

УДК 629.7.025: 539.3

Об определении реакций в узлах соединения составных несущих и управляющих поверхностей малого удлинения

Тлеулинов М.К.*, Джафарзаде А.**

Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н.

Туполева – КАИ, ул. К. Маркса, 10, Казань, 420111, Россия

**e-mail: mktleulinov@kai.ru*

***e-mail: amirjafarzade@mail.ru*

Аннотация

Рассматривается составная конструкция, состоящая из несущей и управляющей поверхностей летательного аппарата, соединенных статически неопределимым образом. Исследуется вопрос о том, как соотносятся между собой реакции в узлах навески рулей, полученные при моделировании по стержневой и пластинной аналогии, при малых удлинениях. Оцениваются лобовые реакции. Приведены результаты численных исследований.

Ключевые слова: несущая поверхность, управляющая поверхность, составная конструкция, реакции.

Проблема создания методик расчета составных несущих и управляющих поверхностей летательных аппаратов с учетом их деформирования является актуальной. Различные аспекты этой проблемы рассматриваются, в частности, в работах [1-24]. Во многих случаях управляющая поверхность прикрепляется к

несущей в трех и более точках, то есть статически неопределимым образом (рис. 1). У таких конструкций при отклонении рулевой поверхности величина реакций определяется не столько внешней нагрузкой, сколько условиями совместности перемещений несущей и, навешенной на ней по статически неопределимой схеме, управляющей поверхностей. Приложение к такой конструкции нормальной нагрузки t_y при отсутствии отклонения руля вызывает появление только нормальных реакций R_y . Отклонение руля приводит к изменению реакций R_y и появлению лобовых реакций R_x (рис. 2), которые могут иметь значения, в несколько раз превышающие нормальные реакции R_y . Это вызвано тем, что несущая поверхность (НП) навязывает свои перемещения управляющей (УП), сопротивление же последней нормальным перемещениям возрастает при отклонении, так как рулевая поверхность загружается усилиями в своей плоскости, где имеет максимальную жесткость на изгиб.

Эти явления были впервые исследованы профессором Казанского авиационного института В.А. Павловым и его учениками [18-21]. Была разработана методика расчета составных несущих и управляющих поверхностей с учетом отклонения рулей на основе стержневой модели, проведены расчеты реальных конструкций.

Поскольку величина реакций зависит от перемещений звеньев, то имеет значение, как моделируется конструкция, какая расчетная схема используется. Как правило, несущие и управляющие поверхности представляются стержнями и пластинами. В работе [22] было показано, что с ростом удлинения конструкции

разница в реакциях, полученных по стержневой и пластинной моделям, уменьшается. При средних и больших удлинениях она близка к нулю. В данной статье исследуется вопрос о том, как соотносятся между собой реакции в узлах навески рулей, полученные при моделировании по стержневой и пластинной аналогии, при малых удлинениях.

Рассмотрим составную конструкцию, состоящую из несущей и прикрепленной к ней более чем на двух шарнирах управляющей поверхностью (рис. 1). Представим их стержнями, сочлененными в шарнирах навески. Для определения реакций воспользуемся соотношениями, приведенными в работе [22]. Введем общие декартовы системы координат $x^0y^0z^0$, $x^1y^1z^1$, оси z^0 и z^1 которых связаны с линиями центров жесткости недеформированных несущей поверхности (НП) и управляющей поверхности (УП), а ось z – с недеформированной линией шарниров, а также местные, связанные с конкретным сечением и перемещающиеся вместе с ним, системы координат $\xi^0\eta^0\zeta^0$ и $\xi^1\eta^1\zeta^1$ (рис.3). В недеформированном состоянии конструкции системы $x^s y^s z^s$ и $\xi^s \eta^s \zeta^s$ совпадают. Здесь и далее верхний индекс $s = 0$ для НП и $s = 1$ для УП.

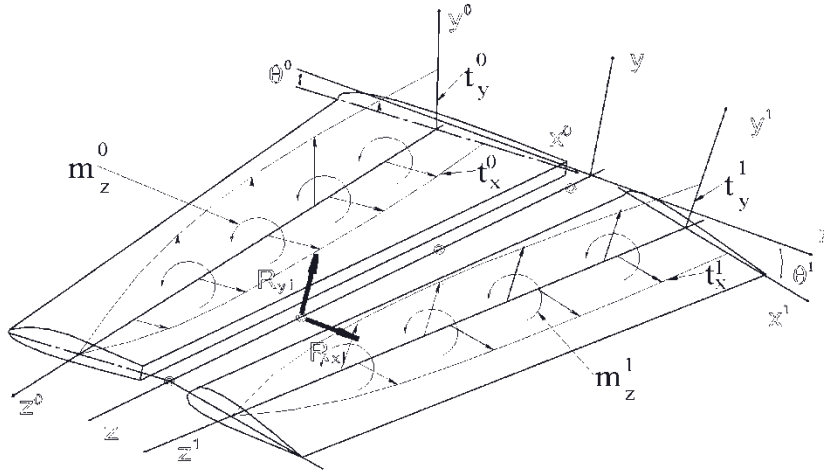


Рис. 1. Составная конструкция, состоящая из несущей и управляющей поверхностей.

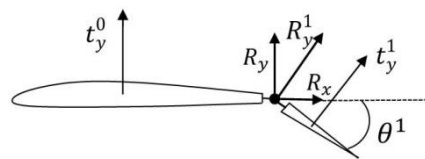


Рис.2. Реакции в узле навески управляющей поверхности при отклонении на угол θ^1 .

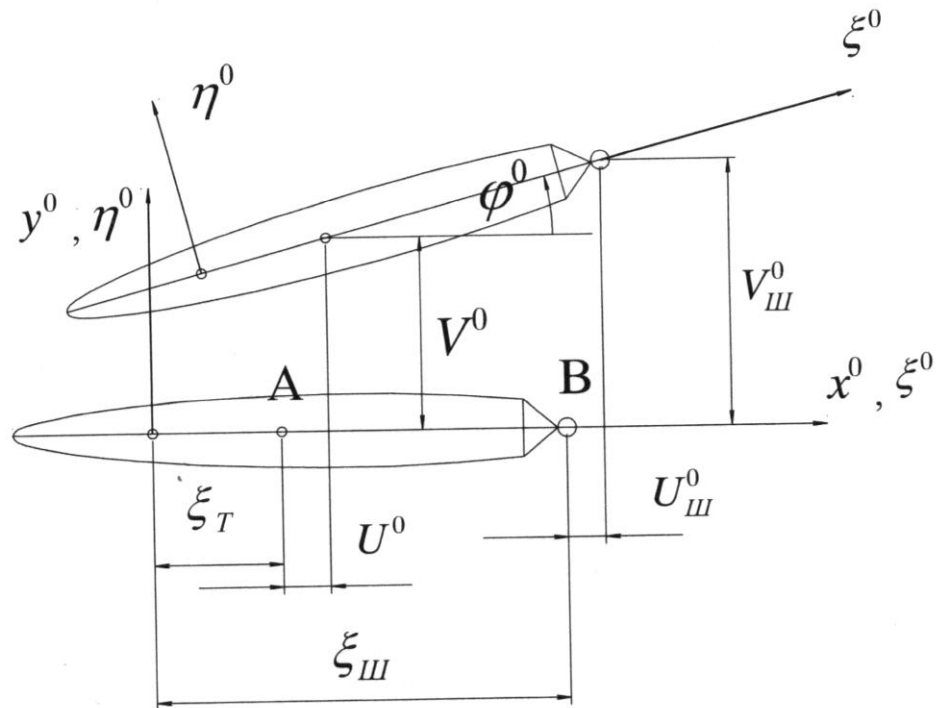


Рис. 3. Перемещения звена составной конструкции.

Обозначим R_{xk} и R_{yk} соответственно составляющие реакции в k -м шарнире по осям x и y , θ^0 – угол установки НП, θ^1 – угол отклонения УП. Будем считать, что реакции НП в k -м узле навески $R_{xk}^0 = R_{xk}$, $R_{yk}^0 = R_{yk}$, тогда реакции руля будут $R_{xk}^1 = -R_{xk}$, $R_{yk}^1 = -R_{yk}$.

Необходимо определить реакции R_{xk} и R_{yk} .

Поставленную задачу будем решать, используя условия совместности перемещений в k -м шарнире [18]. Для этого приравняем проекции перемещения шарниров каждого звена на оси x и y общей системы координат x, y :

$$\Pi^0 \begin{Bmatrix} U_{шк}^0 \\ V_{шк}^0 \end{Bmatrix} = \Pi^1 \begin{Bmatrix} U_{шк}^1 \\ V_{шк}^1 \end{Bmatrix}. \quad (1)$$

Здесь Π^s матрица перехода от $x^s y^s z^s$ к $x y z$

$$\Pi^s = \begin{bmatrix} \cos \theta^s & -\sin \theta^s \\ \sin \theta^s & \cos \theta^s \end{bmatrix}, \quad (2)$$

а $U_{шк}^s$ и $V_{шк}^s$ проекции перемещения k -го шарнира (точка B на рис.2) на оси x^s и y^s , которые определяются так:

$$\begin{aligned} U_{шк}^s &= U_k^s \\ V_{шк}^s &= V_k^s + \varphi_k (\xi_{шк}^s - \xi_{тк}^s), \end{aligned} \quad (3)$$

где U_k^s, V_k^s – проекции перемещения центра тяжести НП (УП) на оси x^s и y^s соответственно; φ^s – угол закручивания несущей поверхности или руля, $\xi_{тк}^s$ и $\xi_{шк}^s$ – расстояние в рассматриваемом сечении $z_k^s = \text{const}$ от центра тяжести до центра жесткости и от центра тяжести до шарнира (рис. 2).

Подставив уравнения (2) и (3) в (1), запишем в развернутом виде условия совместности перемещений в каждом k -м шарнире вдоль осей x и y :

$$\begin{aligned} U_k^0 \cos \theta^0 - V_k^0 \sin \theta^0 - \varphi_k^0 (\xi_{шк}^0 - \xi_{тк}^0) \sin \theta^0 &= \\ = U_k^1 \cos \theta^1 - V_k^1 \sin \theta^1 - \varphi_k^1 (\xi_{шк}^1 - \xi_{тк}^1) \sin \theta^1; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} U_k^0 \sin \theta^0 + V_k^0 \cos \theta^0 + \varphi_k^0 (\xi_{шк}^0 - \xi_{тк}^0) \cos \theta^0 &= \\ = U_k^1 \sin \theta^1 + V_k^1 \cos \theta^1 + \varphi_k^1 (\xi_{шк}^1 - \xi_{тк}^1) \cos \theta^1. \end{aligned}$$

Для определения входящих в (4) $U_k^s, V_k^s, \varphi_k^1$ воспользуемся дифференциальными уравнениями изогнутой оси стержня:

$$U''^s = \frac{M_y^s}{EJ_y^s}; \quad V''^s = \frac{M_x^s}{EJ_x^s}; \quad \varphi' = \frac{M_z^s}{EJ_z^s}. \quad (5)$$

Найдем моменты M_x^s, M_y^s, M_z^s , входящие в (5):

$$\begin{aligned} M_{x_i}^0 &= - \int_{z_i^0}^{l^0} \int_{z_i^0}^{l^0} t_y^0 dz^0 dz^0 + \sum_{k=1}^n \delta_k (R_{xk} \sin \theta_k^0 - R_{yk} \cos \theta_k^0) (z_k^0 - z_i^0); \\ M_{y_i}^0 &= \int_{z_i^0}^{l^0} \int_{z_i^0}^{l^0} t_x^0 dz^0 dz^0 + \sum_{k=1}^n \delta_k (R_{xk} \cos \theta_k^0 + R_{yk} \sin \theta_k^0) (z_k^0 - z_i^0); \\ M_{z_i}^0 &= \int_{z_i^0}^{l^0} m_z^0 dz^0 - \sum_{k=1}^n \delta_k (R_{xk} \sin \theta_k^0 - R_{yk} \cos \theta_k^0) \xi_{\phi k}^0 dz^0; \\ M_{x_i}^1 &= - \int_{z_i^1}^{l^1} \int_{z_i^1}^{l^1} t_y^1 dz^1 dz^1 - \sum_{k=1}^n \delta_k (R_{xk} \sin \theta_k^1 - R_{yk} \cos \theta_k^1) (z_k^1 - z_i^1); \\ M_{z_i}^1 &= \int_{z_i^1}^{l^1} m_z^1 dz^1 + \sum_{k=1}^n \delta_k (R_{xk} \sin \theta_k^1 + R_{yk} \cos \theta_k^1) \xi_{\phi k}^1. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $\delta_k = \begin{cases} 0 & \text{при } z_k < z_i \\ 1 & \text{при } z_k \geq z_i \end{cases}$, t_x^s, t_y^s - проекции погонных аэродинамических нагрузок на

соответствующие оси; m_z^s - погонный крутящий момент.

Выразим перемещения в k -м шарнире через их производные по z^s :

$$U_k^s = \int_0^{z_k} \int_0^{z_k} U''^s dz^s dz^s + C_1^s z_k^s + C_2^s;$$

$$V_k^s = \int_0^{z_k} \int_0^{z_k} V''^s dz^s dz^s + C_3^s z_k^s + C_4^s; \quad (7)$$

$$\Phi_k^s = \int_0^{z_k} \Phi'^s dz^s + C_5^s.$$

Подставим (5) в (7)

$$U_k^s = \int_0^{z_k} \int_0^{z_k} \frac{M_\xi^s}{EJ_\xi^s} dz^s dz^s + C_1^s z_k^s + C_2^s;$$

$$V_k^s = \int_0^{z_k} \int_0^{z_k} \frac{M_\xi^s}{EJ_\xi^s} dz^s dz^s + C_3^s z_k^s + C_4^s; \quad (8)$$

$$\Phi_k^s = \int_0^{z_k} \frac{M_\xi^s}{EJ_\xi^s} dz^s + C_5^s.$$

Константы интегрирования C_1^s, \dots, C_5^s можно найти из краевых условий.

Считая, что несущая поверхность жестко заделана в корневом сечении, т.е.

$U'^0 = U^0 = V'^0 = V^0 = \Phi^0 = 0$, из кинематических краевых условий получаем

$C_1^0 = C_2^0 = C_3^0 = C_4^0 = C_5^0 = 0$. Полагая, что качалка управления находится в корневом

сечении руля $z^1=0$, приходим к $\Phi_{z^1=0}^1 = 0$, следовательно $C_5^1 = 0$. Для определения

оставшихся четырех неизвестных постоянных интегрирования C_1^1, \dots, C_4^1

дополнительно необходимы четыре уравнения. Воспользуемся статическими

краевыми условиями в корневом сечении руля. При $z^1 = 0$

$$M_{x_{z^1=0}} = 0; \quad M_{y_{z^1=0}} = 0; \quad Q_{x_{z^1=0}} = 0; \quad Q_{y_{z^1=0}} = 0. \quad (9)$$

Искомые реакции R_{xk} и R_{yk} входят в (6). Подставив (6) в (8), полученные

выражения в условия совместности перемещений (4) и добавив (9), приходим к системе из $2n_{\text{ш}} + 4$ уравнений, для определения $2n_{\text{ш}}$ реакций R_{xk} и R_{yk} и 4 постоянных интегрирования C_1^1, \dots, C_4^1 ($n_{\text{ш}}$ - количество узлов навески).

Представим ту же конструкцию в виде двух пластин. Запишем полную энергию системы

$$\mathcal{E} = \int_v \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{u}^T \mathbf{P} \right) dv, \quad (10)$$

где $\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_{ij}\}$ - деформации, $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_{ij}\}$ - напряжения, $\mathbf{u} = \{u_i\}$ - перемещения точек тела, $\mathbf{P} = \{P_i\}$ - внешние силы, $i, j = 1, 2, 3$; v - объем тела.

При конечно-элементной аппроксимации выражение (10) можно записать в виде

$$\mathcal{E} = \Pi,$$

$$\text{где } \Pi = \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} - \mathbf{U}^T \mathbf{R},$$

\mathbf{U} - вектор узловых перемещений, \mathbf{K} - матрица жесткости, \mathbf{R} - вектор узловых нагрузок.

Для моделирования связей воспользуемся методом множителей Лагранжа [25-27], рассматривая условия совместности перемещений в узлах соединения звеньев как наложенные на систему ограничения

$$C(\mathbf{U}) = 0. \quad (11)$$

Построим расширенный функционал полной энергии системы Π^P , добавив к исходному функционалу Π ограничения $C(U)$, умноженные на некоторую константу λ (множитель Лагранжа):

$$\Pi^P = \Pi + \lambda C(U).$$

Определим необходимые условия экстремума функционала Π при ограничениях $C(U) = 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi^P}{\partial U} &= \frac{\partial \Pi}{\partial U} + \lambda \frac{\partial C}{\partial U} = 0; \\ \frac{\partial \Pi^P}{\partial \lambda} &= C = 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Запишем выражения для q связей системы с n степенями свободы в виде

$$\mathbf{G}U = \mathbf{s},$$

где \mathbf{G} – матрица размерностью $q \times n$ коэффициентов в уравнениях задающих ограничения, а \mathbf{s} – вектор размерностью q , компоненты которого заданные константы. Уравнение (2) теперь примет вид

$$C(U) = \mathbf{G}U - \mathbf{s} = 0. \tag{13}$$

Рассмотрим построение матрицы \mathbf{G} на конкретном примере. Допустим, что на систему наложено только одно ограничение - перемещение в точке i должно быть равно перемещению в точке j , т.е. $u_i = u_j$. Тогда уравнение (13) запишется в виде $u_i - u_j = 0$, матрица \mathbf{G} будет иметь одну строку, в которой $G(1,i) = 1$; $G(1,j) = -1$, а остальные элементы и вектор \mathbf{s} равны 0:

$$\mathbf{G} = [0 \dots \overset{i}{1} \dots \overset{j}{-1} \dots 0]; \quad \mathbf{s} = [0].$$

Введя обозначения $\lambda = \{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n\}$,

где λ_i - множители Лагранжа, запишем выражение для расширенного функционала

Π^p системы

$$\Pi^p = \frac{1}{2} U^T K U - U^T R + \lambda^T G U - \lambda^T s \quad (14)$$

Подставив (13) и (14) в (12), получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} K U + G^T \lambda &= R; \\ G U &= s, \end{aligned}$$

которую можно представить в виде

$$\begin{bmatrix} K & G^T \\ G & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R \\ s \end{Bmatrix}. \quad (15)$$

Нижняя часть матричного соотношения (15) представляет собой систему ограничений. Она может быть решена отдельно. Из верхней части (15) получаем

$$U = K^{-1} R - K^{-1} G^T \lambda,$$

что после подстановки в нижнюю часть (15) позволяет найти

$$\lambda = (G K^{-1} G^T)^{-1} (G K^{-1} R - s).$$

В данном случае по своему физическому смыслу множители Лагранжа являются реакциями в узлах соединения составных частей.

По приведенной методике были проведены расчеты составной конструкции, состоящей из несущей и управляющей поверхностей., соединенных между собой статически неопределимым образом (рис. 4). Исследовалась конструкция, состоящая из пластинок постоянного по размаху

прямоугольного сечения с различными удлинениями $\lambda = \frac{l}{b}$ и относительными толщинами $\bar{h} = \frac{h}{b}$, где l – длина (размах) НП, b – ширина (хорда) НП, h – толщина НП. Несущая поверхность – консольно закрепленная пластинка, управляющая поверхность прикреплена к несущей в трех точках. Модуль упругости материала $E = 7,2 \cdot 10^{10}$ Па, коэффициент Пуассона $\mu = 0,3$. Нагрузка НП t_y^0 , УП – t_y^1 в соотношении $t_y^1 = 0,25 t_y^0$. Величина нагрузки подбиралась из условия величины относительного вертикального прогиба $\bar{U}_y^0 = \frac{U_y^0}{l} = 0,05$ при $\theta^1 = 0$, то есть 5%-го от размаха консоли прогиба на конце НП при неотклоненной УП.

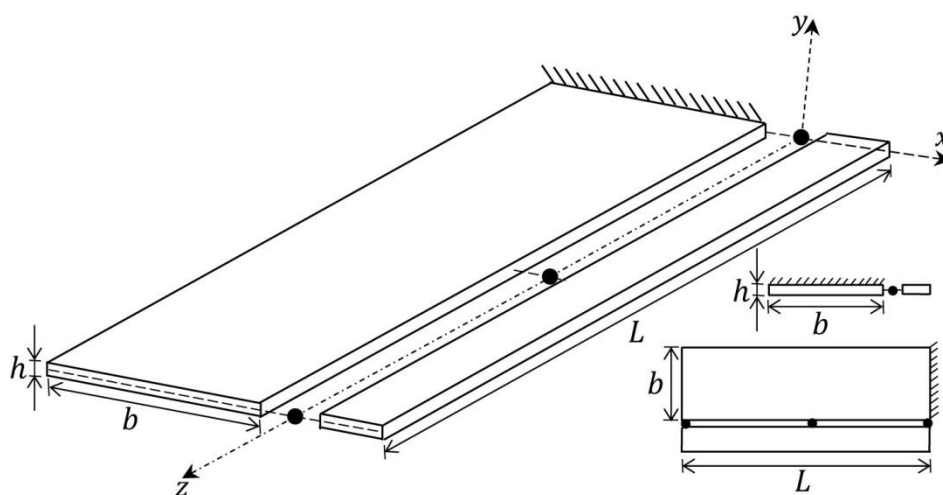


Рис. 4. Модельная составная конструкция

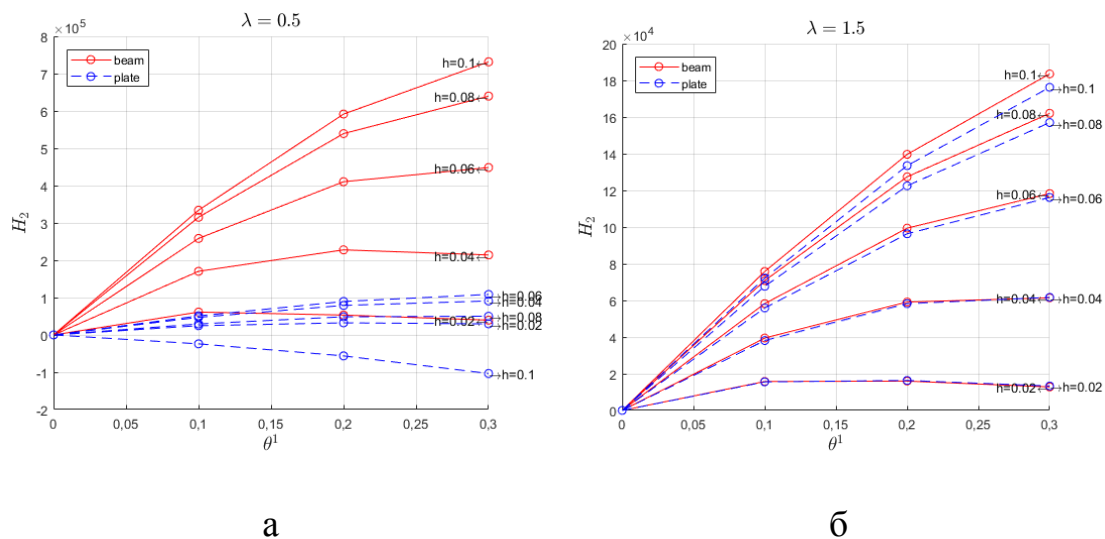
На рис. 5 приведены графики $H_2 = R_{x2}(\theta^1)$ – зависимости лобовых реакций в среднем шарнире навески руля от угла отклонения управляющей поверхности θ^1 при фиксированном удлинении λ , на рис. 5а $\lambda = 0,5$, на рис. 5б $\lambda = 1,5$. Можно сделать вывод о том, что при увеличении удлинения и уменьшении относительной толщины разница в реакциях между пластиной и стержнем сокращается.

Величину расхождения между стержневым и пластинным значениями лобовых реакций $\Delta H_2 = \Delta R_{x2} = (R_{x2}^b - R_{x2}^p) / R_{x2}^b$ в зависимости от λ , при фиксированном угле отклонения $\theta^1 = 0,2$ рад, можно оценить по графикам на рис. 6. На рис. 7 показаны зависимости $\Delta H_2 = \Delta R_{x2}$ от относительной толщины \bar{h} .

Выводы

- при малых удлинениях расхождение между стержневым и пластинным значениями лобовых реакций ΔR_{x2} существенно зависит от удлинения λ и от относительной толщины \bar{h} , при этом, чем меньше удлинение, тем больше зависимость от относительной толщины;
- при увеличении удлинения λ разница ΔR_{x2} снижается и при $\lambda \geq 2$ близка к 0;
- при увеличении относительной толщины \bar{h} разница ΔR_{x2} увеличивается.

Таким образом, при определении величины реакций в узлах навески управляющей поверхности при удлинении $\lambda \geq 2$ нет необходимости использовать пластинную модель. При малых удлинениях такая необходимость возникает, при этом, чем меньше удлинение, тем больше потребность в пластинной аналогии.



а

б

Рис. 5. $H_2 = R_{x_2}(\theta^1)$ – зависимость лобовых реакций в среднем шарнире навески руля от угла отклонения управляющей поверхности θ^1 при фиксированном удлинении λ ; а) $\lambda = 0,5$; б) $\lambda = 1,5$.

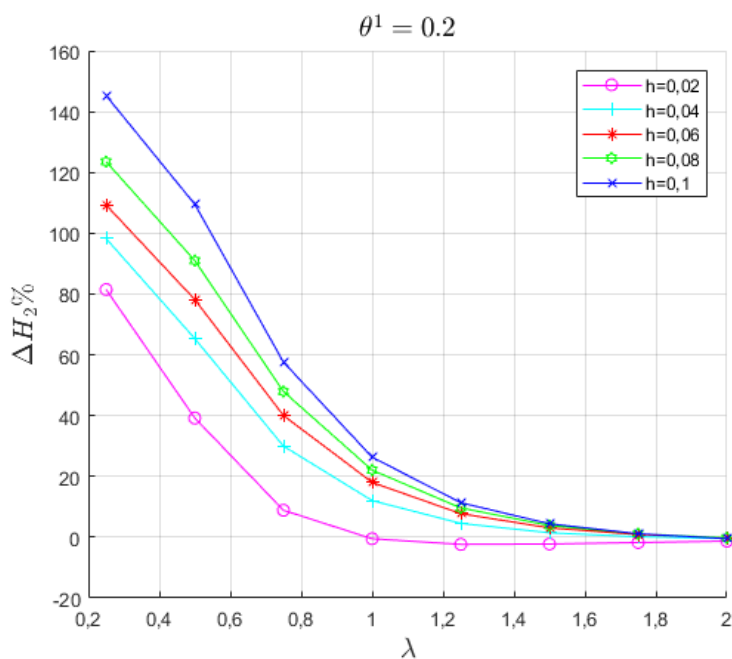


Рис. 6. Расхождение между стержневым и пластинным значениями лобовых реакций

$$\Delta H_2 = \Delta R_{x_2} = (R_{x_2}^b - R_{x_2}^p) / R_{x_2}^b \text{ в зависимости от } \lambda.$$

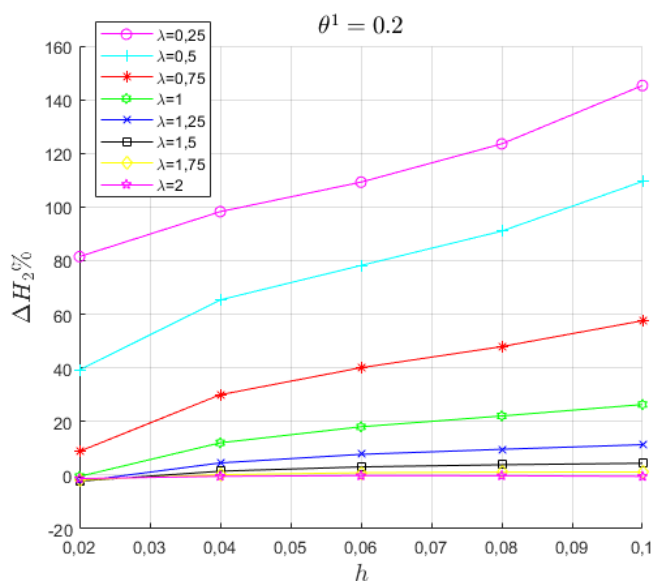


Рис. 7. Расхождение между стержневым и пластинным значениями лобовых реакций

$\Delta H_2 = \Delta R_{x_2} = (R_{x_2}^b - R_{x_2}^p) / R_{x_2}^b$ в зависимости от \bar{h} .

Библиографический список

1. Na Y., Shin S. Equivalent plate analysis of a composite wing with a Control Surface // Journal of Aircraft, 2013, vol. 50, no. 3, pp. 853 - 862.
2. Kim D., Bae J., Lee I., Han J. Dynamic model establishment of a deployable missile control fin with nonlinear hinge // Journal of Spacecraft and Rockets, 2005, vol. 42, no. 1, pp. 66 - 77.
3. Stanford B.K. Optimization of an aeroservoelastic wing with distributed multiple control surfaces // Journal of Aircraft, 2016, vol. 53, vol. 4, pp. 1131 - 1144.

4. Singh K.V., McDonough L.A., Kolonay R., Cooper J.E. Receptance based active aeroelastic control using multiple control surfaces // Journal of Aircraft, 2014, vol. 51, no. 1, pp. 335 - 342.
5. Grossi R.O., Raffo J. Natural vibrations of anisotropic plates with several internal line hinges // Acta Mechanica, 2013, vol. 224, no. 11, pp. 2677 - 2697.
6. Quintana M.V., Grossi R.O. Free vibrations of a generally restrained rectangular plate with an internal line hinge // Applied Acoustics, 2012, vol. 73, no. 4, pp. 356 - 365.
7. Quintana M.V., Grossi R.O. Free vibrations of a trapezoidal plate with an internal line hinge // The Scientific World Journal, 2014, vol. 2014, Article ID 252084, 10 p.
8. Riccobene L., Ricci S. Coupling equivalent plate and beam models at conceptual design level // Aircraft Engineering and Aerospace Technology, 2015, vol. 87, no. 1, pp. 2 - 10.
9. Jiapeng T., Ping X., Baoyuan Z., Bifu H. A finite element parametric modeling technique of aircraft wing structures // Chinese Journal of Aeronautics, 2013, vol. 26, no. 5, pp. 1202 - 1210.
10. Kuntjoro W., Mahmud J., Abdul Jalil A. M.H. Wing structure static analysis using superelement // Procedia Engineering, 2012, vol. 41, pp. 1600 - 1606.
11. Rajamurugu N., Yaknesh S., Anbarasi J. Influence of control surfaces in aircraft wing control reversal problems-FEA and CFD analysis // Advances in Aerospace Science and Applications, 2013, vol. 3, no. 3, pp. 137 - 144.

12. Комаров В.А., Кузнецов А.С., Лаптева М.Ю. Оценка эффекта учета деформаций крыла на ранних стадиях проектирования // Труды МАИ. 2011. № 43. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=24759>
13. Охоткин К.Г. Аналитическое исследование геометрически-нелинейного изгиба составного стержня переменной жесткости при действии сосредоточенной нагрузки // Научные технологии. 2016. Т. 17. № 5. С. 35 - 42.
14. Загордан А.А. Исследование работоспособности упругого отклоняемого носка крыла под действием внешних нагрузок // Труды МАИ. 2010. № 38. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=14145>
15. Зверьев Е.М. Выделение уравнений типа Тимошенко из пространственных уравнений теории упругости для пластины на основе принципа сжатых отображений // Труды МАИ. 2014. № 78. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=53459>
16. Гнездилов В.А., Гришанина Т.В., Нагорнов А.Ю. Деформация плоской статически неопределимой стержневой системы при потере устойчивости стержней // Труды МАИ. 2017. № 95. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=84435>
17. Попов В.В., Сорокин Ф.Д., Иванников В.В. Разработка конечного элемента гибкого стержня с отдельным хранением накопленных и дополнительных поворотов для моделирования больших перемещений элементов конструкций летательных аппаратов // Труды МАИ. 2017. № 92. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=76832>

18. Павлов В.А. Механика авиаконструкций: Статика, устойчивость, катастрофы. - Казань: Изд-во Казан. гос. техн. ун-та, 1999. - 162 с.
19. Павлов В.А. Расчет многошарнирного оперения с учетом отклонения рулей // Известия вузов. Авиационная техника. 1974. № 1. С. 72 - 76.
20. Павлов В.А. Влияние деформаций крыла на перемещения закрылка // Известия вузов. Авиационная техника. 1976. № 2. С. 66 - 67.
21. Павлов В.А., Поляков Ю.А. Определение осевых сил в узлах навески рулей. Прочность, устойчивость и колебания тонкостенных и монолитных авиационных конструкций. – Казань, Казанский авиационный институт им. А.Н. Туполева, 1978. С. 47 - 51.
22. Тлеулинов М.К. О различных вариантах определения реакций в узлах соединения составных несущих и управляющих поверхностей // Вестник Казанского государственного технического университета им. А.Н.Туполева. 2014. № 2. С. 7 - 12.
23. Тлеулинов М.К., Кузнецов В.А. О моделировании связей звеньев составных поверхностей в геометрически нелинейной постановке // Вестник Казанского технологического университета. 2014. Т. 17. № 8. С. 15 - 17.
24. Тлеулинов М.К. О реакциях в узлах навески управляющих поверхностей // XX Международный симпозиум «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» имени А.Г. Горшкова. (Ярополец, 17-21 февраля 2014). – М.: Изд-во МАИ, 2004. - С. 199.
25. Ванько В.И., Ермошина О.В., Кувыркин Г.Н. Вариационное исчисление и оптимальное управление. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. - 488 с.

26. Смирнов В.И. Курс высшей математики. - М.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1953. - Т.1. - 472 с.
27. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы. - М.: Мир, 1984. – 428 с.

Статья поступила в редакцию 28.11.2018