

## **Калибровка бесплатформенной инерциальной навигационной системы при повороте вокруг вертикальной оси**

**Матасов А.И.\***, **Тихомиров В.В.\*\***

*Московский Государственный Университет им. М.В.Ломоносова,*

*Ленинские горы, 1, Москва, 119991, Россия*

*\*e-mail: [alexander.matasov@gmail.com](mailto:alexander.matasov@gmail.com)*

*\*\*e-mail: [tmrv45@mail.ru](mailto:tmrv45@mail.ru)*

### **Аннотация**

В данной работе рассматривается одна из базовых задач калибровки бесплатформенных инерциальных навигационных систем – эксперимент с разворотом системы вокруг вертикальной оси. Целью калибровки в этой задаче является построение оценок для аддитивных постоянных составляющих погрешностей блока акселерометров и датчиков угловой скорости, которые при таком эксперименте оцениваются с необходимой точностью. Предлагается исследовать задачу калибровки в едином контуре, включающем разворот в активный участок эксперимента. Представлена формализация задачи и описаны результаты моделирования.

**Ключевые слова:** бесплатформенная инерциальная навигационная система, инструментальные погрешности, приборный трехгранник, выставка, фильтр Калмана.

## 1. Общая характеристика эксперимента

В настоящее время методам калибровки бесплатформенных инерциальных навигационных систем уделяется большое внимание [1],[2], [3], однако эксперимент с плоским разворотом освещен в литературе недостаточно полно. Опишем кратко суть задачи калибровки при плоском развороте.

Бесплатформенная инерциальная навигационная система (БИНС) ставится на поворотный стол. Сначала ее приборный трехгранник ориентируется по осям географического трехгранника, после чего проводится выставка по заданному курсу и с момента времени  $\tau_1$  система начинает функционировать в инерциальном режиме, оставаясь неподвижной относительно Земли. Затем с момента времени  $\tau_2$  по момент  $\tau_3$  производится быстрый разворот корпуса БИНС на  $180^\circ$  вокруг вертикальной оси; и с момента времени  $\tau_3$  по момент времени  $\tau_4$  приборный трехгранник вновь неподвижен относительно Земли. График угла  $\phi(t)$  поворота приборного трехгранника изображен на рисунке 1.

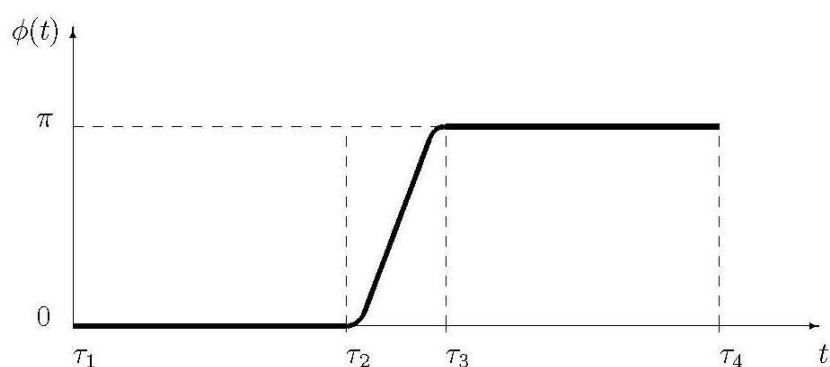


Рис. 1. График изменения угла поворота приборного трехгранника

Целью задачи калибровки является определение параметров

инструментальных погрешностей инерциальной навигационной системы по ее выходным данным о местонахождении и относительной скорости объекта. При традиционных методах анализа задачи калибровки ее решение разбивается на два независимых этапа, соответствующих положениям корпуса инерциальной системы до и после разворота. В настоящей работе задача калибровки исследуется в едином контуре, включающем разворот в активный участок эксперимента. Такой подход позволяет более полно использовать имеющуюся информацию о системе в данном эксперименте. Построена формализация задачи калибровки. Разработано соответствующее математическое обеспечение для моделирования процесса калибровки. Представлены результаты моделирования.

## **2. Уравнения ошибок инерциальной навигационной системы**

Пусть  $O$  – центр Земли,  $M$  – материальная точка, соответствующая приведенной чувствительной массе пространственного акселерометра бесплатформенной инерциальной навигационной системы (БИНС), координаты и скорости которой должны быть определены.

Введем, также,

$Ox (Mx)$  – идеальный географический трехгранник;

$Ox' (Mx')$  – модельный географический трехгранник;

$Oz (Mz)$  – приборный трехгранник;

$Oz_x (Mz_x)$  – квазиприборный трехгранник. Подробно эти трехгранники описаны в [4].

Запишем уравнения ошибок бесплатформенной инерциальной навигационной системы на исследуемых движениях. В соответствии с общими уравнениями ошибок БИНС, приведенными в [4], и с учетом того, что в данном эксперименте основание поворотного стола покоится относительно Земли, имеем

$$\dot{\delta V}_1 = -(\beta_2 + \gamma_2(t))g + 2u_3\delta V_2 + \Delta f_{1x}, \quad (1)$$

$$\dot{\delta V}_2 = (\beta_1 + \gamma_1(t))g - 2u_3\delta V_1 + \Delta f_{2x},$$

$$\dot{\beta}_1 = u_3\beta_2 - u_2\beta_3 + v_{1x}, \quad (2)$$

$$\dot{\beta}_2 = -u_3\beta_1 + v_{2x},$$

$$\dot{\beta}_3 = u_2\beta_1 + v_{3x}.$$

Здесь:

$\delta V_1, \delta V_2$  – ошибки определения относительных линейных скоростей;

$\beta_1, \beta_2, \beta_3$  – компоненты вектора малого поворота квазиприборного трехгранника  $Oz_x$  относительно модельного географического трехгранника  $Ox'$  в проекциях на оси  $Ox'$ ;

$\gamma_1, \gamma_2$  – компоненты вектора малого поворота модельного географического трехгранника  $Ox'$  относительно идеального географического трехгранника  $Ox$  в проекциях на оси  $Ox$ ;

$g$  – абсолютная величина ускорения силы тяжести в точке проведения эксперимента;

$u_1 = 0$ ,  $u_2 = u \cos \varphi$ ,  $u_3 = u \sin \varphi$  – компоненты вектора угловой скорости вращения Земли в проекциях на оси географического трехгранника;

$u$  – абсолютная величина угловой скорости вращения Земли;  $\varphi$  – широта места проведения эксперимента;

$\Delta f_{1x}$ ,  $\Delta f_{2x}$  – ошибки показаний блока акселерометров в проекциях на оси идеального географического трехгранника;

$v_{1x}$ ,  $v_{2x}$ ,  $v_{3x}$  – ошибки измерителей угловой скорости приборного трехгранника в проекциях на оси идеального географического трехгранника;

Уравнения (1) называются динамическими уравнениями ошибок, а уравнения (2) – кинематическими. Отметим, что сигналы  $\gamma_1(t)g$  и  $\gamma_2(t)g$ , входящие в правые части подсистемы (1), при стендовых испытаниях с высокой точностью являются известными функциями времени и могут трактоваться как внешние известные возмущения. Иными словами, точно известны функции

$$\tilde{\gamma}_1(t) = \gamma_1(t) + \delta\gamma_1, \quad (3)$$

$$\tilde{\gamma}_2(t) = \gamma_2(t) + \delta\gamma_2,$$

где  $\delta\gamma_1$ ,  $\delta\gamma_2$  – малые постоянные величины.

Главными внешними измерениями  $z_1(t)$ ,  $z_2(t)$  для динамической системы (1), (2) являются относительные скорости, вычитаемые инерциальной системой. А так как основание поворотного стола неподвижно относительно

Земли, то

$$\begin{aligned}z_1(t) &= \delta V_1(t) + r_1(t), \\z_2(t) &= \delta V_2(t) + r_2(t),\end{aligned}\tag{4}$$

где  $r_1(t)$  и  $r_2(t)$  – ошибки измерений величин  $\delta V_1(t)$  и  $\delta V_2(t)$ .

Отметим, что с учетом (3) и (4) уравнения для динамических ошибок (1) можно представить в более простом виде (пренебрегая членами  $\delta\gamma_1(t)g$ ,  $\delta\gamma_2(t)g$ ,  $(2u \sin \varphi)r_1(t)$  и  $(2u \sin \varphi)r_2(t)$ ):

$$\begin{aligned}\dot{\delta V}_1 &= -\beta_2 g + \Delta f_{1x} - \tilde{\gamma}_2(t)g + 2u_3 z_2(t), \\ \dot{\delta V}_2 &= \beta_1 g + \Delta f_{2x} + \tilde{\gamma}_1(t)g - 2u_3 z_1(t),\end{aligned}\tag{5}$$

где функции  $z_1(t)$ ,  $z_2(t)$ ,  $\tilde{\gamma}_1(t)$  и  $\tilde{\gamma}_2(t)$  точно известны.

Уравнения ошибок в форме (5), (2) указывают на кинематическую природу задачи калибровки. Кроме того, они более удобны для аналитического исследования, чем исходные соотношения (1), (2).

### 3. Модели погрешностей чувствительных элементов

Опишем в этом разделе погрешности чувствительных элементов БИНС  $\Delta f_x$  и  $v_x$  [4].

### 3.1. Модель погрешностей блока акселерометров.

Общая модель погрешностей показаний блока акселерометров с учетом разнесения чувствительных масс имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \Delta f_{1z} \\ \Delta f_{2z} \\ \Delta f_{3z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ 0 & 0 & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{1z} \\ A_{2z} \\ A_{3z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1z} \\ \varepsilon_{2z} \\ \varepsilon_{3z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta f_{1z} \\ \delta f_{2z} \\ \delta f_{3z} \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$+ \begin{pmatrix} -(\omega_{2z}^2 + \omega_{3z}^2)l_1^{(1)} + \omega_{1z}\omega_{2z}l_2^{(1)} + \omega_{1z}\omega_{3z}l_3^{(1)} + \dot{\omega}_{2z}l_3^{(1)} - \dot{\omega}_{3z}l_2^{(1)} \\ \omega_{1z}\omega_{2z}l_1^{(2)} - (\omega_{1z}^2 + \omega_{3z}^2)l_2^{(2)} + \omega_{2z}\omega_{3z}l_3^{(2)} + \dot{\omega}_{3z}l_1^{(2)} - \dot{\omega}_{1z}l_3^{(2)} \\ \omega_{1z}\omega_{3z}l_1^{(3)} + \omega_{2z}\omega_{3z}l_2^{(3)} - (\omega_{1z}^2 + \omega_{2z}^2)l_3^{(3)} + \dot{\omega}_{1z}l_2^{(3)} - \dot{\omega}_{2z}l_1^{(3)} \end{pmatrix},$$

где

$(\Delta f_{1z}, \Delta f_{2z}, \Delta f_{3z})^T$  – ошибки показаний показания акселерометров;

$(A_{1z}, A_{2z}, A_{3z})^T$  – проекции удельной силы, действующей на чувствительную массу акселерометров, на оси приборного трехгранника;

$c_{11}, c_{22}, c_{33}$  – постоянные ошибки масштабных коэффициентов;

$c_{13}, c_{21}, c_{23}$  – коэффициенты взаимных перекосов акселерометров;

$(\omega_{1z}, \omega_{2z}, \omega_{3z})^T$  – проекции вектора  $\omega$  абсолютной угловой скорости вращения приборного трехгранника на собственные оси;

$(l_1^{(s)}, l_2^{(s)}, l_3^{(s)})^T, s = 1, 2, 3$  – вектор смещения (от точки  $M$ ) установки -того акселерометра в проекциях на оси приборного трехгранника; без потери

общности можно считать, что точка  $M$  совпадает с центром подвеса первого

акселерометра, поэтому  $l_1^{(1)} = l_2^{(1)} = l_3^{(1)} = 0$ ;

$(\varepsilon_{1z}, \varepsilon_{2z}, \varepsilon_{3z})^T$  – постоянные смещения акселерометров;

$(\delta f_{1z}, \delta f_{2z}, \delta f_{3z})^T$  – непараметрические ошибки акселерометров; в дальнейшем они будут полагаться случайными белыми шумами.

Корпус инерциальной системы в рассматриваемом эксперименте приблизительно ориентирован по осям географического трехгранника, а быстрый разворот может осуществляться лишь вокруг вертикальной оси. Поэтому пренебрежем в (6) квадратичными членами с  $\omega_{1z}$  и  $\omega_{2z}$ , а в членах первого порядка малости положим

$$A_{1z} = 0, \quad A_{2z} = 0, \quad A_{3z} = g.$$

Тогда, с точностью до членов второго порядка малости,

$$\Delta f_{1z} = c_{13}g + \varepsilon_{1z} + \delta f_{1z} - \omega_{3z}^2 l_1^{(1)} - \dot{\omega}_{3z} l_2^{(1)}, \quad (7)$$

$$\Delta f_{2z} = c_{23}g + \varepsilon_{2z} + \delta f_{2z} - \omega_{3z}^2 l_2^{(2)} + \dot{\omega}_{3z} l_1^{(2)},$$

$$\Delta f_{3z} = c_{33}g + \varepsilon_{3z} + \delta f_{3z}.$$

В уравнениях ошибок бесплатформенной инерциальной навигационной системы (5), (2) фигурируют проекции ошибок показаний блока акселерометров на оси географического трехгранника, обозначаемые  $\Delta f_{1x}$ ,  $\Delta f_{2x}$  и  $\Delta f_{3x}$  соответственно. Поскольку приборный трехгранник БИНС осуществляет разворот относительно географического трехгранника, то, с точностью до членов второго порядка малости,



$$\begin{pmatrix} \Delta f_{1x} \\ \Delta f_{2x} \\ \Delta f_{3x} \end{pmatrix} = S^T(\phi(t)) \begin{pmatrix} \Delta f_{1z} \\ \Delta f_{2z} \\ \Delta f_{3z} \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где

$$S(\phi(t)) = \begin{pmatrix} \cos \phi(t) & \sin \phi(t) & 0 \\ -\sin \phi(t) & \cos \phi(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

### 3.2. Модель погрешностей измерителей угловой скорости.

Общая модель погрешностей измерения угловых скоростей (в проекциях на оси приборного трехгранника) имеет вид:

$$\begin{pmatrix} v_{1z} \\ v_{2z} \\ v_{3z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & \Gamma_{23} \\ \Gamma_{31} & \Gamma_{32} & \Gamma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{1z} \\ \omega_{2z} \\ \omega_{3z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_{1z}^0 \\ v_{2z}^0 \\ v_{3z}^0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta v_{1z} \\ \delta v_{2z} \\ \delta v_{3z} \end{pmatrix}, \quad (10)$$

где

$(v_{1z}, v_{2z}, v_{3z})^T$  – погрешности показаний датчиков;

$(\omega_{1z}, \omega_{2z}, \omega_{3z})^T$  – компоненты абсолютной угловой скорости вращения приборного трехгранника в его осях;

$\Gamma_{ii}$ ,  $i = 1, 2, 3$  – ошибки масштабных коэффициентов измерителей угловой скорости;

$\Gamma_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ ,  $i \neq j$  – ошибки, характеризующие несоосность измерителей угловой скорости;

$(v_{1z}^0, v_{2z}^0, v_{3z}^0)^T$  – постоянные смещения датчиков;

$(\delta v_{1z}, \delta v_{2z}, \delta v_{3z})^T$  – непараметрические ошибки измерения угловой скорости;

в дальнейшем они будут полагаться случайными белыми шумами.

Для этой модели, с точностью до членов второго порядка малости, получим

$$\begin{pmatrix} \omega_{1z} \\ \omega_{2z} \\ \omega_{3z} \end{pmatrix} = S(\phi(t)) \begin{pmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi}(t) \end{pmatrix},$$

где  $S(\phi(t))$  задается формулой (9), а  $\phi$  обозначает широту места проведения эксперимента.

Тогда

$$\begin{pmatrix} v_{1z} \\ v_{2z} \\ v_{3z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & \Gamma_{23} \\ \Gamma_{31} & \Gamma_{32} & \Gamma_{33} \end{pmatrix} \left[ S(\phi(t)) \begin{pmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi}(t) \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} v_{1z}^0 \\ v_{2z}^0 \\ v_{3z}^0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta v_{1z} \\ \delta v_{2z} \\ \delta v_{3z} \end{pmatrix}. \quad (11)$$

В уравнениях ошибок бесплатформенной инерциальной навигационной системы (5), (2) фигурируют проекции ошибок измерителей угловой скорости на оси географического трехгранника, обозначаемые  $v_{1x}$ ,  $v_{2x}$  и  $v_{3x}$  соответственно. Поскольку приборный трехгранник БИНС осуществляет разворот относительно географического трехгранника, то, с точностью до членов второго порядка малости,

$$\begin{pmatrix} v_{1x} \\ v_{2x} \\ v_{3x} \end{pmatrix} = S^T(\phi(t)) \begin{pmatrix} v_{1z} \\ v_{2z} \\ v_{3z} \end{pmatrix}, \quad (12)$$

где  $S(\phi(t))$  задается формулой (9), а  $(v_{1z}, v_{2z}, v_{3z})^T$  выражается формулой (11).

#### 4. Особенности начального состояния

Отметим, что начальное значение фазового вектора уравнений ошибок (1), (2) не вполне произвольно. В этом разделе укажем на связь между начальными значениями компонент кинематической ошибки  $\beta_1(\tau_1)$ ,  $\beta_2(\tau_1)$  с другими параметрами системы.

##### 4.1. Выставка приборного трехгранника.

Для начала функционирования бесплатформенной инерциальной навигационной системы необходимо "выставить" приборный трехгранник  $Mz$  в горизонте и в азимуте (по осям географического сопровождающего трехгранника  $Mx$ ). Выставка в азимуте осуществляется по начальной азимутальной информации, например, с помощью датчиков углов поворотного стола (ее ошибка имеет порядок десяти угловых минут). Выставка в горизонте реализуется по "нулевым сигналам" соответствующих акселерометров. Поясним термин "выставка по нулевым сигналам акселерометров".

Под выставкой понимается определение с помощью акселерометров взаимной

ориентации приборного трехгранника  $Oz$  и идеального географического трехгранника  $Ox$  в начальный момент времени  $\tau_1$ . Эта взаимная ориентация определяется матрицей  $D(\tau_1)$ ; а именно [3],

$$l_x = D(\tau_1) l_z \quad \text{или} \quad D^T(\tau_1) l_x = l_z. \quad (13)$$

Матрица  $D^T$  ориентации истинного приборного трехгранника относительно идеального географического представляет из себя произведение матриц поворота на углы курса  $\psi$ , тангажа  $\theta$  и крена  $\kappa$  вокруг соответственно третьей, первой и второй осей, и имеет вид

$$D^T = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \kappa - \sin \psi \sin \theta \sin \kappa & \sin \psi \cos \kappa + \cos \psi \sin \theta \sin \kappa & -\cos \theta \sin \kappa \\ -\sin \psi \cos \theta & \cos \psi \cos \theta & \sin \theta \\ \cos \psi \sin \kappa + \sin \psi \sin \theta \cos \kappa & \sin \psi \sin \kappa - \cos \psi \sin \theta \cos \kappa & \cos \theta \cos \kappa \end{pmatrix}.$$

Расчетная матрица  $D'$ , с которой оперирует бортовой вычислитель, имеет такой же вид, что и  $D$ , с той лишь разницей, что вместо истинных значений углов курса, тангажа и крена  $\psi$ ,  $\theta$  и  $\kappa$  матрица  $D'$  содержит их расчетные (т. е. определяемые вычислителем) значения  $\psi'$ ,  $\theta'$  и  $\kappa'$ . В бортовых алгоритмах начальное значение  $D'(\tau_1)$  расчетной матрицы  $D'$  определяется из следующего уравнения, соответствующего второму уравнению в (13):

$$D'^T(\tau_1) \begin{pmatrix} f_{1x} \\ f_{2x} \\ f_{3x} \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} f_{1z}' \\ f_{2z}' \\ f_{3z}' \end{pmatrix}, \quad (14)$$

где  $(f_{1x}, f_{2x}, f_{3x})^T$  – известные проекции удельной силы на оси идеального

географического трехгранника, а  $(f_{1z}', f_{2z}', f_{3z}')^T$  – известная тройка чисел, составленная из показаний акселерометров. Третья (вертикальная) ось географического трехгранника направлена противоположно вектору силы тяжести и при неподвижном основании поворотного стола  $(f_{1x}, f_{2x}, f_{3x})^T = (0, 0, g)^T$ . Тройка чисел  $(f_{1z}', f_{2z}', f_{3z}')^T$  составлена из известных показаний акселерометров. В уравнении (14) использован знак " $\cong$ ", так как это векторное уравнение, вообще говоря, является несовместным<sup>1</sup>. На практике при малых углах курса, тангажа и крена в системе уравнений (14) довольно часто используются лишь первые два из трех соответствующих скалярных уравнений

$$\begin{cases} -g \sin \kappa' \cos \theta' & = f'_{1z} \\ g \sin \theta' & = f'_{2z} \\ g \cos \theta' \cos \kappa' & = f'_{3z} \end{cases} \quad (15)$$

из которых, очевидно, однозначно находятся малые величины  $\theta'$  и  $\kappa'$ . Поэтому будем рассматривать знак " $\cong$ " как точное равенство для первых двух уравнений (14).

Расчетное значение  $\psi'$  угла курса определяется из априорной информации (например, из показаний датчиков углов стенда).

---

<sup>1</sup>Причина несовместности уравнения (14) заключается в том, что матрица  $D'(\tau_1)$  ортогональная, а, вообще говоря,  $\| (f_{1z}', f_{2z}', f_{3z}')^T \| \neq \| (f_{1x}, f_{2x}, f_{3x})^T \| = g$ .

#### 4.2. Связи между параметрами системы, порождаемые выставкой.

Пусть  $\alpha(\tau_1) = (\alpha_1(\tau_1), \alpha_2(\tau_1), \alpha_3(\tau_1))^T$  – вектор малого поворота квазиприборного трехгранника  $Oz_x$  относительно идеального географического трехгранника  $Ox$  в проекциях на оси  $Ox$  в начальный момент времени  $\tau_1$ , а  $\hat{\alpha}(\tau_1)$  – соответствующая ему кососимметрическая матрица. Тогда [4]

$$l_z = D'^T(\tau_1)(I + \hat{\alpha}(\tau_1))l_x \quad (16)$$

и поэтому, в соответствии с формулами (7) (ввиду неподвижности корпуса системы во время выставки мы пренебрегаем членами, содержащими угловые скорости),

$$\begin{pmatrix} f'_{1z} \\ f'_{2z} \\ f'_{3z} \end{pmatrix} = (I + C)D'^T(\tau_1)(I + \hat{\alpha}(\tau_1)) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix} + \varepsilon \quad (17)$$

$$+ \delta f(\tau_1),$$

где

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ 0 & 0 & c_{33} \end{pmatrix}.$$

Из соотношений выставки (14) и равенства (17) следует, что с точностью до

членов второго порядка малости

$$D'^T(\tau_1) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix} \cong (D'^T(\tau_1) + CD'^T(\tau_1) + D'^T(\tau_1)\hat{\alpha}(\tau_1)) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix} + \varepsilon + \delta f(\tau_1);$$

напомним, что в силу нашей договоренности это векторное равенство выполняется лишь для первых двух компонент.

Поскольку матрица  $D'^T(\tau_1)$  близка к единичной, то из последнего равенства с точностью до членов второго порядка малости получим

$$0 \cong (C + \hat{\alpha}(\tau_1)) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix} + \varepsilon + \delta f(\tau_1). \quad (18)$$

Учитывая, что  $\alpha_1(\tau_1) = \beta_1(\tau_1) + \gamma_1(\tau_1)$  и  $\alpha_2(\tau_1) = \beta_2(\tau_1) + \gamma_2(\tau_1)$ , из первых двух точных уравнений (18) получим соотношения

$$\beta_1(\tau_1) = -\frac{c_{23}g + \varepsilon_2}{g} - \frac{\delta f_2(\tau_1)}{g} - \gamma_1(\tau_1), \quad (19)$$

$$\beta_2(\tau_1) = \frac{c_{13}g + \varepsilon_1}{g} + \frac{\delta f_1(\tau_1)}{g} - \gamma_2(\tau_1).$$

Формулы (19) указывают на зависимость фазовых переменных  $\beta_1(\tau_1)$  и  $\beta_2(\tau_1)$  в начальный момент времени от других параметров системы, входящих в соотношения (7), (1), (2). Эти зависимости позволяют правильно записать начальную ковариационную матрицу для решения соответствующей задачи оценивания с помощью фильтра Калмана.

В дальнейшем неизвестные инструментальные ошибки, в частности,  $c_{13}$ ,  $c_{23}$ ,  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ , будут трактоваться как взаимно независимые и независимые от  $\delta f_1(\tau_1)$ ,  $\delta f_2(\tau_1)$ ,  $\gamma_1(\tau_1)$  и  $\gamma_2(\tau_1)$  случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями и заданными дисперсиями.

Уравнение для азимутальной информации определяется известной формулой [4]:

$$\beta_3(\tau_1) = -\Delta\psi(\tau_1) - \gamma_3(\tau_1) = -\Delta\psi(\tau_1) - \gamma_2(\tau_1)\operatorname{tg} \varphi, \quad (20)$$

где  $\Delta\psi(\tau_1)$  – ошибка определения курса в начальный момент времени.

## 5. Полная динамическая система уравнений

### 5.1. Полная динамическая модель

Полная динамическая модель, описывающая поведение навигационной системы при калибровке, имеет вид

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)q(t) + Ch(t), \quad (21)$$

где вектор состояния  $x(t)$ , вектор немоделируемых возмущений  $q(t)$ , вектор известных случайных величин  $h(t)$  и матрицы  $A(t)$ ,  $B(t)$  и  $C$  можно представить в блочном виде:

$$x(t) = (\delta V(t), \beta(t), c, \varepsilon, \Gamma, v_z^0, l)^T \in \mathbb{R}^{23},$$



$$q(t) = (\delta f_z(t), \delta v_z(t))^T \in \mathbb{R}^5, \quad h(t) = (z(t), \tilde{\gamma}(t))^T \in \mathbb{R}^4,$$

$$A(t)_{(23 \times 23)} = \begin{pmatrix} & & \vdots & W(t) \\ & A_1(t) & \vdots & (2 \times 2) \\ & (21 \times 21) & \vdots & 0 \\ & & \vdots & (19 \times 2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ & 0 & \vdots & 0 \\ (2 \times 21) & & \vdots & (2 \times 2) \end{pmatrix},$$

$$B(t)_{(23 \times 5)} = \begin{pmatrix} B_1(t) \\ (5 \times 5) \\ 0 \\ (18 \times 5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s^T(t) & \vdots & 0 \\ (2 \times 2) & \vdots & (2 \times 3) \\ 0 & \vdots & S^T(t) \\ (3 \times 2) & \vdots & (3 \times 3) \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 \\ (18 \times 5) \end{pmatrix},$$

$$C_{(23 \times 4)} = \begin{pmatrix} C_1 \\ (2 \times 4) \\ 0 \\ (21 \times 4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U & \vdots & G \\ (2 \times 2) & \vdots & (2 \times 2) \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 \\ (21 \times 4) \end{pmatrix},$$

Здесь компоненты векторов  $x(t)$ ,  $q(t)$  и  $h(t)$  определяются равенствами

$$\delta V = (\delta V_1(t), \delta V_2(t))^T \in \mathbb{R}^2, \quad \beta(t) = (\beta_1(t), \beta_2(t), \beta_3(t))^T \in \mathbb{R}^3, \quad c = (c_{13}, c_{23})^T \in \mathbb{R}^2,$$

$$c = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)^T \in \mathbb{R}^2, \quad \Gamma = (\Gamma_{11}, \Gamma_{12}, \Gamma_{13}, \Gamma_{21}, \Gamma_{22}, \Gamma_{23}, \Gamma_{31}, \Gamma_{32}, \Gamma_{33})^T \in \mathbb{R}^9,$$

$$v_z^0 = (v_{1z}^0, v_{2z}^0, v_{3z}^0)^T \in \mathbb{R}^3, \quad l = (l_1^{(2)}, l_2^{(20)})^T \in \mathbb{R}^2,$$

$$\delta f_z(t) = (\delta f_{1z}(t), \delta f_{2z}(t))^T \in \mathbb{R}^2, \quad \delta v_z(t) = (\delta v_{1z}(t), \delta v_{2z}(t), \delta v_{3z}(t))^T \in \mathbb{R}^3,$$

$$z(t) = (z_1(t), z_2(t))^T \in \mathbb{R}^2, \quad \tilde{\gamma}(t) = (\tilde{\gamma}_1(t), \tilde{\gamma}_2(t))^T \in \mathbb{R}^2$$

(через  $\tilde{\gamma}_i(t)$  обозначена имеющаяся информация о компонентах  $\gamma_i(t)$ )

вектора  $\gamma(t)$ , матрица  $A_1(t)$  имеет вид

$$A_1(t)_{(21 \times 21)} = \begin{pmatrix} 0 & F & gs^T(t) & s^T(t) & 0 & 0 \\ (2 \times 2) & (2 \times 3) & (2 \times 2) & (2 \times 2) & (2 \times 9) & (2 \times 3) \\ 0 & \hat{u} & 0 & 0 & S_m^T(t) & S^T(t) \\ (3 \times 2) & (3 \times 3) & (3 \times 2) & (3 \times 2) & (3 \times 9) & (3 \times 3) \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ & & & 0 & & \\ & & & (16 \times 21) & & \end{pmatrix},$$

Матрицы  $S(t)$ ,  $s(t)$ ,  $S_m(t)$ ,  $W(t)$ ,  $\hat{u}$ ,  $F$ ,  $U$  и  $G$  определяются выражениями

$$S(t)_{(3 \times 3)} = \begin{pmatrix} \cos \phi(t) & \sin \phi(t) & 0 \\ -\sin \phi(t) & \cos \phi(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad s(t)_{(2 \times 2)} = \begin{pmatrix} \cos \phi(t) & \sin \phi(t) \\ -\sin \phi(t) & \cos \phi(t) \end{pmatrix},$$

$$S_m(t)_{(9 \times 3)} = \begin{pmatrix} m \cos \phi(t) & m \sin \phi(t) & 0 \\ -m \sin \phi(t) & m \cos \phi(t) & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}, \quad \text{где } m = \begin{pmatrix} u_2 \sin \phi(t) \\ u_2 \cos \phi(t) \\ u_3 + \dot{\phi}(t) \end{pmatrix},$$

$$W(t)_{(2 \times 2)} = \begin{pmatrix} -\ddot{\phi}(t) \sin \phi(t) & \dot{\phi}^2(t) \sin \phi(t) \\ \ddot{\phi}(t) \cos \phi(t) & -\dot{\phi}^2(t) \cos \phi(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \phi(t) \\ \cos \phi(t) \end{pmatrix} (\ddot{\phi}(t) \quad -\dot{\phi}^2(t)),$$

$$\hat{u}_{(3 \times 3)} = \begin{pmatrix} 0 & u_3 & -u_2 \\ -u_3 & 0 & u_1 \\ u_2 & -u_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_{(2 \times 3)} = g \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$U_{(2 \times 2)} = 2u_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad G_{(2 \times 2)} = g \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

## 5.2. Выражение для переходной матрицы

Для реализации фильтра Калмана необходимо перейти от непрерывной системы (21) к эквивалентной ей дискретной, а для этого необходимо вычислить переходную матрицу системы (21). Однако явное вычисление входящих в  $A(t)$  членов, содержащих  $\ddot{\phi}(t)$ , не представляется возможным, поскольку функция  $\ddot{\phi}(t)$  неизвестна и может принимать сколь угодно большие значения в окрестностях концов отрезка  $[\tau_2, \tau_3]$ . Соответственно, и явное вычисление переходной матрицы  $\Phi(t, s)$  представляется затруднительным. Приведенная ниже лемма помогает решить эту проблему.

**Лемма.** *Переходная матрица системы (21) имеет вид*

$$\begin{aligned} & \Phi(t, s) \\ & (23 \times 23) \\ & = \left( \begin{array}{ccc} & \cdot & \int_s^t W(\tau) d\tau \\ \Phi_1(t, s) & \cdot & (2 \times 2) \\ (21 \times 21) & \cdot & 0 \\ & \cdot & (19 \times 2) \\ \dots & \cdot & \dots \\ & \cdot & \\ 0 & \cdot & E_2 \\ (2 \times 21) & \cdot & (2 \times 2) \\ & \cdot & \end{array} \right), \end{aligned} \quad (22)$$

где  $\Phi_1(t, s)$  — переходная матрица усеченной системы вида  $\dot{y}(t) = A_1(t)y(t)$  с матрицей  $A_1(t)$ , а  $E_n$  — единичная матрица порядка  $n$ .

В справедливости леммы легко убедиться непосредственной подстановкой. Удобство такого подхода заключается в том, что все элементы матрицы  $A_1(t)$ , в отличие от  $A(t)$ , можно явно вычислить. Вычисление  $\int_s^t W(\tau) d\tau$  для произвольных  $t, s$  невозможно по указанным выше причинам, однако в этом и нет необходимости, поскольку после проведения дискретизации уравнений ошибок вычисление этого интеграла оказывается необходимым не для произвольных, а лишь для дискретных моментов времени, соответствующих сетке разбиения временной оси. В следующем разделе будут приведены соответствующие формулы для  $\int_s^t W(\tau) d\tau$ .

## 6. Дискретизация уравнений ошибок

### 6.1. Дискретная система.

Разобьем отрезки  $[\tau_1, \tau_2]$  и  $[\tau_3, \tau_4]$  на меньшие отрезки, зафиксировав на отрезке  $[\tau_1, \tau_4]$  некоторые дискретные моменты времени  $t_k$  (отрезок  $[\tau_2, \tau_3]$  не разбивается на меньшие отрезки, т. е. точки  $\tau_2$  и  $\tau_3$  соответствуют соседним моментам времени):

$$\tau_1 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \tau_2 < \tau_3 = t_{n+1} < t_{n+2} < \dots < t_r = \tau_4.$$

В соответствии с формулой Коши непрерывную систему (21) можно представить в дискретном виде

$$x_{k+1} = \Phi_k x_k + \xi_k + \eta_k, \quad k = 0, 1, \dots, r-1, \quad (23)$$

где

$$\Phi_k = \Phi(t_{k+1}, t_k) = \begin{pmatrix} \Phi_1(t_{k+1}, t_k) & \cdot & \int_{t_k}^{t_{k+1}} W(\tau) d\tau \\ (21 \times 21) & \cdot & (2 \times 2) \\ \dots & \cdot & 0 \\ & \cdot & (19 \times 2) \\ \dots & \cdot & \dots \\ 0 & \cdot & E_2 \\ (2 \times 21) & \cdot & (2 \times 2) \\ & \cdot & \end{pmatrix},$$

$$x_k = x(t_k), \quad \xi_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, \tau) B(\tau) q(\tau) d\tau, \quad \eta_k$$

$$= \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, \tau) C h(\tau) d\tau.$$

6.2. Удобные выражения для  $\xi_k$  и  $\eta_k$ .

Представив матрицу  $\Phi_1(t, s)$  в видах

$$\Phi_1(t, s) = \begin{pmatrix} \Phi_{11}(t, s) & \cdot & \Phi_{12}(t, s) \\ (21 \times 21) & (21 \times 5) & (21 \times 16) \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_{21}(t, s) & \cdot & \Phi_{22}(t, s) \\ (21 \times 2) & \cdot & (21 \times 19) \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix},$$

выражения для  $\xi_k$  и  $\eta_k$  можно записать в виде

$$\xi_k = \begin{pmatrix} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi_{11}(t_{k+1}, \tau) B_1(\tau) q(\tau) d\tau \\ (21 \times 1) \\ \dots\dots\dots \\ 0 \\ (2 \times 1) \end{pmatrix},$$

$$\eta_k = \begin{pmatrix} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi_{21}(t_{k+1}, \tau) C_1 h(\tau) d\tau \\ (21 \times 1) \\ \dots\dots\dots \\ 0 \\ (2 \times 1) \end{pmatrix}.$$

### 6.3. Вектор возмущений в динамической системе.

Вектор  $q(t)$  будем полагать случайным процессом типа белого шума:

$\mathbf{M}q(t) = 0$ ,  $\mathbf{M}[q(t)q^T(s)] = Q\delta(t-s)$  ( $\mathbf{M}$  - символ математического ожидания), где  $\delta(t)$  — дельта-функция Дирака. Различные компоненты вектора  $q(t)$  будем полагать взаимно некоррелированными:  $Q = \text{diag}(Q_1, Q_2, \dots, Q_5)$ . Тогда последовательность  $\{\xi_k\}$  является последовательностью независимых случайных величин типа дискретного белого шума:  $\mathbf{M}\xi_k = 0$ ,  $\mathbf{M}[\xi_k \xi_l^T] = Q_k \delta_{kl}$ , где  $\delta_{kl}$  — символ Кронекера, а

$$Q_k (23 \times 23) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} L(t_{k+1}, \tau) Q L^T(t_{k+1}, \tau) d\tau,$$

где

$$L(t_{k+1}, \tau) = \begin{pmatrix} \Phi_{11}(t_{k+1}, \tau) B_1(\tau) \\ (21 \times 5) \\ \dots\dots\dots \\ 0 \\ (2 \times 5) \end{pmatrix}.$$

Отметим, что последовательность  $\{\eta_k\}$  представляет собой последовательность известных величин.

#### 6.4. Вычисление матрицы $\Phi_k$

Для вычисления входящего в выражение для матрицы  $\Phi_k$  блока  $\Phi_1(t_{k+1}, t_k)$  разобьем отрезок  $[t_k, t_{k+1}]$  на достаточно малые промежутки времени так, что матрицу  $A_1$  можно положить на каждом из них практически постоянной.

Точки разбиения обозначим через  $t_k = s_0^{(k)} < s_1^{(k)} < \dots < s_p^{(k)} = t_{k+1}$ . Тогда

$$\Phi_1(t_{k+1}, t_k) = \Phi_1(s_p^{(k)}, s_0^{(k)}) = \prod_{m=0}^{m=p-1} \Phi_1(s_{m+1}^{(k)}, s_m^{(k)}),$$

где матрицы  $\Phi_1(s_{m+1}^{(k)}, s_m^{(k)})$  легко вычислить по приближенной формуле:

$$\Phi_1(s_{m+1}^{(k)}, s_m^{(k)}) \approx e^{A_1(s_m^{(k)})\Delta\tau} \approx E_{23} + A_1(s_m^{(k)})\Delta\tau,$$

где  $\Delta\tau = s_{m+1}^{(k)} - s_m^{(k)}$ .

Для вычисления интеграла от  $W(t)$ , входящего в состав  $\Phi(t_{k+1}, t_k)$ , были выведены явные формулы. Поскольку  $\phi(t) \equiv 0$  на отрезках  $[\tau_1, \tau_2]$  и  $[\tau_3, \tau_4]$ , то на этих промежутках и  $W(t) \equiv 0$ , откуда

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} W(t) dt = \int_{\tau_3}^{\tau_4} W(t) dt = 0.$$

Для вычисления интеграла на отрезке  $[\tau_2, \tau_3]$  применим формулу интегрирования по частям:

$$\int_{\tau_2}^{\tau_3} W(t) dt = \begin{pmatrix} - \int_{\tau_2}^{\tau_3} \ddot{\phi}(t) \sin \phi(t) dt & \int_{\tau_2}^{\tau_3} \dot{\phi}^2(t) \sin \phi(t) dt \\ \int_{\tau_2}^{\tau_3} \ddot{\phi}(t) \cos \phi(t) dt & - \int_{\tau_2}^{\tau_3} \dot{\phi}^2(t) \cos \phi(t) dt \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \int_{\tau_2}^{\tau_3} \dot{\phi}^2(t) \cos \phi(t) dt - [\dot{\phi}(\tau_3) \sin \phi(\tau_3) - \dot{\phi}(\tau_2) \sin \phi(\tau_2)] & \int_{\tau_2}^{\tau_3} \dot{\phi}^2(t) \sin \phi(t) dt \\ \int_{\tau_2}^{\tau_3} \dot{\phi}^2(t) \sin \phi(t) dt + [\dot{\phi}(\tau_3) \cos \phi(\tau_3) - \dot{\phi}(\tau_2) \cos \phi(\tau_2)] & - \int_{\tau_2}^{\tau_3} \dot{\phi}^2(t) \cos \phi(t) dt \end{pmatrix}.$$

Учтем следующие соображения:

1) на почти всем отрезке  $[\tau_2, \tau_3]$  (кроме небольших окрестностей концов этого промежутка) угловая скорость  $\dot{\phi}(t)$  вращения корпуса БИНС постоянна и равна  $\Omega$ ;

2)  $\phi(\tau_2) = 0$ ,  $\phi(\tau_3) = \pi$ ;

3)  $\dot{\phi}(\tau_2) = \dot{\phi}(\tau_3) = 0$  (поскольку мы полагаем зависимость  $\phi(t)$  гладкой).



Тогда получим, что

$$\int_{\tau_2}^{\tau_3} W(t) dt =$$

$$= \begin{pmatrix} \int_{\tau_2}^{\tau_3} \dot{\phi}^2(t) \cos \phi(t) dt & \int_{\tau_2}^{\tau_3} \dot{\phi}^2(t) \sin \phi(t) dt \\ \int_{\tau_2}^{\tau_3} \dot{\phi}^2(t) \sin \phi(t) dt - [\dot{\phi}(\tau_2) + \dot{\phi}(\tau_3)] & - \int_{\tau_2}^{\tau_3} \dot{\phi}^2(t) \cos \phi(t) dt \end{pmatrix} \approx$$

$$\approx 2\Omega \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

### 6.5. Уравнение для измерений

Измерения, поступающие в дискретные моменты времени, описываются равенством

$$z_k = Hx(t_k) + r_k, \quad k = 0, 1, \dots, r-1, \quad (24)$$

где

$$H \begin{matrix} (2 \times 23) \end{matrix} = \begin{pmatrix} E_2 & 0 \\ (2 \times 2) & (2 \times 21) \end{pmatrix}, \quad r_k = \begin{pmatrix} r_1(t_k) \\ r_2(t_k) \end{pmatrix}.$$

При этом  $r_k$  будем полагать дискретным белым шумом:  $\mathbf{M}r_k = 0$ ,  $\mathbf{M}[r_k r_l^T] =$

$R \delta_{kl}$ .

## 7. Дискретный фильтр Калмана

Для постановки задачи оценивания представим вектор состояния системы (23)

в следующем виде:  $x_k = y_k + \zeta_k$ . Вектор  $y_k$  является решением уравнения

$$y_{k+1} = \Phi_k y_k + \xi_k, \quad k = 0, 1, \dots, \quad y_0 = x_0.$$

Вектор  $\zeta_k$  является решением уравнения

$$\zeta_{k+1} = \Phi_k \zeta_k + \eta_k, \quad k = 0, 1, \dots, \quad \zeta_0 = 0. \quad (25)$$

Для вектора состояния системы (6.1) в качестве оценки  $\tilde{x}_k$  примем

$$\tilde{x}_k = \tilde{y}_k + \zeta_k.$$

где  $\tilde{y}_k$  – оптимальная в среднеквадратичном оценка вектора  $y_k$  по измерениям

$$z_k^* = z_k - H_k \zeta_k = H_k y_k + r_k.$$

Решение задачи оценки вектора  $y_k$  с помощью фильтра Калмана имеет вид

[5]:

$$\begin{aligned} \tilde{y}_k^+ &= \tilde{y}_k^- + P_k^- H^T (H P_k^- H^T + R)^{-1} (z_k^* - H \tilde{y}_k^-), \\ P_k^+ &= P_k^- - P_k^- H^T (H P_k^- H^T + R)^{-1} H P_k^-, \\ \tilde{y}_{k+1}^- &= \Phi_k \tilde{y}_k^+, \\ P_{k+1}^- &= \Phi_k P_k^+ \Phi_k^T + Q_k, \quad k = 0, 1, \dots, \end{aligned}$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} y_0^- &= \mathbf{M} y_0 = \mathbf{M} x_0, \quad P_0^- = \mathbf{M} (y_0 - \mathbf{M} y_0) (y_0 - \mathbf{M} y_0)^T \\ &= \mathbf{M} (x_0 - \mathbf{M} x_0) (x_0 - \mathbf{M} x_0)^T. \end{aligned}$$

Заметим, что при помощи изложенного выше алгоритма можно получить удобную форму алгоритма оценки вектора  $x_k$ . Для этого прибавим к уравнению для оценки  $\tilde{y}_k^-$  уравнение (24), к уравнению для оценки  $\tilde{y}_k^+$  – величину  $\zeta_k$  (справа и слева) и введем обозначения

$$\tilde{x}_k^- = \tilde{y}_k^- + \zeta_k, \quad \tilde{x}_k^+ = \tilde{y}_k^+ + \zeta_k.$$

Тогда получим, что для оценок вектора состояния исходной системы (6.1) справедливы соотношения:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_k^+ &= \tilde{x}_k^- + P_k^- H^T (H P_k^- H^T + R)^{-1} (z_k - H \tilde{x}_k^-), \\ P_k^+ &= P_k^- - P_k^- H^T (H P_k^- H^T + R)^{-1} H P_k^-, \\ \tilde{x}_{k+1}^- &= \Phi_k \tilde{x}_k^+ + \eta_k, \\ P_{k+1}^- &= \Phi_k P_k^+ \Phi_k^T + Q_k, \quad k = 0, 1, \dots, \end{aligned}$$

с начальными условиями

$$x_0^- = \mathbf{M}x_0, \quad P_0^- = \mathbf{M}(x_0 - \mathbf{M}x_0)(x_0 - \mathbf{M}x_0)^T.$$

начальный момент времени все параметры системы считаются независимыми, за исключением входящих в уравнения (19), (20), задающие зависимость  $\beta_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  от параметров погрешностей блока акселерометров и ошибок определения начального местоположения  $\gamma_i$ . В соответствии с этими формулами математические ожидания всех компонент начального вектора состояния полагаются равными нулю:  $\mathbf{M}x_0 = \mathbf{M}x(\tau_1) = 0$ , а ненулевые элементы начальной матрицы ковариаций  $P(\tau_1) = \mathbf{M}x_0 x_0^T$  имеют вид:

$$\begin{array}{rclclcl}
P_{1,1}(\tau_1) & = & P_{2,2}(\tau_1) & = & = & \sigma_{\delta V}^2, \\
P_{3,3}(\tau_1) & = & & = & = & \sigma_c^2 + \sigma_\varepsilon^2/g^2 + \sigma_\gamma^2 + \sigma_{\delta f}^2, \\
P_{3,7}(\tau_1) & = & P_{7,3}(\tau_1) & = & = & -\sigma_c^2, \\
P_{3,9}(\tau_1) & = & P_{9,3}(\tau_1) & = & = & -\sigma_\varepsilon^2/g, \\
P_{4,4}(\tau_1) & = & & = & = & \sigma_c^2 + \sigma_\varepsilon^2/g^2 + \sigma_\gamma^2 + \sigma_{\delta f}^2, \\
P_{4,6}(\tau_1) & = & P_{6,4}(\tau_1) & = & = & \sigma_c^2, \\
P_{4,8}(\tau_1) & = & P_{8,4}(\tau_1) & = & = & \sigma_\varepsilon^2/g, \\
P_{5,5}(\tau_1) & = & & = & = & \sigma_{\Delta\Psi}^2 + \sigma_\gamma^2 tg^2 \varphi, \\
P_{6,6}(\tau_1) & = & P_{7,7}(\tau_1) & = & = & \sigma_c^2, \\
P_{8,8}(\tau_1) & = & P_{9,9}(\tau_1) & = & = & \sigma_\varepsilon^2, \\
P_{10,10}(\tau_1) & = & P_{11,11}(\tau_1) & = & P_{12,12}(\tau_1) & = & \sigma_\Gamma^2, \\
P_{13,13}(\tau_1) & = & P_{14,14}(\tau_1) & = & P_{15,15}(\tau_1) & = & \sigma_\Gamma^2, \\
P_{16,16}(\tau_1) & = & P_{17,17}(\tau_1) & = & P_{18,18}(\tau_1) & = & \sigma_\Gamma^2, \\
P_{19,19}(\tau_1) & = & P_{20,20}(\tau_1) & = & P_{21,21}(\tau_1) & = & \sigma_\gamma^2, \\
P_{22,22}(\tau_1) & = & P_{23,23}(\tau_1) & = & = & = & \sigma_l^2.
\end{array}$$

где  $\sigma_{\delta V}^2$ ,  $\sigma_\gamma^2$ ,  $\sigma_\varepsilon^2$ ,  $\sigma_c^2$ ,  $\sigma_\Gamma^2$ ,  $\sigma_l^2$ , - дисперсии соответствующих координат вектора состояния,  $\sigma_{\Delta\Psi}^2$  - дисперсия ошибки стендовой информации об угле курса при выставке,  $\sigma_\gamma^2$  - дисперсия ошибки начальных значений координат БИНС.

## 8. Результаты численного моделирования задачи оценки параметров погрешностей БИНС

Для численной реализации фильтра Калмана (в форме квадратного корня) использовалась библиотека программ, разработанная А.А. Голованом.

Моделирование выходных данных БИНС проводилось на интервале времени от  $\tau_1 = 0$  до  $\tau_4 = 2000$  сек с началом разворота при  $\tau_2 = 800$  сек и

окончанием при  $\tau_3 = 810$  сек.

При решении задачи оценки параметров инструментальных погрешностей до и после разворота измерения поступают с шагом  $\Delta t = 1$  сек; при этом на интервале разворота измерения не производятся из-за отсутствия информации об угловой скорости разворота.

Для случайной ошибки измерений относительной скорости принята величина  $\sigma_{\delta v} = 5,0 \cdot 10^{-3}$  м/сек.

Интенсивности случайных возмущений в уравнениях ошибок полагаются следующими: для акселерометров –  $(Q_{\delta f})^{1/2} = 10^{-3}$  м/сек<sup>3/2</sup>; для датчиков угловой скорости –  $(Q_v)^{1/2} = 3 \cdot 10^{-7}$  1/сек<sup>1/2</sup> [6], [7].

Начальные среднеквадратические значения ошибок по скоростям, по координатам и азимутальному углу приняты такими:  $\sigma_{\delta v} = 10^{-3}$  м/сек,  $\sigma_\gamma = 10^{-5}$ ,  $\sigma_{\beta_3} = 3,0 \cdot 10^{-3}$ .

В таблицах 1 и 2 приведены численные результаты решения задачи оценки инструментальных погрешностей датчиков угловой скорости и акселерометров БИНС. Для момента времени  $\tau_1$  в таблицах приведены начальные значения среднеквадратических величин оцениваемых параметров, для момента времени  $\tau_4$  - значения, полученные к концу интервала оценивания.

**Таблица 1.**

|                          |                       | $\tau_1$            | $\tau_4$             |
|--------------------------|-----------------------|---------------------|----------------------|
| $\sigma_{v_1^0}$         | [1/сек]               | $5,0 \cdot 10^{-7}$ | $2,52 \cdot 10^{-8}$ |
| $\sigma_{v_2^0}$         | [1/сек]               | $5,0 \cdot 10^{-7}$ | $1,02 \cdot 10^{-8}$ |
| $\sigma_{v_3^0}$         | [1/сек]               | $5,0 \cdot 10^{-7}$ | $3,97 \cdot 10^{-7}$ |
| $\sigma_{\varepsilon_1}$ | [м/сек <sup>2</sup> ] | $1,0 \cdot 10^{-2}$ | $3,84 \cdot 10^{-3}$ |
| $\sigma_{\varepsilon_2}$ | [м/сек <sup>2</sup> ] | $1,0 \cdot 10^{-2}$ | $3,84 \cdot 10^{-3}$ |
| $\sigma_{c_{13}}$        |                       | $3,0 \cdot 10^{-4}$ | $2,88 \cdot 10^{-4}$ |
| $\sigma_{c_{23}}$        |                       | $3,0 \cdot 10^{-4}$ | $2,88 \cdot 10^{-4}$ |
| $\sigma_{\Gamma_{11}}$   |                       | $3,0 \cdot 10^{-4}$ | $3,0 \cdot 10^{-4}$  |
| $\sigma_{\Gamma_{12}}$   |                       | $3,0 \cdot 10^{-4}$ | $2,98 \cdot 10^{-4}$ |
| $\sigma_{\Gamma_{13}}$   |                       | $3,0 \cdot 10^{-4}$ | $2,88 \cdot 10^{-4}$ |
| $\sigma_{\Gamma_{21}}$   |                       | $3,0 \cdot 10^{-4}$ | $3,0 \cdot 10^{-4}$  |
| $\sigma_{\Gamma_{22}}$   |                       | $3,0 \cdot 10^{-4}$ | $2,00 \cdot 10^{-4}$ |
| $\sigma_{\Gamma_{23}}$   |                       | $3,0 \cdot 10^{-4}$ | $2,88 \cdot 10^{-4}$ |
| $\sigma_{\Gamma_{31}}$   |                       | $3,0 \cdot 10^{-4}$ | $3,0 \cdot 10^{-4}$  |
| $\sigma_{\Gamma_{32}}$   |                       | $3,0 \cdot 10^{-4}$ | $3,0 \cdot 10^{-4}$  |
| $\sigma_{\Gamma_{33}}$   |                       | $3,0 \cdot 10^{-4}$ | $2,96 \cdot 10^{-4}$ |
| $\sigma_{l_1^{(2)}}$     | [М]                   | $3,0 \cdot 10^{-2}$ | $5,35 \cdot 10^{-3}$ |
| $\sigma_{l_2^{(2)}}$     | [М]                   | $3,0 \cdot 10^{-2}$ | $5,31 \cdot 10^{-3}$ |

Результаты, приведенные в таблице 1, показывают, что значительного повышения точности оценок параметров, кроме величины постоянных составляющих ошибок датчиков угловой скорости и смещения чувствительной массы акселерометра  $v_i^0$  и  $l_i^{(2)}$ ,  $i = 1, 2$ , не происходит. Значительное повышение точности оценок части параметров появляется при уменьшении начальных среднеквадратических значений элементов матрицы ошибок датчиков угловой скорости  $\Gamma_{ij}$  и ошибок установки осей чувствительности акселерометров  $c_{i3}$ ,  $i = 1, 2$ . Соответствующие результаты вычислений приведены в таблице 2.

**Таблица 2.**

|  | $\tau_1$            | $\tau_4$             |
|--|---------------------|----------------------|
| $\sigma_{v_1^0}$ [1/сек]                       | $5,0 \cdot 10^{-7}$ | $1,57 \cdot 10^{-8}$ |
| $\sigma_{v_2^0}$ [1/сек]                       | $5,0 \cdot 10^{-7}$ | $8,60 \cdot 10^{-9}$ |
| $\sigma_{v_3^0}$ [1/сек]                       | $5,0 \cdot 10^{-7}$ | $3,96 \cdot 10^{-7}$ |
| $\sigma_{\varepsilon_1}$ [м/сек <sup>2</sup> ] | $1,0 \cdot 10^{-2}$ | $4,18 \cdot 10^{-4}$ |
| $\sigma_{\varepsilon_2}$ [м/сек <sup>2</sup> ] | $1,0 \cdot 10^{-2}$ | $4,19 \cdot 10^{-4}$ |
| $\sigma_{c_{13}}$                              | $3,0 \cdot 10^{-5}$ | $2,99 \cdot 10^{-5}$ |
| $\sigma_{c_{23}}$                              | $3,0 \cdot 10^{-5}$ | $2,99 \cdot 10^{-5}$ |
| $\sigma_{\Gamma_{11}}$                         | $3,0 \cdot 10^{-5}$ | $3,0 \cdot 10^{-5}$  |
| $\sigma_{\Gamma_{12}}$                         | $3,0 \cdot 10^{-5}$ | $3,0 \cdot 10^{-5}$  |

|                                  |                     |                      |
|----------------------------------|---------------------|----------------------|
| $\sigma_{\Gamma_{13}}$           | $3,0 \cdot 10^{-5}$ | $3,0 \cdot 10^{-5}$  |
| $\sigma_{\Gamma_{21}}$           | $3,0 \cdot 10^{-5}$ | $3,0 \cdot 10^{-5}$  |
| $\sigma_{\Gamma_{22}}$           | $3,0 \cdot 10^{-5}$ | $2,98 \cdot 10^{-5}$ |
| $\sigma_{\Gamma_{23}}$           | $3,0 \cdot 10^{-5}$ | $3,0 \cdot 10^{-5}$  |
| $\sigma_{\Gamma_{31}}$           | $3,0 \cdot 10^{-5}$ | $3,0 \cdot 10^{-5}$  |
| $\sigma_{\Gamma_{32}}$           | $3,0 \cdot 10^{-5}$ | $3,0 \cdot 10^{-5}$  |
| $\sigma_{\Gamma_{33}}$           | $3,0 \cdot 10^{-5}$ | $3,0 \cdot 10^{-5}$  |
| $\sigma_{l_1^{(2)}} \text{ [м]}$ | $3,0 \cdot 10^{-2}$ | $5,34 \cdot 10^{-3}$ |
| $\sigma_{l_2^{(2)}} \text{ [м]}$ | $3,0 \cdot 10^{-2}$ | $5,29 \cdot 10^{-3}$ |

При задании начального среднеквадратического значения смещения чувствительной массы акселерометра, равного  $5,0 \cdot 10^{-3}$  м, заметного изменения точности оценок постоянных составляющих ошибок датчиков угловой скорости и постоянных составляющих ошибок акселерометров не происходит.

Полученные результаты показывают, что при эксперименте с быстрым разворотом системы вокруг вертикальной оси в случае, когда априорные среднеквадратические значения параметров ошибок датчиков угловой скорости и перекосов осей чувствительности акселерометров равны  $3,0 \cdot 10^{-5}$ , постоянные составляющие ошибок датчиков угловой скорости определяются с точностью порядка  $10^{-8}$  1/сек ( $0,002^\circ$ /час), а ошибки



акселерометров определяются с точностью около  $4,0 \cdot 10^{-4}$  м/сек<sup>2</sup> . Точность оценки смещения чувствительной массы акселерометра мало зависит от точности задания геометрических параметров.

*Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 10-01-00703-а*

### **Библиографический список**

1. Вавилова Н.Б., Васинёва И.А., Парусников Н.А. О стендовой калибровке авиационных бескарданных инерциальных навигационных систем // Труды МАИ, 2015, №84: <http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=63069>
2. Вавилова Н.Б., Голован А.А., Кальченко А.О. Определение погрешностей бескарданной инерциальной навигационной системы в режиме рулежки и разгона // Труды МАИ, 2015, №84:  
<http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=63092>
3. Веремеенко К.К., Галай И.А. Разработка алгоритмов калибровки инерциальной навигационной системы на двухосном испытательном стенде // Труды МАИ, 2013, №63:  
<http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=36139>
4. Голован А.А., Парусников Н.А.. Математические основы навигационных систем. Часть I. - М.: Изд-во МГУ, 2010. - 128 с.
5. Ройтенберг Я.Н. Автоматическое управление. - М.: Наука, 1992. - 576 с.
6. Брозгуль Л.И., Зайцев А.В. Состояние и перспективы развития

инерциальных навигационных систем // Мехатроника, автоматизация, управление. 2006. №3. С. 2-8.

7. Auch W., Schlemper E. Optical gyroscope. *Electrical Communication*, 1984, vol. 58, no.3, pp. 314-318.