

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» МАИ (НИУ)

На правах рукописи



**Осман Мазен**

**Методика проектирования композитных панелей тонкостенных авиационных конструкций по устойчивости и закритическому состоянию**

Специальность 2.5.13.

Проектирование, конструкция, производство, испытания и эксплуатация летательных аппаратов

Диссертация

на соискание ученой степени кандидата технических наук

Научный руководитель:  
доктор технических наук, доцент  
Митрофанов Олег Владимирович

Москва – 2022

## Оглавление

<b>Введение.....</b>	<b>5</b>
<b>Глава 1 Состояние проблем проектирования композитных панелей и постановки актуальных задач.....</b>	<b>14</b>
1.1 Обзор современных проблем и задач поверочных и проектировочных расчетов композитных панелей.....	14
1.2 Основные геометрически нелинейные соотношения тонких композитных панелей.....	26
1.3 Заключение по главе 1.....	30
<b>Глава 2 Проектирование гладких композитных и металлических панелей при обеспечении устойчивости и прочности при закритическом состоянии.....</b>	<b>31</b>
2.1 Определение оптимальных параметров гладких композитных панелей при обеспечении устойчивости и прочности при закритическом состоянии.....	34
2.1.1 Композитные панели при сжатии.....	34
2.1.2 Композитные панели при сдвиге.....	40
2.1.3 Композитные панели при комбинированном нагружении.....	44
2.1.4 Замечание об оптимальном армировании композитных панелей при проектировании с учетом обеспечения устойчивости и прочности при закритическом состоянии.....	48
2.2 Проектирование сжатых металлических панелей с учетом обеспечения устойчивости и прочности при закритическом состоянии.....	51
2.2.1 Определение оптимальных параметров гладких металлических панелей при сжатии.....	51
2.2.2 Определение оптимальных параметров гладких металлических панелей при сдвиге.....	60
2.2.3 Определение оптимальных параметров металлических панелей при комбинированном нагружении.....	63

2.3	Проектирование сжатых композитных панелей с учетом обеспечения устойчивости и прочности при закритическом состоянии с учетом жестких граничных условий.....	66
2.4	Заключение по главе 2.....	73
<b>Глава 3 Проектирование гладких ортотропных панелей по закритическому состоянию при комбинированном нагружении.....</b>		<b>74</b>
3.1	Замечание о проектировании композитной панели при сжатии и сдвиге с учетом ограничений по устойчивости.....	75
3.2	Проектирование панелей по прочности многослойного пакета при закритическом состоянии.....	76
3.3	Проектирование панелей по прочности монослоя при закритическом состоянии с учетом равномерного нагрева.....	82
3.4	Заключение по главе 3.....	88
<b>Глава 4 Расчет и проектирование цилиндрических ортотропных панелей малой кривизны по закритическому состоянию с учетом условий жесткого опирания.....</b>		<b>89</b>
4.1	Расчет и проектирование композитных цилиндрических ортотропных панелей малой кривизны по закритическому состоянию при сжатии.....	90
4.2	Расчет и проектирование цилиндрических ортотропных панелей малой кривизны по закритическому состоянию при сдвиге.....	98
4.3	Заключение по главе 4.....	103
<b>Глава 5 Прикладные методики проектирования несущих композитных панелей и стенок.....</b>		<b>105</b>
5.1	Расчет и проектирование подкрепленных панелей квадратной формы при ограничениях по устойчивости при сдвиге.....	105
5.1.1	Устойчивость и закритическое поведение гладких квадратных ортотропных панелей при сдвиге.....	107

5.1.2	Проектирование квадратных подкрепленных композитных панелей при сдвиге.....	111
5.2	Расчет и проектирование гладких композитных стенок ортотропной, анизотропной и несимметричной структуры при жестком опирании при действии касательных усилий.....	116
5.2.1	Композитные стенки ортотропной структуры .....	116
5.2.2	Композитные стенки анизотропной структуры .....	121
5.2.3	Композитные стенки несимметричной структуры .....	124
5.3	Проектирование многозамкнутых конструкций с учетом закритического поведения композитной обшивки при ограничениях по устойчивости и прочности при закритическом поведении.....	128
5.4	Заключение по главе 5.....	133
<b>Заключение .....</b>		<b>134</b>
<b>Список литературы.....</b>		<b>136</b>

## ВВЕДЕНИЕ

### **Актуальность темы исследования**

При создании современных конструкций самолетов малой и средней грузоподъемности при нагрузках близких к эксплуатационному уровню допускается потеря устойчивости тонких обшивок. При этом следует учитывать возможности использования не только металлических, но и композитных материалов. Для реализации потенциальных возможностей тонкостенных конструкций необходимо создать научно – технических задел, используя который можно было бы обосновать существенное увеличение эффективности новых конструкций на ранних этапах проектирования.

Для обеспечения требований снижения веса проектируемых тонкостенных конструкций, склонных к явлениям потери устойчивости, необходимо рассматривать следующие актуальные задачи. Во – первых, необходимо иметь аналитические решения геометрически нелинейных задач для композитных панелей с учетом различных граничных условий (в том числе, всестороннего жесткого опирания), конструктивная реализация которых может приводить к повышению критических напряжений потери устойчивости проектируемых панелей. Следует отметить, что в большей части технической литературы, как правило, приводятся решения для шарнирно опертых ортотропных панелей при продольном сжатии или сдвиге. При реальном проектировании и создании авиационных конструкций существуют потребности в рассмотрении более сложных граничных условий при рассмотрении задач устойчивости и закритического поведения композитных панелей. Во – вторых, для оценки различных конструктивных решений на ранних этапах проектирования и выбора конструктивно – силовых схем необходимо иметь аналитические методики проектирования для оценки весовой эффективности панелей с учетом возможности варьирования уровнем допустимости потери устойчивости тонких обшивок. В – третьих, существующие методики проектирования силовых стенок лонжеронов при действии значительных касательных потоков, как правило,

используют соотношения для прямоугольных панелей. В корневой части крыла и в зоне навески пилона двигателя существуют фрагменты стенок квадратной формы. В связи с этим для проектирования указанных элементов конструкций необходимо иметь уточненный вариант методики определения параметров несущих конструктивно-ортотропных стенок, нагруженных сдвиговыми потоками. Перечисленные актуальные задачи требуют проведения дополнительных аналитических исследований, разработки методик оптимального проектирования несущих композитных и металлических панелей по закритическому состоянию при допустимости потери устойчивости тонких обшивок.

Решение поставленных задач позволит сформировать научно – технический задел для разработки перспективной конструкции планера самолетов малой грузоподъемности из композитных материалов. Для несущих панелей указанных перспективных изделий допустимость потери устойчивости должно быть проанализирована на самых начальных этапах проектирования, что позволит обоснованно определять минимальные толщины тонких обшивок с учетом требований по прочности.

### **Степень разработанности темы исследования**

Задачи проектирования и поверочных расчетов для композитных авиационных тонкостенных конструкций минимального веса при ограничениях только по критериям статической прочности можно считать в основном решенными. Теоретические задачи проектирования и расчетов, связанные с устойчивостью элементов тонкостенных конструкций в значительной степени решены, но при реальном проектировании требуют особого внимания.

Большой вклад в разработку методов расчета композитных конструкций внесли Н.А. Алфутов, С.А. Абмарцумян, В.В. Болотин, В.В. Васильев, Г.А. Ванин, А.Н. Гузь, А.А. Дудченко, А.Н. Елпатьевский, В.И. Королев, С.Г. Лехницкий, А.К. Малмейстер, Ю.В. Немировский, И.Ф. Образцов, Б.Е. Победря, В.Д. Протасов, Ю.Н. Работнов, Р.Б. Рикардс, Ю.М. Тарнопольский и многие другие.

Фундаментальными решениями задач по определению напряженно-деформированного состояния композитных панелей с учетом геометрически нелинейного поведения занимались В.В. Васильев [2, 15, 123], Н.С. Азиков [1-2], Г.Н. Замула [35-36] и другие исследователи. Тематика данной диссертационной работы относится к ранним этапам проектирования композитных панелей с учетом закритического поведения с учетом использования аналитических решений геометрически нелинейных задач. Указанное актуальное направление проектирования композитных панелей активно развивалось последние 15...20 лет в работах О.В. Митрофанова [51-55]. Данная диссертационная работа является продолжением и развитием прикладных методик проектирования по закритическому состоянию.

### **Цель работы**

Разработка методики определения параметров несущих панелей композитных и металлических авиационных конструкций минимального веса при ограничениях по устойчивости и по статической прочности при закритическом поведении.

Для достижения поставленной цели необходимо решить **следующие задачи**:

1. Разработать методику оптимального проектирования гладких композитных и металлических панелей с учетом ограничений по устойчивости и по прочности при закритическом состоянии (при одновременном рассмотрении двух уровней нагружения) с учетом достижения минимальных запасов.

2. Разработать методику оптимального проектирования гладких панелей при комбинированном нагружении по закритическому состоянию, в том числе с учетом равномерного нагрева.

3. Получить аналитические решения геометрически нелинейной задачи определения напряженно – деформированного состояния ортотропных прямоугольных цилиндрических панелей малой кривизны при сжатии и при сдвиге с учетом всестороннего жесткого опирания.

4. Получить аналитические решения геометрически нелинейных задач гладких композитных (ортотропных, анизотропных и несимметричных) панелей

при жестком опирании, нагруженных касательными усилиями, и разработать соответствующие методики оптимального проектирования композитных панелей по закритическому состоянию.

5. Получить аналитическое решение задачи устойчивости и определения напряженно – деформированного состояния при геометрически нелинейном поведении для квадратной ортотропной панели при сдвиге.

6. Разработать методику рационального проектирования подкрепленных панелей квадратной формы при сдвиге с учетом ограничений по устойчивости.

7. Разработать методику определения параметров многозамкнутого закрылка из композитных материалов с учетом допустимости закритического поведения несущих панелей и стенок от сжатия и сдвига при нагрузках превышающих эксплуатационный уровень.

Таким образом, предлагаемая в работе общая методика определения параметров несущих панелей будет включать указанные выше методики проектирования, указанные в качестве решаемых задач.

**Объектами исследования** являются несущие панели конструкции планера самолетов малой и средней грузоподъемности.

### **Предмет исследования**

Определение рациональных параметров несущих панелей из композитных материалов при обеспечении ограничений по устойчивости и прочности при геометрически нелинейном закритическом состоянии.

**Научную новизну** работы определяют следующие положения:

1. Предложена методика оптимального проектирования гладких композитных и металлических панелей с учетом ограничений по устойчивости и по прочности при закритическом состоянии (при одновременном рассмотрении двух уровней нагружения) с учетом достижения минимальных запасов.

2. Предложена методика оптимального проектирования гладких панелей при комбинированном нагружении по закритическому состоянию, в том числе с учетом равномерного нагрева.



3. Получены аналитические решения геометрически нелинейной задачи определения напряженно – деформированного состояния ортотропных прямоугольных цилиндрических панелей малой кривизны при сжатии и при сдвиге с учетом всестороннего жесткого опирания.

4. Получены аналитические решения геометрически нелинейных задач гладких композитных (ортотропных, анизотропных и несимметричных) панелей при сдвиге и разработаны соответствующие методики оптимального проектирования композитных панелей по закритическому состоянию.

5. Получено аналитическое решение задачи устойчивости и определения напряженно – деформированного состояния при геометрически нелинейном поведении для квадратной ортотропной панели при сдвиге.

6. Предложена методика рационального проектирования подкрепленных панелей квадратной формы при сдвиге с учетом ограничений по устойчивости.

7. Предложена методика определения параметров многозамкнутых закрылков из композитных материалов с учетом допустимости закритического поведения несущих панелей и стенок от сжатия и сдвига при нагрузках превышающих эксплуатационный уровень.

**Теоретическую значимость исследований** составляют:

- полученные в работе аналитические решения геометрически нелинейных задач для ортотропных панелей, которые могут стать основой для соответствующих методик проектирования по закритическому состоянию,

- методика определения параметров композитных панелей при проектировании по устойчивости и по прочности при геометрически нелинейном поведении, которые являются дополнением для существующей методологии проектирования панелей по закритическому состоянию.

**Практическая значимость исследований** состоит:

- в возможности определения оптимальных параметров гладких композитных панелей на ранних этапах проектирования, когда переменными параметрами могут быть толщина и ширина панели (в том числе, шаг стрингеров или стенок) при заданных погонных нагрузках для двух уровнях нагружения,

- в возможности выполнения экспертного аналитического расчета и определения толщин ортотропных плоских и цилиндрических панелей малой кривизны с учетом закритического поведения при сжатии и сдвиге.

### **Методология и методы исследования**

Для решения поставленных задач в работе использованы методы строительной механики тонкостенных авиационных конструкций (метод Бубнова – Галеркина).

### **Основные положения, выносимые на защиту**

На защиту выносятся следующие положения и методики:

1. Методика оптимального проектирования гладких композитных и металлических панелей с учетом ограничений по устойчивости и по прочности при закритическом состоянии (при одновременном рассмотрении двух уровней нагружения) с учетом достижения минимальных запасов.

2. Методика оптимального проектирования гладких панелей при комбинированном нагружении по закритическому состоянию, в том числе с учетом равномерного нагрева.

3. Аналитические решения геометрически нелинейной задачи определения напряженно – деформированного состояния ортотропных прямоугольных цилиндрических панелей малой кривизны при сжатии и при сдвиге с учетом всестороннего жесткого опирания.

4. Аналитические решения геометрически нелинейных задач гладких композитных (ортотропных, анизотропных и несимметричных) панелей при сдвиге и соответствующие методики оптимального проектирования композитных панелей по закритическому состоянию.

5. Аналитическое решение задачи устойчивости и определения напряженно – деформированного состояния при геометрически нелинейном поведении для квадратной ортотропной панели при сдвиге.

6. Методика рационального проектирования подкрепленных панелей квадратной формы при сдвиге с учетом ограничений по устойчивости.

7. Методика определения параметров многозамкнутого закрылка из композитного закрылка с учетом допустимости закритического поведения несущих панелей и стенок от сжатия и сдвига при нагрузках превышающих эксплуатационный уровень.

#### **Степень достоверности результатов**

Достоверность полученных результатов определяется сопоставлением с известными аналитическими и численными решениями частных задач.

#### **Личный вклад автора**

Основные результаты диссертации получены лично автором, либо при его непосредственном участии, что подтверждено публикациями.

#### **Соответствие паспорту специальности**

Диссертация посвящена разработке методов поиска оптимальных конструкторско – технологических решений на ранних стадиях проектирования ЛА и соответствует паспорту специальности 2.5.13. – «Проектирование, конструкция, производство, испытания и эксплуатация летательных аппаратов».

#### **Апробация работы**

Основные положения и результаты материалы диссертации докладывались и обсуждались на следующих конференциях:

1. Международные молодежные научные конференции XLVI и XLVII «Гагаринские чтения», 2020 и 2021 года.

2. 19-я Международная конференция «Авиация и космонавтика». Москва, МАИ 2020 г3.

3. Международная научная конференция «FarEastCon» г. Владивосток (ДФУ) 2020 года.

4. 2020 Workshop on Materials and Engineering in Aeronautics (MEA2020) Moscow, Russia.

5. Vth International Conference on Aerospace System Science and Engineering ICASSE 2021 14-16 July Moscow, Russia.

6. III Международная научная конференция APITECH-III – 2021: Прикладная физика, информационные технологии и инжиниринг. 24 сентября - 3 октября 2021 года | Красноярск, Россия.

7. II-я Международная конференция «Композитные материалы и конструкции». Москва, МАИ 2021 г.

### **Публикации**

По теме диссертационной работы опубликовано **17** печатных работ, **3** из которых в изданиях, рекомендованных ВАК РФ, **2** статьи – в изданиях, индексируемых в базе данных Scopus, Web of Science, **6** статей в материалах и трудах конференций, индексируемых в базе данных Scopus, а также сборниках тезисов докладов конференций. В представленной ниже библиографии приведены ссылки на соответствующие публикации: [45]-[50], [56], [101]-[108], [115]-[116].

### **Структура и объем работы**

Диссертация включает в себя введение, пять глав, заключение и список литературы. Общий объем работы составляет 150 страницы, включая 32 рисунка, 12 таблиц и список литературы из 127 наименований.

**Во введении** сформулированы цель и задачи работы, обоснована актуальность диссертационного исследования, научная новизна, достоверность и обоснованность результатов, а также теоретическая и практическая значимость работы.

**В первой главе** диссертационной работы приведен обзор современных проблем поверочных расчетов и проектирования композитных панелей. Также приведены основные геометрически нелинейные соотношения для исследования закритического поведения композитных панелей.

**Во второй главе** представлена методика проектирования гладких ортотропных и металлических панелей с учетом ограничений по устойчивости и по статической прочности при закритическом состоянии с учетом достижения минимальных запасов при рассмотрении двух уровней нагружения. Приведены варианты указанной методики проектирования панелей для случаев шарнирного и

жесткого опирания. Также представлены результаты параметрических исследований оптимального армирования сжатых ортотропных панелей.

**В третьей главе** приведена методика проектирования ортотропных прямоугольных панелей при комбинированном нагружении в том числе с учетом равномерного нагрева. В качестве критериев прочности использованы соотношения, касающиеся расчетных характеристик многослойного композитного пакета, а также характеристик монослоя композитного материала.

**В четвертой главе** работы рассмотрены некоторые задачи поверочного расчета и методики проектирования цилиндрических композитных панелей малой кривизны с ортотропной структурой по закритическому состоянию с учетом условий жесткого опирания при сжатии и при сдвиге.

**В пятой главе** приведены методики проектирования несущих композитных панелей. В частности, предложена методика проектирования квадратных подкрепленных композитных панелей при сдвиге. При этом было использовано полученное в данной работе решение геометрически нелинейной задачи для квадратной ортотропной панели, нагруженной касательными усилиями. На основе решений геометрически нелинейных задач для гладких композитных стенок ортотропной, анизотропной и несимметричной структур при жестком опирании при действии касательных усилий представлены методики проектирования по закритическому состоянию. Также в данной главе приведена методика проектирования многозамкнутых конструкций с учетом ограничений по устойчивости и по прочности при закритическом состоянии.

**В заключении** представлены основные результаты данного диссертационного исследования и выводы по проделанной работе.

## **Глава 1 Состояние проблем проектирования композитных панелей и постановки актуальных задач**

### **1.1 Обзор современных проблем и задач поверочных и проектировочных расчетов композитных панелей**

Для обеспечения эффективного проектирования современных тонкостенных конструкций необходимо использовать современные методики поверочного расчета и методики проектирования, которые необходимо использовать для оценки и определения оптимальных параметров уже на ранних этапах выполняемых работ. Рассмотрим современные проблемы и задачи поверочных и проектировочных расчетов несущих композитных панелей с позиции обеспечения прочности, устойчивости и несущей способности при закритическом поведении.

Результаты фундаментальных исследований прочности композитных конструкций приведены в монографиях Алфутова Н.А. [3, Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Попов Б.Г., 1984], Амбарцумяна С.А., Васильева В.В. [15, Васильева В.В., 1988], [58, Образцов И.Ф., Васильев В.В., Бунаков В.А., 1977], [123, Vasiliev V., Mогоzov E., 2018], Григолюка Э.И. [24, Григолюк Э.И., Мамай В.И., 1997], Немировского Ю.В. [4, Андреев А. Н., Немировский Ю. В., 2001], Дудченко А.А. [31, А.А. Дудченко, Шумова Н.П., 2006], [32, А.А. Дудченко, 2007], Лехницкого С.Г. [44, Лехницкий С.Г., 1947], Серенсена С.В. [62, Серенсен С.В., Зайцев Г.П., 1982], Falzon B.G. и Aliabadi M.H. [90, Falzon B.G., Aliabadi M.H., 2008], Kollar L. P. и Springer G.S. [94, Kollar L. P., Springer G.S., 2003].

Также отметим монографии Арепьева А.Н. [7, Арепьев А.Н., 2006], [8, Арепьев А.Н., 2001], посвященные проектированию легких самолетов, монографию Комарова А.А. [41, Комаров А.А., 1965], а также монографию Погосяна М.А. [60, Погосян М.А., 2018], где рассмотрены конструкции самолетов различного назначения.

Рассмотрению конструкций кессонов крыла из композитных материалов посвящены работы [93, Kirubakaran R., Lokesharun D., Rajkumar S., Anand R.,

2017]. Интерес представляет также обзорная статья Погосяна М.А. [117, Pogosyan M., Nazarov E., Volshikh A. et al, 2021], посвященная комплексному подходу к созданию композитных конструкций.

Тематика данной диссертационной работы касается несущих панелей конструкций летательных аппаратов малой и средней грузоподъемности. Примерами таких изделий являются самолеты С80-ГП, Су-38Л и ЛМС-901 “Байкал”, показанные на Рисунке 1.1 и Рисунке 1.2.



Рисунок 1.1 – Самолеты С80-ГП и Су-38Л



Рисунок 1.2 – Самолет ЛМС-901 “Байкал”

Несомненный интерес представляют публикации, посвященные различным параметрическим исследованиям конструктивных решений. В частности, выделим статьи Больших А.А. [11, Больших А.А., Еремин В.П., 2020], Комарова В.А. [42, Комаров В.А., 2009], [43, Комаров В.А., Черняев А.В., 2009], Михайловского К.В. [57, Михайловский К.В., Барановский С.В., 2016], Попова Ю.И. [59, Попов Ю.И., Стрелец Д.Ю., Солошенко В.Н., 2017], [64, Солошенко В.Н., Попов Ю.И., 2013]. Отдельно укажем идеологические статьи Чернышева С.Л. [75, Чернышев С.Л., 2013] и Зиченкова М.Ч. [37, Зиченков М.Ч., Кондаков И.О., Шаныгин А.Н., 2016], [26, Дубинский С. В., Зиченков М. Ч., Дзюба А. С., Лимонин М.В., Парышев С.Э., Панков А.В., 2018].

Прикладным задачам обеспечения прочности и ресурса тонкостенных конструкций летательных аппаратов посвящены монографии Гришина В.И. [22, Голован В.И., Гришин В.И., Дзюба А.С. и др., 2022], [23, Гришин В.И., Дзюба А.С., Дударьков Ю.И., 2013], [63, Сироткин О.С., Гришин В.И., Литвинов В.Б., 2006], Стрижиуса В.Е. [67, Стрижиус В.Е., 2015], Ушакова А.Е. [71, Ушаков А.Е., 2012], Фейгенбаума Ю.М. [73, Фейгенбаум Ю.М., Дубинский С.В., Божевалов Д.Г. и др., 2018].

Также отметим отдельно публикации, касающиеся прикладных исследований критериев по статической [122, Tsai S.W., 1968], [87, 1996] и усталостной [91, Hashin Z., Rotem A., 1973] прочности.

Отметим, что решения задач оптимального армирования и проектирования композитных панелей при ограничениях по прочности получены достаточно давно и приведены, например, в работах Васильева В.В. [58, Образцов И.Ф., Васильев В.В., Бунаков В.А., 1977], [16, Васильев В.В., Хазиев А.Р., 2009], Карпова Я. С. [39, Карпов Я. С., 2004], Хазиева А.Р. [74, Хазиев А.Р., 2008], Чедрика В.В. [76, Чедрик В.В., 2005].

Для гладких и подкрепленных композитных панелей тонкостенных конструкций актуальными являются также проблемы связанные с обеспечением устойчивости. Решением проблем устойчивости исследователи занимаются давно, а прикладные решения приведены в работах Андриенко В.М. [5, Андриенко В.М.,



Белоус В.А, 2001], [6, Андриенко В.М., Поспелов И.И., 1996], Белоус А.А. [12, Белоус А.А., Поспелов И.И., 1976], Иерусалимского К.М. [38, Иерусалимский К.М., Фомин В.П., 2001], Кусякова А.Ш. Савина С.Ю. [61, Савин С.Ю., Ивлев И.А., 2017], Смердова А.А. [65, Смердов А.А., 2011]. Анализу прогрессирующего разрушения тонкостенных композитных конструкций посвящена статья Cardenas D. [81, Cardenas D. et al, 2013], Li D. [97, Xiang J., Shijun G., Rongxin X., 2013].

Следует отметить, что до сих пор не потеряли свою актуальность и практическую значимость монографии Вольмира А.С. В работе [17, Вольмир А.С., 1967] приведены результаты широкого анализа устойчивости металлических деформируемых систем. В монографии [18, Вольмир А.С., 1956] рассмотрены общие принципы и подходы к решению геометрически нелинейных задач металлических пластин и оболочек, где также приведены решения практических задач о за критическом поведении.

Несущей способности композитных панелей посвящены публикации Белубекяна Э.В. [10, Белубекян Э.В., 1998], Буштыркова А.А. [14, Буштырков А.А., 1967], Файзуллиной М.А. [72, Файзуллина М.А., 1979] и других. Отдельно выделим цикл статей Лимонина М.В. и Дударькова Ю.И. [21, Голован В.И., Дударьков Ю.И., Левченко Е.А., Лимонин М.В., 2020], [27, Дударьков Ю.И., Левченко Е.А., Лимонин М.В., Шевченко А.В., 2018], [28, Дударьков Ю.И., Лимонин М.В., Наумов С.М., Осипян Е.Э., 2015], в которых рассмотрены решения задач расчета и экспериментального анализа несущей способности подкрепленных композитных панелей. В работах Дударькова Ю.И. и Лимонина М.В. [29, Дударьков Ю.И., Лимонин М.В., 2012] приведены численные решения нелинейных задач о несущей способности. В публикациях Железнова Л.П. [33, Железнов Л. П., Огнянова Т. С., 2017], [34, Железнов Л. П., 2021] приведены решения задач устойчивости и исследования геометрически нелинейного поведения композитных цилиндрических оболочек. В работе Liu Y. [98, Liu Y., Nie K., Dai Y., 2018] представлено аналитическое решение для потери устойчивости и поведения после потери устойчивости жестких многослойных композитных панелей произвольной формы. В публикации Митрофанова О.В.

[109, Mitrofanov O.V., 2019], [110, Mitrofanov O., Lebedevs I., Turko V., 2021] приведены аналитические решения геометрически нелинейных задач композитных плоских и цилиндрических панелей несимметричной структуры. Также в статье Митрофанова О.В. [113, Mitrofanov O.V., 2019] представлены полученные методом Бубнова – Галеркина соотношения для аналитической оценки поведения ортотропных панелей после потери устойчивости при сдвиге с учетом жесткого опирания длинных сторон и начальной погиби. В работе Митрофанова О.В. [112, Mitrofanov O., Lebedevs I., Urbaha M., 2021] приведена методика проектирования анизотропных панелей при комбинированном нагружении с учетом закритического состояния.

Результаты экспериментальных исследований несущих композитных панелей посвящена работа Джанхотова С.О. [25, Джанхотов С.О., 2009]. Результаты цикла статических испытаний регионального самолета RRJ-95 с композитными агрегатами механизации крыла приведены в статье Дзюбы А.С. [30, Дзюба А.С., Дударьков Ю.И., Замула Г.Н., Митрофанов О.В., Мохов В.Ф., Пименов А.В., Цыганков В.Я, 2011].

Практический интерес представляют задачи исследования напряженно-деформированного состояния композитных панелей при закритическом поведении с учетом различных вариантов нагружения. Исследованию закритического поведения при комбинированном нагружении посвящена работа Kimura M. [92, Kimura M., Ogawa T., Hashimura T., 2003]. В работе Arakaki F. [78, Arakaki F., Faria A., 2016] рассмотрены экспериментальные и численные результаты исследований подкрепленных композитных панелей при сдвиге. Также отметим, что в работе Falzon B.G. [89, Falzon B.G., Stevens K.A., Davies G.O., 2000] приведены результаты исследований подкрепленных композитных панелей с коническими фланцами при сжатии и анализе прочности обшивки, находящейся в закритическом состоянии. Было обнаружено, что результаты расслоений обшивки при испытаниях хорошо согласуются с результатами испытаний ламината на трехточечный изгиб.

Устойчивости панелей при нагреве посвящены работы Singha M. K. [120, Singha M. K., Ramachandra L.S., Bandyopadhyay J.N., 2001]. Нелинейный анализ многослойных композитных панелей с включениями из сплава с памятью формы при закритическом поведении с учетом температурного воздействия был проведен в работе Lal A. [96, Lal A., Parghi A., Markad K., 2021].

Исследования влияния граничных условий на устойчивость и геометрически нелинейное поведение композитных панелей проведено в работах Лопатина А. и Морозова Е. [100, Lopatin A., Morozov E., 2020], Timarci T. [121, Timarci T., Aydogdu M., 2005]. В публикации Darvizeh M. [84, Darvizeh M., Darvizeh A., Ansari R., Sharma C.B., 2004] приведены результаты различных подходов при аналитическом моделировании для задач устойчивости многослойных композитных пластин. Отметим статью Yshii L. [126, [Yshii L., Eliseu L., Monteiro F., Santana R., 2013], посвященную анализу точности решений задач устойчивости анизотропных панелей. В работе Zhang F. [127, Zhang F., Wu M., Xinting H., Cheng H., Xiayu Xu., Xinhe W., 2021] использован адаптивный метод выборки для оценки вероятности поведения и анализа композитных панелей после потери устойчивости.

Экспериментальные и конечно – элементные исследования закритического поведения композитных тонкостенных балок приведены в работе Dębski H. [85, Dębski H., 2013]. Отметим также, что несомненный практический интерес представляют задачи, связанные с ударным воздействием на композитные панели. В работе Falzon V.G. [99, Liu H., Falzon V.G., Tan W. , 2018] приведены результаты экспериментальных и численных исследований гибридных композитных панелей. В статье [111, Mitrofanov O., Pavelko I., Varickis S., Vagele A., 2018] предложена прикладная методика прогнозирования несущей способности сжатых композитных панелей с учетом ударных повреждений.

Большой обзор зарубежных публикаций за период с 2000г. до 2015г., посвященных устойчивости, закритическому поведению и оптимальному проектированию композитных и металлических панелей приведен в статье Ni X.

[114, Ni X., Prusty G., Hellier A., 2016]. Также следует отметить обзор работ по указанной тематике Xu J. [125, Xu J., Zhao Q., Qiao P., 2013]

Классические решения фундаментальных проблем закритического поведения композитных панелей в указанных выше работах Васильева В.В. [2, Азиков Н.С., Васильев В.В., 1990] и Замулы Г.Н. [35, Замула Г.Н., 1997], [36, Замула Г.Н., Иерусалимский К.М., 1996]. Аналитические решения геометрически нелинейных задач композитных панелей приведены в работах Митрофанова О.В. [51, Митрофанов О.В., 2020], [53, Митрофанов О.В., 2012], [54, Митрофанов О.В., 2003].

Отметим, что аналитические решения задач устойчивости, а также геометрически нелинейных задач, которые могут быть использованы для оценки критических напряжений и напряженно – деформированного состояния тонких расслоений в композитных панелях. Соответствующие решения приведены в работах

Моделированию дефектов в композитных конструкциях посвящены статьи Кокурова А.М. [40, Кокуров А.М., 2015], Köllner A. [95, Köllner A., Forsbach F., Völlmecke C., 2019] и многих других.

Экспериментальным исследованиям расслоений в композитных панелях посвящены работы Riccio A. [118, Riccio A., Raimondo A., Fragale S. et al, 2014], [118, Riccio A., Raimondo A., Fragale S. et al, 2014],

Задачи механики разрушения в панелях с дефектами рассмотрены в работах Бохоевой Л.А. [79, Bokhoeva L.A., Bochektueva E.B, 2019], Бохоевой Л.А. и Чермошенцевой А.С. [82, Chermoshentseva A.S., Pokrovskiy A.M., Bokhoeva L.A., 2016], [83, Chermoshentseva A.S., Bokhoeva L.A., Lobanov D.V., Rogov V. E., 2016].

Решению задач обеспечения ресурса композитных конструкций посвящены работы Стрижиуса В.Е. [67, Стрижиус В.Е., 2015], [68, Стрижиус В.Е., 2020], Трунина Ю.П. [69, Трунин Ю.П., 1993], [70, Трунин Ю.П., 1999] и многих других.

Также отметим, что новые модели и методы расчета напряженно-деформированного состояния конструктивно – анизотропных панелей с учетом технологии изготовления предложены в работах Гаввы Л.М. [19, Гавва Л.М.,

Фирсанов В.В., 2020] и [20, Гавва Л.М., Лурье С.А., 2018]. В целом для композитных конструкций моделирование технологических задач являются очень актуальными [13, Бохоева Л.А., Курохтин В.Ю., Чермошенцева А.С., Перевалов А.В., 2013], [66, Смотровая С.А., Наумов С.М., Смотров А.В., 2015].

Теперь рассмотрим задачи, которые касаются непосредственно проектирования композитных конструкций с учетом допустимости потери устойчивости тонких обшивок. Задачи поверочных расчетов композитных панелей при допустимости закритического поведения достаточно успешно решаются численными методами [29]. Но по справедливому мнению западных ученых [86, Degenhardt R. et al, 2007] потенциал композитных панелей тонкостенных конструкций, склонных к потере устойчивости, не используется в полной мере из-за отсутствия нормативных документов в авиакосмической отрасли. С таким утверждением можно согласиться и в настоящее время, поскольку технические специалисты используют в основном рекомендательный циркуляр [77, 2009]. Более того, аналитических и особенно экспериментальных работ по разработке и проектированию композитных панелей по закритическому состоянию достаточно мало.

Оптимизации композитных панелей с учетом геометрической нелинейности посвящены следующие работы западных ученых. В статье [80, Bisagni C., Lanzi L., 2002] для оптимизации панелей использованы нейронные сети. Применению численных методов для оптимального проектирования с учетом закритического поведения композитных обшивок посвящена глава в монографии Falzon B.G. [89, Faggiani A., Falzon B.G., 2018]

Оптимальному проектированию панелей с учетом закритического поведения при переменных углах армирования композитной структуры посвящена статья Weaver P. [124, Wu Z., Raju G., Weaver P., 2017]. Следует отметить, что рассмотренное в работе [124] направление, касающееся переменных жесткостей, интенсивно развивается и в теоретическом плане, и с точки зрения практического применения с учетом развития современных технологических возможностей.

В указанных выше работах Митрофанова О.В. [51, 53 - 55] предложена методология проектирования композитных панелей по закритическому состоянию. Суть методологии сводится к использованию аналитических решений геометрически нелинейных задач, полученных методом Бубнова – Галеркина, и условию достижения предельных по прочности напряжений при расчетном уровне нагружения. Разработанные в рамках методологии прикладные методики [51, 53 - 55] могут быть применимы на ранних этапах проектирования. Проведенный анализ выше указанных работ показал, что существуют сформулированные ниже задачи, решения которых могут, во – первых, повысить весовую эффективность проектируемых авиационных конструкций, а во – вторых, быть значительным дополнением к уже разработанным методикам.

Также рассмотрим соотношения, приведенные в Таблице 1.1, поясняющие место методологии [51, 53 - 55] проектирования по закритическому состоянию в общей теории проектирования тонкостенных конструкций. Представленные в Таблице 1.1 соотношения иллюстрируют возможность определения толщин ортотропных прямоугольных панелей при ограничениях по статической прочности, устойчивости и закритическому состоянию.

Таблица 1.1 – Расчетные соотношения для определения толщины ортотропной прямоугольной панели при одноосном сжатии при шарнирном опирании [51]

Условия для проектирования панелей	Соотношения для определения напряжений	Соотношения для определения минимальных толщин панелей
Статическая прочность	$\sigma = \frac{P}{\delta b}$	$\delta = \frac{P}{\bar{\sigma} b}$
Устойчивость	$\sigma_{кр} = K \left( \frac{\delta}{b} \right)^2, K = \frac{2\pi^2}{12} \times$ $\times \left[ \sqrt{\bar{E}_x \bar{E}_y + \mu_{xy} \bar{E}_x} + 2G_{xy} \right]$	$\delta^2 = b^2 \frac{\bar{\sigma}_{уст}}{K}$
Закритическое состояние	$\sigma_x = -\frac{f^2}{8} E_x \frac{\pi^2 m^2}{a^2} - p_x,$ $\delta^2 \bar{D}_{mn} + f^2 E_{mn} = p_x \left( \frac{m}{a} \right)^2$	$\delta^3 + \delta \frac{E_{mn} \bar{\sigma}_x}{\bar{D}_{mn} E_{\alpha\beta}} -$ $- \frac{q_x^p}{\bar{D}_{mn}} \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{E_{mn}}{E_{\alpha\beta}} \right) = 0$

В Таблице 1.1 обозначено:  $K$ ,  $\bar{D}_{mn}$ ,  $E_{mn}$ ,  $E_{\alpha\beta}$  – коэффициенты, зависящие от жесткостных соотношений композитной структуры панели приведены ниже в данной работе;  $\bar{\sigma}$  – допускаемые по условиям прочности нормальные напряжения;  $\bar{\sigma}_{уст}$  – допускаемые по условиям устойчивости нормальные напряжения, которые определяются разработчиком воздушного судна;  $q_x^p = p_x \delta$  – действующий на панель сжимающий поток на расчетном уровне нагружения.

В завершение данного параграфа рассмотрим пример из монографии [51], который касается ортотропной прямоугольной ( $a \times b = 400 \times 120$  мм) панели при шарнирном опирании при проектировании из условий обеспечения устойчивости и прочности при закритическом состоянии. Для расчета ортотропной панели из углепластика были приняты следующие исходные характеристики:  $E_1 = 125$  ГПа,

$E_2=9$  ГПа,  $G_{12}=5$  ГПа,  $\mu_{21}=0.28$ ,  $\bar{\sigma}_1=1.4$  ГПа, сжимающий поток изменяется в пределах  $q_x=0...2000$  ГПа·м, укладка композитных слоев  $\bar{h}_0=0.3$ ,  $\bar{h}_{\pm 45}=0.7$ ,  $\bar{\sigma}_x=0.529$  ГПа.

На Рисунке 1.3 показано изменение толщины ортотропной пластины при проектировании из условия обеспечения устойчивости (кривая №2 –  $\delta_{уст}$ ) и прочности при закритическом состоянии (кривая №1 –  $\delta_{зс}$ ) с учетом величины предельных по прочности напряжений. На Рисунке 1.4 показано изменение коэффициента  $k=\delta_{уст}/\delta_{зс}$ , отражающего эффективность использования методологии проектирования по закритическому состоянию по сравнению с проектированием из условий устойчивости.

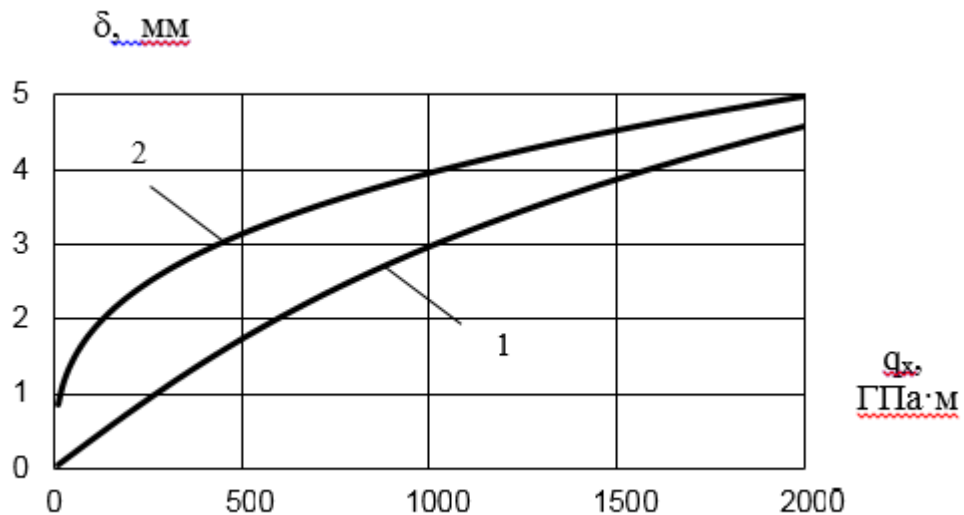


Рисунок 1.3 – Зависимости толщины ортотропной панели от величины сжимающего потока [51]



Таким образом, эффективность применения методологии проектирования по закритическому состоянию наиболее высока для мало-средне нагруженных конструкций.

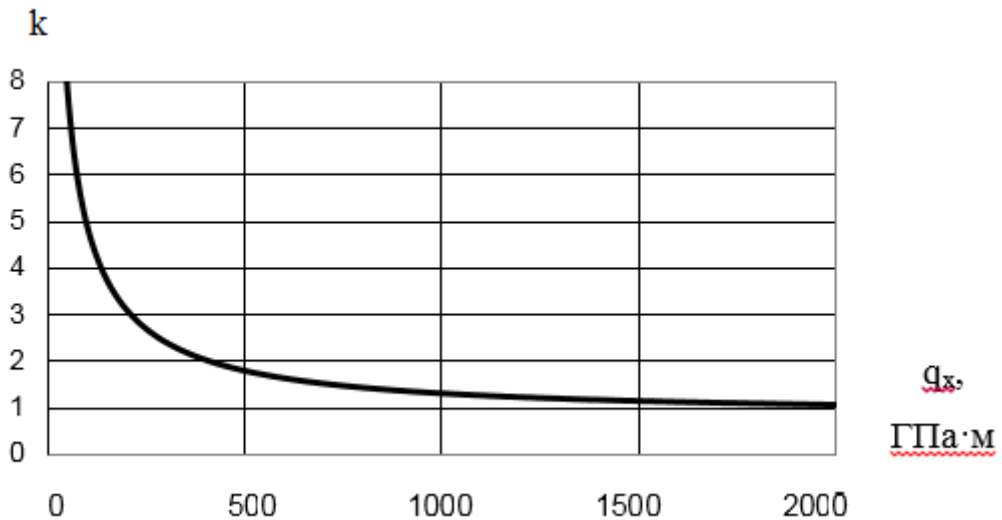


Рисунок 1.4 – Оценка эффективности проектирования ортотропной панели при обеспечении устойчивости и прочности при закритическом состоянии [51]

На основе представленного примера в заключение данного параграфа приведем оценку эффективности используемого далее подхода проектирования по закритическому состоянию по сравнению с методикой, при которой необходимо обеспечить устойчивость при расчетном уровне нагружения. Будем считать, что объектами исследования являются несущие панели конструкции закрылка самолета средней грузоподъемности, при этом сжимающий поток меняется в пределах от 500 до 1000 ГПа·м, а ширина панелей варьируется от 80 до 120 мм и возможно использовать приведенные на Рисунке 1.3 и Рисунке 1.4 результаты. Тогда при условии допустимости потери устойчивости обшивки предложенный подход может приводить к увеличению эффективности толщин ортотропных панелей при сжатии с коэффициентом 1.3...1.7.

## 1.2 Основные геометрически нелинейные соотношения тонких ортотропных панелей

Поскольку в данной диссертационной работе будут рассматриваться композитные панели различных структур, то в данном параграфе запишем геометрически нелинейные соотношения тонких ортотропных, анизотропных и несимметричных панелей.

А) Для рассмотрения задач устойчивости и исследования закритического поведения ортотропных панелей воспользуемся исходными соотношениями теории композитных конструкций [44, 51]. Условие совместности деформаций имеет вид

$$L_1(F) - L_2(W) = 0, \quad (1.1)$$

где

$$L_1(F) = \frac{1}{E_y} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + \left( \frac{1}{G_{xy}} - \frac{2\mu_{xy}}{E_y} \right) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{1}{E_x} \frac{\partial^4 F}{\partial y^4},$$

$$L_2(W) = \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 - \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right).$$

Нелинейное уравнение типа Кармана – уравнение равновесия с учетом приведенной нагрузки от мембранных усилий, которые введены в функцию Эри  $F$ :

$$L_3(F, W) - L_4(W) = 0, \quad (1.2)$$

где

$$L_3(F, W) = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y},$$

$$L_4(W) = \frac{1}{\delta} \left[ D_x \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} \right].$$

Здесь и далее обозначены:  $E_x, E_y$  – модули упругости в направлении осей  $x$  и  $y$ ;  $G_{xy}$  – модуль сдвига в плоскости композитного пакета;  $\mu_{xy}$  – коэффициент Пуассона, характеризующий сокращение вдоль оси  $x$  при растяжении вдоль оси  $y$ ; условие ортотропии  $E_x \mu_{xy} = E_y \mu_{yx}$ ,  $D_x, D_y, D_3$  – изгибные жесткости ортотропной панели,  $\delta$  – толщина панели,  $F$  – функция напряжений,  $W$  – прогиб прямоугольной панели.

Для гладких ортотропных панелей жесткости определяются по следующим формулам [15, 124]

$$D_{11} = \frac{E_x \delta^3}{12(1 - \mu_{xy} \mu_{yx})}, D_{22} = \frac{E_y \delta^3}{12(1 - \mu_{xy} \mu_{yx})}, D_3 = D_{12} + 2D_{33} = \mu_{xy} D_{11} + \frac{G_{xy} \delta^3}{6}. \quad (1.3)$$

Обобщенные жесткости композитных панелей с учетом расположения слоев по толщине определяются соотношениями [15, 124]

$$B_{mn} = I_{mn}^{(0)}, C_{mn} = I_{mn}^{(1)} - e I_{mn}^{(0)}, D_{mn} = I_{mn}^{(2)} - 2e I_{mn}^{(1)} + e^2 I_{mn}^{(0)}, \quad (1.4)$$

$$I_{mn}^{(r)} = \frac{I}{r+1} \sum_{i=1}^K A_{mn}^{(i)} (t_i^{r+1} - t_{i-1}^{r+1}), \quad (r = 0, 1, 2), \quad E_{11,22} = \frac{E_{1,2}}{1 - \mu_{12} \mu_{21}},$$

где

$$\begin{aligned} A_{11}^{(i)} &= E_{11} \cos^4 \varphi_i + E_{22}^{(i)} \sin^4 \varphi_i + 2[E_{11} \mu_{12}^{(i)} + 2G_{12}^{(i)}] \sin^2 \varphi_i \cos^2 \varphi_i, \\ A_{12}^{(i)} &= A_{21}^{(i)} = E_{11} \mu_{12}^{(i)} + [E_{11}^{(i)} + E_{22}^{(i)} - 2(E_{11} \mu_{12}^{(i)} + 2G_{12}^{(i)})] \sin^2 \varphi_i \cos^2 \varphi_i, \\ A_{22}^{(i)} &= E_{11} \sin^4 \varphi_i + E_{22} \cos^4 \varphi_i + 2[E_{11} \mu_{12}^{(i)} + 2G_{12}^{(i)}] \sin^2 \varphi_i \cos^2 \varphi_i, \\ A_{33}^{(i)} &= [E_{11}^{(i)} + E_{22}^{(i)} - 2E_{11}^{(i)} \mu_{12}^{(i)}] \sin^2 \varphi_i \cos^2 \varphi_i + G_{12}^{(i)} \cos^2 2\varphi_i. \end{aligned}$$

Для решения геометрически нелинейной задач методом Бубнова – Галеркина далее будут использованы равенства

$$\iint_{00}^{ab} [L_3(F, W) - L_4(W)] W_k dx dy = 0, \quad (1.5)$$

где  $W_k$  – функция прогиба.

Запишем также уравнения для определения  $F$  – функции напряжений Эри [44]

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \quad (1.6)$$

которые будут необходимы для вычисления мембранных напряжений, возникающих при потере устойчивости тонких панелей.

Б) Запишем основные геометрически нелинейные соотношения для анизотропных панелей. Имеем уравнение совместности деформаций

$$L_1(F) - L_2(W) = 0, \quad (1.7)$$

где 
$$L_1(F) = \frac{1}{E_y} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} - g_{31} \frac{\partial^4 F}{\partial x^3 \partial y} + g_{22} \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} - g_{13} \frac{\partial^4 F}{\partial y^3 \partial x} + \frac{1}{E_x} \frac{\partial^4 F}{\partial y^4},$$

$$g_{31} = \frac{\eta_{y,xy} + \eta_{xy,y}}{G_{xy}}, \quad g_{22} = \frac{1}{G_{xy}} - \frac{\mu_{xy}}{E_y} - \frac{\mu_{yx}}{E_x}, \quad g_{13} = \frac{\eta_{x,xy} + \eta_{xy,x}}{G_{xy}},$$

$$L_2(W) = \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}.$$

Здесь и далее: обозначения жесткостных параметров анизотропных панелей соответствуют традиционным обозначениям, приведенным, например, в монографиях [15, 124].

Нелинейное уравнение типа Кармана запишем в виде [44, 51]

$$L_4(W) - L_3(F, W) = 0, \quad (1.8)$$

где 
$$L_3(F, W) = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y},$$

$$L_4(W) = \frac{1}{\delta} \left[ D_{11} \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{33}) \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 W}{\partial x^3 \partial y} + 4D_{26} \frac{\partial^4 W}{\partial x \partial y^3} \right].$$

В данном случае для определения функция напряжений Эри, могут быть использованы соотношения (1.6).

В) Запишем основные соотношения для геометрически нелинейной задачи композитных панелей несимметричной структуры, используя гипотезы теории композитных конструкций Васильева В.В. [15, 124] и соотношения, приведенные в работе [109-110]. Нелинейное уравнение совместности деформаций запишем в виде

$$L_1(\bar{F}) - L_2(W) + L_5(W) = 0, \quad (1.9)$$

где 
$$L_1(\bar{F}) = c_y \frac{\partial^4 \bar{F}}{\partial x^4} + (c - 2c_{xy}) \frac{\partial^4 \bar{F}}{\partial x^2 \partial y^2} + c_x \frac{\partial^4 \bar{F}}{\partial y^4}, \quad L_2(W) = \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2},$$

$$L_5(W) = B_{yx} \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + (B_x + B_y - 2C) \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + B_{xy} \frac{\partial^4 W}{\partial y^4}.$$

где функция Эри определяется из соотношений [15, 124]

$$N_x = \frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial y^2}, N_y = \frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial x^2}, N_{xy} = -\frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial x \partial y}.$$

Нелинейное уравнение типа Кармана имеет вид [109-110]

$$L_4(W) - L_3(\bar{F}, W) - L_6(\bar{F}) = 0, \quad (1.10)$$

где

$$L_4(W) = D_x \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + (4D + D_{xy} + D_{yx}) \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 W}{\partial y^4},$$

$$L_3(\bar{F}, W) = \frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial y^2} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y},$$

$$L_6(\bar{F}) = C_{xy} \frac{\partial^4 \bar{F}}{\partial x^4} + 2(C_x + C_y - 2C) \frac{\partial^4 \bar{F}}{\partial x^2 \partial y^2} + C_{yx} \frac{\partial^4 \bar{F}}{\partial y^4}.$$

Система равенств (1.9) – (1.10) является исходной системой геометрически нелинейной задачи для несимметричных панелей. Воспользуемся также обозначениями, приведенными в работах [15, 124]

$$c_x = \frac{B_{22}}{B}, c_y = \frac{B_{11}}{B}, c_{xy} = c_{yx} = \frac{B_{12}}{B}, c = \frac{1}{B_{33}}, B = B_{11}B_{22} - B_{12}^2,$$

$$B_x = \frac{1}{B}(B_{22}C_{11} - B_{12}C_{12}), \quad B_y = \frac{1}{B}(B_{11}C_{22} - B_{12}C_{12}),$$

$$B_{xy} = \frac{1}{B}(B_{22}C_{12} - B_{12}C_{22}), \quad B_{yx} = \frac{1}{B}(B_{11}C_{12} - B_{12}C_{11}), \quad C = \frac{C_{33}}{B_{33}}.$$

$$C_x = c_x \left( C_{11} - \frac{c_{yx}}{c_x} C_{12} \right), \quad C_y = c_y \left( C_{22} - \frac{c_{xy}}{c_y} C_{12} \right),$$

$$C_{xy} = c_y \left( C_{12} - \frac{c_{xy}}{c_y} C_{11} \right), \quad C_{yx} = c_x \left( C_{12} - \frac{c_{yx}}{c_x} C_{22} \right),$$

$$D_x = D_{11} - C_{11}B_x - C_{12}B_{yx}, \quad D_y = D_{22} - C_{22}B_y - C_{12}B_{xy},$$

$$D_{xy} = D_{12} - C_{11}B_{xy} - C_{12}B_y, \quad D_{yx} = D_{12} - C_{22}B_{yx} - C_{12}B_x,$$

$$D = \frac{D_{33}B_{33} - C_{33}^2}{B_{33}}.$$

Отметим, что в данном случае функция Эри  $\bar{F}$  отличается по размерности от функции напряжений, которая указана в соотношениях (1.6). Аналогичное примечание можно сделать, сравнивая соотношения (1.1) – (1.2) с (1.9) – (1.10). Соотношения для анизотропных и несимметричных структур будут использованы в данной работе при решении задач в Главе 5.

#### **1.4 Заключение по главе 1**

В первой главе диссертационной работы приведен анализ работ отечественных и зарубежных авторов, посвященных проектированию тонких композитных и металлических панелей с учетом ограничений по статической прочности, устойчивости и прочности при закритическом состоянии. Показано, что актуальной является методология проектирования панелей по закритическому состоянию, которая основана на использовании аналитических решениях геометрически нелинейных задач.

Приведены основные геометрически нелинейные соотношения для композитных панелей ортотропной, анизотропной и несимметричной структур с целью последующего использования для получения аналитических решений и разработки методик определения рациональных параметров при ограничениях по прочности при закритическом поведении.

## Глава 2 Проектирование гладких композитных и металлических панелей при обеспечении устойчивости и прочности при закритическом состоянии

При проектировании сжатых несущих панелей кессонов крыла и агрегатов механизации самолетов малой и средней грузоподъемности допускается потеря устойчивости обшивки при нагрузках, близких к эксплуатационному уровню. Рассмотрим гладкие панели из композитных материалов, нагруженные сжимающими и сдвиговыми потоками, а также комбинацией указанных усилий. Отметим, что как правило, большой интерес при разработке указанных авиационных конструкций вызывают задачи проверочного расчета и оптимального проектирования панелей минимального веса.

В работах [51, 53-55] изложена методология проектирования тонких композитных панелей по закритическому состоянию при допустимости потери устойчивости при нагрузках, близких к эксплуатационному уровню. В этом случае при использовании аналитических решений геометрически нелинейных задач возможно определение минимальных толщин панелей при достижении предельных по прочности напряжений.

В данной главе работы предлагается определять оптимальные параметры гладких композитных панелей (Рисунок 2.1) исходя из обеспечения минимальных

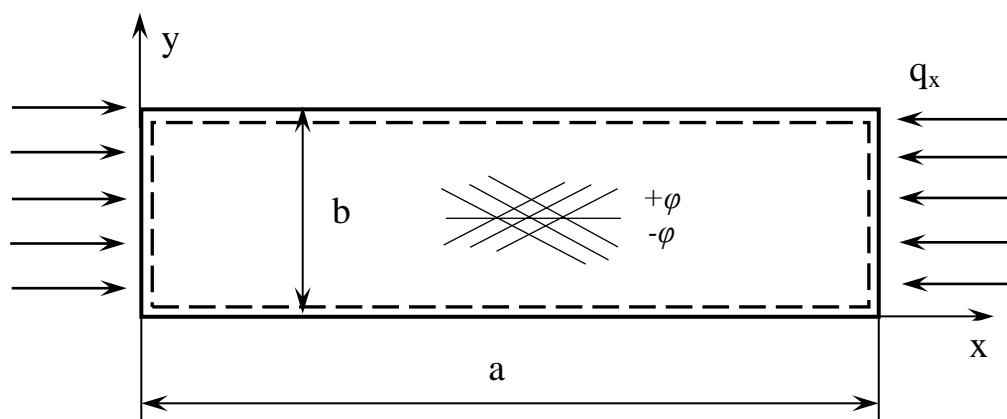


Рисунок 2.1 – Прямоугольная ортотропная панель при действии сжимающих усилий

запасов (равных единице) на двух уровнях нагружения:

- на уровне №1 необходимо обеспечить устойчивость,
- на уровне №2 допустима потеря устойчивости и необходимо обеспечить статическую прочность при геометрически нелинейном поведении панели.

В общем случае указанные уровни нагружения №1 и №2 могут не совпадать с эксплуатационными и расчетными нагрузками. Отметим, что указанные уровни нагружения при введении дополнительных коэффициентов могут назначаться разработчиком воздушного судна в специальных расчетных условиях. Например, для обшивок сжатых панелей многозакнутого закрылка самолета малой и средней грузоподъемности возможно допущение потери устойчивости обшивки между продольными стенками (Рисунок 5.6 – Рисунок 5.7) при сжимающих нагрузках ниже эксплуатационного уровня. Это также относится к нижним панелям фюзеляжа при действии сжатия. Обозначим в данной работе для удобства дальнейших рассуждений отношение нагрузок двух указанных уровней через коэффициент  $\omega$ , который не обязательно будет совпадать с коэффициентом безопасности, принятым при разработке авиационных конструкций.

Формально задача проектирования панелей минимального веса может быть представлена следующим образом: при заданных потоках необходимо определить толщину и ширину гладкой композитной панели (целевая функция – вес  $V(\delta, \mathbf{b}) \rightarrow \min$ ) при ограничениях по устойчивости и по прочности при закритическом поведении –  $H_i(\mathbf{x}) \geq 0$ , которые в данной работе выполняются в виде равенств. Например, при проектировании по закритическому состоянию выполняется равенство предельных по прочности напряжений. При этом получаются равными единице соответствующие запасы по прочности при геометрически нелинейном поведении.

В данной работе рассматриваются одновременно соотношения методик проектирования по устойчивости и методик проектирования по закритическому состоянию, что можно классифицировать как новую методику проектирования панелей. Далее объектами исследований будут прямоугольные ортотропные панели с геометрическими параметрами  $\mathbf{a} \gg \mathbf{b}$ , толщиной  $\delta$  и шарнирном



опирании при сжатии, сдвиге и комбинированном нагружении. Целью данного раздела является разработка методик проектирования гладких композитных панелей с учетом указанных выше условий и запись замкнутых аналитических соотношений для определения толщины и ширины панели.

Далее приведем дополненный по отношению к материалам работ [51, 53-55] алгоритм методики определения оптимальных параметров ортотропных панелей, который в данном случае будет включать следующие пункты:

1) Исходя из геометрических параметров, граничных условий и характера нагружения панели надо определить возможную форму прогиба при потере устойчивости панели, которая, как правило, может быть описана известной тригонометрической функцией (с точностью до неизвестной величины амплитуды);

2) Определить коэффициент  $\omega = q^P / q^{уст}$ , который является отношением расчетной (разрушающей) нагрузки и критической нагрузки, при которой потеря устойчивости не допускается;

3) При известных геометрических параметрах (в частности, длине и ширине панели) и жесткостных характеристиках, определяемых укладкой КМ, для рассматриваемых гладких ортотропных панелей вычислить числа полуволн при потере устойчивости по известным соотношениям механики композитных конструкций [15];

4) Провести аналитическое решение геометрически нелинейной задачи проводится методом Бубнова – Галеркина, который позволяет получить замкнутые аналитические соотношения, и, в частности, нелинейные уравнения, связывающие толщину, ширину панели и амплитуду прогиба;

5) Записать равенства для определения напряжений через функцию напряжений, из которых получается выражение для мембранных напряжений в зависимости от амплитуды прогиба;

6) Исследовать на экстремум выражения для напряжений по координатам  $x$  и  $y$  и определяются точки, в которых напряжения могут достичь максимальных по модулю значений;

7) Из условия достижения напряжениями предельных значений, например,  $\bar{\sigma}_x$  определить амплитуду прогиба при напряжениях  $\sigma = \bar{\sigma}_x$  (см.п.5). Подставляя полученное равенство в геометрически нелинейное уравнение (см.п.4) в итоге записывается нелинейное уравнение относительно толщины панели;

8) В общем случае надо записать линейные соотношения (см. п.4) и аналитически решить задачу устойчивости. Как правило, выражения для определения критических напряжений потери устойчивости гладких ортотропных панелей известны. Аналитически переписать полученное соотношение относительно ширины панели.

9) Подставить, полученное в п.8, соотношение в выражение, являющееся решением геометрически нелинейной задачи в п.7 и получить нелинейное уравнение относительно толщины панели.

10) Провести численное решение нелинейного уравнения и определить оптимальную толщину гладкой ортотропной панели. Вычислить ширину ортотропной панели (см.п.8). Исходя из конструктивных и технологических ограничений уточнить значения толщины и ширины панели.

Теперь рассмотрим применение приведенных пунктов при различных вариантах нагружения композитных панелей.

## **2.1 Определение оптимальных параметров гладких композитных панелей при обеспечении устойчивости и прочности при закритическом состоянии**

### **2.1.1 Композитные панели при сжатии**

Рассмотрим ортотропную прямоугольную панель при продольном сжатии (Рисунок 2.1). Представим прогиб шарнирно опертой панели в виде

$$W = f \sin\left(\frac{\pi mx}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right), \quad (2.1)$$

где  $f$  – амплитуда прогиба,  $m$  – число полуволн в продольном направлении.

В результате рассмотрения геометрически нелинейного уравнения совместности деформаций (1.1) может быть определена функция напряжений

$$F = A_1 f^2 \cos\left(\frac{2\pi mx}{a}\right) + A_2 f^2 \cos\left(\frac{2\pi y}{b}\right) - \frac{p_x y^2}{2}, \quad (2.2)$$

где  $A_1 = \frac{E_y a^2}{32b^2 m^2}$ ,  $A_2 = \frac{E_x b^2 m^2}{32a^2}$ ,

$p_x$  – расчетные напряжения, определяемые потоками внешних погонных сжимающих усилий, приложенных к торцевым кромки панели в её плоскости:

$$q_x^p = p_x \delta.$$

Тогда мембранные продольные напряжения потерявшей устойчивость панели вычисляются по формуле

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -\frac{E_x f^2 m^2 \pi^2}{8a^2} \cos\left(\frac{2\pi y}{b}\right) - p_x, \quad (2.3)$$

При решении геометрически нелинейной задачи методом Бубнова – Галеркина может быть получено уравнение

$$\delta^2 \bar{D}_{mn} + f^2 E_{mn} = \left(\frac{m}{a}\right)^2 p_x, \quad (2.4)$$

где  $E_{mn} = \left(\frac{m^4 E_x}{a^4} + \frac{E_y}{b^4}\right) \frac{\pi^2}{16}, \quad (2.5)$

$$\bar{D}_{mn} = \pi^2 \left[ \frac{\bar{E}_x}{12} \left(\frac{m}{a}\right)^4 + 2 \left( \frac{\mu_{xy} \bar{E}_x}{12} + \frac{G_{xy}}{6} \right) \left(\frac{m}{ab}\right)^2 + \frac{\bar{E}_y}{12} \left(\frac{1}{b}\right)^4 \right]. \quad (2.6)$$

Далее будем считать, что продольные напряжения (2.3) достигают предельных по прочности значений  $\bar{\sigma}_x$  в потенциально-критических точках при условии выполнения равенства  $\cos\left(\frac{2\pi y}{b}\right) = 1$ . Тогда выражая из уравнения (2.3)

амплитуду прогиба получим следующее соотношение

$$f^2 = \left(\bar{\sigma}_x - p_x\right) \frac{I}{E_{\alpha\beta}}, \quad (2.7)$$

где  $E_{\alpha\beta} = \frac{E_x \pi^2 m^2}{8a^2}$ .

Подставляя прогиб (2.7) в уравнение (2.4), получим искомое нелинейное выражение, указанное в Таблице 1.1 [51], относительно толщины

$$\delta^3 + \delta \frac{E_{mn} \bar{\sigma}_x}{D_{mn} E_{\alpha\beta}} - \frac{q_x^p}{D_{mn}} \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{E_{mn}}{E_{\alpha\beta}} \right) = 0.$$

где  $q_x^p$  – сжимающий поток при расчетном уровне нагружения.  $q_x^p = p_x \delta$ .

Теперь уточним соотношения, используя представленную идеологию введением двух уровней нагружения при проектировании и рассмотрением двух переменных параметров – толщины и ширины прямоугольной панели. Запишем выражение при проектировании по устойчивости не через критические напряжения, а через действующий на эксплуатационном уровне сжимающий поток

$$b^2 = \frac{\pi^2}{6q_x^{эксн}} \delta^3 \left[ \sqrt{E_x E_y} + \mu_{xy} \bar{E}_x + 2G_{xy} \right]. \quad (2.8)$$

Также следует учесть, что используемое соотношение верно при определении числа полуволен  $m$  [15]

$$m = \frac{a}{b} 4 \sqrt{\frac{E_y}{E_x}}, \quad (2.9)$$

из которого следует, что число  $m$  зависит от соотношения жесткостных параметров и соотношений сторон.

Таким образом, для получения уравнения для определения толщины панели необходимо в выражение (2.7) подставить обозначения (2.5) – (2.6), затем соотношение для чисел полуволен  $m$  (2.9) и далее исключить ширину  $b$  с помощью уравнения (2.8). Итоговое выражение относительно толщины после указанных преобразований включает сжимающие потоки, действующие на двух уровнях нагружения

$$\delta = \frac{2q_x^p - q_x^{уст}}{\sigma_x}, \quad (2.10)$$

В инженерных расчетах авиационных конструкций при условии  $q_x^{уст} = q_x^{эксн}$  следует учитывать величину коэффициента безопасности  $f_{безоп}=1.5$ . Тогда для определения толщины получим более простое равенство

$$\delta = \frac{2q_x^{эксн}}{\sigma_x}, \quad (2.11)$$

которое вместе с уравнением (2.8) определяет оптимальные параметры композитной панели. Также отметим, что в данном случае не указаны дополнительные коэффициенты безопасности, которые вводятся при проектировании композитных конструкций и, как было, отмечено выше, вводятся разработчиком воздушного судна в специальных расчетных условиях и зависят от многих конкретных условий. Причем, на дополнительные коэффициенты безопасности обычно умножаются нагрузки на двух указанных уровнях нагружения.

Рассмотрим для примера сжатые панели из углепластика со следующими характеристиками слоя:  $E_1=125 \text{ ГПа}$ ,  $E_2=9 \text{ ГПа}$ ,  $G_{12}=5 \text{ ГПа}$ ,  $\mu_{21}=0.28$ ,  $\bar{\sigma}_1=0.9 \text{ ГПа}$ . Положим, что при стандартной укладке  $0^\circ/\pm 45^\circ/90^\circ$  и относительных толщинах  $h_0=0.4$ ,  $h_{45}=0.5$ ,  $h_{90}=0.1$  имеем предел прочности при сжатии  $\bar{\sigma}_x=0.459 \text{ ГПа}$ . В Таблице 2.1 и Таблице 2.2 приведены результаты расчетов при варьировании величинами нагрузок при различных уровнях нагружения. Приведенный параметр  $\Delta\% = 100/\omega$  показывает процент нагрузки, при которой принята возможность допустимости потери устойчивости.

Таблица 2.1 – Оптимальные параметры углепластиковой панели при изменении уровня нагрузки, при которой допустима потеря устойчивости

$q_x^{уст} \cdot 10^3$ , ГПа·м	0.4	0.359	0.24	0.182	0.15
$q_x^p \cdot 10^3$ , ГПа·м	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6
$\omega$	1.5	1.67	2.5	3,3	4
$\Delta\%$	67	60	40	30	25
$\delta$ , мм	1.74	1.83	2.09	2.22	2.29
$b$ , мм	47.6	54.2	80.8	101.3	116.9

Таблица 2.2 – Оптимальные параметры углепластиковой панели при изменении уровня разрушающей нагрузки

$q_x^{уст} \cdot 10^3$ , ГПа·м	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4
$q_x^p \cdot 10^3$ , ГПа·м	0.6	0.668	1.0	1.32	1.6
$\omega$	1.5	1.67	2.5	3,3	4
$\Delta\%$	67	60	40	30	25
$\delta$ , мм	1.74	2.04	3.48	4.88	6.1
$b$ , мм	47.6	60.3	134.7	223.1	311.8

Из результатов, приведенных в Таблице 2.1 и Таблице 2.2, видно, что допустимость или недопустимость ранней потери устойчивости может приводить к различным рекомендациям при разработке панелей конструкций.

На Рисунках 2.2 – 2.3 графически представлены результаты параметрических исследований по данным Таблицы 2.1.

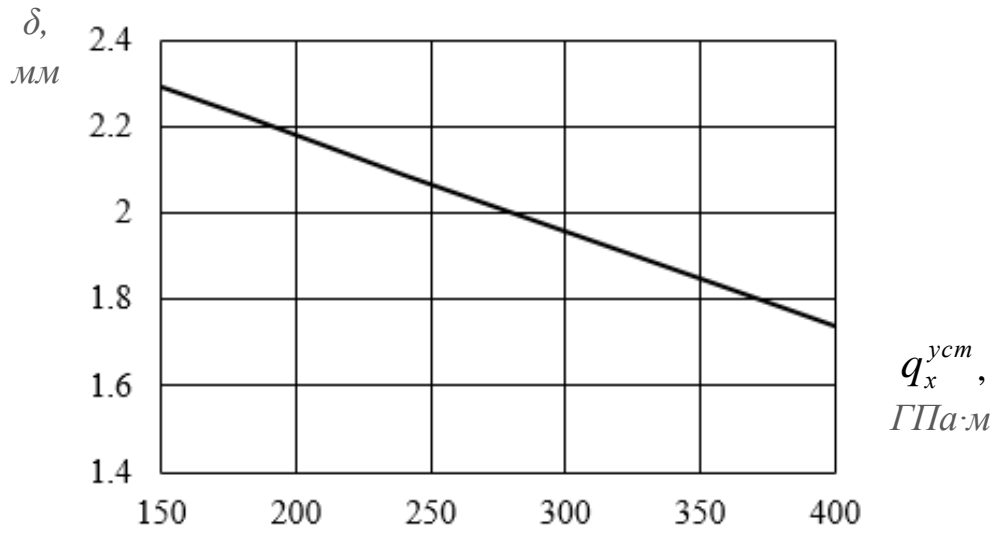


Рисунок – 2.2 Зависимость толщины панели от сжимающего потока  $q_x^{уст}$  (см. Таблицу 2.1) при  $q_x^p = 600$  ГПа·м

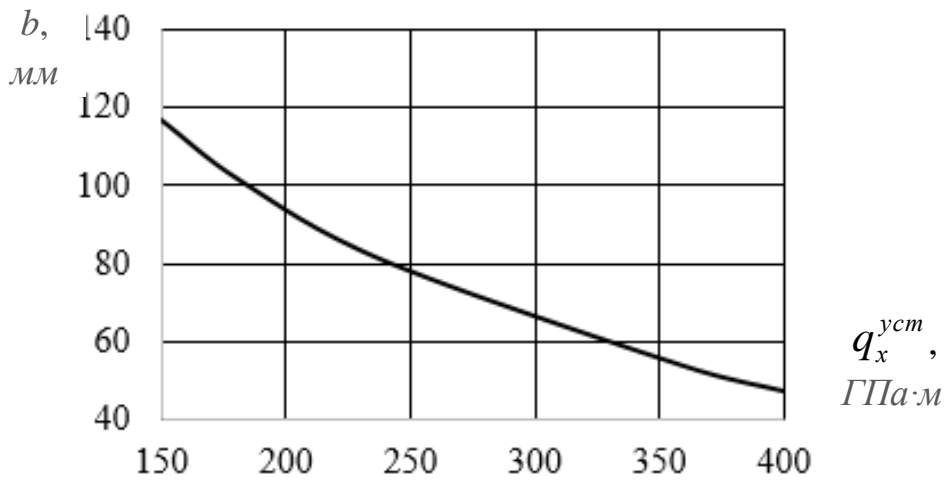


Рисунок 2.3 – Зависимость ширины панели от сжимающего потока  $q_x^{уст}$  (см. Таблицу 2.1)  $q_x^p = 600$  ГПа·м

### 2.1.2 Композитные панели при сдвиге

Представим аналогичные рассуждения при рассмотрении задачи оптимального проектирования гладких ортотропных панелей при действии касательных потоков. Также рассмотрим соотношения, приведенные в Таблице 2.3, где можно убедиться в правомерности представленных выше рассуждений для случая сдвига (Рисунок 2.4).

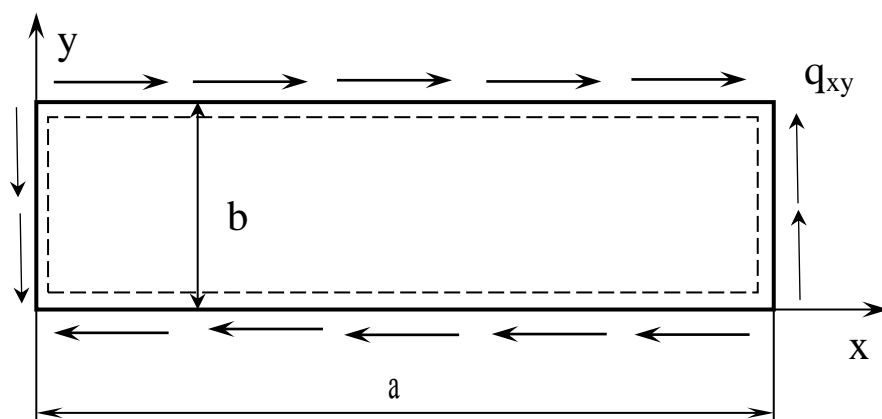


Рисунок 2.4 – Прямоугольная ортотропная панель при действии касательных усилий



Таблица 2.3 – Расчетные соотношения для определения толщины ортотропной прямоугольной панели при сдвиге

Условия для проектирования панелей	Соотношения для вычисления напряжений	Соотношения для определения минимальных толщин панелей
Статическая прочность	$\tau = \frac{Q}{\delta b}$	$\delta = \frac{Q}{\tau_{\epsilon} b}$
Устойчивость	$\tau_{кр} = K_{\tau} \left( \frac{\delta}{b} \right)^2, K_{\tau} = \frac{2\pi^2}{12} \times$ $\times \sqrt{\bar{E}_y (\bar{E}_x \mu_{xy} + 2G_{xy})} \sqrt{4 + 3\theta + \frac{1}{\theta}},$ $\theta = \sqrt{\bar{E}_x \bar{E}_y} / (\bar{E}_x \mu_{xy} + 2G_{xy}), [9]$	$\delta^2 = b^2 \frac{\bar{\tau}_{уст}}{K_{\tau}}$
Закритическое состояние	$\tau_{xy} = -f^2 \frac{\pi^2}{8} \frac{\alpha}{G_{\alpha} b^2} - p_{xy},$ $f^2 B_{\alpha\beta} \delta + D_{\alpha\beta} \delta^3 = \frac{2\alpha \pi^2}{s^2} q_{xy}^p$	$\delta^3 + \delta \frac{8G_{\alpha} B_{\alpha\beta} \bar{\tau}_{xy} b^2}{D_{\alpha\beta} \pi^2 \alpha} +$ $+ \frac{q_{xy}^p}{\pi^2 D_{\alpha\beta}} \left( \frac{8G_{\alpha} B_{\alpha\beta} b^2}{\alpha} - \frac{2\alpha}{s^2} \right) = 0$

В Таблице 2.3 обозначено:  $Q$  – действующая перерезывающая сила;  $\bar{\tau}_{\epsilon}$  – допускаемые по условиям прочности касательные напряжения;  $\bar{\tau}_{уст}$  – допускаемые по условиям устойчивости касательные напряжения, которые определяются разработчиком воздушного судна;  $q_{xy}^p = p_{xy} \delta$  – действующий на панель сдвиговой поток при расчетном уровне нагружения;  $B_{\alpha\beta}$ ,  $D_{\alpha\beta}$ ,  $G_{\alpha}$  – жесткостные коэффициенты, обозначения для которых приведены ниже в данной работе.

Теперь рассмотрим случай действия на ортотропную прямоугольную панель касательных потоков. Воспользуемся для описания прогиба равенством вида [9]

$$W = f \cdot \sin \frac{\pi y}{b} \sin \frac{\pi(x - \alpha y)}{s}, \quad (2.12)$$

где  $\alpha$  – тангенс угла наклона волн при выпучивании,  $s$  – расстояние между узловыми линиями.

Тогда из уравнения совместности деформаций (1.1) получим функцию напряжений

$$F = \frac{f^2}{32} \left\{ \frac{1}{G_\alpha} \left( \frac{s}{b} \right)^2 \cos \frac{2\pi(x - \alpha y)}{s} + \left( \frac{b}{s} \right)^2 E_x \cos \frac{2\pi y}{b} \right\} - \quad (2.13)$$

$$- \frac{p_x y^2}{2} - \frac{p_y x^2}{2} + p_{xy} xy,$$

здесь обозначено 
$$G_\alpha = \frac{1}{E_y} + \left( \frac{1}{G_{xy}} - \frac{2\mu_{xy}}{E_y} \right) \alpha^2 + \frac{\alpha^4}{E_x}.$$

Будем считать, что прочностное разрушение в данном случае возможно при достижении предельных касательных напряжений  $\bar{\tau}_{xy}$ . Запишем выражение для мембранных касательных напряжений

$$\tau_{xy} = - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = f^2 \Delta_{xy} - p_{xy},$$

где  $\Delta_{xy} = \frac{\pi^2}{8} \frac{\alpha}{G_\alpha b^2} \cos \frac{2\pi(x - \alpha y)}{s}$ , и далее будем считать, что при действии максимальных напряжений в критических точках имеем  $\cos \frac{2\pi(x - \alpha y)}{s} \rightarrow 1$ .

Используя далее процедуру метода Бубнова – Галеркина с учетом геометрически нелинейного уравнения (1.2) в общем виде при  $f \neq 0$  получим

$$\frac{\pi^2}{s^2} \left[ \frac{\pi^2 f^2}{16 G_\alpha} \left( \frac{\alpha}{b} \right)^2 + \frac{E_x}{16} \frac{\pi^2 f^2}{s^2} + p_x \right] + \left[ - \frac{\pi^2 f^2}{16 G_\alpha} + p_y \right] \left[ \frac{\pi^2}{b^2} + \frac{\alpha^2 \pi^2}{s^2} \right] +$$

$$+ \frac{\alpha \pi^2}{s^2} \left( \frac{\pi^2 f^2}{8 b^2 G_\alpha} + 2 p_{xy} \right) - \frac{\bar{E}_x \delta^2}{12} \frac{\pi^4}{s^4} - \quad (2.14)$$

$$-2 \left( \frac{\mu_{xy} \bar{E}_x}{12} + \frac{G_{xy}}{6} \right) \delta^2 \left( \frac{\pi^2}{b^2} + \frac{\alpha^2 \pi^2}{s^2} \right) \frac{\pi^2}{s^2} - \frac{\bar{E}_y \delta^2}{12} \left[ \left( \frac{\pi^2}{b^2} + \frac{\alpha^2 \pi^2}{s^2} \right)^2 + \frac{4\pi^4 \alpha^2}{b^2 s^2} \right] = 0$$

При малых прогибах выражение (2.14) перепишем в виде

$$q_{xy} \alpha = p_{xy} \delta \alpha = \frac{\bar{E}_x \delta^3}{12} \frac{\pi^2}{s^2} + 2 \left( \frac{\mu_{xy} \bar{E}_x}{12} + \frac{G_{xy}}{6} \right) \delta^3 \left[ \frac{\pi^2}{b^2} + \frac{\alpha^2 \pi^2}{s^2} \right] + \frac{\bar{E}_y \delta^3}{12} \frac{s^2}{\pi^2} \left[ \frac{\pi^4}{b^4} + \frac{\alpha^4 \pi^4}{s^4} + \frac{6\pi^4 \alpha^2}{b^2 s^2} \right],$$

который совпадает с равенством из работы [9]. При некоторых упрощениях путем аналитической минимизации можно определить критический сдвиговой поток ортотропной панели по известной формуле [9]

$$q_{xy}^{крит} = \frac{2\pi^2}{b^2} \frac{\delta^3}{12} \sqrt{\bar{E}_y (\bar{E}_x \mu_{xy} + 2G_{xy})} \sqrt{4 + 3\theta + \frac{1}{\theta}}, \quad (2.15)$$

где  $\theta = \sqrt{\bar{E}_x \bar{E}_y} / (\bar{E}_x \mu_{xy} + 2G_{xy})$ , при этом критические параметры волнообразования вычисляются из следующих соотношений [51]

$$\alpha^4 \left[ \frac{3\lambda}{\lambda_1} + 1 \right] + \alpha^2 \left[ 3\sqrt{\lambda_1} - \frac{\lambda^2}{\sqrt{\lambda_1}} \right] - \lambda_1 - \lambda = 0, \quad (2.16)$$

$$\frac{\lambda_1}{\alpha} + 2\lambda\alpha - \frac{1}{\alpha\gamma^2} + \alpha^3 = 0, \quad (2.17)$$

где обозначено  $\gamma = \frac{b^2}{s^2}$ ,  $\lambda_1 = \frac{E_x}{E_y}$ ,  $\lambda = \frac{(\bar{E}_x \mu_{xy} + 2G_{xy})}{\bar{E}_y}$ .

Учитывая введение двух уровней нагружения перепишем равенство (2.15) в виде

$$b^2 = \frac{\pi^2}{q_{xy}^{уст}} \frac{\delta^3}{6} \sqrt{\bar{E}_y (\bar{E}_x \mu_{xy} + 2G_{xy})} \sqrt{4 + 3\theta + \frac{1}{\theta}}. \quad (2.18)$$

Далее при действии только касательных потоков на расчетном уровне из уравнения (2.14) имеем

$$\delta^3 + \delta \frac{8G_\alpha B_{\alpha\beta} \bar{\tau}_{xy} b^2}{D_{\alpha\beta} \pi^2 \alpha} + \frac{q_{xy}^p}{\pi^2 D_{\alpha\beta}} \left( \frac{8G_\alpha B_{\alpha\beta} b^2}{\alpha} - \frac{2\alpha}{s^2} \right) = 0, \quad (2.19)$$

где

$$B_{\alpha\beta} = \frac{1}{b^4} \frac{1}{16G_\alpha} \left\{ \left[ \left( \frac{\alpha b}{s} \right)^2 + E_x G_\alpha \frac{b^4}{s^4} \right] + \left[ \frac{b^2}{s^2} + \alpha^2 \frac{b^4}{s^4} \right] + 2\alpha \frac{b^2}{s^2} \right\}, \quad (2.20)$$

$$D_{\alpha\beta} = \frac{1}{b^4} \frac{1}{12} \left\{ \bar{E}_x \frac{b^4}{s^4} + 2(\mu_{xy} \bar{E}_x + 2G_{xy}) \left[ \frac{b^2}{s^2} + \alpha^2 \frac{b^4}{s^4} \right] + \bar{E}_y \left[ \left( 1 + \frac{\alpha^2 s^2}{b^2} \right)^2 + \frac{4\alpha^2 b^2}{s^2} \right] \right\}. \quad (2.21)$$

Теперь распишем процедуру получения итогового громоздкого уравнения для определения толщины с учетом того, что ширина панели  $b$  также является переменной величиной. Во – первых, надо определить критические параметры волнообразования ( $\alpha_{крит}$  и  $\gamma_{крит}$ ), которые зависят от жесткостных соотношений, по формулам (2.16) - (2.17). Во – вторых, надо подставить обозначения для  $G_\alpha$ ,  $B_{\alpha\beta}$  (2.20) и  $D_{\alpha\beta}$  (2.21) в уравнение (2.19). Далее используя обозначения для  $s$  и  $b$  (2.16) можно получить громоздкое одно уравнение относительно толщины  $\delta$ , которое включает в себя два уровня действующих потоков и решается численным образом. После определения оптимальной толщины панели по формуле (2.18) можно вычислить оптимальную ширину прямоугольной панели.

### 2.1.3 Композитные панели при комбинированном нагружении

Теперь рассмотрим случай комбинированного нагружения продольными сжимающими и касательными потоками (Рисунок 2.5). Будем считать, что компоненты нагружения изменяются пропорционально одному параметру:

$q_x = \xi \bar{q}_x$ ,  $q_{xy} = \xi \bar{q}_{xy}$ . При рассмотрении задач устойчивости и закритического

поведения будем использовать вид прогиба, который указан в соотношении (2.12). Тогда функция напряжения  $F$  и решение геометрически нелинейной задачи сохраняют вид соотношений (2.13) и (2.14).

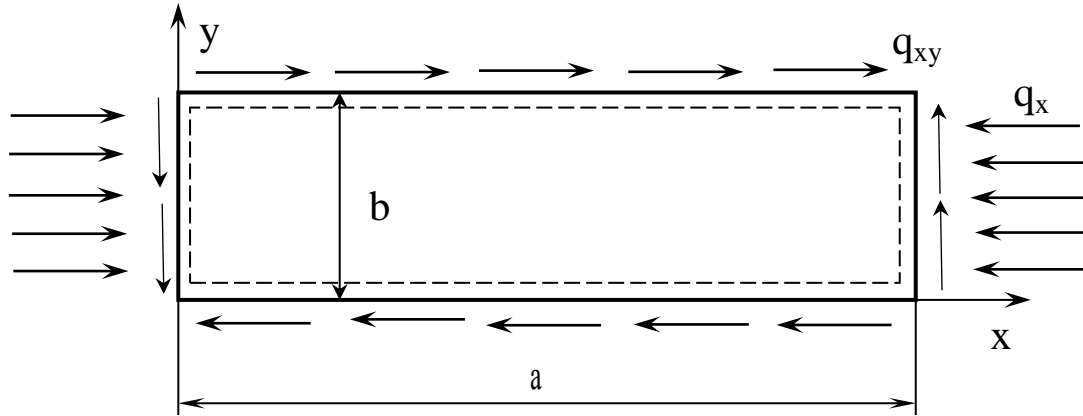


Рисунок 2.5 – Прямоугольная ортотропная панель при действии касательных усилий

При действии комбинации потоков при малых прогибах выражение (2.14) перепишем в виде

$$q_x^{уст} + q_{xy}^{уст} \alpha = \frac{\pi^2}{b^2} \left\{ \frac{\bar{E}_x \delta^3 b^2}{12 s^2} + 2 \left( \frac{\mu_{xy} \bar{E}_x}{12} + \frac{G_{xy}}{6} \right) \delta^3 \left[ 1 + \frac{\alpha^2 b^2}{s^2} \right] + \frac{\bar{E}_y \delta^3}{12} \left[ \frac{s^2}{b^2} + \frac{\alpha^4 b^2}{s^2} + 6\alpha^2 \right] \right\},$$

где  $q_x^{уст} = p_x^{уст} \delta$ ,  $q_{xy}^{уст} = p_{xy}^{уст} \delta$  – действующие потоки, соответствующие уровню нагружения, при котором необходимо обеспечить устойчивость.

Далее при использовании параметра  $\gamma = b^2/s^2$  и системы уравнений

$$\partial \xi / \partial \alpha = 0, \quad \partial \xi / \partial \gamma = 0,$$

можно по аналогии со случаем для сдвига численным образом определить критические параметры волнообразования при потере устойчивости ( $\alpha_{крит}$ ,  $\gamma_{крит}$ ).

В соответствии с предложенным выше приемом сведения задачи оптимизации к одному уравнению потребуются выражения относительно ширины панели.

Отметим еще раз практические достоинства результатов работы Л.И. Балабуха [9], в которой получены аналитические решения задач устойчивости для ортотропных панелей и получена формула для критических касательных потоков (2.15). Указанное уравнение было следствием более общей решаемой задачи устойчивости, предполагающей комбинированное нагружение. В работе [9] было получено аналитическое решение задачи устойчивости при одновременном действии сжимающих и касательных напряжений и записано выражение

$$\sigma_x^{\text{эксн}} \delta + \frac{(\tau_{xy}^{\text{эксн}} \delta)^2}{\frac{2\pi^2}{b^2} \left( 2D_y + D_3 \sqrt{\frac{D_y}{D_x}} \right)} = \frac{2\pi^2}{b^2} \left( D_3 + \sqrt{D_x D_y} \right),$$

которое так же, как и формула (2.15), имеет применение для практических расчетов. Переписывая приведенное уравнение через действующие потоки для первого уровня нагружения, при которых необходимо обеспечить устойчивость, имеем

$$q_x^{\text{уст}} b^2 + \frac{(q_{xy}^{\text{уст}})^2 b^4}{2\pi^2 \delta^3 \left[ \frac{3\bar{E}_y}{12} + \left( \frac{\mu_{xy} \bar{E}_x}{12} + \frac{G_{xy}}{6} \right) \sqrt{\frac{\bar{E}_y}{\bar{E}_x}} \right]} - 2\pi^2 \delta^3 \left( \frac{\mu_{xy} \bar{E}_x}{12} + \frac{G_{xy}}{6} + \frac{\sqrt{\bar{E}_x \bar{E}_y}}{12} \right) = 0, \quad (2.22)$$

и получаем квадратное уравнение относительно величины  $b^2$ . Отметим, что практическая значимость полученного в работе [9] уравнения заключается в возможности аналитического определения минимальной толщины ортотропной панели при заданной нагрузке укладке и ширине панели.

Далее в рассматриваемой задаче определения толщины ортотропной панели с минимальными запасами для второго уровня нагружения при комбинированном нагружении необходимо воспользоваться комплексным критерием прочности. Считая, что на панель действуют потоки (так как при постановке задачи

проектирования толщины и напряжения неизвестны) воспользуемся следующим выражением для критерия прочности Цая с учетом умножения на толщину

$$\frac{(\bar{\sigma}_x \delta)^2}{\bar{\sigma}_x^2} + \frac{(\bar{\tau}_{xy} \delta)^2}{\bar{\tau}_{xy}^2} = \delta^2. \quad (2.23)$$

Здесь  $\bar{\sigma}_x$  и  $\bar{\tau}_{xy}$  – предельные по статической прочности напряжения композитного пакета при наличии дефектов 1-й категории [9].

Мембранные напряжения в срединной поверхности потерявшей устойчивость прямоугольной ортотропной панели определяются следующими равенствами

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -f^2 \Delta_x - p_x, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = f^2 \Delta_{xy} - p_{xy}, \quad (2.24)$$

где

$$\Delta_x = -\frac{\pi^2}{8} \left\{ \frac{\alpha^2}{G_\alpha b^2} \cos \frac{2\pi(x - \alpha y)}{s} + \frac{E_x}{s^2} \cos \frac{2\pi y}{b} \right\},$$

$$\Delta_{xy} = \frac{\pi^2}{8} \frac{\alpha}{G_\alpha b^2} \cos \frac{2\pi(x - \alpha y)}{s}. \quad (2.25)$$

Теперь перепишем полученные выражения для случая совместного действия продольными сжимающими  $q_x^p = p_x \delta$  и касательными  $q_{xy}^p = p_{xy} \delta$  потоками.

Перепишем выражения (2.24) с учетом действия потоков в виде

$$\sigma_x \delta = -\delta \Delta_x f^2 - q_x^p, \quad \tau_{xy} \delta = -\delta \Delta_{xy} f^2 - q_{xy}^p. \quad (2.26)$$

Далее нелинейное уравнение (14) перепишем в виде

$$f^2 B_{\alpha\beta} \delta + D_{\alpha\beta} \delta^3 = \frac{\pi^2}{s^2} q_x^p + \frac{2\alpha\pi^2}{s^2} q_{xy}^p. \quad (2.27)$$

Проведем следующие преобразования уравнений (2.23), (2.26) и (2.27). Сначала подставим потоки из (2.26) в критерий прочности (2.23). Далее выражая амплитуду прогиба из (2.27) в полученное на предыдущем шаге рассуждений

соотношение, можно записать искомое нелинейное уравнение для определения толщины

$$\begin{aligned} & \bar{\tau}_{xy}^{-2} \left[ -\Delta_x \frac{\frac{\pi^2}{s^2} (q_x + 2\alpha q_{xy}) - D_{\alpha\beta} \delta^3}{B_{\alpha\beta}} - q_x \right]^2 + \\ & + \bar{\sigma}_x^{-2} \left[ \Delta_y \frac{\frac{\pi^2}{s^2} (q_x + 2\alpha q_{xy}) - D_{\alpha\beta} \delta^3}{B_{\alpha\beta}} - q_{xy} \right]^2 = \delta^2 \bar{\sigma}_x^{-2} \bar{\tau}_{xy}^{-2}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Для получения искомого громоздкого уравнения для определения оптимальной толщины при рассмотрении двух уровней нагружения надо подставить величины  $b^2$  при аналитическом решении квадратного уравнения (2.22) в записанное равенство (2.28).

#### 2.1.4 Замечание об оптимальном армировании композитных панелей при проектировании с учетом обеспечения устойчивости и прочности при закритическом состоянии

Рассмотрим также традиционный вопрос проектирования композитных конструкций об оптимальной укладке. В данном случае для шарнирно опертой панели при сжатии параметры панели определяются по формулам (2.8) и (2.10). Целесообразно рассматривать безразмерный параметр  $\zeta = \delta/b$ . Из указанных уравнений можно получить

$$\zeta = \frac{\delta}{b} = \sqrt{\frac{6q_x^{ycm} \bar{\sigma}_x}{\pi^2 \left[ \sqrt{\bar{E}_x \bar{E}_y} + \mu_{xy} \bar{E}_x + 2G_{xy} \right] (2q_x^p - q_x^{ycm})}}, \quad (2.29)$$

и для авиационных конструкций с учетом коэффициента безопасности  $f_{безоп} = 1.5$  имеем

$$\zeta = \frac{\delta}{b} = \sqrt{\frac{3\bar{\sigma}_x}{\pi^2 \left[ \sqrt{\bar{E}_x \bar{E}_y} + \mu_{xy} \bar{E}_x + 2G_{xy} \right]}}. \quad (2.30)$$



Отметим, что здесь также опущены дополнительные коэффициенты безопасности, вводимые при проектировании композитных конструкций по указанным выше причинам. Для оценки оптимального армирования в Таблице 2.4 и на Рисунке 2.6 и Рисунке 2.7 для примера показано изменение параметра  $\zeta$  в зависимости от угла при использовании структуры  $\pm\varphi^\circ$  углепластиковой панели.

Таблица 2.4 – Оптимальные параметры углепластиковой панели при изменении угла армирования при уровнях нагружения  $q_x^{ycm} = 400 \text{ ГПа}\cdot\text{м}$  и

$$q_x^p = 600 \text{ ГПа}\cdot\text{м}.$$

$\pm\varphi^\circ$	10	20	30	40
$\bar{\sigma}_x, \text{ ГПа}$	0.827	0.60	0.33	0.168
$\zeta$	0.067	0.048	0.03	0.02
$\delta, \text{ мм}$	0.97	1.33	2.43	4.75
$b, \text{ мм}$	14.4	27.9	80.8	241.4

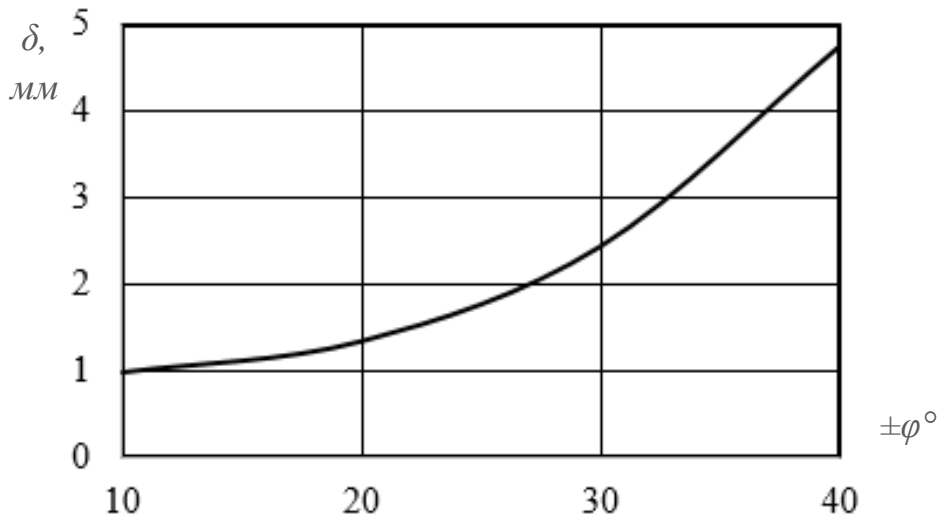


Рисунок 2.6 – Зависимость толщины ортотропной панели от угла армирования

(см. Таблицу 2.4) при  $q_x^{ycm} = 400 \text{ ГПа}\cdot\text{м}$  и  $q_x^p = 600 \text{ ГПа}\cdot\text{м}$ .

Отметим, что реализация прочностных и жесткостных характеристик панели со структурой  $\pm\varphi^\circ$  возможна и при стандартной укладке  $0^\circ/\pm 45^\circ/90^\circ$ . Отметим также, что полученные соотношения учитывают прочностные, но не конструктивные и не технологические ограничения. При разработке конструкций, как правило, реализуется компромиссное решение.

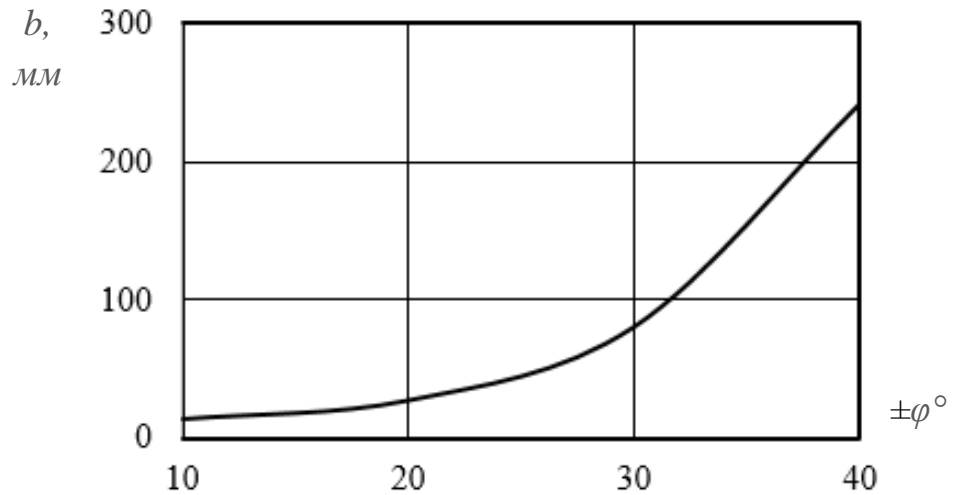


Рисунок 2.7 – Зависимость ширины ортотропной панели от угла армирования

(см. Таблицу 2.4) при  $q_x^{ycm} = 400 \text{ ГПа}\cdot\text{м}$  и  $q_x^p = 600 \text{ ГПа}\cdot\text{м}$ .

## 2.2 Проектирование сжатых металлических панелей с учетом обеспечения устойчивости и прочности при закритическом состоянии

Перепишем исходные соотношения геометрически нелинейных задач по определению напряженно – деформированного состояния тонких металлических панелей. Уравнение совместности деформаций имеет вид

$$L_1(F) - L_2(W) = 0, \quad (2.31)$$

где 
$$L_1(F) = \frac{1}{E} \left( \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} \right), \quad L_2(W) = \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}.$$

Нелинейное уравнение типа Кармана представим в виде равенства

$$L_3(F, W) - L_4(W) = 0, \quad (2.32)$$

где 
$$L_3(F, W) = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y},$$

$$L_4(W) = \frac{D}{\delta} \left[ \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} \right],$$

$F$  – функция напряжений,  $D$  – изгибная жесткость панели,  $E$  – модуль упругости материала панели.

Далее приведем алгоритм определения оптимальных параметров металлических прямоугольных панелей.

### 2.2.1 Определение оптимальных параметров гладких металлических панелей при сжатии

Сначала рассмотрим соотношения, приведенные в Таблице 2.5. Представленные соотношения иллюстрируют возможность определения толщин металлических панелей при ограничениях по статической прочности, устойчивости, а также прочности при закритическом состоянии.

Таблица 2.5 – Расчетные соотношения для определения толщины металлической шарнирно опертой прямоугольной панели при одноосном сжатии

Условия для проектирования панелей	Соотношения для определения напряжений	Соотношения для определения минимальных толщин панелей
Статическая прочность	$\sigma = \frac{P}{\delta b}$	$\delta = \frac{P}{\bar{\sigma} b}$
Устойчивость	$\sigma_{кр} = 3,6E \left( \frac{\delta}{b} \right)^2$	$\delta^2 = b^2 \frac{\bar{\sigma}_{уст}}{3,6E}$
Закритическое состояние	$\sigma_x = -\frac{f^2 E \pi^2}{8 b^2} - p_x,$ $\delta^3 \frac{\pi^2 E}{3(1-\mu^2)b^2} + \delta \frac{f^2 \pi^2 E}{8b^2} = q_x$	$\delta^3 + \delta \bar{\sigma}_x \zeta b^2 - 2q_x^p \zeta b^2 = 0,$ где $\zeta = \frac{3(1-\mu^2)}{\pi^2 E}$

В Таблице 2.5 обозначено:  $\bar{\sigma}$  – допускаемые по условиям прочности нормальные напряжения;  $\bar{\sigma}_{уст}$  – допускаемые по условиям устойчивости нормальные напряжения, которые определяются разработчиком воздушного судна на начальных этапах проектирования;  $q_x^p = p_x \delta$  – действующий на панель сжимающий поток при расчетном уровне нагружения.

Отметим, что приведенные в Таблице 2.5 соотношения для определения минимальных толщин панелей при закритическом состоянии соответствуют указанной выше методологии проектирования по закритическому состоянию [51]. Далее приведем пояснения для представленных соотношений. Для случая шарнирного опирания представим прогиб прямоугольной панели в виде

$$W = f \sin\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right), \quad (2.33)$$

где  $f$  – амплитуда прогиба,  $m$  – число полуволн в продольном направлении.

В результате подстановки прогиба (2.33) в геометрически нелинейное уравнение совместности деформаций (2.31) для случая сжатия может быть получена функция напряжений [51]

$$F = \frac{E a^2 f^2}{32b^2 m^2} \cos\left(\frac{2\pi mx}{a}\right) + \frac{E b^2 f^2 m^2}{32a^2} \cos\left(\frac{2\pi y}{b}\right) + \frac{p_x y^2}{2}. \quad (2.34)$$

Мембранные продольные напряжения потерявшей устойчивость панели в данном случае определяются по формуле

$$\sigma_x = -\frac{E f^2 m^2 \pi^2}{8a^2} \cos\left(\frac{2\pi y}{b}\right) - p_x, \quad (2.35)$$

Решение геометрически нелинейной задачи методом Бубнова – Галеркина сводится к решению уравнения

$$\delta^2 \bar{D}_{mn} + f^2 E_{mn} = \left(\frac{m}{a}\right)^2 p_x, \quad (2.36)$$

где

$$E_{mn} = E \left( \frac{m^4}{a^4} + \frac{1}{b^4} \right) \frac{\pi^2}{16}, \quad \bar{D}_{mn} = \pi^2 \frac{E}{12(1-\mu^2)} \left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{1}{b} \right)^2 \right]^2. \quad (2.37)$$

Будем считать, что продольные нормальные напряжения (2.35) могут достигать предельных по прочности значений  $\bar{\sigma}_x$  в потенциально – критических точках при условии выполнения равенства  $\cos(2\pi y/b) = 1$ . Выражая из уравнения (2.35) амплитуду прогиба получим следующее соотношение

$$f^2 = (\bar{\sigma}_x - p_x) \frac{8a^2}{E\pi^2 m^2}. \quad (2.38)$$

Подставляя прогиб (2.38) в уравнение (2.36), получим необходимое нелинейное уравнение, указанное в Таблице 2.5, относительно толщины прямоугольной панели

$$\delta^3 + \delta \frac{\bar{\sigma}_x}{b^2} \frac{3(1-\mu^2)}{\pi^2 E} - 2b^2 q_x^p \frac{3(1-\mu^2)}{\pi^2 E} = 0, \quad (2.39)$$

где  $q_x^p$  – сжимающий поток при расчетном уровне нагружения.

Далее воспользуемся предложенной выше идеологией, рассматривая два уровня нагружения и две переменные величины – толщину и ширину прямоугольной панели. Из известного выражения для критических напряжений при рассмотрении первого уровня нагружения, на котором надо обеспечить устойчивость, запишем

$$b^2 = \frac{3,6E}{q_x^{уст}} \delta^3. \quad (2.40)$$

Также далее следует учесть, что используемое соотношение получено при определении числа полуволн  $m$  в продольном направлении [17]

$$m = \frac{a}{b}. \quad (2.41)$$

Для получения выражения для определения оптимальной толщины панели необходимо в выражение (2.39) подставить обозначения (2.37) – (2.38), затем соотношение для чисел полуволн  $m$  (2.41) и далее исключить ширину панели  $b$  с помощью выражения (2.40). Результирующее выражение относительно толщины панели после проведенных преобразований содержат сжимающие потоки, действующие на двух уровнях нагружения и предельные по прочности напряжения

$$\delta = \frac{2q_x^p - q_x^{уст}}{\sigma_x}. \quad (2.42)$$

В инженерных расчетах авиационных конструкций при условии учета эксплуатационных потоков  $q_x^{уст} = q_x^{эксн}$  следует рассматривать величину коэффициента безопасности  $f_{безоп} = 1.5$ . В этом случае для определения оптимальной толщины прямоугольной панели получим простое равенство

$$\delta = \frac{2q_x^{эксн}}{\sigma_x} = \frac{1,333q_x^p}{\sigma_x}, \quad (2.43)$$

которое вместе с выражением (2.40) определяет оптимальные параметры прямоугольной металлической панели.

Отметим также, что в данном случае сжатых панелей можно переписать известное выражение [18] для редуцированного коэффициента через действующие на двух уровнях потоки

$$\varphi = \frac{1 + (a/b)^4}{3 + (a/b)^4} + \frac{2}{3 + (a/b)^4} \frac{q^{уст}}{q^p}. \quad (2.44)$$

Таким образом, представленные соотношения (2.42), (2.40) и (2.44) позволяют проводить оценку разрабатываемых конструктивных решений на ранних этапах проектирования несущих панелей.

Рассмотрим здесь вариант методики проектирования сжатых панелей при использовании более сложного критерия прочности

$$\sigma_{экв} \geq \sqrt{\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2}. \quad (2.45)$$

В этом случае для поперечных мембранных напряжений воспользуемся равенством

$$\sigma_y = -\frac{Ef^2 \pi^2}{8b^2} \cos\left(\frac{2\pi mx}{a}\right). \quad (2.46)$$

При использовании равенства  $\cos(2\pi mx/a) = 1$ , а также соотношений (2.35) и (2.46) из выражения (2.45) можно получить квадратное уравнение относительно амплитуды прогиба  $f^2$ . Подставляя результат указанного преобразования в уравнение (2.36) после некоторых преобразований можно получить выражение для определения оптимальной толщины панели в виде

$$\delta = \frac{\sqrt{3(q_x^p)^2 - 3q_x^p q_x^{уст} + (q_x^{уст})^2}}{\sigma_{экв}}. \quad (2.47)$$

Приравнивая эквивалентные напряжения к предельным по условиям прочности напряжениям  $\bar{\sigma}$  можно получить оптимальную толщину панели. Отметим, что здесь и далее при выборе величины напряжений  $\bar{\sigma}$  для металлических конструкций целесообразно исходить из условия:  $\bar{\sigma} = \sigma_T$ , где  $\sigma_T$  – предел текучести. Также при выборе допускаемых напряжений следует учитывать условие  $\sigma^{уст} \geq \sigma_{нц}$ .

Рассмотрим пример панели из металлического материала со следующими характеристиками:  $E = 70 \text{ ГПа}$ ,  $\mu = 0.3$ ,  $\bar{\sigma} = 0.42 \text{ ГПа}$ . В Таблице 2.6 и Таблице 2.7 приведены результаты расчетов при варьировании величинами нагрузок при различных уровнях нагружения. Приведенный параметр  $\Delta\% = 100/\omega$  показывает процент нагрузки, при которой принята возможность потери устойчивости. В указанных таблицах представлены результаты определения оптимальных параметров по двум формулам (2.42) и (2.47), которые соответствуют двум критериям прочности.

Таблица 2.6 – Оптимальные параметры металлической панели при изменении уровня нагрузки, при которой допустима потеря устойчивости

$q_x^{уст} \cdot 10^3$ , ГПа·м		0.30	0.25	0.20	0.15	0.10
$q_x^p \cdot 10^3$ , ГПа·м		0.45	0.45	0.45	0.45	0.45
$\omega$		1.5	1.8	2.25	3.0	4.5
$\Delta\%$		67	55.5	44.4	33.3	22.2
Формулы (2.42) и (2.40)	$\delta$ , мм	1.43	1.55	1.67	1.79	1.9
	$b$ , мм	49.6	61.3	76.6	98.0	132.3
Формулы (2.47) и (2.40)	$\delta$ , мм	1.28	1.37	1.47	1.56	1.65
	$b$ , мм	42.5	51.2	62.95	79.8	107.1



Таблица 2.7 – Оптимальные параметры металлической панели при изменении уровня разрушающей нагрузки

$q_x^{уст} \cdot 10^3, \text{ ГПа} \cdot \text{м}$		0.30	0.30	0.30	0.30	0.30
$q_x^p \cdot 10^3, \text{ ГПа} \cdot \text{м}$		0.45	0.55	0.65	0.75	0.90
$\omega$		1.5	1.83	2.167	2.5	3.0
$\Delta\%$		67	54.5	46.2	40.0	33.3
Формулы (2.42) и (2.40)	$\delta, \text{ мм}$	1.43	1.9	2.38	2.86	3.57
	$b, \text{ мм}$	49,6	76.4	106.7	140.3	196.1
Формулы (2.47) и (2.40)	$\delta, \text{ мм}$	1.28	1.69	2.09	2.5	3.11
	$b, \text{ мм}$	42.5	63.7	87.9	114.8	159.6

Из результатов, приведенных в Таблице 2.6 и Таблице 2.7, видно, что уровень допустимости потери устойчивости может приводить к различным рекомендациям при разработке конструкций. В данном случае для шарнирно опертой панели при сжатии оптимальные параметры определяются по формулам (2.40) и (2.42), а также по соотношениям (2.40) и (2.47).

Для качественной оценки проектируемых панелей целесообразно ввести безразмерный параметр  $\zeta = \delta/b$ . Из полученных выше уравнений можно получить

$$\zeta = \frac{\delta}{b} = \sqrt{\frac{q_x^{уст} \bar{\sigma}_x}{3,6E(2q_x^p - q_x^{уст})}},$$

и для панелей авиационных конструкций с учетом коэффициента безопасности  $f_{безоп} = 1.5$  имеем

$$\zeta = \frac{\delta}{b} = \sqrt{\frac{\bar{\sigma}_x}{3,6E \cdot 2q_x^{уст}}}.$$

Отметим, что при выводе записанных соотношений не учитывались конструктивные и технологические ограничения. Все рассуждения были

нацелены на удовлетворение прочностных ограничений и получение минимальных запасов по устойчивости и по прочности.

В дополнение к приведенным в Таблице 2.6 и Таблице 2.7, на Рисунке 2.8 и Рисунке 2.9 представлены зависимости для толщины и ширины панели при постоянной величине расчетного (разрушающего) потока и переменном потоке  $q_x^{уст}$ , при котором обеспечивается устойчивость.

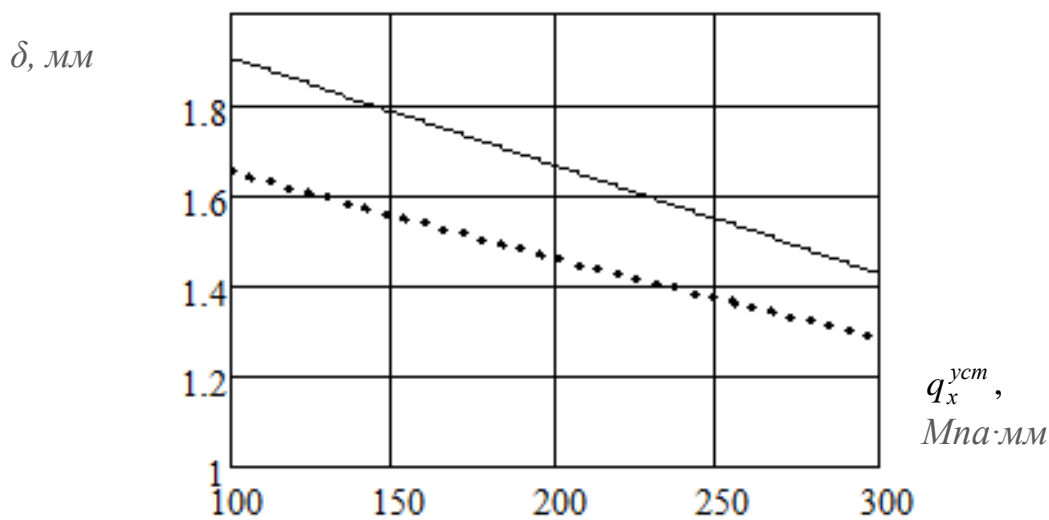


Рисунок 2.8 – Зависимость толщины панели от потока  $q_x^{уст}$  при  $q_x^p = 450 \text{ МПа}\cdot\text{мм}$

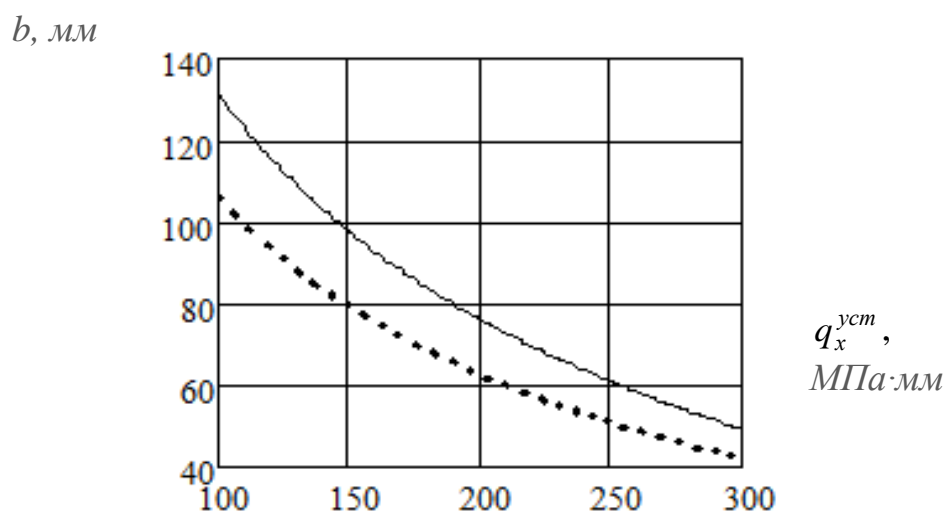


Рисунок 2.9 – Зависимость ширины панели от потока  $q_x^{уст}$  при  $q_x^p = 450 \text{ МПа}\cdot\text{мм}$

На Рисунке 2.10 и Рисунке 2.11 приведены зависимости для толщины и ширины панели при постоянной величине потока  $q_x^{ycm}$ , при котором должна быть обеспечена устойчивость, и переменном расчетном потоке  $q_x^p$ . Отметим, что на Рисунках 2.8 – 2.11 сплошные линии относятся к использованию критерия прочности по продольным напряжениям  $\sigma_x = \bar{\sigma}$ , а пунктирные линии получены с помощью эквивалентных напряжений (2.45).

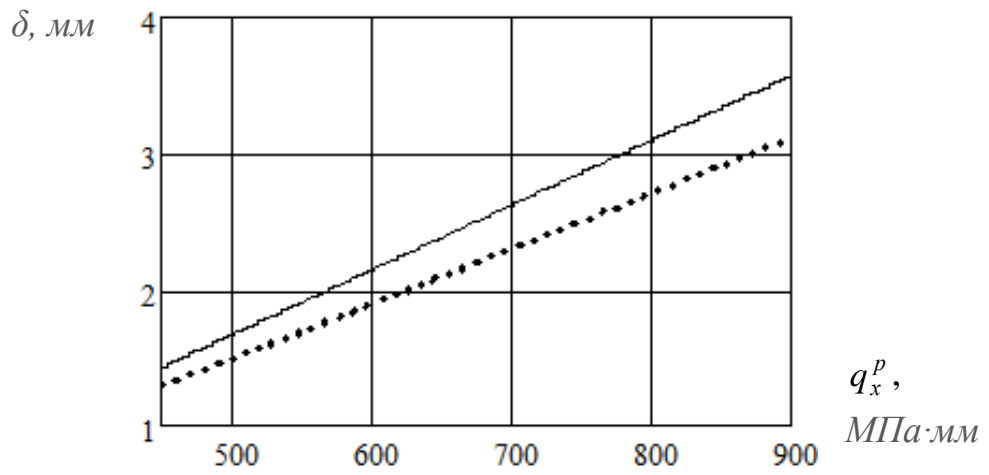


Рисунок 2.10 – Зависимость толщины панели от потока  $q_x^p$  при  $q_x^{ycm} = 300 \text{ МПа}\cdot\text{мм}$

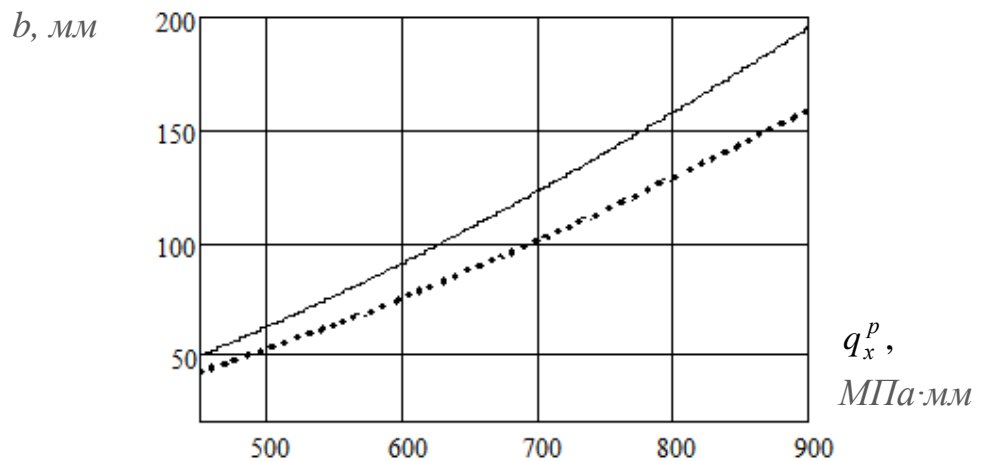


Рисунок 2.11 – Зависимость ширины панели от потока  $q_x^p$  при  $q_x^{ycm} = 300 \text{ МПа}\cdot\text{мм}$

## 2.2.2 Определение оптимальных параметров гладких металлических панелей при сдвиге

Проведем аналогичные рассуждения для задачи оптимального проектирования гладких металлических панелей при действии касательных потоков. Также рассмотрим соотношения, приведенные в Таблице 2.8, где можно убедиться в правомерности представленных выше рассуждений для случая сдвига.

Таблица 2.8 – Расчетные соотношения для определения толщины металлической прямоугольной панели при сдвиге

Условия для проектирования панелей	Соотношения для вычисления напряжений	Соотношения для определения минимальных толщин панелей
Статическая прочность	$\tau = \frac{Q}{\delta b}$	$\delta = \frac{Q}{\tau_{\epsilon} b}$
Устойчивость	$\tau_{кр} = 5,1E \left( \frac{\delta}{b} \right)^2$	$\delta^2 = b^2 \frac{\bar{\tau}_{уст}}{5,1E}$
Закритическое состояние	$\tau_{xy} = -f^2 \frac{\pi^2 E}{8b^2} 0,3143 - p_{xy},$ $\delta^3 \frac{5,1E}{b^2} + f^2 \delta \frac{E\pi^2}{b^2} 0,0589 = q_{xy}^p$	$\delta^3 \frac{5,1E}{b^2} + 1,5\bar{\tau}_{xy} \delta = 2,5q_{xy}^p$

В Таблице 2.8 используются обозначения:  $Q$  – действующая перерезывающая сила;  $\bar{\tau}_{\epsilon}$  – допускаемые по условиям статической прочности касательные напряжения;  $\bar{\tau}_{уст}$  – допускаемые по условиям устойчивости касательные напряжения, которые определяются разработчиком воздушного судна;  $q_{xy}^p = p_{xy} \delta$  – действующий на панель сдвиговой поток при расчетном уровне нагружения.

Рассмотрим случай воздействия на металлическую прямоугольную панель сдвиговых потоков и представим прогиб в виде [9]

$$W = f \cdot \sin \frac{\pi y}{b} \sin \frac{\pi(x - \alpha y)}{s}, \quad (2.48)$$

где  $\alpha$  – тангенс угла наклона волн при выпучивании,  $s$  – расстояние между узловыми линиями.

Тогда из уравнения совместности деформаций (2.1) получим функцию напряжений

$$F = E \frac{f^2}{32} \left\{ \frac{E}{G_\alpha} \left( \frac{s}{b} \right)^2 \cos \frac{2\pi(x - \alpha y)}{s} + \left( \frac{b}{s} \right)^2 \cos \frac{2\pi y}{b} \right\} - \frac{p_x y^2}{2} - \frac{p_y x^2}{2} + p_{xy} xy, \quad (2.49)$$

где обозначено:  $G_\alpha = (1 + \alpha^2)^2 / E$ .

Далее будем считать, что разрушение по условиям прочности в данном случае реализуется при достижении предельных касательных напряжений  $\bar{\tau}_{xy}$ . Запишем равенство для касательных напряжений в виде

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = f^2 \Delta_{xy} - p_{xy}, \quad (2.50)$$

где  $\Delta_{xy} = \frac{\pi^2}{8} \frac{\alpha}{G_\alpha b^2} \cos \frac{2\pi(x - \alpha y)}{s}$ , и далее для определения оптимальной толщины

будем считать, что при воздействии максимальных напряжений в критических точках имеем  $\cos \frac{2\pi(x - \alpha y)}{s} \rightarrow 1$ . Из уравнения (2.50) с учетом достижения

предельных касательных напряжений получим

$$f^2 = \frac{(\bar{\tau}_{xy} \delta - q_{xy}) 8b^2}{E \pi^2 \delta \cdot 0,3143}. \quad (2.51)$$

Используя далее процедуру метода Бубнова – Галеркина с учетом геометрически нелинейного уравнения (2.2) в общем виде при  $f \neq 0$  получим

$$\frac{\pi^4}{64} \left[ \frac{1}{G_\alpha b^4} + \frac{E}{s^4} \right] f^2 + \frac{E \delta^2}{12(1 - \mu^2)} \frac{\pi^4}{4b^3 s^3} \left[ \frac{b^2}{s^2} (1 + \alpha^2)^2 + \frac{s^2}{b^2} + 2 + 6\alpha^2 \right] + \quad (2.52)$$

$$-P_x \frac{\pi^2}{4s^2} - P_y \frac{\pi^2}{4} \left( \frac{1}{b^2} + \frac{\alpha^2}{s^2} \right) - P_{xy} \frac{\alpha\pi^2}{2s^2} = 0.$$

При малых прогибах выражение (2.48) перепишем в виде

$$q_{xy} = p_{xy} \delta = \frac{E\delta^2}{12(1-\mu^2)} \frac{\pi^2}{2b^2s} \left[ \frac{b^2}{s^2} (1+\alpha^2)^2 + \frac{s^2}{b^2} + 2 + 6\alpha^2 \right], \quad (2.53)$$

который совпадает с равенством из работы [18].

При минимизации выражения (2.49) по  $\alpha$  и по  $s$  можно получить критические параметры волнообразования  $\alpha^2 = 1/2$  и  $(s/b)^2 = 3/2$  [17]. При решении линейной задачи устойчивости можно определить критический сдвиговой поток изотропной панели по известной формуле [17]

$$q_{xy}^{ycm} = \frac{5,1E\delta^3}{b^2}, \quad (2.54)$$

откуда имеем

$$b^2 = \frac{5,1E\delta^3}{q_{xy}^{ycm}}. \quad (2.55)$$

Далее при действии касательных потоков на расчетном уровне с учетом указанных параметров волнообразования из уравнения (2.52) и прогиба (2.51) имеем

$$\delta^3 \frac{5,1E}{b^2} + 1,5\bar{\tau}_{xy} \delta = 2,5q_{xy}^p. \quad (2.56)$$

Подставляя амплитуду прогиба из (2.47) в выражение (2.54) получим уравнение для определения оптимальной толщины

$$\delta = \frac{2,5q_{xy}^p - q_{xy}^{ycm}}{1,5\bar{\tau}_{xy}}, \quad (2.57)$$

и для авиационных конструкций при коэффициенте  $f_{безон}=1.5$  имеем

$$\delta = \frac{3,167q_{xy}^{ycm}}{\bar{\tau}_{xy}} = \frac{2,1q_{xy}^p}{\bar{\tau}_{xy}}. \quad (2.58)$$

Рассмотрим также другой вариант методики проектирования панелей при действии касательных потоков при использовании критерия

$$\sigma_{\text{экв}} \geq \sqrt{\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2}. \quad (2.59)$$

Для определения мембранных напряжений, возникающих при потере устойчивости, с учетом определенных критических параметров волнообразования воспользуемся равенствами

$$\sigma_x = -\frac{Ef^2 \pi^2}{8b^2} \frac{8}{9}, \quad \sigma_y = -\frac{Ef^2 \pi^2}{8b^2} \frac{4}{9}, \quad \tau_{xy} = -\frac{Ef^2 \pi^2}{8b^2} \frac{4}{25\sqrt{2}} - p_{xy}. \quad (2.60)$$

Подставляя равенства (2.58) в критерий (2.57) можно получить квадратное уравнение относительно амплитуды  $f^2$ . Подставляя далее результат указанного преобразования в уравнение (2.48) после преобразований можно получить выражение для определения оптимальной толщины панели в виде

$$\delta = \frac{\sqrt{7,3(q_{xy}^p)^2 - 7,1q_{xy}^p q_{xy}^{ycm} + 2,8(q_{xy}^{ycm})^2}}{\sigma_{\text{экв}}}. \quad (2.61)$$

Приравнивая эквивалентные напряжения к предельным по условиям прочности напряжениям можно получить оптимальную толщину панели.

### 2.2.3 Определение оптимальных параметров металлических панелей при комбинированном нагружении

Теперь рассмотрим общий случай комбинированного нагружения панели продольными сжимающими и касательными потоками, когда получение аналитического решения затруднительно. Пусть компоненты нагружения изменяются пропорционально одному параметру:  $q_x = \xi \bar{q}_x$ ,  $q_{xy} = \xi \bar{q}_{xy}$ . Здесь при рассмотрении задач устойчивости и закритического поведения также будем использовать вид прогиба, который указан в соотношении (2.45) и является достаточно корректным при описании процесса потери устойчивости при комбинированном нагружении. Тогда функция напряжения  $F$  и решение геометрически нелинейной задачи сохраняют вид соотношений (2.46) и (2.48).

При действии комбинации потоков при малых прогибах выражение (2.48) перепишем в виде

$$q_x^{уст} + 2q_{xy}^{уст} \alpha = \frac{E\delta^2}{12(1-\mu^2)} \frac{\pi^2}{2b^2 s} \left[ \frac{b^2}{s^2} (1+\alpha^2)^2 + \frac{s^2}{b^2} + 2 + 6\alpha^2 \right], \quad (2.62)$$

где  $q_x^{уст} = p_x^{уст} \delta$ ,  $q_{xy}^{уст} = p_{xy}^{уст} \delta$  – действующие потоки соответствующие уровню нагружения, при котором необходимо обеспечить устойчивость.

Далее при использовании параметра  $\gamma = b^2/s^2$  и системы уравнений

$$\partial \xi / \partial \alpha = 0, \quad \partial \xi / \partial \gamma = 0, \quad (2.63)$$

можно по аналогии со случаем сдвига и работы [18] численным образом определить критические параметры волнообразования при потере устойчивости ( $\alpha_{крит}, \gamma_{крит}$ ). Отметим, что угол наклона волн при потере устойчивости будет зависеть от соотношений сжимающего и сдвигового потока.

Далее в соответствии с предложенным выше приемом сведения задачи оптимизации к одному уравнению потребуются выражения относительно ширины панели. В данном случае можно воспользоваться более простыми соображениями. В работе Л.И. Балабуха [9] получены аналитические решения задач устойчивости для ортотропных панелей и получена известная формула для определения критических касательных напряжений (2.50). Также в работе [9] было получено аналитическое решение задачи устойчивости для ортотропных при одновременном действии сжимающих и касательных напряжений. Запишем это выражение с учетом обозначений данной работы

$$\sigma_x^{экс} \delta + \frac{(\tau_{xy}^{экс} \delta)^2}{\frac{2\pi^2}{b^2} \left( 2D_y + D_3 \sqrt{\frac{D_y}{D_x}} \right)} = \frac{2\pi^2}{b^2} \left( D_3 + \sqrt{D_x D_y} \right), \quad (2.64)$$

Переписывая это уравнение для металлических панелей через действующие потоки для первого уровня нагружения, при которых необходимо обеспечить устойчивость, имеем



$$q_x^{ycm} b^2 + \frac{2(q_{xy}^{ycm})^2 b^4 (1 - \mu^2)}{\pi^2 E \delta^3} - \frac{\pi^2 \delta^3 E}{3(1 - \mu^2)} = 0, \quad (2.65)$$

и получаем квадратное уравнение относительно ширины панели  $b^2$  при известной толщине.

Далее в рассматриваемой задаче определения оптимальной толщины металлической панели для второго уровня нагружения при комбинированном нагружении необходимо воспользоваться комплексным критерием прочности. Считая, что на панель действует комбинированные нагрузки, воспользуемся следующим выражением для критерия прочности

$$\sigma_{экр} = \sqrt{\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau^2}. \quad (2.66)$$

причем мембранные напряжения в срединной поверхности потерявшей устойчивость прямоугольной металлической панели могут определяются следующими равенствами

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -f^2 \Delta_x - p_x, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -f^2 \Delta_y, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = f^2 \Delta_{xy} - p_{xy}, \quad (2.67)$$

где

$$\Delta_x = -\frac{\pi^2}{8} \left\{ \frac{\alpha^2}{G_\alpha b^2} \cos \frac{2\pi(x - \alpha y)}{s} + \frac{E}{s^2} \cos \frac{2\pi y}{b} \right\},$$

$$\Delta_y = -\frac{\pi^2}{8} \left\{ \frac{1}{G_\alpha b^2} \cos \frac{2\pi(x - \alpha y)}{s} \right\}, \quad \Delta_{xy} = \frac{\pi^2}{8} \frac{\alpha}{G_\alpha b^2} \cos \frac{2\pi(x - \alpha y)}{s}.$$

Перепишем полученные выражения для случая совместного действия продольными сжимающими  $q_x^p = p_x \delta$  и касательными  $q_{xy}^p = p_{xy} \delta$  потоками. Перепишем выражения (2.67) с учетом действия потоков в виде

$$\sigma_x \delta = -\delta \Delta_x f^2 - q_x^p, \quad \sigma_y \delta = -\delta \Delta_y f^2, \quad \tau_{xy} \delta = -\delta \Delta_{xy} f^2 - q_{xy}^p. \quad (2.68)$$

Далее нелинейное уравнение (18) перепишем в виде

$$\frac{\pi^4}{64} \left[ \frac{1}{G_\alpha b^4} + \frac{E}{s^4} \right] f^2 + \frac{E \delta^2}{12(1 - \mu^2)} \frac{\pi^4}{4b^3 s^3} \left[ \frac{b^2}{s^2} (1 + \alpha^2)^2 + \frac{s^2}{b^2} + 2 + 6\alpha^2 \right] + \quad (2.69)$$

$$-P_x \frac{\pi^2}{4s^2} - P_y \frac{\pi^2}{4} \left( \frac{1}{b^2} + \frac{\alpha^2}{s^2} \right) - P_{xy} \frac{\alpha \pi^2}{2s^2} = 0.$$

Преобразование равенств (2.66), (2.68) и (2.69) можно провести следующим образом. Сначала следует подставить потоки из (2.68) в критерий прочности (2.66), который также следует умножить на толщину. Далее выражая амплитуду прогиба из (2.69) в полученное на предыдущем шаге рассуждений соотношение, можно получить искомое нелинейное уравнение для определения толщины.

### 2.3 Проектирование сжатых композитных панелей с учетом обеспечения устойчивости и прочности при закритическом состоянии с учетом жестких граничных условий

Теперь воспользуемся приведенным алгоритмом определения оптимальных параметров жестко оперных по длинным сторонам ортотропным панелям, нагруженных продольными сжимающими усилиями.

Запишем выражение для прогиба панели в виде (Рисунок 2.12)

$$W = f \sin(\alpha x) \sin^2(\beta y), \quad (2.70)$$

где  $f$  – амплитуда прогиба;  $\alpha = \pi m/a$ ,  $\beta = \pi/b$  – параметры волнообразования,  $m$  – число полуволин в продольном направлении. В данном случае будем считать, что для длинных пластин  $n=1$ .

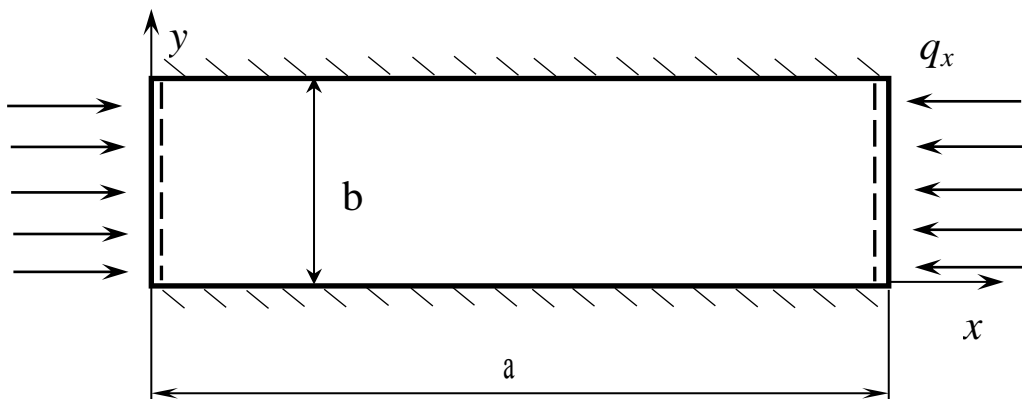


Рисунок 2.12 – Прямоугольная ортотропная панель при действии сжимающих усилий

Далее воспользуемся методом Бубнова – Галеркина и с учетом указанного выше выражения для прогиба (2.70) и уравнения совместности деформаций (2.1) можно получить функцию напряжений в виде

$$F = \frac{f^2}{32} \left[ E_y \left( \frac{\beta}{\alpha} \right)^2 \cos 2\alpha x + E_x \left( \frac{\alpha}{\beta} \right)^2 \cos 2\beta y - \frac{E_x}{16} \left( \frac{\alpha}{\beta} \right)^2 \cos 4\beta y - \right. \\ \left. - \frac{\alpha^2 \beta^2}{G_{\alpha\beta}} \cos 2\alpha x \cos 2\beta y \right] - p_x \frac{y^2}{2}, \quad (2.71)$$

где

$$G_{\alpha\beta} = \frac{\alpha^4}{E_y} + \left( \frac{1}{G_{xy}} - \frac{2\mu_{xy}}{E_y} \right) \alpha^2 \beta^2 + \frac{\beta^4}{E_x}.$$

Напряжения в срединной поверхности потерявшей устойчивость ортотропной прямоугольной панели, исходя из определения функции напряжений, определяются по формулам

$$\sigma_x = -\frac{f^2}{8} \left[ E_x \alpha^2 \cos 2\beta y - \frac{E_x \alpha^2}{4} \cos 4\beta y - \right. \\ \left. - \frac{\alpha^2 \beta^4}{G_{2\beta}} \cos 2\alpha x \cos 2\beta y \right] - p_x, \quad (2.72)$$

$$\sigma_y = -\frac{f^2}{8} \left[ E_y \beta^2 \cos 2\alpha x - \frac{\alpha^4 \beta^2}{G_{2\beta}} \cos 2\alpha x \cos 2\beta y \right],$$

$$\tau_{xy} = \frac{f^2 \alpha^3 \beta^3}{8G_{2\beta}} \sin 2\alpha x \sin 2\beta y.$$

Применение процедуры метода Бубнова – Галеркина в данном случае приводит к следующему равенству

$$\frac{1}{4} f^2 \left[ \frac{17}{16} E_x + \frac{\beta^4}{\alpha^4} E_y + \frac{2\beta^4}{G_{2\beta}} \right] + \\ + \left[ 3D_{11} + 8D_3 \frac{\beta^2}{\alpha^2} + 16D_{22} \frac{\beta^4}{\alpha^4} \right] \frac{1}{\delta} = \frac{3p_x}{\alpha^2}, \quad (2.73)$$

которое перепишем в виде

$$\frac{1}{4} f^2 E_{mn} + \bar{D}_{mn} \delta^2 = \frac{3p_x}{\alpha^2}, \quad (2.74)$$

где

$$E_{mn} = \frac{17}{16} E_x + \frac{\beta^4}{\alpha^4} E_y + \frac{2\beta^4}{G_{2\beta}},$$

$$\bar{D}_{mn} = \frac{1}{12} \left[ 3\bar{E}_x + 8(\bar{E}_x \mu_{xy} + 2G_{xy}) \frac{\beta^2}{\alpha^2} + 16\bar{E}_y \frac{\beta^4}{\alpha^4} \right].$$

При малых прогибах уравнение (2.73) принимает вид

$$q_x = p_x \delta = \beta^2 \left[ D_{11} \left( \frac{\alpha}{\beta} \right)^2 + \frac{8D_3}{3} + \frac{16D_{22}}{3} \left( \frac{\beta}{\alpha} \right)^2 \right], \quad (2.75)$$

который позволяет определить критические сжимающие усилия. Вводя параметр  $\lambda = (\alpha/\beta)^2$  и используя условие минимизации  $\partial N_x / \partial \lambda = 0$  можно получить критическое число полуволн в продольном направлении  $m = (a/b) \sqrt{16E_y/3E_x}$  и выражение для критических сжимающих усилий

$$N_x^{kp} = \frac{8\pi^2}{b^2} \left[ \sqrt{\frac{D_{11}D_{22}}{3}} + \frac{D_3}{3} \right], \quad (2.76)$$

откуда имеем

$$b^2 = \frac{8\pi^2}{q_x^{ycm}} \frac{\delta^3}{12} \left[ \sqrt{\frac{\bar{E}_x \bar{E}_y}{3}} + \frac{\bar{E}_x \mu_{xy} + 2G_{xy}}{3} \right]. \quad (2.77)$$

Согласно предлагаемой методики далее будем рассматривать систему уравнений (2.72) и (2.74) при условии достижения максимальных по модулю напряжений  $\sigma_x = \bar{\sigma}_x$ . Потенциально – критические точки с координатами  $(x, y)$  определяются из условий равенства нулю соответствующих производных выражения для продольных напряжений (2.72) и кроме того для инженерных

методик на ранних этапах проектирования имеем

$$f^2 = \left( \bar{\sigma}_x - \frac{q_x^p}{\delta} \right) / E_{\alpha\beta}, \quad (2.78)$$

где

$$E_{\alpha\beta} = \frac{1}{32} \left[ E_x \alpha^2 \cos 2\beta y - \frac{E_x \alpha^2}{4} \cos 4\beta y - \frac{\alpha^2 \beta^4}{G_{2\beta}} \cos 2\alpha x \cos 2\beta y \right] \approx \frac{3E_x \alpha^2}{32}.$$

Отметим также, что имеет место упрощение величины

$$E_{mn} = \frac{17}{16} E_x + \frac{\beta^4}{\alpha^4} E_y + \frac{2\beta^4}{G_{2\beta}} = \frac{20E_x}{16} + \frac{2E_x}{\left[ \frac{19}{3} + \left( \frac{1}{G_{xy}} - \frac{2\mu_{xy}}{E_y} \right) E_y \sqrt{\frac{16E_y}{3E_x}} \right]}, \quad (2.79)$$

а сжимающий поток, входящая в уравнение (2.74), есть

$$q_x^p = \frac{\alpha^2}{3} \bar{D}_{mn} \delta^3. \quad (2.80)$$

Далее подставляя (2.78) - (2.80) в (2.74) запишем

$$\delta = \frac{q_x^p (\kappa + 1) - q_x^{ycm} \kappa}{\bar{\sigma}_x}, \quad (2.81)$$

где полученный коэффициент

$$\kappa \approx \frac{9}{8} \frac{5}{4} \frac{1}{\frac{19}{3} + \left( \frac{E_y}{G_{xy}} - 2\mu_{xy} \right) \sqrt{\frac{16E_y}{3E_x}}},$$

показывает очень незначительную зависимость от ортотропии структуры панели.

В изотропном случае при  $\kappa \approx 0,8$  можно получить упрощенное выражение с учетом коэффициента безопасности  $f_{безоп} = 1,5$  имеем

$$\delta = \frac{1,8q_x^p - 0,8q_x^{ycm}}{\bar{\sigma}_x} \approx \frac{1,9q_x^{ycm}}{\bar{\sigma}_x}. \quad (2.82)$$

Отметим также, что для варианта шарнирного опирания ортотропной панели (без учета дополнительных коэффициентов безопасности  $f_{don}$ , которые, как правило, вводятся при проектировании композитных конструкций) может быть получено точное решение задачи в аналогичной постановке

$$\delta = \frac{2q_x^p - q_x^{ycm}}{\sigma_x} = \frac{2q_x^{ycm}}{\sigma_x} \quad (2.83)$$

Отметим также, что дополнительные коэффициенты безопасности  $f_{don}$  определяются влиянием влаги, температуры, а также разбросом прочностных и жесткостных характеристик. Указанные коэффициенты должны были бы учитываться на двух рассматриваемых уровнях нагружения. Для исключения излишнего усложнения полученных аналитических соотношений в данной случае коэффициенты  $f_{don}$  не указаны. Рассматривая возможность применения полученных результатов (2.82) или (2.83) для конструкторских работ, например, над многозамкнутым закрылком, на ранних этапах проектирования можно определить оптимальные толщины и соответствующие расстояния между стенками.

Рассмотрим далее гладкие панели из углепластика, который имеет следующие характеристики слоя:  $E_1=125 \text{ ГПа}$ ,  $E_2=9 \text{ ГПа}$ ,  $G_{12}=5 \text{ ГПа}$ ,  $\mu_{21}=0.28$ ,  $\bar{\sigma}_1=0.9 \text{ ГПа}$ . При стандартной укладке  $0^\circ/\pm 45^\circ/90^\circ$  и относительных толщинах  $h_0=0.4$ ,  $h_{45}=0.5$ ,  $h_{90}=0.1$ . Отметим, что для рассматриваемой укладки предел прочности равен  $\bar{\sigma}_x=0.459 \text{ ГПа}$ . В Таблице 2.9 и Таблице 2.10 приведены результаты параметрических расчетов при варьировании величинами нагрузок при различных уровнях нагружения. Параметр  $\Delta\% = 100/\omega$  показывает процент нагрузки, при которой принята возможность допустимости потери устойчивости.

Таблица 2.9 – Оптимальные параметры гладких углепластиковых панелей при жестком опирании и при изменении уровня нагрузки, при которой допустима потеря устойчивости

$q_x^{ycm} \cdot 10^3, \text{ГПа} \cdot \text{м}$	0.40	0.359	0.24	0.182	0.15
$q_x^p \cdot 10^3, \text{ГПа} \cdot \text{м}$	0.60	0.60	0.60	0.60	0.60
$\omega$	1.5	1.67	2.5	3,3	4
$\Delta\%$	67	60	40	30	25
$\delta, \text{мм}$	1.44	1.46	1.54	1.58	1.6
$b, \text{мм}$	47.97	52.1	68.8	82.0	92.1

Таблица 2.10 – Оптимальные параметры гладких углепластиковых панелей при жестком опирании и при изменении уровня разрушающей нагрузки

$q_x^{ycm} \cdot 10^3, \text{ГПа} \cdot \text{м}$	0.40	0.40	40	40	40
$q_x^p \cdot 10^3, \text{ГПа} \cdot \text{м}$	0.60	0.668	1.0	1.32	1.6
$\omega$	1.5	1.67	2.5	3,3	4
$\Delta\%$	67	60	40	30	25
$\delta, \text{мм}$	1.44	1.63	2.57	3.47	4.27
$b, \text{мм}$	47.97	57.9	114.7	180.4	245.5

Из приведенных в Таблице 2.9 и Таблице 2.10 численных результатов, видно, что уровень нагружения при допустимости ранней потери устойчивости может приводить к различным рекомендациям при разработке конструкций.

Рассмотрим также традиционный вопрос об оптимальном армировании, возникающий при проектировании композитных конструкций. В данном случае для сжатой панели при жестком опирании оптимальные параметры определяются по формулам (2.77) и (2.82). Для анализа целесообразно ввести безразмерный параметр  $\zeta = \delta/b$ . Из указанных выше соотношений можно получить

$$\zeta = \frac{\delta}{b} \approx \sqrt{\frac{3q_x^{ycm} \bar{\sigma}_x}{2\pi^2 \left[ \sqrt{\frac{\bar{E}_x \bar{E}_y}{3} + \frac{\bar{E}_x \mu_{xy} + 2G_{xy}}{3}} \right] (1,3q_x^p - 0,3q_x^{ycm})}},$$

и для авиационных конструкций с учетом коэффициента безопасности  $f_{безоп}=1.5$  (без учета коэффициента  $f_{дон}$ ) запишем

$$\zeta = \frac{\delta}{b} = \sqrt{\frac{\bar{\sigma}_x}{1,1\pi^2 \left[ \sqrt{\frac{\bar{E}_x \bar{E}_y}{3} + \frac{\bar{E}_x \mu_{xy} + 2G_{xy}}{3}} \right]}}.$$

Отметим, что в представленные соотношения учитывают ограничения и по прочности, и по устойчивости. Для анализа оптимального армирования в Таблице 2.11 показано изменение параметра  $\zeta$  в зависимости от угла армирования при использовании структуры  $\pm\varphi$ .

Таблица 2.11 – Оптимальные параметры углепластиковой панели при жестком опирании и при изменении угла армирования при уровнях нагружения

$$q_x^{ycm} = 400 \text{ ГПа}\cdot\text{м} \text{ и } q_x^p = 600 \text{ ГПа}\cdot\text{м}$$

$\pm\varphi^\circ$	10	20	30	40
$\bar{\sigma}_x$ , ГПа	0.827	0.602	0.33	0.168
$\zeta$	0.022	0.027	0.042	0.077
$\delta$ , мм	0.8	1.1	2.0	3.92
$b$ , мм	36.0	41.3	47.3	51.1

По представленным численным результатам отметим следующее. Предел прочности композитной панели при этом определялся по критерию разрушения волокон. Реализация прочностных и жесткостных характеристик панели со структурой  $\pm\varphi^\circ$  возможна при стандартной укладке  $0^\circ/\pm 45^\circ/90^\circ$ . Полученные в работе аналитические соотношения учитывают только прочностные ограничения и не учитывают конструктивные и технологические ограничения. При



проектировании авиационных конструкций, как правило, реализуется компромиссное решение, которое носит субъективный характер и повышенные весовые характеристики.

## 2.4 Заключение по главе 2

В данной главе диссертационной работы получены следующие результаты:

1. Предложена новая методика проектирования оптимальных гладких композитных панелей в новой постановке задачи при ограничениях по устойчивости и прочности при закритическом поведении. В методике учитываются два уровня нагружения, при которых обеспечивается устойчивость и прочность при геометрически нелинейном поведении панели с минимальными запасами равными единичными при двух указанных уровнях нагрузки. Приведены аналитические соотношения при реализации вариантов методики при сжатии, сдвиге и комбинированном нагружении шарнирно опертых ортотропных панелей. Для случая сжатия жестко опертой по длинным сторонам ортотропной панели также получены прикладные аналитические соотношения и показана возможность реализации предложенной методики для различных вариантов граничных условий.

2. Предложенная методика проектирования по минимальным запасам является дополнением к методологии проектирования по закритическому состоянию, которая приведена в работах [51, 53-55].

3. Практическая значимость предложенной методики заключается в возможности получения оптимальных параметров гладких композитных панелей на ранних этапах проектирования, когда переменными параметрами могут быть толщина и ширина панели (шаг стрингеров) при заданных погонных нагрузках. Также методика может быть использована при выборе шага установки стенок для многозамкнутых конструкций.

### **Глава 3 Проектирование гладких ортотропных панелей по закритическому состоянию при комбинированном нагружении**

В общем случае нагружения несущие панели тонкостенных конструкций воспринимают комбинированное нагружение, например, двухосное сжатие и сдвиг. В этом случае получение замкнутых аналитических решений геометрически нелинейных задач весьма затруднительно, но технических интерес представляют задачи проектирования по закритическому состоянию с максимально возможной степенью формализации и приведения к алгоритмам численного решения относительно толщины панели.

Отметим, что исходными данными при проектировании композитных авиационных конструкций являются прочностные и жесткостные расчетные характеристики материалов, определяемые в соответствии с пунктом “Расчетные характеристики материалов” п.25.613 (23.613) авиационных правил АП-25 (АП-23). В этом случае при проведении квалификации на большом объеме образцов экспериментально определяются указанные характеристики монослоя КМ и характеристики образцов с типовыми укладками, применяемыми затем в элементах конструкций. Целесообразным в этом случае является формализация методик проектирования с использованием и характеристик монослоя, и характеристик композитного пакета. Отметим также, что при проектировании композитных конструкций актуальными являются задачи проектирования с учетом влияния равномерного нагрева.

Рассмотрим далее методики проектирования ортотропных панелей по закритическому состоянию с учетом указанных выше особенностей при комбинированном нагружении в рамках методологии по проектированию по закритическому состоянию. Отметим, что материал, посвященный проектированию при комбинированном нагружении и приведенный в Главе 2, относится к методике проектирования по закритическому состоянию с учетом двух уровней нагружения.

Отметим, что объектами исследования в данной работе являются несущие панели и стенки агрегатов механизации и кессона крыла самолетов малой и средней грузоподъемности, будем для определенности и получения количественной оценки рассматривать панели, нагруженные потоками  $q_x = 500...1000$  ГПа·м. Представленные в данной главе методики, разработаны в рамках методологии проектирования по закритическому состоянию [51, 53-54]. В этом случае для оценки эффективности предложенных ниже методик можно считать корректной оценку, приведенную в Главе 1.

### 3.1 Замечание о проектировании композитной панели при сжатии и сдвиге с учетом ограничений по устойчивости

Прежде всего отметим, что на ранних этапах проектирования композитных агрегатов механизации крыла и кессона крыла известными являются действующие потоки, но не напряжения. Причем, как правило, основными силовыми факторами являются продольное сжатие и сдвиг. При известных геометрических размерах проектируемых панелей, укладке КМ для определения минимальной толщины ортотропной панели по условиям обеспечения устойчивости целесообразно использовать решение задачи устойчивости Л.И. Балабуха, полученное в работе [9]

$$\sigma_x \delta + \frac{(\tau_{xy} \delta)^2}{\frac{2\pi^2}{b^2} \left( 2D_y + D_3 \sqrt{\frac{D_y}{D_x}} \right)} = \frac{2\pi^2}{b^2} (D_3 + \sqrt{D_x D_y}),$$

и используемое в Главе 2 данной работы. То есть, задача определения минимальной толщины ортотропной панели по условиям обеспечения устойчивости сводится к квадратному уравнению относительно величины  $\delta^3$

$$q_x b^2 + \frac{(q_{xy})^2 b^4}{2\pi^2 \delta^3 \left[ \frac{3\bar{E}_y}{12} + \left( \frac{\mu_{xy} \bar{E}_x}{12} + \frac{G_{xy}}{6} \right) \sqrt{\frac{E_y}{E_x}} \right]} - 2\pi^2 \delta^3 \left( \frac{\mu_{xy} \bar{E}_x}{12} + \frac{G_{xy}}{6} + \frac{\sqrt{\bar{E}_x \bar{E}_y}}{12} \right) = 0.$$

### 3.2 Проектирование панелей по прочности многослойного пакета при закритическом состоянии

Рассмотрим далее ортотропную прямоугольную панель, нагруженную сжимающими и касательными потоками. Будем считать, что все указанные усилия изменяются пропорционально одному параметру (Рисунок 3.1).

Для создания прикладной методики проектирования при условии допустимости закритического поведения обшивки необходимо рассматривать геометрически нелинейные соотношения и выбрать “удобный” вид прогиба, который позволил бы получить аналитическое решение задачи при комбинированном нагружении. В работе [9] при исследовании устойчивости при комбинированном нагружении применена следующая форма прогиба

$$W = f \cdot \sin \frac{\pi y}{b} \sin \frac{\pi(x - \alpha y)}{s}, \quad (3.1)$$

где  $\alpha$  – тангенс угла наклона волн при выпучивании,  $s$  – расстояние между узловыми линиями.

Этот же вид прогиба использовался при аналитическом решении задачи о закритическом поведении композитной панели при сдвиге. Теперь воспользуемся равенством (3.1) для решения задачи о закритическом поведении панели при комбинированном нагружении и воспользуемся записанные ранее в Главе 1 исходными геометрически нелинейными соотношениями (1.1) и (1.2). Далее для получения аналитического решения воспользуемся методом Бубнова – Галеркина. После подстановки прогиба (3.1) в выражение (1.1) можно получить уравнение, решением которого будет функция напряжений Эри следующего вида

$$F = \frac{f^2}{32} \left\{ \frac{1}{G_\alpha} \left( \frac{s}{b} \right)^2 \cos \frac{2\pi(x - \alpha y)}{s} + \left( \frac{b}{s} \right)^2 E_x \cos \frac{2\pi y}{b} \right\} - \frac{p_x y^2}{2} - \frac{p_y x^2}{2} + p_{xy} xy, \quad (3.2)$$

здесь обозначено

$$G_{\alpha} = \frac{1}{E_y} + \left( \frac{1}{G_{xy}} - \frac{2\mu_{xy}}{E_y} \right) \alpha^2 + \frac{\alpha^4}{E_x},$$

$p_x, p_y, p_{xy}$  – расчетные напряжения, определяемые потоками внешних погонных сжимающих и сдвигающих усилий, приложенных к кромкам панели в её плоскости:  $q_x^p = p_x \delta$ ,  $q_y^p = p_y \delta$ ,  $q_{xy}^p = p_{xy} \delta$ .

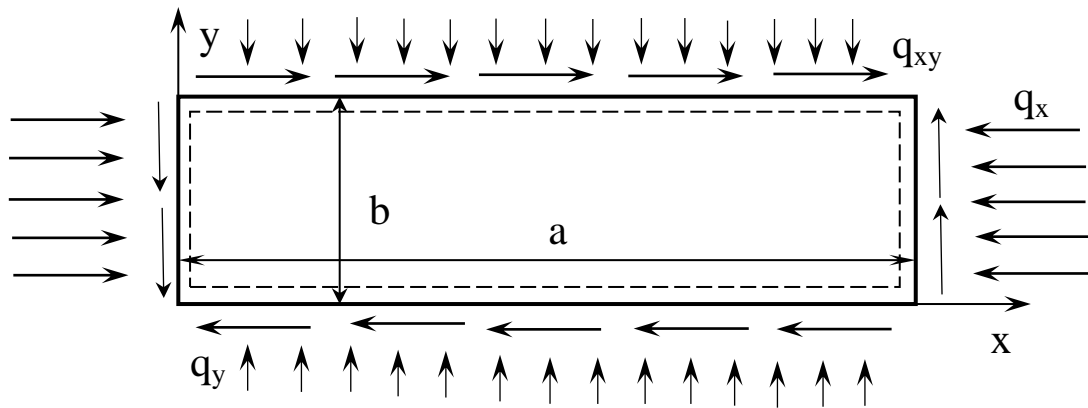


Рисунок 3.1 – Прямоугольная ортотропная панель при комбинированном нагружении

Напряжения в срединной поверхности потерявшей устойчивость ортотропной панели определяются следующими равенствами

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -f^2 \Delta_1 - p_x, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -f^2 \Delta_2 - p_y, \quad (3.3)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = f^2 \Delta_3 - p_{xy}.$$

где

$$\Delta_1 = -\frac{\pi^2}{8} \left\{ \frac{\alpha^2}{G_{\alpha} b^2} \cos \frac{2\pi(x - \alpha y)}{s} + \frac{E_x}{s^2} \cos \frac{2\pi y}{b} \right\},$$

$$\Delta_2 = -\frac{\pi^2}{8} \frac{1}{G_\alpha b^2} \cos \frac{2\pi(x - \alpha y)}{s},$$

$$\Delta_3 = \frac{\pi^2}{8} \frac{\alpha}{G_\alpha b^2} \cos \frac{2\pi(x - \alpha y)}{s}.$$

Применяя далее процедуру метода Бубнова – Галеркина с учетом геометрической нелинейности из равенства (3.3) получим при  $f \neq 0$  следующее уравнение

$$\begin{aligned} & \frac{\pi^2}{s^2} \left[ \frac{\pi^2 f^2}{16 G_\alpha} \left( \frac{\alpha}{b} \right)^2 + \frac{E_x}{16} \frac{\pi^2 f^2}{s^2} + p_x \right] + \left[ \frac{\pi^2 f^2}{16 G_\alpha} + p_y \right] \left( \frac{\pi^2}{b^2} + \frac{\alpha^2 \pi^2}{s^2} \right) + \\ & + \frac{\alpha \pi^2}{s^2} \left( \frac{\pi^2 f^2}{8 b^2 G_\alpha} + 2 p_{xy} \right) - D_{11} \frac{\pi^4}{\delta s^4} - 2 D_3 \left( \frac{\pi^2}{b^2} + \frac{\alpha^2 \pi^2}{s^2} \right) \frac{\pi^2}{\delta s^2} - \\ & - \frac{D_{22}}{\delta} \left[ \left( \frac{\pi^2}{b^2} + \frac{\alpha^2 \pi^2}{s^2} \right)^2 + \frac{4 \pi^4 \alpha^2}{b^2 s^2} \right] = 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

При действии комбинации потоков при малых прогибах выражение (3.4) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & q_x^p + q_y^p \left( \frac{s^2}{b^2} + \alpha^2 \right) + 2 \alpha q_{xy}^p = \\ & = D_{11} \frac{\pi^2}{s^2} + 2 D_3 \left( \frac{\pi^2}{b^2} + \frac{\alpha^2 \pi^2}{s^2} \right) + D_{22} \left[ \frac{s^2}{\pi^2} \left( \frac{\pi^2}{b^2} + \frac{\alpha^2 \pi^2}{s^2} \right)^2 + \frac{4 \pi^2 \alpha^2}{b^2} \right] = 0, \end{aligned} \quad (3.5)$$

где  $q_x^p = p_x \delta$ ,  $q_y^p = p_y \delta$ ,  $q_{xy}^p = p_{xy} \delta$  – расчетные потоки, действующие на композитную панель.

При комбинированном нагружении будем считать, что все компоненты нагружения изменяются пропорционально одному параметру:  $q_x^p = \lambda \bar{q}_x^p$ ,  $q_y^p = \lambda \bar{q}_y^p$ ,  $q_{xy}^p = \lambda \bar{q}_{xy}^p$ . Тогда критические параметры волнообразования при потере

устойчивости в общем случае определяются численным образом при использовании системы уравнений исходя из равенства (3.5)

$$\partial\lambda/\partial\alpha=0, \partial\lambda/\partial s=0. \quad (3.6)$$

Далее для решения задачи оптимального проектирования потребуется критерий прочности, учитывающий все компоненты действующих усилий. Для примера рассмотрим критерий Цая, который запишем в общем виде

$$\frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2} - \frac{\sigma_x}{\sigma_x} \frac{\sigma_y}{\sigma_y} + \frac{\sigma_y^2}{\sigma_y^2} + \frac{\tau_{xy}^2}{\tau_{xy}^2} = 1, \quad (3.7)$$

причем здесь и далее под значениями  $\sigma_x$  ( $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$ ) будем понимать продольные (поперечные и касательные) напряжения, действующие в панели потерявшей устойчивость;  $\bar{\sigma}_x$  ( $\bar{\sigma}_y$  и  $\bar{\tau}_{xy}$ ) - предельные по статической прочности продольные (поперечные и касательные) напряжения, полученные при испытании образцов.

Методологически при изложении материала от простого к сложному сначала можно было бы рассмотреть методики, приведенные в п.2.1.2 и п.2.1.3 при действии касательного потока  $q_{xy}$ , а далее рассмотреть случая действия потоков  $q_x$  и  $q_{xy}$ . Здесь же рассмотрим случай совместного действия продольных и поперечных сжимающих  $q_x = p_x \delta$ ,  $q_y = p_y \delta$ , а также касательных потоков  $q_{xy} = p_{xy} \delta$ . Перепишем равенства (3.3) в виде

$$\sigma_x \delta = -\delta \Delta_1 f^2 - q_x, \quad \sigma_y \delta = -\delta \Delta_2 f^2 - q_y, \quad \tau_{xy} \delta = \delta \Delta_3 f^2 - q_{xy}. \quad (3.8)$$

Выражение для критерия прочности (3.7) в общем случае запишем

$$\frac{(\sigma_x \delta)^2}{\sigma_x^2} - \frac{\sigma_x \sigma_y \delta^2}{\sigma_x \sigma_y} + \frac{(\sigma_y \delta)^2}{\sigma_y^2} + \frac{(\tau_{xy} \delta)^2}{\tau_{xy}^2} = \delta^2. \quad (3.9)$$

Нелинейное уравнение (3.4) представим в виде

$$f^2 B_{\alpha\beta} \delta + D_{\alpha\beta} \delta^3 = \frac{\pi^2}{s^2} q_x + \left( \frac{\pi^2}{b^2} + \frac{\alpha^2 \pi^2}{s^2} \right) q_y + \frac{2\alpha \pi^2}{s^2} q_{xy}. \quad (3.10)$$

Далее проводя аналогичные пункту “б” преобразования можно получить следующее нелинейное равенство для определения оптимальной толщины

$$\begin{aligned}
& \left[ \overset{-2}{\sigma}_y \overset{-2}{\tau}_{xy} \left[ -\Delta_1 \frac{\frac{\pi^2}{s^2} q_x + \left( \frac{\pi^2}{b^2} + \frac{\alpha^2 \pi^2}{s^2} \right) q_y + \frac{2\alpha \pi^2}{s^2} q_{xy} - D_{\alpha\beta} \delta^3}{B_{\alpha\beta}} - q_x \right] \right]^2 \\
& - \overset{-}{\sigma}_x \overset{-}{\sigma}_y \overset{-2}{\tau}_{xy} \left( \left[ -\Delta_1 \frac{\frac{\pi^2}{s^2} q_x + \left( \frac{\pi^2}{b^2} + \frac{\alpha^2 \pi^2}{s^2} \right) q_y + \frac{2\alpha \pi^2}{s^2} q_{xy} - D_{\alpha\beta} \delta^3}{B_{\alpha\beta}} - q_x \right] \times \right. \\
& \times \left. \left[ -\Delta_2 \frac{\frac{\pi^2}{s^2} q_x + \left( \frac{\pi^2}{b^2} + \frac{\alpha^2 \pi^2}{s^2} \right) q_y + \frac{2\alpha \pi^2}{s^2} q_{xy} - D_{\alpha\beta} \delta^3}{B_{\alpha\beta}} - q_y \right] \right) + \\
& + \overset{-2}{\sigma}_x \overset{-2}{\tau}_{xy} \left[ -\Delta_2 \frac{\frac{\pi^2}{s^2} q_x + \left( \frac{\pi^2}{b^2} + \frac{\alpha^2 \pi^2}{s^2} \right) q_y + \frac{2\alpha \pi^2}{s^2} q_{xy} - D_{\alpha\beta} \delta^3}{B_{\alpha\beta}} - q_y \right]^2 + \\
& + \overset{-2}{\sigma}_x \overset{-2}{\sigma}_y \left[ \Delta_3 \frac{\frac{\pi^2}{s^2} q_x + \left( \frac{\pi^2}{b^2} + \frac{\alpha^2 \pi^2}{s^2} \right) q_y + \frac{2\alpha \pi^2}{s^2} q_{xy} - D_{\alpha\beta} \delta^3}{B_{\alpha\beta}} - q_{xy} \right]^2 = \delta^2 \overset{-2}{\sigma}_x \overset{-2}{\sigma}_y \overset{-2}{\tau}_{xy}.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Здесь также отметим, что критические параметры волнообразования в комбинированном случае нагружения определяются численно по соотношениям (3.6) из линейного уравнения (3.5). Также учитывая вида величин  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$  и  $\Delta_3$  в соотношениях (3.3) координаты критических точек панели, где возможна реализация максимальных напряжений.

Для примера рассмотрим ортотропную прямоугольную панель из *КМУ-4* при сдвиге со следующими исходными данными: ширина панели  $b=100$  мм, укладка



$h_0 = 0.1 \text{ мм}$ ,  $h_{\pm 45} = 0.2 \text{ мм}$ . На рисунке 3.2 показана форма прогиба панели при потере устойчивости.

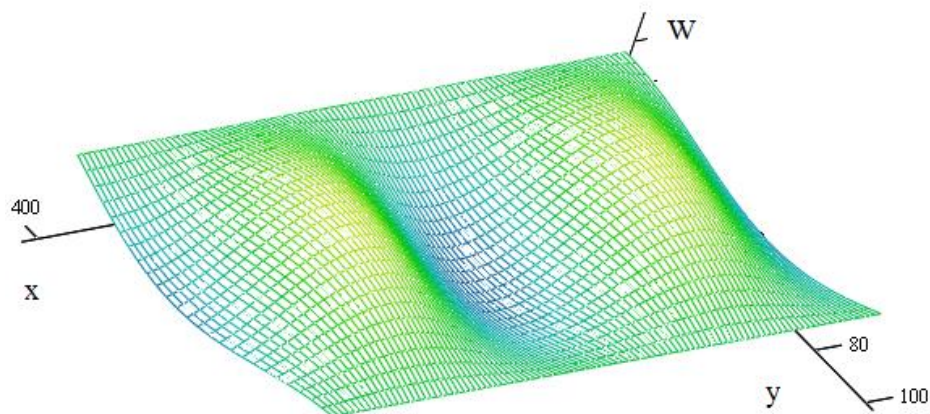


Рисунок 3.2 Прогиб ортотропной панели при потере устойчивости

На рисунке 3.3 представлена зависимость  $t(x, y) = \cos 2\pi(x - \alpha y)/s$ , которая показывает характер изменения касательных напряжений.

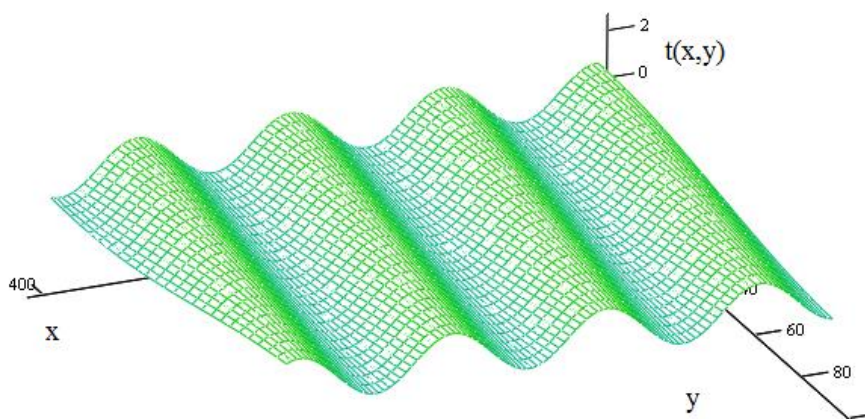


Рисунок 3.3 Функция  $t(x, y)$ , характеризующая изменение касательных напряжений при потере устойчивости

Таким образом, задача проектирования в общем случае сведена к нелинейному уравнению относительно искомой толщины панели при условии достижения предельных напряжений по остаточной прочности.

### 3.3 Проектирование панелей по прочности монослоя при закритическом состоянии с учетом равномерного нагрева

Рассмотрим далее ту же задачу проектирования ортотропных прямоугольных панелей по закритическому состоянию с учетом использованием прогиба (3.1). В этом случае сохраняется вид функции напряжений (3.2), выражения для мембранных напряжений (3.3), вид решения геометрически нелинейной задачи (3.4), выражение для линейного случая (3.5) и система (3.6) для определения критических параметров волнообразования.

Отличие в данном случае будет касаться применяемого критерия прочности. В данном случае используем критерием Цая, который запишем для  $i$  – го слоя в виде

$$\left( \frac{\sigma_1^{(i)}}{\bar{\sigma}_1^{(i)}} \right)^2 - \left( \frac{\sigma_1^{(i)} \sigma_2^{(i)}}{\bar{\sigma}_1^{(i)} \bar{\sigma}_2^{(i)}} \right) + \left( \frac{\sigma_2^{(i)}}{\bar{\sigma}_2^{(i)}} \right)^2 + \left( \frac{\tau_{12}^{(i)}}{\bar{\tau}_{12}^{(i)}} \right)^2 = 1, \quad (3.12)$$

причем здесь и далее под значениями  $\sigma_1^{(i)}$  ( $\sigma_2^{(i)}$  и  $\tau_{12}^{(i)}$ ) будем понимать продольные (поперечные и касательные) напряжения, действующие вдоль волокон  $i$ -го монослоя;  $\bar{\sigma}_1^{(i)}$  ( $\bar{\sigma}_2^{(i)}$  и  $\bar{\tau}_{12}^{(i)}$ ) – предельные продольные (поперечные и касательные) напряжения  $i$ -го монослоя.

Далее запишем выражения для оценки напряжений в слое с учетом того, что на панель действуют комбинация напряжения и имеет место равномерное температурное воздействие [51]

$$\begin{aligned} \sigma_1^{(i)} &= \sigma_x a_x^{(i)} + \sigma_y a_y^{(i)} + \tau_{xy} a_{xy}^{(i)} + a_t^{(i)} t; \\ \sigma_2^{(i)} &= \sigma_x b_x^{(i)} + \sigma_y b_y^{(i)} + \tau_{xy} b_{xy}^{(i)} + b_t^{(i)} t; \\ \tau_{12}^{(i)} &= \sigma_x c_x^{(i)} + \sigma_y c_y^{(i)} + \tau_{xy} c_{xy}^{(i)} + c_t^{(i)} t, \end{aligned} \quad (3.13)$$

где

$$a_x^{(i)} = \frac{I}{E_x} \left[ (A_{11}^i \cos^2 \varphi_i + A_{21}^i \sin^2 \varphi_i) - \mu_{yx} (A_{12}^i \cos^2 \varphi_i + A_{22}^i \sin^2 \varphi_i) \right];$$

$$a_y^{(i)} = \frac{I}{E_y} \left[ -\mu_{xy} (A_{11}^i \cos^2 \varphi_i + A_{21}^i \sin^2 \varphi_i) + (A_{12}^i \cos^2 \varphi_i + A_{22}^i \sin^2 \varphi_i) \right];$$

$$a_{xy}^{(i)} = \frac{I}{G_{xy}} (A_{33}^i \sin 2\varphi_i),$$

$$a_t^{(i)} = \left[ \alpha_x (A_{11}^i \cos^2 \varphi_i + A_{21}^i \sin^2 \varphi_i) + \alpha_y (A_{12}^i \cos^2 \varphi_i + A_{22}^i \sin^2 \varphi_i) - (A_{t1}^i \cos^2 \varphi_i + A_{t2}^i \sin^2 \varphi_i) \right];$$

$$b_x^{(i)} = \frac{I}{E_x} \left[ (A_{11}^i \sin^2 \varphi_i + A_{21}^i \cos^2 \varphi_i) - \mu_{yx} (A_{12}^i \sin^2 \varphi_i + A_{22}^i \cos^2 \varphi_i) \right];$$

$$b_y^{(i)} = \frac{I}{E_y} \left[ -\mu_{xy} (A_{11}^i \sin^2 \varphi_i + A_{21}^i \cos^2 \varphi_i) + (A_{12}^i \sin^2 \varphi_i + A_{22}^i \cos^2 \varphi_i) \right];$$

$$b_{xy}^{(i)} = \frac{I}{G_{xy}} A_{33}^i \sin 2\varphi_i,$$

$$b_t^{(i)} = \left[ \alpha_x (A_{11}^i \sin^2 \varphi_i + A_{21}^i \cos^2 \varphi_i) + \alpha_y (A_{12}^i \sin^2 \varphi_i + A_{22}^i \cos^2 \varphi_i) - (A_{t1}^i \sin^2 \varphi_i + A_{t2}^i \cos^2 \varphi_i) \right];$$

$$c_x^{(i)} = \frac{I}{E_x} \left[ (A_{21}^i - A_{11}^i) \frac{\sin 2\varphi_i}{2} - \mu_{yx} (A_{22}^i - A_{21}^i) \frac{\sin 2\varphi_i}{2} \right],$$

$$c_y^{(i)} = \frac{I}{E_y} \left[ -\mu_{yx} (A_{21}^i - A_{11}^i) \frac{\sin 2\varphi_i}{2} + (A_{22}^i - A_{21}^i) \frac{\sin 2\varphi_i}{2} \right],$$

$$c_{xy}^{(i)} = \frac{I}{G_{xy}} A_{33}^i \cos 2\varphi_i,$$

$$c_t^{(i)} = \left[ \alpha_x (A_{21}^i - A_{11}^i) \frac{\sin 2\varphi_i}{2} + \alpha_y (A_{22}^i - A_{21}^i) \frac{\sin 2\varphi_i}{2} - (A_{t2}^i - A_{t1}^i) \frac{\sin 2\varphi_i}{2} \right],$$

$$A_{11}^{(i)} = \bar{E}_1^{(i)} \cos^4 \varphi_i + \bar{E}_2^{(i)} \sin^4 \varphi_i + 2(\bar{E}_1^{(i)} \mu_{12}^{(i)} + 2G_{12}^{(i)}) \sin^2 \varphi_i \cos^2 \varphi_i,$$

$$A_{12}^{(i)} = A_{21}^{(i)} = \bar{E}_1^{(i)} \mu_{12}^{(i)} + [\bar{E}_1^{(i)} + \bar{E}_2^{(i)} - 2(\bar{E}_1^{(i)} \mu_{12}^{(i)} + 2G_{12}^{(i)})] \sin^2 \varphi_i \cos^2 \varphi_i,$$

$$A_{22}^{(i)} = \bar{E}_1^{(i)} \sin^4 \varphi_i + \bar{E}_2^{(i)} \cos^4 \varphi_i + 2(\bar{E}_1^{(i)} \mu_{12}^{(i)} + 2G_{12}^{(i)}) \sin^2 \varphi_i \cos^2 \varphi_i,$$

$$\begin{aligned}
A_{33}^{(i)} &= [\bar{E}_1^{(i)} + \bar{E}_2^{(i)} - 2\bar{E}_1^{(i)} \mu_{12}^{(i)}] \sin^2 \varphi_i \cos^2 \varphi_i + G_{12}^{(i)} \cos^2 2\varphi_i, \\
A_{11}^{(i)} &= \bar{E}_1^{(i)} [\alpha_1^{(i)} + \mu_{12}^{(i)} \alpha_2^{(i)}] \cos^2 \varphi_i + \bar{E}_2^{(i)} [\alpha_2^{(i)} + \mu_{21}^{(i)} \alpha_1^{(i)}] \sin^2 \varphi_i, \\
A_{12}^{(i)} &= \bar{E}_1^{(i)} [\alpha_1^{(i)} + \mu_{12}^{(i)} \alpha_2^{(i)}] \sin^2 \varphi_i + \bar{E}_2^{(i)} [\alpha_2^{(i)} + \mu_{21}^{(i)} \alpha_1^{(i)}] \cos^2 \varphi_i.
\end{aligned}$$

Далее проведем следующие преобразования. Сначала выразим из нелинейного уравнения (3.4) амплитуду прогиба  $f^2$  (с учетом умножения на толщину) и подставим в равенства для суммарных напряжений (3.8), которые затем подставим в выражения для напряжений в монослое (3.13). Далее подставим результат предыдущего действия в критерий (3.12) и получим искомое уравнение относительно толщины панели

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{\bar{\sigma}_2^{(i)} \bar{\tau}_{12}^{(i)}}{\sigma_2} \right)^2 \left[ \frac{(-\Delta_1 a_x^{(i)} - \Delta_2 a_y^{(i)} - \Delta_3 a_{xy}^{(i)})}{B_{\alpha\beta}} \left( \frac{\pi^2}{s^2} q_x + \left( \frac{\pi^2}{b^2} + \frac{\alpha^2 \pi^2}{s^2} \right) q_y + \frac{2\alpha \pi^2}{s^2} q_{xy} - D_{\alpha\beta} \delta^3 \right) + \right. \\
& \quad \left. + q_x a_x^{(i)} + q_y a_y^{(i)} + q_{xy} a_{xy}^{(i)} + a_t^{(i)} t \delta \right]^2 + \\
& + \frac{\bar{\sigma}_1^{(i)} \bar{\sigma}_2^{(i)}}{\sigma_1} \left( \frac{\bar{\tau}_{12}^{(i)}}{\sigma_2} \right)^2 \left[ \frac{(-\Delta_1 a_x^{(i)} - \Delta_2 a_y^{(i)} - \Delta_3 a_{xy}^{(i)})}{B_{\alpha\beta}} \left( \frac{\pi^2}{s^2} q_x + \left( \frac{\pi^2}{b^2} + \frac{\alpha^2 \pi^2}{s^2} \right) q_y + \frac{2\alpha \pi^2}{s^2} q_{xy} - D_{\alpha\beta} \delta^3 \right) + \right. \\
& \quad \left. + q_x a_x^{(i)} + q_y a_y^{(i)} + q_{xy} a_{xy}^{(i)} + a_t^{(i)} t \delta \right] \times \tag{3.14} \\
& \times \left[ \frac{(-\Delta_1 b_x^{(i)} - \Delta_2 b_y^{(i)} - \Delta_3 b_{xy}^{(i)})}{B_{\alpha\beta}} \left( \frac{\pi^2}{s^2} q_x + \left( \frac{\pi^2}{b^2} + \frac{\alpha^2 \pi^2}{s^2} \right) q_y + \frac{2\alpha \pi^2}{s^2} q_{xy} - D_{\alpha\beta} \delta^3 \right) + \right. \\
& \quad \left. + q_x b_x^{(i)} + q_y b_y^{(i)} + q_{xy} b_{xy}^{(i)} + b_t^{(i)} t \delta \right] + \\
& + \left( \frac{\bar{\sigma}_1^{(i)} \bar{\tau}_{12}^{(i)}}{\sigma_1} \right)^2 \left[ \frac{(-\Delta_1 b_x^{(i)} - \Delta_2 b_y^{(i)} - \Delta_3 b_{xy}^{(i)})}{B_{\alpha\beta}} \left( \frac{\pi^2}{s^2} q_x + \left( \frac{\pi^2}{b^2} + \frac{\alpha^2 \pi^2}{s^2} \right) q_y + \frac{2\alpha \pi^2}{s^2} q_{xy} - D_{\alpha\beta} \delta^3 \right) + \right. \\
& \quad \left. + q_x b_x^{(i)} + q_y b_y^{(i)} + q_{xy} b_{xy}^{(i)} + b_t^{(i)} t \delta \right]^2 + \\
& + \left( \frac{\bar{\sigma}_1^{(i)} \bar{\sigma}_2^{(i)}}{\sigma_1} \right)^2 \left[ \frac{(-\Delta_1 c_x^{(i)} - \Delta_2 c_y^{(i)} - \Delta_3 c_{xy}^{(i)})}{B_{\alpha\beta}} \left( \frac{\pi^2}{s^2} q_x + \left( \frac{\pi^2}{b^2} + \frac{\alpha^2 \pi^2}{s^2} \right) q_y + \frac{2\alpha \pi^2}{s^2} q_{xy} - D_{\alpha\beta} \delta^3 \right) + \right. \\
& \quad \left. + q_x c_x^{(i)} + q_y c_y^{(i)} + q_{xy} c_{xy}^{(i)} + c_t^{(i)} t \delta \right]^2 = \left[ \delta \frac{\bar{\sigma}_1^{(i)} \bar{\sigma}_2^{(i)} \bar{\tau}_{12}^{(i)}}{\sigma_1 \sigma_2} \right]^2.
\end{aligned}$$

Поскольку на практике для авиационных композитных конструкций используют стандартную укладку монослоев с армированием  $0^\circ/\pm 45^\circ/90^\circ$ , то методика оптимального проектирования сводится к рассмотрению трех уравнений типа (3.14) для указанных углов армирования. Отличия этих уравнений состоят в разных коэффициентах  $a_x^{(i)}$ ,  $b_x^{(i)}$  и  $c_x^{(i)}$ . В итоге из трех получившихся величин суммарных толщин следует выбирать максимальное значение. Критические параметры волнообразования при потере устойчивости в общем случае определяются численным образом по соотношениям (3.6).

Отметим еще, что в итоговое уравнение (3.14) входят коэффициенты  $\Delta_i$ , величины которых определяют максимальные значения действующих напряжений. Для принятого прогиба  $W(x, y)$  (3.1) и функции напряжений  $F(x, y)$  (3.2) максимальные значения в первом приближении можно принять

$$\cos 2\pi(x - \alpha y)/s \rightarrow 1. \quad (3.15)$$

В общем случае в зависимости от соотношений жесткостных параметров следует численным образом исследовать коэффициенты  $\Delta_i$ .

Рассмотрим пример методики проектирования ортотропных панелей по закритическому состоянию при продольном сжатии и сдвиге с учетом равномерного нагрева. Отметим, что полученное выражение (3.14) соответствует общему случаю комбинированного нагружения с учетом равномерного температурного воздействия при использовании критерия прочности Цая. Далее для примера рассмотрим ортотропные панели с армированием  $0^\circ/\pm 45^\circ$  при нагружении продольными сжимающими и сдвиговыми потоками при использовании других критериев прочности.

На ранних этапах проектирования панелей авиационных конструкций по условиям только статической прочности, как правило, применяют 1-ю теорию прочности  $\sigma_1^{(i)} = \bar{\sigma}_1^{(i)}$ . В этом случае проектирование поведут с учетом действия расчетных нагрузок при коэффициенте безопасности  $f=1.5$ . Отметим, что в данном случае допускается растрескивание связующего. Тогда запишем итоговое выражение (3.14) для определения толщины и соответствующие коэффициенты

в виде

$$\left[ \frac{(-\Delta_1 a_x^{(i)} - \Delta_2 a_y^{(i)} - \Delta_3 a_{xy}^{(i)})}{B_{\alpha\beta}} \left( \frac{\pi^2}{s^2} q_x + \left( \frac{\pi^2}{b^2} + \frac{\alpha^2 \pi^2}{s^2} \right) q_y + \frac{2\alpha \pi^2}{s^2} q_{xy} - D_{\alpha\beta} \delta^3 \right) + \right. \\ \left. + q_x a_x^{(i)} + q_y a_y^{(i)} + q_{xy} a_{xy}^{(i)} + a_t^{(i)} t \delta \right] = \left[ \delta \bar{\sigma}_1^{(i)} \right], \quad (3.16)$$

где

$$a_x^{(0)} = \bar{E}_1^{(0)} \frac{1}{E_x} (1 - \mu_{12}^{(0)} \mu_{xy}); \quad a_y^{(0)} = \bar{E}_1^{(0)} \frac{1}{E_y} (\mu_{12}^{(0)} - \mu_{yx}); \quad a_{xy}^{(0)} = 0;$$

$$a_t^{(0)} = \bar{E}_1^{(0)} [\alpha_x + \alpha_y \mu_{12}^{(0)} - (\alpha_1^{(0)} + \mu_{12}^{(0)} \alpha_2^{(0)})];$$

$$a_x^{(45)} = \bar{E}_1^{(45)} \left[ \frac{1}{2E_x} (1 - \mu_{yx}) (1 + \mu_{12}^{(45)}) \right];$$

$$a_y^{(45)} = \bar{E}_1^{(45)} \left[ \frac{1}{2E_y} (1 - \mu_{xy}) (1 + \mu_{12}^{(45)}) \right];$$

$$a_{xy}^{(45)} = \frac{\bar{E}_1^{(45)}}{G_{xy}} \left[ \frac{(1 - \mu_{12}^{(45)})}{2} \right];$$

$$a_t^{(45)} = \frac{1}{2} \left[ (\alpha_x + \alpha_y) \left( \frac{\bar{E}_1^{(45)} + \bar{E}_2^{(45)}}{2} + \bar{E}_1^{(45)} \mu_{12}^{(45)} \right) - \right. \\ \left. - \left( \bar{E}_1^{(45)} (\alpha_1^{(45)} + \mu_{12}^{(45)} \alpha_2^{(45)}) + \bar{E}_2^{(45)} (\alpha_2^{(45)} + \mu_{21}^{(45)} \alpha_1^{(45)}) \right) \right]$$

Для другого случая при определении толщин панелей с учетом требований ресурса, возможно, использовать условие не растрескивания связующего и критерий прочности (Цая) вида

$$\left( \frac{\sigma_2^{(i)}}{\bar{\sigma}_2^{(i)}} \right)^2 + \left( \frac{\tau_{12}^{(i)}}{\bar{\tau}_{12}^{(i)}} \right)^2 = 1.$$

В этом случае определение толщины панели при проектировании авиационных конструкций целесообразно проводить при действии эксплуатационных нагрузок с коэффициентом безопасности  $f=1.0$ . Выражение (3.14) в этом случае принимает вид

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{\bar{\tau}_{12}^{(i)}}{\tau_{12}^{(i)}} \right)^2 \left[ \frac{(-\Delta_1 b_x^{(i)} - \Delta_2 b_y^{(i)} - \Delta_3 b_{xy}^{(i)})}{B_{\alpha\beta}} \left( \frac{\pi^2}{s^2} q_x + \left( \frac{\pi^2}{b^2} + \frac{\alpha^2 \pi^2}{s^2} \right) q_y + \frac{2\alpha \pi^2}{s^2} q_{xy} - D_{\alpha\beta} \delta^3 \right) + \right. \\
& \quad \left. + q_x b_x^{(i)} + q_y b_y^{(i)} + q_{xy} b_{xy}^{(i)} + b_t^{(i)} t \delta \right]^2 + \\
& \quad + \left( \frac{\bar{\sigma}_2^{(i)}}{\sigma_2^{(i)}} \right)^2 \left[ \frac{(-\Delta_1 c_x^{(i)} - \Delta_2 c_y^{(i)} - \Delta_3 c_{xy}^{(i)})}{B_{\alpha\beta}} \left( \frac{\pi^2}{s^2} q_x + \left( \frac{\pi^2}{b^2} + \frac{\alpha^2 \pi^2}{s^2} \right) q_y + \frac{2\alpha \pi^2}{s^2} q_{xy} - D_{\alpha\beta} \delta^3 \right) + \right. \\
& \quad \left. q_x c_x^{(i)} + q_y c_y^{(i)} + q_{xy} c_{xy}^{(i)} + c_t^{(i)} t \delta \right]^2 = \left[ \delta \bar{\sigma}_2^{(i)} \bar{\tau}_{12}^{(i)} \right]^2.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Для слоев стандартной укладки перепишем коэффициенты  $a_m^{(i)}$ ,  $b_m^{(i)}$  и  $c_m^{(i)}$  для равенства (3.17) в виде

$$\begin{aligned}
b_x^{(0)} &= \bar{E}_2^{(0)} \left[ \frac{\mu_{21}^{(0)}}{E_x} - \frac{\mu_{yx}}{E_y} \right]; b_y^{(0)} = \bar{E}_2^{(0)} \left[ \frac{1}{E_y} - \frac{\mu_{xy} \mu_{12}^{(0)}}{E_x} \right]; b_{xy}^{(0)} = 0; \\
b_t^{(0)} &= \bar{E}_2^{(0)} \left[ \alpha_y + \alpha_x \mu_{21}^{(0)} - (\alpha_2^{(0)} + \mu_{21}^{(0)} \alpha_1^{(0)}) \right]; \\
c_x^{(0)} &= 0; c_y^{(0)} = 0; c_{xy}^{(0)} = \frac{1}{G_{xy}} G_{12}^{(0)}; c_t^{(0)} = 0; \\
b_x^{(45)} &= \bar{E}_2^{(45)} \left[ \frac{1 + \mu_{21}^{(45)}}{2E_x} - \frac{\mu_{yx}}{2E_y} (1 + \mu_{12}^{(45)}) \right]; \\
b_y^{(45)} &= \bar{E}_2^{(45)} \left[ \frac{1 + \mu_{21}^{(45)}}{2E_y} - \frac{\mu_{xy}}{2E_x} (1 + \mu_{12}^{(45)}) \right]; \\
b_{xy}^{(45)} &= \frac{1}{G_{xy}} \left[ -\frac{(1 - \mu_{12}^{(45)})}{2} \right]; \\
b_t^{(45)} &= \frac{1}{2} \left[ (\alpha_x + \alpha_y) \left( \frac{\bar{E}_1^{(45)} + \bar{E}_2^{(45)}}{2} + \bar{E}_1^{(45)} \mu_{12}^{(45)} \right) - \right. \\
& \quad \left. \left( \bar{E}_1^{(45)} (\alpha_1^{(45)} + \mu_{12}^{(45)} \alpha_2^{(45)}) + \bar{E}_2^{(45)} (\alpha_2^{(45)} + \mu_{21}^{(45)} \alpha_1^{(45)}) \right) \right]; \\
c_x^{(45)} &= G_{12}^{(45)} \left( \frac{1 + \mu_{xy}}{E_x} \right); c_y^{(45)} = G_{12}^{(45)} \left( \frac{1 + \mu_{xy}}{E_y} \right); c_{xy}^{(45)} = 0; \\
c_t^{(45)} &= (\alpha_x - \alpha_y) G_{12}^{(45)}.
\end{aligned}$$

### 3.4 Заключение по главе 3

1. Предложена методика проектирования гладких ортотропных прямоугольных панелей при комбинированном нагружении с учетом закритического поведения. В качестве критерия использован критерий прочности Цая для слоистого пакета. Методика сведена к нелинейному уравнению относительно толщины.

2. Предложена методика определения минимальной толщины ортотропной панели со стандартной укладкой  $0^\circ/\pm 45^\circ/90^\circ$  при закритическом поведении в случае комбинированного нагружения с учетом равномерного температурного воздействия. Задача проектирования в общем случае сведена к нелинейным уравнениям относительно искомой толщины панели при условии выполнения критерия прочности Цая в одном из монослоев КМ.

3. Отметим, что в качестве критерия прочности может быть использован другой критерий, аналогичный критерию Цая, квадратичного вида в зависимости от результатов экспериментальных исследований расчетных характеристик КМ.

4. Практический интерес представленных методик заключается в возможности проведения экспертной оценки толщин обшивок при определении веса несущих панелей на ранних этапах проектирования при допустимости закритического поведения при нагрузках выше эксплуатационного уровня.



## Глава 4 Расчет и проектирование цилиндрических ортотропных панелей малой кривизны по закритическому состоянию с учетом условий жесткого опирания

Для тонких нижних обшивок фюзеляжа самолетов малой и средней грузоподъемности допускается потеря устойчивости и геометрически нелинейное поведение при нагрузках, близких к эксплуатационному уровню. Таким образом, для композитных обшивок нижних панелей фюзеляжа задачи проектирования и определения напряженно – деформированного состояния при закритическом состоянии являются актуальными. Известно, что критические напряжения панелей при жестком опирании имеют более высокие критические напряжения по сравнению с критическими напряжениями при шарнирном опирании. Как правило, решения задач устойчивости панелей при жестком опирании имеют более сложные выражения для прогиба и являются более сложными. В рамках разработки материалов для научно – технического задела по созданию перспективного самолета из композитных материалов рассмотрим задачи проверочного расчета и проектирования цилиндрических ортотропных панелей малой кривизны по закритическому состоянию с учетом условий жесткого опирания.

Представим сначала исходные геометрически нелинейные соотношения для ортотропных цилиндрических панелей малой кривизны. Запишем нелинейное уравнение совместности деформаций в следующем виде [51]

$$L_1(F) - L_2(W) = 0, \quad (4.1)$$

где  $L_m$  – операторы

$$L_1(F) = \left[ \frac{1}{E_y} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + \left( \frac{1}{G_{xy}} - \frac{2\mu_{xy}}{E_y} \right) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{1}{E_x} \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} \right],$$

$$L_2(W) = \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 - \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}.$$

а  $F$  – функция Эри, определяемая из соотношений

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}. \quad (4.2)$$

Нелинейное уравнение типа Кармана в рассматриваемом случае имеет вид

$$L_3(F, W) - L_4(W) = 0, \quad (4.3)$$

где

$$L_3(F, W) = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2},$$

$$L_4(W) = \frac{1}{\delta} \left( D_x \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} \right).$$

здесь:  $E_x, E_y, G_{xy}$  – модули упругости композитного пакета;  $D_x, D_3, D_y$  – изгибные жесткости ортотропной панели.

Отметим, что объектами исследования в данной работе являются несущие панели фюзеляжа самолетов малой и средней грузоподъемности. Для определенности и получения количественной оценки можно рассматривать панели, нагруженные потоками  $q_x = 500 \dots 1000 \text{ ГПа} \cdot \text{м}$ . Представленные в данной главе методики, разработаны в рамках методологии проектирования по закритическому состоянию [51, 53-54]. Тогда для оценки эффективности предложенных ниже методик можно считать корректной оценку, приведенную в Главе 1 (рисунок 1.3 – рисунок 1.4), в соответствии с которой эффективность цилиндрических панелей малой кривизны с возможностью потери устойчивости по сравнению с панелями, проектируемыми при обеспечении условий устойчивости.

#### **4.1 Расчет и проектирование композитных цилиндрических ортотропных панелей малой кривизны по закритическому состоянию при сжатии**

Рассмотрим цилиндрическую ортотропную панель при продольном сжатии (Рисунок 4.1). Считая, что панель имеет всестороннее жесткое опирание

представим прогиб в виде

$$W = f \cdot \sin^2 \lambda_m x \cdot \sin^2 \lambda_n y, \quad (4.4)$$

где  $\lambda_m = \frac{\pi m}{a}$ ,  $\lambda_n = \frac{\pi n}{b}$  – параметры волнообразования.

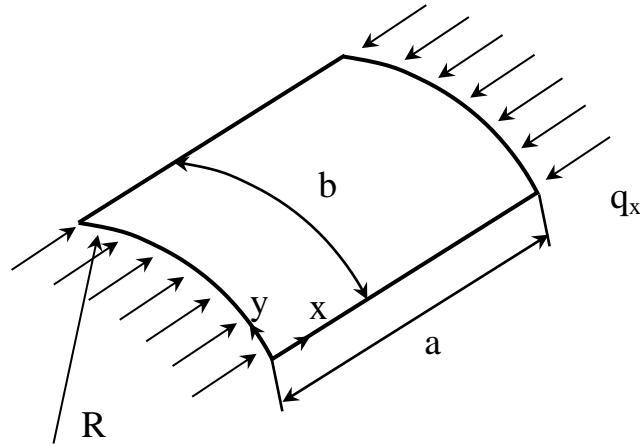


Рисунок 4.1 – Цилиндрическая панель, нагруженная сжимающими усилиями

После подстановки прогиба (4.4) в уравнение совместности деформаций (4.1) можно получить функцию напряжений

$$\begin{aligned}
 F = \frac{f^2}{32} & \left\{ E_y \frac{\lambda_n^2}{\lambda_m^2} \cos 2\lambda_m x + E_x \frac{\lambda_m^2}{\lambda_n^2} \cos 2\lambda_n y - 2 \frac{1}{G_{\alpha\beta}} \cos 2\lambda_m x \cos 2\lambda_n y + \right. \\
 & + \frac{1}{G_{4\beta}} \cos 2\lambda_m x \cos 4\lambda_n y + \frac{1}{G_{4\alpha}} \cos 4\lambda_m x \cos 2\lambda_n y - \\
 & \left. - \frac{E_y}{16} \frac{\lambda_n^2}{\lambda_m^2} \cos 4\lambda_m x - \frac{E_x}{16} \frac{\lambda_m^2}{\lambda_n^2} \cos 4\lambda_n y \right\} + \\
 & + \frac{f}{R} \left\{ - \frac{E_y}{16\lambda_n^2} \cos 2\lambda_m x + \frac{1}{16\lambda_n^2 G_{\alpha\beta}} \cos 2\lambda_m x \cos 2\lambda_n y \right\} - \frac{p_x y^2}{2}, \quad (4.5)
 \end{aligned}$$

где

$$G_{\alpha\beta} = \frac{\lambda_m^2}{\lambda_n^2 E_y} + \left( \frac{1}{G_{xy}} - \frac{2\mu_{xy}}{E_y} \right) + \frac{\lambda_n^2}{\lambda_m^2 E_x},$$

$$G_{4\alpha} = 16 \frac{\lambda_m^2}{\lambda_n^2 E_y} + 4 \left( \frac{1}{G_{xy}} - \frac{2\mu_{xy}}{E_y} \right) + \frac{\lambda_n^4}{\lambda_m^2 E_x},$$

$$G_{4\beta} = \frac{\lambda_m^2}{\lambda_n^2 E_y} + 4 \left( \frac{1}{G_{xy}} - \frac{2\mu_{xy}}{E_y} \right) + 16 \frac{\lambda_n^2}{\lambda_m^2 E_x}.$$

Для решения геометрически нелинейной задачи методом Бубнова – Галеркина воспользуемся уравнением

$$\int_0^a \int_0^b [L_3(F, W) - L_4(W)] \sin^2 \lambda_m x \cdot \sin^2 \lambda_n y dx dy = 0, \quad (4.6)$$

решение которого имеет вид

$$\frac{f^2}{128} \left[ \frac{30}{16} E_x \lambda_m^4 + \frac{4\lambda_m^4}{G_{\alpha\beta}} - \frac{\lambda_m^2 \lambda_n^2}{G_{4\alpha}} + \frac{\lambda_m^2 \lambda_n^2}{G_{4\beta}} + \frac{17}{8} E_y \lambda_n^4 \right] + \frac{1}{32R^2} \left[ E_y + \frac{\lambda_m^2}{2\lambda_n^2 G_{\alpha\beta}} \right] - \quad (4.7)$$

$$- \frac{\lambda_n^2 f}{4R} \left[ \frac{E_y}{16} - \frac{9\lambda_m^2}{64\lambda_n^2 G_{\alpha\beta}} \right] + \frac{1}{4\delta} \left[ 3D_x \lambda_m^4 + 2D_3 \lambda_m^2 \lambda_n^2 + 3D_y \lambda_n^4 \right] - \frac{p_x 6\lambda_m^2}{32} = 0,$$

Для случая продольного сжатия потоком  $q_x = p_x \delta$  перепишем полученное уравнение в виде

$$\delta f^2 E_{m1} + \delta \frac{E_{m2}}{R^2} + \delta f \frac{E_{m3}}{R} + \delta^3 \bar{D}_m = q_x, \quad (4.8)$$

где

$$E_{m1} = \frac{1}{24\lambda_m^2} \left[ \frac{30}{16} E_x \lambda_m^4 + \frac{4\lambda_m^4}{G_{\alpha\beta}} - \frac{\lambda_m^2 \lambda_n^2}{G_{4\alpha}} + \frac{\lambda_m^2 \lambda_n^2}{G_{4\beta}} + \frac{17}{8} E_y \lambda_n^4 \right],$$

$$E_{m2} = \frac{1}{6\lambda_m^2} \left[ E_y + \frac{\lambda_m^2}{2\lambda_n^2 G_{\alpha\beta}} \right], \quad E_{m3} = \frac{\lambda_n^2}{12\lambda_m^2} \left[ E_y - \frac{9\lambda_m^2}{4\lambda_n^2 G_{\alpha\beta}} \right],$$

$$\bar{D}_m = \frac{4}{\lambda_m^2} \left[ \bar{E}_x \lambda_m^4 + 2 \frac{\bar{E}_x \mu_{xy} + 2G_{xy}}{3} \lambda_m^2 \lambda_n^2 + \bar{E}_y \lambda_n^4 \right].$$

При малых прогибах при решении задачи устойчивости продольно сжатой цилиндрической панели из уравнения (4.7) можно получить следующее

выражение относительно сжимающего усилия

$$q_x = \frac{1}{\lambda_m^2} \left[ 4D_x \lambda_m^4 + \frac{8}{3} D_3 \lambda_m^2 \lambda_n^2 + 4D_y \lambda_n^4 \right] + \quad (4.9)$$

$$+ \frac{\delta}{6R^2} \left( \frac{E_y}{\lambda_m^2} + \frac{\lambda_m^2}{2(\lambda_m^4/E_y + (1/G_{xy} - 2\mu_{xy}/E_y)\lambda_m^2 \lambda_n^2 + \lambda_n^4/E_x)} \right).$$

Далее для определения критических параметров волнообразования цилиндрических панелей используя некоторые упрощения и условия аналитической минимизации по волновым числам можно свести задачу устойчивости к решению следующего кубического уравнения относительно параметра  $\lambda = (\lambda_m/\lambda_n)^2$

$$\lambda^3 \frac{8D_y}{E_x} + \lambda^2 12D_y \left( \frac{1}{G_{xy}} - \frac{2\mu_{xy}}{E_y} \right) + \lambda \left[ -\frac{8D_x}{E_x} + \frac{4D_3}{3} \left( \frac{1}{G_{xy}} - \frac{2\mu_{xy}}{E_y} \right) + \frac{8D_y}{E_y} \right] +$$

$$+ \frac{8D_3}{3E_y} - 4D_x \left( \frac{1}{G_{xy}} - \frac{2\mu_{xy}}{E_y} \right) = 0. \quad (4.10)$$

После решения полученного уравнения могут быть определены параметры волнообразования из следующих равенств

$$\lambda_m^2 = \frac{\delta}{6R^2} \frac{1}{\left( \frac{4D_3}{3} + 8D_y \lambda \right)} \frac{\left( \frac{1}{G_{xy}} - \frac{2\mu_{xy}}{E_y} \right) + \frac{2\lambda}{E_x}}{2 \left[ \frac{1}{E_y} + \left( \frac{1}{G_{xy}} - \frac{2\mu_{xy}}{E_y} \right) \lambda + \frac{\lambda^2}{E_x} \right]^2}, \lambda_n^2 = \frac{\lambda_m^2}{\lambda}. \quad (4.11)$$

Запишем выражение для продольных мембранных напряжений из определения функции напряжений (1.6) и выражения (4.5)

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{f^2}{32} \left\{ -4E_x \lambda_m^2 \cos 2\lambda_n y + 8 \frac{\lambda_n^2}{G_{\alpha\beta}} \cos 2\lambda_m x \cos 2\lambda_n y - \quad (4.12)$$

$$- 4 \frac{\lambda_n^2}{G_{4\alpha}} \cos 4\lambda_m x \cos 2\lambda_n y - 16 \frac{\lambda_n^2}{G_{4\beta}} \cos 2\lambda_m x \cos 4\lambda_n y + E_x \lambda_n^2 \cos 4\lambda_n y \right\} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{f}{R} \left\{ -\frac{1}{4G_{\alpha\beta}} \cos 2\lambda_m x \cos 2\lambda_n y \right\} - \frac{q_x}{\delta}. \\
\sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{f^2}{32} & \left\{ -4E_y \lambda_n^2 \cos 2\lambda_m x + 8 \frac{\lambda_m^2}{G_{\alpha\beta}} \cos 2\lambda_m x \cos 2\lambda_n y - \right. \\
& - \frac{4\lambda_m^2}{G_{4\beta}} \cos 2\lambda_m x \cos 4\lambda_n y - \frac{16\lambda_m^2}{G_{4\alpha}} \cos 4\lambda_m x \cos 2\lambda_n y + \\
& \left. + E_y \lambda_n^2 \cos 4\lambda_m x \right\} + \frac{f}{R} \left\{ \frac{E_y \lambda_m^2}{4\lambda_n^2} \cos 2\lambda_m x - \frac{\lambda_m^2}{4\lambda_n^2 G_{\alpha\beta}} \cos 2\lambda_m x \cos 2\lambda_n y \right\}, \\
\tau_{xy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{f^2}{32} & \left\{ -8 \frac{\lambda_m \lambda_n}{G_{\alpha\beta}} \sin 2\lambda_m x \sin 2\lambda_n y - \frac{8\lambda_m \lambda_n}{G_{4\beta}} \sin 2\lambda_m x \sin 4\lambda_n y - \right. \\
& \left. - \frac{8\lambda_m \lambda_n}{G_{4\alpha}} \sin 4\lambda_m x \sin 2\lambda_n y \right\} + \frac{f}{R} \left\{ -\frac{\lambda_m \lambda_n}{4\lambda_n^2 G_{\alpha\beta}} \sin 2\lambda_m x \sin 2\lambda_n y \right\}.
\end{aligned}$$

Перепишем полученное равенство (4.12) в виде

$$\sigma_x \delta = -f^2 \Delta_x \delta - f \Delta_{xr} \frac{\delta}{R} - q_x, \quad (4.13)$$

где

$$\begin{aligned}
\Delta_x = \frac{1}{32} & \left\{ -4E_x \lambda_m^2 \cos 2\lambda_n y - 8 \frac{\lambda_n^2}{G_{\alpha\beta}} \cos 2\lambda_m x \cos 2\lambda_n y + \right. \\
& \left. + 4 \frac{\lambda_n^2}{G_{4\alpha}} \cos 4\lambda_m x \cos 2\lambda_n y + 16 \frac{\lambda_n^2}{G_{4\beta}} \cos 2\lambda_m x \cos 4\lambda_n y - E_x \lambda_n^2 \cos 4\lambda_n y \right\}, \\
\Delta_{xr} = & \left\{ -\frac{1}{4G_{\alpha\beta}} \cos 2\lambda_m x \cos 2\lambda_n y \right\}.
\end{aligned}$$

Рассмотрим методику проектирования по условиям статической прочности при геометрически нелинейном поведении цилиндрических панели малой кривизны. Будем считать, что известна величина сжимающего усилия  $q_x$  и соотношения слоев в ортотропной укладке. Сформулируем основные положения методики. Во – первых, по полученному выше решению линейной задачи устойчивости необходимо определить критические параметры волнообразования

$\lambda_m$  и  $\lambda_n$ . Во – вторых, необходимо определить потенциально – критические точки, в которых напряжения могут достигать максимальных по модулю значений. Обозначим через  $\bar{\sigma}_x$  – предел прочности композитного пакета ортотропной панели. Отметим, что достижение предельных продольных мембранных напряжений возможно в потенциально – критических точках, в которых в рассматриваемом случае функции  $\Delta_x$  и  $\Delta_y$ , достигают максимальных по модулю значений. В данном случае определение потенциально – критических точек возможно численным образом или с учетом прикладных рассуждений и условий:  $\partial\Delta_x/\partial x = 0$  и  $\partial\Delta_x/\partial y = 0$ . В – третьих, в потенциально – критических точках следует воспользоваться условием достижения предельных по прочности напряжений  $\sigma_x = \bar{\sigma}_x$ . В – четвертых, необходимо провести аналитические преобразования. Рассматривая квадратное уравнение (4.13) относительно амплитуды прогиба  $f$  можно записать нелинейное аналитическое решение, которое будет также включать толщину панели. Подставляя далее указанное решение в выражение (4.8), можно получить нелинейное уравнение относительно толщины  $\delta$  ортотропной цилиндрической панели. В – пятых, для определения оптимальной толщины панели следует провести численное решение указанного нелинейного уравнения. Таким образом, задача оптимального проектирования цилиндрических панелей, сжатых в продольном направлении, сведена к минимизации функции одной переменной  $\delta$ .

Для примера рассмотрим распределения мембранных напряжений для углепластиковой плоской панели (из *KMY-7*), используя полученные соотношения при пренебрежении членами порядка  $(1/R)$ . Для панели с геометрическими параметрами  $a*b=400*100$  мм, толщиной  $\delta=1.2$  мм и укладкой  $h_0 = 0.333$ ,  $h_{\pm 45} = 0.667$ . Результаты определения геометрически нелинейного напряженно – деформированного состояния при действии сжимающего потока  $q_x=80$  ГПа·м показаны на Рисунках 4.2 – 4.5, где показан прогиб и мембранные напряжения.

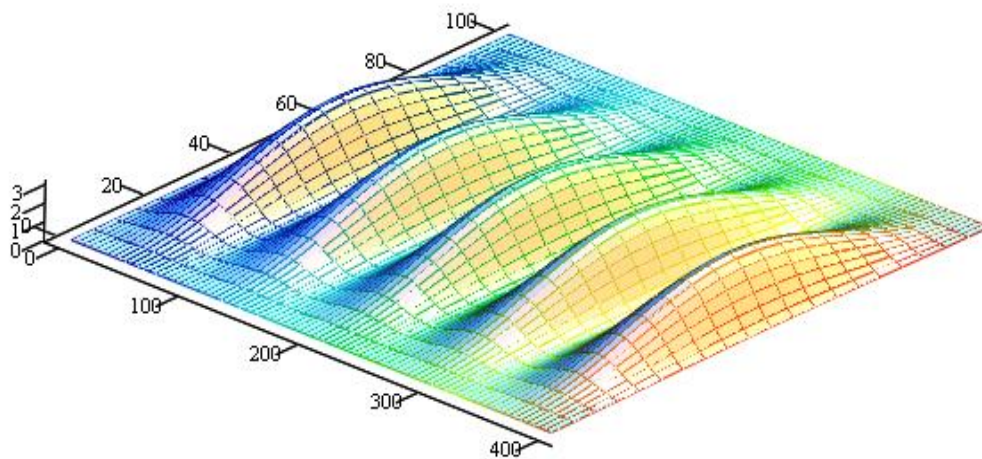


Рисунок 4.2 – Прогиб

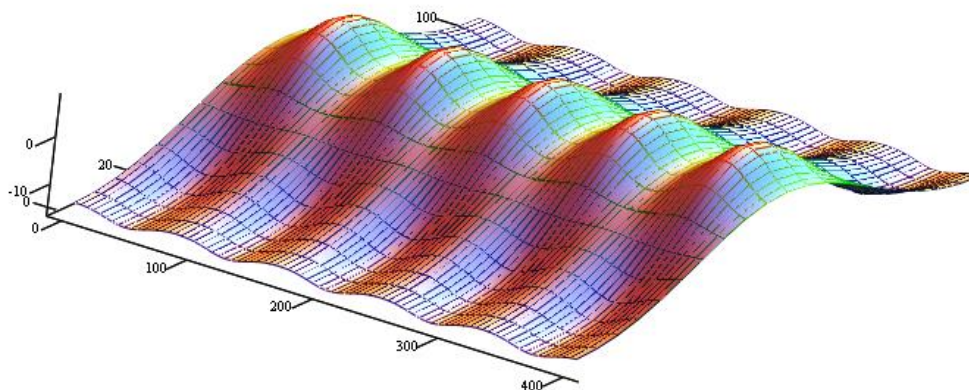


Рисунок 4.3 – Мембранные продольные нормальные напряжения

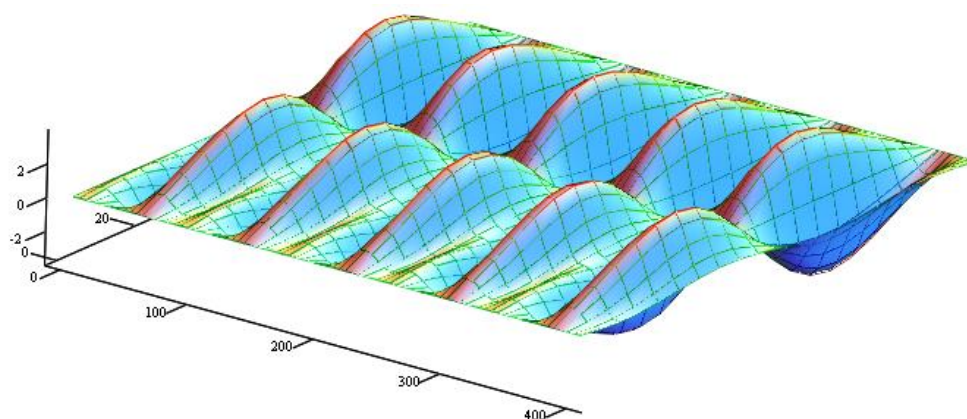


Рисунок 4.4 – Мембранные касательные напряжения



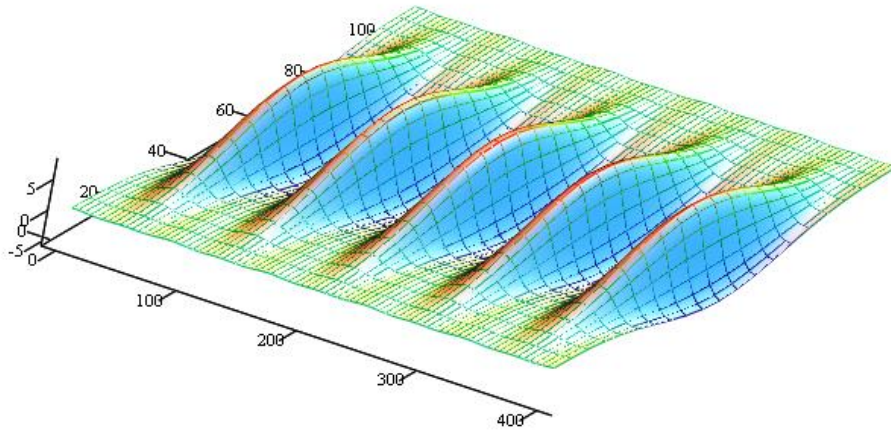


Рисунок 4.5 – Мембранные поперечные нормальные напряжения

Рассматривая представленные результаты, следует отметить. Во – первых, максимальное напряженное состояние в данном случае определяется основным действующим фактором – продольным сжатием, причем потенциально – критические точки лежат на границах контура панели. Во – вторых, поперечные нормальные напряжения имеют минимальные по модулю величины, а касательные напряжения на контуре (в соответствии с выше приведенной формулой) равны нулю. В – третьих, предложенную методику определения толщины ортотропной панели из условий достижения предельных продольных нормальных напряжений  $\sigma_x = \bar{\sigma}_x$  следует считать обоснованной для применения на ранних этапах проектирования.

Здесь также рассмотрим задачу вычисления для редуционного коэффициента цилиндрических ортотропных панелей, который может быть использован при проверочных расчетах панелей с учетом закритического поведения. Из определения редуционных коэффициентов и записанных выше соотношений для напряжений в потенциально – критических точках панели, воспользуемся равенством

$$\varphi = \frac{p_x}{\sigma_x^{max}} = \frac{l}{1 + f^2 \Delta_x + f \Delta_{xr} \frac{l}{R}}. \quad (4.14)$$

В данном случае амплитуда прогиба определяется из выражения (4.7), которое следует переписать в виде квадратного уравнения относительно амплитуды прогиба. Корень такого уравнения есть

$$f = -\left(\frac{E_{m3}}{2E_{m1}R}\right) + \sqrt{\left(\frac{E_{m3}}{2E_{m1}R}\right)^2 - \left(\frac{E_{m2}}{E_{m1}R^2} + \frac{\delta^2 \bar{D}_m}{E_{m1}} - \frac{p_x 6\lambda_m^2}{32E_{m1}}\right)}. \quad (4.15)$$

Таким образом, при известной толщине панели  $\delta$  и сжимающей нагрузке  $p_x$ , сначала по выше приведенным соотношениям определяются критические параметры волнообразования, а затем вычисляется амплитуда прогиба по (4.15) и подставляется в выражение (4.14) для коэффициента  $\varphi$ . Представленные соотношения показывают, что редуцированный коэффициент зависит от соотношений жесткостных параметров ортотропной структуры и уровня сжимающей нагрузки.

#### 4.2 Расчет и проектирование цилиндрических ортотропных панелей малой кривизны по закритическому состоянию при сдвиге

Далее рассмотрим задачу определения напряженно – деформированного состояния при закритическом поведении цилиндрических панелей при сдвиге (Рисунок 4.6).

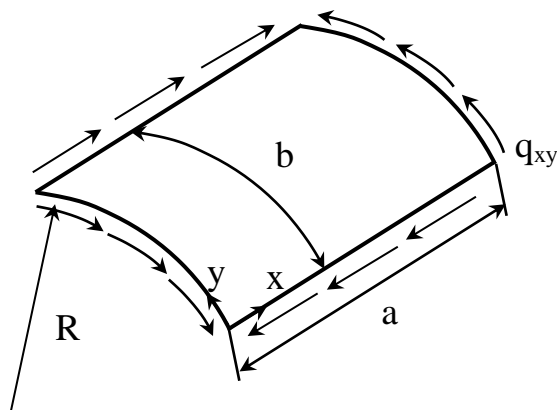


Рисунок 4.6 – Цилиндрическая панель, нагруженная касательными потоками

Далее воспользуемся функцией прогиба для случая жесткого всестороннего опирания в виде

$$W = f \cdot \sin^2 \frac{\pi y}{b} \sin^2 \frac{\pi(x - \alpha y)}{s}, \quad (4.16)$$

где  $\alpha$  – тангенс угла наклона волн,  $s$  – расстояние между узловыми линиями.

Подставляя прогиб (4.16) в нелинейное уравнение совместности деформаций (4.1) после громоздких преобразований можно получить функцию напряжений в виде

$$\begin{aligned} F = f^2 & \left\{ A_1 \cos \frac{2\pi y}{b} + A_2 \cos \frac{4\pi y}{b} + A_3 \cos \frac{2\pi(x - \alpha y)}{s} + A_4 \cos \frac{4\pi(x - \alpha y)}{s} + \right. \\ & + A_5 \cos \frac{2\pi}{bs} (bx + sy - aby) + A_6 \cos \frac{2\pi}{bs} (bx - sy - aby) + \\ & + A_7 \cos \frac{2\pi}{bs} (2bx + 2sy - aby) + A_8 \cos \frac{2\pi}{bs} (-2bx + 2sy + aby) + \\ & \left. + A_9 \cos \frac{2\pi}{bs} (-2bx + sy + 2aby) + A_{10} \cos \frac{2\pi}{bs} (2bx + sy - 2aby) \right\} - \\ & + \frac{f}{R} \left\{ A_{11} \cos \frac{2\pi}{bs} (bx + sy - aby) + A_{12} \cos \frac{2\pi}{bs} (bx - sy - aby) + A_{13} \cos \frac{2\pi(x - \alpha y)}{s} \right\} - \\ & - \frac{p_x y^2}{2} - \frac{p_y x^2}{2} + p_{xy} xy, \end{aligned} \quad (4.17)$$

здесь обозначено

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{E_x b^2}{16 s^2}, \quad A_2 = -\frac{E_x b^2}{256 s^2}, \quad \frac{1}{G} = \frac{1}{G_{xy}} - \frac{2\mu_{xy}}{E_y}, \\ A_3 &= \frac{s^2}{16b^2} \frac{1}{\frac{\alpha^4}{E_x} + \frac{\alpha^2}{G} + \frac{1}{E_y}}, \quad A_4 = \frac{s^2}{256b^2} \frac{1}{\frac{\alpha^4}{E_x} + \frac{\alpha^2}{G} + \frac{1}{E_y}}, \\ A_5 &= \frac{s^2 b^2}{16} \frac{1}{\frac{(s - ab)^4}{E_x} + \frac{(s - ab)^2 b^2}{G} + \frac{b^4}{E_y}}, \quad A_6 = \frac{s^2 b^2}{16} \frac{1}{\frac{(s + ab)^4}{E_x} + \frac{(s + ab)^2 b^2}{G} + \frac{b^4}{E_y}}, \end{aligned}$$

$$A_7 = \frac{s^2 b^2}{32} \frac{I}{\frac{(2s - \alpha b)^4}{E_x} + \frac{(2s - \alpha b)^2 b^2}{G} + \frac{b^4}{E_y}},$$

$$A_8 = \frac{s^2 b^2}{32} \frac{I}{\frac{(2s + \alpha b)^4}{E_x} + \frac{(2s + \alpha b)^2 b^2}{G} + \frac{b^4}{E_y}},$$

$$A_9 = \frac{s^2 b^2}{32} \frac{I}{\frac{(s + 2\alpha b)^4}{E_x} + \frac{4(s + 2\alpha b)^2 b^2}{G} + \frac{16b^4}{E_y}}, \quad A_{10} = \frac{s^2 b^2}{32} \frac{I}{\frac{(s - 2\alpha b)^4}{E_x} + \frac{4(s - 2\alpha b)^2 b^2}{G} + \frac{16b^4}{E_y}},$$

$$A_{11} = \frac{s^2 b^4}{32\pi^2} \frac{I}{\frac{(s - \alpha b)^4}{E_x} + \frac{(s - \alpha b)^2 b^2}{G} + \frac{b^4}{E_y}},$$

$$A_{12} = \frac{s^2 b^4}{32\pi^2} \frac{I}{\frac{(s + \alpha b)^4}{E_x} + \frac{(s + \alpha b)^2 b^2}{G} + \frac{b^4}{E_y}},$$

$$A_{13} = -\frac{s^2}{16\pi^2} \frac{I}{\frac{\alpha^4}{E_x} + \frac{\alpha^2}{G} + \frac{1}{E_y}},$$

где  $p_x, p_y, p_{xy}$  – напряжения, действующие на ортотропную панель.

Применяя далее процедуру Бубнова – Галеркина для нелинейного уравнения (4.2) при  $f \neq 0$  можно получить выражение

$$\begin{aligned} & \frac{\pi^4}{4b^3 s^3 \delta} \left\{ 3D_x b^4 + D_3 (3\alpha^2 b^2 + s^2) b^2 + 3D_y (\alpha^2 b^2 + s^2)^2 \right\} + \\ & + \frac{\pi^4 f^2}{4bs^3} \left[ -2A_1 s^2 + 2A_2 s^2 - 3A_3 \alpha^2 b^2 + 6A_4 \alpha^2 b^2 + 2A_5 (s - \alpha b)^2 + 2A_6 (s + \alpha b)^2 \right] + \\ & + \frac{\pi^4 f^2}{8bs^3} \left[ A_7 (2s - \alpha b)^2 + A_8 (2s + \alpha b)^2 + 2A_9 (s + 2\alpha b)^2 + 2A_{10} (s - 2\alpha b)^2 \right] + \\ & + \frac{\pi^4 f}{4bs^3 R} \left[ 2A_{11} (s - \alpha b)^2 + 2A_{12} (s + \alpha b)^2 - 3A_{13} \alpha^2 b^2 \right] + \\ & + \frac{\pi^4 f^2}{4bs^3} \left[ -A_3 (2\alpha^2 b^2 + s^2) + 2A_4 (3\alpha^2 b^2 + s^2) + 2A_5 (s - \alpha b)^2 + 2A_6 (s + \alpha b)^2 \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\pi^4 f^2}{8bs^3} [A_7(\alpha^2 b^2 + 2abs + 2s^2) + 5A_8 s^2] + \\
& + \frac{\pi^4 f^2}{8bs^3} [4A_9(2\alpha^2 b^2 + 2abs + s^2) + 4A_{10}(2\alpha^2 b^2 - 2abs + s^2)] + \\
& + \frac{\pi^4 f}{4bs^3 R} [2A_{11}(s - \alpha b)^2 + 2A_{12}(s + \alpha b)^2 - A_{13}(2\alpha^2 b^2 + s^2)] + \\
& - \frac{\pi^4 f^2}{2bs^3} [-3A_3 \alpha^2 b^2 + 6A_4 \alpha^2 b^2 + A_5(s - \alpha b)(s - 2\alpha b) + A_6(s + \alpha b)(s + 2\alpha b)] + \\
& + \frac{\pi^4 f^2}{4bs^3} [A_7(2s - \alpha b)(s - \alpha b) + A_8(2s + \alpha b)(s + \alpha b) + 2A_9(s + 2\alpha b)^2 + 2A_{10}(s - 2\alpha b)^2] = \\
& - \frac{\pi^4 f}{2bs^3 R} [A_{11}(s - \alpha b)(s - 2\alpha b) + A_{12}(s + \alpha b)(s + 2\alpha b) - 3A_{13} \alpha^2 b^2] + \\
& + \frac{\pi^2 bf}{4sR} [A_5 + A_6 - 2A_3] + \frac{\pi^2 b}{4sR^2} [A_{11} + A_{12} - 2A_{13}] = \frac{3\alpha b \pi^2}{8s} p_{xy},
\end{aligned} \tag{4.18}$$

которое перепишем с учетом очевидно вводимых обозначений в виде

$$\begin{aligned}
& \frac{\pi^4 b^4}{4b^3 s^3 \delta} D_{mn} + \frac{\pi^4 f^2 b^4}{4bs^3} [A_{mn1}] + \frac{\pi^4 f}{4bs^3 R} [A_{mn2}] + \\
& + \frac{\pi^2 bf}{4sR} [A_{mn3}] + \frac{\pi^2 b}{4sR^2} [A_{mn4}] = \frac{3\alpha b \pi^2}{8s} p_{xy}.
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Для последующего решения задачи устойчивости перепишем уравнение (4.18) при малых прогибах относительно касательных напряжений в виде

$$\begin{aligned}
\tau_{xy} = \frac{2\pi^2}{3\alpha b^4 s^2 \delta} \left\{ 3D_x b^4 + D_3(3\alpha^2 b^2 + s^2) b^2 + 3D_y(\alpha^2 b^2 + s^2)^2 \right\} + \\
+ \frac{2}{3\alpha R^2} [A_{11} + A_{12} - 2A_{13}].
\end{aligned} \tag{4.20}$$

где введено обозначение  $\gamma = b^2/s^2$ .

Критические параметры волнообразования для панелей малой кривизны могут быть определены численно из уравнения (4.20) при использовании равенств

$$\partial \tau_{xy} / \partial \gamma = 0, \quad \partial \tau_{xy} / \partial \alpha = 0. \tag{4.21}$$

Действующие касательные мембранные напряжения потерявшей устойчивость панели вычисляются из определения функции напряжений  $F$  в зависимости от амплитуды прогиба  $f$  по следующей формуле

$$\begin{aligned} \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{4f^2 \pi^2}{bs^2} & \left\{ \alpha b A_3 \cos \frac{2\pi(x - \alpha y)}{s} + 4\alpha b A_4 \cos \frac{4\pi(x - \alpha y)}{s} + \right. \\ & + A_5(\alpha b - s) \cos \frac{2\pi}{bs}(bx + sy - \alpha by) + A_6(\alpha b + s) \cos \frac{2\pi}{bs}(bx - sy - \alpha by) + \\ & + A_7(\alpha b - 2s) \cos \frac{2\pi}{bs}(2bx + 2sy - \alpha by) + A_8(\alpha b + 2s) \cos \frac{2\pi}{bs}(-2bx + 2sy + \alpha by) + \\ & + A_9(4\alpha b + 2s) \cos \frac{2\pi}{bs}(-2bx + sy + 2\alpha by) + A_{10}(4\alpha b - 2s) \cos \frac{2\pi}{bs}(2bx + sy - 2\alpha by) \left. \right\} + \\ & + \frac{4f\pi^2}{bs^2 R} \left\{ A_{11}(\alpha b - s) \cos \frac{2\pi}{bs}(bx + sy - \alpha by) + A_{12}(\alpha b + s) \cos \frac{2\pi}{bs}(bx - sy - \alpha by) + \right. \\ & \left. + \alpha b A_{13} \cos \frac{2\pi(x - \alpha y)}{s} \right\} - p_{xy}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Нормальные мембранные напряжения могут быть также определены из определения функции напряжений (4.2). Таким образом, для вычисления нелинейного НДС необходимо сначала из системы (4.21) численным образом необходимо определить критические параметры волнообразования ( $s_{крит}$ ,  $\alpha_{крит}$ ), при которых панель может терять устойчивость. Отметим также, что эти параметры зависят от укладки КМ и геометрических соотношений панели. Далее при известной нагрузке  $p_{xy}$  из уравнения (4.18) или (4.19) надо определить амплитуду прогиба  $f$ , а затем из выражений (4.2) можно вычислить мембранные напряжения.

В данном случае также рассмотрим вариант методики проектирования цилиндрических панелей при действии касательных усилий. Сделаем предположение, что возможной причиной разрушения является достижение предельных по статической прочности мембранных касательных напряжений  $\tau_{xy} = \bar{\tau}_{xy}$ . Отметим, что потенциально – критические точки в который выполняется указанное равенство могут быть определены из условий:  $\cos 2\pi(\dots) \rightarrow 1$  и

$\cos 4\pi(\dots) \rightarrow 1$ . В общем потенциально – критические точки определяются численным образом. Далее перепишем равенство (4.22) в виде

$$\tau_{xy}\delta = -f^2\Delta_{xy}\delta - f\Delta_{xy3}\frac{\delta}{R} - q_{xy}, \quad (4.23)$$

где  $q_{xy}$  – действующий сжимающий поток,  $\Delta_{xy}, \Delta_{xy3}$  – обозначения, вытекающие из рассмотрения равенства (4.22)

$$\begin{aligned} \Delta_{xy} &= \frac{4\pi^2}{bs^2} \{ \alpha b A_3 + 4\alpha b A_4 + A_5(\alpha b - s) + A_6(\alpha b + s) + \\ &+ A_7(\alpha b - 2s) + A_8(\alpha b + 2s) + A_9(4\alpha b + 2s) + A_{10}(4\alpha b - 2s), \\ \Delta_{xy3} &= \frac{4\pi^2}{bs^2} \{ A_{11}(\alpha b - s) + A_{12}(\alpha b + s) + \alpha b A_{13} \}. \end{aligned}$$

Запишем далее квадратное уравнение (4.19) в виде

$$\begin{aligned} \frac{\pi^4 b^4}{4b^3 s^3} \delta^3 \bar{D}_{mn} + \delta \left\{ \frac{\pi^4 f^2 b^4}{4bs^3} [A_{mn1}] + \frac{\pi^4 f}{4bs^3 R} [A_{mn2}] + \right. \\ \left. + \frac{\pi^2 bf}{4sR} [A_{mn3}] + \frac{\pi^2 b}{4sR^2} [A_{mn4}] \right\} = \frac{3\alpha b \pi^2}{8s} q_{xy}, \quad (4.24) \end{aligned}$$

где обозначено  $D_{mn} = \delta^3 \bar{D}_{mn}$ .

Далее рассматривая квадратное уравнение (4.23) относительно амплитуды прогиба можно получить аналитическое решение, которое следует подставить в равенство (4.24) и получить нелинейное уравнение относительно толщины панели. Таким образом, в данном случае задача оптимального проектирования также может быть сведена к минимизации функции одной переменной  $\delta$ .

### 4.3 Заключение по главе 4

1. Получены аналитические решения геометрически нелинейных задач для ортотропных цилиндрических панелей малой кривизны с учетом жесткого опирания при нагружении сжимающими и сдвиговыми усилиями.

2. Предложены методики проектирования ортотропных цилиндрических панелей малой кривизны с учетом жесткого опирания при нагружении сжимающими и касательными усилиями по закритическому состоянию.



## **Глава 5 Прикладные методики проектирования несущих композитных панелей и стенок**

Весовые параметры тонкостенных авиационных конструкций определяются эффективностью несущих панелей и стенок. В данном разделе рассмотрим некоторые методики проектирования. Во – первых, рассмотрим квадратные подкрепленные стенки, нагруженные касательными потоками. В этом случае будет использована методология, основанная на условии равноустойчивости, то есть, критические напряжения местной и общей потери устойчивости должны быть равны. Во – вторых, учитывая, что конструктивная реализация более жестких граничных условий приводит к повышению критических напряжений рассмотрим аналитические решения и методики проектирования по закритическому состоянию для гладких композитных стенок ортотропной, анизотропной и несимметричной структуры при жестком опирании при действии касательных усилий. В – третьих, рассмотрим прикладную методику проектирования многозамкнутого композитного закрылка с учетом допустимости закритического поведения тонких сжатых обшивок и тонких стенок, воспринимающих касательные усилия. В указанном случае будут использованы аналитические методики и результаты, полученные в Главе 2. Отметим также, что указанная методология проектирования панелей с учетом условия равноустойчивости приведена в работе [51].

### **5.1 Расчет и проектирование подкрепленных панелей квадратной формы при ограничениях по устойчивости при сдвиге**

Рассмотрим подкрепленную стенку лонжерона кессона крыла легкого самолета из композитных материалов. Будем считать, что габаритные размеры фрагмента стенки (Рисунок 5.1) между нервюрами соизмеримы между собой ( $L \approx B$ ). Пусть при проектировании конструкции стенки лонжерона, как правило, требуется проведение расчетов местной и общей устойчивости на сдвиг при

расчетных нагрузках. Отметим, что интерес также представляет оценка несущей способности при нагрузках выше расчетного уровня нагружения.

Отметим, что актуальной является задача определения устойчивости и несущей способности квадратной конструктивно-ортотропной панели при сдвиге с учетом особенностей формы потери устойчивости при условии соизмеримости сторон  $L \approx B$  (Рисунок 5.1).

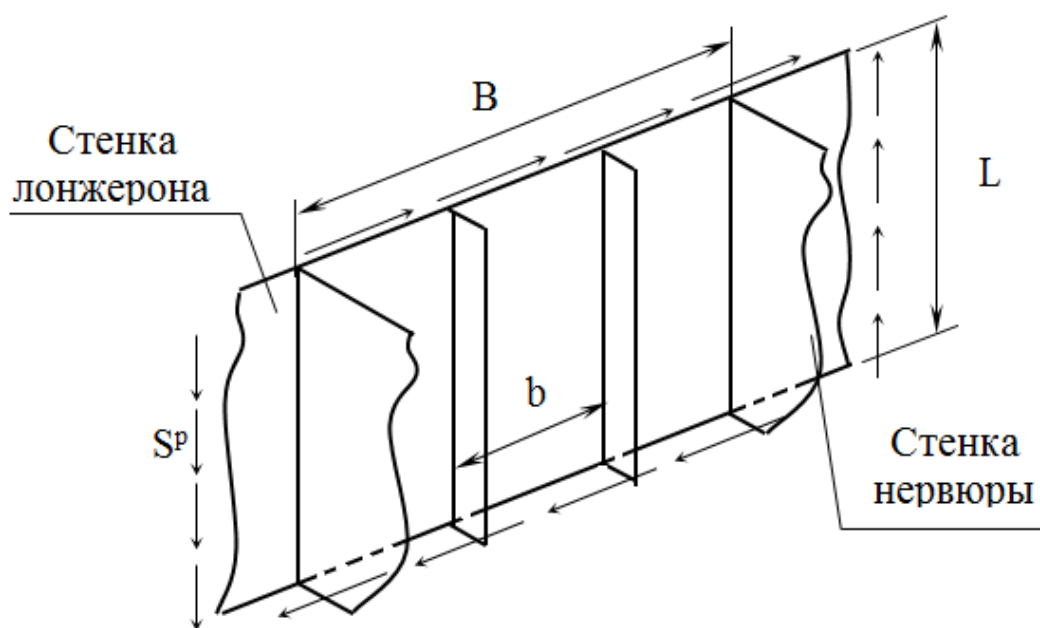


Рисунок 5.1 – Фрагмент подкрепленной стенки лонжерона

Рассматривая фрагмент подкрепленной стенки (Рисунок 5.2) следует отметить, что при оценке закритического поведения и местной потери устойчивости в данном случае (Рисунок 5.2) корректным будет принятие жестких условий опирания по длинным сторонам. В этом случае также необходимо использование расчетных методик по устойчивости и оценке возможного закритического поведения с учетом выбора соответствующей функции прогиба при сдвиге. Кроме того, далее будет представлена методика проектирования ортотропных прямоугольных панелей по закритическому состоянию. В этом

случае толщина панели будет определяться при условии достижения предельных по прочности значений при потере устойчивости.

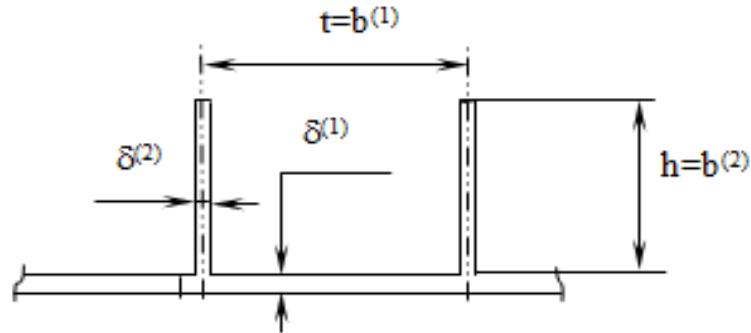


Рисунок 5.2 – Подкрепленная композитная панель

### 5.1.1 Устойчивость и закритическое поведение гладких квадратных ортотропных панелей при сдвиге

Для решения задач устойчивости и несущей способности воспользуемся геометрически нелинейными исходными соотношениями (1.1) – (1.2), приведенными в Главе 1. Отметим, что для конструктивно – ортотропной панелей (Рисунок 5.1 – 5.2) изгибная жесткость  $D_{11}$  определяется с учетом подкрепляющих элементов с учетом применения гипотезы “размазывания” стрингеров, а остальные изгибные жесткости  $D_{22}$ ,  $D_{12}$  и  $D_{33}$  относятся к обшивке.

Рассмотрим геометрически нелинейную задачу конструктивно – ортотропной панели с учетом геометрических параметров, соответствующих в общем случае квадратной форме при  $a \approx b$ , где  $a$  и  $b$  – длина и ширина панели. При граничных условиях, соответствующих шарнирному опиранию, при действии касательных усилий  $q_{xy}$  представим прогиб в виде [18]

$$W = f_1 \cdot \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + f_2 \cdot \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b}. \quad (5.1)$$

После подстановки выражения (5.1) в уравнение совместности деформаций

(1.1) можно получить равенство

$$L_1(F) = \left(\frac{\pi^2}{ab}\right)^2 \left\{ \frac{f_1^2}{2} \left[ \cos \frac{2\pi x}{a} + \cos \frac{2\pi y}{b} \right] + \right. \\ \left. + 4f_1 f_2 \left[ \cos \frac{3\pi x}{a} \cos \frac{\pi x}{a} + \cos \frac{\pi y}{b} \cos \frac{3\pi y}{b} \right] + f_2^2 \left[ \cos \frac{4\pi x}{a} + \cos \frac{4\pi y}{b} \right] \right\},$$

решением которого будет функция напряжений вида

$$F = A_1 f_1^2 \cos \frac{2\pi x}{a} + A_2 f_1^2 \cos \frac{2\pi y}{b} + A_3 f_1 f_2 \cos \frac{3\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} + \quad (5.2) \\ + A_4 f_1 f_2 \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{3\pi y}{b} + A_5 f_1^2 \cos \frac{4\pi x}{a} + A_6 f_2^2 \cos \frac{4\pi y}{b} + \\ + \frac{p_x y^2}{2} + \frac{p_y x^2}{2} + p_{xy} xy,$$

где

$$A_1 = \frac{E_y a^2}{32 b^2}, \quad A_3 = \frac{4a^2 b^2}{\frac{8Ib^4}{E_y} + 9 \left( \frac{1}{G_{xy}} - \frac{2\mu_{xy}}{E_y} \right) a^2 b^2 + \frac{c_x a^4}{E_x}}, \\ A_2 = \frac{E_x b^2}{32 a^2}, \quad A_4 = \frac{4a^2 b^2}{\frac{b^4}{E_y} + 9 \left( \frac{1}{G_{xy}} - \frac{2\mu_{xy}}{E_y} \right) a^2 b^2 + \frac{8Ia^4}{E_x}}, \\ A_5 = \frac{E_y a^2}{32 b^2}, \quad A_6 = \frac{E_x b^2}{32 a^2},$$

Для решения геометрически нелинейной задачи при использовании метода Бубнова – Галеркина будем использовать равенства

$$\int_0^b \int_0^a [L_4(W) - L_3(F, W)] \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} dx dy = 0, \quad (5.3)$$

$$\int_0^b \int_0^a [L_4(W) - L_3(F, W)] \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b} dx dy = 0. \quad (5.4)$$

После подстановки выражений (5.1) и (5.2) в уравнения (5.3) - (5.4) и некоторых громоздких преобразований можно получить нелинейную систему уравнений относительно амплитуд прогибов (при  $f_1 \neq 0, f_2 \neq 0$ )

$$\begin{aligned} & \frac{\pi^4 f_1}{4a^3 b^3} \{D_{11}b^4 + 2D_3 a^2 b^4 + D_{22} a^4\} + \frac{\pi^4}{4ab} [2A_{02}f_1^3 + A_{03}f_1 f_2^2 + 9A_{04}f_1 f_2^2] + \\ & + \frac{\pi^4}{4ab} [2A_{01}f_1^3 + 9A_{03}f_1 f_2^2 + A_{04}f_1 f_2^2] - \frac{3\pi^4}{2ab} [2A_{03}f_1 f_2^2 + A_{04}f_1 f_2^2] = \\ & = \left[ \frac{\pi^2 q_x f_1 b}{a} + \frac{\pi^2 q_y f_1 a}{b} + \frac{32 f_2 q_{xy}}{9} \right], \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} & \frac{4\pi^4 f_1}{a^3 b^3} \{D_{11}b^4 + 2D_3 a^2 b^4 + D_{22} a^4\} + \frac{\pi^4}{16ab} [A_{03}f_1^2 f_2 + 128A_{06}f_2^3 + 9A_{04}f_1^2 f_2] + \\ & + \frac{\pi^4}{16ab} [A_{04}f_1^2 f_2 + 9A_{03}f_1^2 f_2 + 128A_{05}f_2^3] + \frac{3\pi^4}{8ab} [A_{03}f_1^2 f_2 + A_{04}f_1^2 f_2] = \\ & = \left[ \frac{\pi^2 q_x f_2 b}{a} + \frac{\pi^2 q_y f_2 a}{b} + \frac{32 f_1 q_{xy}}{9} \right]. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Для оценки устойчивости квадратной панели далее необходимо рассмотреть линейную систему уравнений (5.5) – (5.6) при использовании процедуры отбрасывания нелинейных членов  $f_1^2 \rightarrow 0, f_2^2 \rightarrow 0$ . Далее следует записать определитель линейной системы и можно найти искомое выражение для определения критического усилия потери устойчивости квадратной панели при сдвиге

$$q_{xy} = \frac{9\pi^4}{32} \left\{ \frac{D_{11}b}{a^3} + \frac{2D_3}{ab} + \frac{D_{22}a}{b^3} \right\}. \quad (5.7)$$

Отметим, что полученная нелинейная система (5.5) - (5.6) при заданной нагрузке численным образом позволяет определять амплитуды прогиба  $f_1$  и  $f_2$ , а также, исходя из определения функции напряжения (5.2), находить напряженное состояние конструктивно-ортотропной панели.

Также в заключение проведем оценку применения полученной формулы (5.7) для квадратных гладких ортотропных панелей по сравнению в возможным использованием формулы Балабуха Л.И. [9], которая получена для длинных прямоугольных панелей. Рассмотрим квадратную панель из углепластика *КМУ-4* с укладкой  $\pm\varphi^\circ$ . Из указанной формулы [9] представим безразмерную величину

$$\bar{\tau} = \frac{\tau_{кр} b^2}{\delta^3 E_I} = 2\pi^2 \sqrt{\frac{E_y}{12(1-\mu_{xy}\mu_{yx})} \left[ \frac{E_x}{12(1-\mu_{xy}\mu_{yx})} \mu_{xy} + \frac{G_{xy}}{6} \right]} \sqrt{4 + 3\alpha + \frac{1}{\alpha}},$$

где 
$$\alpha = \frac{\sqrt{\bar{E}_x \bar{E}_y}}{\bar{E}_x \mu_{xy} + 2G_{xy}}.$$

Из формулы (5.7) также получим безразмерную величину

$$\bar{\tau} = \frac{q_{xy}}{\delta^3 E_I} = \frac{9\pi^4}{32} \left\{ \frac{E_x}{12(1-\mu_{xy}\mu_{yx})} \frac{b}{a^3} + \frac{2}{ab} \left( \frac{E_x}{12(1-\mu_{xy}\mu_{yx})} \mu_{xy} + \frac{G_{xy}}{6} \right) + \frac{E_x}{12(1-\mu_{xy}\mu_{yx})} \frac{a}{b^3} \right\}.$$

Далее для квадратной панели ( $a=b$ ) рассмотрим графики, показанные на Рисунке 5.3. Сплошной линией показан график зависимости  $\bar{\tau}(\varphi)$ . График показанный точками соответствует формуле для  $\bar{\tau}(\varphi)$ . В данном случае можно отметить следующее. Во – первых, известно, что для прямоугольных ортотропных пластин наилучшей укладкой при обеспечении устойчивости является структура  $\pm 60^\circ$ . Во – вторых, для квадратных ортотропных пластин наилучшей является структура  $\pm 45^\circ$ . В – третьих, использование формулы Л.И.

Балабуха для квадратных панелей может приводить к не корректным результатам.

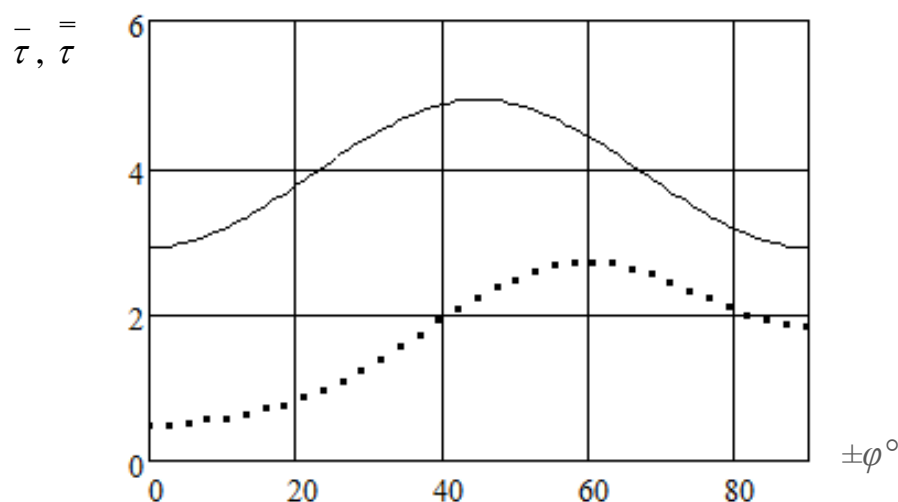


Рисунок 5.3 – Параметры  $\bar{\tau}$  и  $\bar{\tau}$  в зависимости от угла армирования для гладких ортотропных панелей

### 5.1.2 Проектирование квадратных подкрепленных композитных панелей при сдвиге

При проектировании несущих стенок лонжеронов конструкции крыла региональных самолетов предполагается, что условия по местной и общей устойчивости должны быть обеспечены до уровня расчетных нагрузок с запасами большими единицы.

На ранних этапах проектирования необходимо выполнять оценки весовых характеристик всех основных силовых элементов конструкции самолета, в том числе стенок лонжеронов. Кроме того, на указанном этапе проектирования при варьировании параметрами конструктивно-силовых схем существует возможность изменения соответствующих внешних и внутренних нагрузок. Актуальной в этом случае является задача экспертной оценки весовых характеристик рассматриваемых стенок лонжеронов при возможном варьировании действующих касательных потоков.

Объектами исследования в данной работе являются подкрепленные стенки, изготовленные из композитных материалов. Особенности рассматриваемых

стенок также будет квадратная форма стенки и достаточно часто расположенные I-образные ребра (Рисунок 5.1), что позволяет использовать гипотезу «размазывания» стрингеров при определении жесткостных характеристик подкрепленных стенок. При обеспечении минимальной величины приведенной толщины подкрепленной панели будем далее исходить из того, что оптимальными являются «равноустойчивые» панели с минимальными запасами по двум формам потери устойчивости.

Таким образом, сформулируем постановку задачи проектирования следующим образом: необходимо определить минимальную приведенную толщину  $\delta_f$  подкрепленной I-образной панели из композитных материалов при заданных общих геометрических параметрах (близких к квадратной форме) панели и действующих касательных потоках, с учетом ограничений по местной и общей устойчивости.

Запишем основные соотношения для определения местной и общей форм потери устойчивости подкрепленных панелей (Рисунок 5.1 – Рисунок 5.2) при действии касательных усилий. Критические напряжения местной потери устойчивости обшивки могут быть определены по известной формуле [9]

$$\tau_{кр} = \frac{2\pi^2 \delta}{b^2} \sqrt{D_3 D_y} \sqrt{4 + 3\alpha + \frac{1}{\alpha}}, \quad (5.8)$$

где

$$\alpha = \frac{\sqrt{D_x D_y}}{D_3} = \frac{\sqrt{\bar{E}_x \bar{E}_y}}{E_x \mu_{xy} + 2G_{xy}},$$

$$\bar{E}_x = \frac{E_x}{1 - \mu_{xy} \mu_{yx}}, \quad \bar{E}_y = \frac{E_y}{1 - \mu_{xy} \mu_{yx}},$$

$$D_x = \frac{\bar{E}_x \delta^3}{12}, \quad D_y = \frac{\bar{E}_y \delta^3}{12}, \quad D_3 = D_x \mu_{xy} + \frac{G_{xy} \delta^3}{6}.$$

Отметим, что далее будут использованы следующие жесткостные характеристики элементов подкрепленной панели:  $E_x^{(j)}, (E_y^{(j)})$  – модуль упругости  $j$  – элемента панели,  $G_{xy}^{(j)}$  – модуль сдвига  $j$  – элемента из КМ в своей плоскости; индекс (1) далее будет указывать на характеристики обшивки, а индекс (2) – на характеристики ребра (Рисунок 5.2).



Для удобства дальнейших преобразований перепишем равенство (5.8) в виде

$$\tau_{кр} = 1.645EK_{\tau} \frac{\delta_{(1)}^2}{b_{(1)}^2}, \quad (5.9)$$

где  $E$  – модуль упругости для редуцирования,

$$K_{\tau} = \frac{I}{E} \sqrt{\left(\overline{E}_x^{(1)} \mu_{xy}^{(1)} + \overline{E}_y^{(1)}\right)} \sqrt{4 + 3\alpha + \frac{I}{\alpha}}.$$

Для определения критических усилий общей потери устойчивости квадратной панели воспользуемся следующей формулой с учетом условий, что стрингера направлены вдоль оси  $X$  и имеет место неравенство  $D_x \gg D_y, D_3$  и введено обозначение ширины  $B$  и высоты стенки  $L = a$  (Рисунок 5.1)

$$q_{xy} = \frac{9\pi^4}{32} \left\{ \frac{D_x b}{a^3} + \frac{2D_3}{ab} + \frac{D_y a}{b^3} \right\} \approx \frac{9\pi^4}{32} \frac{D_x B}{L^3}. \quad (5.10)$$

Рассмотрим далее методику проектирования подкрепленных квадратных панелей. Из условия равноустойчивости для обшивки и ребра при сжатии [51] будем использовать далее отношение толщин элементов панели

$$\delta^{(2)} = r \frac{h}{t} \delta^{(1)} = r \frac{b^{(2)}}{b^{(1)}} \delta^{(1)}, \quad (5.11)$$

причем для определения коэффициента  $r$  воспользуется равенствами

$$r = \sqrt{\frac{K_{\sigma}^{(1)} E_x^{(2)}}{K_{\sigma}^{(2)} E_x^{(1)}}}, \quad K_{\sigma}^{(1)} = \frac{I}{E} \left[ \sqrt{\overline{E}_x^{(1)} \overline{E}_y^{(1)}} + \mu_{xy}^{(1)} \overline{E}_x^{(1)} + G_{xy}^{(1)} \right],$$

$$K_{\sigma}^{(2)} = \frac{4G_{xy}^{(2)}}{1.645E}.$$

Далее запишем выражения для изгибных жесткостей подкрепленной панели. С учетом введения переменной  $k = h/t = b^{(2)}/b^{(1)}$  запишем выражение для определения продольной жесткости подкрепленной панели

$$D_x \approx E_x^{(2)} \frac{h^2 \delta^{(1)} r k^2}{3} \frac{1 + 0,25 \xi k^2}{1 + \xi k^2}, \quad (5.12)$$

где  $\xi = \frac{E_x^{(2)} r}{E_x^{(1)}}$ ,

и также жесткостей, относящихся к обшивке

$$D_y = \frac{\overline{E}_x^{(1)} \delta_{(1)}^3}{12}, \quad D_3 = \frac{\delta_{(1)}^3}{12} \left( \overline{E}_x^{(1)} \mu_{xy}^{(1)} + 2G_{xy}^{(1)} \right). \quad (5.13)$$

Для удобства дальнейших рассуждений введем обозначение  $\theta = \tau_{xy}/E$ . Из условия (5.11) запишем равенство для определения толщины обшивки

$$\delta_{(1)} = \frac{\sqrt{\theta t}}{\sqrt{1.645 K_\tau}},$$

которое перепишем в виде

$$\frac{\delta_{(1)}}{L} = \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{1.645 K_\tau}} \frac{h}{Lk}, \quad (5.14)$$

Для определения приведенной толщины подкрепленной панели  $\delta_f$  имеем

$$\frac{\delta_f}{L} = \frac{\delta_{(1)} + \delta_{(2)} h/t}{L} = \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{1.645 K_\tau}} \frac{h}{kL} (1 + rk^2). \quad (5.15)$$

Далее введем также величину потока учетом следующих рассуждений

$$\overline{q}_{xy} = \frac{q_{xy}}{EL} = \frac{\tau_{xy} \delta_{(1)}}{EL} = \frac{\theta^{3/2}}{\sqrt{1.645 K_\tau}} \frac{h}{kL}. \quad (5.16)$$

Из выражения (5.10) для определения общей формы потери устойчивости подкрепленной панели и введенного выше обозначения  $\theta = \tau_{xy}^{общ}/E$  запишем

$$\theta = \frac{\tau_{xy}^{общ}}{E} = \frac{q_{xy}^{крит}}{E \delta_{(1)}} = \frac{9\pi^4 B}{32E L^3} E_x^{(2)} \frac{h^2 rk^2}{3} \frac{1 + 0,25 \xi k^2}{1 + \xi k^2}. \quad (5.17)$$

Рассматривая совместно выражения (5.16) и (5.17) можно после некоторых преобразований записать уравнение относительно высоты подкрепления

$$h^{8/3} = \left( \frac{q_{xy} k}{E} \right)^{2/3} \sqrt[3]{1.645 K_\tau} \frac{32L^3}{9\pi^4 B} \frac{(1 + \xi k^2)}{(1 + 0,25 \xi k^2)} \frac{3}{E_x^{(2)} rk^2}. \quad (5.18)$$

Далее рассматривая систему уравнений (5.15) – (5.18) можно получить следующее выражение относительно приведенной толщины подкрепленной

панели

$$\frac{\delta_f}{L} = \sqrt{\frac{q_{xy}}{EL}} \sqrt{\frac{32L}{9\pi^4 B}} \Phi(k), \quad (5.19)$$

где минимизируемая функция относительно одной переменной  $k$  есть

$$\Phi(k) = (1 + rk^2) \frac{1 + 0,25\xi k^2}{1 + \xi k^2}. \quad (5.20)$$

Тогда методика вычисления оптимальных параметров подкрепленных панелей заключается в следующем. Сначала из выражения (5.20) определяется минимум функции  $\min\{\Phi(k)\}$  и соответствующее значение  $k_{min}$ , а также минимальное значение приведенной толщины панели при заданных габаритах и расчетной нагрузке. Затем по формуле (5.18) следует найти высоту подкрепления  $h$  при найденном значении  $k_{min}$ . Далее по формуле (5.17) надо вычислить значение  $\theta(k_{min})$ . Толщины обшивки и ребра можно определить соответственно по формулам (5.14) и (5.11).

Отметим, что предложенная методика посвящена проектированию квадратных подкрепленных панелей. Применение методик проектирования панелей прямоугольной формы [51] в случае возможности разработки панелей квадратной формы может приводить к большим приведенным толщинам панелей. Эффект уменьшения приведенной толщины при использовании представленной методики пропорционален величине  $\sqrt{\delta^{(1)}/h}$ . Кроме того, для прямоугольных панелей в работе [51] представлена зависимость приведенной толщины от действующей нагрузки в виде  $\delta_f \approx (q_\tau)^{7/15} \cdot \nu_1$ . В данной работе для квадратных панелей получена зависимость  $\delta_f \approx (q_\tau)^{1/2} \cdot \nu_2$ . На Рисунке 5.4 для примера показана зависимость приведенной толщины изотропной подкрепленной панели

от сдвигового потока.

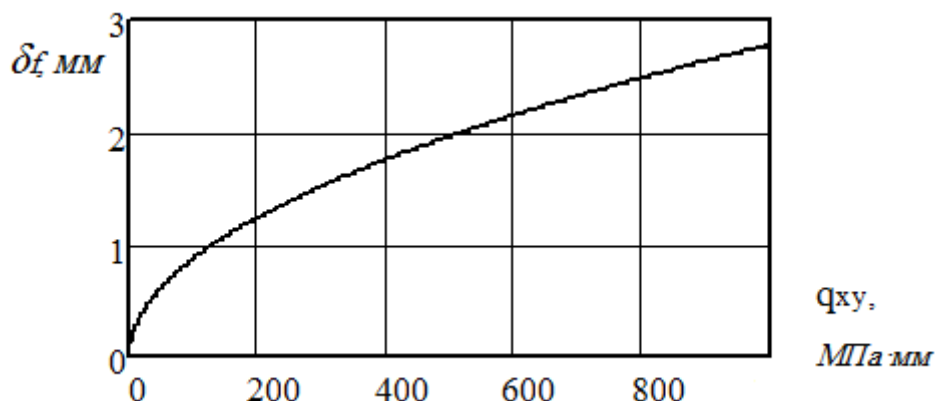


Рисунок 5.4 – Зависимость приведенной толщины изотропной панели от сдвигового потока

Таким образом, применение представленной методики при разработке квадратных подкрепленных панелей будет корректным результатом.

## 5.2 Расчет и проектирование гладких композитных стенок ортотропной, анизотропной и несимметричной структуры при жестком опирании при действии касательных усилий

### 5.2.1 Композитные стенки ортотропной структуры

В дополнение к разделу, посвященному ортотропным панелям с жесткими граничными условиями при сжатии, рассмотрим задачу оптимального проектирования при допустимости закритического поведения на расчетном уровне нагружения сдвиговыми потоками для прямоугольной панели из композитных материалов ортотропной структуры при условии всестороннего жесткого опирания.

Далее представим функцию прогиба, которая используется при нагружении панелей касательными усилиями, но с учетом того, что в данном случае имеем

жесткое всестороннее опирание (Рисунок 5.5)

$$W = f \cdot \sin^2 \frac{\pi y}{b} \sin^2 \frac{\pi(x - \alpha y)}{s}, \quad (5.21)$$

где  $\alpha$  – тангенс угла наклона волн,  $s$  – расстояние между узловыми линиями.

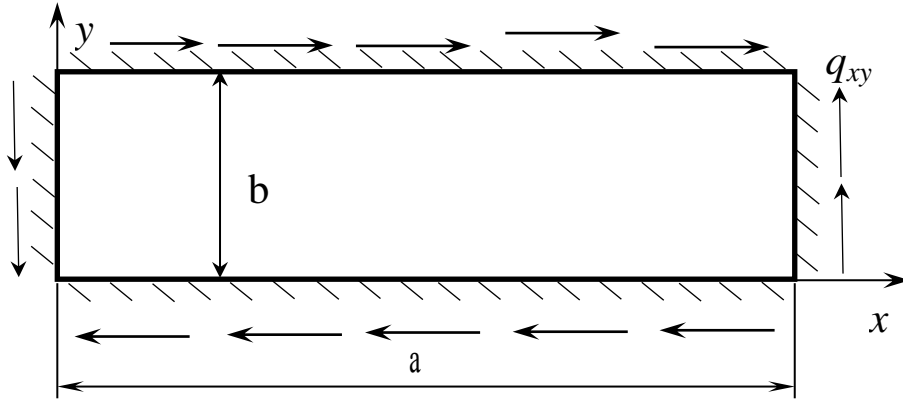


Рисунок 5.5 – Прямоугольная ортотропная панель при действии касательных усилий

Подставляя прогиб (5.21) в уравнение совместности деформаций (2.1) получим функцию напряжений следующего вида

$$\begin{aligned} F = f^2 \left\{ A_1 \cos \frac{2\pi y}{b} + A_2 \cos \frac{4\pi y}{b} + A_3 \cos \frac{2\pi(x - \alpha y)}{s} + A_4 \cos \frac{4\pi(x - \alpha y)}{s} + \right. \\ \left. + A_5 \cos \frac{2\pi}{bs} (bx + sy - \alpha by) + A_6 \cos \frac{2\pi}{bs} (bx - sy - \alpha by) + \right. \\ \left. + A_7 \cos \frac{2\pi}{bs} (2bx + 2sy - \alpha by) + A_8 \cos \frac{2\pi}{bs} (-2bx + 2sy + \alpha by) + \right. \\ \left. + A_9 \cos \frac{2\pi}{bs} (-2bx + sy + 2\alpha by) + A_{10} \cos \frac{2\pi}{bs} (2bx + sy - 2\alpha by) \right\} - \\ - \frac{T_x y^2}{2\delta} - \frac{T_y x^2}{2\delta} + \frac{S_{xy} xy}{\delta}, \end{aligned} \quad (5.22)$$

здесь обозначено  $A_1 = \frac{E_x b^2}{16 s^2}$ ,  $A_2 = -\frac{E_x b^2}{256 s^2}$ ,  $\frac{1}{G} = \frac{1}{G_{xy}} - \frac{2\mu_{xy}}{E_y}$ ,

$$A_3 = \frac{s^2}{16b^2} \frac{l}{\frac{\alpha^4}{E_x} + \frac{\alpha^2}{G} + \frac{1}{E_y}}, \quad A_4 = \frac{s^2}{256b^2} \frac{l}{\frac{\alpha^4}{E_x} + \frac{\alpha^2}{G} + \frac{1}{E_y}},$$

$$A_5 = \frac{s^2 b^2}{16} \frac{l}{\frac{(s - \alpha b)^4}{E_x} + \frac{(s - \alpha b)^2 b^2}{G} + \frac{b^4}{E_y}},$$

$$A_6 = \frac{s^2 b^2}{16} \frac{l}{\frac{(s + \alpha b)^4}{E_x} + \frac{(s + \alpha b)^2 b^2}{G} + \frac{b^4}{E_y}},$$

$$A_7 = \frac{s^2 b^2}{32} \frac{l}{\frac{(2s - \alpha b)^4}{E_x} + \frac{(2s - \alpha b)^2 b^2}{G} + \frac{b^4}{E_y}},$$

$$A_8 = \frac{s^2 b^2}{32} \frac{l}{\frac{(2s + \alpha b)^4}{E_x} + \frac{(2s + \alpha b)^2 b^2}{G} + \frac{b^4}{E_y}},$$

$$A_9 = \frac{s^2 b^2}{32} \frac{l}{\frac{(s + 2\alpha b)^4}{E_x} + \frac{4(s + 2\alpha b)^2 b^2}{G} + \frac{16b^4}{E_y}},$$

$$A_{10} = \frac{s^2 b^2}{32} \frac{l}{\frac{(s - 2\alpha b)^4}{E_x} + \frac{4(s - 2\alpha b)^2 b^2}{G} + \frac{16b^4}{E_y}}.$$

где  $T_x$ ,  $T_y$ ,  $S_{xy}$  – усилия, действующие на пластину толщиной  $\delta$ .

Применяя далее процедуру Бубнова – Галеркина в данном случае при  $f \neq 0$  получим уравнение

$$\frac{\pi^4}{4b^3 s^3 \delta} \left\{ 3D_x b^4 + D_3 (3\alpha^2 b^2 + s^2) b^2 + 3D_y (\alpha^2 b^2 + s^2)^2 \right\} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\pi^4 f^2}{4bs^3} \left[ -2A_1 s^2 + 2A_2 s^2 - 3A_3 \alpha^2 b^2 + 6A_4 \alpha^2 b^2 + 2A_5 (s - \alpha b)^2 + 2A_6 (s + \alpha b)^2 \right] + \\
& + \frac{\pi^4 f^2}{8bs^3} \left[ A_7 (2s - \alpha b)^2 + A_8 (2s + \alpha b)^2 + 2A_9 (s + 2\alpha b)^2 + 2A_{10} (s - 2\alpha b)^2 \right] + \\
& + \frac{\pi^4 f^2}{4bs^3} \left[ -A_3 (2\alpha^2 b^2 + s^2) + 2A_4 (3\alpha^2 b^2 + s^2) + 2A_5 (s - \alpha b)^2 + 2A_6 (s + \alpha b)^2 \right] + \\
& + \frac{\pi^4 f^2}{8bs^3} \left[ A_7 (\alpha^2 b^2 + 2\alpha bs + 2s^2) + 5A_8 s^2 \right] + \\
& + \frac{\pi^4 f^2}{8bs^3} \left[ 4A_9 (2\alpha^2 b^2 + 2\alpha bs + s^2) + 4A_{10} (2\alpha^2 b^2 - 2\alpha bs + s^2) \right] + \\
& - \frac{\pi^4 f^2}{2bs^3} \left[ -3A_3 \alpha^2 b^2 + 6A_4 \alpha^2 b^2 + A_5 (s - \alpha b)(s - 2\alpha b) + A_6 (s + \alpha b)(s + 2\alpha b) \right] + \\
& + \frac{\pi^4 f^2}{4bs^3} \left[ A_7 (2s - \alpha b)(s - \alpha b) + A_8 (2s + \alpha b)(s + \alpha b) + 2A_9 (s + 2\alpha b)^2 + 2A_{10} (s - 2\alpha b)^2 \right] = \\
& = \frac{3\alpha b \pi^2}{8s} \frac{S_{xy}}{\delta},
\end{aligned} \tag{5.23}$$

которое перепишем с учетом вводимых обозначений в виде

$$\frac{\pi^4 b^4}{4b^3 s^3 \delta} \{ \bar{D}_{mn} \delta^3 \} + \frac{\pi^4 f^2 b^4}{4bs^3} [A_{mn}] = \frac{3\alpha b \pi^2}{8s} \frac{S_{xy}}{\delta}. \tag{5.24}$$

Для последующего решения задачи устойчивости перепишем уравнение (5.23) при малых прогибах относительно касательных напряжений в виде

$$\tau_{xy} = \frac{S_{xy}}{\delta} = \frac{2\pi^2 D_y}{\alpha \delta^2 \delta} \left\{ \frac{D_x \gamma}{D_y} + \frac{D_3}{D_y} \left( \alpha^2 \gamma + \frac{1}{3} \right) + \left( \gamma \alpha^4 + 2\alpha^2 + \frac{1}{\gamma} \right) \right\}, \tag{5.25}$$

где введено обозначение  $\gamma = b^2/s^2$ .

Критические параметры волнообразования могут быть определены из уравнения (5.23) при использовании равенств

$$\partial \tau_{xy} / \partial \gamma = 0, \quad \partial \tau_{xy} / \partial \alpha = 0. \tag{5.26}$$

Действующие касательные мембранные напряжения потерявшей устойчивость панели вычисляются из определения функции напряжений  $F$  в

зависимости от амплитуды прогиба  $f$  по следующей формуле

$$\begin{aligned} \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -\frac{S_{xy}}{\delta} - \frac{4f^2 \pi^2}{bs^2} & \left\{ abA_3 \cos \frac{2\pi(x - \alpha y)}{s} + 4abA_4 \cos \frac{4\pi(x - \alpha y)}{s} + \right. \\ & + A_5(ab - s) \cos \frac{2\pi}{bs} (bx + sy - aby) + A_6(ab + s) \cos \frac{2\pi}{bs} (bx - sy - aby) + \\ & + A_7(ab - 2s) \cos \frac{2\pi}{bs} (2bx + 2sy - aby) + A_8(ab + 2s) \cos \frac{2\pi}{bs} (-2bx + 2sy + aby) + \\ & \left. + A_9(4ab + 2s) \cos \frac{2\pi}{bs} (-2bx + sy + 2aby) + A_{10}(4ab - 2s) \cos \frac{2\pi}{bs} (2bx + sy - 2aby) \right\} = \\ & = -\frac{S_{xy}}{\delta} - \frac{4f^2 \pi^2}{bs^2} \{\Delta\}. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Сформулируем методику оптимального проектирования гладких прямоугольных композитных стенок с размерами  $a*b$  при условии всестороннего жесткого опирания при заданной величине расчетного касательного потока  $S_{xy}^p$ . Во – первых, из системы (5.26) необходимо определить критические параметры волнообразования ( $s_{крит}$ ,  $\alpha_{крит}$ ), при которых панель может терять устойчивость. Отметим, что эти параметры зависят от укладки КМ и геометрических соотношений панели. Во – вторых, будем считать, что разрушающие напряжения к композитной стенке достигают предельных по прочности значений по критерию достижений предельных касательных значений  $\tau_{xy} = \bar{\tau}_{xy}$ . В этом случае для получения оптимальной толщины панели необходимо определить координаты точек ( $x_{max}, y_{max}$ ) в которых действующие напряжения достигают максимальных значений. Это можно сделать либо численным образом исследовать значения  $\{\Delta(x, y)\}$  из формулы (5.27), либо учитывая регулярность соотношения графически построить поверхность  $\{\Delta(x, y)\}$  в каком – либо математическом пакете. В – третьих, выражая из равенства (5.27) амплитуду прогиба и подставляя в соотношение (5.24) получим кубическое уравнение относительно искомой толщины панели

$$\frac{\pi^4 b}{4s^3} \{\bar{D}_{mn} \delta^3\} + \frac{\pi^2 b^4}{16s} [A_{mn}] (\bar{\tau}_{xy} \delta - S_{xy}) \frac{1}{\Delta} - \frac{3ab\pi^2}{8s} S_{xy} = 0.$$



Представленная методика может быть использована при определении оптимальных толщин гладких стенок нервюр и лонжеронов самолетов малой и средней грузоподъемности при допустимости закритического поведения при нагрузках выше эксплуатационного уровня.

### 5.2.2 Композитные стенки анизотропной структуры

Далее рассмотрим стенки анизотропной структуры и также воспользуемся функцией прогиба (5.21). Для получения аналитического решения задачи определения напряженно-деформированного состояния при закритическом поведении также воспользуемся методом Бубнова – Галеркина. Подставляя прогиб (5.21) в уравнение совместности деформаций (1.7) получим следующую функцию напряжений Эри

$$\begin{aligned}
 F = f^2 & \left\{ C_1 \cos \frac{2\pi y}{b} + C_2 \cos \frac{4\pi y}{b} + C_3 \cos \frac{2\pi(x - \alpha y)}{s} + C_4 \cos \frac{4\pi(x - \alpha y)}{s} + \right. \\
 & + C_5 \cos \frac{2\pi}{bs} (bx + sy - aby) + C_6 \cos \frac{2\pi}{bs} (bx - sy - aby) + \\
 & + C_7 \cos \frac{2\pi}{bs} (2bx + 2sy - aby) + C_8 \cos \frac{2\pi}{bs} (-2bx + 2sy + aby) + \\
 & \left. + C_9 \cos \frac{2\pi}{bs} (-2bx + sy + 2aby) + C_{10} \cos \frac{2\pi}{bs} (2bx + sy - 2aby) \right\} - \\
 & - \frac{T_x y^2}{2\delta} - \frac{T_y x^2}{2\delta} + \frac{S_{xy} xy}{\delta},
 \end{aligned} \tag{5.28}$$

здесь обозначено

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \frac{E_x b^2}{16 s^2}, \quad C_3 = \frac{s^2}{16 b^2} \frac{1}{\frac{\alpha^4}{E_x} + g_{13} \alpha^3 + g_{22} \alpha^2 + g_{31} \alpha + \frac{1}{E_y}}, \\
 C_2 &= -\frac{E_x b^2}{256 s^2}, \quad C_4 = -\frac{s^2}{256 b^2} \frac{1}{\frac{\alpha^4}{E_x} + g_{13} \alpha^3 + g_{22} \alpha^2 + g_{31} \alpha + \frac{1}{E_y}},
 \end{aligned}$$

$$C_5 = -\frac{s^2 b^2}{16} \frac{1}{\frac{(s-ab)^4}{E_x} - g_{13} b (s-ab)^3 + g_{22} b^2 (s-ab)^2 - g_{31} b^3 (s-ab) + \frac{b^4}{E_y}},$$

$$C_6 = -\frac{s^2 b^2}{16} \frac{1}{\frac{(s+ab)^4}{E_x} + g_{13} b (s+ab)^3 + g_{22} b^2 (s+ab)^2 + g_{31} b^3 (s+ab) + \frac{b^4}{E_y}},$$

$$C_7 = \frac{s^2 b^2}{32} \frac{1}{\frac{(2s-ab)^4}{E_x} - g_{13} b (2s-ab)^3 + g_{22} b^2 (2s-ab)^2 - g_{31} b^3 (2s-ab) + \frac{b^4}{E_y}},$$

$$C_8 = \frac{s^2 b^2}{32} \frac{1}{\frac{(2s+ab)^4}{E_x} + g_{13} b (2s+ab)^3 + g_{22} b^2 (2s+ab)^2 + g_{31} b^3 (2s+ab) + \frac{b^4}{E_y}},$$

$$C_9 = \frac{s^2 b^2}{32} \frac{1}{\frac{(s+2ab)^4}{E_x} + g_{13} b (s+2ab)^3 + g_{22} b^2 (s+2ab)^2 + g_{31} b^3 (s+2ab) + \frac{b^4}{E_y}},$$

$$C_{10} = \frac{s^2 b^2}{32} \frac{1}{\frac{(s-2ab)^4}{E_x} - g_{13} b (s-2ab)^3 + g_{22} b^2 (s-2ab)^2 - g_{31} b^3 (s-2ab) + \frac{b^4}{E_y}}.$$

где  $T_x$ ,  $T_y$ ,  $S_{xy}$  – усилия, действующие на пластину толщиной  $\delta$ .

Применяя процедуру метода Бубнова – Галеркина для уравнения (1.8) при  $f \neq 0$  и действии касательных усилий получим равенство

$$\begin{aligned} & \frac{\pi^4}{4b^3 s^3 \delta} \left\{ 3D_{11} b^4 + D_3 (3\alpha^2 b^2 + s^2) b^2 + 3D_{22} (\alpha^2 b^2 + s^2)^2 \right\} - \\ & - \frac{\pi^4}{b^3 s^3 \delta} \left\{ 3D_{16} ab^4 + 3D_{26} ab^2 (\alpha^2 b^2 - 3abs + s^2) \right\} + \\ & + \frac{\pi^4 f^2}{4bs^3} \left[ -2C_1 s^2 + 2C_2 s^2 - 3C_3 \alpha^2 b^2 + 6C_4 \alpha^2 b^2 + 2C_5 (s-ab)^2 + 2C_6 (s+ab)^2 \right] + \\ & + \frac{\pi^4 f^2}{8bs^3} \left[ C_7 (2s-ab)^2 + C_8 (2s+ab)^2 + 2C_9 (s+2ab)^2 + 2C_{10} (s-2ab)^2 \right] + \\ & + \frac{\pi^4 f^2}{4bs^3} \left[ -C_3 (2\alpha^2 b^2 + s^2) + 2C_4 (3\alpha^2 b^2 + s^2) + 2C_5 (s-ab)^2 + 2C_6 (s+ab)^2 \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\pi^4 f^2}{8bs^3} \left[ C_7 (\alpha^2 b^2 + 2abs + 2s^2) + 5C_8 s^2 \right] + \\
& + \frac{\pi^4 f^2}{8bs^3} \left[ 4C_9 (2\alpha^2 b^2 + 2abs + s^2) + 4C_{10} (2\alpha^2 b^2 - 2abs + s^2) \right] + \\
& - \frac{\pi^4 f^2}{2bs^3} \left[ -3C_3 \alpha^2 b^2 + 6C_4 \alpha^2 b^2 + C_5 (s - ab)(s - 2ab) + C_6 (s + ab)(s + 2ab) \right] + \\
& + \frac{\pi^4 f^2}{4bs^3} \left[ C_7 (2s - ab)(s - ab) + C_8 (2s + ab)(s + ab) + 2C_9 (s + 2ab)^2 + 2C_{10} (s - 2ab)^2 \right] = \\
& = \frac{3ab\pi^2}{8s} \frac{S_{xy}}{\delta}.
\end{aligned} \tag{5.29}$$

При малых прогибах запишем равенство (5.29) относительно касательных напряжений в виде

$$\begin{aligned}
\tau_{xy} = \frac{S_{xy}}{\delta} = \frac{2\pi^2}{3ab^4 s^2 \delta} \left\{ 3D_{11} b^4 + D_3 (3\alpha^2 b^2 + s^2) b^2 + 3D_{22} (\alpha^2 b^2 + s^2)^2 \right\} - \\
- \frac{2\pi^2}{3ab^4 s^2 \delta} \left\{ 3D_{16} ab^4 + 3D_{26} ab^2 (\alpha^2 b^2 - 3abs + s^2) \right\},
\end{aligned} \tag{5.30}$$

Критические параметры потери устойчивости могут быть получены только численным образом из выражения (5.30) при использовании системы (5.26).

После определения критических параметров волнообразования при заданной действующей нагрузке из уравнения можно вычислить амплитуду прогиба  $f$  и далее НДС по соотношениям (5.21), (5.28) и (5.29).

Действующие нормальные и касательные мембранные напряжения потерявшей устойчивость анизотропной панели вычисляются из определения функции напряжений  $F$  (5.28). Запишем в явном виде выражение для касательных напряжений в зависимости от амплитуды прогиба  $f$  и действующего сдвигового

потока

$$\begin{aligned} \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -\frac{S_{xy}}{\delta} - \frac{4f^2 \pi^2}{bs^2} \left\{ abC_3 \cos \frac{2\pi(x - \alpha y)}{s} + 4abC_4 \cos \frac{4\pi(x - \alpha y)}{s} + \right. \\ \left. + C_5(ab - s) \cos \frac{2\pi}{bs}(bx + sy - \alpha by) + C_6(ab + s) \cos \frac{2\pi}{bs}(bx - sy - \alpha by) + \right. \\ \left. + C_7(ab - 2s) \cos \frac{2\pi}{bs}(2bx + 2sy - \alpha by) + C_8(ab + 2s) \cos \frac{2\pi}{bs}(-2bx + 2sy + \alpha by) + \right. \\ \left. + C_9(4ab + 2s) \cos \frac{2\pi}{bs}(-2bx + sy + 2\alpha by) + C_{10}(4ab - 2s) \cos \frac{2\pi}{bs}(2bx + sy - 2\alpha by) \right\}. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Методика проектирования анизотропных панелей может быть сформулирована аналогично пункту 5.2.1 (как для ортотропных панелей) с учетом замены коэффициентов в функции напряжений и расширенного вида уравнения (5.29), являющегося решением геометрически нелинейной задачи методом Бубнова – Галеркина.

### 5.2.3 Композитные стенки несимметричной структуры

Для рассматриваемого варианта композитных стенок несимметричной структуры, граничных условий и нагружения панелей касательными усилиями представим функцию прогиба в виде (5.21).

Подставляя прогиб (5.21) в нелинейное уравнение совместности деформаций (1.9) можно получить функцию напряжений с учетом членов, учитывающих несимметричность структуры

$$\begin{aligned} F = f^2 \left\{ A_1 \cos \frac{2\pi y}{b} + A_2 \cos \frac{4\pi y}{b} + A_3 \cos \frac{2\pi(x - \alpha y)}{s} + A_4 \cos \frac{4\pi(x - \alpha y)}{s} + \right. \\ \left. + A_5 \cos \frac{2\pi}{bs}(bx + sy - \alpha by) + A_6 \cos \frac{2\pi}{bs}(bx - sy - \alpha by) + \right. \\ \left. + A_7 \cos \frac{2\pi}{bs}(2bx + 2sy - \alpha by) + A_8 \cos \frac{2\pi}{bs}(-2bx + 2sy + \alpha by) + \right. \\ \left. + A_9 \cos \frac{2\pi}{bs}(-2bx + sy + 2\alpha by) + A_{10} \cos \frac{2\pi}{bs}(2bx + sy - 2\alpha by) \right\} + \end{aligned} \quad (5.32)$$

$$\begin{aligned}
& + f \left\{ A_{11} \cos \frac{2\pi y}{b} + A_{12} \cos \frac{2\pi(x - \alpha y)}{s} + \right. \\
& \left. + A_{13} \cos \frac{2\pi}{bs} (bx + sy - aby) + A_{14} \cos \frac{2\pi}{bs} (bx - sy - aby) \right\} + \\
& - \frac{T_x y^2}{2\delta} - \frac{T_y x^2}{2\delta} + \frac{S_{xy} xy}{\delta},
\end{aligned}$$

где использованы обозначения:  $A_1 = \frac{1}{16c_x} \frac{b^2}{s^2}$ ,  $A_2 = -\frac{1}{256c_x} \frac{b^2}{s^2}$ ,

$$A_3 = \frac{s^2}{16b^2} \frac{1}{c_x \alpha^4 + (c - 2c_{xy}) \alpha^2 + c_y}, \quad A_4 = \frac{s^2}{256b^2} \frac{1}{c_x \alpha^4 + (c - 2c_{xy}) \alpha^2 + c_y},$$

$$A_5 = \frac{s^2 b^2}{16} \frac{1}{c_x (s - ab)^4 + (c - 2c_{xy}) (s - ab)^2 b^2 + c_y b^4},$$

$$A_6 = \frac{s^2 b^2}{16} \frac{1}{c_x (s + ab)^4 + (c - 2c_{xy}) (s + ab)^2 b^2 + c_y b^4},$$

$$A_7 = \frac{s^2 b^2}{32} \frac{1}{c_x (2s - ab)^4 + (c - 2c_{xy}) (2s - ab)^2 b^2 + c_y b^4},$$

$$A_8 = \frac{s^2 b^2}{32} \frac{1}{c_x (2s + ab)^4 + (c - 2c_{xy}) (2s + ab)^2 b^2 + c_y b^4},$$

$$A_9 = \frac{s^2 b^2}{32} \frac{1}{c_x (s + 2ab)^4 + 4(c - 2c_{xy}) (s + 2ab)^2 b^2 + 16c_y b^4},$$

$$A_{10} = \frac{s^2 b^2}{32} \frac{1}{c_x (s - 2ab)^4 + 4(c - 2c_{xy}) (s - 2ab)^2 b^2 + 16c_y b^4},$$

$$A_{11} = -\frac{B_{xy}}{4c_x} \frac{1}{s^2}, \quad A_{12} = \frac{1}{4} \frac{(B_{yx} + (B_x + B_y - 2C) \alpha^2 + B_{xy} \alpha^4)}{c_x \alpha^4 + (c - 2c_{xy}) \alpha^2 + c_y},$$

$$A_{13} = \frac{1}{8} \frac{[B_{yx} b^4 + (B_x + B_y - 2C) (s - ab)^2 b^2 + B_{xy} (s - ab)^4]}{c_x (s - ab)^4 + (c - 2c_{xy}) (s - ab)^2 b^2 + c_y b^4},$$

$$A_{14} = \frac{1}{4} \frac{[B_{yx} b^4 + (B_x + B_y - 2C) (s + ab)^2 b^2 + B_{xy} (s + ab)^4]}{c_x (s + ab)^4 + (c - 2c_{xy}) (s + ab)^2 b^2 + c_y b^4},$$

где  $T_x$ ,  $T_y$ ,  $S_{xy}$  – воздействующие на панель потоки.

Используя далее процедуру метода Бубнова – Галеркина для нелинейного уравнения (1.10) при  $f \neq 0$  и воздействии касательных усилий получим

$$\begin{aligned}
& \frac{\pi^4}{4b^3s^3} \left\{ 3D_x b^4 + (4D + D_{xy} + D_{yx})(3\alpha^2 b^2 + s^2) b^2 + 3D_y (\alpha^2 b^2 + s^2)^2 \right\} + \\
& + \frac{\pi^4 f^2}{4bs^3} \left[ -2A_1 s^2 + 2A_2 s^2 - 3A_3 \alpha^2 b^2 + 6A_4 \alpha^2 b^2 + 2A_5 (s - \alpha b)^2 + 2A_6 (s + \alpha b)^2 \right] + \\
& + \frac{\pi^4 f^2}{8bs^3} \left[ A_7 (2s - \alpha b)^2 + A_8 (2s + \alpha b)^2 + 2A_9 (s + 2\alpha b)^2 + 2A_{10} (s - 2\alpha b)^2 \right] + \\
& + \frac{\pi^4 f}{4bs^3} \left[ -2A_{11} s^2 - 3A_{12} \alpha^2 b^2 + 2A_{13} (s - \alpha b)^2 + 2A_{14} (s + \alpha b)^2 \right] + \\
& + \frac{\pi^4 f^2}{4bs^3} \left[ -A_3 (2\alpha^2 b^2 + s^2) + 2A_4 (3\alpha^2 b^2 + s^2) + 2A_5 (s - \alpha b)^2 + 2A_6 (s + \alpha b)^2 \right] + \\
& \quad + \frac{\pi^4 f^2}{8bs^3} \left[ A_7 (\alpha^2 b^2 + 2\alpha bs + 2s^2) + 5A_8 s^2 \right] + \tag{5.33} \\
& + \frac{\pi^4 f^2}{8bs^3} \left[ 4A_9 (2\alpha^2 b^2 + 2\alpha bs + s^2) + 4A_{10} (2\alpha^2 b^2 - 2\alpha bs + s^2) \right] + \\
& + \frac{\pi^4 f}{4bs^3} \left[ -A_{12} (2\alpha^2 b^2 + s^2) + 2A_{13} (s - \alpha b)^2 + 2A_{14} (s + \alpha b)^2 \right] + \\
& - \frac{\pi^4 f^2}{2bs^3} \left[ -3A_3 \alpha^2 b^2 + 6A_4 \alpha^2 b^2 + A_5 (s - \alpha b)(s - 2\alpha b) + A_6 (s + \alpha b)(s + 2\alpha b) \right] + \\
& + \frac{\pi^4 f^2}{4bs^3} \left[ A_7 (2s - \alpha b)(s - \alpha b) + A_8 (2s + \alpha b)(s + \alpha b) + 2A_9 (s + 2\alpha b)^2 + 2A_{10} (s - 2\alpha b)^2 \right] + \\
& - \frac{\pi^4 f}{2bs^3} \left[ -3A_{12} \alpha^2 b^2 + A_{13} (s - \alpha b)(s - 2\alpha b) + A_{14} (s + \alpha b)(s + 2\alpha b) \right] + \\
& + fC_{xy} \frac{\pi^4 b}{s^3} (-2A_3 + A_5 + A_6) + f(C_x + C_y - 2C) \pi^4 \left( \frac{2A_3 \alpha^2 b}{s^3} + \frac{A_5 (s - \alpha b)^2}{bs^3} + \frac{A_6 (s + \alpha b)^2}{bs^3} \right) + \\
& + fC_{yx} \pi^4 \left( -\frac{2A_3 s}{b^3} - \frac{2A_4 \alpha^4 b}{s^3} + \frac{A_5 (s - \alpha b)^4}{b^3 s^3} + \frac{2A_6 (s + \alpha b)^2}{b^3 s^3} \right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + C_{xy} \frac{\pi^4 b}{s^3} (-2A_{12} + A_{13} + A_{14}) + (C_x + C_y - 2C) \pi^4 \left( \frac{2A_{12} \alpha^2 b}{s^3} + \frac{A_{13} (s - \alpha b)^2}{bs^3} + \frac{A_{14} (s + \alpha b)^2}{bs^3} \right) + \\
& + C_{yx} \pi^4 \left( -\frac{2A_{12} s}{b^3} + \frac{A_{13} (s - \alpha b)^2}{b^3 s^3} + \frac{2A_{14} (s + \alpha b)^2}{b^3 s^3} \right) = \frac{3\alpha b \pi^2}{8s} S_{xy}.
\end{aligned}$$

Для решения задачи устойчивости необходимо записать уравнение (5.33) с учетом малых прогибов ( $f \rightarrow 0$ ). В этом случае уравнение (5.33) перепишем в виде равенства

$$\begin{aligned}
\tau_{xy} = \frac{S_{xy}}{\delta} = \frac{2\pi^2}{3\alpha b^4 s^2} & \left\{ 3D_x b^4 + (4D + D_{xy} + D_{yx}) (3\alpha^2 b^2 + s^2) b^2 + 3D_y (\alpha^2 b^2 + s^2)^2 \right\} + \quad (5.34) \\
& + \frac{8}{3\alpha} \frac{\pi^2}{s^2} \left\{ C_{xy} (-2A_{12} + A_{13} + A_{14}) + (C_x + C_y - 2C) \pi^2 \left( 2A_{12} \alpha^2 + \frac{A_{13} (s - \alpha b)^2}{bs^3} + \frac{A_{14} (s + \alpha b)^2}{bs^3} \right) + \right. \\
& \left. + C_{yx} \pi^4 \left( -\frac{2A_{12} s}{b^3} + \frac{A_{13} (s - \alpha b)^2}{b^3 s^3} + \frac{2A_{14} (s + \alpha b)^2}{b^3 s^3} \right) \right\},
\end{aligned}$$

которое содержит смешанные жесткости  $C_{mn}$  и учитывает несимметричность структуры.

Для определения критических параметров волнообразования надо воспользоваться равенствами (5.26). Указанная система в данном случае допускает только численное решение.

Касательные напряжения потерявшей устойчивость при сдвиге тонкой панели вычисляются из определения функции напряжений  $F$  по формуле

$$\begin{aligned}
\tau_{xy} = -\frac{1}{\delta} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -\frac{S_{xy}}{\delta} - \frac{4f^2 \pi^2}{bs^2} & \left\{ \alpha b A_3 \cos \frac{2\pi(x - \alpha y)}{s} + 4\alpha b A_4 \cos \frac{4\pi(x - \alpha y)}{s} + \right. \\
& + A_5 (\alpha b - s) \cos \frac{2\pi}{bs} (bx + sy - \alpha by) + A_6 (\alpha b + s) \cos \frac{2\pi}{bs} (bx - sy - \alpha by) + \quad (5.35) \\
& + A_7 (\alpha b - 2s) \cos \frac{2\pi}{bs} (2bx + 2sy - \alpha by) + A_8 (\alpha b + 2s) \cos \frac{2\pi}{bs} (-2bx + 2sy + \alpha by) + \\
& \left. + A_9 (4\alpha b + 2s) \cos \frac{2\pi}{bs} (-2bx + sy + 2\alpha by) + A_{10} (4\alpha b - 2s) \cos \frac{2\pi}{bs} (2bx + sy - 2\alpha by) \right\} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{4f\pi^2}{bs^2} \left\{ \alpha b A_{12} \cos \frac{2\pi(x-\alpha y)}{s} - A_{13}(s-\alpha b) \cos \frac{2\pi}{bs} (bx+sy-\alpha by) + \right. \\
& \left. + A_{14}(s+\alpha b) \cos \frac{2\pi}{bs} (bx-sy-\alpha by) \right\} = -\frac{S_{xy}}{\delta} - \frac{4f^2\pi^2}{bs^2} \{\Delta_1\} - \frac{4f\pi^2}{bs^2} \{\Delta_2\}.
\end{aligned}$$

Отметим, что полученное выражение также содержит члены, учитывающие несимметричность структуры. Кроме того, аналогичным образом могут быть определены и нормальные напряжения.

Полученное аналитическое решение геометрически нелинейной задачи может быть использовано для оценки закритического поведения тонких поверхностных прямоугольных дефектов типа расслоений несимметричной структуры при жестком опирании по контуру. Кроме того, по полученным соотношениям по аналогии с пунктом 5.2.1 может быть сформулирована методика проектирования по закритическому состоянию.

### **5.3 Проектирование многозамкнутых конструкций с учетом закритического поведения композитной обшивки при ограничениях по устойчивости и прочности при закритическом поведении**

Рассмотрим конструкцию многозамкнутого закрылка (Рисунок 5.6 – Рисунок 5.7) крыла самолета малой грузоподъемности с учетом особенностей, характерных для ранних этапов проектирования. В этом случае, как правило, имеет место неопределенность по рациональной величине расстояний между продольными стенками и при известных действующих потоках в качестве переменных параметров можно рассматривать толщину обшивки и указанное



расстояние между стенками.

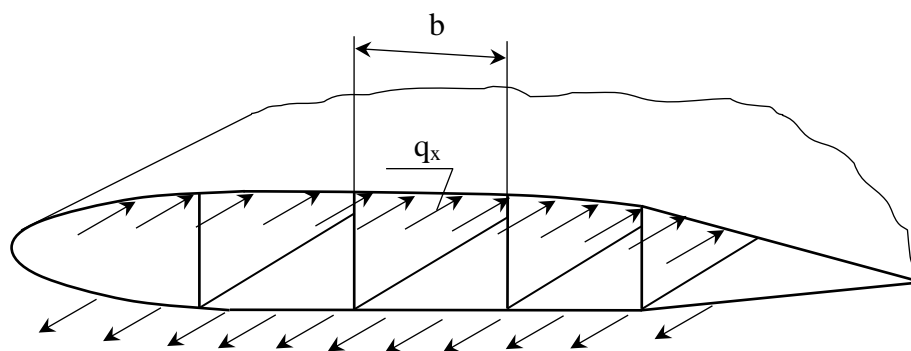


Рисунок 5.6 – Поперечное сечение многостеночного закрылка



Рисунок 5.7 – Фрагмент конструктивно – подобного образца многостеночного закрылка

При известных геометрических характеристиках закрылки по внешним силовым интегральным факторам можно определить действующие силовые потоки в панелях. Далее рассмотрим два уровня статического нагружения. На первом уровне необходимо обеспечить устойчивость, а на втором уровне необходимо обеспечить прочность композитной обшивки, находящейся в закритическом состоянии. Отметим, что методика определения оптимальных толщин композитных панелей при закритическом состоянии приведена в работе

[51], что применимо при проектировании при нагрузках второго уровня. Но в данном случае одновременно будем учитывать ограничения по устойчивости при нагрузках первого уровня.

Рассмотрим подробнее несколько вариантов методик проектирования закрывка:

Во – первых, будем считать, что весь изгибающий момент воспринимается обшивками на расчетном и эксплуатационном уровне, влиянием кручения на начальном этапе можно пренебречь. Также будем считать, что поясами стенок закрывка при восприятии нормальных потоков можно пренебречь. Потоки при этом определяются величиной изгибающего момента и геометрией сечения:  $q_x = M_{изг}/H$ , где  $H$  – средняя высота сечения закрывка в рассматриваемом сечении. При рассмотрении ортотропной тонкой обшивки при условии всестороннего шарнирного опирания можно определить оптимальные параметры обшивки ( $\delta$  – толщина,  $b$  – ширина) с минимальными запасами ( $\eta \rightarrow 1.0$ ) исходя из нагрузок и условий, указанных выше двух уровней нагружения, по следующим соотношениям, которые получена в Главе 2

$$\delta = \frac{2q_x^p - q_x^{уст}}{\bar{\sigma}_x}, \quad b^2 = \frac{\pi^2}{6q_x^{уст}} \delta^3 \left[ \sqrt{\bar{E}_x \bar{E}_y} + \mu_{xy} \bar{E}_x + 2G_{xy} \right], \quad (5.21)$$

где  $q_x^p$  – расчетный нормальный поток, при котором необходимо обеспечить прочность при геометрически нелинейном поведении,  $q_x^{уст}$  – нормальный поток, при действии которого необходимо обеспечить устойчивость;  $\bar{\sigma}_x$  – предельные по прочности нормальные напряжения.

Для случая жесткого опирания по длинным сторонам ортотропной обшивки в Главе 2 данной работы получены аналогичные зависимости для толщины и ширины панели, определенные из соответствующих аналитических решений

геометрически нелинейных задач

$$\delta = \frac{q_x^p (\kappa + 1) - q_x^{уст} \kappa}{\sigma_x}, \quad (5.22)$$

$$b^2 = \frac{8\pi^2}{q_x^{уст}} \frac{\delta^3}{12} \left[ \sqrt{\frac{\bar{E}_x \bar{E}_y}{3}} + \frac{\bar{E}_x \mu_{xy} + 2G_{xy}}{3} \right],$$

где  $\kappa \approx \frac{9}{8} \frac{1}{1.25 + 2 \left[ \frac{19}{3} + \left( \frac{E_y}{G_{xy}} - 2\mu_{xy} \right) \sqrt{\frac{16E_y}{3E_x}} \right]^{-1}}$ .

Отметим, что в данном случае уровень нагружения №1, при котором необходимо обеспечивать устойчивость, не обязательно совпадает с эксплуатационными нагрузками. Также отметим, что в представленных соотношениях не включены в явном виде дополнительные коэффициенты безопасности, которые, как правило, определяются разработчиком воздушного судна в специальных расчетных условиях.

Во – вторых, рассмотрим вариант методики при условиях, когда изгибающий момент воспринимают пояса, а обшивка при условии, например, “сдвиговой” укладки  $\pm 45^\circ$ , воспринимает кручение и теряет устойчивость на первом уровне и разрушается на втором уровне нагружения при достижении предельных касательных напряжений. Для случая шарнирного опирания обшивки ширина связана с толщиной условиями обеспечения устойчивости

$$b^2 = \frac{\pi^2}{q_{xy}^{уст}} \frac{\delta^3}{6} \sqrt{\bar{E}_y (\bar{E}_x \mu_{xy} + 2G_{xy})} \sqrt{4 + 3\theta + \frac{1}{\theta}}, \quad (5.23)$$

а толщина может определяться исходя из аналитического решения геометрически

нелинейной задачи (обозначения приведены в Главе 2)

$$\delta^3 + \delta \frac{8G_\alpha B_{\alpha\beta} \bar{\tau}_{xy} b^2}{D_{\alpha\beta} \pi^2 \alpha} + \frac{q_{xy}^p}{\pi^2 D_{\alpha\beta}} \left( \frac{8G_\alpha B_{\alpha\beta} b^2}{\alpha} - \frac{2\alpha}{s^2} \right) = 0, \quad (5.24)$$

где

$$B_{\alpha\beta} = \frac{1}{b^4} \frac{1}{16G_\alpha} \left\{ \left[ \left( \frac{\alpha b}{s} \right)^2 + E_x G_\alpha \frac{b^4}{s^4} \right] + \left[ \frac{b^2}{s^2} + \alpha^2 \frac{b^4}{s^4} \right] + 2\alpha \frac{b^2}{s^2} \right\},$$

$$D_{\alpha\beta} = \frac{1}{b^4} \frac{1}{12} \left\{ \bar{E}_x \frac{b^4}{s^4} + 2(\mu_{xy} \bar{E}_x + 2G_{xy}) \left[ \frac{b^2}{s^2} + \alpha^2 \frac{b^4}{s^4} \right] + \bar{E}_y \left[ \left( 1 + \frac{\alpha^2 s^2}{b^2} \right)^2 + \frac{4\alpha^2 b^2}{s^2} \right] \right\}.$$

Для определения оптимальной толщины надо подставить выражение (5.23) в равенство (5.24) и численно решить нелинейное уравнение относительно толщины. Критические параметры волнообразования зависят от соотношений жесткостей композитной структуры и вычисляются по формулам, представленным в Главе 2. Отметим, что приведенные в пункте 5.2 результаты решения геометрически нелинейной задачи для случая жесткого опирания ортотропной панели позволяют получить аналогичные соотношениям (5.23) - (5.24) выражения.

Отметим, что приведенные соотношения могут быть использованы для определения оптимальных толщин продольных стенок.

В – третьих, полученные соотношения методик проектирования по закритическому состоянию сжатых обшивок и продольных стенок, воспринимающих касательные потоки, могут быть объединены. В этом случае можно рассматривать задачу оптимального проектирования со следующими особенностями. В качестве минимизируемой функции следует принять сумму, включающую толщины панелей и толщины стенок.

## 5.4 Заключение по главе 5

В данной главе работы получены следующие результаты:

1. Получено аналитическое решение задачи устойчивости и определения напряженно – деформированного состояния при геометрически нелинейном поведении для квадратной ортотропной панели при сдвиге.

2. Представлена методика проектирования квадратных по форме I – образных подкрепленных композитных панелей при ограничениях по местной и общей устойчивости, нагруженных сдвиговыми потоками. Задача оптимизации панелей сведена к минимизации функции одной переменной, которая является отношением высоты к шагу подкрепления. Кроме того, минимальное значение указанной функции может определяться заранее, не зависит величины нагрузки и общих геометрических габаритов панели, но зависит от укладки слоев композитного материала в обшивке и подкрепляющем элементе.

3. Получены аналитические решения геометрически нелинейных задач композитных панелей при сдвиге для случая жесткого опирания. Получены соотношения для панелей ортотропной, анизотропной и несимметричной структур. На основе указанных аналитических решений предложены методики проектирования прямоугольных гладких стенок по закритическому состоянию.

4. Предложена прикладная методика проектирования многозамкнутого закрылка при условиях достижения минимальных запасов по устойчивости и по прочности при закритическом поведении обшивки и стенок.

5. Практическая значимость работы заключается в возможности выполнения экспертной оценки жесткостных характеристик I – образных подкрепленных и гладких (с различными структурами) композитных панелей при действии касательных потоков и оценки параметров многозамкнутых конструкций закрылка.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

**Работа посвящена разработке методик проектирования композитных панелей тонкостенных авиационных конструкций по устойчивости и закритическому состоянию.**

**В диссертационной работе получены следующие основные результаты:**

1. Предложена методика оптимального проектирования гладких композитных и металлических панелей с учетом ограничений по устойчивости и по прочности при закритическом состоянии (при одновременном рассмотрении двух уровней нагружения) с учетом достижения минимальных запасов.

2. Предложена методика оптимального проектирования гладких панелей при комбинированном нагружении по закритическому состоянию, в том числе с учетом равномерного нагрева.

3. Получены аналитические решения геометрически нелинейной задачи определения напряженно – деформированного состояния ортотропных прямоугольных цилиндрических панелей малой кривизны при сжатии и при сдвиге с учетом всестороннего жесткого опирания. На основе полученных аналитических решений предложены методики определения минимальных толщин ортотропных цилиндрических панелей по закритическому состоянию.

4. Получено аналитическое решение задачи устойчивости и определения напряженно-деформированного состояния при геометрически нелинейном поведении для квадратной ортотропной панели при сдвиге.

5. Предложена методика рационального проектирования подкрепленных панелей квадратной формы при сдвиге с учетом ограничений по устойчивости.

6. Получены аналитические решения геометрически нелинейных задач гладких композитных (ортотропных, анизотропных и несимметричных) панелей при сдвиге и предложены соответствующие методики оптимального проектирования композитных панелей по закритическому состоянию.

7. Предложена методика определения параметров многозамкнутых закрылков из композитных материалов с учетом допустимости закритического

поведения несущих панелей и стенок от сжатия и сдвига при нагрузках превышающих эксплуатационный уровень.

8. Полученные аналитические решения и разработанные прикладные методики проектирования несущих панелей с учетом использования геометрически нелинейных соотношений могут являться частью научно – технического задания для создания перспективного самолета малой грузоподъемности. Дальнейшее развитие рассмотренной темы может быть связано разработкой методик проектирования тонких панелей по закритическому состоянию с учетом усталостного нагружения.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Азиков Н.С., Алипов А.Е., Косарев В.А. Проектирование подкрепленных композитных панелей // *Авиационная промышленность*. – 2013. – № 3. – С. 35-39.
2. Азиков Н.С., Васильев В.В. О редуционном коэффициенте для сжатых ортотропных прямоугольных пластин // *Механика композитных материалов*. – 1990. – № 2. – С. 351-353
3. Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Попов Б.Г. Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. – М.: Машиностроение, 1984. – 446с.
4. Андреев А. Н., Немировский Ю. В. Многослойные анизотропные оболочки и пластины: Изгиб, устойчивость, колебания. – Новосибирск: Наука, 2001. – 287 с.
5. Андриенко В.М., Белоус В.А. Оптимальное проектирование композитных панелей кессона крыла по условиям прочности и устойчивости // *Труды ЦАГИ*. – 2001. – № 2642. – С. 151-158.
6. Андриенко В.М., Поспелов И.И. Оптимальное проектирование панелей кессона крыла по условиям прочности и устойчивости. Проектирование и расчет на прочность авиационных конструкций // *Труды ЦАГИ*. – 1996. – № 2623 – . С. 68-75.
7. Арепьев А.Н. Проектирование легких пассажирских самолетов. –М.: Изд-во МАИ, 2006. – 640с.
8. Арепьев А.Н. Вопросы проектирования легких самолетов. Выбор схемы и параметров. –М.: Изд-во МГТУГА, 2001. – 136с.
9. Балабух Л.И. Устойчивость фанерных пластинок // *Техника воздушного флота*. – 1937. – № 9. – С. 19-38.
10. Белубекян Э.В. Закритическая прочность оптимальной по устойчивости прямоугольной пластинки из композиционного материала, усиленной по



- краям ребрами жесткости // Изв. нац. АН Армении. Мех. – 1998. – № 3. – Т. 51. – С. 8-13.
11. Больших А.А., Еремин В.П. Применение метода параметрической оптимизации в задачах проектирования пассажирских авиалайнеров // Инженерный журнал: наука и инновации. – 2020. – № 10 (106). – 14с.
  12. Белоус А.А., Поспелов И.И. Метод расчета на устойчивость панели крыла малого удлинения // Труды ЦАГИ. –1976. – № 1783. – С 36.
  13. Бохоева Л.А., Курохтин В.Ю., Чермошенцева А.С., Перевалов А.В. Моделирование и технология изготовления конструкций авиационной техники из композиционных материалов // Вестник ВСГУТУ. – 2013. – № 2 (41). – С. 12-18.
  14. Буштырков А.А. Закритическое напряженно-деформированное состояние квадратной ортотропной пластины из стеклопластика // Механика полимеров. – 1967. – № 3. – С. 544-552.
  15. Васильев В.В. Механика конструкций из композиционных материалов. – М.: Машиностроение, 1988. – 270 с.
  16. Васильев В.В., Хазиев А.Р. Оптимальное проектирование слоистых композитов // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2009. –Т. 15. – № 1. – С. 3-16.
  17. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. – М.: Наука, 1967. – 983 с.
  18. Вольмир А.С. Гибкие пластины и оболочки. – М.: ГОСТЕХИЗДАТ, 1956. – 419 с.
  19. Гавва Л.М., Фирсанов В.В. Математические модели и методы расчета напряженно-деформированного состояния панелей летательных аппаратов из композиционных материалов с учетом технологии изготовления // Известия РАН. МТТ. – 2020. – №3. – С. 122-133.
  20. Гавва Л.М., Лурье С.А. Метод расчета напряженно – деформированного состояния конструктивно-анизотропных панелей из композиционных материалов с учетом технологии изготовления и граничных условий общего

- вида // Полет. Общероссийский научно – технический журнал. – 2018. – №7. – С. 14-23
21. Голован В.И., Дударьков Ю.И., Левченко Е.А., Лимонин М.В. Несущая способность панелей из композиционных материалов при наличии эксплуатационных повреждений // Труды МАИ. – 2020. – № 110. – С. 5.
  22. Гришин В.И., Митрофанов О.В. Проектирование тонкостенных конструкций с учетом закритического поведения композитной обшивки // Ученые записки ЦАГИ. – 2003. – Т. 34. – № 3-4. – С. 123-134.
  23. Гришин В.И., Дзюба А.С., Дударьков Ю.И. Прочность и устойчивость элементов и соединений авиационных конструкций из композитов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2013. – 272 с.
  24. Григолюк Э.И., Мамай В.И. Нелинейное деформирование тонкостенных конструкций. – М.: Наука, 1997. – 270 с.
  25. Джанхотов С.О. Экспериментальное исследование деформирования и несущей способности при сжатии тонкостенных панелей из композиционных материалов // Прочность, колебания и ресурс авиационных конструкций и сооружений: Сборник статей (к 75-летию со дня рождения Иосифа Алексеевича Ляховенко). – М.: ЦАГИ, 2009. – С. 115-120.
  26. Дубинский С. В., Зиченков М. Ч., Дзюба А. С., Лимонин М.В., Парышев С.Э., Панков А.В. Развитие методов анализа и исследования прочности авиационных конструкций // Полет. Общероссийский научно-технический журнал. – 2018. – №11. – С. 87-105.
  27. Дударьков Ю.И., Левченко Е.А., Лимонин М.В., Шевченко А.В. Расчет и экспериментальный анализ несущей способности стрингерных панелей из ПКМ // Деформирование и разрушение композиционных материалов и конструкций. Труды Третьей международной конференции, посвященной 80-летию ИМАШ РАН. – М.: ТРУДЫ, 2018. – С. 40-42.
  28. Дударьков Ю.И., Лимонин М.В., Наумов С.М., Осипян Е.Э. Виртуальное моделирование эксперимента при статических испытаниях силовых панелей

- конструкции планера летательного аппарата // Исследования Научграда. – 2015. – № 1(11). – С. 32-39.
29. Дударьков Ю.И., Лимонин М.В. Применение метода конечных элементов к расчету несущей способности стрингерных панелей // Полет. – 2012. – № 9. – С. 36-43.
30. Дзюба А.С., Дударьков Ю.И., Замула Г.Н., Митрофанов О.В., Мохов В.Ф., Пименов А.В., Цыганков В.Я. Статические испытания регионального самолета RRJ-95 // Труды ЦАГИ. – 2011. – № 2698. – С. 88-96.
31. Дудченко А.А., Шумова Н.П. Строительная механика плоских подкрепленных композитных панелей. – М.: Изд-во МАИ, 2006. – 88 с.
32. Дудченко А.А. Прочность и конструкция композитных авиационных конструкций. – М.: МАИ, 2007. – 200 с.
33. Железнов Л. П. Устойчивость и нелинейное деформирование отсеков композитного фюзеляжа под действием эксплуатационных нагрузок. Подбор оптимального расположения монослоев композитной обшивки, шага и жёсткости стрингеров / Л. П. Железнов, Т. С. Огнянова // Технологии и оборудование химической, биотехнологической и пищевой промышленности : Материалы X Всероссийской научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых с международным участием, Бийск, 24–26 мая 2017 года. – Бийск: ФГБОУ ВПО «Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова» (АлтГТУ), 2017. – С. 229-232.
34. Железнов, Л. П. Исследование влияния углов укладки монослоев на устойчивость композитной цилиндрической оболочки / Л. П. Железнов // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2021. – Т. 27. – № 3. – С. 382-395.
35. Замула Г.Н. Закритическое поведение композитных панелей при двухосном сжатии и нагреве // Проектирование и расчет на прочность авиационных конструкций. – 1997. – № 2628. – С. 11-20.
36. Замула Г.Н., Иерусалимский К.М. Закритическое поведение и редуцированные коэффициенты потерявшей устойчивость композитной обшивки

- «Проектирование и расчет на прочность авиационных конструкций» // Труды ЦАГИ. – 1996. – № 2623. – С.60-67.
37. Зиченков М.Ч., Кондаков И.О., Шаныгин А.Н. Новый подход к созданию легких и надежных силовых композитных авиаконструкций // Вестник МГТУ. – 2016. – Т. 19. – № 6. – С. 127-136.
  38. Иерусалимский К.М., Фомин В.П. Параметрические исследования устойчивости анизотропной пластинки при комбинированной нагрузке // Проектирование и расчет на прочность авиационных конструкций. – 2001. – № 2641. – С. 94-102.
  39. Карпов Я. С. Оптимизация структуры композиционного материала панелей летательных аппаратов при ограничениях по прочности, устойчивости и прогибу // Проблемы прочности. – 2004. – № 6. – С. 33-47.
  40. Кокуров А.М. Современные методы моделирования и расчета авиационных композиционных конструкций с дефектами в виде расслоений // Актуальные проблемы технических наук. – 2015. – № 9. – С. 75-78.
  41. Комаров А.А. Основы проектирования силовых конструкций. – Куйбышев: книж. изд-во, 1965с.
  42. Комаров В.А. Сравнительный анализ различных подходов к проектированию структур тонкостенных элементов из композиционных материалов // Вестник СГАУ. – 2009. – № 1(17). – С. 155-159.
  43. Комаров В.А., Черняев А.В. Сравнительный анализ различных подходов к проектированию структур тонкостенных элементов из композиционных материалов // Вестник Самарского Государственного Аэрокосмического университета. – 2009. – № 1(17). – С. 171-179.
  44. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. – М.: ОГИЗ, 1947. – 354 с.
  45. Митрофанов О.В., Осман Мазен. Проектирование гладких металлических панелей при обеспечении устойчивости и прочности при закритическом поведении // Вестник МАИ. – 2022. – Т. 29. – №1. – С. 36-47.
  46. Митрофанов О.В., Осман Мазен, Кайков К.В. Проектирование квадратных подкрепленных композитных стенок при сдвиге с учетом обеспечения

- устойчивости // Тезисы II-ой Международной конференции «Композитные материалы и конструкции». – М.: МАИ, 2021. – С. 20-22.
47. Митрофанов О.В., Осман Мазен. Определение оптимальных параметров сжатых композитных панелей при обеспечении устойчивости и прочности при закритическом поведении с учетом жесткого опирания // Тезисы II-ой Международной конференции «Композитные материалы и конструкции». – М.: МАИ, 2021. – С. 23-24.
48. Митрофанов О.В., Гавва Л.М., Осман Мазен. Собственные нелинейные колебания тонких прямоугольных композитных панелей несимметричной структуры // Тезисы II-ой Международной конференции «Композитные материалы и конструкции». – М.: МАИ, 2021. – С. 19-20.
49. Митрофанов О. В., Осман Мазен, Агафонов И.И. Закритическое поведение тонких металлических панелей: актуальные прикладные задачи // Естественные и технические науки. – 2021. – № 12 (163). – С. 263-265.
50. Митрофанов О.В., Мазен О. Оценка геометрически нелинейного поведения тонких поверхностных дефектов типа расслоения анизотропной структуры при сдвиге // Тезисы 19-ой международной конференции «Авиация и космонавтика». –М.: МАИ, 2020. – С. 774-775.
51. Митрофанов О.В. Проектирование несущих панелей авиационных конструкций по закритическому состоянию. – М.: МАИ, 2020. – 160 с.
52. Митрофанов О.В. Прикладные задачи обеспечения несущей способности композитных панелей авиационных конструкций при ограничении по прочности // В сборнике: III Международная конференция молодых ученых по современным проблемам материалов и конструкций. Сборник статей. – Байкал.: (Улан-Удэ). –2019. – С. 132-137.
53. Митрофанов О.В. Проектирование несущих панелей авиационных тонкостенных конструкций по закритическому состоянию с учетом ограничений по ресурсу. – М.: «Спутник +», 2012. – 231с.
54. Митрофанов О.В. Прикладные методы проектирования несущих панелей из композитных материалов. – М.: «Компания Спутник+», 2003. – 240 с.

55. Митрофанов О.В. Прикладное проектирование панелей крыла минимального веса из композитных материалов с учетом закритического поведения обшивки // Вестник МАИ. – 2002. – Т. 9. – № 1. – С. 34-41.
56. Митрофанов О. В., Осман Мазен Оптимальные параметры композитных обшивок многозамкнутого закрылка с учетом ограничений по устойчивости и по закритическому состоянию // Естественные и технические науки. – 2022. – № 2 (165). – С. 216-218.
57. Михайловский К.В., Барановский С.В. Методика проектирования крыла из полимерных композиционных материалов на основе параметрического моделирования // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. – 2018. – № 5 (698). – С. 75-84.
58. Образцов И.Ф., Васильев В.В., Бунаков В.А. Оптимальное армирование оболочек вращения из композиционных материалов. –М.: Машиностроение, 1977. – 144 с.
59. Попов Ю.И., Стрелец Д.Ю., Солошенко В.Н. Параметрический анализ композитных панелей кессона крыла пассажирского магистрального самолета // Авиационная промышленность. – 2017. – № 4. – С. 4-10.
60. Проектирование самолетов. Под. ред. Погосьяна М.А. – М.: Инновационное машиностроение, 2018. – 864 с.
61. Савин С.Ю., Ивлев И.А. Анализ устойчивости ортотропных прямоугольных пластин с использованием коэффициента формы // Вестник МГСУ. – 2017. – Т. 12. – № 11 (110). – С. 1333-1341.
62. Серенсен С.В., Зайцев Г.П. Несущая способность тонкостенных конструкций из армированных пластиков с дефектами. – Киев: Наукова думка, 1982. – 296 с.
63. Сироткин О.С., Гришин В.И., Литвинов В.Б. Проектирование, расчет и технология соединений авиационных конструкций. – М.: Машиностроение, 2006. – 330 с.
64. Солошенко В.Н., Попов Ю.И. Концептуальное проектирование конструкции кессона крыла из композиционных материалов среднемагистрального

- самолета // Вестник Московского Авиационного Института. – 2013. – № 1. – С. 16-30.
65. Смердов А.А. Возможности повышения местной устойчивости подкрепленных и интегральных композитных конструкций // Конструкции из композиционных материалов. – 2011. – № 4. – С. 70-78.
66. Смотров С.А., Наумов С.М., Смотров А.В. Технологии изготовления силовых агрегатов авиационных конструкций из полимерных композиционных материалов. – М.: Техносфера, 2015. – 216 с.
67. Стрижиус В.Е. Методы оценки усталостной прочности элементов композитных авиаконструкций. – М.: Машиностроение, 2015. – 270 с.
68. Стрижиус В.Е. Методика комплексной расчетной оценки усталостной долговечности элементов композитных авиаконструкций // Научный вестник МГТУ ГА. – 2020. – Т. 23. – № 2. – С. 59-71.
69. Трунин Ю.П. Модели статической прочности конструкций с концентратором напряжения, изготовленные из полимерных композиционных материалов со встроенными стопорами трещин // Ученые Записки ЦАГИ. – 1993. – № 1. – С. 145-156.
70. Трунин Ю.П. Усталость и живучесть типовых мест конструкций из полимерных композиционных материалов // Техника воздушного флота. – 1999. – № 6. – С. 26-38.
71. Ушаков А.Е. Методология обеспечения эксплуатационной живучести и безопасности авиаконструкций из ПКМ. – М.: Физматлит, 2012. – 202 с.
72. Файзуллина М.А. Исследование устойчивости и закритического поведения шарнирно опертых пластин и цилиндрических панелей со сложным сочетанием контура // Статика и динамика оболочек. – 1979. – № 12. – С. 103-112.
73. Фейгенбаум Ю.М., Дубинский С.В., Божевалов Д.Г. и др. Обеспечение прочности композитных авиационных конструкций с учетом случайных эксплуатационных ударных воздействия. – М.: Техносфера, 2018. – 506 с.

74. Хазиев А.Р. Оптимальное армирование слоистых композитов по условиям прочности // Вопросы оборонной техники. Сер. 15. Композиционные неметаллические материалы в машиностроении. – 2008. – № 3(150). – С. 18-24.
75. Чернышев С.Л. Новый этап применения композиционных материалов в авиастроении // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2013. – № 1. – С. 3-10.
76. Чедрик В.В. Практические методы оптимального проектирования конструкций из слоистых композиционных материалов // Механика композиционных материалов. – 2005. – № 2. – С. 184-19.
77. Advisory Circular 20-107B, U.S. Department of Transportation Federal Aviation Administration, 2009. <https://www.faa.gov/documentLibrary/>
78. Arakaki F., Faria A. Composite-stiffened panel design under shear post-buckling behavior // Journal of Composite Materials. – 2016. – Vol. 50. – No 26. – pp. 3643-3662.
79. Bokhoeva L.A., Bochektueva E.B. An experimental research of the laminated composite plates stability // IOP Conf. Series: Materials Sci. and Eng. III Int. Conf. of young Scientists on contemporary problems of materials and constructions. – 2019. – Vol. 684. – pp. 012027.
80. Bisagni C., Lanzi L. Post-buckling optimization of composite stiffened panels using neural networks // Composite Structures. – 2002. – No 58. – pp. 237-247.
81. Cardenas D., Elizalde H., Marzocca P., Abdi F., Minnetyan L., Probst O. Progressive failure analysis of thin-walled composite structures // Composite Structures. – 2013. – Vol. 95. – pp. 53-62.
82. Chermoshentseva A.S., Pokrovskiy A.M., Bokhoeva L.A. The behavior of delamination's in composite materials – experimental results // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. – 2016. – Vol. 116. – pp. 012005.
83. Chermoshentseva A.S., Bokhoeva L.A., Lobanov D.V., Rogov V. E. Stability and process of destruction of compressed plate of layered composite materials with defects // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, VII



- International Scientific Practical Conference Innovative Technologies in Engineering. – 2016. – No 1. – Vol. 142. – pp. 12077.
84. Darvizeh M., Darvizeh A., Ansari R., Sharma C.B. Buckling analysis of generally laminated composite plates (generalized differential quadrature rules versus Rayleigh-Ritz method) // *Compos. Struct.* – 2004. – No 1. – Vol. 63. – pp. 69-74.
  85. Dębski H. Experimental investigation post-buckling behavior of composite column with top-hat cross-section // *Maintenance and Reliability.* – 2013. – Vol. 15. – No 2. – pp. 106-110.
  86. Degenhardt R., Kling A., Klein H., Hillger W., Goetting Ch., Zimmermann R., Rohwer K., Gleiter A. Experiments on buckling and postbuckling of thin-walled CFRP structures using advanced measurement systems // *International Journal of Structural Stability and Dynamics.* – 2007. – Vol. 7. – No 2. – pp. 337-358.
  87. DOT/FAA/FR-95/109. Comparative Evaluation of Failure Analysis Methods for Composite Laminates. – 1996 r.
  88. Faggiani A., Falzon B.G. Optimization of postbuckling-stiffened composite aerostructures: Experimental, analytical and numerical studies. – UK.: Queen's University Belfast, 2018. – 308 p. – Chapter 8. – pp. 253-284.
  89. Falzon B.G., Stevens K.A., Davies G.O. Postbuckling behavior of a blade-stiffened composite panel loaded in uniaxial compression // *Compos. A.* – 2000. – Vol. 31. – No 5. – pp. 459-468.
  90. Falzon B.G., Aliabadi M.H. Buckling and postbuckling structures: experimental, analytical and numerical studies. – UK.: Imperial College London, 2008. – 504 p.
  91. Hashin Z., Rotem A. A. Fatigue failure criterion for Fibre Reinforced Materials // *Journal of Composite Materials.* – 1973. – No 7. – pp. 448-464.
  92. Kimura M., Ogawa T., Hashimura T. Post-buckling strength of thin - plates under combined loads // *Journal of Structural and Construction Engineering.* (Transactions of AIJ). – 2003. – Vol. 68. – No 566. – pp. 153-159.
  93. Kirubakaran R., Lokesharun D., Rajkumar S., Anand R. Aircraft wing weight optimization by composite material structure design configuration // *IOSR Journal of Mechanical and Civil Engineering.* – 2017. – Vol. 14. – No 6. – pp. 71-80.

94. Kollar L. P., Springer G.S. Mechanics of composite structures. – Cambridge: Cambridge University Press, 2003. – 480 p.
95. Köllner A., Forsbach F., Völlmecke C. Delamination buckling in composite plates: an analytical approach to predict delamination growth. – Ukraine: Advanced Structured Materials: New achievements in continuum mechanics and thermodynamics. – 2019. – Vol. 18. – pp. 241-255.
96. Lal A., Parghi A., Markad K. Postbuckling nonlinear analysis of sandwich laminated composite plate // Materials Today: Proceedings InternationalC on Advances in Materials Processing & Manufacturing Applications. – 2021. – Vol. 6. – Part 6. – pp. 3933-5036.
97. Li D., Xiang J., Shijun G., Rongxin X. Optimization of composite wing structure for a flying wing aircraft subject to multi constraints // 54th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference. – 2013. – pp. 1-11.
98. Liu Y., Nie K., Dai Y. Analytical solution for buckling and postbuckling behavior of stiffened arbitrary laminated composite panels // Journal of Nanjing University of Aeronautics and Astronautics. – 2018. – No 1. – Vol. 50. – pp. 1-10.
99. Liu Haibao., Falzon B. G., Tan Wei. Experimental and numerical studies on the impact response of damage-tolerant hybrid unidirectional / woven carbon-fibre reinforced composite lamainates // Composites Part B: Engineering. – 2018. – Vol. 136. – pp. 101-118.
100. Lopatin A., Morozov E. Buckling of a rectangular composite orthotropic plate with two parallel free edges and the other two edges clamped and subjected to uniaxial compressive distributed load // European Journal of Mechanics - A/Solids. – 2020. – Vol. 81. – pp.103960.
101. Mitrofanov O. and Osman Mazen. Designing of smooth composite panels providing stability and strength at postbuckling behavior // Mechanics Of Composite Materials. – 2022. – Vol. 58. – No. 1. – pp. 21-42.

102. Mitrofanov, O.V., Osman, M. Design of thin orthotropic panels according to the postbuckling state under combined loading taking into account uniform heating // Journal Aerospace Systems. – 2022. – Vol. 5. – No. 1. – pp. 29-36.
103. Mitrofanov O., Mazen O. Designing of thin composite panels with the post-buckling behavior considering rigid support and loading with shear flows // Book Conf.: Far East Con – Materials and Construction III, Journal Key Engineering Materials. – 2021. – Vol. 887. – pp. 657-661.
104. Mitrofanov O., Osman M. Post-buckling behavior estimation of composite panels of asymmetric structure with all-boundary rigid support with shear flows action // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. – 2021. – No 1. – Vol. 1027. – pp. 012020.
105. Mitrofanov O.V., Osman M. Assessment of the geometrically nonlinear behavior of thin cleavage type surface defects of anisotropic structure under shear // IOP Publishing: Journal of Physics: Conference Series. – 2021. – No 1. – Vol. 1925. – pp. 012053.
106. Mitrofanov O.V., Osman M. Analysis of stability and bearing capacity of reinforced panels made of composite materials under shear // IOP Publishing: Journal of Physics: Conference Series. – 2021. – No 1. – Vol. 1925. – pp. 012060.
107. Mitrofanov O.V., Osman M. Post-buckling behavior estimation of rigidly supported cylindrical composite panels in case shear // IOP Publishing: Journal of Physics: Conference Series. – 2021. – No 4. – Vol. 2094. – pp. 042078.
108. Mitrofanov O.V., Osman M., Gavriliak V. E. Composite panels design based on post-buckling state with combined loading // IOP Publishing: Journal of Physics: Conference Series. – 2021. – No 1. – Vol. 1925. – pp. 012055.
109. Mitrofanov. O. Post-Buckling state estimation and load-bearing composite panels design for compression and shear // AIP Conference Proceedings. – 2019. – No 1. – Vol. 2125. – pp. 030059.
110. Mitrofanov O., Lebedevs I., Turko V. Evaluation of post-buckling behavior of unsymmetrical compressive delamination in cylindrical composite panels of

- aircraft structures// 20th International Scientific Conference Engineering for Rural Developmen. – 2021. – pp. 1133-1138. DOI:[10.22616/ERDev.2021.20.TF244](https://doi.org/10.22616/ERDev.2021.20.TF244).
111. Mitrofanov O., Pavelko I., Varickis S., Vagele A. An applied method for predicting the load-carrying capacity in compression of thin-wall composite structures with impact damage // *Mechanics of Composite Materials*. – 2018. – Vol. 54. – No 1. – pp. 141-158.
112. Mitrofanov O., Lebedevs I., Urbaha M. Design of thin composite skins of anisotropic structure of bearing panels of aircraft structures in post-buckling state under combined loading // 20th International Scientific Conference Engineering for Rural Developmen. – 2021. – pp. 1145-1153 DOI:[10.22616/ERDev.2021.20.TF248](https://doi.org/10.22616/ERDev.2021.20.TF248).
113. Mitrofanov O. Evaluation of postbuckling behavior of orthotropic panels under shear with regard to rigid support along the long sides and initial loss // *Natural and Technical Sciences*. – 2019. – No 1. – pp. 132-135.
114. Ni X., Prusty G., Hellier A. Buckling and post-buckling of isotropic and composite stiffened panels: A review on optimisation (2000-2015) // *Transactions of the Royal Institution of Naval Architects Part A: International Journal of Maritime Engineering*. – 2016. - Vol. 158, Part A3. – pp. A-251 – A-268. <https://doi.org/10.5750/ijme.v158iA3.994>.
115. Osman M.N. Review of calculation methods and experimental studies of structurally anisotropic aircraft panels made of composite materials // *Abstracts XLVI Gagarin Science Conference*. – M.: MAI, 2020. – pp. 1679-1680.
116. Osman M. N. Actual problems of designing the main power elements of the wing caisson made of composite materials with the possibility of loss stability of thin skin // *Abstracts XLVII Gagarin Science Conference*. – M.: MAI, 2021. – pp. 1478.
117. Pogosyan M, Nazarov E, Bolshikh A et al. Aircraft composite structures integrated approach: a review // *Journal of Physics: Conference Series*. – 2021. – Vol. 1925. – No 1. – pp. 012005.

118. Riccio A., Raimondo A., Fragale S., Camerlingo F., Gambino B., Cinzia T., Domenico. Delamination buckling and growth phenomena in stiffened composite panels under compression. Part I: An experimental study // *Journal of Composite Materials*. – 2014. – Vol. 48. – No 23. – pp. 2857-2870.
119. Riccio A., Raimondo A., Francesco D.C., Camerlingo F., Scaramuzzino F., Delamination buckling and growth phenomena in stiffened composite panels under compression. Part II: An experimental study // *Journal of Composite Materials*. – 2014. – Vol. 48. – No 23. – pp. 2843-2855.
120. Singha M. K., Ramachandra L.S., Bandyopadhyay J.N. Stability and strength of composite skew plates under thermomechanical loads // *AIAA Journal*. – 2001. – Vol. 39. – No 8. – pp. 1618-1623.
121. Timarci Taner, Aydogdu Metin. Buckling of symmetric cross-ply square plates with various boundary conditions // *Journal of Composite Structures*. – 2005. – Vol. 68. – No 4. – pp. 381-389.
122. Tsai S.W. Strength theories of filamentary structures, fundamental aspects of fiber reinforced plastic composites, Wiley Inter-science // New York. R.T. Schwartz and H. S. Schwartz. Eds. – 1968. – pp. 3-11.
123. Vasiliev V., Morozov E. *Advanced mechanics of composite materials and structures*. – Amsterdam: Elsevier, 2018. – 900 p.
124. Wu Z., Raju G., Weaver P. (2017). Optimization of Postbuckling Behaviour of Variable Thickness Composite Panels with Variable Angle Tows: Towards “Buckle-Free” Design Concept. *International Journal of Solids and Structures*. 132-133. <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2017.08.037>
125. Xu J., Zhao Q., Qiao P. A critical review on buckling and post-buckling analysis of composite structures // *Frontiers in Aerospace Engineering*. – 2013. – Vol. 2. – No 3. – pp. 157-168.
126. Yshii L., Eliseu L., Monteiro F., Santana R. Accuracy of the Buckling Predictions of Anisotropic plates // *J of Eng Mech*. – 2018. – Vol. 144. – No 8. – pp. 198-205.

127. Zhang F., Wu M., Xinting H., Cheng H., Xiayu Xu., Xinhe W. Post-buckling reliability analysis of stiffened composite panels based on adaptive iterative sampling // *Engineering With Computers*. – 2021. – No 22. – pp. 1-11.