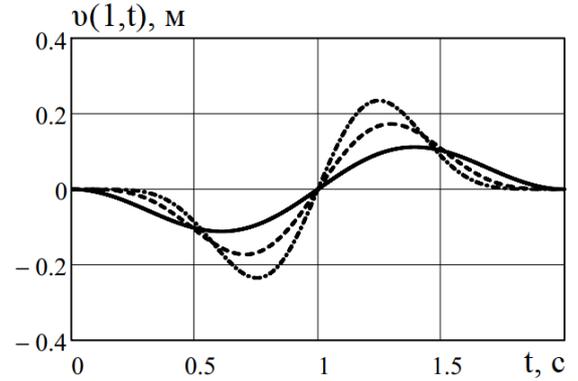
**Рис. 6.1.16.** Реакция системы для примера №1

Пример №2. Функция  $\varphi(t)$  представляется в виде ряда по косинусам (6.1.46). Аналогично приведем значения коэффициентов  $a_k$ : для  $N=1$  –  $a_1 = 7,975$ ;  $a_3 = -5,158$ ; для  $N=2$  –  $a_1 = 8,307$ ;  $a_3 = -8,055$ ;  $a_5 = -0,248$ ; для  $N=3$  –  $a_1 = 8,480$ ;  $a_3 = -9,867$ ;  $a_5 = -0,506$ ;  $a_7 = 1,892$ . На рис. 6.1.17 показан вид функций  $\varphi(t)$  для  $N=1,2,3$ , на рис. 6.1.18 – график зависимости прогиба упругой балки на конце  $v(1,t)$ , на рис. 6.1.19 – реакция  $P_0(t)$  при конечном перемещении системы. В данном расчетном случае при  $N=1$  остаточные колебания при  $t > T$

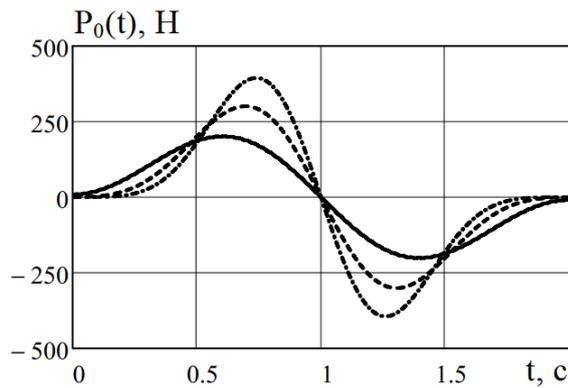
конца балки  $v(1,t)$  по непогашенным собственным формам  $n = 2, 3, \dots$  составляют менее  $10^{-5}$  м, а остаточная реакция  $P_0(t)$  не превышает 0,001 Н.



**Рис. 6.1.17.** Финитная функция для примера №2



**Рис. 6.1.18.** Прогиб на конце балки для примера №2



**Рис. 6.1.19.** Реакция системы для примера №2

В рассмотренном примере  $T_1 = 2\pi/\omega_1 < T$ ,  $\omega_2/\omega_1 \approx 26$  и поэтому низшая собственная форма оказывает доминирующее влияние на нестационарные колебания при передвижении балки за время  $T$ . В этом случае при гашении колебаний только по одной низшей собственной форме  $n = N = 1$  остаточные колебания по непогашенным высшим формам  $n = 2, 3, \dots$  оказываются весьма малыми.

## **6.2. Устранение колебаний путем настройки собственных частот линейной системы с постоянными параметрами**

### **6.2.1. Метод устранения колебаний путем настройки собственных частот упругой системы**

Получим решение сформулированной в гл. 6, разд. 6.1 задачи гашения упругих колебаний системы при передвижении из одного состояния покоя в другое ( $\Omega_0 = 0$ ,  $\Omega_T = 0$ ,  $\alpha_0 = 0$ ) путем настройки собственных частот. Управляющую функцию  $\varphi(t)$  будем разыскивать в классе антисимметричных относительно  $t = T/2$  функций  $\varphi(t) = -\varphi(T - t)$ , удовлетворяющих условию (6.1.13) и обеспечивающих разгон системы при  $0 \leq t < T/2$  и торможение при  $T/2 < t \leq T$ .

Решение уравнений (6.1.10) при  $n = 1, 2, \dots, \leq s$  и с начальными условиями  $\dot{f}_n(0) = 0$ ,  $f_n(0) = 0$  под действием сил, заданных при  $0 \leq t \leq T$  в виде (6.1.14) с учетом (6.1.13), будет:

$$\begin{aligned} f_n &= \frac{F_n^0}{m_n \omega_n} \int_0^t \varphi(\tau) \sin \omega_n (t - \tau) d\tau \quad \text{при } 0 \leq t \leq T; \\ f_n &= \frac{F_n^0 T}{m_n \omega_n} [\Phi_n \sin \omega_n t - \Psi_n \cos \omega_n t] \quad \text{при } t \geq T, \end{aligned} \quad (6.2.1)$$

где

$$\Phi_n = \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(\tau) \cos \omega_n \tau d\tau, \quad \Psi_n = \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(\tau) \sin \omega_n \tau d\tau. \quad (6.2.2)$$

Колебания по  $n$ -ой собственной форме прекращаются в момент времени  $t = T$ , если выполняются условия

$$\Phi_n = 0, \quad \Psi_n = 0, \quad (6.2.3)$$

которые представляют собой условия ортогональности управляющей функции  $\varphi(t)$  с функциями  $\cos \omega_n t$  и  $\sin \omega_n t$  при  $0 \leq t \leq T$ . Эти условия эквивалентны конечным условиям  $\dot{f}_n(T) = 0$ ,  $f_n(T) = 0$ .

Введем безразмерный параметр  $\psi = \omega/\Omega$ , где  $\Omega = 2\pi/T$ , а  $\omega$  охватывает весь диапазон рассматриваемых собственных частот упругих колебаний системы ( $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_p$  при  $n = 1, 2, \dots, p \leq s$ ,  $\omega_n > \omega_{n-1}$ ), и будем считать, что  $\Omega < \omega_1$ , т.е.  $\psi > 1$ . Вместо  $\Phi_n$ ,  $\Psi_n$  будем рассматривать соответствующие им функции:

$$\Phi(\psi) = \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(\tau) \cos \psi \Omega \tau d\tau, \quad \Psi(\psi) = \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(\tau) \sin \psi \Omega \tau d\tau. \quad (6.2.4)$$

При этом  $\Phi_n = \Phi(\psi_n^*)$ ,  $\Psi_n = \Psi(\psi_n^*)$ , где  $\psi_n^* = \omega_n/\Omega = T/T_n$ ,  $T_n = 2\pi/\omega_n$ . Условия (6.2.3) заменим уравнениями

$$\Phi(\psi) = 0, \quad \Psi(\psi) = 0, \quad (6.2.5)$$

которые для заданной из рассматриваемого класса функции  $\varphi(t)$  приводятся к двум трансцендентным уравнениям и имеют общие корни, образующие возрастающую последовательность чисел  $\psi_\nu$  при  $\nu = 1, 2, 3, \dots$ ,  $\psi_\nu > \psi_{\nu-1}$ .

Приведем несколько простых, удобных для управления конечными поворотами системы, финитных функций из класса  $\varphi(t) = -\varphi(T-t)$  при  $0 \leq t \leq T$ , а также относящихся с ним функций  $\Phi(\psi)$ ,  $\Psi(\psi)$  и их корней  $\psi_\nu$  при  $\nu = 1, 2, 3, \dots$ ;  $\psi_1 > 1$ :

1)  $\varphi(t) = \sin \Omega t$  :

$$\Phi = -\frac{\sin^2 \pi \psi}{\pi(\psi^2 - 1)}, \quad \Psi = \frac{\sin 2\pi \psi}{2\pi(\psi^2 - 1)}; \quad (6.2.6)$$

$$\psi_\nu \rightarrow 2; 3; 4; \dots, \quad M_z^0 = \frac{2\pi J_z \theta_T}{T^2};$$

2)  $\varphi(t) = \cos(\Omega t/2)$ :

$$\Phi = -\frac{\psi \sin 2\pi \psi}{2\pi(\psi^2 - 1/4)}, \quad \Psi = \frac{\psi \cos^2 \pi \psi}{\pi(\psi^2 - 1/4)};$$

$$\psi_\nu \rightarrow 1,5; 2,5; 3,5; \dots, \quad M_z^0 = \frac{\pi^2 J_z \theta_T}{2T^2};$$

3)  $\varphi(t) = 1$  при  $0 \leq t < T/2$ ,  $\varphi(t) = -1$  при  $T/2 < t \leq T$  :

$$\Phi = \frac{\sin \pi \psi}{\pi \psi} (1 - \cos \pi \psi), \quad \Psi = -\frac{\cos \pi \psi}{\pi \psi} (1 - \cos \pi \psi);$$

$$\psi_v \rightarrow 2; 4; 6; \dots, \quad M_z^0 = \frac{4J_z \theta_T}{T^2};$$
(6.2.6)

4)  $\varphi(t) = 1 - 2(t/T)$ :

$$\Phi = \frac{\sin \pi \psi}{\pi \psi} \left( \frac{\sin \pi \psi}{\pi \psi} - \cos \pi \psi \right), \quad \Psi = -\frac{\cos \pi \psi}{\pi \psi} \left( \frac{\sin \pi \psi}{\pi \psi} - \cos \pi \psi \right);$$

$$\psi_v \rightarrow 1,4303; 2,4590; 3,4709; 4,4774; \dots, \quad M_z^0 = \frac{6J_z \theta_T}{T^2};$$

5)  $\varphi(t) = \sin \Omega t \sin (\Omega t/2)$ :

$$\Phi = \frac{\psi \sin 2\pi \psi}{2\pi(\psi^2 - 1/4)(\psi^2 - 9/4)}, \quad \Psi = -\frac{\psi \cos^2 \pi \psi}{\pi(\psi^2 - 1/4)(\psi^2 - 9/4)}$$

$$\psi_v \rightarrow 2,5; 3,5; 4,5; \dots, \quad M_z^0 = \frac{9\pi^2 J_z \theta_T}{8T^2}.$$

Для прекращения колебаний в момент  $t = T$  по  $n$ -ой собственной форме ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) необходимо, чтобы собственная частота этой формы  $\omega_n$  удовлетворяла соотношению:

$$\omega_n = \psi_n^* \Omega, \tag{6.2.7}$$

где  $\psi_n^*$  — одно из чисел последовательности  $\psi_v \rightarrow \psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots$  при  $\psi_1 > 1$ ,  $\psi_v > \psi_{v-1}$ , полученной для рассматриваемой функции  $\varphi(t)$ , которое соответствует частоте  $\omega_n$ .

Одновременное гашение колебаний по нескольким собственным формам: из условия (6.2.7) следует, что для гашения в момент  $t = T$  колебаний по нескольким низшим собственным формам ( $n = 1, 2, \dots, p \leq s$ ) необходимо, чтобы собственные частоты этих форм удовлетворяли соотношениям

$$T\omega_1 = 2\pi\psi_1^*, \quad \frac{\omega_n}{\omega_1} = \frac{\psi_n^*}{\psi_1^*}, \quad n = 2, 3, \dots, p, \tag{6.2.8}$$

где  $\psi_1^*$ ,  $\psi_n^*$  — выбираемые числа из последовательности корней  $\psi_v$  уравнений (6.2.5) для рассматриваемой управляющей функции  $\varphi(t)$ ;  $\psi_1^* > 1$ ,  $\psi_n^* > \psi_{n-1}^*$ .

Соотношения (6.2.8) при выбранных  $\psi_1^*$ ,  $\psi_n^*$  могут быть выполнены при проектировании системы или при ее настройке по частотам собственных колебаний. Для этого варьируется некоторое число (не менее  $p$ ) проектных параметров системы и минимизируется квадратичная функция:

$$J = r_1 \left( \frac{T\omega_1}{2\pi\psi_1^*} - 1 \right)^2 + \sum_{n=2}^p r_n \left( \frac{\psi_n^* \omega_1}{\psi_1^* \omega_n} - 1 \right)^2 \rightarrow \min, \quad (6.2.9)$$

где  $r_n$  – заданные положительные весовые коэффициенты.

При заданном  $T$  и выбранных  $\psi_1^*$ ,  $\psi_2^*$ , ...,  $\psi_p^*$  собственные частоты колебаний  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_p$  на каждом шаге итерации варьируемых проектных параметров определяются путем численного решения уравнения собственных колебаний системы с измененными параметрами  $[\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}]\mathbf{X} = 0$ . Для этого, а также для минимизации функции (6.2.9), используются стандартные вычислительные программы.

Для настройки системы по ее собственным частотам при достаточно малых изменениях варьируемых проектных параметров, а также для быстрой сходимости процесса минимизации (6.2.9), числа  $\psi_n^*$  ( $n = 1, 2, \dots, p$ ) следует выбирать из возрастающей последовательности корней уравнений (6.2.5)  $\psi_v \rightarrow \psi_1, \psi_2, \dots$  при  $\psi_1 > 1$  так, чтобы отношения  $T\omega_1/2\pi\psi_1^*$  и  $\psi_n^* \omega_1 / \psi_1^* \omega_n$  при  $n = 2, 3, \dots, p$  для исходной системы были близки к 1. При значительном изменении частот колебаний некоторые из чисел  $\psi_n^*$  ( $n = 1, 2, \dots, p$ ) в процессе итерации могут быть изменены на другие более подходящие числа из той же последовательности  $\psi_1, \psi_2, \dots$ .

После настройки собственных частот с необходимой точностью динамическую реакцию модифицированной линейной системы при конечном повороте под действием управляющего момента можно определить путем численного решения уравнений в обобщенных координатах (6.1.7) или используя аналитическое решение уравнений в нормальных координатах (6.2.1).

### 6.2.2. Примеры расчета

#### Модель космического аппарата с двумя панелями солнечных батарей, совершающих малые колебания

Уравнения колебаний панелей СБ, соединенных с КА, в линейной постановке (рис. 6.1.2) получены в гл. 6, разд. 6.1. Расчеты выполнены со следующими исходными данными:  $J_0 = 166,67 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ ,  $x_0 = 0,5 \text{ м}$ ,  $s = 4$ ;  $a_k = 2,5 \text{ м}$ ,  $\mu_k = 5 \text{ кг}$ ,  $m_k = 3 \text{ кг/м}$ ,  $k = 1,2,3,4$ ;  $c_0 = 3000 \text{ Н}\cdot\text{м/рад}$ ,  $c_k = 2000 \text{ Н}\cdot\text{м/рад}$ ,  $k = 1,2,3$ . Собственные частоты колебаний исходной системы:  $\omega_0 = 0$ ,  $\omega_1 = 3,330 \text{ рад/с}$ ,  $\omega_2 = 7,399 \text{ рад/с}$ ,  $\omega_3 = 14,165 \text{ рад/с}$ ,  $\omega_4 = 22,349 \text{ рад/с}$ .

Пассивное гашение нескольких собственных форм колебаний ( $n = 1,2,\dots,\leq 4$ ) при повороте системы на угол  $\theta_T = \pi/2$  с помощью момента  $M_z(t) = M_z^0 \varphi(t)$ , где  $\varphi(t)$  – заданная при  $0 \leq t \leq T$  управляющая функция, осуществляется путем настройки частот этих форм по условиям (6.2.8). Для этого варьируются жесткости пружин  $c_0, c_1, c_2, c_3$  и минимизируется квадратичная функция (6.2.9).

Пример №1. При использовании управляющей функции (6.2.6) – 1)  $\varphi(t) = \sin \Omega t$  при  $T = 12 \text{ с}$ ,  $M_z^0 = 2\pi J_z \theta_T / T^2 = 316,4 \text{ Н}\cdot\text{м}$  рассмотрены три расчетных случая:

- а) гашение одной низшей формы колебаний ( $n = 1$ );
- б) гашение двух низших форм колебаний ( $n = 1,2$ );
- с) гашение трех низших форм колебаний ( $n = 1,2,3$ ).

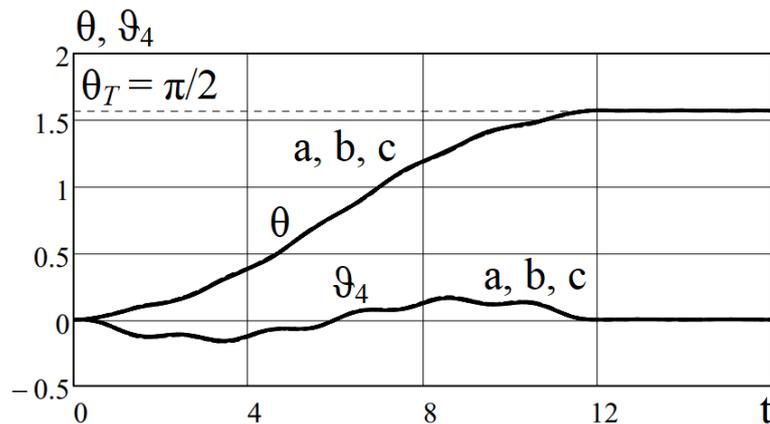
Для этих трех случаев в процессе минимизации (6.2.9) получены следующие параметры модифицированной системы, соответственно:

а)  $\psi_1^* = 6$ ,  $c_0 = 2940,4$  Н·м/рад,  $c_1 = 1706,5$  Н·м/рад,  $c_2 = 1766,9$  Н·м/рад,  
 $c_3 = 1949,9$  Н·м/рад,  $\omega_1 = 3,137$  рад/с,  $\omega_2 = 7,222$  рад/с,  $\omega_3 = 13,714$  рад/с,  
 $\omega_4 = 21,305$  рад/с;

б)  $\psi_1^* = 6$ ,  $\psi_2^* = 13$ ,  $c_0 = 2498,3$  Н·м/рад,  $c_1 = 1897,0$  Н·м/рад,  $c_2 = 1677,7$  Н·м/рад,  
 $c_3 = 1775,0$  Н·м/рад,  $\omega_1 = 3,136$  рад/с,  $\omega_2 = 6,803$  рад/с,  $\omega_3 = 13,389$  рад/с,  
 $\omega_4 = 20,941$  рад/с;

с)  $\psi_1^* = 6$ ,  $\psi_2^* = 13$ ,  $\psi_3^* = 25$ ,  $c_0 = 2514,2$  Н·м/рад,  $c_1 = 1847,9$  Н·м/рад,  
 $c_2 = 1765,7$  Н·м/рад,  $c_3 = 1631,8$  Н·м/рад,  $\omega_1 = 3,139$  рад/с,  $\omega_2 = 6,803$  рад/с,  
 $\omega_3 = 13,078$  рад/с,  $\omega_4 = 20,861$  рад/с.

Результаты расчета динамической реакции системы по углам  $\theta(t)$  и  $\vartheta_4(t)$  в [рад] приведены на рис. 6.2.1. Для рассмотренных расчетных случаев а), б), с) они практически (в масштабе графиков рис. 6.2.1) совпадают. Размахи остаточных колебаний при  $t > T$  по углу  $\vartheta_4(t)$  в этих случаях не превышают следующих значений: а)  $3,233 \cdot 10^{-3}$  рад; б)  $4,053 \cdot 10^{-3}$  рад; с)  $1,755 \cdot 10^{-3}$  рад.



**Рис. 6.2.1.** Динамическая реакция системы по углам в примере №1

Пример №2. Приведем результаты, полученные при использовании ступенчатой управляющей функции (6.2.6) – 3) при  $T = 12$  с,  $M_z^0 = 4J_z \theta_T / T^2 = 201,4$  Н·м для тех же самых трех расчетных случаев. При

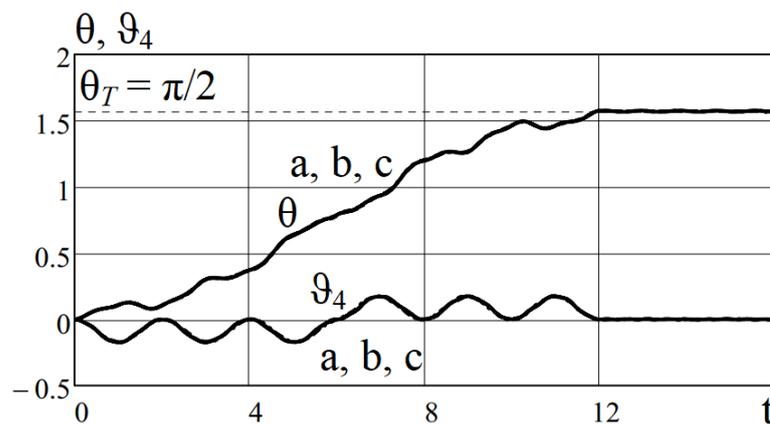
минимизации (6.2.9) получены следующие параметры модифицированной системы:

а)  $\psi_1^* = 6$ ,  $c_0 = 2940,4$  Н·м/рад,  $c_1 = 1706,5$  Н·м/рад,  $c_2 = 1766,9$  Н·м/рад,  $c_3 = 1949,9$  Н·м/рад,  $\omega_1 = 3,137$  рад/с,  $\omega_2 = 7,222$  рад/с,  $\omega_3 = 13,714$  рад/с,  $\omega_4 = 21,305$  рад/с;

б)  $\psi_1^* = 6$ ,  $\psi_2^* = 14$ ,  $c_0 = 3048,9$  Н·м/рад,  $c_1 = 1659,4$  Н·м/рад,  $c_2 = 1789,3$  Н·м/рад,  $c_3 = 1992,7$  Н·м/рад,  $\omega_1 = 3,132$  рад/с,  $\omega_2 = 7,317$  рад/с,  $\omega_3 = 13,787$  рад/с,  $\omega_4 = 21,399$  рад/с;

с)  $\psi_1^* = 6$ ,  $\psi_2^* = 14$ ,  $\psi_3^* = 28$ ,  $c_0 = 2998,3$  Н·м/рад,  $c_1 = 1814,6$  Н·м/рад,  $c_2 = 1511,3$  Н·м/рад,  $c_3 = 2435,1$  Н·м/рад,  $\omega_1 = 3,111$  рад/с,  $\omega_2 = 7,249$  рад/с,  $\omega_3 = 14,515$  рад/с,  $\omega_4 = 21,766$  рад/с.

На рис. 6.2.2 для этих случаев приведены графики функций  $\theta(t)$  и  $\vartheta_4(t)$ . Для рассмотренных расчетных случаев а), б), с) они практически (в масштабе графиков рис. 6.2.2) совпадают. Размахи остаточных колебаний при  $t > T$  по углу  $\vartheta_4(t)$  не превышают: а)  $5,269 \cdot 10^{-3}$  рад; б)  $8,414 \cdot 10^{-3}$  рад; с)  $9,504 \cdot 10^{-3}$  рад.



**Рис. 6.2.2.** Динамическая реакция системы по углам в примере №2

Пример №3. При использовании гладкой вместе с ее производной управляющей функции (6.2.6) – 5) при  $T = 12$  с,  $M_z^0 = 9\pi^2 J_z \theta_T / 8T^2 = 559,2$  Н·м

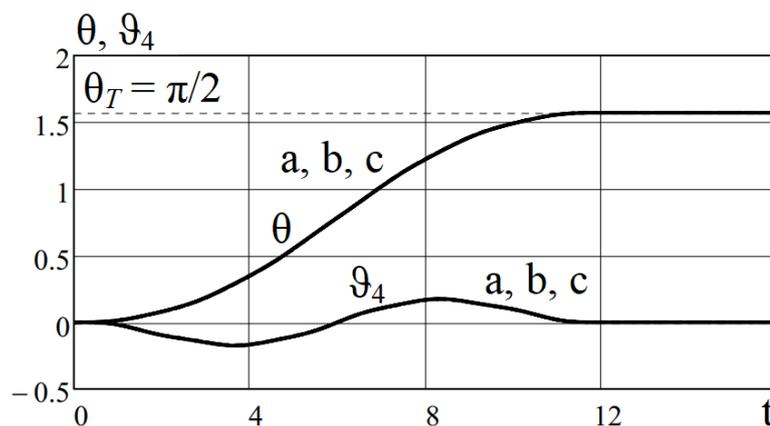
для рассматриваемых расчетных случаев аналогичным образом получены параметры модифицированной системы:

а)  $\psi_1^* = 6,5$ ,  $c_0 = 3024,1$  Н·м/рад,  $c_1 = 2118,8$  Н·м/рад,  $c_2 = 2094,3$  Н·м/рад,  $c_3 = 2020,3$  Н·м/рад,  $\omega_1 = 3,403$  рад/с,  $\omega_2 = 7,464$  рад/с,  $\omega_3 = 14,338$  рад/с,  $\omega_4 = 22,763$  рад/с;

б)  $\psi_1^* = 6,5$ ,  $\psi_2^* = 14,5$ ,  $c_0 = 3166,3$  Н·м/рад,  $c_1 = 2057,2$  Н·м/рад,  $c_2 = 2123,7$  Н·м/рад,  $c_3 = 2076,3$  Н·м/рад,  $\omega_1 = 3,403$  рад/с,  $\omega_2 = 7,592$  рад/с,  $\omega_3 = 14,441$  рад/с,  $\omega_4 = 22,868$  рад/с;

в)  $\psi_1^* = 6,5$ ,  $\psi_2^* = 14,5$ ,  $\psi_3^* = 27,5$ ,  $c_0 = 3168,2$  Н·м/рад,  $c_1 = 2049,6$  Н·м/рад,  $c_2 = 2173,1$  Н·м/рад,  $c_3 = 2054,2$  Н·м/рад,  $\omega_1 = 3,403$  рад/с,  $\omega_2 = 7,591$  рад/с,  $\omega_3 = 14,399$  рад/с,  $\omega_4 = 22,855$  рад/с.

Графики функций  $\theta(t)$  и  $\vartheta_4(t)$  для этих расчетных случаев приведены на рис. 6.2.3. Для рассмотренных расчетных случаев а), б), в) они практически (в масштабе графиков рис. 6.2.3) совпадают. Размахи остаточных колебаний при  $t > T$  по углу  $\vartheta_4(t)$  не превышают следующих значений: а)  $1,714 \cdot 10^{-4}$  рад; б)  $5,113 \cdot 10^{-5}$  рад; в)  $9,655 \cdot 10^{-5}$  рад.



**Рис. 6.2.3.** Динамическая реакция системы по углам в примере №3

Оценка влияния нелинейности колебаний панелей СБ

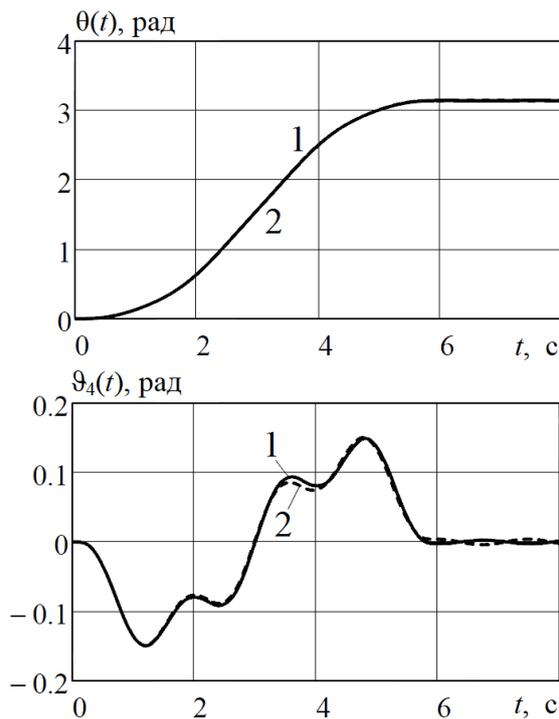
Оценим влияние нелинейности в описании движения панелей СБ при повороте КА на заданный угол при гашении остаточных колебаний в момент остановки. Нелинейные дифференциальные уравнения движения панелей СБ при умеренно больших углах  $\vartheta_k$  были получены в гл. 2, разд. 2.2. Рассмотрим способ управления путем настройки собственных частот колебаний упругой системы.

Примем следующие параметры системы:  $J_0 = 83,33 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ ,  $x_0 = 0,5 \text{ м}$ ,  $s = 4$ ;  $a_k = 0,75 \text{ м}$ ,  $\mu_k = 1 \text{ кг}$ ,  $m_k = 2 \text{ кг/м}$ ;  $c_0 = 450 \text{ Н}\cdot\text{м/рад}$ ,  $c_k = 400 \text{ Н}\cdot\text{м/рад}$ . Управляющий импульс для поворота системы возьмем в виде одной волны синусоиды как для линейной системы:  $M_z(t) = 2\pi J_z \theta_T / T^2 \cdot \sin(2\pi t/T)$  при  $0 \leq t \leq T$ ,  $M_z(t) = 0$  при  $t > T$ , где  $J_z = 191,1 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$  – момент инерции КА с недеформируемыми СБ. Для расчета принимаем:  $\theta_T = \pi$  рад;  $T = 3 \text{ с}$  и  $T = 6 \text{ с}$ . Число низших собственных частот колебаний, которые требуется погасить в момент остановки, принимаем равным  $p = 3$ .

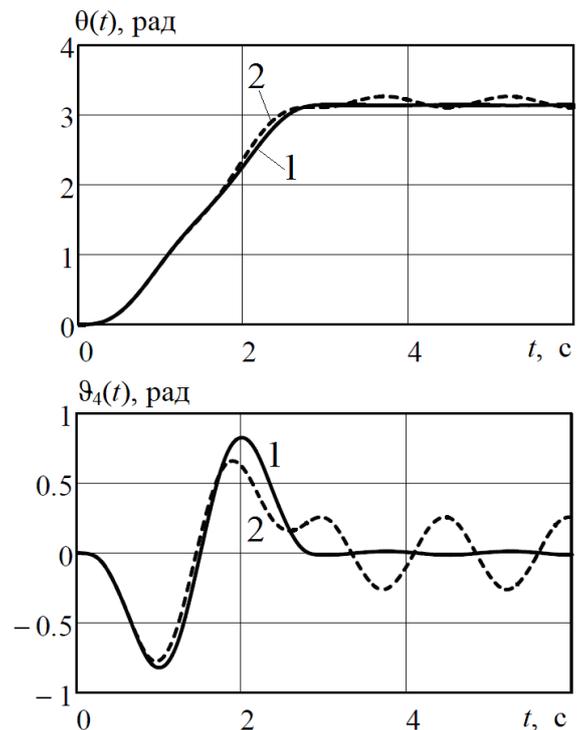
Собственные частоты малых колебаний исходной системы:  $\omega_0 = 0$ ;  $\omega_1 = 4,139 \text{ рад/с}$ ;  $\omega_2 = 17,522 \text{ рад/с}$ ;  $\omega_3 = 44,840 \text{ рад/с}$ ;  $\omega_4 = 73,935 \text{ рад/с}$ . Для поворота КА с упругими СБ на конечный угол  $\theta_T$  при малых относительных углах поворота секций  $\vartheta_k$ ,  $k = 1, 2, 3, 4$  с помощью управляющего импульса в виде одной волны синусоиды за заданное время  $T = 3 \text{ с}$  или  $T = 6 \text{ с}$  с одновременным гашением 3-х низших собственных форм, жесткости упруговязких шарниров должны быть изменены путем решения оптимизационной задачи до следующих значений:  $c_0 = 472,152 \text{ Н}\cdot\text{м/рад}$ ;  $c_1 = 420,830 \text{ Н}\cdot\text{м/рад}$ ;  $c_2 = 326,335 \text{ Н}\cdot\text{м/рад}$ ;  $c_3 = 349,185 \text{ Н}\cdot\text{м/рад}$ . При этом собственные частоты модифицированной системы принимают следующие значения:  $\omega_0 = 0$ ;  $\omega_1 = 4,175 \text{ рад/с}$ ;  $\omega_2 = 16,669 \text{ рад/с}$ ;  $\omega_3 = 43,837 \text{ рад/с}$ ;  $\omega_4 = 69,870 \text{ рад/с}$ .

На рис. 6.2.4 изображены графики изменения угла поворота КА  $\theta(t)$  и угла поворота четвертой секции СБ  $\vartheta_4(t)$  для случая  $T = 6 \text{ с}$  в линейной (1) и

нелинейной (2) постановках. Линии (1) и (2) в масштабе графиков практически совпадают (особенно для  $\theta(t)$ ), что указывает на достаточно высокую точность линейной математической модели при  $|\vartheta_k| < 0,5$  рад. Максимальная амплитуда остаточных колебаний после прекращения действия импульса ( $t > T = 6$  с) по углу  $\vartheta_4(t)$  составляет  $5,255 \cdot 10^{-3}$  рад в линейной постановке и  $8,029 \cdot 10^{-3}$  рад в нелинейной постановке.



**Рис. 6.2.4.** Зависимости  $\theta$  и  $\vartheta_4$  для времени управления  $T = 6$  с



**Рис. 6.2.5.** Зависимости  $\theta$  и  $\vartheta_4$  для времени управления  $T = 3$  с

На рис. 6.2.5 изображены графики  $\theta(t)$  и  $\vartheta_4(t)$  для случая  $T = 3$  с в линейной (1) и нелинейной (2) постановках. В этом случае результаты решения задачи в линейной и нелинейной постановках существенно различаются по углу  $\vartheta_4(t)$ , максимальное значение которого в этом случае составляет  $\sim 0,8$  рад. Максимальная амплитуда остаточных колебаний после прекращения действия импульса при  $t > T = 3$  с по углу  $\vartheta_4(t)$  составляет  $0,026$  рад в линейной постановке и  $0,518$  рад в нелинейной постановке.

Поворот КА с присоединенным тонкостенным стержнем под действием  
солнечного нагрева

Рассмотрим задачу поворота на заданный угол за заданное время из одного состояния покоя в другое КА с присоединенным тонкостенным стержнем под действием солнечного нагрева. Математическая модель была построена в гл. 4, здесь представлен случай без учета теплоизлучения.

Примем следующие параметры КА, стержня и груза: масса и собственный момент инерции КА равны  $m_0 = 1200$  кг,  $J_0 = 200$  кг·м<sup>2</sup>; тонкостенный стержень из стали –  $\rho = 7800$  кг/м<sup>3</sup>,  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Па,  $a = 30$  м,  $r = 0,025$  м,  $h = 0,0001$  м,  $\alpha = 1,1 \cdot 10^{-5}$  1/К,  $c = 462$  Дж/кг·К,  $\lambda = 50$  Вт/м,  $A_s = 0,5$ ,  $L_0/L = 1$ ; груз –  $\mu_r = 10$  кг,  $i_r = 7,5$  кг·м<sup>2</sup>,  $s_r = 0$ . Коэффициенты жесткости и демпфирования упруго-вязкого шарнира:  $c_0 = 100$  Н·м/рад,  $d_0 = 0$ .

К КА приложен управляющий момент в виде импульса (6.2.6) – 3):

$$M_z(t) = \begin{cases} \bar{M}_z & \text{при } 0 \leq t < T/2, \\ -\bar{M}_z & \text{при } T/2 \leq t \leq T \end{cases}$$

с целью его поворота в поле солнечных лучей на угол  $\theta_T$  за время  $T$  из состояния покоя  $\varphi(0) = \dot{\varphi}(0) = 0$ ,  $v(x,0) = \dot{v}(x,0) = 0$  при  $\gamma = \pi/2$  в состояние  $\varphi(T) = \theta_T$ ,  $\dot{\varphi}(T) = 0$  с устранением при  $t \geq T$  колебаний по низшей собственной форме с частотой  $\omega_1 = 0,4$  рад/с свободной системы (с незакрепленным КА). При этом должны выполняться условия  $\bar{M}_z = 4J\theta_T/T^2$ ,  $T = \chi \cdot 2\pi/\omega_1$ ,  $\chi = 2,4,6,\dots$  Принимаем  $\chi = 20$ ; при этом получаем  $T = 312,7$  с,  $\bar{M}_z = 1,357$  Н·м.

На рис. 6.2.6 – 6.2.8 приведены зависимости  $\varphi(t)$ ,  $v_p(t)$  и  $\vartheta_p(t)$  с учетом солнечного нагрева (1) и без его учета (2), соответственно. На 6.2.9 показано изменение температуры на конце стержня  $T_{1,p}(t)$ .

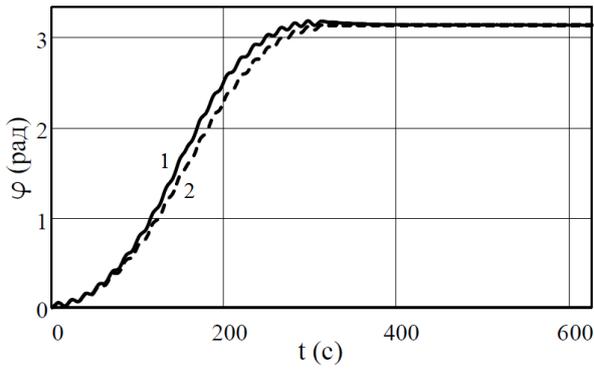


Рис. 6.2.6. Угол поворота КА  $\varphi(t)$

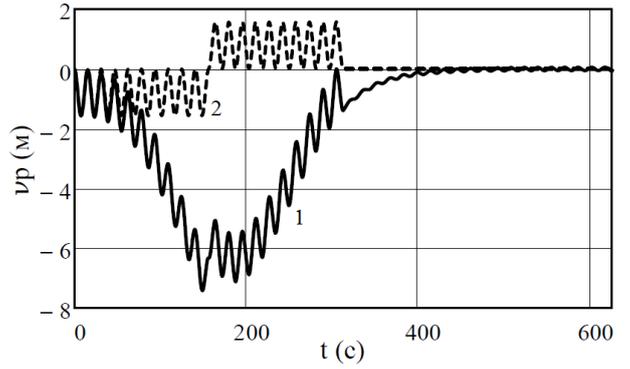


Рис. 6.2.7. Прогиб конца стержня  $v_p(t)$

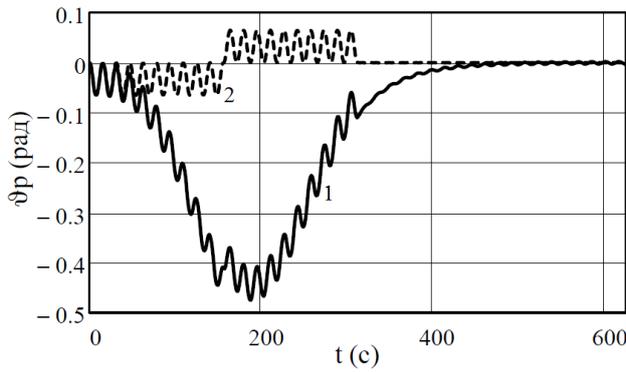


Рис. 6.2.8. Угол поворота конца стержня  $\varphi_p(t)$

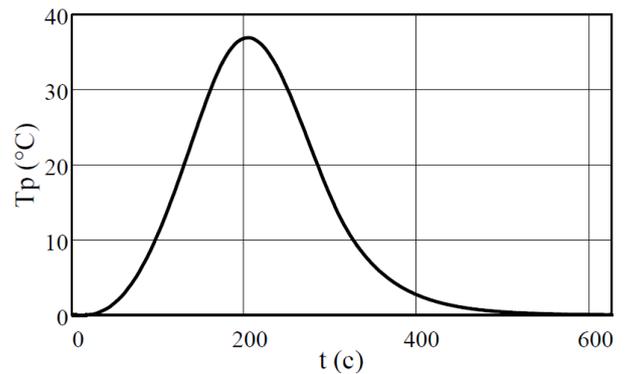


Рис. 6.2.9. Температура на конце стержня  $T_{1,p}(t)$

На рис. 6.2.10 представлен график распределения температуры  $T_1(x, T)$  по длине стержня в момент окончания действия управляющего импульса.

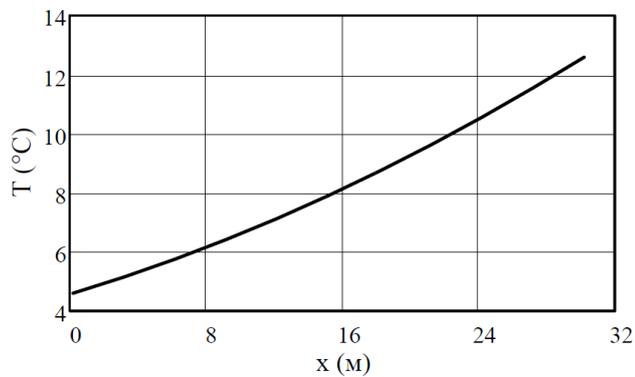


Рис. 6.2.10. Распределение температуры по длине стержня

**6.3. Терминальное управление линейными системами с постоянными и переменными параметрами с устранением колебаний с использованием метода Бубнова-Галеркина**

**6.3.1. Задача о конечном передвижении тяжелого твердого тела на тросе переменной длины в линейной постановке**

Постановка задачи

Рассмотрим плоскую задачу передвижения за определенное время  $T$  тяжелого абсолютно твердого тела, подвешенного на тросе, из начального положения покоя в конечное положения покоя за счет заданного изменения длины троса и управляемого горизонтального перемещения точки его подвеса, рис. 6.3.1. Тело соединено с концом троса в точке 1, расположенной выше центра тяжести тела  $C$  (точка 2) на расстоянии  $l_2$ . Рассматривается два варианта пассивного управления системой: 1) силовое управление (определяется закон изменения горизонтальной силы  $P(t)$  в точке подвеса); 2) кинематическое управление (определяется закон перемещения точки подвеса  $u(t)$ ). В первом варианте в качестве обобщенных координат рассматривается перемещение  $u(t)$  и углы поворота  $\varphi_1(t)$ ,  $\varphi_2(t)$ ; во втором варианте – только углы поворота  $\varphi_1(t)$ ,  $\varphi_2(t)$ .

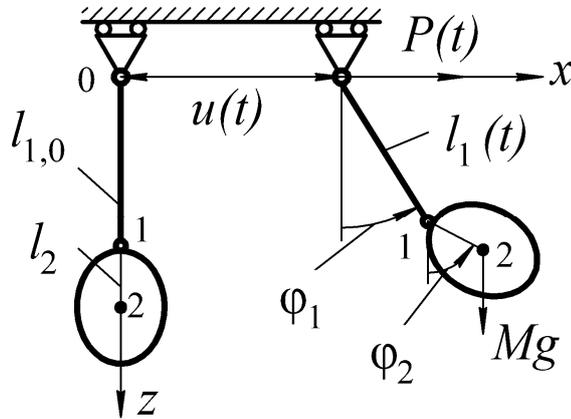
Начальные условия при  $t=0$  и конечные условия при  $t=T$ , представляющие устойчивые положения покоя системы, записываются в виде:

$$\begin{aligned} \dot{u} = 0, \quad u = 0, \quad \dot{\varphi}_1 = 0, \quad \varphi_1 = 0, \quad \dot{\varphi}_2 = 0, \quad \varphi_2 = 0 \quad \text{при } t = 0; \\ \dot{u} = 0, \quad u = u_T, \quad \dot{\varphi}_1 = 0, \quad \varphi_1 = 0, \quad \dot{\varphi}_2 = 0, \quad \varphi_2 = 0 \quad \text{при } t = T, \end{aligned} \quad (6.3.1)$$

где  $u_T$  – заданное конечное горизонтальное перемещение точки подвеса. Трос будем считать нерастяжимым, его инерцией будем пренебрегать и будем полагать, что его длина  $l_1(t)$  изменяется по заданному закону достаточно медленно при условиях

$$\dot{l}_1(0) = 0, \quad l_1(0) = l_{1,0}, \quad \dot{l}_1(T) = 0, \quad l_1(T) = l_{1,T} \quad (6.3.2)$$

и так, чтобы усилие в тросе при  $0 \leq t \leq T$  было растягивающим. В частном случае длина троса может быть постоянной ( $l_1 = \text{const}$ ,  $\dot{l}_1 = 0$ ).



**Рис. 6.3.1.** Тело, подвешенное на тросе переменной длины, с подвижной точкой подвеса

Координаты центра тяжести тела при  $0 \leq t \leq T$  записываются в виде:

$$x_c = u + l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2, \quad z_c = l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2, \quad (6.3.3)$$

а в начальном и конечном положениях, соответственно:  $x_c = 0$ ,  $z_c = l_{1,0} + l_2$  при  $t = 0$ ;  $x_c = u_T$ ,  $z_c = l_{1,T} + l_2$  при  $t = T$ .

Задача заключается в следующем: найти управляющую силу  $P(t)$  или управляющее перемещение  $u(t)$ , при которых система за определенное время  $T$  перемещается из начального состояния покоя ( $t = 0$ ,  $x_c = 0$ ,  $z_c = l_{1,0} + l_2$ ,  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ ) в конечное состояние покоя ( $t = T$ ,  $x_c = u_T$ ,  $z_c = l_{1,T} + l_2$ ,  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ ) с устранением колебаний при  $t \geq T$ . Здесь эту задачу будем решать в линейной постановке для малых углов поворота троса и тела, полагая  $\sin \varphi \approx \varphi$ ,  $\cos \varphi \approx 1$ .

Уравнения движения

Уравнения движения рассматриваемой системы получим по методу Лагранжа в обобщенных координатах. Кинетическая энергия системы и вариация работы управляющей силы  $P$  и силы тяжести тела

$$K = \frac{1}{2}M(\dot{x}_c^2 + \dot{z}_c^2) + \frac{1}{2}J_c\dot{\varphi}_2^2, \quad \delta A = P\delta u + Mg\delta z_c$$

с учетом (6.3.3) записываются в виде:

$$\begin{aligned} K = \frac{1}{2}M\dot{u}^2 + \frac{1}{2}M[l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + l_2^2\dot{\varphi}_2^2 + 2\dot{u}\dot{l}_1\sin\varphi_1 + 2\dot{u}\dot{l}_1\dot{\varphi}_1\cos\varphi_1 + \\ + 2\dot{u}\dot{l}_2\dot{\varphi}_2\cos\varphi_2 + 2\dot{l}_1l_2\dot{\varphi}_2\sin(\varphi_1 - \varphi_2) + \\ + 2l_1l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)] + \frac{1}{2}J_c\dot{\varphi}_2^2; \end{aligned} \quad (6.3.4)$$

$$\delta A = P\delta u - Mg(l_1\sin\varphi_1\delta\varphi_1 + l_2\sin\varphi_2\delta\varphi_2),$$

где  $M$  и  $J_c$  – масса и центральный массовый момент инерции тела;  $g$  – удельная массовая сила тяжести, направленная вдоль оси  $z$ .

Линеаризованные по  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  уравнения движения системы для случая, когда управление осуществляется силой  $P(t)$ , записываются по методу Лагранжа с использованием (6.3.4):

$$M(\ddot{u} + l_1\ddot{\varphi}_1 + l_2\ddot{\varphi}_2 + 2\dot{l}_1\dot{\varphi}_1 + \ddot{l}_1\varphi_1) = P; \quad (6.3.5)$$

$$\ddot{u} + l_1\ddot{\varphi}_1 + l_2\ddot{\varphi}_2 + 2\dot{l}_1\dot{\varphi}_1 + g\varphi_1 = 0; \quad (6.3.6)$$

$$\ddot{u} + l_1\ddot{\varphi}_1 + (l_2 + \frac{J_c}{Ml_2})\ddot{\varphi}_2 + 2\dot{l}_1\dot{\varphi}_1 + \ddot{l}_1(\varphi_1 - \varphi_2) + g\varphi_2 = 0. \quad (6.3.7)$$

Уравнение (6.3.5) можно записать в виде

$$M \frac{d^2}{dt^2}(u + l_1\varphi_1 + l_2\varphi_2) = P \quad (6.3.8)$$

и последовательно проинтегрировать его дважды с учетом начальных и граничных условий (6.3.1). При этом получим условия для управляющих функций  $u(t)$  и  $P(t)$ :

$$\int_0^T \ddot{u}(t) dt = 0, \quad \int_0^T P(t) dt = 0; \quad (6.3.9)$$

$$u_T = \int_0^T \left( \int_0^t P(t_1) dt_1 \right) dt = - \int_0^T P(t) t dt.$$

Если из уравнения (6.3.5) выразить  $\ddot{u}$  и подставить его в уравнения (6.3.6), (6.3.7), то они, соответственно, запишутся в виде:

$$(g - \ddot{l}_1) \varphi_1 + \frac{1}{M} P = 0; \quad (6.3.10)$$

$$\frac{J_c}{Ml_2} \ddot{\varphi}_2 + (g - \ddot{l}_1) \varphi_2 + \frac{1}{M} P = 0.$$

Переменная длина троса  $l_1(t)$  должна задаваться такой, чтобы выполнялось условие  $g - \ddot{l}_1 > 0$ , при котором натяжение троса будет оставаться положительным. Управляющая сила  $P(t)$  ищется в виде финитной функции на интервале  $0 \leq t \leq T$ , которая при заданных  $T$  и  $u_T$  должна удовлетворять второму и третьему интегральным условиям (6.3.9) и, кроме того, должна быть такой, чтобы решения уравнений (6.3.8) удовлетворяли начальным и конечным условиям (6.3.1). Сила  $P(t)$ , как реакция на конце  $z = 0$  абсолютно гибкого натянутого троса при его малых изгибах (в линейном приближении), уравновешивается в основном за счет изменения натяжения троса при его малых угловых колебаниях. Поэтому эта сила в линейной постановке задачи должна быть достаточно малой. Соответственно, процесс конечного перемещения тяжелого груза на тросе переменной длины с подвижным подвесом должен быть достаточно медленным.

В случае кинематического управления рассматриваемой системой с помощью ускорения  $\ddot{u}(t)$  задача описывается уравнениями (6.3.6) и (6.3.7). Функция  $\ddot{u}(t)$  ищется в классе финитных функций при  $0 \leq t \leq T$ , удовлетворяющих первому условию (6.3.9) и решениям уравнений (6.3.6) и (6.3.7) при начальных и конечных условиях (6.3.1). При этом устанавливается зависимость  $\ddot{u}(t)$  от  $u_T$ , а реакция системы  $P(t)$  для оценки определяется из уравнения (6.3.5).

Рассматриваемая задача пассивного управления колебаниями системы имеет множество решений при различных управляющих финитных функциях  $P(t)$  или  $\ddot{u}(t)$  (или  $u(t)$ ) при  $0 \leq t \leq T$  из класса функций, удовлетворяющих интегральным условиям (6.3.9). При определении управляющих функций из этого класса прежде всего необходимо, чтобы они были технически приемлемы и удобны для практической реализации полученного расчетным путем пассивного управления с помощью «жестких» приводов, т.е. чтобы они были достаточно гладкими и не содержали высокочастотных составляющих, поскольку реальные приводы обладают упругостью и инерцией и в них могут возникнуть «ответные» колебания, искажающие расчетные управляющие воздействия.

Для минимизации энергетических затрат на управление различные подходящие управляющие функции можно сравнивать между собой по среднеквадратичной величине (норме) и по их максимальным значениям. При оптимальном управлении наряду с решением задачи управления необходимо минимизировать определенный функционал.

### Решение по методу Бубнова-Галеркина

Далее рассмотрим применение метода Бубнова-Галеркина для приближенного решения задачи кинематического управления перемещением твердого тела на тросе переменной длины с подвижным подвесом из начального положения покоя в конечное положение покоя, которая описывается дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами (6.3.6), (6.3.7) при начальных и конечных условиях (6.3.1). Введем безразмерное время и безразмерные параметры:

$$\tau = \frac{t}{T}, \quad \bar{l}_1 = \frac{l_1}{l_2}, \quad \bar{u} = \frac{u}{l_2}, \quad \lambda = \frac{gT^2}{l_2}, \quad \mu = 1 + \frac{J_c}{Ml_2^2}. \quad (6.3.11)$$

Уравнения (6.3.6), (6.3.7) запишем в безразмерном виде:

$$\begin{aligned} L_1(\varphi_1, \varphi_2; \bar{u}) &= \bar{l}_1 \varphi_1'' + \varphi_2'' + 2\bar{l}_1' \varphi_1' + \lambda \varphi_1 + \bar{u}'' = 0; \\ L_2(\varphi_1, \varphi_2; \bar{u}) &= \bar{l}_1 \varphi_1'' + \mu \varphi_2'' + 2\bar{l}_1' \varphi_1' + \bar{l}_1'' (\varphi_1 - \varphi_2) + \lambda \varphi_2 + \bar{u}'' = 0, \end{aligned} \quad (6.3.12)$$

где штрихом ( )' обозначаются производные по  $\tau$ ;  $0 \leq \tau \leq 1$ .

Будем считать, что длина троса при передвижении груза изменяется по закону

$$\bar{l}_1(\tau) = \bar{l}_{1,0} + \bar{\Delta}_1(\tau), \quad \bar{\Delta}_1(\tau) = \frac{1}{2}(\bar{l}_{1,T} - \bar{l}_{1,0})(1 - \cos \pi\tau). \quad (6.3.13)$$

Закон управления перемещением точки подвеса троса с учетом начальных и конечных условий (6.3.1) примем в виде:

$$\begin{aligned} \bar{u}''(\tau) &= \sum_{k=1}^N b_k \sin 2k\pi\tau, & \bar{u}'(\tau) &= \sum_{k=1}^N b_k \frac{1}{2k\pi} (1 - \cos 2k\pi\tau); \\ \bar{u}(\tau) &= \sum_{k=1}^N b_k \frac{1}{2k\pi} \left( \tau - \frac{1}{2k\pi} \sin 2k\pi\tau \right), \end{aligned} \quad (6.3.14)$$

где  $b_k$  – неизвестные коэффициенты;  $N$  – определенное в каждом конкретном случае число членов ряда. В конечный момент времени  $\tau = 1$  должно выполняться условие  $\bar{u}(1) = \bar{u}_T$ , которое дает одно уравнение для коэффициентов  $b_k$ :

$$\sum_{k=1}^N \frac{1}{2k\pi} b_k = \bar{u}_T. \quad (6.3.15)$$

Приближенное решение уравнений (6.3.12) с переменными коэффициентами при  $0 \leq \tau \leq 1$  будем искать в рядах

$$\varphi_i(\tau) = \sum_{r=0}^{s_i} C_{ir} \sigma_r(\tau), \quad i = 1, 2, \quad (6.3.16)$$

где  $C_{ir}$  – неизвестные коэффициенты;  $\sigma_r(\tau)$  – заданные аппроксимирующие функции, удовлетворяющие части условий (6.3.1) для функций  $\varphi_1(\tau)$  и  $\varphi_2(\tau)$ . Здесь для сравнения и оценки точности и сходимости решений будем использовать два различных набора аппроксимирующих функций:

- 1)  $\sigma_r(\tau) = \cos r\pi\tau - \cos(r+1)\pi\tau$ ,  $\sigma_r(0) = \sigma_r'(0) = \sigma_r'(1) = 0$ ,  $\sigma_r(1) = 2 \cos r\pi$ ;
- 2)  $\sigma_r(\tau) = \cos(r\pi\tau)$ ,  $\sigma_r'(0) = \sigma_r'(1) = 0$ ,  $\sigma_r(0) = 1$ ,  $\sigma_r(1) = \cos r\pi$ .

Удовлетворяя уравнения (6.3.12) по методу Бубнова-Галеркина как

$$\int_0^1 L_i(\varphi_1, \varphi_2; \bar{u}) \sigma_p(\tau) d\tau = 0, \quad p = 0, 1, \dots, s_i, \quad i = 1, 2$$

получим систему линейных алгебраических уравнений для коэффициентов  $C_{1r}$  и  $C_{2r}$ :

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{s_1} \alpha_{pr}^{(1)} C_{1r} + \sum_{r=0}^{s_2} \alpha_{pr}^{(2)} C_{2r} + \sum_{k=1}^N \gamma_p b_k &= 0, \quad p = 0, 1, \dots, s_1; \\ \sum_{r=0}^{s_1} \beta_{pr}^{(1)} C_{1r} + \sum_{r=0}^{s_2} \beta_{pr}^{(2)} C_{2r} + \sum_{k=1}^N \gamma_p b_k &= 0, \quad p = 0, 1, \dots, s_2, \end{aligned} \quad (6.3.17)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_{pr}^{(1)} &= \int_0^1 \bar{l}_1 \sigma_p \sigma_r'' d\tau + 2 \int_0^1 \bar{l}_1' \sigma_p \sigma_r' d\tau + \lambda \int_0^1 \sigma_p \sigma_r d\tau; \\ \alpha_{pr}^{(2)} &= \int_0^1 \sigma_p \sigma_r'' d\tau, \quad \gamma_p = \int_0^1 \sigma_p \sin 2k\pi\tau d\tau; \\ \beta_{pr}^{(1)} &= \int_0^1 \bar{l}_1 \sigma_p \sigma_r'' d\tau + 2 \int_0^1 \bar{l}_1' \sigma_p \sigma_r' d\tau + \int_0^1 \bar{l}_1'' \sigma_p \sigma_r d\tau; \\ \beta_{pr}^{(2)} &= \mu \int_0^1 \sigma_p \sigma_r'' d\tau - \int_0^1 \bar{l}_1'' \sigma_p \sigma_r d\tau + \lambda \int_0^1 \sigma_p \sigma_r d\tau. \end{aligned} \quad (6.3.18)$$

Система уравнений (6.3.17) должна быть дополнена уравнениями, представляющими невыполненные начальные и конечные условия для функций  $\varphi_1(\tau)$  и  $\varphi_2(\tau)$ , которым не удовлетворяют заданные функции  $\sigma_r(\tau)$ , а также – уравнением (6.3.15).

1) При использовании первого набора аппроксимирующих функций  $\sigma_r(\tau) = \cos r\pi\tau - \cos(r+1)\pi\tau$  дополнительные уравнения получаются из условий  $\varphi_i(1) = 0$  при  $i = 1, 2$ :

$$\sum_{r=0}^{s_i} C_{ir} \sigma_r(1) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (6.3.19)$$

В этом случае будем иметь  $(s_1 + 1) + (s_2 + 1) + 2$  уравнений (6.3.17), (6.3.19) для коэффициентов  $C_{1r}$  ( $r = 0, 1, \dots, s_1$ ),  $C_{2r}$  ( $r = 0, 1, \dots, s_2$ ) и  $b_k$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ). К этим уравнениям добавляем еще уравнение (6.3.15). Тогда будем иметь систему  $(s_1 + 1) + (s_2 + 1) + 3$  уравнений, из которых наряду с коэффициентами  $C_{1r}$ ,  $C_{2r}$  можно определить  $N = 3$  неизвестных коэффициентов  $b_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ).

2) При использовании второго набора аппроксимирующих функций  $\sigma_r(\tau) = \cos r\pi\tau$  дополнительные уравнения получаются из условий  $\varphi_i(0) = 0$ ,  $\varphi_i(1) = 0$  при  $i = 1, 2$ :

$$\sum_{r=0}^{s_i} C_{ir} \sigma_r(0) = 0; \quad \sum_{r=0}^{s_i} C_{ir} \sigma_r(1) = 0; \quad i = 1, 2. \quad (6.3.20)$$

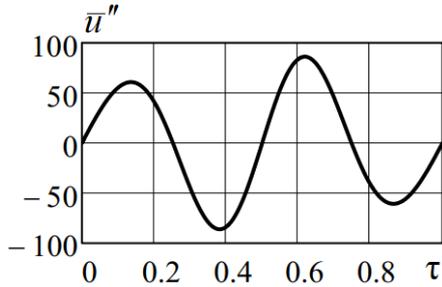
Добавляя к системе уравнений (6.3.17), (6.3.19) уравнение (6.3.15) будем иметь систему  $(s_1 + 1) + (s_2 + 1) + 5$  уравнений, из которой наряду с коэффициентами  $C_{1r}$  ( $r = 0, 1, \dots, s_1$ ),  $C_{2r}$  ( $r = 0, 1, \dots, s_2$ ) можно определить  $N = 5$  неизвестных коэффициентов  $b_k$  ( $k = 1, 2, 3, 4, 5$ ).

### Примеры расчета для системы с тросом постоянной длины

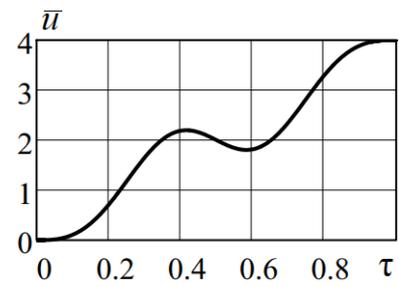
Рассмотрим систему со следующими безразмерными параметрами, общими для всех расчетных случаев:  $\bar{l}_1 = 4$ ;  $\lambda = 160$ ;  $\mu = 4/3$ ;  $\bar{u}_T = 4$ .

Пример №1. При использовании первого набора аппроксимирующих функций  $\sigma_r(\tau) = \cos r\pi\tau - \cos(r + 1)\pi\tau$  при  $s_1 = s_2 = 5$  значения коэффициентов  $b_k$  в законе управления (6.3.14) для  $n = 3$  соответственно равны:  $b_1 = -7,988$ ;  $b_2 = 72,978$ ;  $b_3 = -10,103$ . На рис. 6.3.2 и рис. 6.3.3 представлены полученные графики этого закона для ускорения  $\bar{u}''(\tau)$  и перемещения  $\bar{u}(\tau)$ , соответственно. На рис. 6.3.4 – 6.3.7 представлены результаты решения для углов поворота троса и подвешенного тела, а также для их безразмерных угловых скоростей соответственно. Здесь и далее на графиках углов поворота и угловых скоростей сплошной линией показано решение по методу Бубнова-Галеркина, а пунктирной линией – численное решение по стандартной программе, реализующей метод Адамса. Если на графиках пунктирные линии отсутствуют, то это означает, что в принятом масштабе они совпадают со сплошными линиями. Для оценки точности решения вычисляются разности значений по углам  $\varphi_1(\tau)$  и  $\varphi_2(\tau)$ , а также по

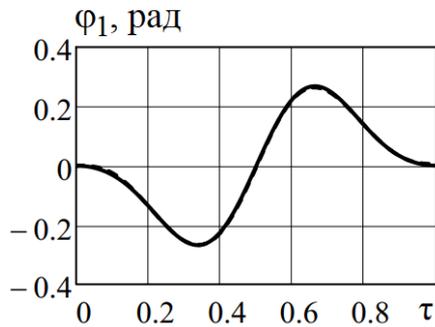
скоростям  $\varphi'_1(\tau)$  и  $\varphi'_2(\tau)$ , при  $\tau=1$  по методу Бубнова-Галеркина и Адамса соответственно. Здесь и далее эти разности обозначаются знаком  $\Delta$ . Для данного расчетного случая эти значения равны:  $\Delta\varphi_1(1) = -5,927 \cdot 10^{-3}$ ;  $\Delta\varphi_2(1) = -0,012$ ;  $\Delta\varphi'_1(1) = -6,753 \cdot 10^{-3}$ ;  $\Delta\varphi'_2(1) = -0,041$ .



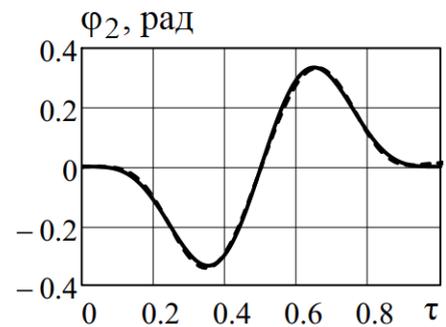
**Рис. 6.3.2.** Закон управления по ускорению, 1-й набор,  $s_1 = s_2 = 5$



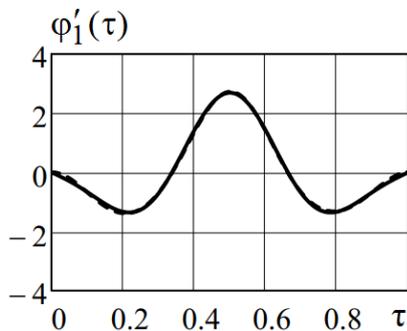
**Рис. 6.3.3.** Закон управления по перемещению, 1-й набор,  $s_1 = s_2 = 5$



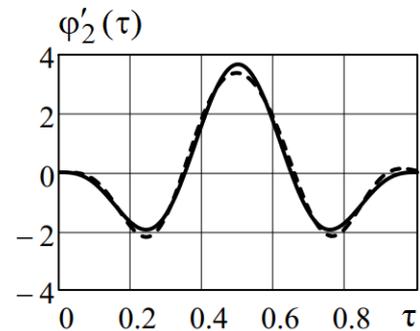
**Рис. 6.3.4.** Угол поворота троса, 1-й набор,  $s_1 = s_2 = 5$



**Рис. 6.3.5.** Угол поворота тела, 1-й набор,  $s_1 = s_2 = 5$



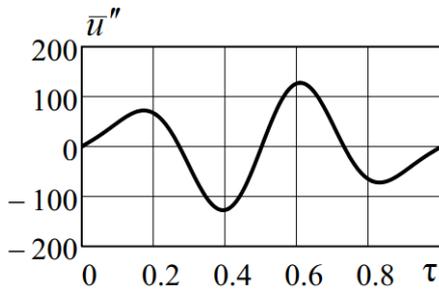
**Рис. 6.3.6.** Угловая скорость троса, 1-й набор,  $s_1 = s_2 = 5$



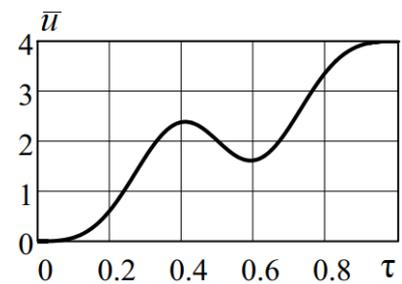
**Рис. 6.3.7.** Угловая скорость тела, 1-й набор,  $s_1 = s_2 = 5$

Также были получены решения с использованием первого набора аппроксимирующих функций  $\sigma_r(\tau) = \cos r\pi\tau - \cos(r+1)\pi\tau$  при  $s_1 = s_2 = 11$ ,  $n = 3$ . Значения коэффициентов  $b_k$  в (6.3.14):  $b_1 = -8,861$ ;  $b_2 = 91,952$ ;  $b_3 = -35,948$ . Для этого расчетного случая на рис. 6.3.8 и рис. 6.3.9 представлены графики закона управления по ускорению  $\bar{u}''(\tau)$  и перемещению  $\bar{u}(\tau)$ , а на рис. 6.3.10 – 6.3.13 – графики для углов поворота троса и подвешенного тела, а также для их безразмерных угловых скоростей соответственно. В данном расчетном случае:

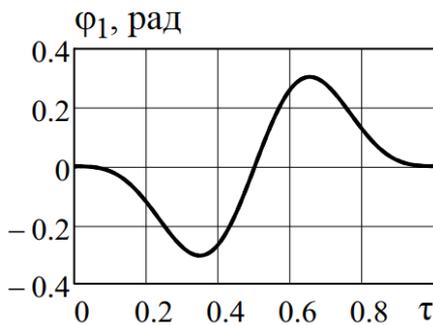
$$\Delta\varphi_1(1) = -7,385 \cdot 10^{-4}; \quad \Delta\varphi_2(1) = 2,238 \cdot 10^{-4}; \quad \Delta\varphi'_1(1) = -2,271 \cdot 10^{-3};$$

$$\Delta\varphi'_2(1) = 3,575 \cdot 10^{-3}.$$


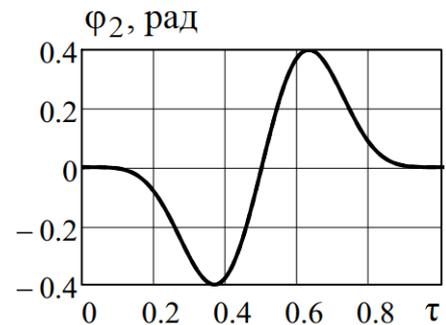
**Рис. 6.3.8.** Закон управления по ускорению, 1-й набор,  $s_1 = s_2 = 11$



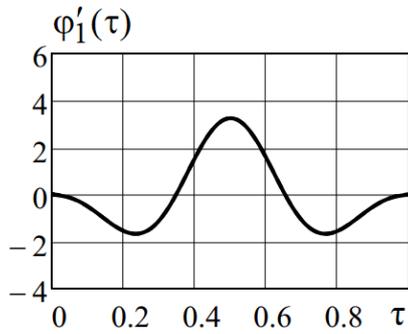
**Рис. 6.3.9.** Закон управления по перемещению, 1-й набор,  $s_1 = s_2 = 11$



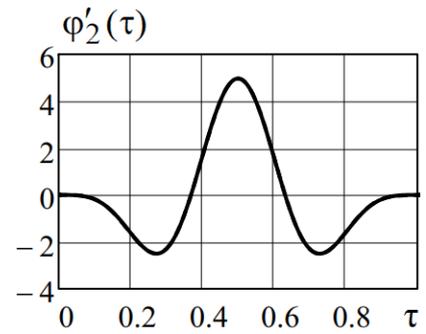
**Рис. 6.3.10.** Угол поворота троса, 1-й набор,  $s_1 = s_2 = 11$



**Рис. 6.3.11.** Угол поворота тела, 1-й набор,  $s_1 = s_2 = 11$

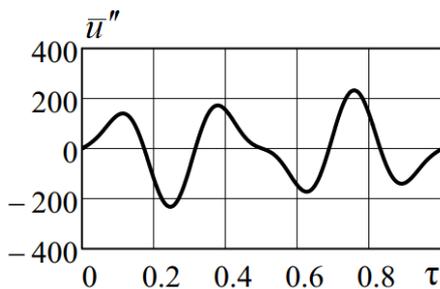


**Рис. 6.3.12.** Угловая скорость троса, 1-й набор,  $s_1 = s_2 = 11$

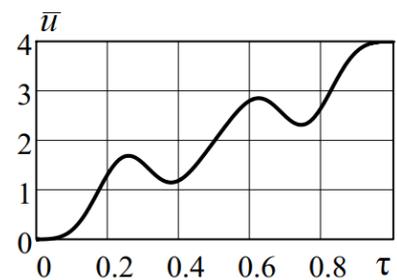


**Рис. 6.3.13.** Угловая скорость тела, 1-й набор,  $s_1 = s_2 = 11$

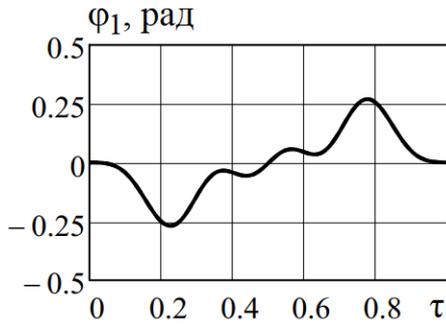
Пример №2. При использовании второго набора аппроксимирующих функций  $\varphi_r(\tau) = \cos(r\pi\tau)$  при  $s_1 = s_2 = 15$  были получены решения той же самой задачи, как в Примере №1. Значения коэффициентов в законе управления (6.3.14):  $b_1 = -6,901$ ;  $b_2 = -18,592$ ;  $b_3 = 154,253$ ;  $b_4 = 15,490$ ;  $b_5 = -69,801$ . На рис. 6.3.14 и рис. 6.3.15 показаны графики закона управления для Примера №2 при  $n = 5$  для ускорения  $\bar{u}''(\tau)$  и перемещения  $\bar{u}(\tau)$ . Для этого же расчетного случая на рис. 6.3.16 – 6.3.19 представлены графики углов поворота троса и подвешенного тела, соответственно, а также – их угловых скоростей. В данном случае имеем:  $\Delta\varphi_1(1) = -3,488 \cdot 10^{-4}$ ;  $\Delta\varphi_2(1) = 5,402 \cdot 10^{-5}$ ;  $\Delta\varphi_1'(1) = -1,022 \cdot 10^{-3}$ ;  $\Delta\varphi_2'(1) = 1,397 \cdot 10^{-3}$ .



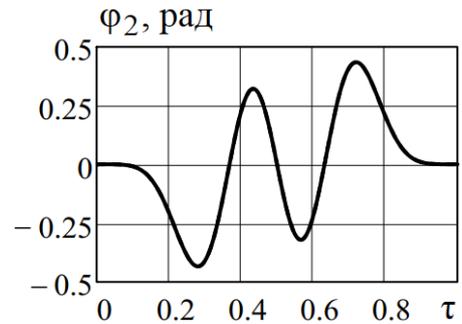
**Рис. 6.3.14.** Закон управления по ускорению, 2-й набор,  $s_1 = s_2 = 15$



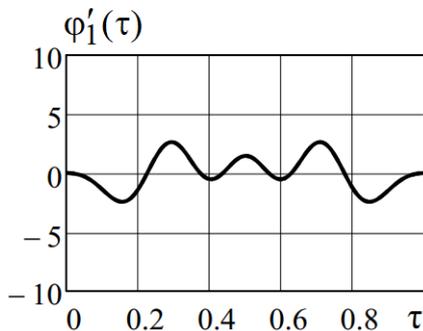
**Рис. 6.3.15.** Закон управления по перемещению, 2-й набор,  $s_1 = s_2 = 15$



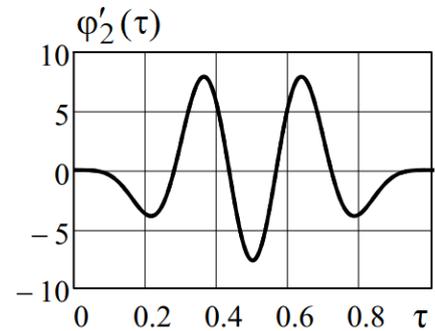
**Рис. 6.3.16.** Угол поворота троса, 2-й набор,  $s_1 = s_2 = 15$



**Рис. 6.3.17.** Угол поворота тела, 2-й набор,  $s_1 = s_2 = 15$



**Рис. 6.3.18.** Угловая скорость троса, 2-й набор,  $s_1 = s_2 = 15$



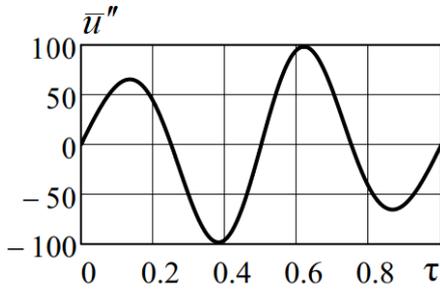
**Рис. 6.3.19.** Угловая скорость тела, 2-й набор,  $s_1 = s_2 = 15$

### Примеры расчета для системы с тросом переменной длины

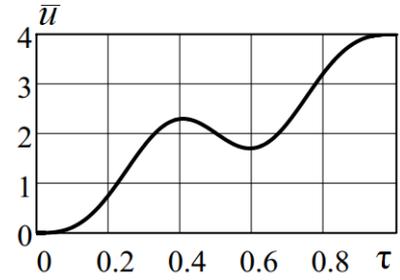
Длина троса изменяется по закону (6.3.13). Безразмерные параметры системы:  $\bar{l}_{1,0} = 4$ ;  $\bar{l}_{1,T} = 5$ ;  $\lambda = 160$ ;  $\mu = 4/3$ ;  $\bar{u}_T = 4$ .

Пример №1. При использовании первого набора аппроксимирующих функций  $\sigma_r(\tau) = \cos r\pi\tau - \cos(r+1)\pi\tau$  при  $s_1 = s_2 = 5$  значения коэффициентов  $b_k$  в законе управления (6.3.14) для  $n=3$  соответственно равны:  $b_1 = -11,642$ ;  $b_2 = 81,407$ ;  $b_3 = -11,787$ . На рис. 6.3.20 и рис. 6.3.21 представлены полученные графики этого закона для ускорения  $\bar{u}''(\tau)$  и перемещения  $\bar{u}(\tau)$ . На рис. 6.3.22 – 6.3.25 представлены результаты решения для углов поворота троса и подвешенного тела, а также для их безразмерных угловых скоростей

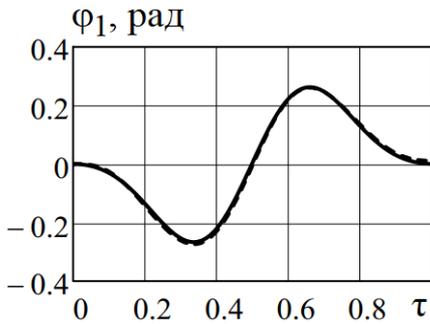
соответственно. Для данного расчетного случая:  $\Delta\varphi_1(1) = -0,011$ ;  $\Delta\varphi_2(1) = -0,021$ ;  
 $\Delta\varphi'_1(1) = 0,010$ ;  $\Delta\varphi'_2(1) = -0,033$ .



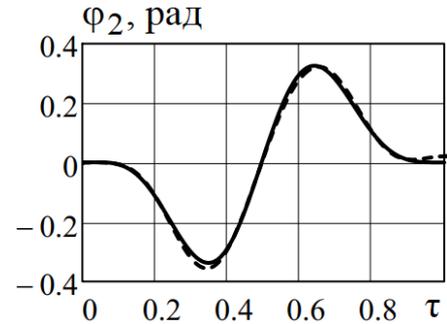
**Рис. 6.3.20.** Закон управления по ускорению, 1-й набор,  $s_1 = s_2 = 5$



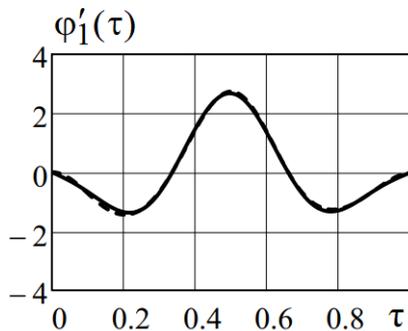
**Рис. 6.3.21.** Закон управления по перемещению, 1-й набор,  $s_1 = s_2 = 5$



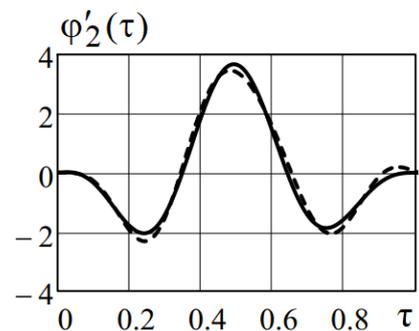
**Рис. 6.2.22.** Угол поворота троса, 1-й набор,  $s_1 = s_2 = 5$



**Рис. 6.2.23.** Угол поворота тела, 1-й набор,  $s_1 = s_2 = 5$



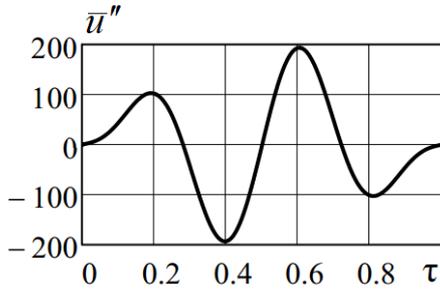
**Рис. 6.2.24.** Угловая скорость троса, 1-й набор,  $s_1 = s_2 = 5$



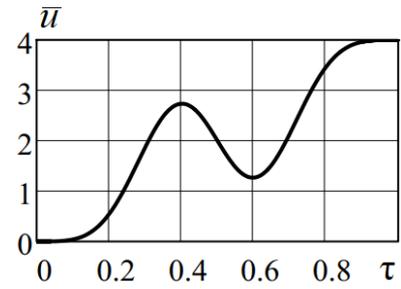
**Рис. 6.2.25.** Угловая скорость тела, 1-й набор,  $s_1 = s_2 = 5$

Также были получены решения с использованием первого набора аппроксимирующих функций  $\sigma_r(\tau) = \cos r\pi\tau - \cos(r+1)\pi\tau$  при  $s_1 = s_2 = 11$ ,  $n = 3$ .

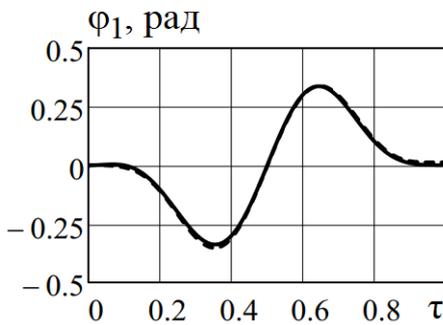
Значения коэффициентов  $b_k$  в (6.3.14):  $b_1 = -13,256$ ;  $b_2 = 123,965$ ;  $b_3 = -70,781$ . Для этого расчетного случая на рис. 6.3.26 и рис. 6.3.27 представлены графики закона управления по ускорению  $\bar{u}''(\tau)$  и перемещению  $\bar{u}(\tau)$ , а на рис. 6.3.28 – 6.3.31 – графики для углов поворота троса и подвешенного тела, а также – для их безразмерных угловых скоростей соответственно. В данном случае  $\Delta\varphi_1(1) = -0,012$ ;  $\Delta\varphi_2(1) = 5,050 \cdot 10^{-3}$ ;  $\Delta\varphi'_1(1) = 0,057$ ;  $\Delta\varphi'_2(1) = -0,105$ .



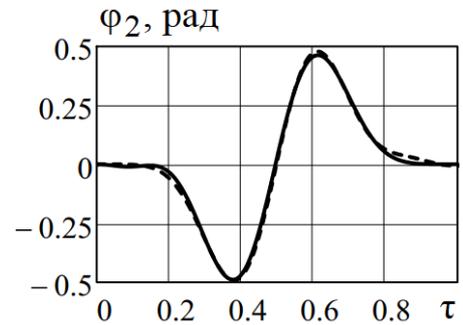
**Рис. 6.3.26.** Закон управления по ускорению, 1-й набор,  $s_1 = s_2 = 11$



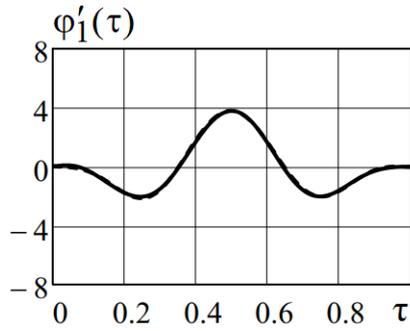
**Рис. 6.3.27.** Закон управления по перемещению, 1-й набор,  $s_1 = s_2 = 11$



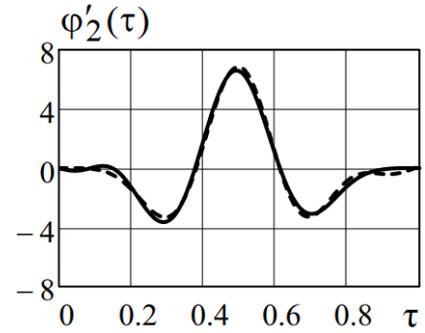
**Рис. 6.3.28.** Угол поворота троса, 1-й набор,  $s_1 = s_2 = 11$



**Рис. 6.3.29.** Угол поворота тела, 1-й набор,  $s_1 = s_2 = 11$

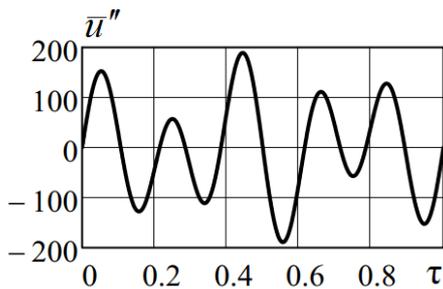


**Рис. 6.3.30.** Угловая скорость троса, 1-й набор,  $s_1 = s_2 = 11$

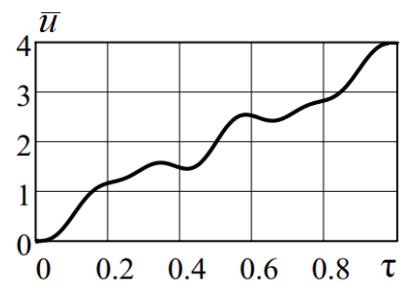


**Рис. 6.3.31.** Угловая скорость тела, 1-й набор,  $s_1 = s_2 = 11$

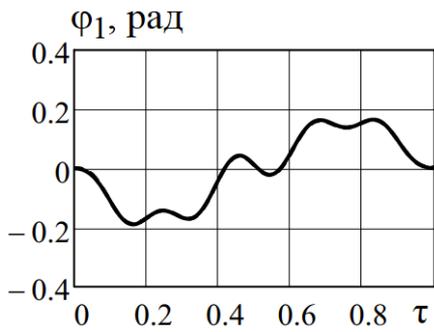
Пример №2. При использовании второго набора аппроксимирующих функций  $\varphi_r(\tau) = \cos(r\pi\tau)$  при  $s_1 = s_2 = 15$  были получены решения той же самой задачи, как в Примере №1. Значения коэффициентов в законе управления (6.3.14):  $b_1 = -9,264$ ;  $b_2 = -16,033$ ;  $b_3 = 58,514$ ;  $b_4 = -8,338$ ;  $b_5 = 124,962$ . На рис. 6.3.32 и рис. 6.3.33 показаны графики закона управления для Примера №2 при  $n = 5$  для ускорения  $\bar{u}''(\tau)$  и перемещения  $\bar{u}(\tau)$ . Для этого же расчетного случая на рис. 6.3.34 – 6.3.37 представлены графики углов поворота троса и подвешенного тела, соответственно, а также – их угловых скоростей. В данном случае имеем:  $\Delta\varphi_1(1) = -3,347 \cdot 10^{-3}$ ;  $\Delta\varphi_2(1) = 9,691 \cdot 10^{-4}$ ;  $\Delta\varphi'_1(1) = -0,016$ ;  $\Delta\varphi'_2(1) = 0,034$ .



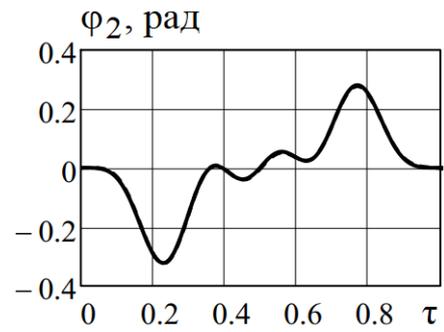
**Рис. 6.3.32.** Закон управления по ускорению, 2-й набор,  $s_1 = s_2 = 15$



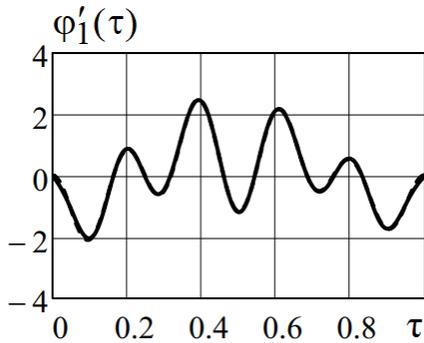
**Рис. 6.3.33.** Закон управления по перемещению, 2-й набор,  $s_1 = s_2 = 15$



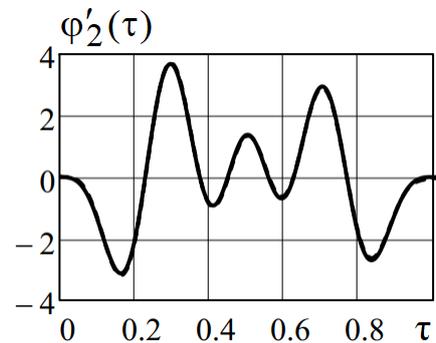
**Рис. 6.3.34.** Угол поворота троса, 2-й набор,  $s_1 = s_2 = 15$



**Рис. 6.3.35.** Угол поворота тела, 2-й набор,  $s_1 = s_2 = 15$



**Рис. 6.3.36.** Угловая скорость троса, 2-й набор,  $s_1 = s_2 = 15$



**Рис. 6.3.37.** Угловая скорость тела, 2-й набор,  $s_1 = s_2 = 15$

### 6.3.2. Решение задачи управления малыми колебаниями математического маятника переменной длины при конечном передвижении точки подвеса

#### Постановка задачи

Рассматривается механическая система, представляющая собой математический маятник переменной длины, расположенный на подвижном подвесе (рис. 6.3.38).

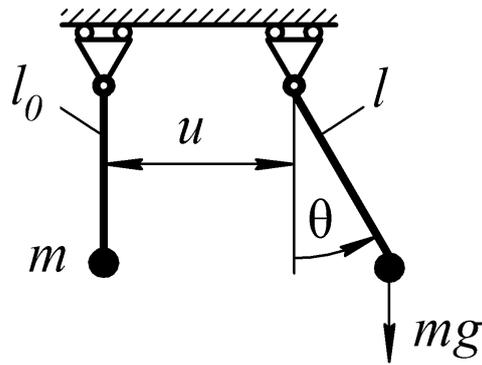


Рис. 6.3.38. Общий вид рассматриваемой системы

Движение маятника будем характеризовать углом его поворота  $\theta(t)$  относительно невозмущенного положения и перемещением  $u(t)$  его точки подвеса, причем колебания маятника будут нелинейными, если  $|\theta(t)| > 0,5$  рад. Длина маятника определяется начальным значением  $l_0$  и функцией  $l(t)$  изменения по времени.

Нелинейное дифференциальное уравнение колебаний маятника на подвижном подвесе записывается в виде

$$\frac{l}{l_0} \ddot{\theta} + 2 \frac{\dot{l}}{l_0} \dot{\theta} + \frac{1}{l_0} \ddot{u} \cos \theta + \frac{g}{l_0} \sin \theta = 0$$

или с использованием безразмерного времени  $\tau = t/T$ :

$$\frac{l}{l_0} \frac{d^2 \theta}{d\tau^2} + \frac{2}{l_0} \frac{dl}{d\tau} \frac{d\theta}{d\tau} + \frac{1}{l_0} \frac{d^2 u}{d\tau^2} \cos \theta + T^2 \frac{g}{l_0} \sin \theta = 0, \quad (6.3.21)$$

где  $T$  – заданное время конечного передвижения подвеса на заданное расстояние  $u_T$ .

Начальные и конечные условия для угла поворота  $\theta$  и перемещения точки подвеса  $u$  маятника с учетом гашения колебаний в момент остановки:

$$\begin{aligned} \theta(0) = \frac{d\theta}{d\tau}(0) = \theta(1) = \frac{d\theta}{d\tau}(1) = 0; \\ u(0) = \frac{du}{d\tau}(0) = \frac{du}{d\tau}(1) = 0, \quad u(1) = u_T. \end{aligned} \quad (6.3.22)$$

Управляющую функцию  $\frac{1}{l_0} \frac{d^2 u}{d\tau^2}$  при кинематическом управлении конечным передвижением при  $0 \leq \tau \leq 1$  будем задавать в виде ряда:

$$\frac{1}{l_0} \frac{d^2 u}{d\tau^2} = \mu(\tau) = \sum_{k=1}^r b_k \sin(k2\pi\tau), \quad k=1,2,\dots, \quad (6.3.23)$$

где  $b_k$  – неизвестные коэффициенты. При этом с учетом (6.3.22) и (6.3.23) будем иметь:

$$\sum_{k=1}^r \frac{1}{k} b_k = \frac{2\pi}{l_0} u_T. \quad (6.3.24)$$

Неизвестную функцию  $\theta(\tau)$  по методу Бубнова-Галеркина будем искать в виде ряда:

$$\theta(\tau) = \sum_{r=0}^s C_r \varphi_r(\tau), \quad (6.3.25)$$

где  $C_r$  – коэффициенты, подлежащие определению;  $\varphi_r(\tau)$  – заданные функции безразмерного времени, которые могут лишь частично удовлетворять начальным и граничным условиям (6.3.22) по  $\theta(\tau)$ .

Например, если  $\varphi_r(\tau) = \cos[r\pi\tau] - \cos[(r+1)\pi\tau]$ ,  $r=0,1,\dots,s$ , то эта функция удовлетворяет условиям  $\varphi_r(0) = \frac{d\varphi_r}{d\tau}(0) = \frac{d\varphi_r}{d\tau}(1) = 0$ ,  $\varphi_r(1) = 2\cos(r\pi)$ . При этом

$\theta(0) = \frac{d\theta}{d\tau}(0) = \frac{d\theta}{d\tau}(1) = 0$ , а для выполнения условия  $\theta(1) = 0$  необходимо записать

дополнительное уравнение (6.3.25):

$$\sum_{r=0}^s C_r \varphi_r(1) = 0. \quad (6.3.26)$$

Вместо предложенной выше функции  $\varphi_r(\tau)$  можно взять более простые тригонометрические функции. Например,  $\varphi_r(\tau) = \cos(r\pi\tau)$ ,  $r=0,1,\dots,s$ , которая удовлетворяет условиям  $\frac{d\varphi_r}{d\tau} = 0$  при  $\tau=0$  и  $\tau=1$ . Для выполнения всех условий

(6.3.22) на основании (6.3.25) в данном случае записываются два дополнительных уравнения:

$$\sum_{r=0}^s C_r \varphi_r(0) = 0, \quad \sum_{r=0}^s C_r \varphi_r(1) = 0. \quad (6.3.27)$$

Если представить  $\varphi_r(\tau) = \sin(r\pi\tau)$ ,  $r = 1, 2, \dots, s$ , для которой выполняются условия  $\varphi_r(0) = \varphi_r(1) = 0$ , то для выполнения всех условий (6.3.22) на основании (6.3.25), также как и в прошлом случае, записываются два дополнительных уравнения:

$$\sum_{r=1}^s C_r \frac{d\varphi_r}{d\tau}(0) = 0, \quad \sum_{r=1}^s C_r \frac{d\varphi_r}{d\tau}(1) = 0. \quad (6.3.28)$$

Во всех случаях полученное решение задачи по методу Бубнова-Галеркина сравнивается с численным решением по методу Адамса с использованием стандартной программы расчета. Метод Адамса является наиболее устойчивым и точным для интегрирования различных нелинейных дифференциальных уравнений.

#### Линейная задача для маятника постоянной длины

Рассмотрим уравнение (6.3.21) для маятника постоянной длины  $l(t) = l_0$  при малых углах  $\theta(\tau)$  ( $\sin \theta \approx \theta$ ,  $\cos \theta \approx 1$ ,  $|\theta| < 0,5$  рад):

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + v^2\theta + \mu(\tau) = 0, \quad v^2 = T^2 \frac{g}{l_0}. \quad (6.3.29)$$

Следуя методу Бубнова-Галеркина, уравнение (6.3.29) на интервале  $0 \leq \tau \leq 1$  следует умножить на  $\varphi_p(\tau)$ ,  $p = 0, 1, \dots, s$  и проинтегрировать от 0 до 1. В результате получим систему линейных алгебраических уравнений для коэффициентов  $C_r$  и  $b_k$ :

$$\sum_{r=0}^s A_{pr} C_r + \sum_{k=1}^r \gamma_{pk} b_k = 0, \quad (6.3.30)$$

где

$$A_{pr} = \alpha_{pr} + v^2 \beta_{pr};$$

$$\alpha_{pr} = \int_0^1 \varphi_p \frac{d^2 \varphi_r}{d\tau^2} d\tau, \quad \beta_{pr} = \int_0^1 \varphi_p \varphi_r d\tau, \quad \gamma_{pk} = \int_0^1 \varphi_p \sin(k2\pi\tau) d\tau.$$

К уравнениям (6.3.30) необходимо добавить условие (6.3.24) и одну из групп уравнений (6.3.26), (6.3.27) или (6.3.28), в зависимости от выбранной аппроксимирующей функции.

Для разрешимости полученной системы уравнений порядка  $(s+1)+1+1$  для  $\varphi_r(\tau) = \cos[r\pi\tau] - \cos[(r+1)\pi\tau]$  необходимо взять  $k=1,2$ . Для  $\varphi_r(\tau) = \cos(r\pi\tau)$  порядок полученной системы составит  $(s+1)+1+2$ , поэтому  $k=1,2,3$ , а для  $\varphi_r(\tau) = \sin(r\pi\tau)$  порядок будет  $s+1+2$  ( $r=1,2,\dots,s$ ) и  $k=1,2,3$ . Во всех этих случаях значение  $s$  числа аппроксимирующих функций может быть любым.

### Линейная задача для маятника переменной длины

На основании (6.3.21) линейное дифференциальное уравнение для маятника переменной длины запишется в виде:

$$\frac{l}{l_0} \frac{d^2 \theta}{d\tau^2} + \frac{2}{l_0} \frac{dl}{d\tau} \frac{d\theta}{d\tau} + v^2 \theta + \mu(\tau) = 0. \quad (6.3.31)$$

Пусть изменение длины маятника происходит по закону

$$\frac{l}{l_0} = 1 + \delta \frac{1}{2} (1 - \cos \pi\tau) \quad \text{при} \quad 0 \leq \tau \leq 1,$$

где  $\delta$  – относительное приращение длины при  $\tau = 1$ .

Следуя методу Бубнова-Галеркина уравнение (6.3.31) сводится к следующей системе линейных алгебраических уравнений ( $p = 0,1,\dots,s$ ):

$$\sum_{r=0}^s B_{pr} C_r + \sum_{k=1}^r \gamma_{pk} b_k = 0, \quad (6.3.32)$$

где

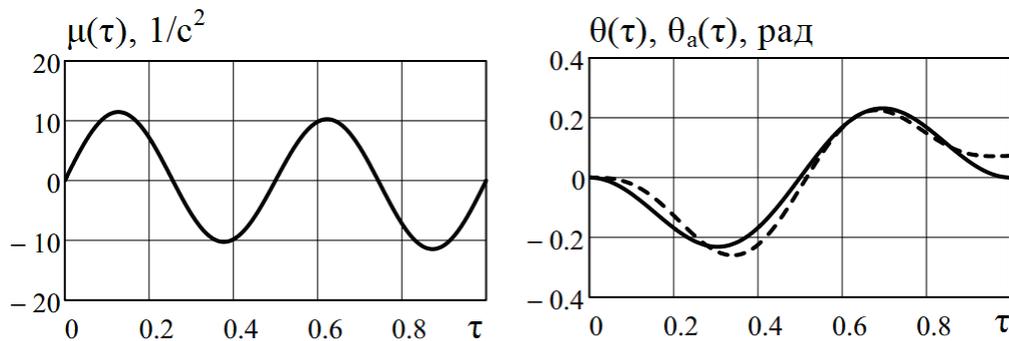
$$B_{pr} = \varepsilon_{pr} + v^2 \beta_{pr}, \quad \varepsilon_{pr} = \int_0^1 \varphi_p \left[ \frac{l}{l_0} \frac{d^2 \varphi_r}{d\tau^2} + \frac{2}{l_0} \frac{dl}{d\tau} \frac{d\varphi_r}{d\tau} \right] d\tau.$$

Система (6.3.32) дополняется уравнением (6.3.24) и одной из групп уравнений (6.3.26) – (6.3.28) в зависимости от вида принятой аппроксимирующей функции  $\varphi_r(\tau)$ .

### Примеры расчета для маятника постоянной длины

Рассматривается маятник со следующими параметрами:  $l_0 = 1$  м;  $u_T = 1$  м;  $T = 2$  с.

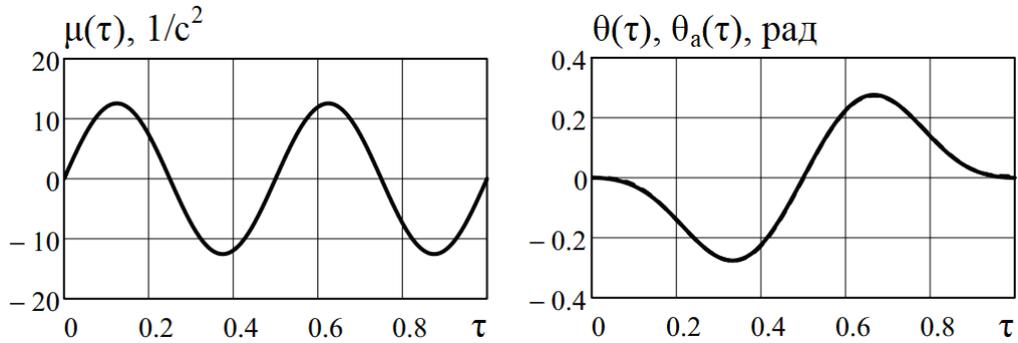
Пример №1. При  $\varphi_r(\tau) = \cos[r\pi\tau] - \cos[(r+1)\pi\tau]$  для  $s = 2$  значения коэффициентов  $C_r$  и  $b_k$  соответственно равны:  $C_0 = -5,359 \cdot 10^{-16}$ ;  $C_1 = -0,150$ ;  $C_2 = -0,150$ ;  $b_1 = 0,854$ ;  $b_2 = 10,858$ . На рис. 6.3.39 представлены результаты решения задачи: управляющая функция  $\mu(\tau)$  и угол поворота маятника  $\theta(\tau)$  по сравнению с численным решением по методу Адамса  $\theta_a(\tau)$ , соответственно. Здесь и далее сплошной линией на графиках угла поворота обозначено решение по методу Бубнова-Галеркина, пунктирной линией – решение по методу Адамса. Заметим, что в этом случае значение  $|\theta(1) - \theta_a(1)|$ , которое показывает сходимость решения по методу Бубнова-Галеркина, равно 0,072 рад.



**Рис. 6.3.39.** Результаты решения задачи для примера №1 и  $s = 2$

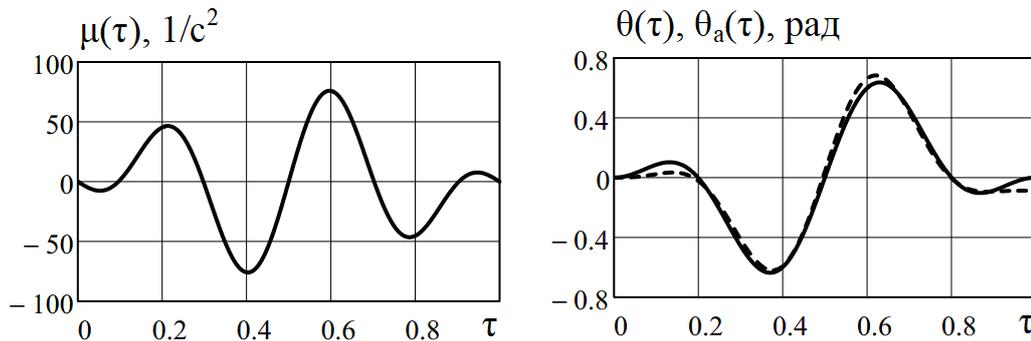
При  $s = 6$  значения коэффициентов  $C_r$  и  $b_k$ :  $C_0 = -1,402 \cdot 10^{-16}$ ;  $C_1 = -0,145$ ;  $C_2 = -0,145$ ;  $C_3 = -0,039$ ;  $C_4 = -0,039$ ;  $C_5 = -0,004$ ;  $C_6 = -0,004$ ;  $b_1 = 0,003$ ;

$b_2 = 12,560$ . На рис. 6.3.40 показаны управляющая функция  $\mu(\tau)$  и угол поворота маятника  $\theta(\tau)$  по сравнению с численным решением по методу Адамса  $\theta_a(\tau)$ , причем  $|\theta(1) - \theta_a(1)| = 4,973 \cdot 10^{-3}$  рад.



**Рис. 6.3.40.** Результаты решения задачи для примера №1 и  $s = 6$

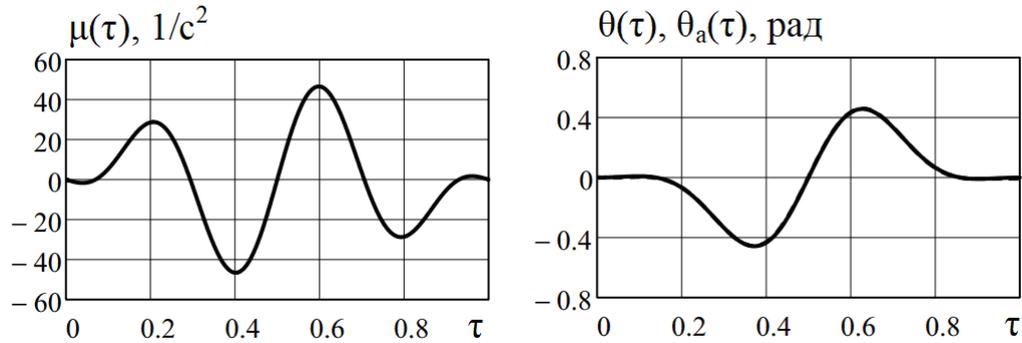
Пример № 2. При  $\varphi_r(\tau) = \cos[r\pi\tau]$  для  $s = 5$  значения коэффициентов  $C_r$  и  $b_k$  соответственно равны:  $C_0 = 9,614 \cdot 10^{-17}$ ;  $C_1 = -0,149$ ;  $C_2 = 8,882 \cdot 10^{-16}$ ;  $C_3 = 0,388$ ;  $C_4 = -1,081 \cdot 10^{-15}$ ;  $C_5 = -0,239$ ;  $b_1 = -1,187$ ;  $b_2 = 40,576$ ;  $b_3 = -38,453$ . На рис. 6.3.41 представлены результаты решения задачи: управляющая функция  $\mu(\tau)$  и угол поворота маятника  $\theta(\tau)$  по сравнению с численным решением по методу Адамса  $\theta_a(\tau)$ , в этом случае  $|\theta(1) - \theta_a(1)| = 0,088$  рад.



**Рис. 6.3.41.** Результаты решения задачи для примера №2 и  $s = 5$

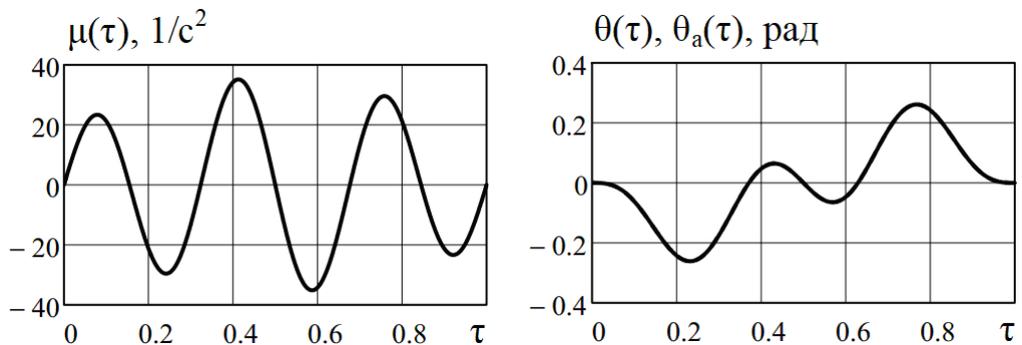
При  $s = 7$  значения коэффициентов  $C_r$  и  $b_k$ :  $C_0 = 6,171 \cdot 10^{-17}$ ;  $C_1 = -0,151$ ;  $C_2 = 2,330 \cdot 10^{-16}$ ;  $C_3 = 0,278$ ;  $C_4 = -5,661 \cdot 10^{-16}$ ;  $C_5 = -0,147$ ;  $C_6 = 1,958 \cdot 10^{-16}$ ;

$C_7 = -0,019$ ;  $b_1 = -0,146$ ;  $b_2 = 27,261$ ;  $b_3 = -21,604$ . На рис. 6.3.42 показаны управляющая функция  $\mu(\tau)$  и угол поворота маятника  $\theta(\tau)$  по сравнению с численным решением по методу Адамса  $\theta_a(\tau)$ , причем  $|\theta(1) - \theta_a(1)| = 6,028 \cdot 10^{-3}$  рад.



**Рис. 6.3.42.** Результаты решения задачи для примера №2 и  $s = 7$

Пример № 3. При  $\varphi_r(\tau) = \sin[r\pi\tau]$  для  $s = 6$  значения коэффициентов  $C_r$  и  $b_k$  соответственно равны:  $C_1 = 6,654 \cdot 10^{-16}$ ;  $C_2 = -0,162$ ;  $C_3 = -1,930 \cdot 10^{-16}$ ;  $C_4 = -0,057$ ;  $C_5 = -2,135 \cdot 10^{-16}$ ;  $C_6 = 0,092$ ;  $b_1 = -0,045$ ;  $b_2 = -6,812$ ;  $b_3 = 29,204$ . На рис. 6.3.43 представлены результаты решения задачи: управляющая функция  $\mu(\tau)$  и угол поворота маятника  $\theta(\tau)$  по сравнению с численным решением по методу Адамса  $\theta_a(\tau)$ , в этом случае  $|\theta(1) - \theta_a(1)| = 4,908 \cdot 10^{-6}$  рад.

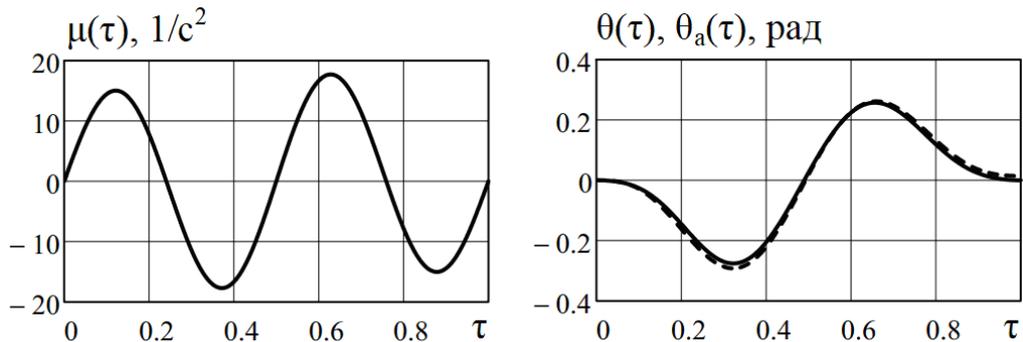


**Рис. 6.3.43.** Результаты решения задачи для примера №3 и  $s = 6$

Примеры расчета для маятника переменной длины

Рассматривается маятник со следующими параметрами:  $l_0 = 1$  м;  $u_T = 1$  м;  $T = 2$  с;  $\delta = 0,5$ . Аппроксимирующая функция задается в виде  $\varphi_r(\tau) = \cos[r\pi\tau] - \cos[(r+1)\pi\tau]$  при  $s = 7$ .

Значения коэффициентов  $C_r$  и  $b_k$  соответственно равны:  $C_0 = -1,453 \cdot 10^{-3}$ ;  $C_1 = -0,140$ ;  $C_2 = -0,148$ ;  $C_3 = 0,029$ ;  $C_4 = 0,044$ ;  $C_5 = 0,011$ ;  $C_6 = 6,102 \cdot 10^{-3}$ ;  $C_7 = 8,475 \cdot 10^{-4}$ ;  $b_1 = -1,893$ ;  $b_2 = 16,352$ . На рис. 6.3.44 представлены результаты решения задачи: управляющая функция  $\mu(\tau)$  и угол поворота маятника  $\theta(\tau)$  по сравнению с численным решением по методу Адамса  $\theta_a(\tau)$ , в этом случае  $|\theta(1) - \theta_a(1)| = 0,014$  рад.



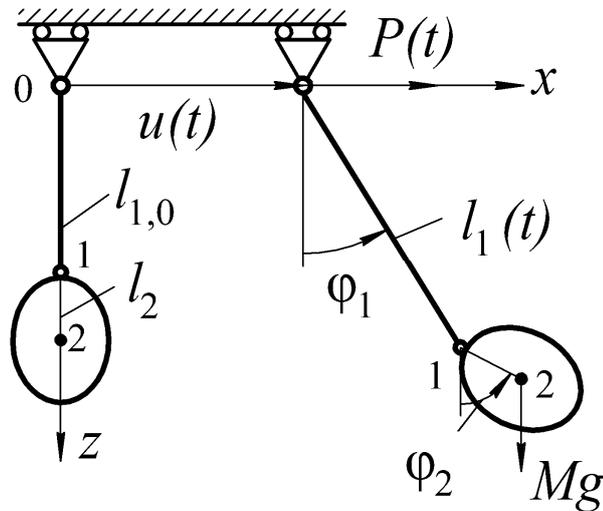
**Рис. 6.3.44.** Результаты решения задачи для  $s = 7$

## 6.4. Терминальное управление нелинейными системами с устранением колебаний с использованием метода Бубнова-Галеркина

### 6.4.1. Конечное передвижение тяжелого твердого тела на тросе переменной длины с устранением нелинейных колебаний в момент остановки

#### Постановка задачи

Рассмотрим плоскую задачу передвижения за определенное время  $T$  тяжелого абсолютно твердого тела, подвешенного на тросе, из начального положения покоя в конечное положение покоя за счет заданного изменения длины троса и управляемого горизонтального перемещения точки его подвеса, рис. 6.4.1.



**Рис. 6.4.1.** Тяжелое твердое тело на тросе переменной длины

Тело соединено с концом троса в точке 1, расположенной выше центра тяжести тела (точка 2) на расстоянии  $l_2$ . Рассматривается два варианта пассивного управления системой: 1) динамическое (силовое) управление – определяется закон изменения горизонтальной силы  $P(t)$  в точке подвеса; 2) кинематическое управление – определяется закон перемещения точки подвеса  $u(t)$ . В первом

варианте в качестве обобщенных координат рассматривается перемещение  $u(t)$  и углы поворота натянутого троса  $\varphi_1(t)$  и тела  $\varphi_2(t)$ ; во втором варианте – только углы  $\varphi_1(t)$ ,  $\varphi_2(t)$ . Начальные условия при  $t=0$  и конечные условия при  $t=T$ , представляющие устойчивые положения покоя системы, записываются в виде:

$$\begin{aligned} \dot{u} = 0, \quad u = 0, \quad \dot{\varphi}_1 = 0, \quad \varphi_1 = 0, \quad \dot{\varphi}_2 = 0, \quad \varphi_2 = 0 \quad \text{при } t = 0; \\ \dot{u} = 0, \quad u = u_T, \quad \dot{\varphi}_1 = 0, \quad \varphi_1 = 0, \quad \dot{\varphi}_2 = 0, \quad \varphi_2 = 0 \quad \text{при } t = T, \end{aligned} \quad (6.4.1)$$

где  $u_T$  – заданное конечное горизонтальное перемещение точки подвеса троса.

Трос будем считать нерастяжимым, его инерцией будем пренебрегать и будем полагать, что его длина  $l_1(t)$  изменяется за счет продольного перемещения верхнего конца по заданному закону при условиях:

$$\dot{l}_1(0) = 0, \quad l_1(0) = l_{1,0}, \quad \dot{l}_1(T) = 0, \quad l_1(T) = l_{1,T}. \quad (6.4.2)$$

Необходимо, чтобы усилие в тросе при  $0 \leq t \leq T$  было растягивающим (чтобы он оставался прямолинейным). В частном случае длина троса может быть постоянной ( $l_1 = \text{const}$ ,  $\dot{l}_1 = 0$ ).

Координаты центра тяжести тела при  $0 \leq t \leq T$ :

$$x_2 = u + l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2, \quad z_2 = l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2. \quad (6.4.3)$$

Задача заключается в следующем: найти закон изменения управляющей силы  $P(t)$  или управляющего перемещения  $u(t)$ , при которых тело за определенное время  $T$  перемещается из начального положения покоя ( $x_2 = 0$ ,  $z_2 = l_{1,0} + l_2$ ,  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$  при  $t = 0$ ) в заданное конечное положение покоя ( $x_2 = u_T$ ,  $z_2 = l_{1,T} + l_2$ ,  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$  при  $t = T$ ) с устранением колебаний при  $t \geq T$ . Задачу будем решать в нелинейной постановке для умеренно больших углов поворота троса и тела ( $|\varphi_1|, |\varphi_2| < 1$  в радианах).

Уравнения движения

Уравнения движения рассматриваемой системы получим по методу Лагранжа в обобщенных координатах. Кинетическая энергия системы и вариация работы управляющей силы  $P$  и силы тяжести тела  $Mg$  :

$$K = \frac{1}{2}M(\dot{x}_2^2 + \dot{z}_2^2) + \frac{1}{2}J_2\dot{\varphi}_2^2, \quad \delta A = P\delta u + Mg\delta z_2$$

с учетом (6.4.3) записываются в виде:

$$\begin{aligned} K = & \frac{1}{2}M\dot{u}^2 + \frac{1}{2}M[l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + l_2^2\dot{\varphi}_2^2 + 2\dot{u}\dot{l}_1\sin\varphi_1 + \\ & + 2\dot{u}\dot{l}_1\dot{\varphi}_1\cos\varphi_1 + 2\dot{u}\dot{l}_2\dot{\varphi}_2\cos\varphi_2 + 2\dot{l}_1\dot{l}_2\dot{\varphi}_2\sin(\varphi_1 - \varphi_2) + \\ & + 2\dot{l}_1\dot{l}_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)] + \frac{1}{2}J_2\dot{\varphi}_2^2; \\ \delta A = & P\delta u - Mg(l_1\sin\varphi_1\delta\varphi_1 + l_2\sin\varphi_2\delta\varphi_2), \end{aligned} \quad (6.4.4)$$

где  $M$  и  $J_2$  – масса и центральный массовый момент инерции тела;  $g$  – ускорение силы тяжести.

Уравнения Лагранжа для  $u$ ,  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  после деления их, соответственно, на  $M$ ,  $Ml_1$ ,  $Ml_2$  будут:

$$\begin{aligned} \ddot{u} + \ddot{l}_1\sin\varphi_1 + 2\dot{l}_1\dot{\varphi}_1\cos\varphi_1 + l_1\ddot{\varphi}_1\cos\varphi_1 - l_1\dot{\varphi}_1^2\sin\varphi_1 + \\ + l_2\ddot{\varphi}_2\cos\varphi_2 - l_2\dot{\varphi}_2^2\sin\varphi_2 = \frac{1}{M}P; \end{aligned} \quad (6.4.5)$$

$$\begin{aligned} \ddot{u}\cos\varphi_1 + l_1\ddot{\varphi}_1 + l_2\ddot{\varphi}_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \\ + l_2\dot{\varphi}_2^2\sin(\varphi_1 - \varphi_2) + 2\dot{l}_1\dot{\varphi}_1 + g\sin\varphi_1 = 0; \end{aligned} \quad (6.4.6)$$

$$\begin{aligned} \ddot{u}\cos\varphi_2 + l_1\ddot{\varphi}_1\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + (l_2 + \frac{J_2}{Ml_2})\ddot{\varphi}_2 - l_1\dot{\varphi}_1^2\sin(\varphi_1 - \varphi_2) + \\ + 2\dot{l}_1\dot{\varphi}_1\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \ddot{l}_1\sin(\varphi_1 - \varphi_2) + g\sin\varphi_2 = 0. \end{aligned} \quad (6.4.7)$$

Для случая малых колебаний (при  $\sin\varphi \approx \varphi$ ,  $\cos\varphi \approx 1$ ) уравнения (6.4.5) – (6.4.7) линеаризуются и принимают, соответственно, следующий вид:

$$\ddot{u} + \ddot{l}_1\varphi_1 + 2\dot{l}_1\dot{\varphi}_1 + l_1\ddot{\varphi}_1 + l_2\ddot{\varphi}_2 = \frac{1}{M}P; \quad (6.4.8)$$

$$\ddot{u} + l_1\ddot{\varphi}_1 + l_2\ddot{\varphi}_2 + 2\dot{l}_1\dot{\varphi}_1 + g\varphi_1 = 0; \quad (6.4.9)$$

$$\ddot{u} + l_1 \ddot{\varphi}_1 + \left(l_2 + \frac{J_2}{Ml_2}\right) \ddot{\varphi}_2 + 2\dot{l}_1 \dot{\varphi}_1 + \ddot{l}_1 \varphi_1 + (g - \ddot{l}_1) \varphi_2 = 0. \quad (6.4.10)$$

Если из уравнения (6.4.5) определить  $\ddot{u}$  и подставить его в уравнения (6.4.6), (6.4.6), то после исключения  $\ddot{u}$  они запишутся в виде:

$$\begin{aligned} & l_1 \ddot{\varphi}_1 \sin^2 \varphi_1 + l_2 \ddot{\varphi}_2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + 2\dot{l}_1 \dot{\varphi}_1 \sin^2 \varphi_1 + \\ & + l_1 \dot{\varphi}_1^2 \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 + l_2 \dot{\varphi}_2^2 \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \\ & + (g - \ddot{l}_1 \cos \varphi_1) \sin \varphi_1 + \frac{1}{M} P \cos \varphi_1 = 0; \end{aligned} \quad (6.4.11)$$

$$\begin{aligned} & l_1 \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \left(\frac{J_2}{Ml_2} + l_2 \sin^2 \varphi_2\right) \ddot{\varphi}_2 + 2\dot{l}_1 \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \\ & + l_1 \dot{\varphi}_1^2 \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + l_2 \dot{\varphi}_2^2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_2 + \\ & + (g - \ddot{l}_1 \cos \varphi_1) \sin \varphi_2 + \frac{1}{M} P \cos \varphi_2 = 0. \end{aligned} \quad (6.4.12)$$

Эти уравнения можно использовать при управлении системой силой  $P(t)$ .

Чтобы найти перемещение  $u(t)$  запишем уравнение (6.4.5) в виде

$$\ddot{u} + \frac{d^2}{dt^2} (l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2) = \frac{1}{M} P$$

и проинтегрируем его дважды с учетом начальных условий (6.4.1) при  $t = 0$ :

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \frac{1}{M} \int_0^t P(t_1) dt_1 - (\dot{l}_1 \sin \varphi_1 + l_1 \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 + l_2 \dot{\varphi}_2 \cos \varphi_2); \\ u &= \frac{1}{M} \int_0^t P(t_1) (t - t_1) dt_1 - (l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2). \end{aligned} \quad (6.4.13)$$

Удовлетворяя конечные условия (6.4.1) при  $t = T$ , получим:

$$\int_0^T \ddot{u}(t) dt = 0, \quad \int_0^T P(t) dt = 0, \quad \int_0^T P(t) t dt + u_T = 0 \quad (6.4.14)$$

Для случая малых колебаний при силовом управлении вместо (6.4.11), (6.4.12) используются соответствующие им линеаризованные уравнения:

$$(g - \ddot{l}_1) \varphi_1 + \frac{1}{M} P = 0; \quad (6.4.15)$$

$$\frac{J_2}{Ml_2} \ddot{\varphi}_2 + (g - \ddot{l}_1) \varphi_2 + \frac{1}{M} P = 0. \quad (6.4.16)$$

Из уравнения (6.4.15) следует, что при малых колебаниях сила  $P(t)$  должна удовлетворять таким же начальным и конечным условиям как  $\varphi_1(t)$ :

$$P(0) = 0, \quad \dot{P}(0) = 0, \quad P(T) = 0, \quad \dot{P}(T) = 0. \quad (6.4.17)$$

Управляющая сила  $P(t)$  ищется в виде финитной функции на интервале  $0 \leq t \leq T$ , которая удовлетворяет второму и третьему интегральным условиям (6.4.14) и начальным и конечным условиям (6.4.17). При выбранных путем проб с использованием уравнений (6.4.15), (6.4.16) значениях  $T$  и  $u_T$ , а также функции  $l_1(t)$ , решение при действии силы  $P(t)$  должно быть физически осуществимым (трос должен оставаться натянутым и прямолинейным). Для этого усилие натяжения троса  $N$ , которое можно определить из уравнения равновесия его верхнего конца  $N \sin \varphi_1 + P = 0$ , должно быть положительным, т.е.  $N(t) > 0$ .

В случае кинематического управления рассматриваемой системой с помощью ускорения  $\ddot{u}(t)$  задача описывается уравнениями (6.4.6) и (6.4.7). Функция  $\ddot{u}(t)$  ищется в классе финитных функций при  $0 \leq t \leq T$ , удовлетворяющих первому условию (6.4.14). Кроме того, решения уравнений (6.4.6), (6.4.7), линейно зависящих от  $\ddot{u}(t)$ , должны удовлетворять начальным и конечным условиям (6.4.1). При кинематическом управлении реакция  $P(t)$  определяется из уравнения (6.4.5); затем из уравнения  $N \sin \varphi_1 + P = 0$  находится усилие натяжения троса  $N$ . Можно получить другие тождественные выражения  $N(t)$  в зависимости от параметров движения системы  $u(t)$ ,  $\varphi_1(t)$ ,  $\varphi_2(t)$ , если для преобразований использовать уравнения (6.4.5) – (6.4.7) и (6.4.11), (6.4.12). Например, умножив уравнения (6.4.6) на  $\cos \varphi_1$  и вычтя из него уравнение (6.4.5), получим

$$\begin{aligned} \frac{N}{M} = -\frac{P}{M \sin \varphi_1} = g \cos \varphi_1 - \ddot{l}_1 - \ddot{u} \sin \varphi_1 + l_1 \dot{\varphi}_1^2 - \\ - l_2 \ddot{\varphi}_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + l_2 \dot{\varphi}_2^2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2). \end{aligned} \quad (6.4.18)$$

Рассматриваемая задача пассивного управления колебаниями системы имеет множество решений при различных управляющих финитных функциях

$P(t)$  или  $\ddot{u}(t)$  при  $0 \leq t \leq T$ , удовлетворяющих интегральным условиям (6.4.14). При определении управляющих функций из этого класса прежде всего необходимо, чтобы они были приемлемы и удобны для практической реализации полученного расчетным путем пассивного управления с помощью «жестких» приводов. Управляющие воздействия должны быть достаточно гладкими и не должны содержать высокочастотных составляющих, поскольку реальные приводы обладают упругостью и инерцией и в них могут возникнуть ответные колебания, искажающие расчетные управляющие воздействия.

Для минимизации энергетических затрат на управление различные подходящие управляющие функции можно сравнивать между собой по среднеквадратичной величине (норме) и по их максимальным значениям. При оптимальном управлении наряду с решением задачи управления необходимо минимизировать определенный функционал.

### Решение уравнений

Далее рассмотрим задачу кинематического управления передвижением твердого тела на тросе переменной длины с подвижной точкой подвеса из начального положения покоя в конечное положение покоя за определенное время  $T$ . Для приближенного решения этой задачи, описываемой нелинейными дифференциальными уравнениями (6.4.6), (6.4.7) с управляющей функцией  $\ddot{u}(t)$  и с переменными коэффициентами на конечном интервале времени  $0 \leq t \leq T$  будем использовать метод Бубнова-Галеркина совместно с методом последовательных приближений. Введем безразмерное время и безразмерные параметры:

$$\tau = \frac{t}{T}, \quad \bar{l}_1 = \frac{l_1}{l_2}, \quad \bar{u} = \frac{u}{l_2}, \quad \lambda = \frac{gT^2}{l_2}, \quad \mu = 1 + \frac{J_2}{Ml_2^2}. \quad (6.4.19)$$

Уравнения (6.4.6), (6.4.7) запишем в безразмерном виде:

$$\begin{aligned} \bar{u}'' \cos \varphi_1 + \bar{l}_1 \varphi_1'' + \varphi_2'' \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \\ + \varphi_2'^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + 2\bar{l}_1' \varphi_1' + \lambda \sin \varphi_1 = 0; \end{aligned} \quad (6.4.20)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}'' \cos \varphi_2 + \bar{l}_1 \varphi_1'' \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \mu \varphi_2'' - \bar{l}_1 \varphi_1'^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + \\ + 2\bar{l}_1' \varphi_1' \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \bar{l}_1'' \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + \lambda \sin \varphi_2 = 0, \end{aligned} \quad (6.4.21)$$

где штрихом ( )' обозначается производная по  $\tau$ ;  $0 \leq \tau \leq 1$ .

Соответствующие линеаризованные уравнения (6.4.9), (6.4.10) имеют вид:

$$\bar{u}'' + \bar{l}_1 \varphi_1'' + \varphi_2'' + 2\bar{l}_1' \varphi_1' + \lambda \varphi_1 = 0; \quad (6.4.22)$$

$$\bar{u}'' + \bar{l}_1 \varphi_1'' + \mu \varphi_2'' + 2\bar{l}_1' \varphi_1' + \bar{l}_1'' \varphi_1 + (\lambda - \bar{l}_1'') \varphi_2 = 0. \quad (6.4.23)$$

Далее для того, чтобы при использовании метода последовательных приближений первое приближение представляло решение линеаризованных уравнений (6.4.22) и (6.4.23), их объединим, соответственно, с уравнениями (6.4.20) и (6.4.21), одновременно складывая и вычитая. Полученные уравнения запишем в виде:

$$L_i(\bar{u}, \varphi_1, \varphi_2) + N_i(\bar{u}, \varphi_1, \varphi_2) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (6.4.24)$$

Здесь  $L_i$  и  $N_i$  – соответственно, линейные и нелинейные операторы:

$$\begin{aligned} L_1 &= \bar{u}'' + \bar{l}_1 \varphi_1'' + \varphi_2'' + 2\bar{l}_1' \varphi_1' + \lambda \varphi_1; \\ N_1 &= \bar{u}'' (\cos \varphi_1 - 1) + \varphi_2'' (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) - 1) + \\ &\quad + \varphi_2'^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + \lambda (\sin \varphi_1 - \varphi_1); \\ L_2 &= \bar{u}'' + \bar{l}_1 \varphi_1'' + \mu \varphi_2'' + 2\bar{l}_1' \varphi_1' + \bar{l}_1'' \varphi_1 + (\lambda - \bar{l}_1'') \varphi_2; \\ N_2 &= \bar{u}'' (\cos \varphi_2 - 1) + \bar{l}_1 \varphi_1'' (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) - 1) - \bar{l}_1 \varphi_1'^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + \\ &\quad + 2\bar{l}_1' \varphi_1' (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) - 1) + \bar{l}_1'' (\sin(\varphi_1 - \varphi_2) - (\varphi_1 - \varphi_2)) \\ &\quad + \lambda (\sin \varphi_2 - \varphi_2). \end{aligned} \quad (6.4.25)$$

Как видно из (6.4.25), разложения нелинейных операторов  $N_1$  и  $N_2$  в ряды Тейлора при малых углах  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  не содержат линейных членов с  $\varphi_1(\tau)$ ,  $\varphi_2(\tau)$  и их производными.

Будем считать, что длина троса при передвижении груза изменяется по закону

$$\bar{l}_1(\tau) = \bar{l}_{1,0} + \bar{\Delta}_1(\tau), \quad \bar{\Delta}_1(\tau) = \frac{1}{2}(\bar{l}_{1,T} - \bar{l}_{1,0})(1 - \cos \pi \tau), \quad (6.4.26)$$

удовлетворяющему начальным и конечным условиям (6.4.2).

Закон управления горизонтальным перемещением точки подвеса троса с учетом начальных и конечных условий (6.4.1) будем искать в виде тригонометрического ряда по синусам:

$$\begin{aligned}\bar{u}''(\tau) &= \sum_{k=1}^n b_k \sin 2k\pi\tau, & \bar{u}'(\tau) &= \sum_{k=1}^n b_k \frac{1}{2k\pi} (1 - \cos 2k\pi\tau); \\ \bar{u}(\tau) &= \sum_{k=1}^n b_k \frac{1}{2k\pi} \left( \tau - \frac{1}{2k\pi} \sin 2k\pi\tau \right),\end{aligned}\tag{6.4.27}$$

где  $b_k$  – неизвестные коэффициенты;  $n$  – определенное в каждом конкретном случае число коэффициентов  $b_k$ , которое требуется, чтобы удовлетворялись все начальные и конечные условия (6.4.1). В частности, в конечный момент времени  $\tau=1$  должно выполняться условие для заданного перемещения точки подвеса  $\bar{u}(1) = \bar{u}_T$ , которое дает одно уравнение для коэффициентов  $b_k$ :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k\pi} b_k = \bar{u}_T.\tag{6.4.28}$$

Приближенное решение уравнений (6.4.24) с учетом (6.4.25) и (6.4.26) на интервале  $0 \leq \tau \leq 1$  будем искать в рядах:

$$\varphi_i(\tau) = \sum_{r=0}^{s_i} c_{i,r} \sigma_r(\tau), \quad i=1,2,\tag{6.4.29}$$

где  $c_{i,r}$  – неизвестные коэффициенты;  $\sigma_r(\tau)$  – заданные базисные функции, удовлетворяющие части условий (6.4.1) для функций  $\varphi_1(\tau)$  и  $\varphi_2(\tau)$ . Здесь будем использовать одну из систем базисных функций при  $r=0,1,2,\dots$ :

$$\begin{aligned}\sigma_r(\tau) &= \cos r\pi\tau - \cos(r+1)\pi\tau; \\ \sigma_r(0) = \sigma_r'(0) = \sigma_r'(1) &= 0, \quad \sigma_r(1) = 2\cos r\pi;\end{aligned}\tag{6.4.30}$$

или

$$\begin{aligned}\sigma_r(\tau) &= \cos(r\pi\tau); \\ \sigma_r'(0) = \sigma_r'(1) &= 0, \quad \sigma_r(0) = 1, \quad \sigma_r(1) = \cos r\pi.\end{aligned}\tag{6.4.31}$$

Уравнения (6.4.24) удовлетворяем по методу Бубнова-Галеркина:

$$\int_0^1 [L_i(\bar{u}, \varphi_1, \varphi_2) + N_i(\bar{u}, \varphi_1, \varphi_2)] \sigma_p(\tau) d\tau = 0; \quad (6.4.32)$$

$$p = 0, 1, 2, \dots, s_i, \quad i = 1, 2.$$

С учетом (6.4.25) и (6.4.27) эти уравнения запишем в виде:

$$\sum_{r=0}^{s_1} \alpha_{11,pr} c_{1,r} + \sum_{r=0}^{s_2} \alpha_{12,pr} c_{2,r} + \sum_{k=1}^n \gamma_{pk} b_k + \beta_{1,p} = 0, \quad p = 0, 1, \dots, s_1; \quad (6.4.33)$$

$$\sum_{r=0}^{s_1} \alpha_{21,pr} c_{1,r} + \sum_{r=0}^{s_2} \alpha_{22,pr} c_{2,r} + \sum_{k=1}^n \gamma_{pk} b_k + \beta_{2,p} = 0, \quad p = 0, 1, \dots, s_2,$$

где

$$\alpha_{11,pr} = \int_0^1 \sigma_p (\bar{l}_1 \sigma_r'' + 2\bar{l}_1' \sigma_r' + \lambda \sigma_r) d\tau, \quad \alpha_{12,pr} = \int_0^1 \sigma_p \sigma_r'' d\tau;$$

$$\alpha_{21,pr} = \int_0^1 \sigma_p (\bar{l}_1 \sigma_r'' + 2\bar{l}_1' \sigma_r' + \bar{l}_1'' \sigma_r) d\tau, \quad \alpha_{22,pr} = \int_0^1 \sigma_p (\mu \sigma_r'' + (\lambda - \bar{l}_1'') \sigma_r) d\tau; \quad (6.4.34)$$

$$\gamma_{pk} = \int_0^1 \sigma_p \sin 2k\pi\tau d\tau, \quad \beta_{i,p} = \int_0^1 N_i(\bar{u}, \varphi_1, \varphi_2) \sigma_p d\tau, \quad i = 1, 2.$$

Система уравнений (6.4.33) должна быть дополнена уравнением (6.4.28), а также уравнениями, представляющими невыполненные начальные и конечные условия для функций  $\varphi_1(\tau)$  и  $\varphi_2(\tau)$ , которым не удовлетворяют заданные функции  $\sigma_r(\tau)$ .

При использовании базисных функций (6.4.30) дополнительные уравнения наряду с (6.4.28) получаются из условий  $\varphi_i(1) = 0$  при  $i = 1, 2$ :

$$\sum_{r=0}^{s_i} c_{i,r} \sigma_r(1) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (6.4.35)$$

В результате будем иметь систему  $(s_1 + 1) + (s_2 + 1) + 3$  уравнений (6.4.33), (6.4.28) и (6.4.35), из которых наряду с коэффициентами  $c_{1,r}$  ( $r = 0, 1, \dots, s_1$ ),  $c_{2,r}$  ( $r = 0, 1, \dots, s_2$ ) можно определить  $n = 3$  неизвестных коэффициентов  $b_k$  при  $k = 1, 2, 3$ .

При использовании базисных функций (6.4.31) дополнительные уравнения наряду с (6.4.28) получаются из условий  $\varphi_i(1) = 0$ ,  $\varphi_i'(1) = 0$  при  $i = 1, 2$ :

$$\sum_{r=0}^{s_i} C_{ir} \sigma_r(0) = 0, \quad \sum_{r=0}^{s_i} C_{ir} \sigma_r(1) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (6.4.36)$$

В результате будем иметь систему  $(s_1 + 1) + (s_2 + 1) + 5$  уравнений (6.4.33), (6.4.28) и (6.4.36), из которых наряду с коэффициентами  $c_{1,r}$  ( $r = 0, 1, \dots, s_1$ ),  $c_{2,r}$  ( $r = 0, 1, \dots, s_2$ ) можно определить  $n = 5$  неизвестных коэффициентов  $b_k$  при  $k = 1, 2, 3, 4, 5$ .

Для решения полученной системы алгебраических уравнений с нелинейными членами  $\beta_{i,p}$  в (6.4.33) используется метод последовательных приближений. В качестве первого приближения ( $v = 1$ ) берется решение по методу Бубнова-Галеркина линеаризованных уравнений (6.4.33) при  $\beta_{i,p} = 0$  (т.е. при  $N_1 \equiv 0$ ,  $N_2 \equiv 0$ ). В  $v$ -ом приближении ( $v = 2, 3, \dots$ ) интегралы для коэффициентов  $\beta_{i,p}$  вычисляются численно с использованием выражений (6.4.25) для  $N_1$  и  $N_2$  с функциями  $\bar{u}(\tau)$ ,  $\varphi_1(\tau)$ ,  $\varphi_2(\tau)$ , полученными в предыдущем ( $v - 1$ )-ом приближении как

$$\beta_{i,p}^{(v)} = \int_0^1 N_i(\bar{u}^{(v-1)}, \varphi_1^{(v-1)}, \varphi_2^{(v-1)}) \sigma_p d\tau, \quad i = 1, 2. \quad (6.4.37)$$

Приближения выполняются пока не будет достигнута требуемая точность.

### Примеры расчета

Рассмотрим систему с безразмерными параметрами  $\mu = 4/3$ ,  $\lambda = 250$  (при  $l_2 = 1$  м,  $M = 1000$  кг и  $g \approx 10$  м/с<sup>2</sup> это будет соответствовать  $J_2 = 1000/3$  кг·м<sup>2</sup>,  $T = 5$  с). В разложениях (6.4.29) для углов поворота  $\varphi_1(\tau)$ ,  $\varphi_2(\tau)$  используем базисные функции (6.4.30) при  $r = 0, 1, \dots, 7$ ,  $s_1 = s_2 = 7$ ; соответственно этому в разложениях (6.4.27) полагаем  $n = 3$ . В результате для определения неизвестных коэффициентов  $c_{i,r}$  и  $b_k$  при  $i = 1, 2$ ;  $r = 0, 1, \dots, 7$ ;  $k = 1, 2, 3$  будем иметь систему 19-ти уравнений (6.4.28), (6.4.33), (6.4.35). При расчетах параметры  $\bar{u}_T$  и  $\bar{l}_1(\tau)$  будем

подбирать такими, чтобы колебания были нелинейными с умеренно большими углами поворота  $\varphi_1(\tau)$ ,  $\varphi_2(\tau)$ , т.е. – в радианах  $0,5 < |\varphi_1|, |\varphi_2| < 1$ .

Точность приближенного решения задачи о нестационарных колебаниях нелинейной управляемой системы с переменными параметрами (при изменяемой по заданному закону длине троса  $\bar{l}_1(\tau)$ ) оценивается путем сравнения с численным решением многошаговым конечноразностным методом Адамса прямой задачи, описываемой нелинейными дифференциальными уравнениями (6.4.20), (6.4.21) с начальными условиями  $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0$ ,  $\varphi_1'(0) = \varphi_2'(0) = 0$ . При этом финитная управляющая функция  $\bar{u}''(\tau)$ ,  $0 \leq \tau \leq 1$  берется в виде (6.4.27) при  $n=3$  с использованием найденных в приближенном решении коэффициентов  $b_1, b_2, b_3$ . Результаты решения будем показывать на рисунках со следующими обозначениями: сплошные линии 1 – решения задачи в нелинейной постановке; штрихпунктирные линии 2 – решения задачи в линейной постановке (в первом приближении); штриховые линии 3 – численные решения нелинейных дифференциальных уравнений прямой начальной задачи по методу Адамса.

Перемещение тела на тросе постоянной длины. Примем:  $\bar{l}_1 = \bar{l}_{1,0} = 4$ ,  $\bar{u}_T = 14$ . На рис. 6.4.2 и рис. 6.4.3 приведены найденная управляющая функция  $\bar{u}''(\tau)$  и соответствующее ей безразмерное перемещение точки подвеса троса  $\bar{u}(\tau)$ , которые определяются в виде (6.4.27) с коэффициентами  $b_1 = 24,438$ ,  $b_2 = 153,078$ ,  $b_3 = -39,039$  – для линейной задачи и  $b_1 = 16,219$ ,  $b_2 = 89,714$ ,  $b_3 = 80,667$  – для нелинейной задачи.

На рис. 6.4.4 и рис. 6.4.5 приведены углы поворота в радианах троса  $\varphi_1(\tau)$  и тела  $\varphi_2(\tau)$ . Число последовательных приближений при решении нелинейных уравнений (6.4.33) с точностью  $10^{-6}$  равно 91. Натяжение троса, отнесенное к силе тяжести  $N(\tau)/Mg$  при  $0 \leq \tau \leq 1$  остается положительным с максимальным и минимальным значением 1,289 и 0,658, соответственно. При  $\tau=0$  и  $\tau=1$  отношение  $N(\tau)/Mg$  равно 1.

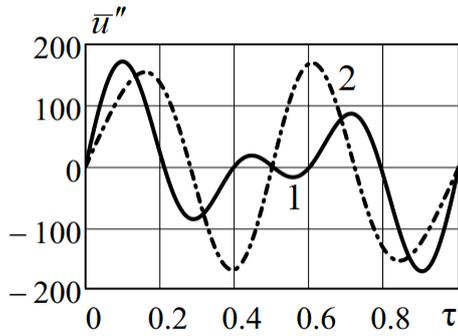


Рис. 6.4.2. Управляющая функция

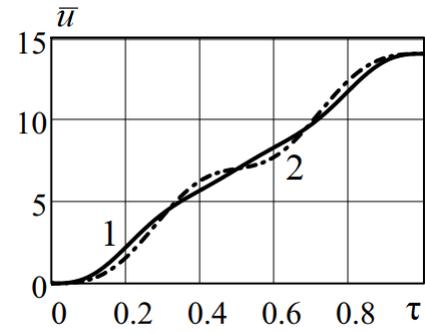


Рис. 6.4.3. Перемещение точки подвеса

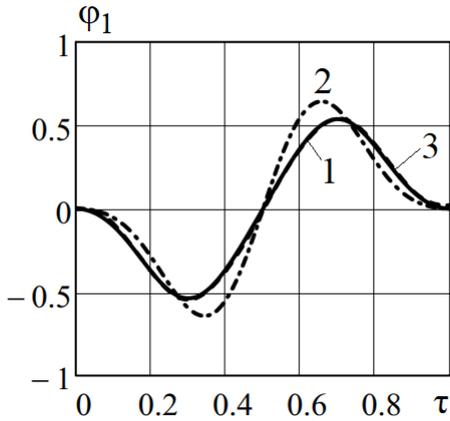


Рис. 6.4.4. Угол поворота троса

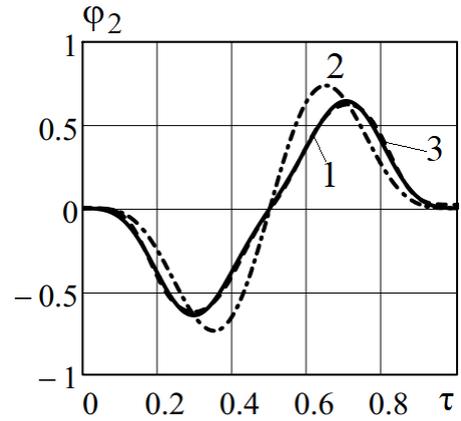


Рис. 6.4.5. Угол поворота тела

Управляемое перемещение тела с одновременным его опусканием.  
 Управляемое горизонтальное перемещение точки подвеса троса осуществляется на расстояние  $\bar{u}_T = 12,5$ , а одновременное его опускание за счет увеличения длины троса осуществляется по заданному закону (6.4.26) при  $\bar{l}_{1,0} = 4$ ,  $\bar{l}_{1,T} = 8$ .

На рис. 6.4.6 и рис. 6.4.7 приведены найденные функции  $\bar{u}''(\tau)$  и  $\bar{u}(\tau)$ . Им соответствуют значения коэффициентов:  $b_1 = -9,260$ ,  $b_2 = 205,350$ ,  $b_3 = -44,627$  – для линейной задачи и  $b_1 = -20,928$ ,  $b_2 = 163,727$ ,  $b_3 = 52,812$  – для нелинейной задачи. На рис. 6.4.8 и рис. 6.4.9 приведены углы поворота в радианах  $\varphi_1(\tau)$  и  $\varphi_2(\tau)$ . Число последовательных приближений при решении нелинейных уравнений (6.4.33) в данном случае с точностью  $10^{-6}$  равно 25. Натяжение троса, отнесенное к силе тяжести  $N(\tau)/Mg$  при  $0 \leq \tau \leq 1$  остается положительным с максимальным и минимальным значением 1,530 и 0,454, соответственно.

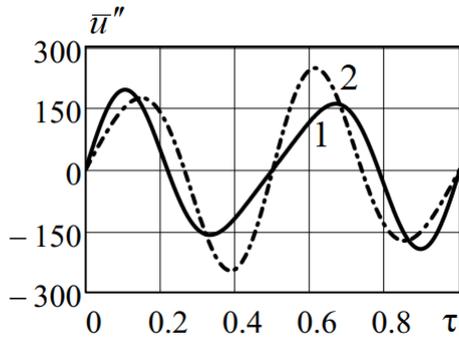


Рис. 6.4.6. Управляющая функция

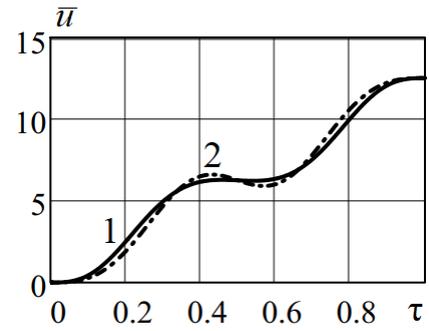


Рис. 6.4.7. Перемещение точки подвеса

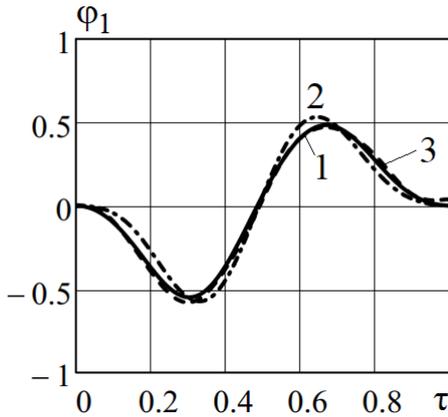


Рис. 6.4.8. Угол поворота троса

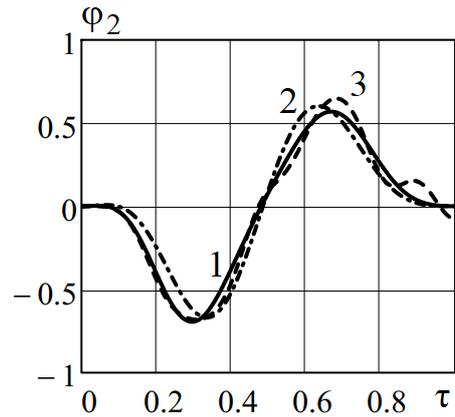


Рис. 6.4.9. Угол поворота тела

Управляемое перемещение тела с одновременным его подъемом.

Управляемое горизонтальное перемещение точки подвеса троса осуществляется на расстояние  $\bar{u}_T = 12$ , а одновременный его подъем за счет уменьшения длины троса осуществляется по заданному закону (6.4.26) при  $\bar{l}_{1,0} = 5$ ,  $\bar{l}_{1,T} = 4$ .

На рис. 6.4.10 и рис. 6.4.11 приведены найденные функции  $\bar{u}''(\tau)$  и  $\bar{u}(\tau)$ . Им соответствуют значения коэффициентов:  $b_1 = 13,043$ ,  $b_2 = 145,195$ ,  $b_3 = -30,727$  – для линейной задачи и  $b_1 = 7,528$ ,  $b_2 = 83,566$ ,  $b_3 = 78,261$  – для нелинейной задачи. На рис. 6.4.12 и рис. 6.4.13 приведены углы поворота в радианах  $\varphi_1(\tau)$  и  $\varphi_2(\tau)$ . Число последовательных приближений при решении нелинейных уравнений (6.4.33) в данном случае с точностью  $10^{-6}$  равно 45. Натяжение троса, отнесенное к силе тяжести  $N(\tau)/Mg$  при  $0 \leq \tau \leq 1$  остается положительным с максимальным и минимальным значением 1,222 и 0,696, соответственно.

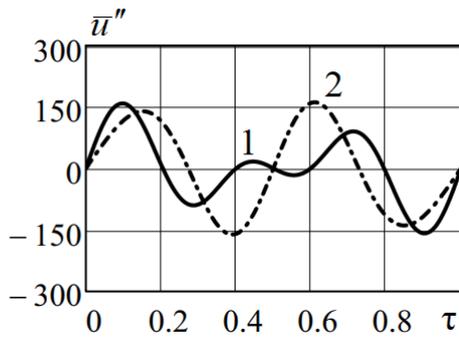


Рис. 6.4.10. Управляющая функция

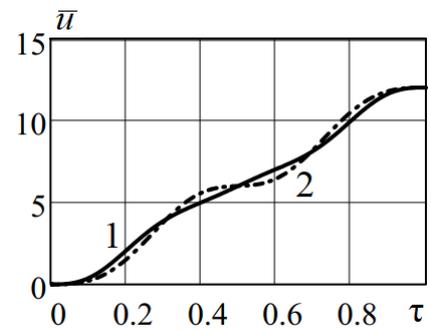


Рис. 6.4.11. Перемещение точки подвеса

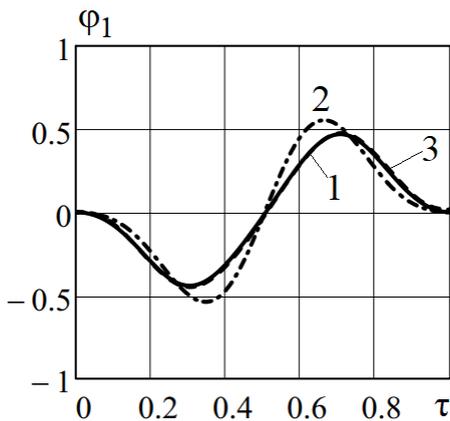


Рис. 6.4.12. Угол поворота троса

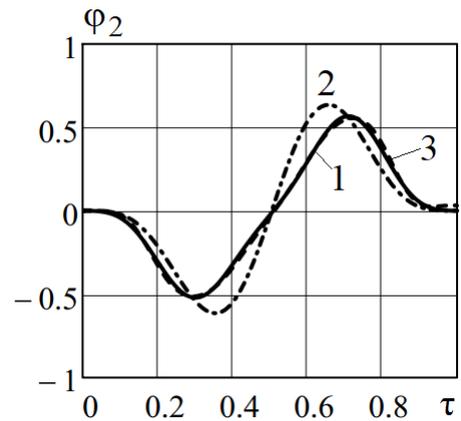


Рис. 6.4.13. Угол поворота тела

### 6.4.2. Устранение нелинейных колебаний математического маятника переменной длины в момент остановки при конечном передвижении точки подвеса

#### Постановка задачи

Рассматривается механическая система, представляющая собой математический маятник переменной длины, расположенный на подвижном подвесе (рис. 6.4.14).

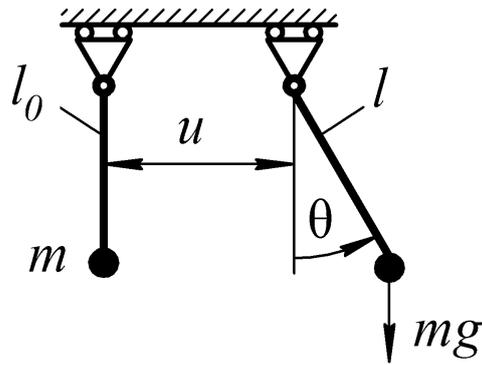


Рис. 6.4.14. Общий вид рассматриваемой системы

Движение маятника будем характеризовать углом его поворота  $\theta(t)$  относительно невозмущенного положения и перемещением  $u(t)$  его точки подвеса, причем колебания маятника будут нелинейными, если  $|\theta(t)| > 0,5$  рад. Длина маятника определяется начальным значением  $l_0$  и функцией  $l(t)$  изменения по времени.

Нелинейное дифференциальное уравнение колебаний маятника на подвижном подвесе записывается в виде

$$\frac{l}{l_0} \ddot{\theta} + 2 \frac{\dot{l}}{l_0} \dot{\theta} + \frac{1}{l_0} \ddot{u} \cos \theta + \frac{g}{l_0} \sin \theta = 0$$

или с использованием безразмерного времени  $\tau = t/T$ :

$$\frac{l}{l_0} \frac{d^2 \theta}{d\tau^2} + \frac{2}{l_0} \frac{dl}{d\tau} \frac{d\theta}{d\tau} + \frac{1}{l_0} \frac{d^2 u}{d\tau^2} \cos \theta + T^2 \frac{g}{l_0} \sin \theta = 0, \quad (6.4.38)$$

где  $T$  – заданное время конечного передвижения подвеса на заданное расстояние  $u_T$ .

Начальные и конечные условия для угла поворота  $\theta$  и перемещения точки подвеса  $u$  маятника с учетом гашения колебаний в момент остановки:

$$\begin{aligned} \theta(0) = \frac{d\theta}{d\tau}(0) = \theta(1) = \frac{d\theta}{d\tau}(1) = 0; \\ u(0) = \frac{du}{d\tau}(0) = \frac{du}{d\tau}(1) = 0, \quad u(1) = u_T. \end{aligned} \quad (6.4.39)$$

Управляющую функцию  $\frac{1}{l_0} \frac{d^2 u}{d\tau^2}$  при кинематическом управлении конечным передвижением при  $0 \leq \tau \leq 1$  будем задавать в виде ряда:

$$\frac{1}{l_0} \frac{d^2 u}{d\tau^2} = \mu(\tau) = \sum_{k=1}^r b_k \sin(k2\pi\tau), \quad k=1,2,\dots, \quad (6.4.40)$$

где  $b_k$  – неизвестные коэффициенты. При этом с учетом (6.4.39) и (6.4.40) будем иметь:

$$\sum_{k=1}^r \frac{1}{k} b_k = \frac{2\pi}{l_0} u_T. \quad (6.4.41)$$

Неизвестную функцию  $\theta(\tau)$  по методу Бубнова-Галеркина будем искать в виде ряда:

$$\theta(\tau) = \sum_{r=0}^s C_r \varphi_r(\tau), \quad (6.4.42)$$

где  $C_r$  – коэффициенты, подлежащие определению;  $\varphi_r(\tau)$  – заданные функции безразмерного времени, которые могут лишь частично удовлетворять начальным и граничным условиям (6.4.39) по  $\theta(\tau)$ .

Например, если  $\varphi_r(\tau) = \cos[r\pi\tau] - \cos[(r+1)\pi\tau]$ ,  $r=0,1,\dots,s$ , то эта функция удовлетворяет условиям  $\varphi_r(0) = \frac{d\varphi_r}{d\tau}(0) = \frac{d\varphi_r}{d\tau}(1) = 0$ ,  $\varphi_r(1) = 2\cos(r\pi)$ . При этом

$\theta(0) = \frac{d\theta}{d\tau}(0) = \frac{d\theta}{d\tau}(1) = 0$ , а для выполнения условия  $\theta(1) = 0$  необходимо записать

дополнительное уравнение (6.4.42):

$$\sum_{r=0}^s C_r \varphi_r(1) = 0. \quad (6.4.43)$$

Вместо предложенной выше функции  $\varphi_r(\tau)$  можно взять более простые тригонометрические функции. Например,  $\varphi_r(\tau) = \cos(r\pi\tau)$ ,  $r=0,1,\dots,s$ , которая удовлетворяет условиям  $\frac{d\varphi_r}{d\tau} = 0$  при  $\tau=0$  и  $\tau=1$ . Для выполнения всех условий

(6.4.39) на основании (6.4.42) в данном случае записываются два дополнительных уравнения:

$$\sum_{r=0}^s C_r \varphi_r(1) = 0. \quad (6.4.44)$$

Если представить  $\varphi_r(\tau) = \sin(r\pi\tau)$ ,  $r = 1, 2, \dots, s$ , для которой выполняются условия  $\varphi_r(0) = \varphi_r(1) = 0$ , то для выполнения всех условий (6.4.39) на основании (6.4.42), также как и в прошлом случае, записываются два дополнительных уравнения:

$$\sum_{r=1}^s C_r \frac{d\varphi_r}{d\tau}(0) = 0, \quad \sum_{r=1}^s C_r \frac{d\varphi_r}{d\tau}(1) = 0. \quad (6.4.45)$$

Во всех случаях полученное решение задачи по методу Бубнова-Галеркина сравнивается с численным решением по методу Адамса с использованием стандартной программы расчета. Метод Адамса является наиболее устойчивым и точным для интегрирования различных нелинейных дифференциальных уравнений.

#### Нелинейная задача для маятника постоянной длины

Рассмотрим уравнение (6.4.38) для маятника постоянной длины  $l(t) = l_0$  при произвольных углах  $\theta(\tau)$ :

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + v^2 \sin \theta + \mu(\tau) \cos \theta = 0. \quad (6.4.46)$$

Для решения нелинейной задачи по методу итераций, используя линейное решение в качестве «нулевого» приближения, выделим линейное решение – представим  $\sin \theta = \theta + (\sin \theta - \theta)$ ,  $\cos \theta = 1 + (\cos \theta - 1)$  и запишем уравнение (6.4.46) в виде:

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + v^2\theta + \mu(\tau) = v^2(\theta - \sin \theta) + \mu(\tau)(1 - \cos \theta). \quad (6.4.47)$$

Следуя методу Бубнова-Галеркина при  $\theta(\tau) = \sum_{r=0}^s C_r \varphi_r(\tau)$  и  $\mu(\tau) = \sum_{k=1}^r b_k \sin(k2\pi\tau)$  уравнение (6.4.47) при  $p = 0, 1, \dots, s$  записывается в виде системы линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{r=0}^s A_{pr} C_r + \sum_{k=1}^r \gamma_{pk} b_k = v^2 \int_0^1 (\theta - \sin \theta) \varphi_p d\tau + \int_0^1 \mu(\tau) (1 - \cos \theta) \varphi_p d\tau. \quad (6.4.48)$$

При решении по методу итераций в «нулевом» приближении используется линейное решение с найденными  $\theta^{(0)}(\tau)$  и  $\mu^{(0)}(\tau)$ . Подставляя эти найденные значения в систему (6.4.48) получаем новую систему алгебраических уравнений для нахождения первого приближения нелинейной задачи  $\theta^{(1)}(\tau)$  и  $\mu^{(1)}(\tau)$ , которые определяются из коэффициентов  $C_r^{(1)}$  и  $b_k^{(1)}$  соответственно:

$$\sum_{r=0}^s A_{pr} C_r^{(1)} + \sum_{k=1}^r \gamma_{pk} b_k^{(1)} = v^2 \int_0^1 (\theta^{(0)} - \sin \theta^{(0)}) \varphi_p d\tau + \int_0^1 \mu^{(0)} (1 - \cos \theta^{(0)}) \varphi_p d\tau. \quad (6.4.49)$$

Процесс последовательного решения по методу итераций системы (6.4.48), к которой добавляется условие (6.4.41) и одна из групп уравнений (6.3.43) – (6.3.45), повторяется до достижения сходимости с заданной точностью.

### Нелинейная задача для маятника переменной длины

Для решения нелинейной задачи по методу итераций вновь в качестве «нулевого» приближения используем линейное решение. В этом случае с использованием представлений  $\sin \theta = \theta + (\sin \theta - \theta)$ ,  $\cos \theta = 1 + (\cos \theta - 1)$  уравнение (6.4.38) запишем в виде:

$$\frac{l}{l_0} \frac{d^2 \theta}{d\tau^2} + \frac{2}{l_0} \frac{dl}{d\tau} \frac{d\theta}{d\tau} + v^2 \theta + \mu(\tau) = v^2 (\theta - \sin \theta) + \mu(\tau) (1 - \cos \theta). \quad (6.4.50)$$

По аналогии с получением системы (6.4.48) для данного случая маятника переменной длины получаем:

$$\sum_{r=0}^s B_{pr} C_r + \sum_{k=1}^r \gamma_{pk} b_k = v^2 \int_0^1 (\theta - \sin \theta) \varphi_p d\tau + \int_0^1 \mu(\tau)(1 - \cos \theta) \varphi_p d\tau. \quad (6.4.51)$$

При решении по методу итераций в «нулевом» приближении используется линейное решение с найденными  $\theta^{(0)}(\tau)$  и  $\mu^{(0)}(\tau)$ . Подставляя эти найденные значения в систему (6.4.51) получаем новую систему алгебраических уравнений для нахождения первого приближения нелинейной задачи  $\theta^{(1)}(\tau)$  и  $\mu^{(1)}(\tau)$ , которые определяются из коэффициентов  $C_r^{(1)}$  и  $b_k^{(1)}$  соответственно:

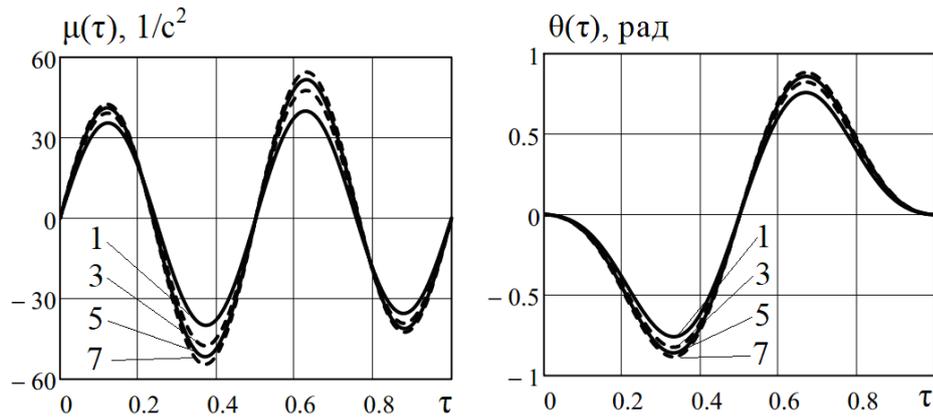
$$\sum_{r=0}^s B_{pr} C_r^{(1)} + \sum_{k=1}^r \gamma_{pk} b_k^{(1)} = v^2 \int_0^1 (\theta^{(0)} - \sin \theta^{(0)}) \varphi_p d\tau + \int_0^1 \mu^{(0)}(1 - \cos \theta^{(0)}) \varphi_p d\tau. \quad (6.4.52)$$

Процесс последовательного решения по методу итераций системы (6.4.52), к которой добавляется условие (6.4.41) и одна из групп уравнений (6.3.43) – (6.3.45), повторяется до достижения сходимости с заданной точностью.

#### Пример расчета для маятника постоянной длины

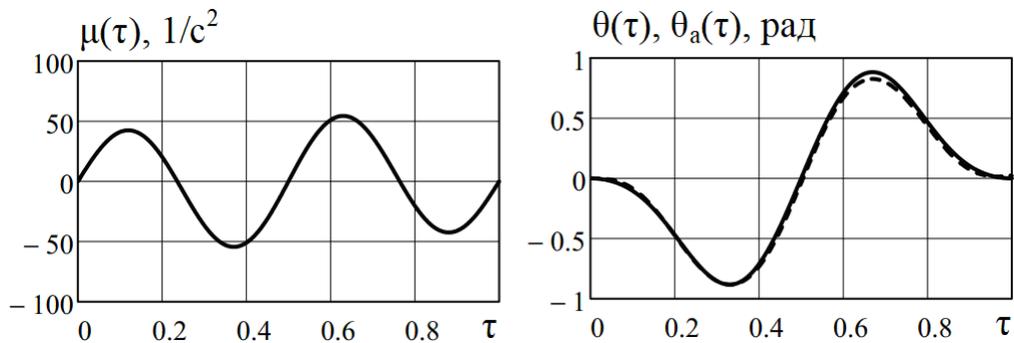
Рассматривается маятник со следующими параметрами:  $l_0 = 1$  м;  $u_T = 2,5$  м;  $T = 2$  с. Аппроксимирующая функция задается в виде  $\varphi_r(\tau) = \cos[r\pi\tau] - \cos[(r+1)\pi\tau]$  при  $s = 7$ .

Решение задачи ведется методом последовательных приближений, число которых равнялось 7. При этом на каждом шаге для проверки сходимости решения определяется значение  $|\theta(1) - \theta_a(1)|$ : 1 – 0,103 рад; 2 – 0,066 рад; 3 – 0,048 рад; 4 – 0,037 рад; 5 – 0,031 рад; 6 – 0,026 рад; 7 – 0,023 рад. На рис. 6.4.15 показаны изменение управляющей функции и угла поворота маятника на различных шагах решения задачи, соответственно.



**Рис. 6.4.15.** Последовательные приближения при решении нелинейной задачи

Приведем значения коэффициентов  $C_r$  и  $b_k$  на 7-м шаге приближения:  
 $C_0 = 6,381 \cdot 10^{-15}$ ;  $C_1 = -0,497$ ;  $C_2 = -0,497$ ;  $C_3 = 0,109$ ;  $C_4 = 0,109$ ;  $C_5 = 0,012$ ;  
 $C_6 = 0,012$ ;  $C_7 = 2,372 \cdot 10^{-13}$ ;  $b_1 = -8,475$ ;  $b_2 = 48,366$ . На рис. 6.4.16 показаны управляющая функция  $\mu(\tau)$  и угол поворота маятника  $\theta(\tau)$  по сравнению с численным решением по методу Адамса  $\theta_a(\tau)$ , соответственно.



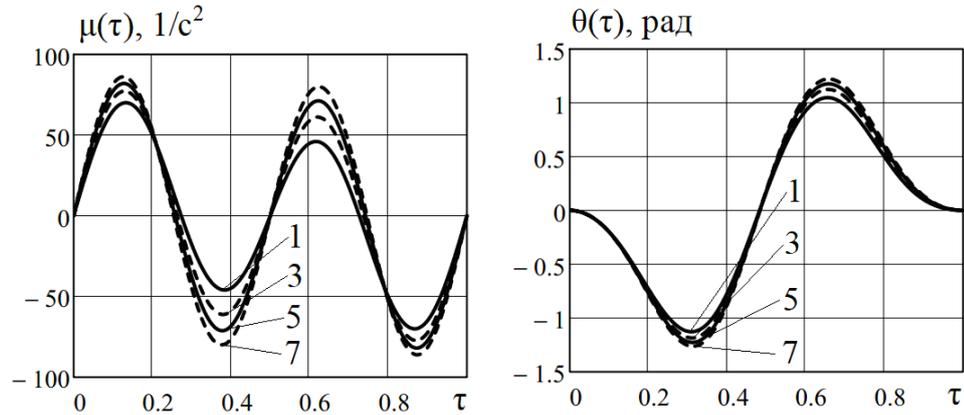
**Рис. 6.4.16.** Результаты решения нелинейной задачи на 7-м шаге

#### Пример расчета для маятника переменной длины

Рассматривается маятник со следующими параметрами:  $l_0 = 1$  м;  $u_T = 7,3$  м;  
 $T = 2,8$  с;  $\delta = 0,5$ . Аппроксимирующая функция задается в виде  
 $\varphi_r(\tau) = \cos[r\pi\tau] - \cos[(r+1)\pi\tau]$  при  $s = 7$ .

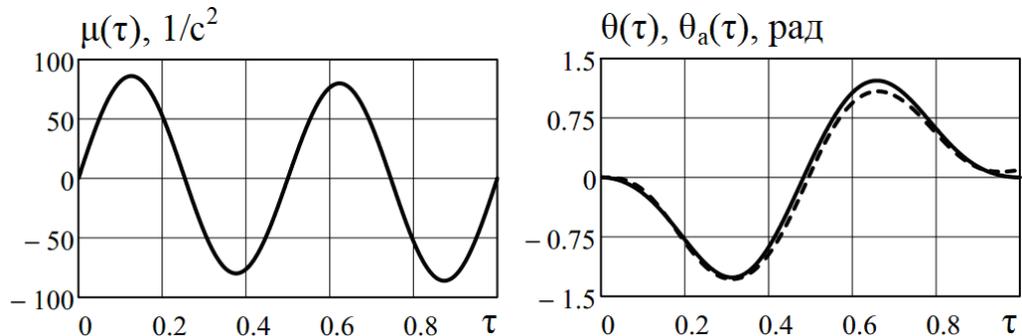
Решение задачи ведется методом последовательных приближений, число которых равнялось 7. При этом на каждом шаге для проверки сходимости

решения определяется значение  $|\theta(1) - \theta_a(1)|$ : 1 – 0,187 рад; 2 – 0,141 рад; 3 – 0,117 рад; 4 – 0,103 рад; 5 – 0,095 рад; 6 – 0,092 рад; 7 – 0,091 рад. На рис. 6.4.17 показаны изменение управляющей функции и угла поворота маятника на различных шагах решения задачи, соответственно.



**Рис. 6.4.17.** Последовательные приближения при решении нелинейной задачи

Приведем значения коэффициентов  $C_r$  и  $b_k$  на 7-м шаге приближения:  
 $C_0 = 4,180 \cdot 10^{-3}$ ;  $C_1 = -0,689$ ;  $C_2 = -0,772$ ;  $C_3 = 0,048$ ;  $C_4 = 0,137$ ;  $C_5 = 0,027$ ;  
 $C_6 = 0,015$ ;  $C_7 = -1,267 \cdot 10^{-3}$ ;  $b_1 = 4,363$ ;  $b_2 = 83,008$ . На рис. 6.4.18 показаны управляющая функция  $\mu(\tau)$  и угол поворота маятника  $\theta(\tau)$  по сравнению с численным решением по методу Адамса  $\theta_a(\tau)$ , соответственно.



**Рис. 6.4.18.** Результаты решения нелинейной задачи на 7-м шаге

### ***6.5. Основные выводы и результаты по главе 6***

1. Разработан метод пассивного силового и кинематического управления произвольной линейной упругой системой с постоянными параметрами, совершающей поворот относительно неподвижной оси на конечный угол по заданному закону из одного состояния покоя в другое с устранением упругих колебаний по нескольким низшим собственным формам в момент остановки системы. Управляющая функция выбирается из класса финитных функций такой, чтобы система повернулась за заданное время на заданный конечный угол и чтобы управление было достаточно простым в плане практической реализации и было робастным.

2. В первом подходе управляющий момент на интервале времени управления ищется в виде конечного ряда синусов или косинусов, с неизвестными коэффициентами. Уравнения в нормальных координатах решаются точно при заданных начальных и конечных условиях и в результате получается неоднородная система линейных алгебраических уравнений для неизвестных коэффициентов.

3. Во втором подходе управляющая функция выбирается таким образом, чтобы управление было достаточно простым в плане практической реализации и было робастным. На каждую такую функцию система «настраивается» по нескольким низшим частотам собственных колебаний, подлежащих устранению в момент окончания поворота. На основании точного решения неоднородной задачи для нестационарных колебаний поворачивающейся системы в нормальных координатах получены определенные соотношения между интервалом управления и периодами устраняемых собственных колебаний, которые удовлетворяются путем численной минимизации записанной квадратичной функции с варьируемыми параметрами системы. Такой подход является весьма удобным для систем, многократно выполняющих однотипные операции с конечными поворотами.

4. Для обоих подходов решения задачи рассмотрены примеры расчета управления линейными системами – поворот по крену симметричного КА с двумя панелями СБ, конечное передвижение упругого стержня с массой на конце.

5. Предложен новый подход для решения задачи терминального управления линейной и нелинейной системой с конечным числом степеней свободы и в общем случае с переменными параметрами. Вектор обобщенных координат и управляющая функция ищутся в рядах по заданным на конечном интервале времени аппроксимирующим функциям с неизвестными коэффициентами. Для коэффициентов, представляющих движение системы, уравнения составляются по методу Бубнова-Галеркина, а для коэффициентов управляющей функции используются невыполненные при выборе аппроксимирующих функций начальные и конечные условия. Для линейных систем эта задача сводится к связанной системе линейных алгебраических уравнений, а для нелинейных – к связанной системе нелинейных алгебраических уравнений для неизвестных коэффициентов, решение которой ищется вблизи решений для малых колебаний по методу последовательных приближений с использованием в первом приближении решений линеаризованных уравнений.

6. С помощью предложенного подхода решена плоская задача поступательно-вращательных колебаний тяжелого твердого тела с двумя степенями свободы, подвешенного на тросе изменяемой по заданному закону длины (для подъема и опускания тела) с точкой подвеса троса, совершающей управляемое горизонтальное перемещение. Ищется закон управления, при котором тело передвигается за определенное время из начального положения покоя в заданное конечное положение покоя с устранением нелинейных колебаний в конце операции.

7. Решена задача о гашении колебаний в момент остановки при конечном передвижении за заданное время математического маятника переменной длины, совершающем в общем случае нелинейные колебания. Решение получено по методу Бубнова-Галеркина, а управляющая функция представляется в виде ряда по синусам.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

### Основные результаты работы.

Работа представляет собой вклад в решение актуальной и важной проблемы – создание надежных математических моделей, позволяющих решать широкий класс задач нелинейной механики упругих трансформируемых и управляемых космических систем и конструкций, содержащих стержневые и тросовые элементы:

1. Получены новые уравнения динамики пространственного и плоского движения космического аппарата с выпускаемым тросом в центральном гравитационном поле Земли, которые могут быть использованы для численного моделирования движения космических аппаратов с тросовыми элементами, в частности – космического аппарата с выпускаемым из него тросом как космического буксира для отработавших свой ресурс спутников, захват крупных объектов космического мусора и т.д.

2. Впервые получены нелинейные уравнения с аналитическими выражениями всех коэффициентов для плоского движения в подвижной системе координат космического аппарата с присоединенной системой связанных между собой упруговязкими шарнирами стержней, допускающими большие углы поворота. Эти уравнения позволяют решать новый класс задач развертывания системы стержней из сложенного в пакет транспортировочного положения в рабочее положение различными способами, в том числе – за счет инерционных сил вращения и передвижений космического аппарата.

3. Получены новые уравнения нестационарного поворота и нелинейных колебаний в плоскости крена космического аппарата с двумя упругими многосекционными панелями солнечных батарей. На основе этих уравнений можно проводить численную наземную отработку развертывания панелей под действием предварительно напряженных пружин в узлах, соединяющих секции.

4. Предложена функциональная схема и разработана математическая модель циклически симметричной антенны зонтичного типа, состоящей из гибких

радиальных многозвенных стержней, связанных между собой в узлах по параллелям растяжимыми тросами. Разработан новый метод решения обратной нелинейной задачи квазистатического формообразования антенны после развертывания радиальных стержней за счет их изгиба под действием усилия, создаваемого демпфирующим гидроцилиндром с учетом реакций растяжимых тросов. Это будет способствовать созданию развертываемых в космосе крупногабаритных антенн.

5. Впервые получены уточненные уравнения термоупругих изгибных колебаний тонкостенного стержня-удлинителя с круговым поперечным сечением, соединенного с подвижным космическим аппаратом и подвергающегося солнечному нагреву с учетом изменений углов падения солнечных лучей за счет поворотов элементов поверхности упругого стержня и с учетом внешнего и внутреннего теплоизлучения. Уравнения используются для расчета нестационарных термоупругих колебаний стержня с космическим аппаратом при выходе его из тени.

6. Представлен подход получения уравнений движения упругих составных нелинейных систем с геометрическими связями на основании принципа возможных перемещений путем использования уравнений в связанных подвижных координатах и в обобщенных координатах для отдельных свободных подсистем с учетом неизвестных реакций взаимодействия и присоединения к этим уравнениям условий связи. Решение этих дифференциально-алгебраических нелинейных уравнений можно получить с помощью известных стандартных алгоритмов интегрирования для «жестких» систем.

7. Разработан новый подход к решению терминальных задач пассивного силового и кинематического управления упругими, в общем случае нестационарными и нелинейными, системами с использованием метода Бубнова-Галеркина во временной области при их конечных передвижениях за определенное время из одного состояния (покоя или движения) в другое состояние с устранением колебаний в конце операции. Задачи для линейных систем с постоянными параметрами решаются путем разложения по собственным

формам колебаний с использованием точных решений уравнений в нормальных координатах для нескольких низших форм, подлежащих устранению. При этом управляющее воздействие ищется в виде конечного ряда простых финитных функций с неизвестными коэффициентами, которые определяются из начальных и конечных условий.

8. Предложен новый способ «настройки» нескольких низших собственных частот колебаний линейных систем с постоянными параметрами, многократно выполняющих однотипные операции, как быстродействующие манипуляторы, для устранения колебаний в конце каждой операции с использованием простой управляющей функции с одним неизвестным множителем.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Светлицкий В.А. Механика стержней. Часть 2. Динамика. – М.: Высшая школа, 1987. – 304с.
2. Светлицкий В.А. Механика абсолютно гибких стержней. – М.: Издательство МАИ, 2001. – 432с.
3. Рабинович И.М. Основы строительной механики стержневых систем. – М.: Стройиздат, 1960. – 519с.
4. Образцов И.Ф., Булычев Л.А., Васильев В.В. и др. Строительная механика летательных аппаратов. – М.: Машиностроение, 1986. – 536с.
5. Баничук Н.В., Карпов И.И., Климов Д.М. и др. Механика больших космических конструкций. – М.: Издательство «Факториал», 1997. – 302с.
6. Гришанина Т.В., Шклярчук Ф.Н. Динамика упругих управляемых конструкций. – М.: Издательство МАИ, 2007. – 328с.
7. Докучаев Л.В. Нелинейная динамика летательных аппаратов с деформируемыми элементами. – М.: Машиностроение, 1987. – 232с.
8. Шклярчук Ф.Н. Нелинейные и линеаризованные уравнения движения упругих космических конструкций // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 1996. – №1. – С.161-175.
9. Шклярчук Ф.Н., Гришанина Т.В. Нелинейные и параметрические колебания упругих систем. – М.: Издательство МАИ, 1993. – 68с.
10. Шклярчук Ф.Н., Русских С.В. Избранные задачи динамики упругих космических систем. – М.: Издательство МАИ, 2017. – 80с.
11. Nurre G.S., Ryan R.S., Scofield H.N., Sims J.I. Dynamics and Control of Large Space Structures // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. – 1984. – Vol.7. – №5. – P.514-526.
12. Danilin A.N., Grishanina T.V., Shklyarchuk F.N., Buzlaev D.V. Dynamics of a Space Vehicle with Elastic Deploying Tether // Computers and Structures. – 1999. – №72. – P.141-147.

13. Aslanov V.S., Doroshin A.V., Eremenko A.V. Attitude dynamics of nanosatellite with a module on retractable beams // Journal of Physics: Conference Series. – 2019. – P. 112004.

14. Гришанина Т.В., Шклярчук Ф.Н. Динамика плоского движения тела с системой последовательно соединенных упруговязкими шарнирами гибких нерастяжимых стержней при больших углах поворота // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2011. – №2. – С.109-117.

15. Русских С.В. Нелинейная динамика космического аппарата с присоединенной упругой стержневой системой // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. – 2017. – №7(688). – С.81-89.

16. Русских С.В. Плоская нелинейная задача динамики трансформируемой упругой стержневой системы, присоединенной к космическому аппарату // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. – 2017. – №11(692). – С.89-100.

17. Русских С.В. Развертывание плоской упругой стержневой системы с тросовыми элементами, присоединенной к космическому аппарату // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. – 2018. – № 4(697). – С.80-90.

18. Русских С.В. Задача нелинейной динамики присоединенной к космическому аппарату упругой стержневой системы в редуцированной квазистатической постановке по изгибу // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2018. – Том24. – №2. – С.171-185.

19. Шклярчук Ф.Н., Русских С.В. Нелинейная динамика трансформируемых стержневых систем // Сборник тезисов докладов 6-ой Всероссийской научной конференции с международным участием «Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред» им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского, Москва, ИПРИМ РАН, 16-18 ноября 2016 г. – С.91.

20. Русских С.В. Нелинейная плоская задача динамики космического аппарата с присоединенной стержневой системой // Сборник материалов XXIII Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы

механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова, Калужская область, Кременки, 13-17 февраля 2017 г. – Т.1. – С.168-171.

21. Русских С.В. Динамика развертывания плоской системы, образованной многозвенными гибкими стержнями и тросами // Сборник тезисов докладов 16-ой Международной конференции «Авиация и космонавтика – 2017», Москва, МАИ, 20-24 ноября 2017 г. – С.293-295.

22. Русских С.В., Шклярчук Ф.Н. Уравнения и задачи динамики многозвенных упругих стержневых систем при больших перемещениях и поворотах // Сборник тезисов докладов 7-ой Всероссийской научной конференции с международным участием «Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред» им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского, Москва, ИПРИМ РАН, 21-23 ноября 2017 г. – С.169.

23. Русских С.В. Задача развертывания плоской составной системы, состоящей из многозвенных гибких стержней с тросовыми элементами // Сборник материалов XXIV Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова, Калужская область, Кременки, 19-23 марта 2018 г. – Т.1. – С.195-197.

24. Шклярчук Ф.Н., Русских С.В. Нелинейная динамика стержневых систем при больших перемещениях и углах поворота и упругих конечных деформациях // Сборник материалов XXIV Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова, Калужская область, Кременки, 19-23 марта 2018 г. – Т.1. – С.227-228.

25. Ibrahim A.M., Modi V.J. A formulation for studying dynamics of N connected flexible deployable members // Acta Astronautica. – 1987. – Vol.16. – P.151-164.

26. Разыграев А.П. Основы управления полетом космических аппаратов. – М.: Машиностроение, 1990. – 480с.

27. Колесников К.С., Сухов З.Н. Упругий летательный аппарат как объект автоматического управления. – М.: Машиностроение, 1974. – 268с.

28. Бужинский В.А. Уравнения возмущенного движения ракеты как тонкостенной конструкции с жидкостью // Прикладная математика и механика. – 2009. – Т.73. – №6. – С.959-964.

29. Wie B., Furumoto N., Banerjee A.K., Barba P.M. Modeling and simulation of spacecraft solar array deployment // AIAA Journal of Guidance, Control and Dynamics. – 1986. – Vol.9. – №5. – P.593-598.

30. Паничкин В.И. Математическое моделирование динамики раскрытия многостворчатой солнечной батареи // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 1992. – №1. – С.177–180.

31. Паничкин В.И. Математическое моделирование динамики деформирования многостворчатой солнечной батареи в процессе раскрытия // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 1992. – №4. – С.183-190.

32. Борзых С.В., Щиблев Ю.Н., Ососов Н.С. Динамика раскрытия крупногабаритных солнечных батарей // Ракетно-космическая техника. – 2008. – Сер.12. – Вып.1. – С.144-158.

33. Крылов А.В., Чурилин С.А. Моделирование раскрытия солнечных батарей различных конфигураций // Вестник МГТУ. Серия Машиностроение. – 2011. – №1. – С.106-112.

34. Юдинцев В.В. Моделирование процессов раскрытия многоэлементных конструкций космических аппаратов // Полет. – 2012. – №5. – С.28-33.

35. Бакулин В.Н., Борзых С.В., Ильясова И.Р. Математическое моделирование процесса раскрытия многозвенных солнечных батарей // Вестник МАИ. – 2011. – Т.18. – №3. – С.295-302.

36. Алпатов А.П., Белецкий В.В. и др. Динамика космических систем с тросовыми и шарнирными соединениями. – М.: Ижевск, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2007. – 560с.

37. Иванов В.А., Купреев С.А., Ручинский В.С. Особенности динамики управляемого функционирования космических тросовых систем на круговых и эллиптических орбитах. – М.: Издательство МАИ, 2016. – 160с.

38. Иванов В.А., Купреев С.А., Ручинский В.С. Космические тросовые системы. – М.: Альфа-М, 2014. – 208с.
39. Русских С.В., Шклярчук Ф.Н. Нелинейные колебания упругих панелей солнечных батарей космического аппарата при конечном повороте по крену // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2018. – №2. – С.34-43.
40. Russkikh S.V., Shklyarchuk F.N. Nonlinear Oscillations of Elastic Solar Panels of a Spacecraft at Finite Turnby Roll // Mechanics of Solids. – 2018. – Vol.53. – Is.2. – P.147-155.
41. Русских С.В., Шклярчук Ф.Н. Нелинейные колебания панелей солнечных батарей при больших углах поворота космического аппарата по крену // Сборник тезисов докладов Всероссийской научно-технической конференции «Механика и математическое моделирование в технике», Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана, 17-19 мая 2016 г.– С.198-200.
42. Осипов В.Г., Шошунов Н.Л. Космические тросовые системы: история и перспективы // Земля и Вселенная. – 1998. – №4. – С.19-29.
43. Bekey I., Penzo P.A. Tether propulsion // Aerospace America. – 1986. – Vol.24. – №7. – P.40-43.
44. Cartmell M.P., McKenzie D.J. A review of space tether research // Progress in Aerospace Sciences. – 2008. – Vol.44. – №1. – P.1-21.
45. Белецкий В.В., Левин Е.М. Динамика космических тросовых систем. – М.: Наука, 1990. – 330с.
46. Иванов В.А., Ситарский Ю.С. Динамика полета системы гибко связанных космических объектов. – М.: Машиностроение, 1986. – 246с.
47. Щербаков В.И. Орбитальные маневры космической тросовой системы. – СПб.: ВКА им. А.Ф. Можайского, 2010. – 185с.
48. Щербаков В.И. Механика стационарных движений гибко связанных КА. – СПб.: ВКА им. А.Ф. Можайского, 2010. – 108с.
49. Aslanov V.S., Ledkov A.S. Dynamics of the Tethered Satellite Systems. – Cambridge: Woodhead PUBLISHING Limited, 2012. – 331p.

50. Alpatov A.P., Dranovski V.I., Khoroshilo V.S., Pirozhenko A.V., Zakrzhevskii A.E. Research of dynamics of space cable systems stabilized by rotation // In Book of abstracts 48-th International Astronautic Congress, Turin, Italy, October 1997. – P.13.

51. Иванов В.А., Купреев С.А., Ручинский В.С. Выйгрыш в энергетике за счет применения тросовых систем для спуска объектов с орбиты на Землю // Вестник МАТИ. – 2011. – Вып.18 (90). – С.124-128.

52. Иванов В.А., Купреев С.А., Ручинский В.С. Методика оценки экономии топлива при транспортном обслуживании космических аппаратов с использованием тросовой системы // Вестник МАТИ. – 2012. – Вып.19 (91). – С.105-113.

53. Ledkov A.S., Aslanov V.S. Evolution of space tethered system's orbit during space debris towing taking into account the atmosphere influence // Nonlinear Dynamics. – 2019. – Vol.96. – Is.3. – P.2211-2223.

54. Pikalov R.S., Aslanov V.S. Controlled attitude motion of the space tether system at the retraction tether stage // International Journal of Engineering Systems Modelling and Simulation. – 2020. – Vol.11. – №4. – P.170-175.

55. Русских С.В. Управляемое движение в гравитационном поле субспутника на длинном тяжелом тросе, выпускаемого с космического аппарата // Сборник тезисов докладов 15-ой Международной конференции «Авиация и космонавтика – 2016», Москва, МАИ, 14-18 ноября 2016 г. – С.133-134.

56. Pankow D., Besuner R., Wilkes R., Ullrich R. Deployment mechanisms on the fast satellite: magnetometer, radial wire and axial booms // Space Science Reviews. – 2001. – Vol.98. – №1. – P.93-111.

57. Сударь Ю.М., Щербаков В.И., Юлина А.О. Пассивная гравитационная стабилизация космического аппарата на геостационарной орбите // Труды Военно-Космической академии имени А.Ф. Можайского. – 2020. – №672. – С.326-335.

58. Овчинников М.Ю., Ткачев С.С., Ролдугин Д.С. Разработка рекомендаций по управлению ориентацией микроспутника при отказе части актюаторов // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. – 2013. – № 83. – 29с.

59. Петухов Р.А., Евстифеев В.В. Перспективная комбинированная система стабилизации и ориентации малых космических аппаратов // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия «Приборостроение». – 2012. – №1. – С.60-73.

60. Попов В.И. Системы ориентации и стабилизации космических аппаратов. – М.: Машиностроение, 1986. – 184с.

61. Пшеничнов С.Г. К вопросу о структуре решений нестационарных динамических задач линейной вязкоупругости // Вестник Тульского государственного университета. Серия математика, механика, информатика. – 2008. – Т.14. – №2. – С.144-155.

62. Пшеничнов С.Г. О построении решений нестационарных динамических задач связанной термоупругости // Вестник Тульского государственного университета. Серия математика, механика, информатика. – 2009. – Т.15. – №2. – С.70-82.

63. Connel G.M., Chobotov V. Possible Effects of Boom Flutter on the Attitude Dynamics of the OV1-10 Satellite // Journal Spacecraft and Rockets. – 1969. – Vol.6. – №1. – P.90-92.

64. Florio F.A., Hobbs R.B.Jr. An analytical representation of temperature distribution in gravity gradient rods // AIAA Journal. – 1968. – Vol.6. – №1. – P.99-102.

65. Yu Y.-Y. Thermally induced vibration and flutter of a flexible boom // Journal Spacecraft and Rockets. – 1969. – Vol.6. – №8. – P.902-910.

66. Graham J.D. Solar induced bending vibrations of a flexible member // AIAA Journal. – 1970. – Vol.8. – №11. – P.2031-2036.

67. Jordan P.F. Comment on “Thermally Induced Vibration and Flutter of a Flexible Boom” // Journal of Spacecraft and Rockets. – 1971. – Vol.8. – №2. P.204-205.

68. Yu Y.-Y. Reply by Author to P.F. Jordan and G. Augusti and New Results of Two-mode Approximation Based on a Vigorous Analysis of Thermal Bending Flutter of a Flexible Boom // *Journal of Spacecraft and Rockets*. – 1971. – Vol.8. – №2. – P.205-208.

69. Hagedorn P. Zurn Eigenwertpoblem Diskreter Linearer Mechanischer System mit Schwacher Dampfung und Kleinen Gyroskopischen Termen // *Zangew. Math. und Mech.* – 1984. – Vol.64. – №4. – P.48-49.

70. Гришанина Т.В., Шклярчук Ф.Н. Связанная задача термоупругого изгиба и теплопроводности тонкостенного круглого стержня при солнечном нагреве // *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. – 2000. – №6. – С.161-166.

71. Гришанина Т.В., Русских С.В., Шклярчук Ф.Н. Нестационарные термоупругие колебания тонкостенного стержня, соединенного с космическим аппаратом, при солнечном нагреве // *Механика композиционных материалов и конструкций*. – 2015. – Т.21. – №4. – С.459-468.

72. Гришанина Т.В., Русских С.В., Шклярчук Ф.Н. Задача о термоупругих колебаниях стержня, соединенного с космическим аппаратом, при солнечном нагреве с учетом теплоизлучения // *Механика композиционных материалов и конструкций*. – 2017. – Т.23. – №2. – С.198-213.

73. Гришанина Т.В., Русских С.В., Шклярчук Ф.Н. Термоупругие колебания длинного тонкостенного стержня, соединенного с космическим аппаратом, при солнечном нагреве с учетом теплоизлучения // *Сборник материалов Всероссийской научной конференции с международным участием «Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред»*, Москва, ИПРИМ РАН, 15-17 декабря 2015 г. – С.84-87.

74. Гришанина Т.В., Русских С.В., Шклярчук Ф.Н. О динамической устойчивости изгибных термоупругих колебаний тонкостенного стержня при солнечном нагреве // *Сборник материалов Всероссийской научной конференции с международным участием «Механика композиционных материалов и*

конструкций, сложных и гетерогенных сред», Москва, ИПРИМ РАН, 15-17 декабря 2015 г. – С.82-83.

75. Есепкина Н.А., Корольков Д.В., Парийский Ю.Н. Радиотелескопы и радиометры. – М.: Наука, 1973. – 416с.

76. Поляк В.С., Бервалдс Э.Я. Прецизионные конструкции зеркальных радиотелескопов. – Рига: Зинатне, 1990. – 526с.

77. Усюкин В.И., Архипов М.Ю. Моделирование статики и динамики крупногабаритных рефлекторов космических антенн. – М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2012. – 60с.

78. Гряник М.В., Ломан В.И. Развертываемые зеркальные антенны зонтичного типа. – М.: Радио и Связь, 1987. – 72с.

79. Великшин Е.П. Развертываемые антенны для космических летательных аппаратов // Радиоэлектроника за рубежом. – 1970. – №11. – С.3-35.

80. Ломан В.И., Гряник М.В. Способ построения складной антенны зонтичного типа // Известия вузов МВ и ССО СССР. Радиоэлектроника. – 1983. – Т.26. – №8. – С.77-79.

81. Лопатин А.В., Рутковская М.А. Обзор Конструкций современных трансформируемых космических антенн // Вестник Сибирского государственного университета науки и технологии имени Академика М.Ф. Решетнева. – 2007. – №2. – С.51-57.

82. Лопатин А.В., Рутковская М.А. Обзор Конструкций современных трансформируемых космических антенн // Вестник Сибирского государственного университета науки и технологии имени Академика М.Ф. Решетнева. – 2007. – №3. – С.78-81.

83. Akira M. In-orbit deployment performance of large satellite antennas // Spacecraft and Rockets. – 1996. – №2(33). – P.222-227.

84. Buhl T., Jensen F.V., Pellegrino S. Shape optimization of cover plates for retractable roof structures // Computers and Structures. – 2004. – №82. – P.1227-1236.

85. Gantes C.J., Konitopoulou E. Geometric design of arbitrarily curved bistable deployable arches with discrete joint size // *International Journal of Solids and Structures*. – 2004. – №41. – P.5517-5540.

86. Guest S.D., Pellegrino S. A new concept for solid surface deployable antennas // *Acta astronautica*. – 1996. – №2. – P.103-113.

87. Lai C.-Y., Pellegrino S. Deployable membrane reflectors with offset configuration // *AIAA Papers*. – 2002. – №1368. – P.1-11.

88. Lai C.-Y. Umbrella-type furlable reflector based on tension-truss concept // *42nd AIAA/ASME/ASCE/ AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference and Exhibit*. – Seattle, WA, 2001. – P.1-10.

89. Roederer A.G., Rahmat-Samii Y. Unfurlable satellite antennas: a review // *Annales des Telecommunications*. – 1989. – № 44. – P.475-488.

90. Tibert A.G., Pellegrino S. Furlable reflector concept for small satellites // *AIAA Papers*. – 2001. – № 1261. – P.1-11.

91. Пономарев С.В. Трансформируемые рефлекторы антенн космических аппаратов // *Вестник Томского государственного университета. Математика и Механика*. – 2011. – №4. – С.110-119.

92. Бельков А.В., Евдокимов А.С. и др. Компьютерное моделирование перспективных космических рефлекторов // *Вестник Самарского государственного технического университета. Физико-математические науки*. – 2008. – №2. – С.161-170.

93. Крылов А.В. Исследование процесса раскрытия антенного контура // *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*. – 2013. – №12. – С.45-50.

94. Зимин В.Н., Сдобников А.Н. Особенности моделирования динамики крупногабаритных трансформируемых космических конструкций // *Решетневские чтения: материалы XIV Международной научной конференции, посвященной памяти генерального конструктора ракетно-космических систем академика М.Ф. Решетнева, Красноярск, СибГУ им. М.Ф. Решетнева, 10-12 ноября 2010 г.* – С.58-59.

95. Бей Н.А., Зимин В.Н. Трансформируемые антенны больших размеров для геостационарных космических аппаратов // Антенны. – 2005. – Вып.10(101). – С.24-27.

96. Зимин В.Н. Моделирование динамики раскрытия космических конструкций ферменного типа // Полет. – 2008. – № 10. – С.42-48.

97. Георгиев А.Ф., Девятов С.В., Романов А.В., Сергиевский С.А., Хитров И.В., Щесняк С.С. Проектирование и расчет крупногабаритных раскрывающихся конструкций с помощью программных комплексов MSC.Software // CADmaster. – 2009. – №2-3(47-48). – С.28-38.

98. Патент РФ RU2447550C2 «Зонтичная антенна космического аппарата», 10.04.2012.

99. Патент РФ RU2427949C2 «Трансформируемая антенна зонтичного типа космического аппарата», 12.10.2009.

100. Патент РФ RU2427948C1 «Зонтичная антенна космического аппарата», 04.05.2010.

101. Патент РФ RU2419929C1 «Развертываемый крупногабаритный зеркальный отражатель космического аппарата», 04.05.2010.

102. Патент РФ RU2418346C2 «Зонтичная антенна космического аппарата», 03.08.2009.

103. Патент РФ RU2382453C1 «Развертываемый крупногабаритный рефлектор космического аппарата», 20.02.2010.

104. Патент РФ RU2449437C1 «Развертываемый крупногабаритный рефлектор космического аппарата и способ его изготовления», 27.04.2012.

105. Патент РФ RU2503102C2 «Зонтичная антенна космического аппарата», 27.12.2013.

106. Бужинский В.А., Клишев О.П., Мытарев А.И. Исследование влияния упругих колебаний крупногабаритных элементов конструкции космического аппарата на искажение геометрических характеристик рефлектора // Космонавтика и ракетостроение. – 2007. – №2(47). – С.102-108.

107. Русских С.В., Шклярчук Ф.Н. Динамика раскрытия космической зонтичной антенны, состоящей из многозвенных гибких радиальных стержней // Космонавтика и ракетостроение. – 2020. – №2(113). – С.86-98.

108. Русских С.В., Нагорнов А.Ю. Нелинейная задача раскрытия и формообразования космической зонтичной антенны // Сборник материалов XXV Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова, Калужская область, Кременки, 18-22 марта 2019 г. – Т.1. – С.173-174.

109. Русских С.В., Нагорнов А.Ю. Динамика развертывания и уточненная задача формообразования космической зонтичной антенны // Сборник тезисов докладов 9-ой Всероссийской научной конференции с международным участием «Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред» им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского посвященная 30-летию ИПРИМ РАН, Москва, ИПРИМ РАН, 19-21 ноября 2019 г. – С.77.

110. Русских С.В., Нагорнов А.Ю. Задача динамики раскрытия из транспортировочного в предварительное рабочее положение космической зонтичной антенны // Сборник материалов XXVI Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова, Калужская область, Кременки, 16-20 марта 2020 г. – Т.1. – С.192-193.

111. Русских С.В., Шклярчук Ф.Н. Задачи развертывания и формообразования космической зонтичной антенны, состоящей из многозвенных гибких радиальных стержней, соединенных по параллелям растяжимыми тросовыми элементами // Сборник тезисов докладов 19-ой Международной конференции «Авиация и космонавтика – 2020», Москва, МАИ, 23-27 ноября 2020 г., стр. 402-403.

112. Русских С.В., Шклярчук Ф.Н. Расчет формообразования космической зонтичной антенны, состоящей из гибких радиальных стержней, соединенных по параллелям растяжимыми тросовыми элементами // Космонавтика и ракетостроение. – 2019. – №2(107). – С.95-103.

113. Русских С.В., Нагорнов А.Ю., Шавня Р.А. Метод численного решения нелинейной задачи формообразования зонтичной антенны, состоящей из гибких радиальных стержней, соединенных растяжимыми тросовыми элементами // Сборник тезисов докладов 17-ой Международной конференции «Авиация и космонавтика – 2018», Москва, МАИ, 19-23 ноября 2018 г. – С.341-342.

114. Русских С.В., Шклярчук Ф.Н. Формообразование космической антенны зонтичного типа, состоящей из гибких радиальных стержней, соединенных растяжимыми тросовыми элементами // Сборник тезисов докладов 8-ой Всероссийской научной конференции с международным участием «Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред» им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского, Москва, ИПРИМ РАН, 18-19 декабря 2018 г. – С.51.

115. Русских С.В. Методика решения нелинейной задачи о формообразовании космической зонтичной антенны // Тезисы докладов Третьей молодежной конференции «Инновационная деятельность в науке и технике. Создание космических аппаратов. Актуальные проблемы и пути их решения», Московская область, Истра, 25 апреля 2019 г. – С.59-62.

116. Пржеменицкий Е.С. Матричный метод исследования конструкций на основе анализа подструктур // Ракетная техника и космонавтика. – 1963. – Т.1. – №1. – С.165-174.

117. Мейснер К. Алгоритм многократного объединения при расчете конструкций методом жесткостей // Ракетная техника и космонавтика. – 1968. – №11. – С.176-177.

118. Cheng Y.K. Finite Strip method in structural Analysis. – Oxford: Pergamon Press, 1976. – 232p.

119. Бурман З.И., Аксенов В.М., Лукашенко В.И., Тимофеев М.Т. Суперэлементный расчет подкрепленных оболочек. – М.: Машиностроение, 1982. – 256с.

120. Постнов В.А., Дмитриев С.А., Елтышев Б.К., Родионов А.А. Метод суперэлементов в расчетах инженерных сооружений. – Л.: Судостроение, 1979. – 287с.

121. Постнов В.А., Тарануха Н.А. Метод модуль-элементов в расчетах судовых конструкций. – Л.: Судостроение, 1990. – 320с.

122. Шатаев В.Г. Расчет многоконтурных тонкостенных конструкций методом отсеков // Известия Вузов, Авиационная техника. – 1976. – №2. – С.117-123.

123. Левашов П.Д., Вахитов М.Б. Применение гибридных схем к расчету тонкостенных конструкций методом перемещений // Известия Вузов, Авиационная техника. – 1980. – №2. – С.30-34.

124. Гришанина Т.В., Тютюнников Н.П., Шклярчук Ф.Н. Метод отсеков в расчетах колебаний конструкций летательных аппаратов. – М.: Издательство МАИ, 2010. – 180с.

125. Шклярчук Ф.Н., Гришанина Т.В. Применение метода отсеков к расчету колебаний жидкостных ракет-носителей. – М.: Издательство МАИ, 2017. – 160с.

126. Лурье А.И. Аналитическая механика. – М.: Физматгиз, 1961. – 824с.

127. Ланцош К. Вариационные принципы механики. – М.: Мир, 1965. – 408с.

128. Бойков В.Г., Юдаков А.А. Моделирование динамики системы твердых и упругих тел в программном комплексе Euler // Информационные технологии и вычислительные системы. – 2011. – №1. – С.42-52.

129. Данилин А.Н. Конечно-элементное моделирование плоского движения гибкой стержневой системы со связями // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2016. – Т.22. – №4. – С.467-490.

130. Данилин А.Н. Динамика стержневой системы со связями: плоская задача в конечно-элементной формулировке // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2016. – №4. – С.338-363.

131. Хайрер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. – М.: Мир, 2014. – 685с.

132. Скворцов Л.М. Неявный метод пятого порядка для решения дифференциально-алгебраических уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2015. – Т.55. – №6. – С.978-984.

133. Скворцов Л.М. Явный многошаговый метод численного решения жестких дифференциальных уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2007. – Т.47. – №6. – С.259-267.

134. Латыпов А.Ф., Никуличев Ю.В. Численные методы решения задач Коши для жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений на основе многозвенных интерполяционных полиномов Эрмита // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2007. – Т.47. – №2. – С.234-244.

135. Булатов М.В., Тыглиян А.В., Филлипов С.С. Об одном классе одношаговых одностадийных методов для жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2011. – Т.51. – №7. – С.1251-1265.

136. Белов А.А., Калиткин Н.Н. Выбор шага по кривизне для жестких задач Коши // Математическое моделирование. – 2016. – Т.28. – №11. – С.97-112.

137. Русских С.В., Шклярчук Ф.Н. Численное решение нелинейных уравнений движения составных упругих систем со связями // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2020. – Т.26. – №1. – С.139-150.

138. Шклярчук Ф.Н., Русских С.В. Динамика составных нелинейных систем со связями // Сборник материалов XXVII Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова, Калужская область, Кременки, 17-21 мая 2021 г. – Т.1. – С.225-226.

139. Русских С.В. Численное решение задачи о нелинейных колебаниях упругой балки с вращающимся тяжелым телом на конце // Сборник материалов

XXVII Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова, Калужская область, Кременки, 17-21 мая 2021 г. – Т.1. – С.195-197.

140. Черноусько Ф.Л., Болотник Н.Н., Градецкий В.Г. Манипуляционные роботы: динамика, управление, оптимизация. – М.: Наука, 1989. – 363с.

141. Акинфеев Т.С., Бабицкий В.И., Крупенин В.Л. Манипуляционные системы резонансного типа // Машиноведение. – 1982. – №1. – С.3-8.

142. Акуленко Л.Д., Михайлов С.А., Черноусько Ф.Л. Моделирование динамики манипулятора с упругими свойствами // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. – 1980. – №5. – С.131-141.

143. Вукобратович М., Потконяк В. Численный метод моделирования динамики манипулятора с упругими свойствами // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. – 1981. – №5. – С.131-141.

144. Михайлов С.А., Черноусько Ф.Л. Исследование динамики манипулятора с упругими звеньями // Известия АН СССР. МТТ. – 1984. – №2. – С.51-58.

145. Ковалева А.С. Управление колебательными и виброударными системами. – М.: Наука, 1990. – 256с.

146. Болотник Н.Н., Зейдис И.М., Циммерманн К., Яцун С.Ф. Динамика управляемых движений вибрационных систем // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. – 2006. – №5. – С.157-167.

147. Бабицкий В.М. Теория виброударных систем: Приближенные методы. – М.: Наука, 1978. – 352с.

148. Бабицкий В.М., Крупенин В.Л. Машины ударного действия. – М.: Знание, 1985. – 63с.

149. Колесников К.С., Кокушкин В.В., Борзых С.В., Панкова Н.В. Расчет и проектирование систем разделения ступеней ракет. – М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. – 376с.

150. Колесников К.С., Козлов В.И., Кокушкин В.В. Динамика разделения ступеней летательных аппаратов. – М.: Машиностроение, 1977. – 223с.

151. Palmer G.D., Mitchell D.H. Analysis and simulation of a high accuracy spacecraft separation system // *Journal of Spacecraft and Rockets*. – 1966. – Vol.3. – №4. – P.458-463.
152. Дегтярев Г.Л., Сиразетдинов Т.К. Теоретические основы оптимального управления упругими космическими аппаратами. – М.: Машиностроение, 1986. – 216с.
153. Das S.K., Utku S., Wada B.K. Inverse Dynamics of Adaptive Space Cranes with Tip Point Adjustment // *AIAA-90-1166-CP*. – 1990. – P.2367-2374.
154. Bainum P.M., Li F. Optimal large angle maneuvers of a flexible spacecraft // *Acta Astronautica*. – 1991. – Vol.25. – №3. – P.141-148.
155. Chan J.K., Modi V.J. A Closed-Form Dynamical Analysis of an Orbiting Flexible Manipulator // *Acta Astronautica*. – 1991. – Vol.25. – №2. – P.67-76.
156. Meirovitch L., Kwak M.K. Control of Flexible Spacecraft with Time-Varying Configuration // *Journal of Control, Guidance and Dynamics*. – 1992. – Vol.15. – №2. – P.314-324.
157. Miller D.W., Crawley E.F. Theoretical and Experimental Investigation of Space-Realizable Inertial Actuation for Passive and Active Structural Control // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. – 1988. – Vol.11. – №5. – P.449-458.
158. Закрежевский А.Е. Об оптимальном развороте упругого космического аппарата // *Прикладная механика*. – 2003. – Т.39. – №8. – С.106-113.
159. Ротенберг Я.Н. Автоматическое управление. – М.: Наука, 1971. – 396с.
160. Воронов А.А. Введение в динамику сложных управляемых систем. – М.: Наука, 1985. – 352с.
161. Ганиев Р.Ф., Закрежевский А.Е. Программные движения управляемых деформируемых конструкций. – М.: Наука, 1995. – 213с.
162. Masters B.P., Crawley E.F. Evolutionary Design of Controlled Structures // *Journal of Aircraft*. – 1999. – Vol.36. – №1. – P.209-217.
163. Матюхин В.И. Управление механическими системами. – М.: Физматлит, 2009. – 320с.

164. Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н. Управление колебаниями. – М.: Наука, 1976. – 383с.
165. Черноусько Ф.Л., Ананьевский И.М., Решмин С.А. Методы управления нелинейными механическими системами. – М.: Физматлит, 2006. – 326с.
166. Матросов В.М., Васильев С.Н., Москаленко А.И. Нелинейная теория управления: динамика, управление, оптимизация. – М.: Физматлит, 2003. – 352с.
167. Мирошник И.В., Никифоров В.О., Фрадков А.Л. Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. – СПб.: Наука, 2000. – 549с.
168. Александров В.В. Оптимальное управление движением. – М.: Физматлит, 2005. – 376с.
169. Бербюк В.Б. Динамика и оптимизация робототехнических систем. – Киев: Наукова Думка, 1989. – 187 с.
170. Кубышкин Е.П. Оптимальное управление поворотом твердого тела с гибким стержнем // Прикладная математика и механика. – 1992. – Т.56. – Вып.2. – С.240-249.
171. Кубышкин Е.П. Оптимальное управление поворотом системы двух тел, соединенных упругим стержнем // Прикладная математика и механика. – 2014. – Т.78. – Вып.5. – С.656-670.
172. Гришанина Т.В. Управляемый поворот упругого стержня на конечный угол // Вестник МАИ. – 2004. – Т.11. – №1. – С.64-68.
173. Гришанина Т.В. Устранение колебаний упругой системы после ее быстрого передвижения и поворота // Вестник МАИ. – 2004. – Т.11. – №2. – С.68-75.
174. Гришанина Т.В. Динамика управляемого движения упругих систем при конечных перемещениях и поворотах // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2004. – №6. – С.171-186.
175. Холостова О.В. О движениях двойного маятника с вибрирующей точкой подвеса // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2009. – №2. – С.25-40.

176. Буланчук П.О., Петров А.Г. Параметры вибрации точки подвеса для заданного положения равновесия двойного математического маятника // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2013. – №4. – С.31-39.

177. Асланов В.С., Безгласный С.П. Устойчивость и неустойчивость управляемых движений двухмассового маятника переменной длины // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2012. – №3. – С.32-46.

178. Ананьевский И.М., Анохин Н.В. Управление пространственным движением многозвенного перевернутого маятника с помощью момента, приложенного к первому звену // Прикладная математика и механика. – 2014. – Т.78. – Вып.6. – С.755-765.

179. Формальский А.М. Перевернутый маятник на неподвижном и подвижном основании // Прикладная математика и механика. – 2006. – Т.70. – Вып.1. – С.62-71.

180. Зевин А.А., Филоненко Л.А. Качественное исследование колебаний маятника с периодически меняющейся длиной и математическая модель качелей // Прикладная математика и механика. – 2007. – Т.71. – Вып.6. – С.989-1003.

181. Акуленко Л.Д. Оптимальное по быстродействию приведение возмущенного динамического объекта в заданное положение // Прикладная математика и механика. – 2008. – Т.72. – Вып.2. – С.230-240.

182. Мартыненко Ю.Г., Формальский А.М. Управляемый маятник на подвижном основании // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2013. – №1. – С.9-23.

183. Воробьев Е.И. Осуществление заданного относительного движения двух твердых тел двуруким роботом // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2018. – №2. – С.122-128.

184. Матюхин В.И. Приведение двух твердых тел в контакт без ударов ограниченными управлениями за конечное время // Прикладная математика и механика. – 2010. – Т.74. – Вып.5. – С.840-855.

185. Гришанина Т.В., Русских С.В., Шклярчук Ф.Н. Устранение нестационарных колебаний упругой системы в момент остановки после

конечного поворота по заданному закону с путем настройки собственных частот // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2018. – №4. – С.16-27.

186. Grishanina T.V., Russkikh S.V., Shklyarchuk F.N. Elimination of Nonstationary Oscillations of an Elastic System at the Stopping Time after Finite Rotation by the Given Law via the Tuning of Eigenfrequencies // Mechanics of Solids. – 2018. – Vol.53. – Is.4. – P.370-380.

187. Гришанина Т.В., Русских С.В., Шклярчук Ф.Н. Управляемый разворот космического аппарата с упругими панелями солнечных батарей на конечный угол // Сборник материалов XXII Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова, Калужская область, Кременки, 15-19 февраля 2016 г. – Т.2. – С.53-56.

188. Гришанина Т.В., Русских С.В., Шклярчук Ф.Н. Методы решения задачи устранения упругих колебаний линейных и нелинейных систем в момент остановки после конечного передвижения // Сборник тезисов докладов 9-ой Всероссийской научной конференции с международным участием «Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред» им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского посвященная 30-летию ИПРИМ РАН, Москва, ИПРИМ РАН, 19-21 ноября 2019 г. – С.29.

189. Гришанина Т.В., Русских С.В., Шклярчук Ф.Н. Управление конечным поворотом упругой системы из одного состояния в другое с гашением колебаний в момент окончания операции // Ученые записки Казанского университета. Серия физико-математические науки. – 2017. – Т.159. – Кн.4. – С.429-443.

190. Русских С.В. Управляемый поворот космического аппарата с упругими панелями солнечных батарей // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. – 2016. – №12(681). – С.97-105.

191. Русских С.В., Шклярчук Ф.Н. Конечное поперечное передвижение упругого стержня с массой на конце с гашением колебаний в момент остановки // Инженерный журнал: наука и инновации. – 2018. – Вып.7.

192. Русских С.В. Задача о гашении колебаний упругого стержня в момент остановки при его конечном поперечном перемещении // Сборник материалов первой Общероссийской научно-практической конференции «Вопросы инновационного развития аэрокосмического комплекса России», Москва, МАИ, декабрь 2018 г. – Кн.2. – С.20-25.

193. Русских С.В., Шклярчук Ф.Н. Применение метода Бубнова-Галеркина для расчета нелинейных колебаний математического маятника переменной длины при конечном передвижении из одного состояния покоя в другое // Инженерный журнал: наука и инновации. – 2018. – Вып.10.

194. Шклярчук Ф.Н., Русских С.В. Метод решения задачи устранения колебаний нелинейных систем с переменными параметрами в момент остановки после конечного передвижения // Сборник материалов XXVI Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова, Калужская область, Кременки, 16-20 марта 2020 г. – Т.2. – С.126-127.

195. Русских С.В., Шклярчук Ф.Н. Устранение колебаний твердого тела, подвешенного на тросе переменной длины, при управляемом горизонтальном перемещении подвеса // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2018. – №4. – С.234-245.

196. Русских С.В., Шклярчук Ф.Н. Передвижение тяжелого твердого тела, подвешенного на тросе переменной длины, с гашением колебаний // Прикладная математика и механика. – 2019. – №4. – С.549-561.

197. Russkikh S.V., Shklyarchuk F.N. Movement of a Heavy Rigid Body Suspended on a Cable of Variable Length with Oscillation Elimination // Mechanics of Solids. – 2019. – Vol.54. – Is.5. – P.683-693.

198. Шклярчук Ф.Н. К расчету деформированного состояния и устойчивости геометрически нелинейных упругих систем // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 1998. – №1. – С.140-146.

199. Паймушин В.Н., Шалашилин В.И. Непротиворечивый вариант теории деформаций сплошных сред в квадратичном приближении // Доклады Российской Академии Наук. – 2004. – Т.396. – №4. – С.492-495.

200. Паймушин В.Н., Шалашилин В.И. О соотношениях теории деформаций в квадратичном приближении и проблемы построения уточненных вариантов геометрически нелинейной теории слоистых элементов конструкций // Прикладная математика и механика. – 2005. – Т.69. – Вып.5. – С.861-881.

201. Бужинский В.А. Об устойчивости упругого тела под нагрузкой // Космонавтика и ракетостроение. – 2008. – №3(102). – С.74-80.

202. Гришанина Т.В. Задачи по теории колебаний упругих систем. – М.: Издательство МАИ, 1998. – 48с.

203. Авдеевский В.С. Основы теплопередачи в авиационной и ракетно-космической технике. – М.: Машиностроение, 1992. – 519с.

204. Марченко В.М. Температурные поля и напряжения в конструкциях летательных аппаратов. – М.: Машиностроение, 1965. – 298с.

205. Шклярчук Ф.Н. Колебания и аэроупругость летательных аппаратов. – М.: Издательство МАИ, 1981. – 89с.