УПРАВЛЕНИЕ, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА И ИНФОРМАТИКА

УДК 621.3

РЕАЛИЗАЦИЯ ПРОЦЕДУР МАСШТАБИРОВАНИЯ ЧИСЕЛ В СИСТЕМЕ ВЫЧЕТОВ

Камиль Талятович ТЫНЧЕРОВ родился в 1966 г. в городе Октябрьский БАССР. Старший научный сотрудник Ставропольского филиала Краснодарского университета МВД России. Кандидат технических наук. Основные научные интересы — в области отказоустойчивых нейронных структур в базисе непозиционной системы счисления в вычетах. Автор более 200 научных трудов.

Kamil T. TYNCHEROV, Ph.D., was born in 1966 in Baskiria Autonomous Republic of the USSR. He is a Senior Research Associate at Stavropol Branch of the Krasnodar Ministry of Home Affairs University. His research interests are in fault-tolerant neural structures implemented in position-independent residue numerical system basis. He has published over 200 technical papers.

В статье рассматриваются варианты реализации процедур масштабирования чисел, представленных в коде системы вычетов, при выполнении цифровой обработки сигналов. Предложены высокоскоростной алгоритм и структура табличной организации процедуры масштабирования.

Сокращения и условные обозначения

СВ — система вычетов;

ОПС — обобщенная позиционная система;

ПСС — позиционная система счисления;

A — переменная, произвольный элемент рабочего диапазона M;

C^* — целочисленное приближение к дроби $C = A/B$;

E — погрешность суммирования оценок векторов;

M — рабочий диапазон системы вычетов;

m — основание (модуль) системы вычетов;

r_A — ранг системы вычетов;

s — константа, коэффициент масштабирования;

Y — выходная величина при масштабировании.

При решении задач цифровой обработки сигналов с использованием непозиционной системы вычетов (СВ) могут возникнуть трудности, связанные с необходимостью выполнения операций масштабирования [1, 2]. Операции масштабирования являются частными случаями деления и играют важную роль в процессах построения алгоритмов дискретного преобразования Фурье [2—4].

Основной недостаток существующих алгоритмов масштабирования — их низкое быстродействие, что негативно влияет на производительность вычислительных структур, функционирующих в системе вычетов. Поэтому основной целью при исследовании вопросов масштабирования является поиск путей, позволяющих уменьшить временные затраты на его выполнение при условии сохранения приемлемой точности.

Поскольку табличная реализация основных операций СВ выгодно отличается от других методов, то поиск путей, позволяющих уменьшить временные затраты при масштабировании, целесообразно проводить применительно к табличной организации вычислений. Принцип выполнения операции мас-

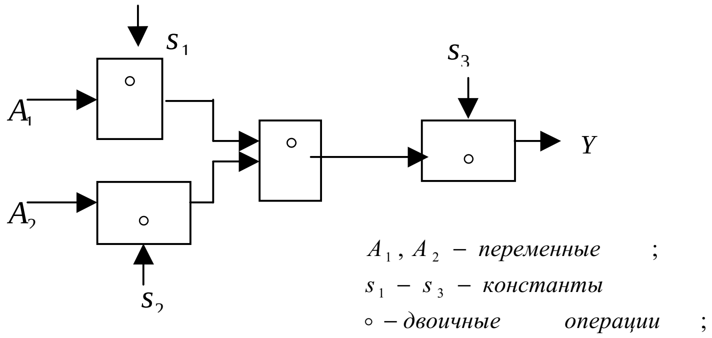

Рис. 1. Операции масштабирования, объединенные в одну справочную таблицу

штабирования при табличной реализации показан на рис. 1.

Подтверждением приоритетности табличных форм служат современные достижения в области технологий производства полупроводниковых запоминающих устройств с высокой плотностью записи, которые позволяют использовать таблицы с большим объемом чисел. При этом используется относительно небольшое общее количество микросхем памяти.

Суть операции масштабирования состоит в получении некоторого целочисленного приближения числа A к дроби A/s, где A — произвольный элемент рабочего диапазона $M = m_1 m_2 \ldots m_n$ системы счисления, s — заданная положительная константа (коэффициент масштабирования). Обычно дробь A/s аппроксимируется целыми числами $[A/s]$ или $[A/s]^-$ [3].

Из определения операции масштабирования видно, что в ее основу положено деление на произвольное число. Вместе с тем следует отметить, что согласно [1] деление в кольце СВ является труднореализуемой операцией, так как в результате этого система становится незамкнутой.

Анализ литературы позволил выявить три основные группы методов деления чисел, базирующихся на модулярной арифметике в вычетах.

Первый из них аналогичен позиционному методу деления и основан на применении таких базовых операций, как сложение, вычитание, определение знака числа и контроль аддитивного переполнения. При этом процедуры деления носят итеративный характер, и для их выполнения требуется большое количество итераций, как правило, равное длине разрядной сетки.

Вторая группа методов деления реализует различные варианты итеративного деления с помощью умножения дробей. При этом время, затрачиваемое на деление, значительно сокращается по сравнению с первой группой методов.

Более высоким быстродействием обладает третья группа, основанная на методе спуска Ферма [4].

При выполнении операции деления целых чисел A и $B \neq 0$ находится некоторое целочисленное приближение C^* к дроби $C = A/B$. Погрешность $E = A/B - C^*$ должна удовлетворять условию $-\varepsilon < E < \varepsilon$, где ε — фиксированная константа, из интервала [1/2, 1). Так же, как и при масштабировании в СВ, рассмотренные приближения обычно аппроксимируются целыми числами: $[A/B]$ или $[A/B]^-$.

Однако, как показывает сравнение требований к выполнению процедур целочисленной аппроксимации с возможностями перечисленных методов, решение вопросов деления эффективнее выполнять в рамках высокоскоростных алгоритмов масштабирования [5].

При масштабировании можно выбрать такой делитель, который позволит выполнить эту операцию значительно проще, например, когда коэффициент масштабирования s является произведением одного или нескольких модулей m_i из диапазона $[0, M]$:

$$s = \prod_{i=0}^{k-1} m_i, \; i \neq j. \tag{1}$$

Что же касается других масштабирующих коэффициентов, не являющихся произведением части оснований системы вычетов, то для них требуется разработка иных алгоритмических конструкций [5, 6]. Для работы в незамкнутом кольце системы нужно каким-то образам оценивать результаты промежуточных операций. Поэтому перед началом выполнения масштабирования в СВ должны заранее оговариваться условия его реализации. Условия могут быть различными. Например, что будет выполняться: либо отсечение путем «отбрасывания» дробной части, либо округление до большего или меньшего значения числа; какими числами придется оперировать: отрицательными или положительными, комплексными или действительными.

Процедуру оценки результата при масштабировании с отсечением дробной части можно описать с помощью выражения

$$Y = [A / s] = \frac{A - (A) \bmod s}{s}, \qquad (2)$$

где A, Y — входная и выходная величины при масштабировании; s — коэффициент масштабирования; $[\cdot]$ — целочисленное значение. В соответствии с (2) число A можно определить следующим образом:

$$A = Ys + (A) \bmod s.$$

Если $s = \prod_{i=0}^{k-1} m_i,\ k > 1,$ то непосредственное определение $(A) \bmod s$ становится сложным. В итеративной форме этот процесс выглядит следующим образом:

$$(\Phi^{(s+1)}) \bmod m_i =$$
$$= \left((\Phi^{(s)} - \Phi_s) \bmod m_i \left[\frac{1}{m_i} \right] \bmod m_i \right) \bmod m_i, \qquad (3)$$

где

$$\Phi^{(0)} = A,\ \ \Phi^{(s)} = Y,\ \ \Phi_s = (s) \bmod m_i,$$
$$0 \le s \le k-1;\ \ s \le i \le n-1.$$

При $k = 1$

$$(Y) \bmod m_i =$$
$$= \left((A - (A) \bmod m_i) \bmod m_i \left[\frac{1}{m_i} \right] \bmod m_i \right) \bmod m_i. \qquad (4)$$

Данный подход пригоден только для получения остатков с основаниями $m_i,\ i \ge k.$

Процесс масштабирования целесообразнее выполнять с помощью коэффициентов, получаемых параллельно с преобразованием чисел из обычной позиционной системы счисления (ПСС) в СВ. При этом преобразование необходимо осуществлять путем перехода через обобщенную позиционную систему счисления (ОПС). Любое число из диапазона $[0,\ M]$ в этой системе можно представить в виде

$$Y = (a_0, a_1, \ldots, a_{p-1})$$

при

$$Y = \sum_{i}^{m} a_i \prod_{j=0}^{i-1} m_j, \qquad (5)$$

где

$$a_i = 0, 1, \ldots, p'_{i-1};\ i = 1, 2, \ldots, m_l;\ p'_1 \times p'_2 \times \ldots \times p'_{m_l} = M';$$

$$(m' / p'_m) < M \le M'.$$

Для расширения системы оснований необходимо найти $y_i = 0,$ где $0 \le i \le k-1$, а затем выполнить преобразование через ОПС для получения разрядов $a_{i-k},\ k \le i \le n-1,\ n$ — количество оснований СВ. Промасштабированные числа должны иметь верхнюю границу

$$Y < \prod_{i=k}^{n-1} m_i, \qquad (6)$$

а разряды в представлении ОПС известны и равны $a_j = 0;\ n-k \le j \le n-1.$ Следовательно, получение $Y_j,\ 0 \le j \le k-1$ из результатов частичного преобразования через ОПС должно реализоваться легко. Для этого необходимо решить линейные уравнения по каждому из модулей $m_j,\ 0 \le j \le k-1.$

Рассмотрим алгоритм расширения системы оснований для любого количества модулей.

Пусть $\overline{Y} = (y_0, y_1, \ldots, y_{k-1}, 0, 0)$ и $\overline{Y} = -L \prod_{i=k}^{n-1} m_i$; $L < \prod_{i=1}^{k-1} m_i$, тогда для расширения системы оснований необходимо выполнить следующие шаги:

1. Образовать $Y^* = \overline{Y} + Y$ (начальную точку, равную $R^{(0)}$).

2. Найти $\overline{Y}$ из Y^* путем частичного преобразования через ОПС.

3. Определить $y_i = (Y) \bmod m_i$; $0 \le i \le k$.

Для получения Y^* находят $y_i = 0$, где $0 \le i \le k-1$. Так как $Y < \prod_{i=k}^{n-1} m_i$, то представление в ОПС можно выразить следующим образом:

$$Y = a_0 + \sum_{i=1}^{n-k-1} a_i \prod_{j=0}^{a-1} m_{j+k}. \qquad (7)$$

Если $a_i = (R^{(i)}) \bmod_{j+k}$, то выражение (7) можно представить с помощью следующего рекуррентного соотношения:

$$(R^{(s+1)}) \bmod m_i =$$

$$= \left((R^{(0)} - (a_s) \bmod m_i \left[\frac{1}{m_{j+k}} \right] \bmod m_i \right) \bmod m_i, \qquad (8)$$

где $R^{(s+1)} = Y$ и $0 \le s \le n-k-1$.

Выражение (8) справедливо и для $R^{(0)} = Y^*$ при $y_i, k \le i \le n-1$:

$$(Y) \bmod m_i = \left((a_0 + \sum_{i=1}^{n-k-1} m_i + a_i \prod_{j=0}^{s-1} m_{j+k} \right) \bmod m_i$$

или

$$(Y) \bmod m_i = \left(\left(-\prod_{s=0}^{n-k-2} m_{s+k} \right) \bmod m_i \left(-R^{n-s-1} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \sum_{s=0}^{n-k-2} R^{(s)} \prod_{i=s}^{n+k-2} \left[\frac{1}{m_{i+k}} \right] \bmod m_i \right) \bmod m_i \right) \bmod m_i, \qquad (9)$$

т.е. за исключением функции $\left(-\prod_{s=0}^{n-k-2} m_{s+k} \right) \bmod m_i$ все остальные вычисления по алгоритму расширения можно осуществить параллельно с преобразованием из ПСС в СВ через ОПС.

В [4] приведен алгоритм масштабирования при помощи чисел со знаками. Но для его реализации необходимы четные модули, что неудобно осуществить при использовании квадратичной СВ. При переходе к системе четных оснований данный алгоритм дает значительные погрешности вследствие возрастания объема вычислений.

Алгоритм, приведенный в [3], пригоден только для положительных чисел, да к тому же обладает низкой скоростью масштабирования.

Таким образом, основным недостатком существующих алгоритмов масштабирования является последовательная организация вычислений и как следствие — недостаточно высокое быстродействие. Для уменьшения числа циклов обращения к таблицам при масштабировании в [5] предложено параллельное табличное вычисление.

В модифицированном алгоритме предусмотрена возможность округления чисел до ближайшего целого значения. Для этого по входной величине добавляется фиксированное дополнение

$$\left[\prod_{i=0}^{k-1} \frac{m_i}{2} \right].$$

Суть модифицированного алгоритма масштабирования состоит в объединении табличной обработки и метода с использованием оценок. Входной сигнал представляется в виде суммы матричных векторов. Если входную величину A представить в СВ в виде

$$A \equiv \sum_{i=0}^{n-1} (\alpha_i B_i) \bmod M \qquad (10)$$

или

$$A = \sum_{i=0}^{n-1} a_i B_i - r_A M, \qquad (11)$$

где r_A — целое положительное число, показывающее, сколько раз диапазон M системы был превзойден при переходе от представления числа в системе остаточных классов к его позиционному представлению через систему ортогональных базисов $(B_0, B_1, ..., B_n)$; оно называется рангом числа A; $B_i = M \left[\frac{1}{m_i} \right] m_i$.

Так как $0 \le \alpha_i \le m_i - 1$, то возможное количество вектора $\alpha_i B_i$ будет равно

$$Y = \sum_{i=0}^{n-1} m_i.$$

Это относительно небольшое значение, следовательно, при организации табличного вычисления аппаратурные затраты будут невелики. Из (11) следует, что

$$Y_E = A \Big/ \prod_{i=1}^{k-1} m_i = \sum_{j=0}^{n-1} n_j B_j \Big/ \prod_{j=0}^{k-1} m_j - r_A M \Big/ \prod_{j=0}^{k-1} m_j, \qquad (12)$$

где Y_E — множество всех действительных чисел.

В векторном представлении данное выражение преобразуется к виду

$$Y^* = \sum_{i-0}^{n-1} \alpha_i B_i / \prod_{i=0}^{k-1} n_i + E \;\rightarrow\; Y^* = Y_E + r_A \prod_{j=s}^{n-1} m_j + E,$$

где E — погрешность суммирования оценок векторов. Ее верхняя граница $|E| < n/2$.

Для $(Y^*) \bmod m_n$; $k \le n \le n-1$

$$(Y^*) \bmod m_n = (Y+E) \bmod m_n. \qquad (13)$$

Для того чтобы найти остатки с помощью оценок, достаточно решить уравнение

$$(Y) \operatorname{mod}_n = \left(\sum_{i=0}^{n-1} \left(\left(\left[\left(\left(\prod_{i=k}^{n-1} m_i \right) (n/m_i) \bmod m_i \right) \Big/ m_i + 1/2 \right] \right) \bmod m_i \right) \bmod m_i \right) \bmod m_i, \qquad (14)$$

где $\left[\left(\left(\prod_{i=0}^{n-1} m_i \right) (n/m_i) \bmod m_i \right) \Big/ m_i + 1/2 \right]$ — оценочная функция, $k \le n \le n-1$. Эта функция будет равна нулю при $k \le n \le n-1$; $i \ne n$. Следовательно, справедливо следующее утверждение:

$$(Y^*) \bmod m_i = \\ = \left(\sum (e_n^{(1)} y_1 + e_n^{(n)} y_n) \right) \bmod m_i, \; k \le n \le n-1. \qquad (15)$$

Погрешность E с учетом (15) уменьшается до величины $(k+1)/2$.

Тогда можно найти $\left[Y^* / \prod_{i=k}^{n-1} m_i \right]$, $0 \le n \le k-1$.

Действительно,

$$Y^* = Y + \overline{Y} = Y + r_A \prod_{i=k}^{n-1} m_i. \qquad (16)$$

Масштабирование с учетом (16)

$$\left[Y^* / \prod_{i=k}^{n-1} m_i \right] = \left[Y / \prod_{i=s}^{n-1} m_i + r_A \right] = r_A, \qquad (17)$$

если $\left[Y / \prod_{i=k}^{n-1} m_i \right] < 1.$

Таким образом, с помощью ранга r_A определение $\overline{Y}$ сводится к решению уравнения

$$\overline{Y} = r_A \prod_{i=k}^{n-1} m_i$$

или

$$(Y) \bmod m_i = \\ = (-\overline{Y}) \bmod m_i - r_A \prod_{i=k}^{n-1} m_i, \; 0 \le n \le k-1. \qquad (18)$$

Для высокоскоростной реализации рассмотренного алгоритма масштабирования предложено использовать параллельно-конвейерные структуры [6]. Как известно [5], они играют ключевую роль в высокопроизводительных вычислительных устройствах. В связи с этим добавление

$$\left[\prod_{i=0}^{k-1} \frac{m_i}{2} \right]$$

к входной величине A производится на первом этапе масштабирования. Алгоритм расширения основания объединяется с вычислением $(Y) \bmod m_i$ согласно (18). Для уменьшения числа циклов при масштабировании организуются параллельные преобразования входных величин. Все операции с фиксированными параметрами объединены в справочных таблицах (программируемых логических матрицах). В результате такого подхода значительно вырастает быстродействие при обеспечении приемлемых аппаратурных затрат. При использовании квадратичной СВ [2] образуются два идентичных канала для обработки действительных и мнимых чисел. Для этого понадобится n циклов обращения к справочным таблицам и $2nk$ таблиц по 8 кБ каждая.

Summary

Some implementation versions are discussed for procedures to scale numbers represented in residue system code. These procedures are intended to use in digital signal processing. A high-speed algorithm is proposed as well as a structure for table arrangement of the scaling procedure.

Библиографический список

1. *Акушский И.Я., Юдицкий Д.И.* Машинная арифметика в остаточных классах. — М.: Советское радио, 1986.

2. *Червяков Н.И., Тынчеров К.Т., Велигоша А.В.* Высокоскоростная цифровая обработка сигналов с использованием непозиционной арифметики // Радиотехника. 1997. № 10. С. 23—29.

3. *Кейр И.А., Чини П.В., Таненбаум М.* Деление и определение переполнения в системах счисления в остаточных классах // Кибернетический сборник. М.: Мир, 1964.

4. *Jullien G.A.* Residue number scaling and other operations using ROM arrays // IEEE Trans. Comput. 1978. Vol. C-27. N 4. Pp. 325—326.

5. *Червяков Н.И., Велигоша А.В., Тынчеров К.Т.* Применение модулярного кодирования информации для синтеза высокоскоростных цифровых фильтров // Кибернетика и системный анализ. 1998. №1.

6. *Тынчеров К.Т.* Разработка высокоскоростного алгоритма масштабирования чисел в СОК // Материалы X НТК СВВИУС «Проблемы построения и развития теории и практики пакетных радиосетей передачи информации ЕАСС» 24-25.10.96. Ставрополь: СВВИУС, 1997. С. 59.

Статья поступила в редакцию 15.12.2007