

На правах рукописи

Романов Александр Вячеславович



**ИССЛЕДОВАНИЕ МАСШТАБНЫХ ЭФФЕКТОВ  
МИКРОПОЛЯРНЫХ СРЕД В ТРЕХМЕРНЫХ  
МОДЕЛЯХ**

Специальность 1.1.8. – Механика деформируемого твердого тела

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Москва–2024

Работа выполнена в ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова»

**Научный руководитель:** **Никабдзе Михаил Ушангиевич**, доктор физико-математических наук, профессор кафедры механики композитов ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова».

**Официальные оппоненты:** **Соляев Юрий Олегович**, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник ФГБУН «Институт прикладной механики Российской академии наук» (ИПРИМ РАН);

**Шоркин Владимир Сергеевич**, профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Техническая физика» ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева».

**Ведущая организация:** Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «МГТУ имени Н.Э. Баумана»

Защита диссертации состоится «12» февраля 2024 г. в 15 часов 00 минут на заседании диссертационного совета 24.2.327.07 при федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» по адресу: 125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4.

С диссертацией можно ознакомиться в научно-технической библиотеке федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» по адресу: 125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4 и на сайте: [https://mai.ru/events/defence/?ELEMENT\\_ID=182708](https://mai.ru/events/defence/?ELEMENT_ID=182708)

Автореферат разослан « \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2024 г.

Учёный секретарь  
диссертационного совета



Сердюк Д. О.

## Общая характеристика работы

Использование современных материалов в наукоемких и высокотехнологичных отраслях индустрии, а также стремление получить уточненные математические модели физико-механических явлений порождает особый запрос на применение и развитие теорий, способных моделировать среду с учетом ее микроструктуры.

Диссертационная работа посвящена построению и уточнению механической модели в рамках трехмерных задач микрополярной теории упругости. Данная теория способна учитывать масштабные эффекты материалов с микроструктурой, подтверждаемые экспериментами, в том числе для задач с высокой концентрацией напряжений вблизи дефектов, дислокаций или включений, в малоразмерных структурах, а также в условиях высокочастотных динамических процессов.

Хотя основоположником микрополярной теории по праву считается А.К. Эринген, опираясь на фундаментальную работу братьев Э. и Ф. Коссера (1909 г.), существенный вклад в развитие этой теории оказали работы Дж. Мак-Куллага (1839 г.), Е. Моссотти (1851 г.), А. Клебша (1862 г.), Г. Кирхгофа (1874 г.), В. Фойхта, (1887г.), П. Дюгема (1891 г.), Р.Д. Миндлина, Р.А. Тупина, В.Т. Койтера, Р.Д. Готье, Л.Д. Гибсона, М.Ф. Эшби, Р.С. Лейкса.

За последнее время в России достаточное количество исследований было посвящено именно развитию микрополярной теории. Здесь работы таких авторов как Э.Л. Аэро, Г.Л. Бровко, В.И. Горбачев, Е.Ф. Грекова, В.И. Ерофеев, В.А. Еремеев, П.А. Жилин, Е.А. Иванова, А.М. Кривцов, Е.В. Кувшинский, М.А. Кулеш, В.А. Ломакин, В.П. Матвеев, Н.Ф. Морозов, М.У. Никабадзе, Б.Е. Победря, В.М. Садовский, С.О. Саркисян, И.Н. Шардаков, В.С. Шоркин.

К моделям обобщенных континуумов, учитывающих размерные эффекты, относятся и модели с поверхностными эффектами, которые рассматривались в работах П.А. Белова и С.А. Лурье, В.А. Еремеева и Н.Ф. Морозова. Градиентной теории упругости были посвящены работы П. Жермена, Н. Эшела и Г. Розенфельда, И.А. Кунина, Ж. Можена, Э. Айфантиса, В.В. Васильева, Д.Б. Волкова-Богородского, Е.В. Ломакина, В.И. Ерофеева и др. Хотелось бы отметить диссертационную работу Ю.О. Соляева, в которой представ-

лены формулировки и развитие градиентной теории упругости изотропных сред в форме Миндлина- Тупина и градиентной теории электроупругости.

Кроме того, в работе выполняется построение вариационной формулировки модели натянутой нити или системы нитей для микрополярной среды. Здесь стоит упомянуть фундаментальные работы зарубежных ученых и наших современников: Я. Бернулли и Л. Эйлера. Ж. Лагранжа, А. Клебша, А. Лява, Ю.В. Якубовского, В.С. Живова, Я.И. Коритыцкого, И.И. Мигушова, Д.Р. Меркина, А.П. Минакова. Однако данная работа ограничена подходом основанным, в том числе на параметризации кривой с введением евклидовой метрики в пространстве  $\mathbb{R}^3$ , что позволяет учесть сложную геометрию и выписать уравнения равновесия для произвольной точки нити.

**Актуальность темы.** Микрополярная теория обеспечивают получение уточненных решений, зависящих от масштабных параметров и микроструктуры материала для задач с высокой концентрацией напряжений, которая может реализовываться вблизи дефектов, дислокаций или включений, в малоразмерных структурах (микрোকантилеверах, пленках, наночастицах), в наноструктурированных средах, а также в условиях высокочастотных динамических процессов.

Важнейшим вопросом является разработка численных методов в рамках градиентных теорий для создания конечно-элементных решателей, обеспечивающих достаточную скорость сходимости при повышенном числе степени свободы кусочно-полиномиальных функций.

Что касается моделирования преднапряжённого состояния, то стоит отметить что данная задача имеет большое практическое значение при проектировании уникальных сооружений атомных электростанций, поскольку позволяет оценить эксплуатационную пригодность преднапряжённого контайнмента или защитной оболочки энергоблока Атомной Электростанции.

**Цели и задачи работы.** Целью диссертации является развитие вариационной модели и построение численного решения микрополярной теории упругости, включая неизотермические процессы и начальные тензорные поля, для достоверного и корректного описания масштабных эффектов, возникающих в упругих материалах с микроструктурой, возможности определения

материальных параметров наряду с аппроксимацией решения, обладающего достаточной точностью и небольшой ресурсоемкостью.

Целью также является развитие модели натянутой нити с обобщением её на микрополярную среду, в основе которой лежит вариационный принцип Лагранжа и работа нити на поле перемещений и микровращений. Данная механическая модель имеет важное практическое значение в вопросах проектирования уникальных сооружений АЭС.

**Научная новизна.** Все включенные в диссертацию результаты являются новыми.

1. Краевая задача микрополярной теории упругости приводится к системе линейных алгебраических уравнений в сокращенной тензорной форме.
2. Предлагается способ оценки корректности постановки задачи и краевых условий для микрополярной теории упругости основанный на расщеплении уравнений статики.
3. Выполняется построение упругого потенциала, который учитывает тепловые изгибы-кручения наряду с тепловыми деформациями и начальными тензорными полями.
4. А для уточнения аппроксимации кинематических полей перемещений и микровращений полиномами Лагранжа применяется обобщение метода редуцированного и селективного интегрирования в тензорном виде, в том числе, для почти несжимаемого материала. Выполнена аппроксимация искомым векторных полей перемещений и микровращений полиномами смешанной степени и показано преимущество данного способа на примере задачи о кубе.
5. Новым также является вариационная формулировка модели натянутой нити для микрополярной среды.

**Практическая значимость** в научно-технических областях продиктована особым интересом или запросом на использование градиентных моделей в рамках обоснований (экономической целесообразности или оптимального использования материалов) или исследования феномена масштабных эффектов в научно-экспериментальной и исследовательской области, включая моделирование в областях био- нано- или микромеханики.

В частности, предложенный подход построения численного решения позволяет исследовать микрополярные модели (с микро- или наноструктурой),

их механические (термомеханические) эффекты, масштабные эффекты с целью определения материальных параметров или создания новых свойств композиционных материалов.

Важную практическую роль имеет модель натянутых нитей для проектирования уникальных сооружений отечественных и зарубежных АЭС. Потому как позволяет выполнить оценку эксплуатационной пригодности энергоблоков в зависимости от минимального уровня обжатия системы преднапрягаемых арматурных канатов, расположенных в теле контейнента.

**Методология и методы исследования.** Формулировка рассматриваемой микрополярной теории основана на использовании вариационного подхода, в частности, привлекаются постулаты механики (для вывода дифференциальных уравнений равновесия и доказательство их эквивалентности вариационной формулировке задачи) и законы термодинамики для построения функционала свободной энергии при неизотермических процессах (обобщённый принцип Дюамеля-Неймана), а также принцип минимума полной потенциальной энергии и принцип наименьшего действия с учётом тепловых изгибов-кручений с начальными тензорными полями (деформаций, изгибов-кручений, напряжений, моментных напряжений). Все решения построены в предположении линейных физических соотношений и малых деформаций с использованием теории тензорного исчисления. Для построения численного решения уравнений в частных производных использована теория метода конечных элементов.

При дискретизации вариационных уравнений равновесия по пространственным координатам и доказательства эквивалентности формулировок дифференциальных и вариационных уравнений (условие существования стационарности и минимума потенциальной энергии) использовалась техника дифференцирования по Гато.

Для построения изотропных, ортотропных и трансверсально – изотропных тензоров применялись правила ортогональных преобразований и построения систем линейно независимых изотропных тензоров чётного ранга путём попарного перебора всевозможных комбинаций мультипликативных базисов.

**Положения, выносимые на защиту:**

1. Предложен способ приведения краевой задачи микрополярной теории упругости к системе линейных алгебраических уравнений в сокращенной тензорной форме и выписаны компоненты тензорных блоков матриц жесткости.
2. Для оценки корректности постановки задачи и краевых условий для микрополярной теории упругости выполняется расщепление уравнений статики относительно двух независимых кинематических величин.
3. Из задачи о чистом и цилиндрическом изгибе микрополярного материала установлено, что наряду с напряжениями в сечении возникают постоянные моментные напряжения. Аналогичный эффект наблюдается и для задачи о кручении изотропного микрополярного материала.
4. Построен упругий потенциал, который учитывает тепловые изгибы-кручения наряду с тепловыми деформациями и начальными тензорными полями. При этом тепловая структура может отличаться от механической.
5. Для уточнения аппроксимации кинематических полей полиномами Лагранжа применяется обобщение на микрополярную среду метода редуцированного и селективного интегрирования, в том числе для почти несжимаемого материала. Также предложен подход, когда аппроксимация кинематических полей выполняется полиномами смешанной степени.
6. Дана вариационная формулировка модели натянутой нити для микрополярной среды.
7. Представлено решение задачи о призматическом теле, ослабленном круговым отверстием при одноосном растяжении; о кубе при различных вариациях масштабного параметра и моментного числа; решение задачи о толстостенном цилиндре конечных размеров с преднапряженными нитями.

**Степень достоверности и апробация результатов.** Достоверность полученных результатов определяется применяемыми строгими методами механики деформируемого твердого тела, привлечением вариационных принципов для формулировки моделей, использованием апробированных подходов микромеханики композиционных материалов, методов теории дифференциальных уравнений и тензорного анализа. Проводится сопоставление анали-

тических и построенных численных решений, для оценки корректности последних. Проводится сопоставление результатов моделирования с известными экспериментальными данными, для подтверждения результатов расчетов и идентификации дополнительных параметров моделей.

Результаты диссертационной работы докладывались на российских и международных конференциях, семинарах и симпозиумах:

- 51 школа-конференция «АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ», Великий Новгород, 19–21 июня 2024 г.;
- XXX Международный симпозиум «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» имени А.Г. Горшкова., Russia, 20–24 мая 2024 г.;
- Международная научная конференция «МАТЕМАТИКА В СОЗВЕЗДИИ НАУК», посвященная 85-летию академика В.А. Садовниченко, Москва, 1–2 апреля 2024 г.;
- XIII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Санкт-Петербург, 19–23 июня 2023 г.;
- Международная научная конференция «Ломоносовские чтения», Москва, 2024, 2023, 2022, 2021, 2020, 2019 г.;
- Научно-исследовательский семинар кафедры механики композитов механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова под руководством д.ф.-м.н., проф. В.И. Горбачева; д.ф.-м.н., проф. М.У. Никабадзе; д.т.н., проф. С.А. Лурье 2024, 2023, 2022, 2021, 2020, 2019 г.;
- Доклад на международной научной конференции «Современные проблемы математики и механики», посвященной 80-летию академика В.А. Садовниченко, 2019 г.

**Публикации по теме диссертации.** Основные результаты диссертации изложены в 11 печатных работах:

- 5 из них в индексируемых базах данных Scopus, RSCI Web of Science;
- 2 из них в рецензируемых научных изданиях и журналах из перечня ВАК индексируемых в базах данных РИНЦ.

За время изысканий и написания диссертационной работы автором был оформлен патент № 2375528 «Анкер для закрепления пучка преднапрягаемых канатов», 2009 г. и двенадцать авторских свидетельств, наиболее значимые из которых:

- № 2010613486 «Модуль матричного счисления интерполяционных функций форм гексаэдров КЭ модели», 2010 г.;
- № 2010613485 «Модуль задания усилий преднапряжения армоканатов», 2010 г.;
- № 2010613484 «Модуль записи-чтения матриц КЭ модели оболочки, КЭ модели армоканатов», 2010 г.;
- № 2010613483 «Модуль задания сил преднапряжения в узлах КЭ модели оболочки», 2010 г.;
- № 2010613364 «Модуль математического анализа численных параметров КЭ модели оболочки и КЭ модели армоканатов СПЗО», 2010 г.

**Личный вклад автора.** Представленные в диссертации результаты, получены автором лично. Автор принимал активное участие в постановке научных задач, разработке вариационных и построении численных решений, проведении численного эксперимента, анализе полученных результатов и предоставлении их для печати в рецензируемых журналах.

**Объем и структура диссертации.** Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и списка цитируемой литературы. Текст диссертации составляет 133 страниц, включая 32 рисунка и 8 таблиц. Список цитируемой литературы содержит 233 наименований.

## Содержание работы

**В первой главе** представлены общие положения микрополярной теории с описанием кинематических соотношений, условий совместности деформаций. Так, вводится тензор относительных деформаций микрополярной теории упругости, который является разностью между градиентом макро перемещений  $\nabla \mathbf{u}$  и кососимметричным тензором, образованным скалярным произведением дискриминантного тензора  $\underline{\underline{C}}$  и вектора поворота микрочастицы  $\varphi$ ,  $\underline{\underline{\gamma}} = \nabla \mathbf{u} - \underline{\underline{C}} \cdot \varphi$ ,  $\gamma_{ij} = \partial_i u_j - \epsilon_{ijk} \varphi_k$ . Градиент вектора микроповорота будет выражать тензор изгибов-кручений  $\underline{\underline{\kappa}} = \nabla \varphi$ . Для связи поверхностных сил и пар с тензорами напряжений и моментных напряжений имеют место обобщённые соотношения Коши  $\mathbf{n} \cdot \underline{\underline{P}} = \underline{\underline{P}}$ ,  $\mathbf{n} \cdot \underline{\underline{\mu}} = \underline{\underline{\mu}}$ .

На основе постулатов механики (закона сохранения массы и микроинерции, закона сохранения количества движения и момента количества движе-

ния) получаются уравнения движения

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{F} + \nabla \cdot \underline{\mathbf{P}}, \quad \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \cdot \underline{\mathbf{J}} = \underline{\mathbf{C}} \otimes \underline{\mathbf{P}} + \rho \mathbf{m} + \nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\mu}}.$$

Далее, применяя законы термодинамики, и вводя функцию состояния замкнутой термодинамической системы – свободная энергия Гельмгольца  $F = U - ST$ , которую можно представить как полный дифференциал, если рассматривать бесконечно малое изменение состояние упругого тела

$$dF = \underline{\mathbf{P}} \otimes d\boldsymbol{\gamma} + \underline{\boldsymbol{\mu}} \otimes d\boldsymbol{\varkappa} - S dT.$$

Отсюда видно, что свободная энергия  $F \equiv F(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\varkappa}, T)$  является функцией переменных  $\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\varkappa}, T$ . А значит для полного дифференциала  $dF$  справедливы соотношения

$$\underline{\mathbf{P}} = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\gamma}}, \quad \underline{\boldsymbol{\mu}} = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varkappa}}, \quad -S = \frac{\partial F}{\partial T}.$$

Рассмотрим в начальный момент времени  $t = 0$  тело, которое находится в состоянии, определяемое некоторым начальным значением тензоров  $\boldsymbol{\gamma}_0, \boldsymbol{\varkappa}_0, \underline{\mathbf{P}}_0, \underline{\boldsymbol{\mu}}_0$ , а температура равна некоторому постоянному значению  $T_0$ . Нагружая тело внешним воздействием в виде массовых или поверхностных сил и пар, наряду с температурным полем, отличным от  $T_0$ , в нём будут возникать поля перемещений  $\mathbf{u}$  и микровращений  $\boldsymbol{\varphi}$ , которые в общем случае являются функциями пространственных координат и времени. Изменение внутреннего тепла или температурного поля тела будет связано с его напряжённо–деформированным состоянием. В этом состоянии разложим в ряд Тейлора свободную энергию

$$F(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\varkappa}, T) = F_0 + (\underline{\mathbf{P}}_0 - \underline{\mathbf{a}} \vartheta \otimes \underline{\mathbf{A}}) \otimes (\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\gamma}_0) + (\underline{\boldsymbol{\mu}}_0 - \underline{\mathbf{b}} \vartheta \otimes \underline{\mathbf{D}}) \otimes (\boldsymbol{\varkappa} - \boldsymbol{\varkappa}_0) + \\ + \frac{1}{2} \left[ (\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\gamma}_0)(\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\gamma}_0) \otimes \underline{\mathbf{A}} + (\boldsymbol{\varkappa} - \boldsymbol{\varkappa}_0)(\boldsymbol{\varkappa} - \boldsymbol{\varkappa}_0) \otimes \underline{\mathbf{D}} + \left( \underline{\mathbf{a}} \otimes \underline{\mathbf{A}} \otimes \underline{\mathbf{a}} + \underline{\mathbf{b}} \otimes \underline{\mathbf{D}} \otimes \underline{\mathbf{b}} \right) \vartheta^2 \right],$$

в силу которого, при  $F_0, \underline{\gamma}_0, \underline{\varkappa}_0, \underline{\mathbf{P}}_0, \underline{\mu}_0$  справедливы определяющие соотношения для материалов произвольной анизотропии с центром симметрии

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{P}} &= \underline{\underline{\mathbf{A}}} \otimes^2 (\underline{\gamma} - \underline{\mathbf{a}} \vartheta), \quad \underline{\mu} = \underline{\underline{\mathbf{D}}} \otimes^2 (\underline{\varkappa} - \underline{\mathbf{b}} \vartheta), \\ S &= \underline{\mathbf{a}} \otimes^2 \underline{\underline{\mathbf{A}}} \otimes^2 \underline{\gamma} + \underline{\mathbf{b}} \otimes^2 \underline{\underline{\mathbf{D}}} \otimes^2 \underline{\varkappa} - \left( \underline{\mathbf{a}} \otimes^2 \underline{\underline{\mathbf{A}}} \otimes^2 \underline{\mathbf{a}} + \underline{\mathbf{b}} \otimes^2 \underline{\underline{\mathbf{D}}} \otimes^2 \underline{\mathbf{b}} \right) \vartheta,\end{aligned}$$

где первые два соотношения являются искомыми (соотношения Дюамеля-Неймана);  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}, \underline{\underline{\mathbf{D}}}$  — материальные тензоры четвёртого ранга;  $\underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{b}}$  — тензоры теплового расширения;  $\vartheta$  — перепад температуры по отношению к  $T_0$ .

Обобщим задачу минимизации функционала Лагранжа классической теории упругости на микрополярную среду:

$$\mathbf{u}, \varphi: \quad L(\mathbf{u}, \varphi) \leq L(\mathbf{w}, \psi), \quad \forall \mathbf{w}, \psi|_{\Sigma_1} = 0, \quad L(\mathbf{w}, \psi) = \frac{1}{2} a(\mathbf{w}, \psi; \mathbf{w}, \psi) - l(\mathbf{w}, \psi)$$

и запишем условие стационарности

$$\begin{aligned}DL(\mathbf{u}, \varphi; \mathbf{w}, \psi) &= 0, \quad a(\mathbf{u}, \varphi; \mathbf{w}, \psi) = l(\mathbf{w}, \psi), \\ a(\mathbf{u}, \varphi; \mathbf{w}, \psi) &= \int_V [\underline{\mathbf{P}}(\mathbf{u}, \varphi) \otimes^2 (\nabla \mathbf{w} - \underline{\underline{\mathbf{C}}} \cdot \psi) + \underline{\mu}(\varphi) \otimes^2 \nabla \psi] dV, \\ l(\mathbf{w}, \psi) &= \int_V \rho(\mathbf{F} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{m} \cdot \psi) dV + \int_{\Sigma_2} (\mathbf{P} \cdot \mathbf{w} + \underline{\mu} \cdot \psi) d\Sigma.\end{aligned}$$

При формулировке вариационного принципа Лагранжа аналогично классической теории потребуем выполнения кинематических соотношений и кинематических граничных условий:

$$\underline{\gamma} = \nabla \mathbf{u} - \underline{\underline{\mathbf{C}}} \cdot \varphi, \quad \underline{\varkappa} = \nabla \varphi, \quad \mathbf{u}|_{\Sigma_1} = \mathbf{u}_0, \quad \varphi|_{\Sigma_1} = \varphi_0,$$

а из условия стационарности  $DL(\mathbf{u}, \varphi; \mathbf{w}, \psi) = 0$ , следуют уравнения равновесия и статические граничные условия:

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{P}} + \rho \mathbf{F} = 0, \quad \nabla \cdot \underline{\mu} + \underline{\underline{\mathbf{C}}} \otimes^2 \underline{\mathbf{P}} + \rho \mathbf{m} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \underline{\mathbf{P}}|_{\Sigma_2} = \mathbf{P}, \quad \mathbf{n} \cdot \underline{\mu}|_{\Sigma_2} = \underline{\mu},$$

где  $\underline{\gamma}$  — тензор деформаций микрополярной теории упругости;  $\underline{\varkappa}$  — тензор изгибов-кручений;  $\mathbf{n}$  — внешняя нормаль к поверхности тела. Таким образом,

достаточность утверждения принципа Лагранжа и эквивалентность краевой и вариационной формулировок задачи микрополярной теории упругости в перемещениях и вращениях установлены. Стоит отметить, что аналогичным образом формулируется задача минимума и условие стационарности с учетом обобщенного принципа Дюамеля-Неймана при начальных тензорных полях, о чем подробно изложено в тексте диссертации.

Перейдем к вариационной формулировке модели натянутой нити, которая основана на определении абсолютно гибкой растяжимой нити, не оказывающей сопротивление упругой среде, кроме усилия натяжения. В данной работе дана механическая формулировка модели идеально гибкой натянутой нити в рамках задачи Л. Эйлера о нахождении величины уменьшения растягивающего усилия из-за силы трения по длине нити изогнутой в форме дуги. Для обобщения задачи на микрополярную среду предлагается действие нити заменить работой сил и пар на соответствующих кинематических полях

$$\begin{aligned} \mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}: L(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}) &\leq L(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}), \quad \forall \mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}: \mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}|_{\Sigma_1} = 0, \\ L(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}) &= \frac{1}{2} a(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}; \mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}) - s(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}), \\ s(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}) &= \int_S (\mathbf{f} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\psi}) dS \approx \sum_{i=0}^n (\mathbf{f}_i \cdot \mathbf{w}^i + \mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\psi}^i), \quad S \subset V, \end{aligned}$$

где  $s(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi})$  — работа натянутой нити на соответствующем поле перемещений и микровращений, если заданы тождества  $\mathbf{w} \equiv \mathbf{u}$ ,  $\boldsymbol{\psi} \equiv \boldsymbol{\varphi}$ ;  $S$  — длина нити в упругом пространстве или области  $V$  микрополярной среды;  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{r}$  — сила и момент, соответственно, возникающие по длине натянутой нити (сила и момент  $\mathbf{f}_i$ ,  $\mathbf{r}_i$  в точке  $i$  параметризованной нити), действующие на тело как внешнее воздействие и в общем случае зависят от усилия, силы трения и кривизны нити в данной её точке. Для функционала  $s(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi})$  аппроксимация соответствующих полей перемещений  $\mathbf{w}$  и микровращений  $\boldsymbol{\psi}$  будет подробно изложена в тексте диссертации.

Чтобы выписать уравнения равновесия для замены действия нити внешними силами  $\mathbf{f}_i, \mathbf{r}_i$  произвольной точки натянутой нити введем параметризацию кривой. Пусть кривой в метрическом пространстве  $X$  назовём отображение  $\gamma: [a, b] \rightarrow X$ . Каждому разбиению  $\xi$  отрезка вида  $a = t_0 < t_1 \dots < t_i \dots <$

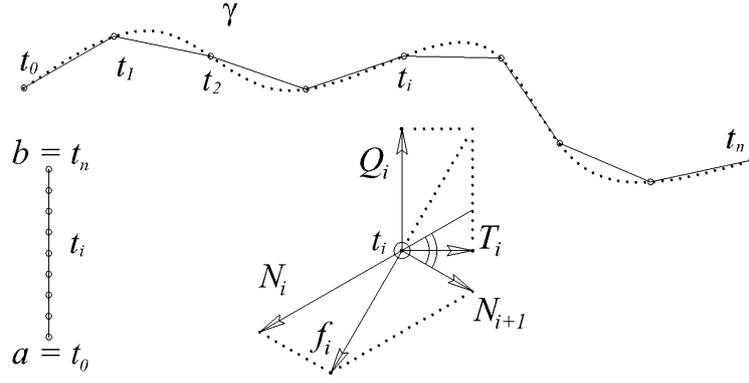


Рисунок 1: Параметризация спрямляемой нити и её равновесие для произвольной точки  $t_i$ .

$t_n = b$  сопоставим число

$$L_\xi = \sum_{i=0}^{n-1} |\gamma(t_i)\gamma(t_{i+1})|, \quad |\gamma| = \sup L_\xi,$$

и назовём длиной  $|\gamma|$  кривой  $\gamma$  точную верхнюю грань величин  $L_\xi$  по всем разбиениям. Тогда кривая  $\gamma$  называется спрямляемой, если её длина конечна.

Пользуясь введённой параметризацией нити в пространстве  $\mathbb{R}^3$  с евклидовой метрикой, а также определениями и примерами, подробно изложенными в диссертации, запишем уравнения статического равновесия произвольно выбранной точки  $t_i$  в векторной форме (см. рисунок 1)

$$\mathbf{Q}_i + \mathbf{T}_i + \mathbf{N}_i + \mathbf{N}_{i+1} = 0, \quad \mathbf{f}_i = \mathbf{N}_i + \mathbf{N}_{i+1},$$

где  $\mathbf{f}_i$  — результирующий вектор усилий  $\mathbf{N}_i + \mathbf{N}_{i+1}$  в точке  $i$  составляющий работу нити на соответствующем поле перемещений;  $\mathbf{Q}_i$ ,  $\mathbf{T}_i$  — нормальная реакция и реакция силы трения в точке  $i$ , соответственно. Если учесть граничные условия на концах нити в точках  $a$ ,  $b$ , то уравнения равновесия примут вид

$$\mathbf{f}_0 + \mathbf{R}_0 = 0, \quad \mathbf{f}_n + \mathbf{R}_n = 0, \quad \mathbf{f}_0 = \mathbf{N}_0, \quad \mathbf{f}_n = \mathbf{N}_n.$$

Следует отметить, что при замене действия натянутой нити работой внешних сил реакции  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{T}$  должны быть отброшены потому как их работа заменяется эквивалентной внутренней работой поля напряжений и моментных

напряжений на соответствующих деформациях и изгибах–кручения функционала  $a$  задачи.

**Во второй главе** краевая задача статики микрополярной теории упругости приводится к системе линейных алгебраических уравнений используя принцип Лагранжа и метод Ритца. Для аппроксимации искомого решения использованы полиномы Лагранжа формирующие 8-узловые конечные элементы и серендиповы полиномы (serendipity — «интуитивная прозорливость»), формирующие 20-узловые конечные элементы.

Таким образом метод Ритца позволяет выполнить дискретизацию функционала Лагранжа по пространственным координатам и записать условие стационарности, приравняв нулю все производные от  $L$  по  $\widehat{w}$  и  $\widehat{\psi}$ . В таком случае нетрудно прийти к следующей системе линейных алгебраических уравнений для микрополярной среды произвольной анизотропии с центром симметрии при неизотермических процессах

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \widehat{w}_j^q} = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \widehat{\psi}_j^q} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} +\mathbb{K}_{(1)pq}^{lj} \widehat{w}_l^p - \mathbb{K}_{(2)pq}^{lj} \widehat{\psi}_l^p = \mathbb{F}_{(1)q}^j + \mathbb{T}_{(1)q}^j, \\ -\mathbb{K}_{(3)pq}^{lj} \widehat{w}_l^p + \mathbb{K}_{(4)pq}^{lj} \widehat{\psi}_l^p = \mathbb{F}_{(2)q}^j + \mathbb{T}_{(2)q}^j, \end{cases}$$

где введённые обозначения тензорно-блочных матриц и блочных векторов сил(пар) в области натуральных координат имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_{(1)pq}^{lj} &= \int_{V_e} A^{ijkl} N_{p,s} N_{q,t} B_k^s B_i^t J dV_\xi, & \mathbb{K}_{(2)pq}^{lj} &= \int_{V_e} A^{ijkm} C_{km}^{\cdot l} N_p N_{q,t} B_i^t J dV_\xi, \\ \mathbb{K}_{(3)pq}^{lj} &= \int_{V_e} A^{inkl} N_{p,s} C_{in}^{\cdot j} N_q B_k^s J dV_\xi, \\ \mathbb{K}_{(4)pq}^{lj} &= \int_{V_e} \left[ A^{inkm} N_p N_q C_{km}^{\cdot l} C_{in}^{\cdot j} + D^{ijkl} N_{p,s} N_{q,t} B_k^s B_i^t \right] J dV_\xi, \\ \mathbb{F}_{(1)q}^j &= \int_{V_e} F^j N_q J \rho dV_\xi + \int_{\Sigma_2} P^j N_q J_\Sigma d\Sigma_\xi, & \mathbb{F}_{(2)q}^j &= \int_{V_e} m^j N_q J \rho dV_\xi + \int_{\Sigma_2} \mu^j N_q J_\Sigma d\Sigma_\xi, \\ \mathbb{T}_{(1)q}^j &= \int_{V_e} \left[ A^{ijkl} a_{kl} \vartheta + A^{ijkl} \gamma_{kl}^0 - P_0^{ij} \right] N_{q,t} B_i^t J dV_\xi, \\ \mathbb{T}_{(2)q}^j &= \int_{V_e} \left[ (P_0^{in} - A^{inkl} a_{kl} \vartheta - A^{inkl} \gamma_{kl}^0) C_{in}^{\cdot j} N_q + \right. \\ &\quad \left. + \left( D^{ijkl} b_{kl} \vartheta - \mu_0^{ij} + D^{ijkl} \varkappa_{kl}^0 \right) N_{q,t} B_i^t \right] J dV_\xi. \end{aligned}$$

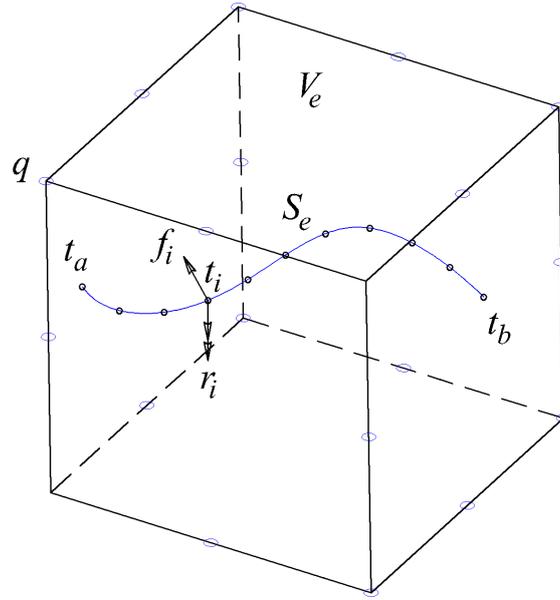


Рисунок 2: Модель спрямляемой нити  $S_e$ , ограниченной областью конечного элемента  $V_e$  к определению силы  $\mathbb{S}_{(1)q}^j$  и момента  $\mathbb{S}_{(2)q}^j$  в  $q$  узле конечного элемента

Как видно из системы для трёхмерной постановки задачи имеем  $6N$  алгебраических уравнений относительно  $6N$  неизвестных узловых макроперемещений  $\widehat{w}^p$  и микровращений  $\widehat{\psi}^p$ , после чего приближённое решение находится с помощью рядов по базисным функциям, где суммирование надо проводить от 1 до  $N$  для каждого поля соответственно.

Что касается модели натянутой нити, то система линейных алгебраических уравнений аналогична системам выписанным выше, за исключением блочных векторов сил и моментов, полученных дискретизацией линейных функционалов работы нити  $s(\widehat{w}, \widehat{\psi})$  по пространственным координатам, которые можно дополнить следующими обозначениями в области натуральных координат

$$\mathbb{S}_{(1)q}^j = \int_{S_e} f^j N_q J_s dS_\xi \approx \sum_{i=a}^b f_i^j N_q(\xi_i^k), \quad \mathbb{S}_{(2)q}^j = \int_{S_e} r^j N_q J_s dS_\xi \approx \sum_{i=a}^b r_i^j N_q(\xi_i^k),$$

$$a = t_0 < t_1 \dots < t_i \dots < t_n = b, \quad t_i \in V_e, \quad S_e \subset V_e,$$

где  $\mathbb{S}_{(1)q}^j, \mathbb{S}_{(2)q}^j$  —  $j$  компонента силы и момента, соответственно, в  $q$  узле конечного элемента. Иными словами на данный узел  $q$  конечного элемента приходится результирующая сила или момент от натянутой нити, ограниченной

областью этого конечного элемента см. (рисунок 2), равная сумме произведений всех сил  $\mathbf{f}_i$  или моментов  $\mathbf{r}_i$  на значение  $q$ -той функции формы  $N_q$  по длине данного участка нити. Здесь стоит упомянуть, что пространственные интегралы берутся численно методом Гаусса, а при нахождении работы блочных векторов сил и моментов решается задача обратного изопараметрического отображения, связывающая координаты декартовой области и области натуральных координат. Данный подход подробно описан в диссертационной работе.

Рассмотрим способ уточнения аппроксимации полиномами Лагранжа. Как известно данные полиномы пространственного 8-узлового конечного элемента приводят к эффекту запираания ("locking effect") из-за ложных мод с нулевой энергией ("spurious zero-energy modes"). Вследствие чего элемент имеет жесткость большую чем на самом деле (от действия внешних сил дискретный потенциал меньше потенциала гладкой функции). Один из способов преодоления данного недостатка в почти несжимаемых средах — использование техники редуцированного и селективного интегрирования. Особенности реализации этого подхода в рамках симметричной теории упругости можно найти в работах Хьюджа, Коина, Харуна, Зинкевича и Тейлора. Основная идея заключается в замене энергии объемных деформаций в точках интегрирования Гаусса, средней энергией по элементу. Чтобы выполнить обобщение данной идеи на микрополярную среду, запишем упругий потенциал учитывая шаровые тензоры деформаций и изгибов-кручений

$$\check{W}(\underline{\gamma}, \underline{\varkappa}) = \frac{1}{2} \left( \overset{\circ}{\check{\gamma}} \otimes \overset{\circ}{\mathbf{A}} \otimes \overset{\circ}{\check{\gamma}} + \overset{\circ}{\check{\varkappa}} \otimes \overset{\circ}{\mathbf{D}} \otimes \overset{\circ}{\check{\varkappa}} \right), \quad \overset{\circ}{\check{\gamma}} = \frac{1}{3} I_1(\underline{\gamma}) \mathbf{G}, \quad \overset{\circ}{\check{\varkappa}} = \frac{1}{3} I_1(\underline{\varkappa}) \mathbf{G}.$$

Это позволяет выписать полную жесткость шаровой части тензора деформаций и изгиба-кручения в натуральных координатах

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\mathbb{K}}_{(1)pq}^{lj} &= \frac{3\lambda + 2\mu}{3} \int_{V_e} N_{p,s} N_{q,t} B_k^s B_i^t g^{kl} g^{ij} J dV_\xi, \\ \overset{\circ}{\mathbb{K}}_{(4)pq}^{lj} &= \frac{3\delta + 2\gamma}{3} \int_{V_e} N_{p,s} N_{q,t} B_k^s B_i^t g^{kl} g^{ij} J dV_\xi, \end{aligned}$$

и воспользоваться правилом численного интегрирования Гаусса по одно и двух точечной схеме

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_{(\cdot)pq}^{lj} &\approx 8\overset{\circ}{K}_{(\cdot)pq}^{lj}(0, 0, 0) J(0, 0, 0) + \\ &+ \sum_{a=1}^2 \sum_{b=1}^2 \sum_{c=1}^2 \omega_a \omega_b \omega_c \left( K_{(\cdot)pq}^{lj}(\xi_a, \xi_b, \xi_c) - \overset{\circ}{K}_{(\cdot)pq}^{lj}(\xi_a, \xi_b, \xi_c) \right) J(\xi_a, \xi_b, \xi_c), \\ \omega_i &= 1, \quad \xi_i = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \end{aligned}$$

где  $\omega_i, \xi_i$  — квадратуры Гаусса–Лежандра для двух точечной схемы интегрирования. При выводе компонент тензорно-блочных матриц жёсткости из упругого потенциала в котором материальные тензоры  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}, \underline{\underline{\mathbf{D}}}$  сопряжены с шаровой частью тензора деформаций и изгибов-кручений был учтён тот факт, что первый инвариант от кососимметричного тензора есть ноль. Это и обуславливает отсутствие блоков  $K_{(2)pq}^{lj}, K_{(3)pq}^{lj}$ .

Рассмотрим модель кубика со стороной 10 мм, на верхнюю грань которого действует равномерное давление  $P = 120 \text{ Н/мм}^2$ , при этом нижняя грань имеет жесткое защемление, (см. рисунок 3). Примем изотропный материал с параметрами  $[\text{Н/мм}^2]$   $\lambda = 2.096\text{E}+003$ ,  $\mu = 1.033\text{E}+003$ . С целью сравнения схем интегрирования модель аппроксимирована по схеме 01x01x01 и 10x10x10 конечными элементами трилинейного и квадратичного (серендипова) типа. Для оценки корректности постановки задачи и задания краевых условий воспользуемся свойством расщепления системы уравнений при изотермических процессах, приняв материальные параметры изотропного материала  $\alpha = 0, \beta = 0$ . В этом случае к верхней грани можно приложить фиктивную поверхностную пару  $\mu = 120 \text{ Н/мм}$ , приняв фиктивные материальные параметры изотропного материала  $[\text{Н}]$   $\delta = 2.096\text{E}+003, \gamma = 1.033\text{E}+003$ . На свободной поверхности задан нулевой вектор напряжений поверхностных сил и пар. С целью сравнения схем интегрирования модель аппроксимирована по схеме 01x01x01 конечными элементами с полиномами трилинейного (полиномы без РСИ и полиномы с РСИ) и квадратичного типа. Референсная модель кубика аппроксимирована по схеме 10x10x10 серендиповыми функциями формы.

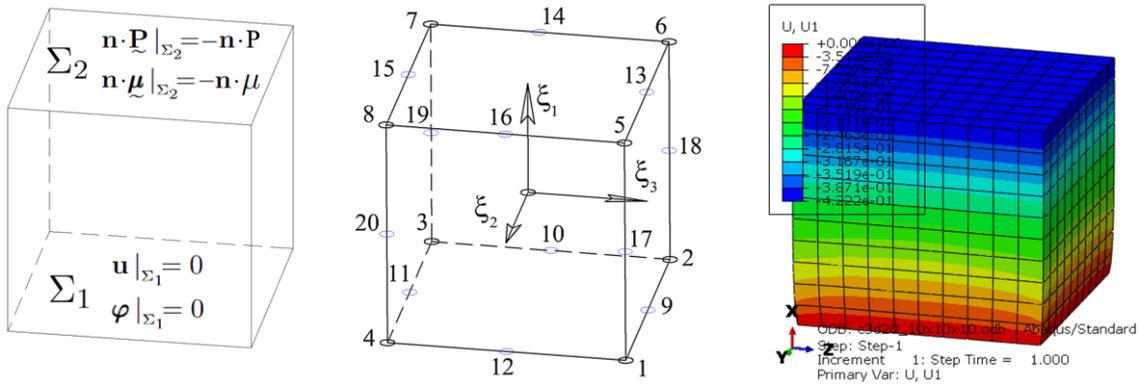


Рисунок 3: Слева на право – расчетная схема, нумерация узлов 8-ми и 20-ти узлового конечного элемента, поле перемещений деформированного кубика.

Стоит отметить, что численный эксперимент был проведен в собственной программе, а полученные результаты сравнивались с программой ABAQUS в рамках классической теории упругости.

Таблица 1: Сравнение перемещений(микровращений) верхней грани кубика для разных моделей и схем интегрирования.

пп.	Модель и схема интегрирования	$u(\varphi)$	Расхождение, %
1.	01x01x01 C3D8 CUDA C	-3.8086664E-001	9.8
2.	01x01x01 C3D8 CUDA C(SI), ABAQUS	-4.1725940E-001	1.2
3.	01x01x01 C3D20 CUDA C, ABAQUS	-4.1588050E-001	1.5
4.	10x10x10 C3D20 CUDA C, ABAQUS	-4.2224000E-001	0.0

Как видно из результатов эксперимента, во-первых, решения собственной программы идентичны ABAQUS. Во-вторых, применение к лагранжевым полиномам схемы редуцированного и селективного интегрирования позволяет существенно повысить точность аппроксимации.

Очевидно, что для материальных тензоров  $\underline{\underline{A}}$ ,  $\underline{\underline{D}}$  характерна некоторая несогласованность по масштабному параметру длины  $D^{ijkl} \sim l^2 A^{ijkl}$ . Для учета этой особенности в краевых задачах микрополярной теории упругости предлагается использовать аппроксимирующие полиномы более высокого порядка для поля перемещений, чем для поля микровращений. Следуя этой идеи, выпишем компоненты тензорно-блочных матриц жесткости и векторов сил для материала произвольной анизотропии при неизотермических процес-

сах полагая отсутствие начальных тензорных полей  $\boldsymbol{\gamma}_0, \boldsymbol{\varkappa}_0$

$$\mathbb{K}_{(1)pq}^{lj} = \int_{V_e} A^{ijkl} \overset{w}{N}_{p,s} \overset{w}{N}_{q,t} \overset{w}{B}_k^s \overset{w}{B}_i^t J dV_\xi, \quad \mathbb{K}_{(2)pq}^{lj} = \int_{V_e} A^{ijkm} C_{km}^{\cdot l} \overset{\psi}{N}_p \overset{w}{N}_{q,t} \overset{w}{B}_i^t J dV_\xi,$$

$$\mathbb{K}_{(3)pq}^{lj} = \int_{V_e} A^{inkl} \overset{w}{N}_{p,s} C_{in}^{\cdot j} \overset{\psi}{N}_q \overset{w}{B}_k^s J dV_\xi,$$

$$\mathbb{K}_{(4)pq}^{lj} = \int_{V_e} \left[ A^{inkm} \overset{\psi}{N}_p \overset{\psi}{N}_q C_{km}^{\cdot l} C_{in}^{\cdot j} + D^{ijkl} \overset{\psi}{N}_{p,s} \overset{\psi}{N}_{q,t} \overset{\psi}{B}_k^s \overset{\psi}{B}_i^t \right] J dV_\xi,$$

$$\mathbb{F}_{(1)q}^j = \int_{V_e} F^j \overset{w}{N}_q J \rho dV_\xi + \int_{\Sigma_2} S^j \overset{w}{N}_q J_\Sigma d\Sigma_\xi, \quad \mathbb{F}_{(2)q}^j = \int_{V_e} m^j \overset{\psi}{N}_q J \rho dV_\xi + \int_{\Sigma_2} R^j \overset{\psi}{N}_q J_\Sigma d\Sigma_\xi,$$

$$\mathbb{T}_{(1)q}^j = \int_{V_e} \left( P_0^{ij} - A^{ijkl} a_{kl} \vartheta \right) \overset{w}{N}_{q,t} \overset{w}{B}_i^t J dV_\xi,$$

$$\mathbb{T}_{(2)q}^j = \int_{V_e} \left[ \left( A^{inkl} a_{kl} \vartheta - P_0^{in} \right) C_{in}^{\cdot j} \overset{\psi}{N}_q + \left( \mu_0^{ij} - D^{ijkl} b_{kl} \vartheta \right) \overset{\psi}{N}_{q,t} \overset{\psi}{B}_i^t \right] J dV_\xi,$$

где  $\overset{w}{N}_p$  — полиномы, формирующие серендипов 20-ти узловой квадратичный конечный элемент для аппроксимации поля перемещений;  $\overset{\psi}{N}_p$  — полиномы трилинейного типа формирующие 8-ми узловой конечный элемент для аппроксимации поля микровращений.

Для иллюстрации подхода рассмотрена задача о кубе, в которой аппроксимация кинематических полей выполнялась по описанной выше схеме и серендиповыми функциями формы. Более подробно постановка задачи изложена в тексте диссертации. Как видно из таблицы 2, в отличие от конечного

Таблица 2: Сравнение скорости сходимости итерационного процесса CGM при аппроксимации конечными элементами типа C6D20 и C6D208

Тип КЭ	Итераций	Невязка $r$	Отношение $r_1/r_0$	Время, сек.
C6D20	8613	9.953374e-11	8.903740e-01	162
C6D208	4057	9.778749e-11	8.985241e-01	36

элемента C6D20 с серендиповыми функциями формы, применение C6D208 с полиномами смешанной степени для рассмотренной задачи увеличивает скорость сходимости более чем в 4 раза и уменьшает количество итераций более чем в 2 раза. Из рисунка 4 также видно, что графики перемещений симметричной теории упругости вдоль средней линии нижней грани кубика, найденные из численного эксперимента программой ABAQUS и собственной

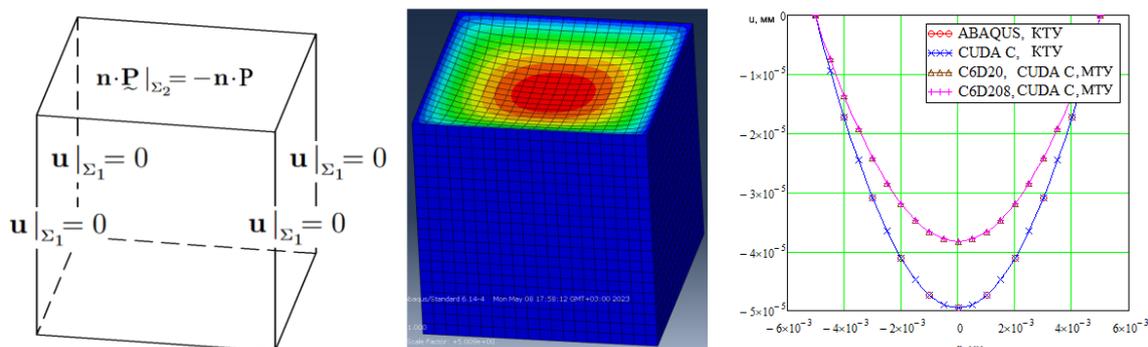


Рисунок 4: Слева на право – схема задания кинематических и статических граничных условий на грани куба; конечно–элементная деформированная модель куба, изополя вертикальных перемещений; графики вертикальных перемещений  $u$ , мм вдоль средней линии нижней грани кубика для классической и микрополярной среды

программой совпадают. Графики перемещений аппроксимированные конечными элементами типа C6D20, C6D208 также совпадают.

**Третья глава** посвящена численному решению некоторых краевых задач. Анализ и сравнению решений с результатами экспериментов и аналитическими решениями известных авторов.

Рассмотрим краевую задачу классической и микрополярной теорий упругости о кручении цилиндрического изотропного тела, под действием осевого крутящего момента (см. рисунок 5). Более подробно о постановке задачи и краевых условиях изложено в тексте диссертации.

Для оценки масштабного эффекта при кручении используется параметр относительной жёсткости (“relative stiffness”)

$$\Omega = \frac{T}{\theta_m} \cdot \frac{\theta}{T} = \frac{u_\theta}{u_{\theta_m}}.$$

Результаты численного и аналитического определения параметров НДС для задачи о кручении цилиндра из стеклопластика проиллюстрированы на графиках (см. рисунок 6). Сравнения параметра относительной жесткости найденные из численного и аналитического решения с данными эксперимента о чистом изгибе цилиндра из ретикулированного пенополиуретана проиллюстрированы графиком на рисунке 7. Относительная погрешность между численным и аналитическим решением параметров НДС оказалась несуще-

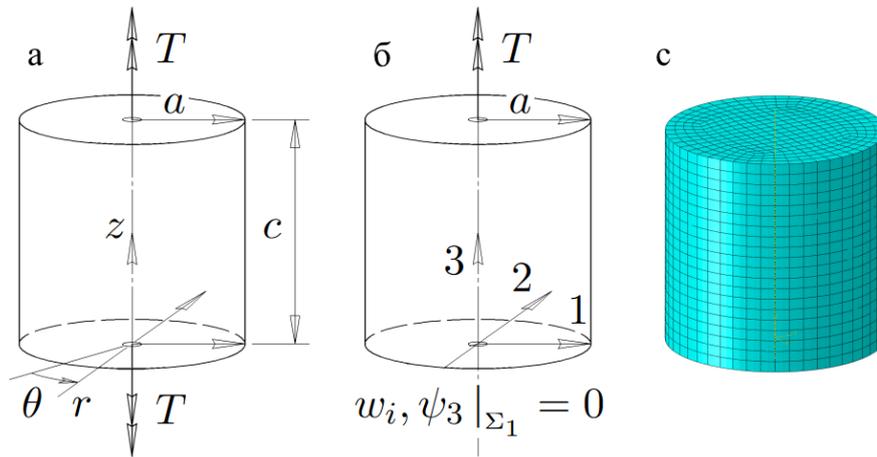


Рисунок 5: Расчётная схема цилиндрического тела к аналитическому решению 2 краевой задачи (а); к численному решению 3 краевой задачи (б); конечно-элементная схема (с)

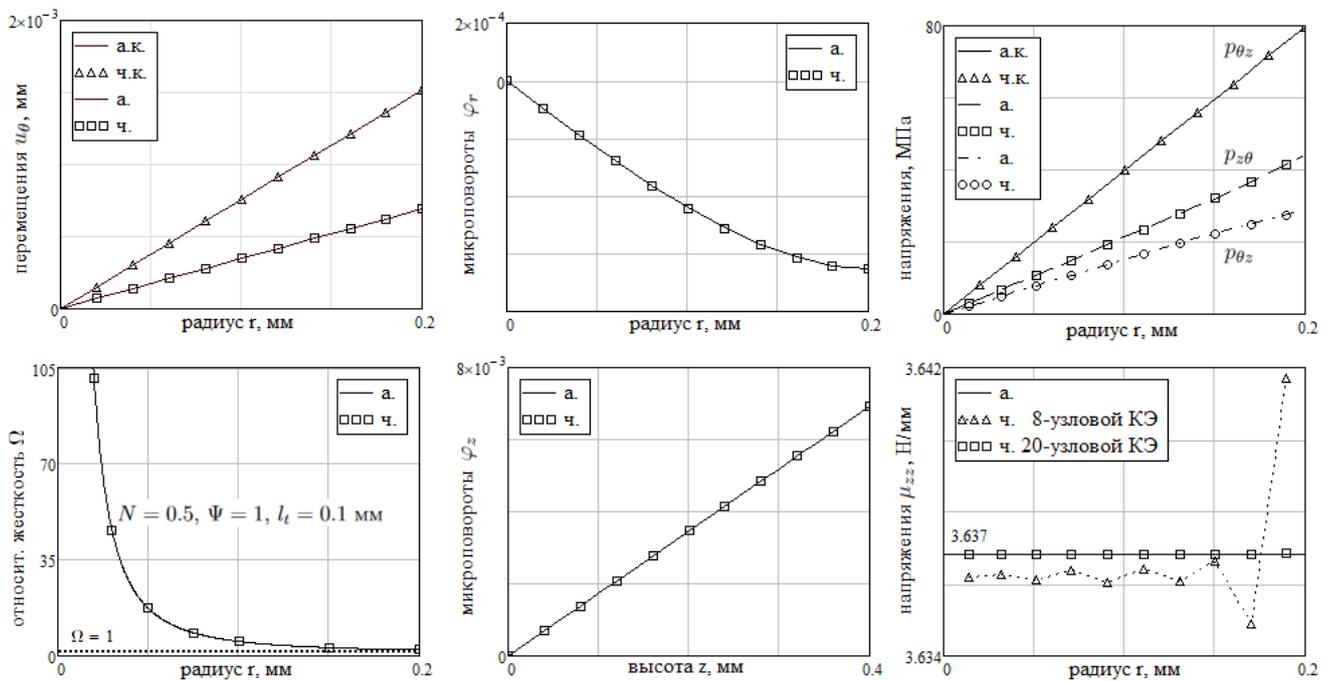


Рисунок 6: Зависимость параметров напряжённо-деформированного состояния от радиуса  $r$ , высоты  $z$  и размера модели  $a$ , где а. — обозначение легенды аналитических кривых; ч. — численное решение; к. — классическая теория упругости, иначе — микрополярная.

стенна (второй – пятый порядок точности). Из сравнения результатов можно сделать вывод, что математический аппарат реализован корректно; обобщённый метод редуцированного и селективного позволил на порядок улучшить точность решения.

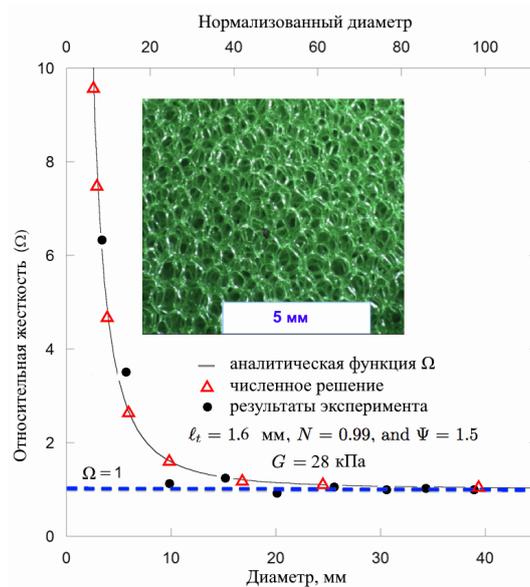


Рисунок 7: Масштабный эффект при кручении образца из пенополиуретана с размером ячейки 0.4 мм.  $\Omega$  — относительная жёсткость, определяемая аналитически;  $\Delta$  — численное решение;  $\bullet$  — экспериментальные данные

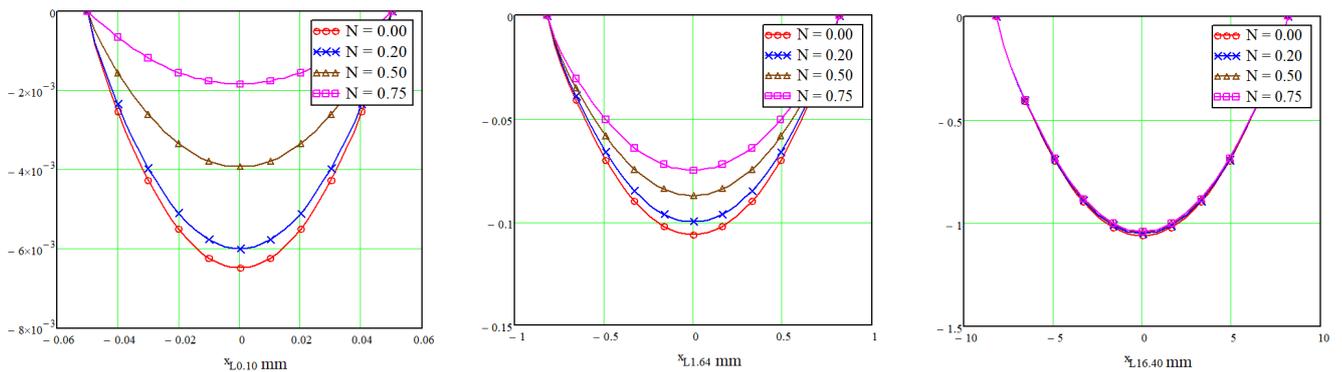


Рисунок 8: Слева направо – графики перемещений вдоль средней линии нижней грани куба со стороной ребра 0.10, 1.64 и 16.4 мм при разных вариациях числа  $N$  («coupling number»)

Аналогичные результаты демонстрирующие масштабный эффект были получены из численного решения задачи о концентрации напряжений вблизи круглого отверстия призматического тела, задачи о кубе, задачи о цилиндрическом изгибе пластинки постоянной толщины и задачи о чистом изгибе цилиндрического тела. Последняя задача достаточно хорошо коррелируется с результатами эксперимента для ретикулированного пенополиуретана размером ячейки 0.4 мм. На рисунке 8 дана иллюстрация масштабного эффекта

задачи о кубе. Здесь видно, что если масштаб модели имеет порядок длинны микроструктуры материала, то жесткость среды существенна. Более подробно о постановке и анализе результатов перечисленных задач изложено в диссертационной работе.

Для иллюстрации и верификации построения численного решения вариационной модели натянутой нити, описанной в предыдущих главах, рассмотрим задачу о толстостенном цилиндре конечных размеров с преднапряженными нитями в рамках классической теории упругости без учёта силы трения. Рассмотрено две модели. Первая модель на внешней грани имеет равномерное давление. Вторая модель вместо внешнего давления имеет ряд нитей, с усилиями эквивалентными внешнему давлению. Подробно постановка задачи представлена в тексте диссертации.

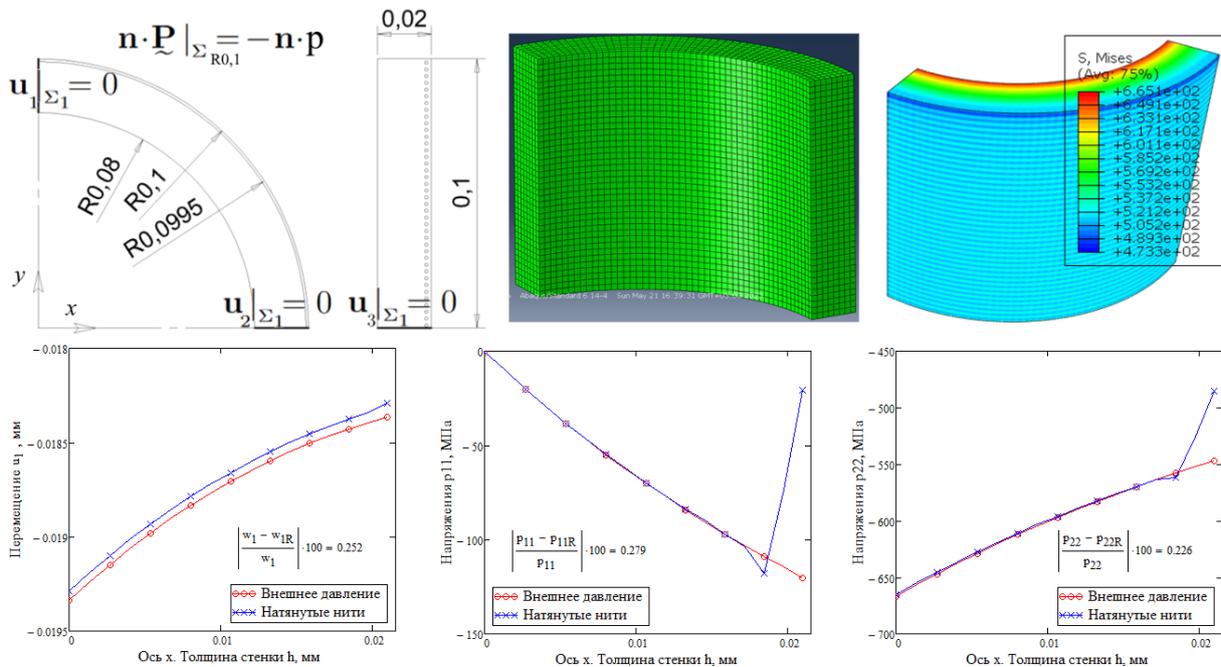


Рисунок 9: Слева направо и сверху вниз – расчетная и конечно-элементная схема, изополя напряжений по Мизису  $\text{H}/\text{мм}^2$  от действия натянутых нитей; НДС от действия натянутых нитей и внешнего давления в сечении  $x = 0$ : перемещения  $u_1$  мм, напряжения  $p_{11}$ , напряжения  $p_{22}$

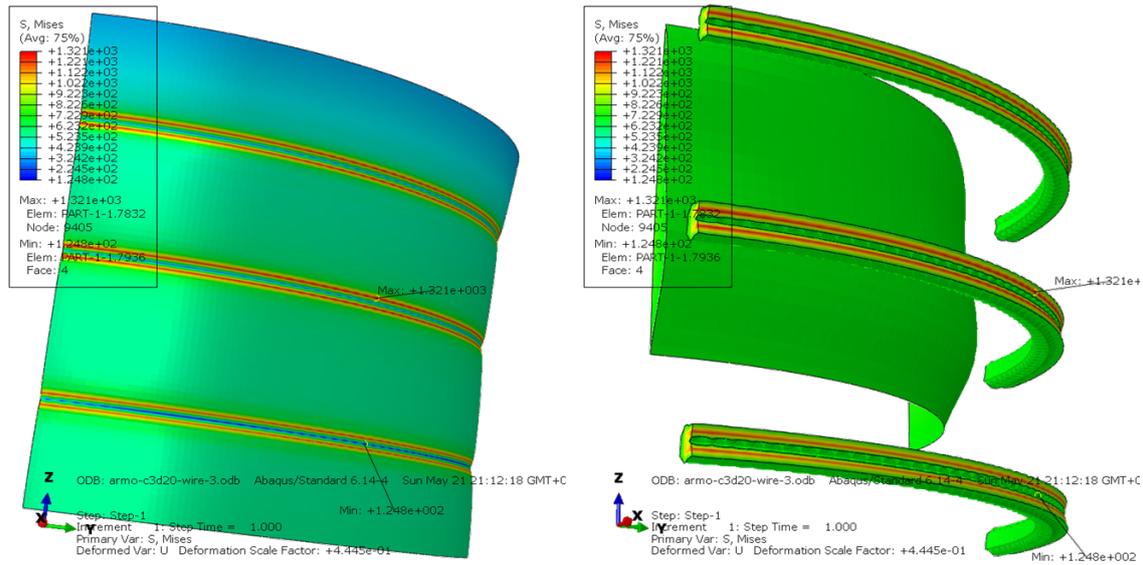


Рисунок 10: Изополя и изоповерхности напряжений по Мизису, МПа от действия трёх натянутых нитей

Выполняя анализ и сравнение результатов от действия поверхностной силы и натянутых нитей, более подробно изложенных в диссертационной работе, можно сделать вывод о корректно реализованной механической модели.

### Основные результаты и выводы:

1. Предложен способ приведения краевой задачи микрополярной теории упругости к системе линейных алгебраических уравнений в сокращенной тензорной форме и выписаны компоненты тензорных блоков матриц жесткости.
2. Для оценки корректности постановки задачи и краевых условий для микрополярной теории упругости выполняется расщепление уравнений статики относительно двух независимых кинематических величин.
3. Из задачи о чистом и цилиндрическом изгибе микрополярного материала установлено, что наряду с напряжениями в сечении возникают постоянные моментные напряжения. Аналогичный эффект наблюдается и для задачи о кручении изотропного микрополярного материала.
4. Построен упругий потенциал, который учитывает тепловые изгибы- кручения наряду с тепловыми деформациями и начальными тензорными полями. При этом тепловая структура может отличаться от механической.

5. Для уточнения аппроксимации кинематических полей полиномами Лагранжа применяется обобщение на микрополярную среду метода редуцированного и селективного интегрирования, в том числе для почти несжимаемого материала. Также предложен подход, когда аппроксимация кинематических полей выполняется полиномами смешанной степени.
6. Дана вариационная формулировка модели натянутой нити для микрополярной среды.
7. Представлено решение задачи о призматическом теле, ослабленном круговым отверстием при одноосном растяжении; о кубе при различных вариациях масштабного параметра и моментного числа; решение задачи о толстостенном цилиндре конечных размеров с преднапряженными нитями.

### Список публикаций

Основные результаты диссертации изложены в 11 печатных работах; первые 5 из них в индексируемых базах данных Scopus, RSCI Web Of Science

1. *Romanov A. V.* Application of Reduced and Selective Integration Techniques in the Micropolar Theory of Elasticity. – Moscow Univ. Mech. Bull. 79, pp. 65–69 (2024). <https://doi.org/10.3103/S002713302470002X>
2. *Romanov A. V.* The Polynomials of Mixed Degree in Problems of Micropolar Theory of Elasticity. – Moscow Univ. Mech. Bull. 79, pp. 190–196 (2024). <https://doi.org/10.3103/S0027133024700171>
3. *Romanov A. V.* A variational principle of Lagrange of the micropolar theory of elasticity in the case of non-isothermal process. – Moscow Univ. Mech. Bull. 78, pp. 114–118 (2023). <https://doi.org/10.3103/S0027133023040052>
4. *Romanov A. V.* A variational principle of Lagrange of the micropolar theory of elasticity in the case of orthotropic medium. – Moscow Univ. Mech. Bull. 78, pp. 23–28 (2023). <https://doi.org/10.3103/S0027133023010041>
5. *Romanov A. V.* A variational principle of Lagrange of the micropolar theory of elasticity in the case of transversely isotropic medium. – Moscow Univ. Mech. Bull. 77, pp. 93–98 (2022). <https://doi.org/10.3103/S0027133022040045>

6. *Романов А.В.* Численное моделирование защитных оболочек атомных электростанций. Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений, № 1, с. 49–51
7. *Романов А.В.* Численное моделирование системы преднапряжения защитных оболочек АЭС с использованием функций форм «неправильного» гексаэдра. Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений Романов А.В. в журнале Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений, № 6, с. 37–47
8. *Никабадзе М.У., Романов А.В.* О некоторых вопросах микрополярной теории призматических упругих тел. Современные проблемы математики и механики. Материалы международной конференции, посвященной 80-летию академика В. А. Садовниченко, М.: Издательство ООО «МАКС Пресс» 2019, том 2, с. 744–746.
9. *Романов А.В.* Масштабные эффекты микрополярного изотропного тела с центром симметрии. Математика в созвездии наук. Материалы международной конференции, посвященной 85-летию академика В. А. Садовниченко, М.: Издательство ООО «МАКС Пресс» 2024.
10. *Романов А.В.* Приведение краевой задачи к тензорно-блочной форме СЛАУ для оценки масштабных эффектов микрополярной теории упругости. Материалы XXX Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» имени А.Г. Горшкова. Сборник тезисов, том 2, с. 166–170. –М.: Торус пресс, 2024. – 176 с.
11. *Романов А.В.* Уточнение аппроксимации лагранжевыми полиномами к оценке масштабных эффектов микрополярной среды // 51 школа-конференция АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ. Сборник тезисов докладов 2024, с. 200