

На правах рукописи



Гутник Сергей Александрович

**Динамика движения спутника относительно центра масс
с пассивными системами ориентации**

Специальность 01.02.01 — Теоретическая механика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва — 2019

Работа выполнена на кафедре информатики и вычислительной математики Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)» (МФТИ)

Научный консультант: **Сарычев Василий Андреевич**,
доктор физико-математических наук, профессор,
ФГБУН ФИЦ ИПМ им. М.В. Келдыша РАН

Официальные оппоненты:

Гердт Владимир Петрович, доктор физико-математических наук, профессор, Объединенный институт ядерных исследований (ОИЯИ г. Дубна), Лаборатория информационных технологий, сектор алгебраических и квантовых вычислений, начальник сектора

Кугушев Евгений Иванович, доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова», кафедра теоретической механики и мехатроники, профессор

Степанов Сергей Яковлевич, доктор физико-математических наук, доцент, ФГБУН Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН, отдел механики, заведующий отделом, главный научный сотрудник

Ведущая организация:

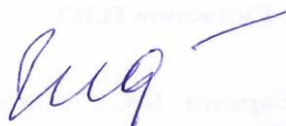
ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов»

Защита состоится «25» октября 2019 г. в 10-00 часов на заседании диссертационного совета Д 212.125.14, созданного на базе Московского авиационного института (национального исследовательского университета) по адресу: 125993, г. Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, д.4

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Московского авиационного института (национального исследовательского университета) и на сайте института www.mai.ru

Автореферат разослан « ____ » _____ 2019 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета
к. ф.-м.н., доцент



В.Ю. Гидаспов

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Одним из важных направлений развития современной космической техники является решение проблемы обеспечения и поддержания заданной ориентации искусственных спутников Земли. Определенная ориентация требуется как для коррекции траектории, так и для выполнения спутниками своих рабочих функций, таких как навигация, связь, проведение научных исследований. В зависимости от поставленных задач ориентация спутника может быть осуществлена с использованием активных или пассивных методов. Для проектов спутников без сложных программных маневров с очень большим временем активного функционирования более предпочтительно применение пассивных методов. При разработке пассивных систем ориентации можно использовать свойства гравитационного и магнитного полей, эффект сопротивления атмосферы и давление солнечного излучения, гироскопические свойства вращающихся тел. Главной особенностью пассивных систем ориентации является возможность функционировать продолжительное время без расходования энергии и топлива, что существенно продлевает срок работы космических аппаратов.

Среди пассивных систем, использующих свойства внешней среды, наибольшее распространение получили гравитационные системы ориентации, принцип работы которых основан на том, что в центральном ньютоновом поле сил спутник с неравными главными центральными моментами инерции имеет на круговой орбите 24 положения равновесия, четыре из которых являются устойчивыми (В.В. Белецкий, В.А. Сарычев, Р.Е. Робертсон, П.В. Лайкинс). Подробное рассмотрение динамики спутников с гравитационными системами ориентации представлено в монографии В.А. Сарычева «Вопросы ориентации искусственных спутников». Итоги науки и техники. Сер. «Исследование космического пространства». Т. 11. – М.: ВИНТИ, 1978. В нашей стране было запущено много спутников с гравитационной системой ориентации. Среди них спутники «Интеркосмос-15», «Интеркосмос-17-21», многие спутники серии

«Космос». Спутники с гравитационной системой ориентации входили в состав международной космической системы спасения «КОСПАС»-SARSAT, используемой для определения местоположения терпящих бедствия судов, самолетов, групп людей. Первые, вошедшие в систему спасения спутники «Космос-1383» и NOAA-8 были выведены на орбиту в 1982 г. и 1983 г. соответственно.

Введение в конструкцию вращающихся с постоянной угловой скоростью относительно корпуса спутника роторов позволяет получить новые более сложные положения равновесия спутника-гиростата, интересные для практических приложений. Примером спутника, для обеспечения ориентации которого использовались гравитационный и гиростатический моменты является космический аппарат «Ореол-3» (1981 г.) в советско-французском проекте «Аркад-3». Ориентация спутника по тангажу и крену осуществлялась гравитационным моментом, ориентация по рысканью обеспечивалась вращающимся с постоянной скоростью ротором.

Учет влияния на спутник аэродинамических сил позволяет получить дополнительный восстанавливающий момент. Первая успешная реализация чисто аэродинамической системы ориентации была осуществлена на спутниках «Космос-149» (1967 г.) и «Космос-320» (1970 г.).

Влияние на спутник постоянного момента изменяет его ориентацию и может вывести систему из рабочего положения равновесия. Поэтому очень важно исследовать также взаимное влияние гравитационного и постоянного моментов на положения равновесия спутника на круговой орбите.

Действие на движение спутника активного управляющего момента, зависящего от проекций его угловой скорости, позволяет получить новые положения равновесия и обеспечить асимптотическую устойчивость известных положений равновесия гравитационно-ориентированного спутника на круговой орбите. Такое активное управление можно обеспечить путем использования датчиков угловой скорости и двигателей ориентации.

Использование составной схемы гравитационной системы ориентации спутника, в соответствии с которой к телу спутника с помощью шарнира присоединяется второе тело (стабилизатор), позволяет путем выбора параметров стабилизатора сделать систему спутник-стабилизатор гравитационно-устойчивой. Стабилизатор в данной схеме выполняет функцию демпфирующего устройства. Определение положений равновесия связки тел на круговой орбите и условий устойчивости равновесий представляет практический интерес для создания составных схем гравитационной системы ориентации спутников.

При практической реализации спутников с пассивными системами ориентации приходится сталкиваться с многозначностью положений относительного равновесия. Может оказаться так, что углы и угловые скорости системы после отделения ее от ракеты-носителя велики. Тогда, для того чтобы спутник оказался в определенном устойчивом положении равновесия, нужно либо устанавливать на нем систему предварительного успокоения, либо дожидаться пассивного успокоения колебаний, а потом перевести спутник в заданное положение равновесия. При этом требуется знание всех положений равновесия спутника на круговой орбите и условий устойчивости равновесий. Решению возникающих здесь задач динамики и устойчивости посвящено много работ. В настоящее время пассивные системы ориентации успешно применяются на ряде искусственных спутников Земли. Анализ полетных данных свидетельствует о необходимости дальнейшего развития таких систем.

В диссертации рассматриваются задачи движения искусственных спутников Земли относительно центра масс с пассивными системами ориентации. В связи с этим исследуются свойства стационарных движений спутника-гиростата, спутника с аэродинамической системой ориентации, спутника при действии постоянного и активного управляющего моментов и составной схемы спутник-стабилизатор в центральном гравитационном поле на круговой орбите.

Основная масса работ по спутникам-гиростатам (В.В. Румянцев, В.Н. Рубановский, Р.В. Лонгман, Р.Е. Роберсон, В.А. Сарычев, С.Я. Степанов, В.В. Сазонов, Н.И. Яковлев, С.А. Мирер и др.) посвящена исследованию стационарных движений спутника, несущего силовой ротор, в центральном гравитационном поле в рамках ограниченной круговой задачи и исследованию устойчивости этих движений. Аналитическое решение прямой задачи, в которой определяется зависимость стационарных движений от величины кинетического момента ротора и главных центральных моментов инерции спутника, получено только для случаев, когда ось ротора параллельна главной оси, либо главной плоскости инерции спутника (Р.В. Лонгман, Р.Е. Роберсон, В.А. Сарычев, С.А. Мирер, А.А. Дегтярев, Н.И. Яковлев). В общем случае решение было найдено для обратной задачи, когда заданы инерционные параметры и направление одной из главных центральных осей инерции спутника; при этом требуется определить значение кинетического момента и ориентацию двух других главных центральных осей инерции (С.Я. Степанов, В.А. Сарычев, Н.И. Яковлев, Р.В. Лонгман, Р.Е. Роберсон). Проведен сравнительный анализ стационарных движений спутника с силовым ротором в ограниченной и неограниченной задаче (В.В. Румянцев, С.Я. Степанов).

Динамика вращательного движения спутника, подверженного действию гравитационного и аэродинамического моментов, исследуется в значительном числе работ. Одно из первых предложений по использованию аэродинамического момента в задаче ориентации искусственных спутников Земли было сделано Д.Е. Охоцимским в 1956 г. Глубокие исследования влияния аэродинамического и гравитационного моментов на движение спутника около центра масс были проведены В.В. Белецким, В.В. Румянцевым, В.А. Сарычевым, А.П. Маркеевым, С.А. Мирером, В.М. Морозовым, М.Ю. Овчинниковым, Ю.А. Садовым, В.В. Сазоновым, А.А. Ворониным и др. Решение задачи, в которой определяется зависимость стационарных движений от величины аэродинамического момента и главных центральных моментов

инерции спутника получено только для случаев, когда центр давления аэродинамических сил расположен на одной из главных центральных осей инерции либо в главной плоскости инерции спутника (В.А. Сарычев, С.А. Мирер, А.А. Дегтярев). Влияние восстанавливающего аэродинамического момента на одноосную гравитационную ориентацию спутника было исследовано В.А. Сарычевым и В.В. Сазоновым, что в дальнейшем получило развитие и было успешно использовано при обеспечении режима гравитационной ориентации орбитальных станций «Салют-6», «Салют-7» и станции «Мир». В результате обеспечения данного режима станция без расхода топлива сохраняла заданную ориентацию вдоль местной вертикали в течение нескольких суток с точностью до 1-3 градуса. Основы теории движения орбитальных станций «Салют» в режиме гравитационной ориентации изложены в работах В.А. Сарычева, В.В. Сазонова, Г.М. Гречко, В.П. Легостаева., И.И. Гансвинда и др.

Задаче определения положений равновесия спутника под действием гравитационного и постоянного моментов также посвящено много работ. В.В. Сазоновым было показано, что влияние малого постоянного момента на динамику спутника аналогично действию неконсервативного компонента аэродинамического момента. Была показана возможность существования положений равновесия спутника под действием гравитационного и постоянного моментов для некоторых частных случаев (В.А. Сарычев, Т.Б. Гарбер, А.Д. Герман, П. Паглионе).

Подробное рассмотрение динамики различных типов составных схем гравитационной системы ориентации спутник-стабилизатор представлено в указанной выше книге В.А. Сарычева «Вопросы ориентации искусственных спутников».

Использование активных систем управления, которые включают в себя датчики ориентации и исполнительные элементы, обеспечивает во многих случаях асимптотическую устойчивость положений равновесия спутника, что

особенно важно для практического применения. Подробно проблемы активного управления ориентацией искусственных спутников и космических аппаратов изложены в монографии Б.В. Раушенбаха, Е.Н. Токаря «Управление ориентацией космических аппаратов». – М.: Наука, 1974.

Для анализа устойчивости стационарных движений спутника применяют различные методы, большинство из которых основывается на теории устойчивости, созданной А.М. Ляпуновым и развитой отечественными учеными Н.Г. Четаевым, В.В. Румянцевым, Е.А. Барбашиным, Н.Н. Красовским и др.

При решении систем стационарных уравнений движения, которые представляют собой системы алгебраических уравнений с параметрами, активно применялись алгоритмы и современные методы компьютерной алгебры. Примеры первых успешных применений символьных вычислений в задачах физики и математики в нашей стране были представлены В. П. Гердтом, Д. В. Ширковым, О. В. Тарасовым в статье «Аналитические вычисления на ЭВМ в приложении к физике и математике» (УФН, Т. 130, №1(1980)).

В диссертации основное внимание уделено решениям прямой задачи, в которой определяется зависимость положений равновесия спутника от таких параметров, как величина суммарного гиростатического момента, аэродинамического момента, постоянного момента, активного управляющего момента, значения главных центральных моментов инерции системы и параметров составной схемы спутник-стабилизатор. Проведен детальный анализ условий устойчивости полученных положений равновесия.

Целью диссертационной работы являются разработка аналитических и символьно-численных методов исследования задач динамики движения относительно центра масс спутника-гиростата, спутника, подверженного действиям аэродинамического момента, постоянного момента, активного

управляющего момента, зависящего от проекций угловой скорости, и составной схемы спутник-стабилизатор.

Задачами исследования являются:

– разработка символьно-численных методов определения положений равновесия спутника и анализа их устойчивости;

– разработка методов решений прямой задачи о положениях равновесия спутника в центральном гравитационном поле на круговой орбите при действии возмущающих моментов;

– анализ условий устойчивости равновесных ориентаций при действии внешних моментов и асимптотической устойчивости при наличии управляющих моментов;

– исследование равновесных ориентаций системы двух тел, соединенных сферическим шарниром, в центральном гравитационном поле.

Методы исследования. В диссертации применяются методы механики космического полета, теоретической механики, теории дифференциальных уравнений и теории устойчивости, в том числе, теоремы Ляпунова и Рауса, методы математического моделирования, методы алгебры и компьютерной алгебры применительно к решению систем алгебраических уравнений.

Научная новизна. В диссертации получены следующие основные новые результаты, которые выносятся на защиту:

1. Разработан символьно-численный метод исследования положений равновесия спутника и выполнено полное решение задачи о положениях равновесия спутника-гиростата в общем случае для произвольных значений инерционных параметров и вектора гиростатического момента. Проведено численно-аналитическое исследование положений равновесия спутника-гиростата и достаточных условий устойчивости равновесий на круговой орбите.

2. Разработан аналитический метод решения задачи о положениях равновесия осесимметричного спутника-гиростата для произвольных значений

вектора гиросtatического момента и проведен анализ найденных положений равновесия и достаточных условий их устойчивости.

3. Разработан символично-аналитический метод решения задачи о положениях равновесия спутника-гиростата в случаях, когда вектор гиросtatического момента находится в одной из плоскостей, образуемых главными центральными осями инерции спутника, и не совпадает ни с одной из этих осей.

4. Разработан символично-численный метод решения задачи о положениях равновесия спутника–твёрдого тела на круговой орбите под действием гравитационного и аэродинамического моментов для произвольных значений инерционных параметров и вектора аэродинамического момента; исследованы положения равновесия спутника и достаточные условия их устойчивости.

5. Разработаны методы решения задачи о положениях равновесия осесимметричного спутника на круговой орбите под действием гравитационного и аэродинамического момента; проведен анализ положений равновесия спутника и достаточных условий устойчивости найденных положений равновесия.

6. Разработаны методы решения задачи о положениях равновесия спутника под действием гравитационного и аэродинамического момента в случаях, когда вектор аэродинамического момента находится в плоскости, образуемой главными центральными осями инерции спутника и не совпадает ни с одной из этих осей. Проведено детальное исследование положений равновесия спутника и эволюции изменения областей с равным числом положений равновесия.

7. Разработаны символично-аналитические методы решения задачи о положениях равновесия спутника под действием гравитационного и постоянного момента в связанной со спутником системе координат. Проведено исследование положений равновесия спутника и эволюции изменения областей с равным числом положений равновесия.

8. Разработан метод исследования положений равновесия спутника, на который, кроме гравитационного момента, действует активный управляющий момент, зависящий от проекций угловой скорости спутника. Проведены анализ условий асимптотической устойчивости нулевого положения равновесия и численное исследование переходных процессов пространственных колебаний спутника при различных параметрах управления.

9. Разработан символьно-аналитический метод решения задачи о стационарных движениях осесимметричного спутника на круговой орбите при действии гравитационного момента и активного управляющего момента.

10. Разработан комбинированный символьно-аналитический алгоритм определения равновесных ориентаций системы двух тел, соединенных сферическим шарниром, в центральном гравитационном поле на круговой орбите. Найдены и исследованы новые классы пространственных равновесных решений задачи и получены условия их существования в зависимости от безразмерных параметров системы. Определены значения параметров, при которых изменяется число положений равновесия системы спутник-стабилизатор.

Достоверность и обоснованность результатов работы обеспечивается корректностью постановок задач, наличием полных и строгих доказательств утверждений, численных и символьных вычислений. Полученные в работе аналитические результаты подтверждаются символьно-численным моделированием и сравнением с результатами, опубликованными отечественными и зарубежными авторами.

Практическая ценность работы. Полученные в работе результаты могут быть использованы при проектировании пассивных гравитационных и аэродинамических систем управления ориентацией искусственных спутников Земли и космических станций.

Положения, выносимые на защиту:

1. Аналитический и символьно-численные методы определения всех положений равновесия спутника-гиростата, движущегося по круговой орбите, для заданных значений параметров задачи. На основе предложенных методов выполнено полное решение задачи о положениях равновесия спутника-гиростата для произвольных значений инерционных параметров и вектора гиростатического момента. Проведено детальное численное исследование эволюции изменения областей с равным числом положений равновесия. Определены значения бифуркационных параметров, при которых происходит изменение областей с равным числом положений равновесия. Приведены численно-аналитические результаты анализа достаточных условий устойчивости положений равновесия спутника-гиростата.

2. Разработан аналитический метод определения положений равновесия осесимметричного спутника-гиростата и исследования достаточных условий их устойчивости. На основе разработанного метода выполнено решение задачи о положениях равновесия осесимметричного спутника-гиростата для произвольных значений вектора гиростатического момента и проведен анализ достаточных условий устойчивости найденных положений равновесия.

3. Разработан символьно-аналитический метод определения положений равновесия спутника-гиростата в трех случаях, когда вектор гиростатического момента находится в одной из плоскостей, образуемых главными центральными осями инерции спутника и не совпадает ни с одной из этих осей. Решена задача определения положений равновесия спутника-гиростата. Проведено детальное аналитическое исследование эволюции областей с равным числом положений равновесия.

4. Предложено полное решение задачи о положениях равновесия спутника–твёрдого тела на круговой орбите под действием гравитационного и аэродинамического моментов в общем случае для произвольных значений инерционных параметров и вектора аэродинамического момента на основе

символьно-аналитического метода определения всех положений равновесия спутника для заданных значений параметров задачи. Проведено детальное численное исследование эволюции областей с равным числом положений равновесия. Определены значения бифуркационных параметров, при которых происходит изменение областей с равным числом положений равновесия. Получены численно-аналитические результаты анализа достаточных условий устойчивости положений равновесия спутника.

5. Разработан аналитический метод определения положений равновесия осесимметричного спутника под действием гравитационного и аэродинамического момента и исследования достаточных условий их устойчивости, на основе которого выполнено решение задачи о положениях равновесия осесимметричного спутника на круговой орбите для произвольных значений вектора аэродинамического момента и проведен анализ достаточных условий устойчивости найденных положений равновесия.

6. Разработан символьно-аналитический метод решения задачи о положениях равновесия спутника под действием гравитационного и аэродинамического момента в случаях, когда вектор аэродинамического момента находится в плоскости, образуемой главными центральными осями инерции спутника и не совпадает ни с одной из этих осей. Проведено детальное аналитическое исследование положений равновесия и эволюции областей с равным числом положений равновесия.

7. Предложены символьно-аналитические методы решения задачи о положениях равновесия спутника под действием гравитационного и постоянного момента в связанной со спутником системе координат с применением алгебраических методов и методов символьных вычислений. Проведено детальное аналитическое исследование эволюции областей с равным числом положений равновесия спутника. Определены значения бифуркационных параметров, при которых происходит изменение областей с равным числом положений равновесия.

8. Предложен метод исследования положений равновесия спутника на который, кроме гравитационного момента, действует зависящий от проекций угловой скорости спутника активный управляющий момент. Выполнен анализ условий асимптотической устойчивости нулевого положения равновесия и численное исследование переходных процессов пространственных колебаний спутника при различных параметрах управления.

9. Разработан символично-аналитический метод решения задачи о стационарных движениях осесимметричного спутника на круговой орбите при действии гравитационного момента и активного управляющего момента. Решена задача определения всех стационарных движений спутника для заданных значений параметров системы и проведен анализ эволюции областей с равным числом стационарных движений спутника.

10. Предложен комбинированный символично-аналитический алгоритм определения равновесных ориентаций системы двух тел, соединенных сферическим шарниром, в центральном гравитационном поле на круговой орбите. Найдены и исследованы новые классы пространственных равновесных решений задачи и получены условия их существования в зависимости от безразмерных параметров системы. Определены значения параметров, при которых изменяется число положений равновесия системы спутник-стабилизатор.

Апробация результатов работы. Результаты диссертационной работы докладывались на международных и всероссийских конференциях, совещаниях, семинарах и симпозиумах: на XII Всероссийском совещании по проблемам управления (Москва, ИПУ РАН, 2014), на XII (2012 г.) и XIII (2016 г.) международной конференции им. Е.С. Пятницкого «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» Москва, ИПУ РАН; на XXXV (2011 г.), XXXVI (2012 г.), XXXVII (2013 г.), XXXIX (2015 г.), XL (2016 г.), XLI (2017 г.), XLII (2018 г.) Академических чтениях по космонавтике, Москва; на Международной конференции «Математическое моделирование и

вычислительная физика» (Дубна. ОИЯИ, 2013 г. и 2017 г.); на Международной конференции «Компьютерная алгебра». (Москва. ФИЦ ИУ РАН, ВЦ им. А.А. Дородницына, РУДН 2016 г., РЭУ им. Г.В. Плеханова 2017 г.); на Международном рабочем совещании «Компьютерная алгебра» (Дубна. ОИЯИ, 2011–2018 г.г.); на 2, 13, 15, 17–20 Международной конференции «Компьютерная алгебра в научных исследованиях (CASC)» (Мюнхен, ТУМ, 1999 г.; Кассель, КУ, 2011 г.; Берлин, СУБ, 2013 г.; Аахен, АУ, 2015 г.; Бухарест, БУ, 2016 г.; Пекин, КАН, 2017 г.; Лилль, ЛУ, 2018 г.). На заседаниях научного семинара по Компьютерной Алгебре (Москва, МГУ им. Ломоносова, ФИЦ ИУ РАН 2011, 2013 и 2018 г.г.); на 3-й Международной конференции по динамике и управлению космических систем (DYCOSS 2017) Международной Академии Астронавтики (ИАА) (Москва, РУДН, 2017 г.); на Международном симпозиуме по аэрокосмическим технологиям The First Aerospace Symposium «The Silk Road» (Долгопрудный. МФТИ, 6-8 декабря 2018 г.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 46 печатных работах, из них 22 статьи в рецензируемых журналах и изданиях [1–22] рекомендованных ВАК РФ, среди которых 20 публикаций в изданиях, индексируемых в международных базах данных Scopus и Web of Science, 8 препринтов и 16 докладов и тезисов докладов.

Личный вклад соискателя. Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. В совместных работах по исследованию положений равновесия спутника и их устойчивости при действии внешних моментов вклад автора в постановку решенных задач и в интерпретацию полученных результатов был равным вкладом других соавторов, а само решение задач и соответствующие вычисления были выполнены диссертантом лично в процессе научной деятельности. Вклад автора в разработку методов определения положений равновесия и методов анализа их устойчивости был основным. Все представленные в диссертации результаты получены автором лично.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы. Работа изложена на 280 страницах, содержит 106 иллюстраций и 3 таблицы. Библиография включает 186 наименований.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность темы и рассматриваемых научных задач, сформулированы цели и задачи исследования, дается тематический обзор литературы, краткое содержание диссертации по главам, дается оценка научной новизны полученных результатов, сведения о публикациях по теме диссертации и апробации работы.

Глава 1 посвящена исследованию динамики движения спутника-гиростата на круговой орбите. Спутник с расположенными внутри него маховиками, оси вращения которых фиксированы относительно корпуса, называют гиростатом. Исследовать динамику спутника-гиростата важно по двум причинам. С одной стороны, благодаря введению маховиков появляется возможность получения новых положений равновесия, с другой стороны исследование динамики спутника-гиростата позволяет проанализировать влияние на ориентацию спутника нескомпенсированного кинетического момента.

В разделе 1.1 дается постановка прямой и обратной задачи, приводится краткий анализ полученных результатов для частных случаев данной задачи, сформулированы основные допущения о геометрии системы.

В разделе 1.2 выводятся уравнения движения системы. Для записи уравнений движения используются две правые прямоугольные системы координат с началом в центре масс O спутника-гиростата. $OXYZ$ - орбитальная система координат. Ось OZ направлена вдоль радиуса-вектора, соединяющего центры масс Земли и спутника; ось OX направлена вдоль вектора линейной скорости центра масс O спутника. $Oxuz$ – связанная со спутником система координат; Ox, Oy, Oz – главные центральные оси инерции спутника. Ориентация системы координат $Oxuz$ относительно орбитальной

системы координат определяется с использованием углов Эйлера ψ , ϑ , φ . Приводятся выражения для кинетической энергии гиростата и силовой функции, определяющей влияние гравитационного поля Земли на спутник-гиростат.

Используя выражения для кинетической энергии системы и силовой функции, уравнения движения спутника-гиростата на круговой орбите записываются в следующем виде:

$$\begin{aligned} A\dot{p} + (C - B)qr - 3\omega_0^2(C - B)a_{32}a_{33} - \bar{H}_2r + \bar{H}_3q &= 0, \\ B\dot{q} + (A - C)rp - 3\omega_0^2(A - C)a_{33}a_{31} - \bar{H}_3p + \bar{H}_1r &= 0, \\ C\dot{r} + (B - A)pq - 3\omega_0^2(B - A)a_{31}a_{32} - \bar{H}_1q + \bar{H}_2p &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Уравнения (1) замыкаются кинематическими соотношениями Эйлера

$$\begin{aligned} p &= \dot{\psi}a_{31} + \dot{\vartheta}\cos\varphi + \omega_0a_{21}, \\ q &= \dot{\psi}a_{32} - \dot{\vartheta}\sin\varphi + \omega_0a_{22}, \\ r &= \dot{\psi}a_{33} + \dot{\varphi} + \omega_0a_{23}. \end{aligned} \quad (2)$$

В уравнениях (1), (2) A, B, C – главные центральные моменты инерции гиростата; p, q, r , $\bar{H}_1, \bar{H}_2, \bar{H}_3$ – проекции абсолютной угловой скорости гиростата и постоянные проекции вектора гиростатического момента на оси Ox, Oy, Oz ; ω_0 – угловая скорость движения центра масс гиростата по круговой орбите; Точкой обозначено дифференцирование по времени t .

Для уравнений движения (1), (2) справедлив обобщенный интеграл энергии

$$\begin{aligned} h &= \frac{1}{2}(A\bar{p}^2 + B\bar{q}^2 + C\bar{r}^2) + \frac{3}{2}\omega_0^2[(A - C)a_{31}^2 + (B - C)a_{32}^2] + \\ &+ \frac{1}{2}\omega_0^2[(B - A)a_{21}^2 + (B - C)a_{23}^2] - \omega_0(\bar{H}_1a_{21} + \bar{H}_2a_{22} + \bar{H}_3a_{23}). \end{aligned} \quad (3)$$

В разделе 1.3 исследуются положения равновесия спутника гиростата на круговой орбите, которые определяются системой стационарных уравнений

$$\begin{aligned}
(C - B)(a_{22}a_{23} - 3a_{32}a_{33}) - H_2a_{23} + H_3a_{22} &= 0, \\
(A - C)(a_{23}a_{21} - 3a_{33}a_{31}) - H_3a_{21} + H_1a_{23} &= 0, \\
(B - A)(a_{21}a_{22} - 3a_{31}a_{32}) - H_1a_{22} + H_2a_{21} &= 0.
\end{aligned} \tag{4}$$

Уравнения (4) получаются из системы (1), если положить в них значения эйлеровых углов, равными константе, и $H_i = \bar{H}_i / \omega_0$ ($i = 1, 2, 3$). Система (4) позволяет определить положения равновесия спутника-гиростата в орбитальной системе координат. При исследовании положений равновесия использовалась эквивалентная системе (4) система

$$\begin{aligned}
4(Aa_{21}a_{31} + Ba_{22}a_{32} + Ca_{23}a_{33}) + (H_1a_{31} + H_2a_{32} + H_3a_{33}) &= 0, \\
Aa_{11}a_{31} + Ba_{12}a_{32} + Ca_{13}a_{33} &= 0, \\
(Aa_{11}a_{21} + Ba_{12}a_{22} + Ca_{13}a_{23}) + (H_1a_{11} + H_2a_{12} + H_3a_{13}) &= 0,
\end{aligned} \tag{5}$$

которая получается проектированием уравнений (4) на оси орбитальной системы координат.

Систему (4) или (5) можно рассматривать как систему трех уравнений с неизвестными $\psi_0, \vartheta_0, \varphi_0$. Другой способ замыкания уравнений (4), (5) заключается в добавлении шести условий ортогональности направляющих косинусов

$$\begin{aligned}
a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 &= 1, & a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} &= 0, \\
a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 &= 1, & a_{11}a_{31} + a_{12}a_{32} + a_{13}a_{33} &= 0, \\
a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 &= 1, & a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} &= 0.
\end{aligned} \tag{6}$$

Для системы (4), (6) или (5), (6) возможны следующие две постановки задачи о положениях равновесия спутника-гиростата.

1. Прямая задача: заданы A, B, C, H_1, H_2, H_3 ; требуется определить все девять направляющих косинусов (или три угла Эйлера), т.е. найти все положения равновесия спутника-гиростата.

2. Обратная задача: заданы A, B, C и три направляющих косинуса; требуется определить H_1, H_2, H_3 и оставшиеся шесть направляющих косинусов так, чтобы удовлетворялись уравнения (4), (6) или (5), (6).

Полное исследование общего случая прямой задачи, когда $H_1 \neq 0, H_2 \neq 0, H_3 \neq 0, A \neq B \neq C$, в представленной работе проведено впервые. Решение обратной задачи и частных случаев прямой задачи, когда одна из проекций вектора гиростатического момента на оси связанной системы координат равна нулю, описаны во многих публикациях, посвященных данной задаче. Впервые решение обратной задачи было выполнено С.Я. Степановым.

Система (5), (6) из девяти уравнений с использованием геометрических методов была сведена к более простому случаю

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{4(C-B)a_{32}a_{33}}{F}, \quad a_{12} = \frac{4(A-C)a_{33}a_{31}}{F}, \quad a_{13} = \frac{4(B-A)a_{31}a_{32}}{F}, \\ a_{21} &= \frac{4(I_3-A)a_{31}}{F}, \quad a_{22} = \frac{4(I_3-B)a_{32}}{F}, \quad a_{23} = \frac{4(I_3-C)a_{33}}{F}. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь $F = H_1 a_{31} + H_2 a_{32} + H_3 a_{33}$, $I_3 = A a_{31}^2 + B a_{32}^2 + C a_{33}^2$, а направляющие косинусы a_{31}, a_{32}, a_{33} определяются из уравнений

$$\begin{aligned} 16[(B-C)^2 a_{32}^2 a_{33}^2 + (C-A)^2 a_{33}^2 a_{31}^2 + (A-B)^2 a_{31}^2 a_{32}^2] &= F^2 (a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2), \\ 4(B-C)(C-A)(A-B)a_{31}a_{32}a_{33} &+ [H_1(B-C)a_{32}a_{33} + \\ + H_2(C-A)a_{33}a_{31} + H_3(A-B)a_{31}a_{32}]F &= 0, \quad a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 = 1. \end{aligned} \quad (8)$$

Определив a_{31}, a_{32}, a_{33} из (8), оставшиеся направляющие косинусы можно получить из (7).

С учетом однородности первых двух уравнений система (8) с использованием безразмерных параметров $h_i = H_i/(B-C)$, ($i=1, 2, 3$), $\nu = (B-A)/(B-C)$ и введением новых переменных $x = a_{31}/a_{33}$, $y = a_{32}/a_{33}$, была представлена в виде системы двух алгебраических уравнений с двумя неизвестными x, y :

$$\begin{aligned} a_0 y^2 + a_1 y + a_2 &= 0, \\ b_0 y^4 + b_1 y^3 + b_2 y^2 + b_3 y + b_4 &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

коэффициенты которых являются полиномами по переменной x и параметрам ν, h_1, h_2, h_3 .

Путем исключения из системы двух уравнений (9) переменной y с использованием понятия результата и применяя систему компьютерной алгебры *Mathematica*, было получено алгебраическое уравнение 12-го порядка относительно x

$$p_0x^{12} + p_1x^{11} + p_2x^{10} + p_3x^9 + p_4x^8 + p_5x^7 + p_6x^6 + p_7x^5 + p_8x^4 + p_9x^3 + p_{10}x^2 + p_{11}x + p_{12} = 0, \quad (10)$$

коэффициенты которого представляют собой довольно сложные полиномы, зависящие от четырех параметров ν, h_1, h_2, h_3 . Число действительных корней алгебраического уравнения (10) четно и не превышает 12. По определению результата каждому корню x_1 уравнения (10) соответствует общий корень y_1 системы (9). Подставляя значение действительного корня x_1 уравнения (10) в уравнения системы (9), можно получить совпадающий корень y_1 этих уравнений. Для каждого решения (x_1, y_1) из последнего уравнения системы (8) можно определить два значения a_{33} , а затем и соответствующие им величины $a_{31} = x_1 a_{33}$ и $a_{32} = y_1 a_{33}$. Таким образом, каждому действительному корню алгебраического уравнения (10) соответствуют два набора значений a_{31}, a_{32}, a_{33} , которые, в силу (7), однозначно определяют остальные направляющие косинусы $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}$. Таким образом, доказано, что спутник-гиростат на круговой орбите под действием гравитационного момента в общем случае ($h_1 \neq 0, h_2 \neq 0, h_3 \neq 0, A \neq B \neq C$) может иметь не более 24 положений равновесия.

В разделе 1.4 изложен метод исследования положений равновесия спутника-гиростата. Решается задача определения в пространстве параметров областей с одинаковым числом вещественных корней уравнения (10). Разбиение пространства параметров на области с одинаковым числом вещественных корней уравнения определяется дискриминантной гиперповерхностью, которая задается дискриминантом многочлена (10).

Численно были получены двумерные срезы дискриминантной гиперповерхности, которые задаются неявно алгебраическим уравнением от двух параметров $g(h_1, h_2) = 0$ при фиксированных значениях ν и h_3 . Показано, что для предельных случаев $\nu = 0$ и $\nu = 1$ (случаи осесимметричного спутника-гиростата) границы между областями с постоянным числом положений равновесия определяются аналитически. Для осесимметричного случая $\nu = 0$ были получены уравнения двух окружностей в плоскости (h_1, h_2)

$$\begin{aligned} h_1^2 + h_2^2 &= (4^{2/3} - h_3^{2/3})^3, \\ h_1^2 + h_2^2 &= (1 - h_3^{2/3})^3, \end{aligned} \quad (11)$$

которые при этих условиях определяют границы областей с постоянным числом положений равновесия. Для другого осесимметричного случая $\nu = 1$ ($A = C$) также были аналитически получены уравнения двух астронд

$$\begin{aligned} h_2^{2/3} + (h_1^2 + h_3^2)^{1/3} &= 4^{2/3}, \\ h_2^{2/3} + (h_1^2 + h_3^2)^{1/3} &= 1, \end{aligned} \quad (12)$$

определяющих области с постоянным числом положений равновесия для второго осесимметричного случая. Численный анализ числа действительных корней уравнения (10) проводился при положительных значениях h_1, h_2, h_3 и при условии $0 < \nu < 1$ с учетом свойств симметрии коэффициентов этого уравнения от параметров. Показано, что вычисления достаточно проводить только для положительных значений параметров задачи.

В разделе 1.5 проводится анализ эволюции областей с одинаковым числом положений равновесий. На рис. 1 представлен пример результатов вычисления границ областей с равным числом положений равновесия для значений параметров $\nu = 0.2$ и $h_3 = 0.25$ для всех квадрантов плоскости (h_1, h_2) , где существуют 24, 16, 12 и 8 положений равновесия.

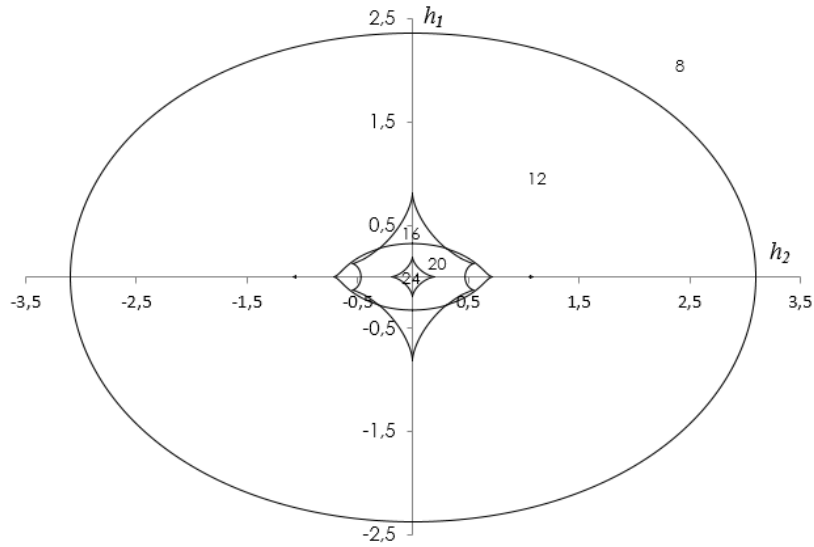


Рис.1

Из анализа численных результатов следует, что при увеличении величины параметра h_3 области с постоянным числом действительных корней становятся меньше, пока не исчезают совсем. Точки в пространстве параметров, начиная с которых не существуют области с определенным числом действительных корней, считались бифуркационными точками. Результаты вычислений бифуркационных значений параметров представлены в отдельной таблице.

Показано, что бифуркационное значение параметра h_3 , при котором исчезают области, где существуют 24 равновесных решения (12 действительных корней уравнения (10)), изменяется в соответствии с соотношением $h_3 = 1 - \nu$. Для областей с числом равновесий, равным 20, бифуркационное значение параметра h_3 увеличивается при возрастании значений параметра ν до величины $\nu = 0.6$ и уменьшается при дальнейшем возрастании ν . Для областей с числом равновесий, равным 16, бифуркационное значение параметра h_3 уменьшается при возрастании значений параметра ν . Области с числом равновесий, равным 12, уменьшаются при возрастании величины параметра h_3 . Центральная часть этих областей исчезает в окрестности начала координат при $h_3 = 4$. Когда значения параметра гиросtatического момента h_3 превышает 4, для спутника-гиростата

существуют только 8 равновесных ориентаций, которые соответствуют 4 действительным корням уравнения (10).

В разделе 1.6 проводится исследование достаточных условий устойчивости полученных в разделе 1.5 положений равновесия спутника-гиростата с использованием обобщенного интеграла энергии (3) в качестве функции Ляпунова. Из теоремы Ляпунова следует, что положение равновесия устойчиво, если квадратичная форма, полученная из интеграла энергии для каждого положения равновесия, является определенно-положительной. Выводятся достаточные условия устойчивости положений равновесия спутника-гиростата в виде системы неравенств. Численный анализ достаточных условий устойчивости положений равновесия спутника-гиростата показал, что всегда существуют 2 устойчивых положения равновесия спутника-гиростата, а при значениях параметра h_3 , удовлетворяющих неравенству $h_3 < 1 - \nu$ при малых значениях h_1, h_2 и при выполнении условий $h_3 \geq 1 - \nu$, $\nu > 0.5$, когда значения параметров h_1, h_2 не превышают величину 0.5, имеют место 4 устойчивых положения равновесия спутника-гиростата. При значениях параметров гиростатического момента h_1, h_2, h_3 , равных или превосходящих 4, существуют только 8 положений равновесия и лишь 2 из них являются устойчивыми. При больших значениях параметров h_1, h_2, h_3 равновесные решения приближаются к тривиальным решениям, при которых одна из осей орбитальной системы координат совпадает с одной из осей, связанной со спутником системы координат.

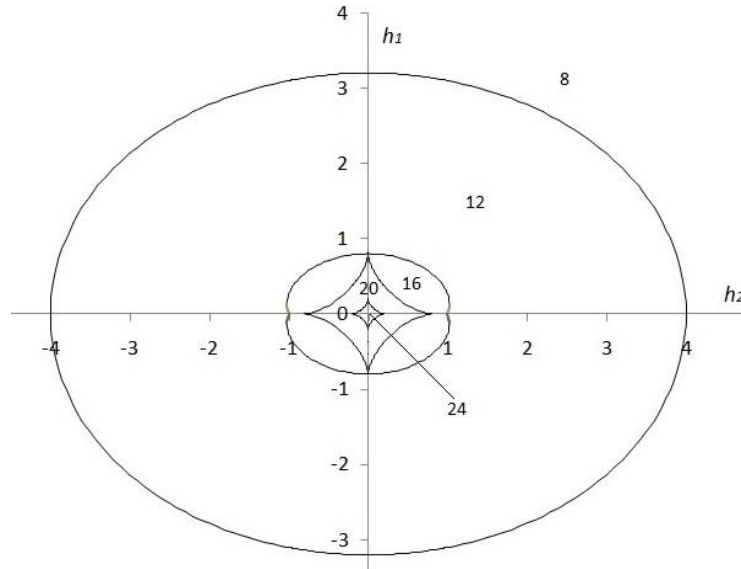
В разделе 1.7 излагается метод исследования положений равновесия спутника-гиростата в случаях, когда вектор гиростатического момента находится в одной из плоскостей, образуемых главными центральными осями инерции спутника, с использованием алгоритмов символьных вычислений. Подробно рассматриваются все три случая расположения вектора гиростатического момента в каждой из координатных плоскостей системы

Оxyz: 1) $H_1 \neq 0$, $H_2 \neq 0$, $H_3 = 0$; 2) $H_1 \neq 0$, $H_2 = 0$, $H_3 \neq 0$ и 3) $H_1 = 0$, $H_2 \neq 0$, $H_3 \neq 0$. В первом случае исходная система (4) с введением безразмерных параметров $h_i = H_i/(B - C)$, $\nu = (B - A)/(B - C)$ примет вид

$$\begin{aligned} a_{22}a_{23} - 3a_{32}a_{33} + h_2a_{23} &= 0, \\ (1 - \nu)(a_{23}a_{21} - 3a_{33}a_{31}) + h_1a_{23} &= 0, \\ \nu(a_{21}a_{22} - 3a_{31}a_{32}) - h_1a_{22} + h_2a_{21} &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Для нахождения решения алгебраической системы (13) и системы из шести условий ортогональности направляющих косинусов (6) применялись алгоритмы построения базисов Гребнера, разработанные австрийским математиком Б. Бухбергером. Метод построения базиса Гребнера представляет собой алгоритмическую процедуру для полного приведения задачи в случае системы полиномов от многих переменных к рассмотрению полинома от одной переменной. Исследование проводилось с использованием реализованного в системе компьютерной алгебры Maple пакета построения базисов Гребнера Groebner[Basis].

В результате вычисления базиса Гребнера системы полиномов, представляющих собой левые части уравнений (6), (13), был получен полином, $P(x) = P_1(x)P_2(x) = 0$, который зависит только от одной переменной $x = a_{33}$, где $P_1(x) = x(x^2 - 1)$, а $P_2(x) = p_0x^4 + p_1x^2 + p_2$ представляет собой биквадратный полином по переменной x , коэффициенты которого зависят от трех параметров h_1 , h_2 , ν . Для определения всех равновесий были рассмотрены отдельно случаи $P_1(x) = 0$ и $P_2(x) = 0$. В результате были аналитически определены границы в плоскости параметров (h_1, h_2) , разделяющие области с числом положений равновесия спутника-гиростата, равным 24, 20, 16, 12 и 8 для первого случая (пример областей с одинаковым числом равновесий для фиксированного значения инерционного параметра $\nu = 0.2$ представлен на рис. 2.).

Рис 2. $\nu=0.2$

Границы в центре рис.2 задаются уравнениями астроида $h_1^{2/3} + h_2^{2/3} = \nu^{2/3}$ и $h_1^{2/3} + h_2^{2/3} = (4\nu)^{2/3}$, внешние границы определяются ограничениями на корни биквадратного уравнения $P_2(x) = 0$.

Применяя описанный выше подход с использованием алгоритмов построения базиса Гребнера, были аналитически определены границы в плоскостях параметров (h_1, h_3) и (h_2, h_3) , разделяющие области с равным числом положений равновесия спутника-гиростата также для случаев 2 и 3. Следует отметить, что результаты, полученные в разделе 1.7, позволяют определить точные значения точек пересечения бифуркационных кривых с осями на плоскости (h_1, h_2) и при h_3 асимптотически стремящегося к нулю для общего случая задачи о положениях равновесия спутника-гиростата (см. раздел 1.5).

Основное внимание в разделе 1.8 уделено исследованию положений равновесия спутника-гиростата для 9 частных случаев, когда одна из главных осей инерции спутника совпадает с нормалью к плоскости орбиты, радиусом-вектором или касательной к орбите. Показано, что любая такая ориентация является равновесной.

В разделе 1.9 проводится сравнительный анализ переходных процессов от общего случая спутника-гиростата, рассмотренного в разделах 1.3–1.6, к частным случаям из разделов 1.7, 1.8.

В разделах 1.10, 1.11 представлены результаты исследования положений равновесия и достаточных условий их устойчивости для осесимметричного спутника-гиростата при любых значениях вектора гиростатического момента. Они качественно соответствуют результатам, полученным в разделах 1.3 – 1.6 для общего случая спутника-гиростата. Для осесимметричного спутника-гиростата, когда, например, $A \neq B = C$, система (5) упрощается и принимает вид

$$\begin{aligned} 4(A - B)a_{21}a_{31} + H_1a_{31} + H_2a_{32} + H_3a_{33} &= 0, \\ (A - B)a_{11}a_{31} &= 0, \\ (A - B)a_{11}a_{21} + H_1a_{11} + H_2a_{12} + H_3a_{13} &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Для системы (14), (6) рассмотрены следующие два случая: 1) $a_{11} = 0$, 2) $a_{31} = 0$. В первом случае получена система уравнений

$$16a_{21}^4 + 8ma_{21}^3 + (m^2 + n^2 - 16) - 8ma_{21} - m^2 = 0, \quad a_{31} = \frac{\pm na_{21}}{4a_{21} + m}, \quad (15)$$

которая определяет все положения равновесия спутника-гиростата для данного случая. Здесь $m = H_1/(A - B)$, $n = \sqrt{H_2^2 + H_3^2}/(A - B)$. Из системы (15) следует что число положений равновесия в первом случае не может превышать 8. Во втором случае положения равновесия спутника-гиростата определяются следующей системой уравнений:

$$a_{21}^4 + 2ma_{21}^3 + (m^2 + n^2 - 1) - 2ma_{21} - m^2 = 0, \quad a_{31} = \frac{\mp na_{21}}{a_{21} + m}. \quad (16)$$

Показано, что и для системы (15) границей, отделяющей область существования восьми равновесных решений от области существования четырех решений, является астроида $m^{2/3} + n^{2/3} = 4^{2/3}$. Для системы (16) такой границей будет астроида $m^{2/3} + n^{2/3} = 1$.

Таким образом, показано, что для осесимметричного спутника-гиростата в области $m^{2/3} + n^{2/3} \leq 1$ существуют 16 положений равновесия, в области $m^{2/3} + n^{2/3} > 1$, $m^{2/3} + n^{2/3} \leq 4^{2/3}$ существуют 12 положений равновесия, а в области $m^{2/3} + n^{2/3} > 4^{2/3}$ существуют 8 равновесий.

Для двух других случаев осесимметричного спутника-гиростата, когда $A = B \neq C$ ($\nu = 0$) и $B \neq A = C$ ($\nu = 1$), используя подход, приведенный выше, были получены уравнения бифуркационных кривых (11) и (12) (раздел 1.4), задающих границы между областями с равным числом положений равновесия.

Для исследования достаточных условий устойчивости положений равновесия осесимметричного спутника-гиростата, которые определяются уравнениями (15) и (16), в качестве функции Ляпунова использовался обобщенный интеграл энергии (3), направляющие косинусы в котором выражались через самолетные углы тангажа α рыскания β и крена γ . Интеграл энергии (3) для случая осесимметричного гиростата ($B = C$) после введения малых отклонений $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ от положения равновесия $\alpha = \alpha_0 = \text{const}$, $\beta = \beta_0 = \text{const}$, $\gamma = \gamma_0 = \text{const}$, удовлетворяющего системе уравнений (6), (14), принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}[A\bar{p}^2 + B(\bar{q}^2 + \bar{r}^2)] + \frac{1}{2}\omega_0^2\{3(B-A)(a_{31}^2 - a_{11}^2)\bar{\alpha}^2 + \\ & + [(B-A)(1 + 3\sin^2\alpha_0)\cos 2\beta_0 + H_1a_{21} + H_2a_{22} + H_3a_{23}]\bar{\beta}^2 - \\ & - 2a_{21}(H_2\sin\gamma_0 + H_3\cos\gamma_0)\bar{\beta}\bar{\gamma} + (H_2a_{22} + H_3a_{23})\bar{\gamma}^2\} + \Sigma = \text{const}. \end{aligned} \quad (17)$$

Символом Σ обозначены члены выше второго порядка малости относительно $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$. Получены достаточные условия устойчивости положений равновесия гиростата для случаев 1 и 2. В случае 1 ($A - B < 0$) это области $0 < \sin\beta_0 < 1$, $m + 4\sin\beta_0 < 0$ и $-1 < \sin\beta_0 < 0$, $m + 4\sin\beta_0 > 0$, а в случае 2 ($A - B > 0$) это области $0 < \sin\beta_0 < 1$, $m + \sin^3\beta_0 < 0$ и $-1 < \sin\beta_0 < 0$, $m + \sin^3\beta_0 > 0$. Результаты численных исследований положений равновесия

показывают, что в случае 2 при $n > 0$ и при $0 < |m| < 1$ существуют четыре устойчивых положения равновесия, при $|m| \geq 1$ существуют два устойчивых положения равновесия. В случае 1 при $n < 0$ и $|m| > 0$ всегда существуют два устойчивых положения равновесия.

Во второй главе рассмотрена динамика движения спутника относительно центра масс, подверженного действию гравитационного и аэродинамического моментов, на круговой орбите. В разделе 2.1 приводится постановка задачи, сформулированы основные допущения о характере действия сопротивления атмосферы на спутник. Выводятся формулы для описания влияния на спутник аэродинамического момента.

В разделе 2.2 выводятся уравнения движения спутника. Для записи уравнений движения используются введенные в главе 1 орбитальная система координат $OXYZ$ и связанная со спутником система координат $Oxyz$. Ориентация системы координат $Oxyz$ относительно орбитальной системы координат определяется с использованием углов Эйлера ψ , ϑ , φ . Приводится выражение для силовой функции, определяющей действие сопротивления атмосферы Земли на спутник, и обобщенный интеграл энергии. Уравнения движения спутника под действием гравитационного и аэродинамического моментов на круговой орбите имеют вид:

$$\begin{aligned} A\dot{p} + (C - B)qr - 3\omega_0^2(C - B)a_{32}a_{33} - \omega_0^2(H_2a_{13} - H_3a_{12}) &= 0, \\ B\dot{q} + (A - C)rp - 3\omega_0^2(A - C)a_{33}a_{31} - \omega_0^2(H_3a_{11} - H_1a_{13}) &= 0, \\ C\dot{r} + (B - A)pq - 3\omega_0^2(B - A)a_{31}a_{32} - \omega_0^2(H_1a_{12} - H_2a_{11}) &= 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Уравнения (18) замыкаются кинематическими соотношениями Эйлера (2).

В уравнениях (18) $H_1 = -Qa/\omega_0^2$, $H_2 = -Qb/\omega_0^2$, $H_3 = -Qc/\omega_0^2$; Q – действующая на спутник сила сопротивления; a , b , c – координаты центра давления спутника в системе координат $Oxyz$; ω_0 – угловая скорость движения центра масс спутника по круговой орбите.

Для уравнений движения (18), (2) справедлив обобщенный интеграл энергии

$$h = \frac{1}{2}(A\bar{p}^2 + B\bar{q}^2 + C\bar{r}^2) + \frac{3}{2}\omega_0^2[(A-C)a_{31}^2 + (B-C)a_{32}^2] + \frac{1}{2}\omega_0^2[(B-A)a_{21}^2 + (B-C)a_{23}^2] - \omega_0^2(H_1a_{11} + H_2a_{12} + H_3a_{13}). \quad (19)$$

В разделе 2.3 проводится анализ положений равновесия спутника на круговой орбите с учетом действия аэродинамического момента. Положения равновесия определяются системой стационарных уравнений

$$\begin{aligned} (C-B)(a_{22}a_{23} - 3a_{32}a_{33}) - H_2a_{13} + H_3a_{12} &= 0, \\ (A-C)(a_{23}a_{21} - 3a_{33}a_{31}) - H_3a_{11} + H_1a_{13} &= 0, \\ (B-A)(a_{21}a_{22} - 3a_{31}a_{32}) - H_1a_{12} + H_2a_{11} &= 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Для системы (20), (6) возможны следующие две постановки задачи о положениях равновесия спутника. Прямая задача, когда заданы параметры системы A, B, C, H_1, H_2, H_3 ; требуется определить все девять направляющих косинусов (или три угла Эйлера). Обратная задача, когда заданы A, B, C и три направляющих косинуса; требуется определить H_1, H_2, H_3 и оставшиеся шесть направляющих косинусов так, чтобы удовлетворялись уравнения (6), (20).

Используя метод, разработанный в главе 1, система (6), (20) приводится к системе двух алгебраических уравнений с двумя неизвестными x, y

$$\begin{aligned} 9[y^2 + (1-\nu)^2x^2 + \nu^2x^2y^2] &= (h_1x + h_2y + h_3)^2(1+x^2+y^2), \\ 3\nu(1-\nu)xy - [h_1y - h_2(1-\nu)x - h_3\nu xy] &(h_1x + h_2y + h_3) = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

В (21) $h_i = H_i/(B-C)$ ($i=1, 2, 3$) и $\nu = (B-A)/(B-C)$ безразмерные параметры системы, $x = a_{31}/a_{33}$, $y = a_{32}/a_{33}$ – новые переменные. Путем исключения из системы двух уравнений (21) переменной y с использованием понятия результата получено алгебраическое уравнение 12-го порядка относительно x

$$\begin{aligned} p_0x^{12} + p_1x^{11} + p_2x^{10} + p_3x^9 + p_4x^8 + p_5x^7 + p_6x^6 + \\ + p_7x^5 + p_8x^4 + p_9x^3 + p_{10}x^2 + p_{11}x + p_{12} &= 0, \end{aligned} \quad (22)$$

коэффициенты которого представляют собой полиномы, зависящие от четырех параметров ν, h_1, h_2, h_3 . Каждому действительному корню алгебраического уравнения (22) соответствуют два набора значений a_{31}, a_{32}, a_{33} , которые, в силу системы (6), (20), однозначно определяют остальные направляющие косинусы. Таким образом, доказано, что спутник на круговой орбите под действием гравитационного и аэродинамического моментов в общем случае может иметь не более 24 положений равновесия.

В разделе 2.4 изложен метод исследования положений равновесия спутника. Решается задача определения в пространстве параметров областей с одинаковым числом вещественных корней уравнения (22). Численно были получены области с одинаковым числом действительных корней уравнения (22) в плоскости (h_1, h_2) при фиксированных значениях ν и h_3 .

Для предельных случаев $\nu = 0$ и $\nu = 1$ (случаи осесимметричного спутника) границы между областями с постоянным числом положений равновесия определяются аналитически.

В разделе 2.5 проведен анализ эволюции областей с одинаковым числом положений равновесий. На рис. 3 показан пример результатов вычисления границ областей с равным числом положений равновесия для значений параметров $\nu = 0.2$ и $h_3 = 0.153$ на плоскости (h_1, h_2) , где существуют 24, 16, 12 и 8 положений равновесия. Из анализа численных результатов следует, что при увеличении величины параметра h_3 области с постоянным числом действительных корней уменьшаются, пока не исчезают совсем. Проведены вычисления бифуркационных значений параметров, начиная с которых не существуют области с определенным числом действительных корней. Результаты вычисления бифуркационных значений параметров представлены в итоговой таблице.

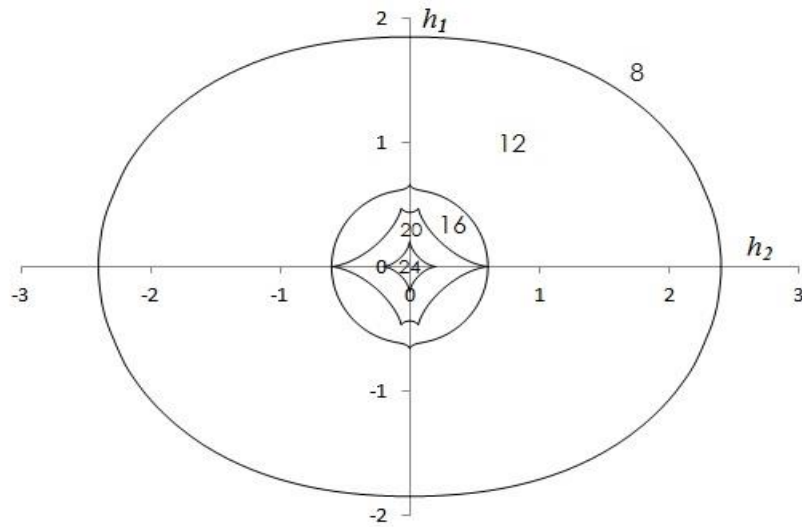


Рис. 3

Показано, что бифуркационное значение параметра h_3 , при котором исчезают области, где существуют 24 равновесных решения (12 действительных корней уравнения (22)), изменяется в соответствии с соотношением $h_3 = 1 - \nu$. Для областей, где существуют 16 равновесных решений (8 действительных корней), бифуркационные значения параметра h_3 уменьшаются в соответствии с соотношением $h_3 = 3(1 - \nu)$ при возрастании значения ν вплоть до значения $\nu = 0.6$, после чего остаются равными 1.

Области с числом положений равновесия, равным 12, уменьшаются при возрастании величины параметра h_3 . Центральная часть этих областей исчезает при $h_3 = 3$. Когда значения параметра аэродинамического момента h_3 превышает 3, при любых значениях параметров h_1 и h_2 существуют 8 положений равновесия спутника.

В разделе 2.6 проведено исследование достаточных условий устойчивости полученных в разделе 2.5 положений равновесия спутника с использованием обобщенного интеграла энергии (16) в качестве функции Ляпунова. Анализ условий устойчивости положений равновесия спутника показал, что всегда существуют 2 устойчивых положения равновесия спутника. Определены значения параметров системы, когда имеют место 4 устойчивых положения

равновесия спутника. При значениях параметров аэродинамического момента, равных или превосходящих 3, существуют только 8 положений равновесия, 2 из которых являются устойчивыми. При больших значениях аэродинамического момента, значительно превосходящих величину 3, равновесные решения приближаются к тривиальным решениям, при которых одна из осей орбитальной системы координат совпадает с одной из осей связанной со спутником системы координат.

В разделе 2.7 изложено решение задачи определения положений равновесия в случаях, когда вектор аэродинамического момента находится в одной из плоскостей, образуемых главными центральными осями инерции спутника, с использованием алгоритмов символьных вычислений. Подробно рассматриваются все три случая расположения вектора аэродинамического момента в каждой из координатных плоскостей системы $Oxyz$. В первом случае, когда $H_1 \neq 0$, $H_2 \neq 0$, $H_3 = 0$, исходная система (20) с введенными выше безразмерными параметрами h_i и ν примет вид

$$\begin{aligned} a_{22}a_{23} - 3a_{32}a_{33} + h_2a_{13} &= 0, \\ (1 - \nu)(a_{23}a_{21} - 3a_{33}a_{31}) + h_1a_{13} &= 0, \\ \nu(a_{21}a_{22} - 3a_{31}a_{32}) - h_1a_{12} + h_2a_{11} &= 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Для нахождения решения алгебраической системы (23) и системы из шести условий ортогональности направляющих косинусов (6) применялись алгоритмы построения базисов Гребнера.

В результате вычисления базиса Гребнера системы полиномов, представляющих собой левые части уравнений (6), (23) был получен полином $P(x) = P_1(x)P_2(x)$, который зависит только от одной переменной $x = a_{33}$. Здесь $P_1(x) = x(x^2 - 1)$, а $P_2(x) = p_0x^4 + p_1x^2 + p_2$ – биквадратный полином по переменной x , коэффициенты которого зависят от трех параметров h_1, h_2, ν . Для определения всех положений равновесия были рассмотрены отдельно случаи $P_1(x) = 0$ и $P_2(x) = 0$. В результате, были аналитически определены

границы в плоскости параметров (h_1, h_2) , разделяющие области с числом положений равновесия спутника, равным 24, 20, 16, 12 и 8. Пример областей с одинаковым числом равновесий для фиксированного значения инерционного параметра $\nu=0.2$ представлен на рис. 4. Границы в центре рис. 4 задаются уравнениями астронид $h_1^{2/3} + h_2^{2/3} = \nu^{2/3}$ и $h_1^{2/3} + h_2^{2/3} = (3\nu)^{2/3}$, внешние границы определяются ограничениями на корни биквадратного уравнения $P_2(x) = 0$.

Применяя алгоритмы построения базиса Гребнера, были аналитически определены границы в плоскостях параметров (h_1, h_3) и (h_2, h_3) , разделяющие области с равным числом положений равновесия спутника также для двух других случаев расположения вектора аэродинамического момента в координатных плоскостях связанной со спутником системы координат.

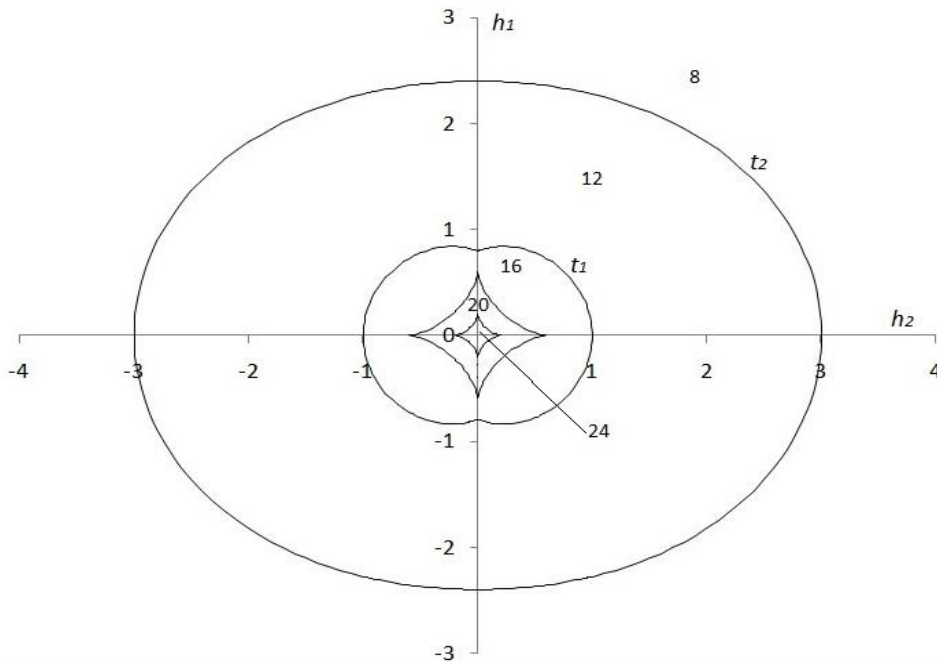


Рис 4. $\nu=0.2$

Результаты, полученные в разделе 2.7, позволяют определить точные значения точек пересечения бифуркационных кривых с осями на плоскости (h_1, h_2) при h_3 , асимптотически стремящегося к нулю, для общего случая задачи о положениях равновесия спутника из раздела 2.5.

В разделе 2.8 исследованы положения равновесия спутника при действии аэродинамического момента для 9 частных случаев, когда одна из главных осей

инерции спутника совпадает с нормалью к плоскости орбиты, радиусом-вектором или касательной к орбите. Показано, что любая такая ориентация является равновесной.

В разделе 2.9 проводится сравнительный анализ переходных процессов от общего случая спутника, рассмотренного в разделах 2.3–2.6, к частным случаям из разделов 2.7, 2.8.

В разделах 2.10, 2.11 приводятся результаты исследования положений равновесия и достаточных условий их устойчивости для осесимметричного спутника при действии любого по величине аэродинамического момента. Они качественно соответствуют результатам, полученным в разделах 2.3–2.6 для общего случая.

В главе 3 приводится полное решение задачи о стационарных движениях спутника на круговой орбите, на которой, кроме гравитационного момента, действует постоянный момент, обусловленный, например, истечением газа и корпуса спутника.

В разделах 3.1–3.2 содержатся постановка задачи и уравнения движения спутника относительно центра масс, которые имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} A\dot{p} + (C - B)qr - 3\omega_0^2(C - B)a_{32}a_{33} - \tilde{a} &= 0, \\ B\dot{q} + (A - C)rp - 3\omega_0^2(A - C)a_{33}a_{31} - \tilde{b} &= 0, \\ C\dot{r} + (B - A)pq - 3\omega_0^2(B - A)a_{31}a_{32} - \tilde{c} &= 0; \end{aligned} \quad (24)$$

Здесь \tilde{a} , \tilde{b} , \tilde{c} – проекции вектора постоянного момента на оси Ox , Oy , Oz .

Уравнения (24) замыкаются кинематическими соотношениями Эйлера с использованием самолетных углов α , β , γ . Стационарные уравнения, позволяющие определить положения равновесия спутника в орбитальной системе координат, имеют вид

$$\begin{aligned} a_{22}a_{23} - 3a_{32}a_{33} - a &= 0, \\ a_{23}a_{21} - 3a_{33}a_{31} - b &= 0, \\ a_{21}a_{22} - 3a_{31}a_{32} - c &= 0. \end{aligned} \quad (25)$$

В системе (25) введены обозначения $a = \tilde{a} / \omega_0^2 (C - B)$, $b = \tilde{b} / \omega_0^2 (A - C)$, $c = \tilde{c} / \omega_0^2 (B - A)$.

Уравнения (25) и (6) образуют замкнутую алгебраическую систему уравнений относительно шести направляющих косинусов, определяющих положения равновесия спутника. Для этой системы уравнений ставится задача: при заданных a, b, c определить все девять направляющих косинусов, т.е. все положения равновесия спутника в орбитальной системе координат. Отметим, что для любой заданной ориентации спутника всегда существуют такие a, b и c , что эта ориентация является положением равновесия.

В разделе 3.3 рассматривается задача определения положений равновесия для заданных a, b и c с использованием выражений для направляющих косинусов в (25) через самолетные углы. Система (25) приводится к системе двух алгебраических уравнений относительно неизвестных $x = 1 + 3\sin^2\alpha$ и $y = \sin\beta$

$$\begin{aligned} x^2 y^4 + (z^2 - x^2) y^2 + b^2 + c^2 - z^2 &= 0, \\ [bc(5x - 8) + a(b^2 + c^2)x] xy^2 - 4(b^2 - c^2)zy + 5bcz^2 + (b^2 + c^2)(az^2 - bcx) &= 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Здесь $z^2 = 3\sin\alpha\cos\alpha = -x^2 + 5x - 4$. Используя понятие результанта, исключая y из уравнений (26), получаем алгебраическое уравнение 6-й степени относительно неизвестной x

$$p_0 x^6 + p_1 x^5 + p_2 x^4 + p_3 x^3 + p_4 x^2 + p_5 x + p_6 = 0, \quad (27)$$

коэффициенты которого являются полиномами от параметров a, b и c . Из системы уравнений (25) – (27) можно определить все положения равновесия спутника при действии гравитационного и постоянного моментов.

В разделе 3.4 рассмотрены условия существования положений равновесия и показано, что каждому действительному корню уравнения (27) соответствуют четыре положения равновесия спутника. Так как число действительных корней (27) не превышает 6, то спутник при действии гравитационного и постоянного

моментов может иметь не более 24 положений равновесия в орбитальной системе координат.

Детальное исследование положений равновесия спутника проведено в разделе 3.5 с использованием методов компьютерной алгебры.

Решение системы (25) и (6) также было получено с использованием алгоритма построения базисов Гребнера для системы полиномов, которые представляют собой левые части уравнений (6), (25). Построив базис Гребнера полиномов (6), (25) относительно лексикографического упорядочения направляющих косинусов, можно получить алгебраическое уравнение шестого порядка относительно переменной $x = a_{33}^2$. Коэффициенты уравнения шестого порядка в этом случае имеют вид:

$$\begin{aligned} p_0 &= 12^6, & p_1 &= -2 \cdot 12^6, & p_2 &= 12^4(25v - 6u^2 - 28uc + 144), \\ p_3 &= -2 \cdot 12^3(8c^2u^2 + u^2v - 24u^2 - 7cuv - 168uc - c^2v^2 + 150v), \\ p_4 &= 12^2(144v^2 - 5lu^2v + 337u^2 + 28cuv^2 - 28cu^3 + 25c^2v^2 + 192c^2u^2 + 518cuv), \\ p_5 &= 24(12u^2v^2 - 62u^4 - 150u^2v + 3u^4v + 3c^2u^2v^2 + 84cuv^2 + \\ &+ 182cu^3 - 7cu^3v - 136c^2u^2 + 14c^3uv^2), \\ p_6 &= (c^2v^2 + vu^2 + 12u^2 - 7cvu)^2, & v &= a^2 + b^2, & u &= ab. \end{aligned}$$

Исследование положений равновесия в разделе 3.6 проведено с использованием алгебраических методов и символьных вычислений. Для выделения в пространстве параметров областей с одинаковым числом вещественных корней применялась теорема Меймана, из которой следует, что разбиение пространства параметров на области с одинаковым числом вещественных корней определяется дискриминантной гиперповерхностью. В нашем случае дискриминантная гиперповерхность задается дискриминантом многочлена (27). Гиперповерхность уравнения (27) вычисляется в явном виде с использованием понятия результата и применением системы символьных вычислений. Определены области с фиксированным числом положений равновесия и исследована эволюция этих областей в зависимости от трех параметров задачи. Используя исходную систему (25) можно получить

неравенства $a^2 + b^2 + c^2 \leq 5$, $a^2 + b^2 \leq 4$, $a^2 + c^2 \leq 4$, $b^2 + c^2 \leq 4$. Поэтому для численного исследования корней уравнения достаточно рассмотреть область изменения параметров, ограниченную неравенством $a^2 + b^2 + c^2 \leq 5$ и неравенствами $a^2 \leq 4$, $b^2 \leq 4$, $c^2 \leq 4$. Пример результатов численно-аналитического анализа свойств и формы дискриминантной гиперповерхности, представляющий собой двухмерные сечения поверхности в плоскости (b, c) при фиксированном значении параметра $a = -0.5$ с указанием числа положений равновесия внутри каждой области приведен на рис. 5.

Результаты вычислений бифуркационных значений параметра a , при которых меняется число положений равновесия, представлены в таблице, где указано число областей либо отдельных точек с фиксированным числом равновесий для каждого бифуркационного значения параметра. При достаточно малой величине модуля постоянного момента существуют 24 изолированных положения равновесия. С ростом величины постоянного момента число положений равновесия убывает до нуля. В разделе 3.7 рассмотрены частные случаи задачи, когда вектор постоянного момента параллелен одной из главных центральных осей инерции спутника. В разделе 3.8 описаны методы и алгоритмы компьютерной алгебры, которые применялись для исследования положений равновесия спутника.

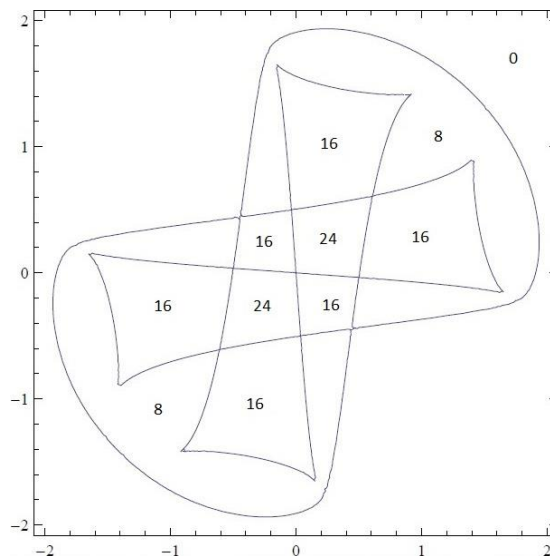


Рис. 5. Области для $a = -0.5$

В главе 4 исследуются положения равновесия спутника, на который кроме гравитационного момента действует активный управляющий момент, зависящий от проекций угловой скорости спутника. Такое активное управление можно обеспечить путем использования датчиков угловой скорости и двигателей ориентации. Действие управляющего момента позволяет получить новые положения равновесия и обеспечить асимптотическую устойчивость положений равновесия гравитационно-ориентированного спутника на круговой орбите. В разделах 4.1-4.2 приводятся постановка задачи и уравнения движения спутника, на который действует активный управляющий момент, проекции суммарного вектора которого на оси Ox , Oy , Oz соответственно равны $M_x = -\bar{k}_1 p_1$, $M_y = -\bar{k}_2 (q_1 - \omega_0)$, $M_z = -\bar{k}_3 r_1$. Здесь $\bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3$ – параметры управления, p_1, q_1, r_1 – проекции угловой скорости спутника на оси Ox, Oy, Oz .

Уравнения движения спутника относительно центра масс имеют вид

$$\begin{aligned} Ap_1' + (C - B)q_1 r_1 - 3\omega_0^2 (C - B)a_{32}a_{33} + \bar{k}_1 p_1 &= 0, \\ Bq_1' + (A - C)r_1 p_1 - 3\omega_0^2 (A - C)a_{33}a_{31} + \bar{k}_2 (q_1 - \omega_0) &= 0, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} Cr_1' + (B - A)p_1 q_1 - 3\omega_0^2 (B - A)a_{31}a_{32} + \bar{k}_3 r_1 &= 0; \\ p_1 &= (\alpha' + \omega_0)a_{21} + \gamma', \\ q_1 &= (\alpha' + \omega_0)a_{22} + \beta' \sin \gamma, \\ r_1 &= (\alpha' + \omega_0)a_{23} + \beta' \cos \gamma. \end{aligned} \quad (29)$$

Из (28), (29) следуют стационарные уравнения

$$\begin{aligned} a_{22}a_{23} - 3a_{32}a_{33} + k_1 a_{21} &= 0, \\ a_{23}a_{21} - 3a_{33}a_{31} + k_2 (a_{22} - 1) &= 0, \\ a_{21}a_{22} - 3a_{31}a_{32} + k_3 a_{23} &= 0, \end{aligned} \quad (30)$$

позволяющие определить положения равновесия спутника в орбитальной системе координат при действии активного управляющего момента. Здесь $k_1 = \bar{k}_1 / (C - B)$, $k_2 = \bar{k}_2 / (A - C)$, $k_3 = \bar{k}_3 / (B - A)$.

В разделе 4.3 представлены результаты исследования характера асимптотической устойчивости для нулевого положения равновесия спутника ($\alpha_0 = \beta_0 = \gamma_0 = 0$), когда оси связанной со спутником системы координат

совпадают с осями орбитальной системы координат. Линеаризованная в окрестности нулевого положения равновесия система уравнений (28), (29) имеет вид

$$\begin{aligned}\ddot{\bar{\alpha}} + k_2 \dot{\bar{\alpha}} + 3(\theta_A - \theta_C) \bar{\alpha} &= 0, \\ \theta_C \ddot{\bar{\beta}} + k_3 \dot{\bar{\beta}} - (\theta_A + \theta_C - 1) \dot{\bar{\gamma}} + (1 - \theta_A) \bar{\beta} - k_3 \bar{\gamma} &= 0, \\ \theta_A \ddot{\bar{\gamma}} + (\theta_A + \theta_C - 1) \dot{\bar{\beta}} + k_1 \dot{\bar{\gamma}} + k_1 \bar{\beta} + 4(1 - \theta_C) \bar{\gamma} &= 0.\end{aligned}\tag{31}$$

Здесь $\theta_A = A/B$, $\theta_C = C/B$ – безразмерные инерционные параметры.

На основе анализа характеристического уравнения системы (31) получены необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости нулевого положения равновесия. Из результатов анализа условий асимптотической устойчивости положений равновесия следует, что при малых значениях параметров управления, близких к нулю, область устойчивости приближается к области, где выполняются необходимые и достаточные условия устойчивости для спутника-твердого тела при $k_i = 0$. Эта треугольная область, ограниченная прямыми в плоскости параметров (θ_A, θ_C) : $\theta_C = 1 - \theta_A$, $\theta_C = \theta_A$, $\theta_A = 1$. При возрастании значений параметров управления происходит увеличение области выполнения условий устойчивости и при $k_i = 1$ область выполнения условий устойчивости представляет собой трапецию, ограниченную прямыми $\theta_C = 1 - \theta_A$, $\theta_C = \theta_A$, $\theta_C = 1$, $\theta_C = \theta_A - 1$. При дальнейшем увеличении значений параметров управления область выполнения необходимых и достаточных условий асимптотической устойчивости нулевого положения равновесия не изменяется и остается в форме описанной выше трапеции.

В разделе 4.4 выполнено исследование характера переходных процессов выхода системы на нулевое положение равновесия на основе численного интегрирования системы дифференциальных уравнений (28), (29) при различных параметрах управления. Показано, что при $k_i = 0.5$ система выходит на нулевое положение равновесия примерно за четыре оборота спутника по орбите, а при $k_i = 1$ примерно за два оборота. Определен широкий диапазон

параметров управления, выбирая из которого необходимые значения можно обеспечить асимптотическую устойчивость нулевого положения равновесия.

В разделе 4.5 рассмотрена задача о вращательном движении осесимметричного спутника на круговой орбите при действии гравитационных моментов и активного управляющего момента, проекции которого пропорциональны проекциям угловой скорости спутника. Решается задача определения всех стационарных движений для осесимметричного случая, когда $A = B$ и один из параметров управления равен нулю ($k_3 = 0$). В этом случае проекции суммарного вектора управляющего момента на оси связанной системы координат равны $M_x = -\bar{k}_1 p$, $M_y = -\bar{k}_2 q$, $M_z = 0$. Реализация моментов такого типа возможна, например, при использовании двух датчиков угловой скорости с осями чувствительности, направленными вдоль осей Ox и Oy , и устройства, сообщающего спутнику моменты, пропорциональные сигналам этих датчиков. Тогда из третьего уравнения системы (28) следует равенство $\dot{r} = 0$, откуда можно получить интеграл уравнений движения $r = r_0 = \text{const}$.

Уравнения, позволяющие определить стационарные движения осесимметричного спутника в орбитальной системе координат, имеют вид

$$\begin{aligned} -r_0 a_{22} - 3a_{32}a_{33} + k_1 a_{21} &= 0, \\ r_0 a_{21} - 3a_{33}a_{31} + k_2 a_{22} &= 0, \\ r_0 - \dot{\varphi} - a_{23} &= 0. \end{aligned} \tag{32}$$

В (32) приняты безразмерные параметры $k_1 = \bar{k}_1 / (A - C) \omega_0$, $k_2 = \bar{k}_2 / (A - C) \omega_0$ и φ - угол собственного вращения.

Для нахождения решений алгебраической системы (30), (6) применялись алгоритмы построения базисов Гребнера. В результате построения базиса был получен полином 4-й степени от одной переменной $x = a_{33}^2$, каждому вещественному корню которого с учетом условий ортогональности соответствуют 4 стационарных решения задачи и, соответственно, каждому корню a_{33} отвечают 2 стационарных решения. Из приведенных соображений

следует, что осесимметричный спутник на круговой орбите под действием гравитационного и управляющего моментов может иметь не более 16 стационарных решений.

Для рассматриваемой задачи было проведено разбиение пространства параметров на области с одинаковым числом вещественных корней уравнения 4-й степени, которые определяются дискриминантной гиперповерхностью имеющей форму полинома 8 степени по переменной r_0 .

В главе 5 исследуется динамика системы двух тел (спутник-стабилизатор), соединенных сферическим шарниром, движущихся по круговой орбите. Рассматривается схема гравитационной системы ориентации спутника и демпфирующего устройства, в соответствии с которой к телу спутника с помощью шарнира P присоединено второе тело, которое называют стабилизатором (рис. 6). Системы координат $O_1x_1y_1z_1$ и $O_2x_2y_2z_2$ образованы главными центральными осями инерции соответственно спутника и стабилизатора. $CX_aY_aZ_a$ – абсолютная система координат с началом в центре масс Земли C , $OXYZ$ – орбитальная система координат. O – центр масс системы двух тел; O_1 и O_2 центры масс первого и второго тела соответственно, a_i, b_i, c_i – координаты шарнира в системе координат $O_ix_iz_i$.

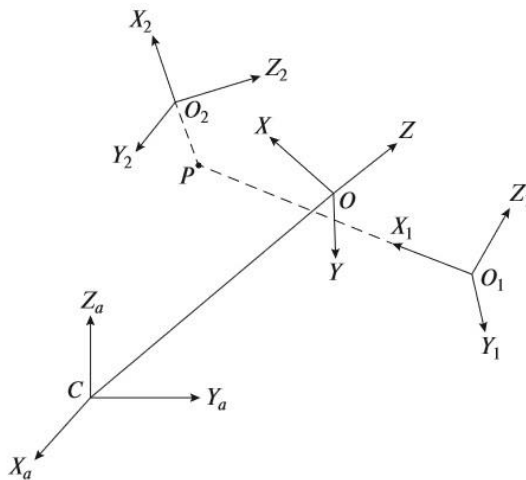


Рис. 6 Основные системы координат для схемы спутник-стабилизатор

Действие стабилизатора на спутник позволяет получить новые положения равновесия и ввести диссипацию в систему.

Используя выражения для кинетической энергии и силовой функции, определяющей действие гравитационного поля Земли на систему двух тел, соединенных сферическим шарниром, уравнения движения этой системы получены в форме уравнений Лагранжа второго рода, используя возможности символьного дифференцирования в системе Maple. Рассматривается случай, когда шарнир расположен в точке пересечения осей O_1x_1 , O_2x_2 , тогда $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$, $b_1 = c_1 = b_2 = c_2 = 0$.

Положения равновесия системы спутник–стабилизатор определяются действительными корнями системы алгебраических уравнений, которая получена из уравнений Лагранжа в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 a_{22}a_{23} - 3a_{32}a_{33} &= 0, \\
 m_1(a_{23}a_{21} - 3a_{33}a_{31}) + (b_{21}a_{23} - 3b_{31}a_{33}) &= 0, \\
 n_1(a_{21}a_{22} - 3a_{31}a_{32}) - (b_{21}a_{22} - 3b_{31}a_{32}) &= 0, \\
 b_{22}b_{23} - 3b_{32}b_{33} &= 0, \\
 m_2(b_{23}b_{21} - 3b_{33}b_{31}) + (a_{21}b_{23} - 3a_{31}b_{33}) &= 0, \\
 n_2(b_{21}b_{22} - 3b_{31}b_{32}) - (a_{21}b_{22} - 3a_{31}b_{32}) &= 0,
 \end{aligned} \tag{33}$$

В уравнениях (33) введены следующие обозначения: $m_1 = [(A_1 - C_1) - Ma_1^2] / Ma_1a_2$; $m_2 = [(A_2 - C_2) - Ma_2^2] / Ma_1a_2$; $n_1 = [(B_1 - A_1) - Ma_1^2] / Ma_1a_2$; $n_2 = [(B_2 - A_2) - Ma_2^2] / Ma_1a_2$; $M = M_1M_2 / (M_1 + M_2)$, M_i – масса, A_i, B_i, C_i – главные центральные моменты инерции i -го тела.

Система (33) замыкается добавлением шести условий ортогональности направляющих косинусов

$$\begin{aligned}
 a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 &= 1, & b_{21}^2 + b_{22}^2 + b_{23}^2 &= 1, \\
 a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 &= 1, & b_{31}^2 + b_{32}^2 + b_{33}^2 &= 1, \\
 a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} &= 0, & b_{21}b_{31} + b_{22}b_{32} + b_{23}b_{33} &= 0.
 \end{aligned} \tag{34}$$

Уравнения (33) и (34) образуют замкнутую алгебраическую систему уравнений относительно 12 направляющих косинусов, определяющих положения равновесия системы двух тел. Для этой системы уравнений ставится

задача: при заданных m_1, m_2, n_1, n_2 требуется определить все 12 направляющих косинусов, т.е. все положения равновесия системы в орбитальной системе координат.

Для решения данной задачи используется комбинированный подход с применением методов линейной и компьютерной алгебры.

Рассмотрим, например, второе, третье, пятое и шестое уравнения системы (34) относительно переменных $a_{21}, a_{31}, b_{21}, b_{31}$. Эти уравнения образуют однородную линейную подсистему. Если определитель этой подсистемы отличен от нуля, то $a_{21} = a_{31} = b_{21} = b_{31} = 0$ и тогда система (33) упрощается и решения можно в этом случае получить с использованием метода построения базиса Гребнера в виде

$$\begin{aligned} a_{22}^2 = 1, a_{23} = 0, a_{32} = 0, a_{33}^2 = 1; \quad b_{22}^2 = 1, b_{23} = 0, b_{32} = 0, b_{33}^2 = 1, \\ a_{22} = 0, a_{23}^2 = 1, a_{32}^2 = 1, a_{33} = 0; \quad b_{22} = 0, b_{23}^2 = 1, b_{32}^2 = 1, b_{33} = 0. \end{aligned}$$

Рассматривая другие случаи подсистем линейных уравнений системы (33) относительно переменных $a_{23}, a_{33}, b_{23}, b_{33}$ и $a_{22}, a_{32}, b_{22}, b_{32}$, можно привести решение системы (33) к решению нескольких биквадратных уравнений, входящих в базис Гребнера, и получить, в результате пространственные равновесные решения в аналитическом виде. Такие решения, например, имеют вид

$$\begin{aligned} a_{32}^2 &= \frac{(2n_1^2 - 1) \pm (8n_1^3 n_2 - 5n_1(n_1 + n_2) + 2)\sqrt{(4n_1 n_2 - 1)(n_1 n_2 - 1)}}{4n_1^2} \pm \frac{(8n_1^3 n_2 - 5n_1(n_1 + n_2) + 2)\sqrt{(4n_1 n_2 - 1)(n_1 n_2 - 1)}}{8n_1^2(4n_1 n_2 - 1)(n_1 n_2 - 1)}, \\ a_{31}^2 &= 1 - a_{32}^2, \quad a_{33} = 0; \quad a_{21}^2 = a_{32}^2, \quad a_{22}^2 = a_{31}^2, \quad a_{23} = 0; \\ b_{32}^2 &= \frac{(2n_2^2 - 1) \pm (8n_2^3 n_1 - 5n_2(n_1 + n_2) + 2)\sqrt{(4n_1 n_2 - 1)(n_1 n_2 - 1)}}{4n_2^2} \pm \frac{(8n_2^3 n_1 - 5n_2(n_1 + n_2) + 2)\sqrt{(4n_1 n_2 - 1)(n_1 n_2 - 1)}}{8n_2^2(4n_1 n_2 - 1)(n_1 n_2 - 1)}, \\ b_{31}^2 &= 1 - b_{32}^2, \quad b_{33} = 0; \quad b_{21}^2 = b_{32}^2, \quad b_{22}^2 = b_{31}^2, \quad b_{23} = 0. \end{aligned} \tag{35}$$

Решения (35) существуют при выполнении условий $n_1 n_2 < 1/4$, $n_1 n_2 > 1$.

Таким образом были найдены новые классы пространственных равновесных решений задачи. Определены значения параметров, при которых изменяется число положений равновесия системы спутник-стабилизатор.

В Заключении перечислены основные результаты и выводы диссертационной работы. Также в Заключении приведены данные наукометрических показателей печатных работ соискателя.

Основные выводы диссертации:

1. Разработанные в диссертации символьно-численные методы дают в сочетании с теоремами Ляпунова и Рауса сравнительно простые и эффективные алгоритмы исследования положений равновесия спутника и их устойчивости на круговой орбите при действии гравитационного, гиростатического, аэродинамического, постоянного и активного управляющего моментов.

2. Использование маховиков, влияние аэродинамических и постоянных моментов в системах пассивной стабилизации дает возможность соответствующим подбором параметров получить более широкий диапазон устойчивых стационарных движений в сравнении со спутником-твердым телом.

3. Применение активного управляющего момента, зависящего от проекций угловой скорости, позволяет обеспечить асимптотическую устойчивость положений равновесия гравитационно-ориентированного спутника на круговой орбите.

4. Использование активных управляющих моментов позволяет обеспечить стационарные вращения осесимметричного спутника. Получены соотношения, определяющие зависимость изменения ориентации оси симметрии спутника в орбитальной системе координат от параметров управляющего момента для широкого диапазона значений.

5. Составная схема спутник-стабилизатор, состоящая из двух соединенных сферическим шарниром тел, позволяет решать задачу ориентации при любых параметрах спутника и обеспечить гравитационно-устойчивые пространственные ориентации системы.

**Основные публикации по теме диссертации в изданиях, рекомендованных
ВАК РФ:**

1. Сарычев В.А., Гутник С.А. К вопросу о положениях относительного равновесия спутника-гиростата // Космические исследования. – 1984. –Т.22, № 3. – С.323-326.
2. Gutnik S.A. Application of Computer Algebra to Investigation of the Relative Equilibria of a Satellite // Proc. of Intern. Symp. on Symbolic and Algebraic Computation. ACM ISSAC'93. ACM Press, New York, 1993. P. 63-64.
3. Сарычев В.А., Гутник С.А. Равновесия спутника под действием гравитационного и постоянного моментов // Космические исследования. – 1994. – Т. 32, № 4-5. – С. 43-50.
4. Gutnik S.A. Symbolic-numeric investigations for stability analysis of Lagrange systems // Mathematics and Computers in Simulation.– 2001.–V. 57.– P. 211-215.
5. Gutnik S.A. Symbolic-numeric investigation of the aerodynamic forces influence on satellite dynamics // Lecture Notes in Computer Science (LNCS). Springer, Heidelberg. – 2011.– V.6885. – P. 192-199.
6. Сарычев В.А., Гутник С.А. Динамика осесимметричного спутника под действием гравитационного и аэродинамического моментов // Космические исследования. – 2012. – Т. 50, № 5. – С. 394-402.
7. Gutnik S.A., Sarychev V.A. Symbolic-Numerical investigation of gyrostat satellite dynamics // Lecture Notes in Computer Science (LNCS). Springer, Berlin Heidelberg. – 2013. V. 8136. – P. 169–178.
8. Гутник С.А., Сарычев В.А. Динамика осесимметричного спутника-гиростата. Положения равновесия и их устойчивость // Прикладная математика механика. – 2014. – Т. 78, Вып. 3. – С. 356-368.
9. Гутник С.А., Сарычев В.А. Символьно - численные методы исследования положений равновесия спутника-гиростата // Программирование. – 2014. – №3. – С. 49-58.

10. Гутник С. А., Сантуш Л., Сарычев В. А., Силва А. Динамика спутника-гиростата, подверженного действию гравитационного момента. Положения равновесия и их устойчивость // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2015. – №3. – С. 142-155.
11. Сарычев В.А., Гутник С.А. Динамика спутника под действием гравитационного и аэродинамического моментов. Исследование положений равновесия // Космические исследования. – 2015. – Т. 53, № 6.– С. 488-496.
12. Gutnik S.A., Guerman A., Sarychev V.A. Application of Computer Algebra Methods to Investigation of Influence of Constant Torque on Stationary Motions of Satellite// Lecture Notes in Computer Science (LNCS). Springer, Cham.– 2015. V. 9301. – P. 198–209.
13. Сарычев В.А., Гутник С.А. Динамика спутника под действием гравитационного и аэродинамического моментов. Исследование устойчивости положений равновесия // Космические исследования. – 2016. – Т. 54, №5. – С.415-426.
14. Sarychev V.A., Gutnik S.A. On the Different Types of Equilibria of Satellite Subject to Gravitational and Aerodynamic Torques in a Circular Orbit //Published in: Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems International Conference (Pyatnitskiy's Conference). 2016. IEEE Xplore.
<http://ieeexplore.ieee.org/xpl/mostRecentIssue.jsp?punumber=7532297>
15. Gutnik S.A., Sarychev V.A. A Symbolic investigation of the influence of aerodynamic forces on satellite equilibria // Lecture Notes in Computer Science (LNCS), Springer. Cham. – 2016.– V. 9890.– P. 243–254.
16. Герман А. Д., Гутник С. А., Сарычев В.А. Динамика спутника под действием гравитационного и постоянного моментов // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2017.– Т. 56, №1.– С. 128-140.
17. Гутник С.А., Сарычев В.А. Применение методов компьютерной алгебры для исследования стационарных движений спутника-гиростата // Программирование. – 2017. – Т. 43, № 2. – С. 35–44.

18. Gutnik S.A., Sarychev V.A. A symbolic study of the satellite dynamics subject to damping torques // *Lecture Notes in Computer Science (LNCS)*. Springer, Cham. – 2017. – V. 10490. – P. 167–182.
19. Sarychev V.A., Gutnik S.A. Satellite dynamics under the influence of gravitational and damping torques // *Advances in the Astronautical Sciences*, Publisher: Univelt Inc. 2017, V.161, Article number Code 213319. P. 3-12.
20. Сарычев В.А., Гутник С.А. Динамика гравитационно-ориентированного спутника при действии активных демпфирующих моментов // *Космические исследования*. – 2018. Т. 56, №1. – С. 77-84.
21. Гутник С.А., Сарычев В.А. Применение методов символьных вычислений для исследования стационарных движений осесимметричного спутника // *Программирование*. – 2018. – Т. 44, № 2. – С. 28–34.
22. Гутник С.А., Сарычев В.А. Применение методов компьютерной алгебры для исследования динамики системы двух связанных тел на круговой орбите // *Программирование*. – 2019. – Т. 45, № 2. – С. 32–40.

Научное издание

Гутник Сергей Александрович

АВТОРЕФЕРАТ

Диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук на тему:
Динамика движения спутника относительно центра масс с пассивными
системами ориентации

Подписано в печать 05.07.2019. Формат 60×84 1/16.
Тираж 100 экз.