

ПРОЧНОСТЬ И ТЕПЛОВЫЕ РЕЖИМЫ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

УДК 539.3

УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЕЙ СО СТУПЕНЧАТО ИЗМЕНЯЮЩЕЙСЯ ИЗГИБНОЙ ЖЕСТКОСТЬЮ

Ерков А.П.

*«Гражданские самолеты Сухого»,
ул. Ленинская Слобода, 26, Москва, 115280, Россия
e-mail: ap.erkov@yandex.ru*

Статья поступила в редакцию 24.01.2019

Рассматриваются задачи устойчивости двух типов стержней переменной жесткости: со ступенчатым изменением сечения с двумя участками и со ступенчатым изменением сечения с тремя участками. Приняты граничные условия в виде шарнирного закрепления по двум торцам, а также с заделкой по одному торцу и свободным вторым торцом. Рассмотрены стержни из изотропного материала и из слоистого композита.

Для исследования устойчивости стержней переменной жесткости использовался вариационный метод Ритца. Получены аналитические выражения для определения критической силы. Приведены результаты расчета и их верификация.

Ключевые слова: метод Ритца, критическая сила, устойчивость стержней, стержни переменного сечения, ком-
позитные стержни, устойчивость стержней переменной жесткости, стержни переменной жесткости.

Введение

Устойчивость стержней переменного сечения изучена достаточно подробно. Первые работы принадлежат Эйлеру (1759). Им была рассмотрена устойчивость конического стержня и стержня, ограниченного поверхностью параболоида вращения. Вслед за ним вопросы устойчивости стержней переменной жесткости изучали Лагранж, Франке и другие.

Вообще в XX веке этой проблемой занимались многие ученые, было написано большое количество статей и монографий, например [1–6].

В монографиях [7–10], выпущенных уже в XXI веке, обобщены результаты исследований по проблемам устойчивости за предыдущие годы.

В [11] предложен полуаналитический метод решения задач устойчивости стержней и пластин переменной жесткости на основе применения дельта-функций. В [12] разработана модель продольного удара по составному стержню со скачкообразным изменением по длине геометрических и инерционных характеристик, рассмотрены вопросы оценки безопасности элементов авиационных комплексов при внештатных ситуациях. В

[13—16] для решения задачи устойчивости стержня переменной жесткости применяются численные методы. В [17—23] задачи устойчивости стержней переменной жесткости авторы решают аналитически, рассмотрены задачи с различными граничными условиями и законами изменения изгибной жесткости.

Зарубежные публикации: в [24—33] рассмотрено решение задач устойчивости для изотропных стержней переменной жесткости с применением различных методов; в [25] применен НАМ (Метод Гомотопного Анализа); в [26] рассмотрены методы: АДМ (Метод Разложения Адомиана), ВИМ (Метод Вариационных Итераций), НРМ (Метод Гомотопического Возмущения); в [27] использован метод дифференциальных квадратур; в [28] использован метод итерационных возмущений; в [30] авторы применяют метод начальных параметров в дифференциальной форме; в [31] критическая сила определяется с помощью энергетического метода и применения кванторов; в [32] авторы применяют новый численный метод решения дифференциальных уравнений — GDQM (Обобщенный Метод Дифференциальных Квадратур); в [33] применен метод матриц переноса.

В [34] рассмотрено решение задач устойчивости стеклопластиковых стержней переменной жесткости с применением энергетического метода в форме Ритца—Тимошенко. Решение систем уравнений проводилось численно, с помощью программного комплекса Matlab. В [35] рассматривается композитный стержень с составным сечением, переменным по длине, т.е. сечение состоит из нескольких зон и у каждой зоны могут быть свои свойства, но при этом, сечение симметрично относительно главных центральных осей инерции. В [36] исследован вопрос устойчивости слоистого композитного стержня со ступенчатым изменением толщины, а также с учетом наличия трещин в сечениях перехода толщин. Для стержня с двумя участками постоянной толщины решение получено в виде трансцендентного уравнения (аналогично стержням из изотропного материала), решение которого дает значение критической силы.

В настоящей статье рассматриваются три задачи устойчивости стержней переменной жесткости: 1) со ступенчатым изменением сечения с двумя участками, оба торца шарнирно оперты; 2) со ступенчатым изменением сечения с двумя участками, один торец заделан, а второй свободный; 3) со ступенчатым изменением сечения с тремя участками, оба торца шарнирно оперты.

Тема расчета стержней переменной жесткости на устойчивость актуальна, что подтверждается большим числом публикаций в 2018 году. Стержни переменной жесткости активно применяются в аэрокосмической отрасли. Например, тяги и подкосы в самолетах соответствуют по своей геометрии стержню переменной жесткости. Также стержни переменной жесткости могут быть применены в различных авиационных конструкциях ферменного типа. Поэтому важно дать инженеру простой инструмент для оценки устойчивости стержней переменной жесткости.

Цель исследования — получить выражения для определения критической силы стержней переменной жесткости, которые можно применять в инженерной практике, т.е. выражения, не требующие промежуточных расчетов и обеспечивающие приемлемую точность решения. Например, для рассмотренных ниже задач существуют решения в виде трансцендентных уравнений, которые необходимо еще решить численно, что в инженерной практике не совсем удобно.

Поставим задачу получить приемлемые аналитические формулы, которые бы давали простые решения (в элементарных функциях) для критической силы.

В исследовании принято, что до потери устойчивости напряжения в стержнях находятся в упругой зоне и не приводят к их разрушению.

Алгоритм применения метода Ритца к решению задач устойчивости стержней переменного сечения

В методе Ритца [4] функция прогиба стержня должна быть представлена в виде ряда. Обычно используются тригонометрические либо полиномиальные ряды, например:

$$w(x) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) \text{ или } w(x) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m x^m. \quad (1)$$

Потенциальную энергию деформации стержня постоянного сечения (учитывая только изгиб) определяют как

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2(x)}{EI} dx = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{P^2 w^2(x)}{EI} dx. \quad (2)$$

Для стержня, состоящего из двух участков с разными сечениями, потенциальная энергия деформации может быть представлена суммой

$$V = V_1 + V_2, \quad (3)$$

где $V_1 = \frac{1}{2} \int_0^a \frac{P^2 w^2(x)}{E_1 I_1} dx$ — потенциальная энергия

деформации для первого участка стержня;

$V_2 = \frac{1}{2} \int_a^l \frac{P^2 w^2(x)}{E_2 I_2} dx$ — потенциальная энергия

деформации для второго участка стержня.

Работу внешней силы для стержня постоянно-го сечения запишем в виде

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l P \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx = \frac{1}{2} P \int_0^l \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx. \quad (4)$$

Для стержня переменной жесткости работа внешней силы будет определяться тем же выражением (4), поскольку прогиб описывается одной функцией (в виде тригонометрического или полиномиального ряда).

Если сечение стержня меняется по некоторому закону, т.е. момент инерции сечения является переменной по длине стержня величиной, то потенциальная энергия деформации

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{P^2 w^2(x)}{EI(x)} dx. \quad (5)$$

Если стержень состоит из нескольких участков переменной жесткости, интеграл (5) следует разбить на несколько интегралов с пределами интегрирования по каждому из участков.

Необходимо отметить, что (5) имеет ограничения. Для многих случаев $I(x)$ интеграл (5) не решается в элементарных функциях, что очень неудобно, если необходим аналитический результат, который можно применить в инженерной практике. В таком случае можно потенциальную энергию стержня записать в другом виде:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l EI(x) \left(\frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} \right) dx. \quad (6)$$

Если стержень состоит из нескольких участков переменной жесткости, то интеграл (6) следует разбить на несколько интегралов с пределами интегрирования по каждому из участков.

Интеграл (6) решается для многих вариантов функции $I(x)$, но получаемое решение менее точное, чем дает форма записи (5), что связано с необходимостью двойного дифференцирования

$w(x)$. Тем не менее, форма записи (6) позволяет получить приемлемое аналитическое выражение для определения критической силы.

Точность решения задачи напрямую зависит от количества взятых членов ряда. В общем случае, чем больше членов ряда, тем точнее решение задачи. Но, помимо количества членов ряда, важно правильно подобрать функцию, формирующую ряд. Функция должна удовлетворять как минимум геометрическим граничным условиям. Например, если стержень шарнирно оперт по торцам, то ряд на основе синуса (1) подойдет, а если стержень имеет заделку по торцу или свободный торец — то нет. Для практических расчетов часто бывает достаточно принять два члена ряда, если функция, формирующая ряд, выбрана корректно. В таком случае, как показано далее, можно получить приемлемое выражение для определения критической силы.

Полная энергия упругой системы определится как

$$\mathcal{E} = V - T. \quad (7)$$

Вариацию полной энергии системы представим в следующем виде:

$$\delta \mathcal{E} = \sum_{m=1}^n \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial A_m} \delta A_m, \quad m = 1, 2, \dots, n. \quad (8)$$

Так как рассматриваемые состояния являются равновесными, то вариация должна быть равна нулю:

$$\sum_{m=1}^n \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial A_m} \delta A_m = 0. \quad (9)$$

Вариации δA_m можно считать независимыми друг от друга, поэтому равенство нулю вариации полной энергии возможно при условии:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial A_m} = 0, \quad m = 1, 2, \dots, n. \quad (10)$$

В итоге получим n линейных алгебраических однородных уравнений относительно коэффициентов A_m . Чтобы система уравнений имела ненулевое решение, необходимо, чтобы определитель, составленный из коэффициентов при A_m , был равен нулю:

$$\Delta = 0. \quad (11)$$

Выражение для определителя дает уравнение степени n относительно P . Решая уравнение, получим n корней. Корни уравнения являются значениями критической нагрузки. В практических расчетах обычно требуется определить минимальную критическую нагрузку, в этом случае необходимо взять минимальное значение из n корней.

Рассмотрим теперь стержень из слоистого композиционного материала. Для такого стержня выражение (2) примет иной вид:

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{P^2 w^2(x)}{D_{11}^{(i)} b_i} dx, \quad (12)$$

где i – номер участка стержня; n – количество участков стержня; $D_{11}^{(i)}$ – член матрицы изгибной жесткости пакета стержня на i -м участке; b_i – ширина стержня.

Для стержня, состоящего, например, из двух участков получим:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^a \frac{P^2 w^2(x)}{D_{11}^{(1)} b_1} dx + \frac{1}{2} \int_a^l \frac{P^2 w^2(x)}{D_{11}^{(2)} b_2} dx. \quad (13)$$

Все остальные формулы (4), (7)–(11) и ход решения, записанные для стержня из изотропного материала, применимы и для стержня из слоистого композиционного материала. Следует отметить, что данный подход пригоден, если на каждом участке укладка слоев будет симметричная (матрица $[B]=0$) и сбалансированная (члены матрицы $[A]$ $A_{16} = A_{26} = 0$) – в противном случае задача перестает быть бифуркационной задачей устойчивости ввиду появления возмущающих факторов.

Если принять два члена ряда (1), то выражение для критической силы можно получить решая квадратное уравнение. Повторив алгоритм, опи-

санный выше, и проделав преобразования, получим из (11) квадратное уравнение. После решения квадратного уравнения относительно P и анализа его корней, получим выражение для критической силы:

$$P_{кр} = \frac{1}{2r} \left(-g - \sqrt{g^2 - 4rc} \right), \quad (14)$$

где r, g, c – константы.

Устойчивость стержня со ступенчатым изменением сечения

Рассмотрим стержень со ступенчатым изменением сечения (рис. 1). Нагружение стержня примем в виде сжимающей силы, приложенной к правому торцу. Граничные условия – шарнирное закрепление по двум торцам. Рассмотрим сначала стержень из изотропного материала.

Для аппроксимации функции прогиба примем ряд, состоящий из двух членов:

$$w(x) = A_1 \sin\left(\frac{x\pi}{l}\right) + A_2 \sin\left(\frac{2x\pi}{l}\right). \quad (15)$$

Введем некоторые упрощения. Выразим изгибную жесткость второго участка через изгибную жесткость первого: $E_2 I_2 = k E_1 I_1$. Обозначим $E_1 I_1$ как S , и выражение (3) примет вид:

$$V = \frac{P^2}{2S} \int_0^a w^2(x) dx + \frac{P^2}{2Sk} \int_a^l w^2(x) dx. \quad (16)$$

Повторив алгоритм метода Ритца, описанный выше, и проделав преобразования, получим из (11) квадратное уравнение. После решения квадратного уравнения и анализа его корней получим выражение для критической силы (14). Константы (14) определяются как:

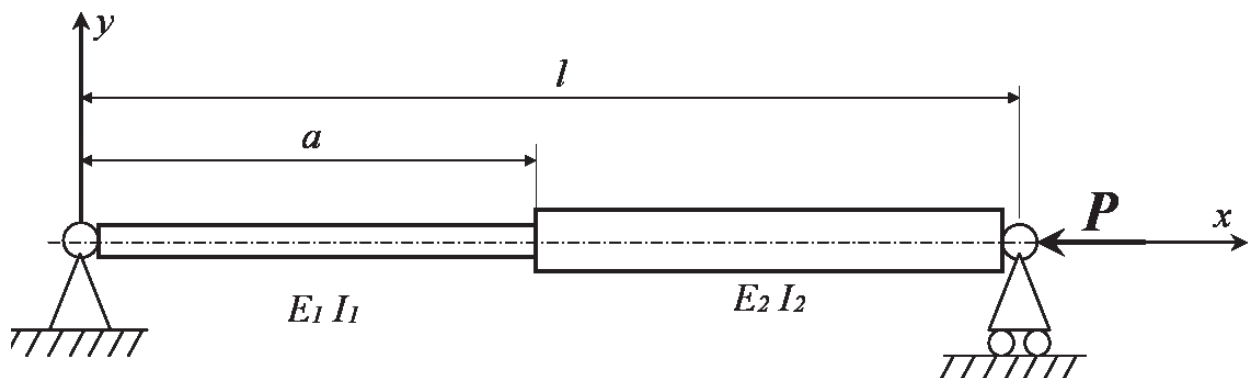


Рис. 1. Стержень с двумя участками. Схема нагружения

$$\begin{aligned}
 r &= l^4(1-k)^2 \left(48 \sin\left(\frac{\pi a}{l}\right) \sin\left(\frac{3\pi a}{l}\right) + 9 \sin\left(\frac{2\pi a}{l}\right) \times \right. \\
 &\quad \times \sin\left(\frac{4\pi a}{l}\right) - 72 \sin^2\left(\frac{\pi a}{l}\right) - 8 \sin^2\left(\frac{3\pi a}{l}\right) \left. \right) + \\
 &\quad + 18\pi(l^4 - kl^4 - al^3 - ak^2l^3 + 2akl^3) \times \\
 &\quad \times \left(\sin\left(\frac{4\pi a}{l}\right) + 2 \sin\left(\frac{2\pi a}{l}\right) \right) + \\
 &\quad + 72\pi^2(a^2l^2 - 2al^3 + a^2k^2l^2 - 2a^2kl^2 + 2akl^3 + l^4); \\
 g &= 18\pi^3Sl^2k(k-1) \left(\sin\left(\frac{4\pi a}{l}\right) + 8 \sin\left(\frac{2\pi a}{l}\right) \right) + \\
 &\quad + 360\pi^4S(akl - ak^2l - kl^2); \\
 c &= 288\pi^6S^2k^2.
 \end{aligned}$$

Полученное решение для критической силы также справедливо и для стержня из слоистого композиционного материала. В таком случае необходимо учесть иной вид выражений для изгибной жесткости и коэффициента k :

$$S_{\text{комп}} = D_{11}^{(1)}b_1, \quad k_{\text{комп}} = \frac{D_{11}^{(2)}b_2}{D_{11}^{(1)}b_1}. \quad (17)$$

Таким образом, в случае композитного стержня в выражениях для r , g и c необходимо заменить S и k на (17).

Устойчивость стержня со ступенчатым изменением сечения с тремя участками

Рассмотрим стержень со ступенчатым изменением сечения, состоящий из трех участков (рис. 2). Нагружение стержня примем в виде сжимающей силы, приложенной к правому торцу. Граничные условия – шарнирное закрепление по

двум торцам. Рассмотрим сначала стержень из изотропного материала.

Для аппроксимации функции прогиба примем ряд, состоящий из двух членов:

$$w(x) = A_1 \sin\left(\frac{x\pi}{l}\right) + A_2 \sin\left(\frac{3x\pi}{l}\right). \quad (18)$$

В выражении (18) второй член не соответствует второму члену ряда (1), это связано с особенностями формы прогиба рассматриваемого стержня. Если принять второй член, как в (1), то аппроксимация даст худшую сходимость, чем (18).

Выражение для потенциальной энергии будет иметь вид:

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{1}{2} \int_0^a \frac{P^2 w^2(x)}{E_1 I_1} dx + \\
 &\quad + \frac{1}{2} \int_a^{l-a} \frac{P^2 w^2(x)}{E_2 I_2} dx + \frac{1}{2} \int_{l-a}^l \frac{P^2 w^2(x)}{E_1 I_1} dx. \quad (19)
 \end{aligned}$$

Введем некоторые упрощения. Выразим изгибную жесткость второго участка через изгибную жесткость первого и третьего $E_2 I_2 = k E_1 I_1$. Обозначим $E_1 I_1$ как S , и выражение (19) примет вид:

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{P^2}{2S} \int_0^a w^2(x) dx + \\
 &\quad + \frac{P^2}{2Sk} \int_a^{l-a} w^2(x) dx + \frac{P^2}{2S} \int_{l-a}^l w^2(x) dx. \quad (20)
 \end{aligned}$$

Повторив алгоритм метода Ритца, описанный выше, и проделав преобразования, получим из (11) квадратное уравнение. После решения квад-

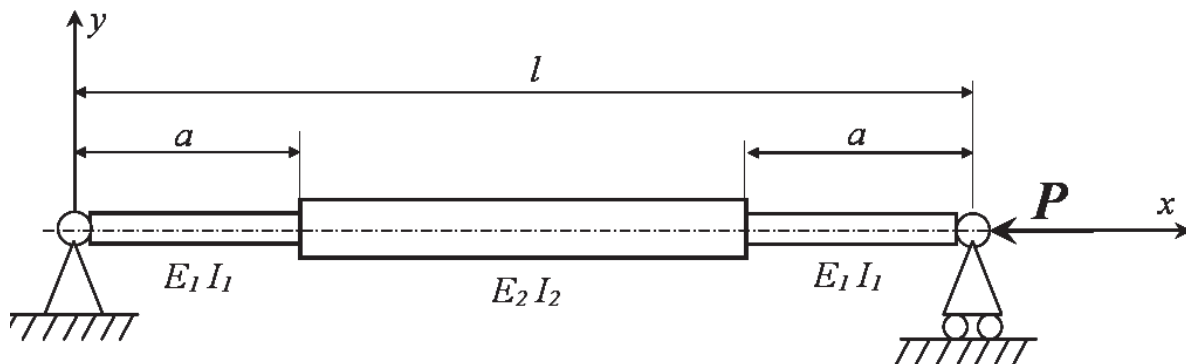


Рис. 2. Стержень с тремя участками. Схема нагружения

ратного уравнения и анализа его корней получим выражение для критической силы (14). Константы (14) определяются как:

$$r = 8\pi(kl^4 + 2al^3 - l^4 + 2ak^2l^3 - 4akl^3) \times$$

$$\times \left(\begin{array}{l} -32\sin\left(\frac{\pi a}{l}\right)\cos^5\left(\frac{\pi a}{l}\right) + \\ +32\sin\left(\frac{\pi a}{l}\right)\cos^3\left(\frac{\pi a}{l}\right) - \\ -12\sin\left(\frac{\pi a}{l}\right)\cos\left(\frac{\pi a}{l}\right) - \\ -3\sin\left(\frac{2\pi a}{l}\right) - \sin\left(\frac{6\pi a}{l}\right) \end{array} \right) + (l^4 + k^2l^4 - 2kl^4) \times$$

$$\times \left(128\sin\left(\frac{\pi a}{l}\right)\cos^5\left(\frac{\pi a}{l}\right)\sin\left(\frac{2\pi a}{l}\right) - 32\sin\left(\frac{\pi a}{l}\right) \times \right.$$

$$\times \cos^3\left(\frac{\pi a}{l}\right)\sin\left(\frac{2\pi a}{l}\right) - 48\sin\left(\frac{\pi a}{l}\right)\cos^3\left(\frac{\pi a}{l}\right) \times$$

$$\times \sin\left(\frac{4\pi a}{l}\right) - 72\sin\left(\frac{\pi a}{l}\right)\cos\left(\frac{\pi a}{l}\right)\sin\left(\frac{2\pi a}{l}\right) +$$

$$+48\sin\left(\frac{\pi a}{l}\right)\cos\left(\frac{\pi a}{l}\right)\sin\left(\frac{4\pi a}{l}\right) + 8\sin\left(\frac{\pi a}{l}\right)\cos\left(\frac{\pi a}{l}\right) \times$$

$$\times \sin\left(\frac{6\pi a}{l}\right) - 12\sin^2\left(\frac{2\pi a}{l}\right) + 64\sin^2\left(\frac{\pi a}{l}\right)\cos^6\left(\frac{\pi a}{l}\right) -$$

$$-3\sin^2\left(\frac{4\pi a}{l}\right) + 128\sin^2\left(\frac{\pi a}{l}\right)\cos^4\left(\frac{\pi a}{l}\right) + 12\sin\left(\frac{2\pi a}{l}\right) \times$$

$$\times \sin\left(\frac{4\pi a}{l}\right) + 4\sin\left(\frac{2\pi a}{l}\right)\sin\left(\frac{6\pi a}{l}\right) -$$

$$-144\sin^2\left(\frac{\pi a}{l}\right)\cos^2\left(\frac{\pi a}{l}\right) \Bigg) +$$

$$+48\pi^2(l^4 - 4al^3 + 4a^2k^2l^2 - 8a^2kl^2 + 4akl^3 + 4a^2l^2);$$

$$g = 8S\pi^3(k^2l^2 - kl^2) \left(32\sin\left(\frac{\pi a}{l}\right)\cos^5\left(\frac{\pi a}{l}\right) - \right.$$

$$-32\sin\left(\frac{\pi a}{l}\right)\cos^3\left(\frac{\pi a}{l}\right) + 60\sin\left(\frac{\pi a}{l}\right)\cos\left(\frac{\pi a}{l}\right) +$$

$$+27\sin\left(\frac{2\pi a}{l}\right) + \sin\left(\frac{6\pi a}{l}\right) \Bigg) -$$

$$-480\pi^4S(kl^2 + 2ak^2l - 2akl);$$

$$c = 432\pi^6S^2k^2.$$

Полученное выражение для критической силы также справедливо и для стержня из слоистого композиционного материала. В таком случае необходимо учесть иной вид выражений для изгибной жесткости и коэффициента k , т.е. (17). Таким образом, в случае композитного стержня в выражениях для r , g и c необходимо заменить S и k на (17).

Следует отметить, что рассмотренная модель стержня может выступать в качестве типовой тяги самолета. Чаще всего тяги изготавливают по схеме, показанной на рис. 3. При определении критической силы для подобной тяги рекомендуется принять сечение Е-Е для участка 2-го тяги и сечение F-F — для участков 1-го и 3-го (см. рис. 2). Зона участка 3 выделена на рисунке пунктиром.

Устойчивость стержня со ступенчатым изменением сечения с двумя участками, заделкой и свободным торцом

Рассмотрим теперь устойчивость стержня со ступенчатым изменением сечения с двумя участками, заделкой и свободным торцом (рис. 4). Материал стержня — изотропный. Для решения поставленной задачи обратимся к предыдущей задаче.

Критические силы стержня на рис. 4 и стержня на рис. 2 будут равными, если принять, что половина стержня на рис. 2 по всем геометрическим параметрам идентична стержню на рис. 4. Поэтому можно воспользоваться решением, полученным для стержня на рис. 2, немного модифицировав формулы, а именно необходимо вместо l в выражениях для r , g , c взять $2l$:

$$r = 128\pi(kl^4 + al^3 - l^4 + ak^2l^3 - 2akl^3) \times$$

$$\times \left(\begin{array}{l} -32\sin\left(\frac{\pi a}{2l}\right)\cos^5\left(\frac{\pi a}{2l}\right) + \\ +32\sin\left(\frac{\pi a}{2l}\right)\cos^3\left(\frac{\pi a}{2l}\right) - \\ -12\sin\left(\frac{\pi a}{2l}\right)\cos\left(\frac{\pi a}{2l}\right) - \\ -3\sin\left(\frac{2\pi a}{2l}\right) - \sin\left(\frac{6\pi a}{2l}\right) \end{array} \right) + 16(l^4 + k^2l^4 - 2kl^4) \times$$

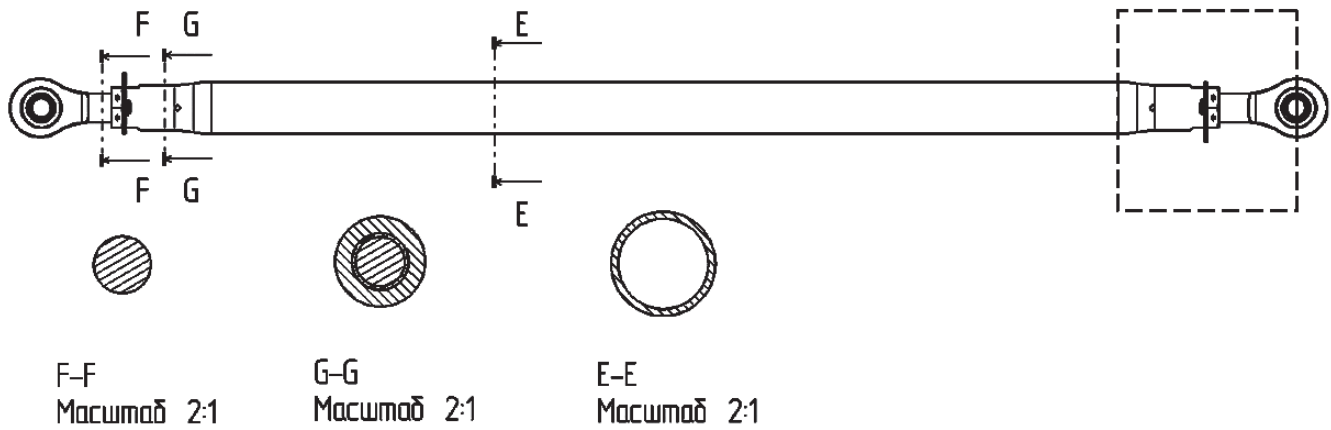


Рис. 3. Типовая авиационная тяга / подкос

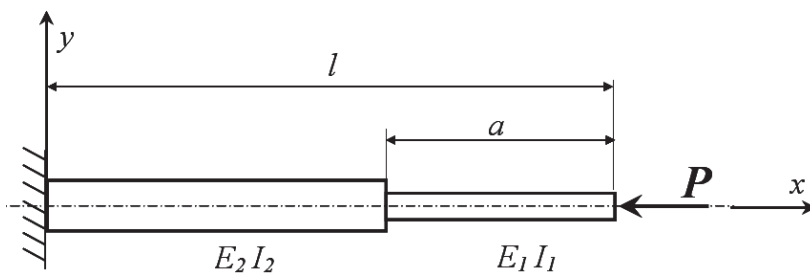


Рис. 4. Стержень с двумя участками, заделкой и свободным торцом

$$\begin{aligned}
 & \times \left(128 \sin\left(\frac{\pi a}{2l}\right) \cos^5\left(\frac{\pi a}{2l}\right) \sin\left(\frac{2\pi a}{2l}\right) - 32 \sin\left(\frac{\pi a}{2l}\right) \times \right. \\
 & \times \cos^3\left(\frac{\pi a}{2l}\right) \sin\left(\frac{2\pi a}{2l}\right) - 48 \sin\left(\frac{\pi a}{2l}\right) \cos^3\left(\frac{\pi a}{2l}\right) \sin\left(\frac{4\pi a}{2l}\right) - \\
 & - 72 \sin\left(\frac{\pi a}{2l}\right) \cos\left(\frac{\pi a}{2l}\right) \sin\left(\frac{2\pi a}{2l}\right) + 48 \sin\left(\frac{\pi a}{2l}\right) \cos\left(\frac{\pi a}{2l}\right) \times \\
 & \times \sin\left(\frac{4\pi a}{2l}\right) + 8 \sin\left(\frac{\pi a}{2l}\right) \cos\left(\frac{\pi a}{2l}\right) \sin\left(\frac{6\pi a}{2l}\right) - \\
 & - 12 \sin^2\left(\frac{2\pi a}{2l}\right) + 64 \sin^2\left(\frac{\pi a}{2l}\right) \cos^6\left(\frac{\pi a}{2l}\right) - 3 \sin^2\left(\frac{4\pi a}{2l}\right) + \\
 & + 128 \sin^2\left(\frac{\pi a}{2l}\right) \cos^4\left(\frac{\pi a}{2l}\right) + 12 \sin\left(\frac{2\pi a}{2l}\right) \sin\left(\frac{4\pi a}{2l}\right) + \\
 & + 4 \sin\left(\frac{2\pi a}{2l}\right) \sin\left(\frac{6\pi a}{2l}\right) - 144 \sin^2\left(\frac{\pi a}{2l}\right) \cos^2\left(\frac{\pi a}{2l}\right) \left. \right) + \\
 & + 768 \pi^2 \left(l^4 - 2al^3 + a^2 k^2 l^2 - 2a^2 k l^2 + 2akl^3 + a^2 l^2 \right); \\
 & g = 32S\pi^3 (k^2 l^2 - kl^2) \left(32 \sin\left(\frac{\pi a}{2l}\right) \cos^5\left(\frac{\pi a}{2l}\right) - \right. \\
 & - 32 \sin\left(\frac{\pi a}{2l}\right) \cos^3\left(\frac{\pi a}{2l}\right) + 60 \sin\left(\frac{\pi a}{2l}\right) \cos\left(\frac{\pi a}{2l}\right) + \\
 & + 27 \sin\left(\frac{2\pi a}{2l}\right) + \sin\left(\frac{6\pi a}{2l}\right) \left. \right) - \\
 & - 1920 \pi^4 S (kl^2 + ak^2 l - ak l); \\
 & c = 432 \pi^6 S^2 k^2.
 \end{aligned}$$

В случае слоистого композита необходимо произвести замену согласно (17).

Верификация аналитических расчетов устойчивости стержней

Для верификации результатов аналитического расчета использовались результаты, полученные методом конечных элементов в пакете программ MSC.Patran/Nastran. В табл. 1 дана геометрия стержней, использованная в исследовании.

Для стержней из изотропного материала взята алюминиевый сплав с модулем упругости $E = 6,867 \cdot 10^4$ МПа и коэффициентом Пуассона $\mu = 0,3$. Для стержня из слоистого композита выб-

ран углепластик со свойствами монослоя, указанными в табл. 2. Укладки и изгибные жесткости пакета для композитного стержня, состоящего из двух участков постоянной толщины, даны в табл. 3–5.

Результаты сравнения аналитического расчета и расчета методом конечных элементов даны на рис. 5. Графики построены для различных геометрических параметров стержней, что позволяет оценить влияние этих параметров на точность аналитического решения. Погрешность аналитического решения определяется в основном тем, как точно два члена ряда аппроксимируют функцию прогиба.

На рис. 5 видно, что погрешность зависит от соотношения геометрических параметров стержней, следовательно, можно ввести для аналитического выражения (14) коэффициент коррекции, т.е.

для минимизации погрешности предлагается использовать коэффициент коррекции $K_{кор}$ (табл. 6).

Для рассмотренных в исследовании стержней точность решения зависит от отношений длин участков стержня и от отношения изгибных жесткостей на участках. Чем больше разница в изгибных жесткостях на участках стержня, тем больше погрешность. В данном исследовании рассмотрено максимальное отношение изгибных жесткостей, равное 8 (отношение больше 8 на практике обычно не применяется).

Следует отметить, что графики на рис. 5,а (для $k = 6$) и 5,з (для $k = 6,28$) очень близки между собой, практически накладываются друг на друга. Таким образом, можно прийти к выводу, что графики на рис. 5,а–в), полученные для стержней из изотропного материала, применимы и для композитных стержней.

Таблица 1

Геометрические характеристики стержней

Изотропный стержень со ступенчатым изменением сечения с двумя участками.										
Оба торца шарнирно оперты*										
Варианты <i>a</i>	вар. 1	вар. 2	вар. 3	вар. 4	вар. 5	вар. 6	вар. 7	вар. 8	вар. 9	вар. 10
<i>a</i> , мм	30	40	45	50	60	70	80	90	100	130
$I_2 = 26,6667 \text{ мм}^4$	рассмотрены $I_1 = 3,3333 / 4,4367 / 6,5104 / 13,6533 \text{ мм}^4$							$l = 200 \text{ мм},$ $b_{сеч} = 5 \text{ мм}$		
Изотропный стержень со ступенчатым изменением сечения с двумя участками.										
Один торец заделан, другой свободный										
Варианты <i>a</i>	вар. 1	вар. 2	вар. 3	вар. 4	вар. 5	вар. 6	вар. 7	вар. 8	вар. 9	вар. 10
<i>a</i> , мм	75	60	50	45	40	35	30	25	20	15
$I_2 = 26,6667 \text{ мм}^4$	рассмотрены $I_1 = 3,3333 / 4,4367 / 6,5104 / 13,6533 \text{ мм}^4$							$l = 100 \text{ мм}, b_{сеч} = 5 \text{ мм}$		
Изотропный стержень со ступенчатым изменением сечения с тремя участками										
Варианты <i>a</i>	вар. 1	вар. 2	вар. 3	вар. 4	вар. 5	вар. 6	вар. 7	вар. 8	вар. 9	вар. 10
<i>a</i> , мм	75	60	50	45	40	35	30	25	20	15
$I_2 = 26,6667 \text{ мм}^4$	рассмотрены $I_1 = 3,3333 / 4,4367 / 6,5104 / 13,6533 \text{ мм}^4$							$l = 200 \text{ мм},$ $b_{сеч} = 5 \text{ мм}$		
$b_{сеч}$ - ширина сечения стержня. Принята постоянной по длине.										
* - для композитного слоистого стержня рассмотрены варианты <i>a</i> : 1, 2, 4, 5, 6, 7, 9, 10. Длина стержня 200 мм.										

Таблица 2

Механические свойства монослоя на основе углеволокна

Толщина, мм	E_{11} , МПа	E_{22} , МПа	μ_{12}	G_{12} , МПа	G_{23} , МПа	G_{31} , МПа
0,2	147150	7360	0,25	3430	3430	3430

Таблица 3

Изгибные жесткости композитного стержня. Укладка №1

Участок стержня	Толщина, мм	D_{11}	D_{22}	D_{66}	D_{12}	D_{16}	D_{26}
Второй	3,2	укладка:	[0 / 45 / -45 / 90 / 0 / 45 / -45 / 90] _s				
		220707	113011	54127	49800	8975	8975
Первый	1,6	укладка:	[0 / 45 / -45 / 90] _s				
		35145	8221	5940	5400	2244	2244

Таблица 4

Изгибные жесткости композитного стержня. Укладка №2

Участок стержня	Толщина, мм	D_{11}	D_{22}	D_{66}	D_{12}	D_{16}	D_{26}
Второй	4	укладка:	[0 / 45 / -45 / 90 / 0 / 90 / 45 / -45 / 90 / 0] _s				
		395058	269414	99376	90926	12340	12340
Первый	2	укладка:	[90 / 45 / -45 / 90 / 0] _s				
		16338	66446	12560	11503	3365	3365

Таблица 5

Изгибные жесткости композитного стержня. Укладка №3

Участок стержня	Толщина, мм	D_{11}	D_{22}	D_{66}	D_{12}	D_{16}	D_{26}
Второй	3,2	укладка:	[0 / 30 / -30 / 90 / 0 / 30 / -30 / 90] _s				
		277518	78580	42936	38610	11585	3959
Первый	1,6	укладка:	[0 / 30 / -30 / 90] _s				
		41198	4552	4748	4207	2896	990

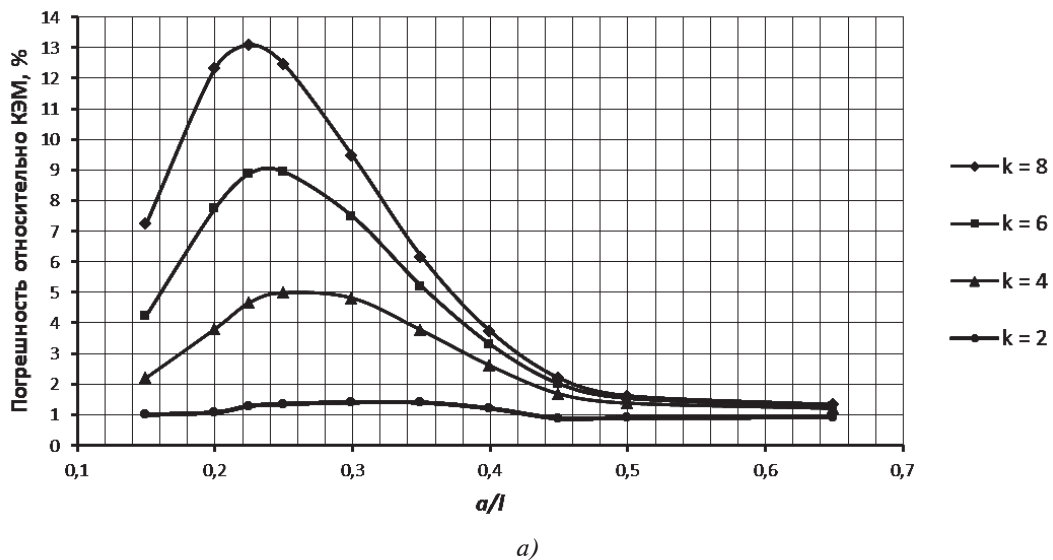


Рис. 5 (начало)

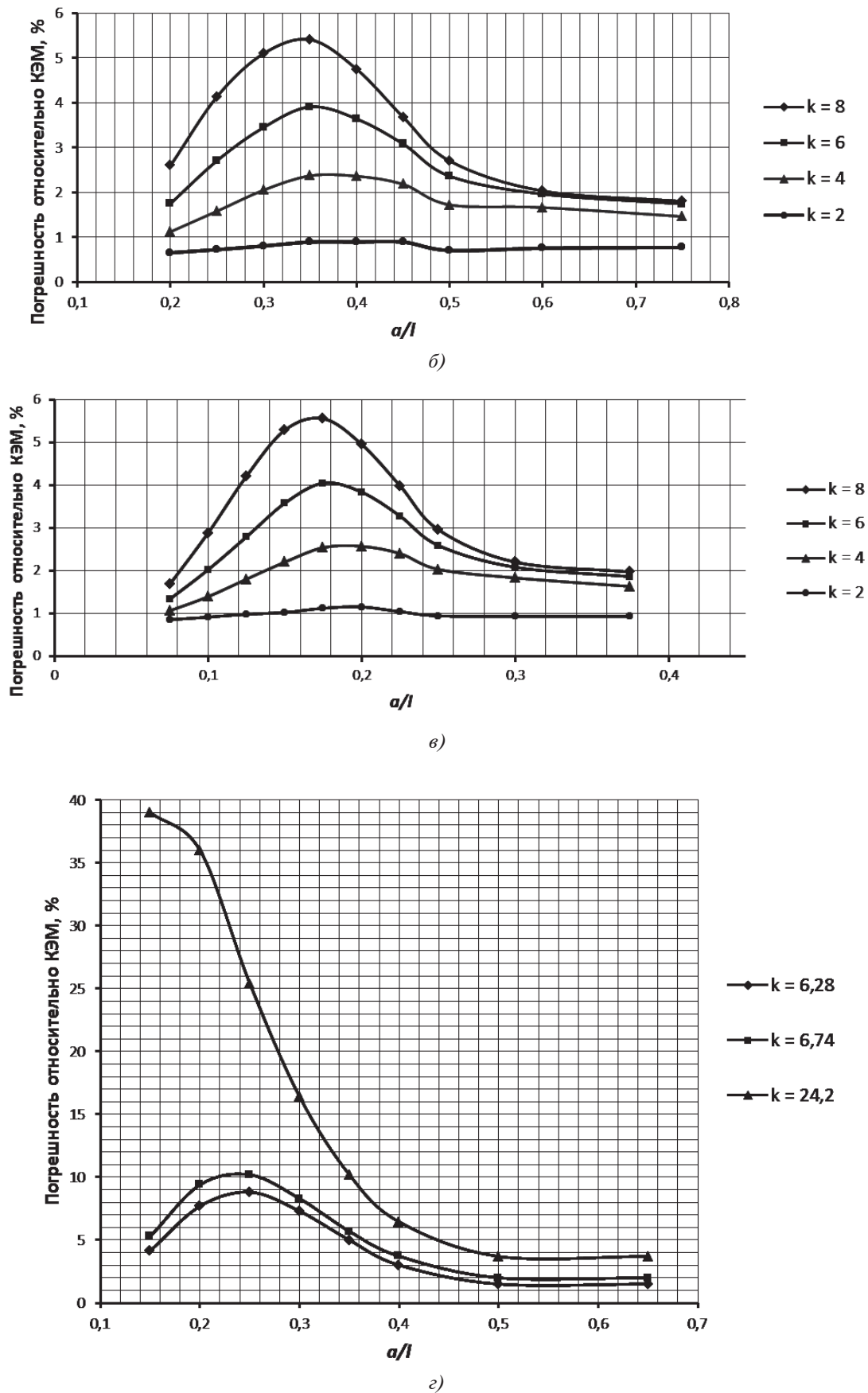


Рис. 5. Графики влияния отношения a/l на погрешность относительно конечно-элементных моделей (КЭМ): a — двухступенчатый стержень, шарнирно опертый по торцам; b — двухступенчатый стержень с заделкой и свободным торцом; c — трехступенчатый стержень, шарнирно опертый по торцам; d — двухступенчатый композитный стержень, шарнирно опертый по торцам

Таблица 6

Коэффициенты коррекции аналитического решения

Стержень	Коэффициент коррекции, $K_{кор}$	Выражение для критической силы
Двухступенчатый Ш+Ш	Рис. 5,а	$P_{кр} = \frac{1}{2rK_{кор}} \left(-g - \sqrt{g^2 - 4rc} \right)$
Двухступенчатый З+С	Рис. 5,б	
Трехступенчатый Ш+Ш	Рис. 5,в	
Двухступенчатый композитный Ш+Ш	Рис. 5,а	
Двухступенчатый композитный З+С	Рис. 5,б	
Трехступенчатый композитный Ш+Ш	Рис. 5,в	
Ш – шарнирное опирание на торце; З – заделка торца; С – свободный торец Коэффициент коррекции определяется с использованием рис. 5,а–в по формуле:		
$K_{кор} = 1 + \frac{\text{Погрешность относительно КЭМ}}{100}$		

При исследовании устойчивости стержней со ступенчатым изменением сечения влияние локальных эффектов в зоне стыка сечений с разной изгибной жесткостью не учитывается, принимается, что в месте стыка участков также выполняется гипотеза плоских сечений. В реальности эта гипотеза локально не выполняется.

В настоящем исследовании в конечно-элементных моделях учитывалось влияние локального эффекта, поскольку все стержни (кроме композитного) моделировались трехмерными конечными элементами. Если для моделирования стержней со ступенчатым изменением сечения применять одномерные или двухмерные конечные элементы, то локальный эффект от нарушения гипотезы плоских сечений в зоне стыка участков не будет учитываться в модели.

Необходимо произвести оценку влияния локального эффекта на величину критической силы. Для этого рассмотрим двухступенчатый стержень с геометрией, которая дает максимальную погрешность полученных аналитических формул относительно КЭМ (рис. 5,а, $k = 8$, $a/l = 0,225$). Если в конечно-элементной модели ввести выполнение гипотезы плоских сечений в месте стыка участков, то погрешность аналитического расчета снизится с 13 до 11%. Для варианта стержня с $k = 8$ и $a/l = 0,15$ (рис. 5,а) погрешность снизится с 7 до 5,5%. Таким образом, чем меньше погрешность до введения гипотезы плоских сечений,

тем меньше влияние локального эффекта. Учитывая, что для наихудшего рассмотренного случая (для которого погрешность составила 13%) влияние локального эффекта дает увеличение погрешности на 2%, при практических расчетах данным эффектом можно пренебречь при

$$\max\{E_1 I_1; E_2 I_2\} / \min\{E_1 I_1; E_2 I_2\} \leq 8.$$

На практике скачкообразное изменение сечения обычно не реализуется, т.е. переход от одного сечения на другое происходит относительно плавно (например, галтель или скругление). В таких случаях рекомендуется скругление игнорировать, т.е. длину участка с большей изгибной жесткостью принимать без учета зоны скругления, а длину участка с меньшей изгибной жесткостью рассчитывать с учетом зоны скругления. Подобный подход позволит получить более консервативную оценку критической силы.

Автором статьи создана программа в среде MS.Excel VBA для расчета критической силы рассмотренных в данном исследовании стержней. В программе коэффициент коррекции $K_{кор}$ учитывается автоматически, пользователю необходимо указать только данные по геометрии стержня и по материалу. Программа имеет привычный для современного пользователя ПК оконный интерфейс и позволяет мгновенно получить значение критической силы стержня. Обзор программы планируется опубликовать позже в отдельной статье.

Выводы

Получены аналитические выражения для определения критической силы для двух типов стержней переменной жесткости с двумя типами граничных условий.

Исследована точность аналитических выражений. Введен коэффициент коррекции, который позволяет получить более точный результат по критической силе.

Методика может быть применена и для других типов стержней переменной жесткости и других граничных условий, не рассмотренных в данной статье.

Полученные аналитические выражения легко поддаются автоматизации. Для этого подойдет, например, Microsoft Excel.

Библиографический список

1. Динник А.Н. О продольном изгибе стержней переменного сечения // Известия Донского политехнического института. 1913. № 1. С. 390-404.
2. Динник А.Н. Устойчивость упругих систем. — М.-Л.: ОНТИ НКТП СССР. Гл. ред. общетехн. лит. и номографии, 1935. — 187 с.
3. Тимошенко С.П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. — М.: Наука, 1971. — 808 с.
4. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. — М.: Наука, 1967. — 984 с.
5. Тимошенко С.П. Устойчивость упругих систем. — М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1955. — 568 с.
6. Алфутов Н.А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. — М.: Машиностроение, 1978. — 312 с.
7. Wang C.M., Wang C.Y., Reddy J.N. Exact Solutions for Buckling of Structural Members. — Boca Raton, Florida: CRC Press, 2004. — 224 p.
8. Elishakoff I. Eigenvalues of Inhomogeneous Structures: Unusual Closed-Form Solutions. — Boca Raton, Florida: CRC Press, 2004. — 752 p.
9. Simitses G.J., Hodges D.H. Fundamentals of Structural Stability. — Elsevier Inc., 2006. — 480 p.
10. Bazant Z.P., Cedolin L. Stability of Structures: Elastic, Inelastic, Fracture and Damage Theories. — World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, 2010. — 1011 p.
11. Зотов А.А. Автоматизированный расчет на прочность и устойчивость конструкций летательных аппаратов: Учеб. пособие. — М.: Изд-во МАИ, 1992. — 149 с.
12. Тишков В.В., Фирсанов В.В. К вопросу о построении модели продольного удара по составному стержню для исследования безопасности авиационных комплексов в аварийных ситуациях // Вестник Московского авиационного института. 2004. Т. 11. № 2. С. 3-10.
13. Бондарь Т.А. Численный анализ устойчивости нагруженного стержня переменной жесткости // Вычислительные технологии. 2003. Т. 8. № 2. С. 27-35.
14. Культербаев Х.П., Кармоков К.А. Об устойчивости многопролетного стержня переменной жесткости на гибких опорах // Вестник Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. 2013. Т. 34. № 53. С. 90-98.
15. Габбасов Р.Ф., Филатов В.В. Численный метод расчета составных стержней и пластин с абсолютно жесткими поперечными связями: Монография. — М.: Изд-во АСВ, 2014. — 200 с.
16. Бандурин Н.Г., Калашиников С.Ю. Численный метод и программа для определения критического состояния упругого стержня переменной жесткости в общем случае закрепления его концов // Строительство и реконструкция. 2015. Т. 2. № 58. С. 4-11.
17. Горбачев В.И., Москаленко О.Б. Устойчивость прямого стержня с переменной жесткостью // Механика твердого тела. 2011. № 4. С. 181-192.
18. Крутий Ю.С. Задача Эйлера в случае непрерывной поперечной жесткости // Строительная механика и расчет сооружений. 2010. № 6. С. 22-29.
19. Крутий Ю.С. Задача Эйлера в случае непрерывной поперечной жесткости (продолжение) // Строительная механика и расчет сооружений. 2011. №2. С. 27-33.
20. Крутий Ю.С. Расчет на устойчивость упругих стержней с переменной изгибной жесткостью, изменяющейся по закону четвертой степени // Вісник Одеської Державної Академії Будівництва та Архітектури. 2014. № 56. URL: <http://mx.ogasa.org.ua/handle/123456789/1464>
21. Сеницкий Ю.Э., Ишутин А.С. Общая устойчивость сжатых составных стержней переменного сечения // Вестник Самарского государственного технического университета. 2015. Т. 19. № 2. С. 341-357.
22. Царенко С.Н. Продольно-поперечный изгиб стержней переменной жесткости // Известия высших учебных заведений. Строительство. 2016. № 1. С. 5-13.
23. Власова Е.В. Об устойчивости стержня переменной жесткости // Актуальные проблемы железнодорожного транспорта: Сб. статей научной конференции. — Воронеж: Изд-во филиала Ростовского государственного университета путей сообщения, 2018. С. 127-130.
24. Elishakoff I., Rollot O. New closed-form solutions for buckling of a variable stiffness column by Matematica® // Journal of Sound and Vibration. 1999. Vol. 224. No. 1, pp. 172-182. DOI: 10.1006/jsvi.1998.2143
25. Liao S. Series solution of large deformation of a beam with arbitrary variable cross section under an axial load // ANZIAM Journal. 2009. Vol. 51, pp. 10-33. DOI: 10.1017/S1446181109000339
26. Coşkun S.B. Advances in Computational Stability Analysis. — InTech, Rijeka, 2012. — 140 p.

27. *Taha M., Essam M.* Stability behavior and free vibration of tapered columns with elastic end restraints using the DQM method // *Ain Shams Engineering Journal*. 2013. Vol. 4. No. 3, pp. 515-521. DOI: 10.1016/j.asej.2012.10.005
28. *Afsharfard A., Farshidianfar A.* Finding the buckling load of non-uniform columns using the iteration perturbation method // *Theoretical and Applied Mechanics Letters*. 2014. Vol. 4. No. 4. DOI: 10.1063/2.1404111
29. *Elishakoff I., Eisenberger M., Delmas A.* Buckling and Vibration of Functionally Graded Material Columns Sharing // *Structures*. 2016. Vol. 5, pp. 170-174. DOI: 10.1016/j.istruc.2015.11.002
30. *Shvartsman B., Majak J.* Numerical method for stability analysis of functionally graded beams on elastic foundation // *Applied Mathematical Modelling*. 2016. Vol. 40. No. 5-6, pp. 3713-3719. DOI: 10.1016/j.apm.2015.09.060
31. *Ioakimidis N.I.* The energy method in problems of buckling of bars with quantifier elimination // *Structures*. 2018. Vol. 13, pp. 47-65. DOI: 10.1016/j.istruc.2017.08.002
32. *Golfam B., Nazarimofrad E., Zahrai S.M.* Bending, second-order and buckling analysis of non prismatic beam-columns by differential quadrature method // *Applied Mathematical Modelling*. 2018. Vol. 63, pp. 362-373. DOI: 10.1016/j.apm.2018.06.054
33. *Uribe-Henao A.F., Zapata-Medina D.G., Arboleda-Monsalve L.G., Aristizabal-Ochoa J.D.* Static and Dynamic Stability of a Multi-stepped Timoshenko Column Including Self-weight // *Structures*. 2018. Vol. 15, pp. 28-42. DOI: 10.1016/j.istruc.2018.05.004
34. *Кулинич И.И., Литвинов В.В., Блягоз А.М.* Выпучивание стеклопластиковых стержней переменной жесткости // *Новые технологии*. 2012. №4. С. 75-81.
35. *Sapountzakis E.J., Tsiatas G.C.* Elastic flexural buckling analysis of composite beams of variable cross-section by BEM // *Engineering Structures*. 2007. Vol. 29. No. 5, pp. 675-681. DOI: 10.1016/j.engstruct.2006.06.010
36. *Lellep J., Sakkov E.* Buckling of stepped composite columns // *Mechanics of Composites Materials*. 2006. Vol. 42. No. 1, pp. 63-72. DOI: 10.1007/s11029-006-0017-4

BUCKLING OF STEPPED BEAMS

Erkov A.P.

*Sukhoi Civil Aircraft Company,
SCAC, 26, Leninskaya Sloboda str., Moscow, 115280, Russia
e-mail: ap.erkov@yandex.ru*

Abstract

The article discusses the problems of stability of two types of beams of variable stiffness: with a stepped change in cross section with two zones and with a step change in section with three zones. Simply supported boundary conditions at two ends are considered, as well as with embedding at one end and with a free second end. Beams of isotropic material and of the laminated composites are discussed.

To study the stability of beams of variable stiffness, the Ritz method was used. Beams with the ratio of the maximum and minimum flexural rigidity in the zones does not exceed 8 are considered, since in practice the ratio greater than 8, as a rule, is not applied. Analytical expressions for determining the critical force are obtained. The calculation results and their verification are given.

The results of analytical calculations were compared with the results obtained by the finite

element method (MSC.Nastran / MSC.Patran). Based on a comparative analysis, graphs of the error of analytical solutions (relative to the solution obtained by the finite element method) were constructed. To minimize the error of analytical equations, a correction factor was introduced.

The study showed that the equations applicable for calculating the critical force of isotropic beams are also applicable to composite beams. Correction factors obtained for isotropic beams are also applicable to composite beams.

In addition to assessing the accuracy of analytical equations for the critical force, the influence of local effects in the area of the junction of zones with different flexural rigidity is investigated. In practice, the Bernoulli hypothesis does not work in the junction area of the zones, which has some influence on the magnitude of the critical force.

Results of investigation:

- Analytical equations were obtained for determining the critical force for two types of beams of variable stiffness with two types of boundary conditions;

- The accuracy of analytical equations was investigated. A correction factor was introduced, which allows to obtain a more accurate result for the critical force;

- The technique can be applied to other types of beams of variable stiffness and other boundary conditions not considered in this paper;

- The resulting analytical expressions are easy to automate. For this suit, for example, Microsoft Excel can be used.

Keywords: Ritz method, critical force, stability of beams, beams of variable cross section, composite beams, stability of beams of variable stiffness, beams of variable stiffness.

References

- Dinnik A.N. *Izvestiya Donskogo politekhnicheskogo instituta*, 1913, no. 1, pp. 390-404.
- Dinnik A.N. *Ustoichivost' uprugikh sistem* (Stability of elastic systems), Moscow – Leningrad, ONTI NKTP SSSR, 1935, 187 p.
- Timoshenko S.P. *Ustoichivost' sterzhnei, plastin i obolochek* (Stability of rods, plates and shells), Moscow, Nauka, 1971, 808 p.
- Volmir A.S. *Ustoichivost' deformiruemykh sistem* (Stability of deformable systems), Moscow, Nauka, 1967, 984 p.
- Timoshenko S.P. *Ustoichivost' uprugikh sistem* (Stability of elastic systems), Moscow, Gosudarstvennoe izdatel'stvo tekhniko-teoreticheskoi literatury, 1955, 568 p.
- Alfutov N.A. *Osnovy rascheta na ustoichivost' uprugikh sistem* (Fundamentals of elastic systems stability calculation), Moscow, Mashinostroenie, 1978, 312 p.
- Wang C.M., Wang C.Y., Reddy J.N. *Exact Solutions for Buckling of Structural Members*. Boca Raton, Florida, CRC Press, 2004, 224 p.
- Elishakoff I. *Eigenvalues of Inhomogeneous Structures: Unusual Closed-Form Solutions*, Boca Raton, Florida, CRC Press, 2004, 752 p.
- Simitses G.J., Hodges D.H. *Fundamentals of Structural Stability*, Elsevier Inc., 2006, 480 p.
- Bazant Z.P., Cedolin L. *Stability of Structures: Elastic, Inelastic, Fracture and Damage Theories*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, 2010, 1011 p.
- Zotov A.A. *Avtomatizirovannyi raschet na prochnost' i ustoichivost' konstruktivnykh letatel'nykh apparatov* (Automated calculation of aircraft structures strength and stability), Moscow, MAI, 1992, 149 p.
- Tishkov V. V., Firsanov V. V. About model formulation for longitudinal impact on compound bar with relation to investigation of safety for complex aircraft systems upon emergency conditions. *Aerospace MAI Journal*, 2004, vol. 11, no. 2, pp. 3-10.
- Bondar' T.A. *Vychislitel'nye tekhnologii*, 2003, vol. 8, no. 2, pp. 27-35.
- Kul'terbaev Kh.P., Karmokov K.A. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo arkhitekturno-stroitel'nogo universiteta*, 2013, vol. 34, no. 53, pp. 90-98.
- Gabbasov R.F., Filatov V.V. *Chislennyyi metod rascheta sostavnykh sterzhnei i plastin s absolyutno zhestkimi poperechnymi svyazyami* (Numerical method for composite rods and plates with absolutely rigid transverse links computing), Moscow, ASV, 2014, 200 p.
- Bandurin N.G., Kalashnikov S.Yu. *Stroitel'stvo i rekonstruktsiya*, 2015, vol. 2, no. 58, pp. 4-11.
- Gorbachev V.I., Moskalenko O.B. *Mekhanika tverdogo tela*, 2011, no. 4, pp. 181-192.
- Krutii Yu.S. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzhenii*, 2010, no. 6, pp. 22-29.
- Krutii Yu.S. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzhenii*, 2011, no. 2, pp. 27-33.
- Krutii Yu.S. *Vestnik Odesskoi Gosudarstvennoi Akademii Stroitel'stva i Arkhitektury*, 2014, no. 56. URL: <http://mx.ogasa.org.ua/handle/123456789/1464>
- Senitskii Yu.E., Ishutin A.S. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*, 2015, vol. 19, no. 2, pp. 341-357.
- Tsarenko S.N. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Stroitel'stvo*, 2016, no. 1, pp. 5-13.
- Vlasova E.V. *Aktual'nye problemy zheleznodorozhnogo transporta. Sbornik statei. Voronezh, filial Rostovskogo gosudarstvennogo universiteta putei soobshcheniya*, 2018, pp. 127-130.
- Elishakoff I., Rollot O. New closed-form solutions for buckling of a variable stiffness column by Matematica®. *Journal of Sound and Vibration*, 1999, vol. 224, no. 1, pp. 172-182. DOI: 10.1006/jsvi.1998.2143
- Liao S. Series solution of large deformation of a beam with arbitrary variable cross section under an axial load, *ANZIAM Journal*, 2009, vol. 51, pp. 10-33. DOI: 10.1017/S1446181109000339
- Coşkun S.B. *Advances in Computational Stability Analysis*, InTech, Rijeka, 2012, 140 p.
- Taha M., Essam M. Stability behavior and free vibration of tapered columns with elastic end restraints using the DQM method. *Ain Shams Engineering Journal*, 2013, vol. 4, no. 3, pp. 515-521. DOI: 10.1016/j.asej.2012.10.005
- Afsharfard A., Farshidianfar A. Finding the buckling load of non-uniform columns using the iteration perturbation method. *Theoretical and Applied Mechanics Letters*, 2014, vol. 4, no. 4. DOI: 10.1063/2.1404111
- Elishakoff I., Eisenberger M., Delmas A. Buckling and Vibration of Functionally Graded Material Columns

- Sharing. *Structures*, 2016, vol. 5, pp. 170-174. DOI: 10.1016/j.istruc.2015.11.002
30. Shvartsman B., Majak J. Numerical method for stability analysis of functionally graded beams on elastic foundation. *Applied Mathematical Modelling*, 2016, vol. 40, no. 5-6, pp. 3713-3719. DOI: 10.1016/j.apm.2015.09.060
31. Ioakimidis N.I. The energy method in problems of buckling of bars with quantifier elimination. *Structures*, 2018, vol. 13, pp. 47-65. DOI: 10.1016/j.istruc.2017.08.002
32. Golfam B., Nazarimofrad E., Zahrai S.M. Bending, second-order and buckling analysis of non prismatic beam-columns by differential quadrature method. *Applied Methematical Modelling*, 2018, vol. 63, pp. 362-373. DOI: 10.1016/j.apm.2018.06.054
33. Uribe-Henao A.F., Zapata-Medina D.G., Arboleda-Monsalve L.G., Aristizabal-Ochoa J.D. Static and Dynamic Stability of a Multi-stepped Timoshenko Column Including Self-weight. *Structures*, 2018, vol. 15, pp. 28-42. DOI: 10.1016/j.istruc.2018.05.004
34. Kulinich I.I., Litvinov V.V., Blyagoz A.M. *Novye tekhnologii*, 2012, no. 4, pp. 75-81.
35. Sapountzakis E.J., Tsiatas G.C. Elastic flexural buckling analysis of composite beams of variable cross-section by BEM. *Engineering Structures*, 2007, vol. 29, no. 5, pp. 675-681. DOI: 10.1016/j.engstruct.2006.06.010
36. Lellep J., Sakkov E. Buckling of stepped composite columns. *Mechanics of Composites Materials*, 2006, vol. 42, no. 1, pp. 63-72. DOI: 10.1007/s11029-006-0017-4