

## СТРУКТУРНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ КРЫЛЬЕВ С УЧЕТОМ ТРЕБОВАНИЙ ПРОЧНОСТИ И ЖЕСТКОСТИ

Андрей Вячеславович БОЛДЫРЕВ родился в 1963 г. в городе Алма-Ате Казахской ССР. Доцент Самарского государственного аэрокосмического университета. Кандидат технических наук, доцент. Основные научные интересы — в области оптимального проектирования силовых конструкций. Автор 20 научных работ. E-mail: odin@ssau.ru

Andrey V. BOLDYREV, Ph. D., was born in 1963, in Alma-Ata. He is an Associate Professor at the Samara State Aerospace University. His major research interests are in optimal design of load-bearing structures. He has published 20 technical papers. E-mail: odin@ssau.ru

*Предлагается метод выбора рациональной силовой схемы на ранних стадиях проектирования крыльев на основе специальной модели метода конечных элементов с учетом ограничений на эквивалентные напряжения и обобщенные перемещения. Приводится численный пример.*

*A new method is proposed to select some reasonable wing structure layout at early design stages. The method is based on a special finite element model with consideration of constraints on equivalent stresses and generalized displacements. An appropriate computational example is presented.*

**Ключевые слова:** оптимизация, конструкция, крыло, нагружение, напряжение, деформация, жесткость, алгоритм.

**Key words:** optimization, structure, wing, loading, stress, strain, stiffness, algorithm.

В оптимальном проектировании авиационных конструкций можно выделить две последовательно решаемые задачи. На первом этапе определяется силовая схема конструкции — выбирается количество и тип силовых элементов, их расположение в пространстве и способы соединения между собой. На следующем этапе решается задача отыскания оптимального распределения материала в конструкции при фиксированной силовой схеме. В проектировании крыльев наиболее сложным и ответственным является первый этап. Если некоторые решения, связанные с выбором силовой схемы конструкции, оказываются неудачными, то попытки устранения этих недостатков на завершающих стадиях проектирования обычно требуют значительных дополнительных затрат времени и средств. Так, например, для крыла с рациональной по требованиям прочности силовой схемой могут оказаться низкими критические скорости реверса элеронов, дивергенции или флаттера. Чаще всего это связано с недостаточной жесткостью крыла на кручение [1]. В то же время в работе [2] показано, что варьирование размеров сечений элементов конструкции для парирования недостаточной жесткости в некоторых задачах малоэффективно по сравнению с введением в конструкцию дополнительных

элементов, т. е. за счет модификации силовой схемы конструкции. В данной работе предлагается развитие стратегии формирования силовой схемы по условиям прочности, предложенной В.А. Комаровым [3], позволяющее учитывать требования к жесткости конструкции уже на начальных стадиях проектирования.

### Постановка задачи

Пусть наружными и внутренними границами задан объем  $V$ , внутри которого может размещаться конструкция, предназначенная для передачи заданных сил. Следуя [4, 3], впишем в геометрические ограничения гипотетическую упругую трехмерную изотропную среду переменной плотности  $\rho$ . Будем считать, что ее модуль упругости и прочностные характеристики пропорциональны плотности:

$$E = \rho \bar{E}; \quad (1)$$

$$\bar{\sigma} = \rho \bar{\sigma}, \quad (2)$$

где  $\bar{\sigma}$  — допускаемое напряжение материала;  $\bar{E}$  и  $\bar{\sigma}$  — модуль упругости и допускаемое напряжение при единичной плотности.

Разобьем непрерывную упругую среду (континуальную модель) на  $n$  достаточно малых трехмерных конечных элементов и примем плотность материала в элементах за переменные проектирования. Потенциально континуальная модель содержит внутри себя все мыслимые силовые схемы проектируемой конструкции, которые могут быть образованы сгустками материала переменной плотности внутри допустимой геометрической области.

Задача оптимизации распределения материала в континуальной модели может быть сформулирована в терминах нелинейного математического программирования. В качестве целевой функции принимаем массу конструкции в следующем виде:

$$m = \sum_{i=1}^n \rho_i V_i,$$

где  $i$  — номер элемента.

Функциональные ограничения представим так:

$$g_j(\rho) = C_j(\rho) - \bar{C}_j \leq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, p),$$

где  $g_j$  —  $j$ -е функциональное ограничение;  $C_j$  и  $\bar{C}_j$  —  $j$ -я переменная состояния конструкции и ее допустимое значение;  $p$  — количество функциональных ограничений. Переменными состояния конструкции являются напряжения в различных точках конструкции и обобщенные перемещения.

Перемещения узлов КЭМ  $\{u^{(p)}\}$  под нагрузкой  $\{P\}$  определяются решением системы линейных алгебраических уравнений следующего вида:

$$[K]\{u^{(p)}\} = \{P\}, \quad (3)$$

где  $[K]$  — матрица жесткости конструкции.

Обобщенное перемещение представим в следующем виде:

$$C_j = \{Q_j\}^T \{u^{(p)}\}, \quad (4)$$

где  $\{Q_j\}$  — вектор коэффициентов линейной комбинации перемещений узлов КЭМ. Отметим, что переменные состояния (4) могут ограничивать перемещения каких-либо точек в определенном направлении, относительные смещения различных точек конструкции, углы закручивания сечений и т.п.

Итак, задача оптимизации заключается в определении точки  $\rho^*$  в пространстве проектных переменных, которой соответствует минимальное значение целевой функции

$$m(\rho^*) = \min_D m(\rho) \quad (5)$$

в области допустимых значений

$$D = \{\rho : g_j(\rho) \leq 0, \rho \in R, j = 1, 2, \dots, p\}, \quad (6)$$

принадлежащей области поиска

$$R = \{\rho : \rho_i \geq \rho_i^{\min}, i = 1, 2, \dots, n\}, \quad (7)$$

где  $\rho_i^{\min}$  — ограничение снизу для  $i$ -й проектной переменной. Если значение проектной переменной соответствует границе области поиска, то такая переменная называется пассивной. Для активных (свободных) проектных переменных соотношения (7) выполняются в виде строгих неравенств [5].

Запишем функцию Лагранжа в следующем виде:

$$L(\rho) = m(\rho) + \sum_{j=1}^p \lambda_j C_j(\rho),$$

где  $\lambda$  — неопределенный множитель Лагранжа.

Необходимые условия Куна—Таккера для задачи оптимизации (5)—(7) формулируются следующим образом:

$$\partial L(\rho^*) / \partial \rho_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n_1); \quad (8)$$

$$\lambda_j g_j(\rho^*) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, p); \quad (9)$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, p), \quad (10)$$

где  $n_1$  — количество активных проектных переменных.

Условия (9) и (10) задают набор активных функциональных ограничений для точки локального оптимума. Функциональные ограничения называются активными [5], если соотношения (6) выполняются в форме равенства. Для пассивных ограничений соотношения (6) являются строгими неравенствами и множители Лагранжа равны нулю.

Условия стационарности функции Лагранжа (8) с учетом  $\partial m / \partial \rho_i = V_i$  записываются так:

$$-1/V_i \sum_{j=1}^p \lambda_j \partial C_j / \partial \rho_i = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n_1). \quad (11)$$

Для адекватного моделирования конструкции, как правило, требуется большое количество проектных переменных и функциональных ограничений, что затрудняет подробное исследование области поиска и, следовательно, получение точного резуль-

тата. Это обстоятельство осложняется еще и тем, что методы нелинейного математического программирования (прямые методы оптимизации) [5] используют «дорогую» (в смысле вычислительных затрат) процедуру анализа чувствительности ограничений на напряжения для множества точек конструкции по всем проектным переменным. Поэтому практический интерес представляет использование и развитие не прямых методов оптимизации упругих систем, которые могут обладать более высокой эффективностью за счет целенаправленного использования характерных свойств объекта проектирования.

В рамках обобщенного критерия оптимальности (11) ограничения на напряжения можно учесть с помощью концепции *полнонапряженности* [3]. Эта стратегия позволяет резко уменьшить количество функциональных ограничений за счет сведения множества ограничений на напряжения к ограничениям снизу на величины проектных переменных [6] в следующем виде:

$$\rho_i^{\min} = \rho_i \max_j (\sigma_{ij} / \bar{\sigma}) \quad (j = 1, 2, \dots, s), \quad (12)$$

где  $s$  — количество случаев нагружения;  $\sigma_{ij}$  — эквивалентные напряжения по принятой теории прочности в  $i$ -м элементе при  $j$ -м случае нагружения.

### Анализ чувствительности обобщенного перемещения

Определим значения производных, входящих в соотношение (11). В дальнейших рассуждениях вектор  $\{Q_j\}$  будем рассматривать как виртуальную нагрузку конструкции. Тогда обобщенное перемещение  $C_j$  (4) является работой виртуальной нагрузки  $\{Q_j\}$  на действительных перемещениях  $\{u^{(p)}\}$ . В случае ограничения на перемещение какого-либо узла КЭМ вектор  $\{Q_j\}$  представляет единичную силу в направлении нежелательного перемещения, в случае ограничения угла закручивания сечения — единичный момент в плоскости сечения и т. д.

Решив систему уравнений

$$[K]\{u^{(q)}\} = \{Q_j\},$$

определим виртуальные перемещения  $\{u^{(q)}\}$ .

Дадим бесконечно малое приращение количеству материала (а следовательно, и жесткости)  $i$ -го элемента. При этом в сплошной среде (1)—(2) изменятся перемещения и внутренние усилия как для

виртуальной, так и для действительной нагрузки. Новое значение  $C_j$  можно определить в предположении неизменности внутренних усилий. Если к усилиям исходной системы добавить самоуравновешенные бесконечно малые приращения сил (напряжений), которые обеспечивают выполнение условий совместности деформаций, то в соответствии с принципом возможных изменений напряжений [7] эти приращения не изменят вычисленного нового значения  $C_j$  [8]. Таким образом, правильность результатов дифференцирования величины  $C_j$  при фиксированных значениях внутренних усилий обеспечивается ее стационарностью по отношению к распределению внутренних усилий.

Дифференцирование (4) по  $\rho_i$  с учетом того, что  $\{Q_j\}$  не зависит от  $\rho_i$ , приводит к следующему соотношению:

$$\partial C_j / \partial \rho_i = \{Q_j\}^T \partial \{u^{(p)}\} / \partial \rho_i. \quad (13)$$

Продифференцируем (3) по  $\rho_i$ :

$$\partial [K] / \partial \rho_i \{u^{(p)}\} + [K] \partial \{u^{(p)}\} / \partial \rho_i = \{0\}. \quad (14)$$

Выражение (14) умножим слева на вектор  $\{u^{(q)}\}^T$ :

$$\{u^{(q)}\}^T \partial [K] / \partial \rho_i \{u^{(p)}\} + \{u^{(q)}\}^T [K] \partial \{u^{(p)}\} / \partial \rho_i = \{0\}.$$

Так как  $\{u^{(q)}\}^T [K] = \{Q_j\}^T$ , получаем

$$\{Q_j\}^T \partial \{u^{(p)}\} / \partial \rho_i = -\{u^{(q)}\}^T \partial [K] / \partial \rho_i \{u^{(p)}\}. \quad (15)$$

Соотношение (15) с учетом (13) принимает следующий вид:

$$\partial C_j / \partial \rho_i = -\{u^{(q)}\}^T \partial [K] / \partial \rho_i \{u^{(p)}\}. \quad (16)$$

В данной работе рассматривается гипотетический материал (1)—(2), для которого справедлива линейная зависимость коэффициентов матриц жесткости элементов от  $\rho_i$ . При этом

$$\partial [K] / \partial \rho_i = [A_i]^T [K] [A_i] / \rho_i, \quad (17)$$

где  $[A_i]$  — булева матрица перехода от матрицы жесткости  $i$ -го элемента к глобальной матрице.

Зависимость (16) с учетом (17) принимает следующий вид:

$$\partial C_j / \partial \rho_i = -\{u^{(q)}\}^T [A_i]^T [K] [A_i] \{u^{(p)}\} / \rho_i. \quad (18)$$

В числителе соотношения (18) записана работа внутренних усилий  $i$ -го элемента  $[K][A_i]\{u^{(p)}\}$  на виртуальных перемещениях узлов  $i$ -го элемента  $\{u^{(q)}\}^T [A_i]^T$ .

**Оптимизация распределения материала в континуальной модели**

Для целей данной работы построим алгоритм, представленный на рис. 1. Первоначально задается исходное распределение материала  $\rho_i^{(0)}$  по всем

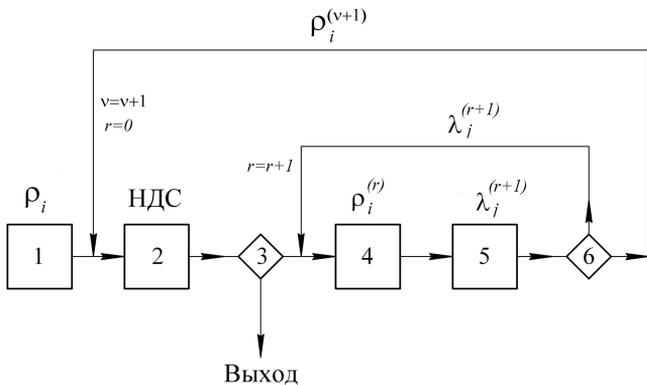


Рис. 1. Блок-схема алгоритма

элементам конструкции (блок 1). Движение в области поиска осуществляется на основе последовательного чередования «пробных» и «рабочих» шагов. В результате ряда «пробных» шагов определяются значения множителей Лагранжа  $\lambda_j$  для всех функциональных ограничений, удовлетворяющие условиям (8)–(10) в предположении, что внутренние усилия в конструкции не изменяются при варьировании проектных переменных. «Рабочий» шаг характеризуется тем, что для него выполняется анализ напряженно-деформированного состояния конструкции и по (12) определяются значения  $\rho_i^{\min}$  для всех элементов (блок 2).

Предварительно все проектные переменные включаются в разряд активных и задаются начальные положительные значения для множителей Лагранжа, например  $\lambda_j^{(0)} = 1$  (где  $j = 1, 2, \dots, p_1, p_1$  — количество ограничений на обобщенные перемещения).

Значения проектных переменных на этапе «пробных» шагов определяются на основе следующих рекуррентных соотношений (блок 4):

$$\rho_i^{(r)} = \rho_i^{(v)} \left( -1 / V_i \sum_{j=1}^p \lambda_j^{(r)} \partial C_j^{(v)} / \partial \rho_i \right)^{1/2} \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

где  $v$  — номер «рабочего» шага;  $r$  — номер «пробного» шага.

Если для  $i$ -й проектной переменной при этом нарушается ограничение (7) или получено положи-

тельное значение  $\sum_{j=1}^p \lambda_j^{(r)} \partial C_j^{(v)} / \partial \rho_i$ , то для этой пе-

ременной принимается значение  $\rho_i^{\min}$ .

На этапе «пробных» шагов строятся линейные аппроксимации функциональных ограничений на основе следующих соотношений:

$$C_j^{(r)} = C_j^{(v)} + \sum_{i=1}^{n_1} \partial C_j^{(v)} / \partial \rho_i (\rho_i^{(r)} - \rho_i^{(v)}) \quad (j = 1, 2, \dots, p_1).$$

Далее назначаются новые значения множителей Лагранжа (блок 5):

$$\lambda_j^{(r+1)} = \lambda_j^{(r)} C_j^{(r)} / \bar{C}_j \quad (j = 1, 2, \dots, p_1).$$

Расчеты в блоках 4 и 5 повторяются до сходимости по условиям (6). После достижения сходимости или исчерпания возможного числа итераций для внутреннего цикла полученные значения проектных переменных принимаются в качестве исходных, и блок 6 передает их в блок 2 для определения нового распределения внутренних усилия в конструкции. Вычислительный процесс во внешнем цикле прекращается, если текущий шаг в области поиска стал достаточно малым или исчерпано заданное число итераций (блок 3).

Для исследовательских целей предложенный алгоритм реализован на языке Visual Basic for Applications. Сходимости данного алгоритма, основанного на приеме линеаризации эквивалентных напряжений и перемещений при изменении значений проектных переменных, может способствовать свойство консерватизма внутренних усилий в конструкциях [8]. Как показало тестирование алгоритма, для его сходимости, как правило, требуется 10–20 итераций внешнего цикла.

Вариации проектных переменных в соответствии с данным алгоритмом вырождают элементы, передача усилий через которые нерациональна, и, наоборот, выделяют из конструкции элементы, обеспечивающие рациональные пути передачи сил, как для виртуальных, так и для действительных нагрузок. Анализ распределения материала и основных путей передачи сил в трехмерной теоретически оптимальной конструкции с учетом конструктивных и технологических требований позволяет разработать варианты рациональных силовых схем с использованием стратегии [3].

**Численный пример**

Для испытания работоспособности предложенного алгоритма рассмотрим модельную задачу проектирования стреловидного крыла прямоугольного поперечного сечения с геометрическими характеристиками, представленными на рис. 2, и относительной строительной высотой 10 %.

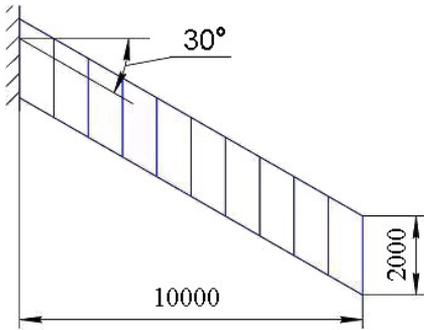


Рис. 2. Стреловидное крыло

К крылу прикладывается на линии 1/4 хорд воздушная нагрузка 180 кН, равномерно распределенная вдоль размаха. Характеристики предполагаемого конструкционного материала:  $E = 70000$  МПа,  $\rho = 2700$  кг/м<sup>3</sup>,  $\bar{\sigma} = 300$  МПа. Конечно-элементная модель состоит из 320 объемных элементов Solid

в среде NASTRAN [9]. Для удобства анализа результатов модель разделена на восемь слоев по строительной высоте крыла. Отметим, что толщина наружных слоев континуальной модели должна обеспечивать учет реального смещения вовнутрь крыла от обводов центра тяжести силовых элементов в соответствующих сечениях [10]. Например, для крыла самолета Як-130 указанное смещение составляет порядка 10 мм, а толщину наружных слоев в 3D-модели этого крыла целесообразно назначать равной порядка 20 мм.

Ставится задача определить рациональную силовую схему конструкции с учетом требований прочности и жесткости — абсолютная величина угла закручивания конечного сечения  $\alpha$  не должна превышать 0,1 рад.

На рис. 3, а, б показано распределение плотностей соответственно в верхнем и срединном слоях трехмерной модели в корневой части крыла, полученное после 30 итераций по алгоритму поиска полнапряженного проекта [3]. Значения плотностей в наружных слоях на два порядка превышают значения плотностей в срединных слоях модели.

Внешние слои континуальной модели крыла, расположенные на максимальном расстоянии от срединной поверхности конструкции, наиболее эффективно воспринимают изгибающие и крутя-

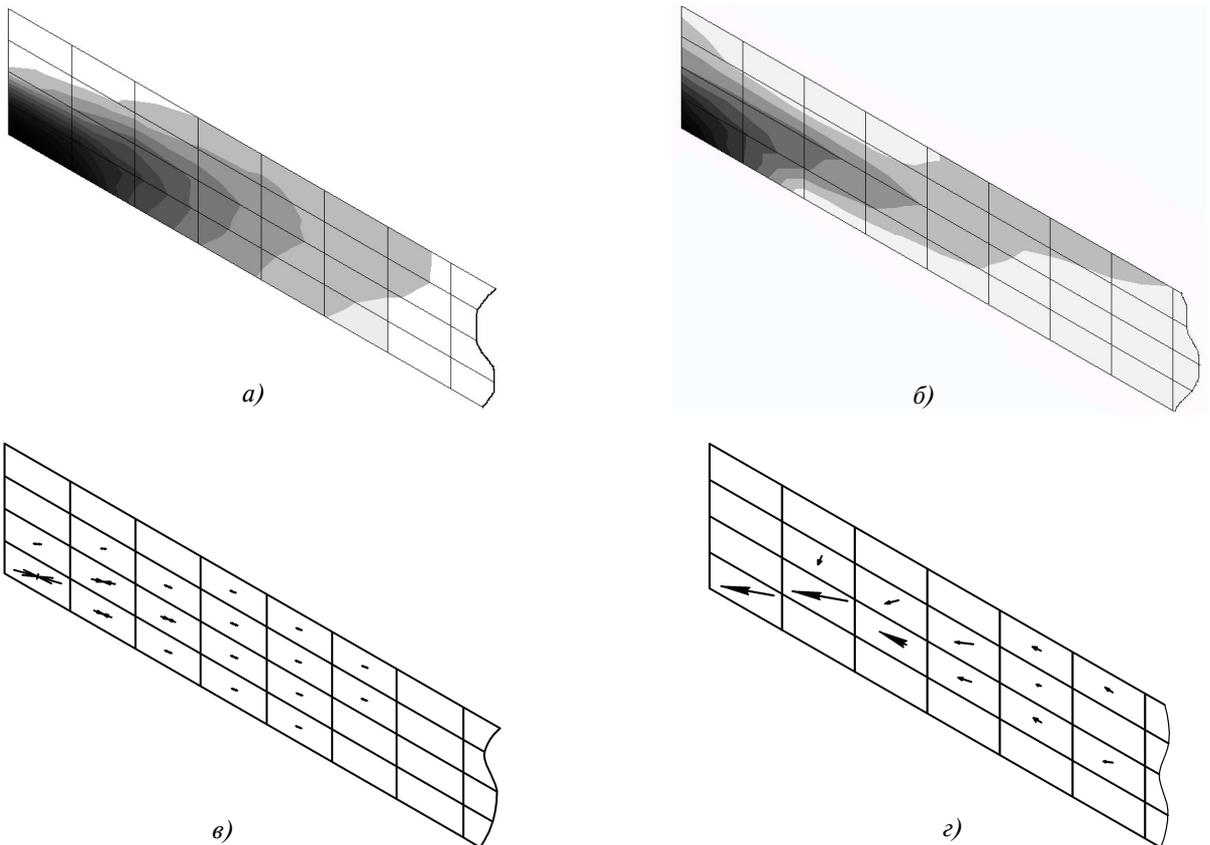


Рис. 3. Распределение материала и усилий в полнапряженном крыле

щие моменты. Напряженное состояние в этих слоях близко к одноосному, направленному преимущественно вдоль размаха несущей поверхности. Для выявления основных путей передачи сил в этих слоях используем в каждом элементе главные напряжения. Умножение их на толщину трехмерного элемента внешнего слоя модели крыла дает потоки усилий, которые также будем называть главными. Потоки главных усилий в конструкции изобразим на схеме модели так: направление стрелок и их ориентацию в каждом элементе сохраним такими же, как у главных напряжений, а длину стрелок назначим пропорционально значениям потоков усилий. Картина потоков главных усилий в элементах верхнего слоя крыла в плане (рис. 3,б) дает наглядное и достаточно полное представление о способе передачи усилий в этом слое.

Анализ работы материала в срединных слоях, расположенных между внешними слоями, удобно выполнять с использованием картины главных касательных сил [3]. Для визуального анализа главные касательные силы изобразим как векторы в центре масс соответствующего элемента на виде крыла в плане (рис. 3,в). Из анализа картин распределения в полнонапряженном проекте плотностей материала, потоков главных усилий и, особенно,

материала в континуальной модели получен допустимый проект с теоретической массой 372 кг. Дополнительный материал размещен преимущественно в локальной зоне А наружных слоев (рис. 4,а). На рис. 4,б показано распределение потоков главных усилий при виртуальной нагрузке (единичный момент, приложенный в плоскости концевой сечения крыла). В зоне А наружных слоев преобладает одноосное напряженное состояние, что можно трактовать как необходимость установки в панелях крыла в этом направлении стержневых элементов для эффективного увеличения крутильной жесткости упругой системы. В случае применения для панелей крыла композиционного материала целесообразно в силовой схеме конструкции использовать слой материала с соответствующей ориентацией волокон.

### Выводы

1. Предложенный алгоритм и программное обеспечение позволяют оптимизировать распределение материала в континуальной модели на основе тела переменной плотности с учетом ограничений на эквивалентные напряжения и обобщенные перемещения. Пробные испытания построенного алгоритма показали его быструю сходимость. В чис-

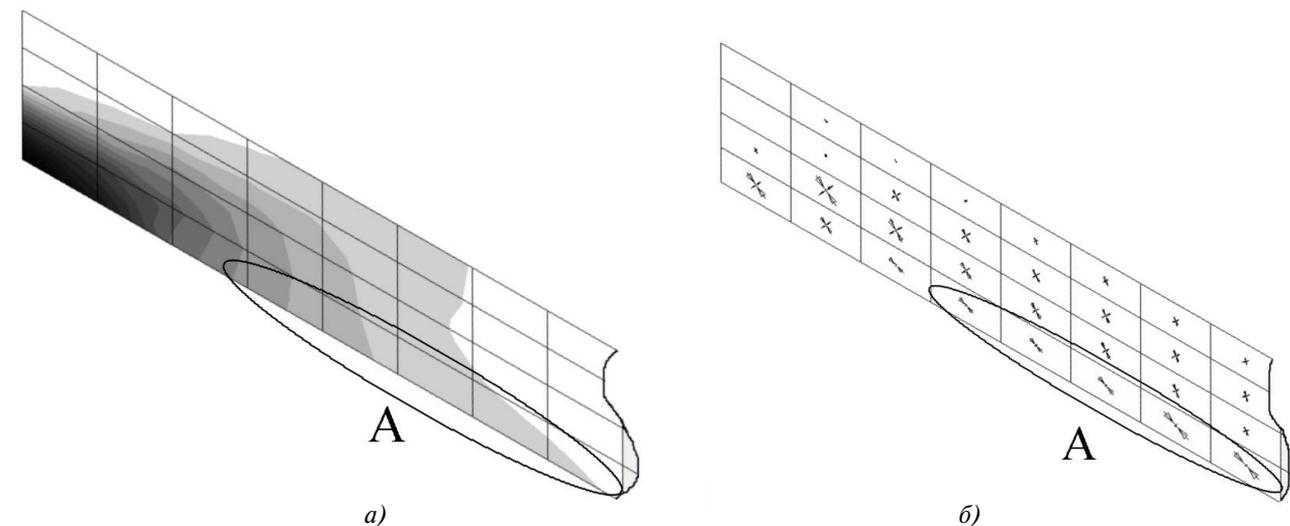


Рис. 4. Распределение материала и усилий в теоретически оптимальном крыле

главных касательных сил отчетливо следует вывод об обоснованности для рассматриваемого крыла часто применяемой на практике лонжеронной схемы с внутренним подкосом.

Отметим, что для полнонапряженного проекта с теоретической массой [11] 364 кг нарушаются условия жесткости:  $\alpha = -0,193$ . Расчеты по предложенному в данной статье алгоритму показали следующее. За 17 шагов внешнего цикла алгоритма относительно полнонапряженного распределения ма-

терияла в континуальной модели удалось уменьшить абсолютную величину угла закручивания концевой сечения полнонапряженного крыла на 48% при увеличении теоретической массы конструкции на 2%.

2. Рассмотренный подход может дать информацию для обоснованного выбора рациональной силовой схемы конструкции с учетом особенностей ее геометрической формы, граничных условий и разнообразных требований.

**Библиографический список**

1. *Бисплингхофф Р.Л., Эшли Х., Халфмэн Р.Л.* Аэроупругость. — М.: Изд-во иностр. лит., 1958.
2. *Комаров В.А.* Повышение жесткости конструкций топологическими средствами // Вестник СГАУ. 2003. №1. С.24-37.
3. *Комаров В.А.* Проектирование силовых схем авиационных конструкций // Актуальные проблемы авиационной науки и техники. — М.: Машиностроение, 1984. С. 114-129.
4. *Комаров А.А.* Основы проектирования силовых конструкций. — Куйбышев, 1965.
5. Новые направления оптимизации в строительном проектировании / М.С. Андерсон, Ж.Л. Арман, Я. Арора и др. — М.: Стройиздат, 1989.
6. *Болдырев А.В., Комаров В.А.* Оптимизация тонкостенной каркасированной конструкции с ог-

раничениями по прочности и жесткости // Вестник СГАУ. 2006. № 1. С. 42-47.

7. *Филин А.П.* Прикладная механика твердого деформируемого тела. Т. II. — М.: Наука, 1978.

8. *Комаров В.А.* К доказательству теорем об изменении жесткости конструкций // Вестник СГАУ. 2004. №1. С. 49-51.

9. *Рычков С.П.* MSC.visual Nastran для Windows. — М.: НТ Пресс, 2004.

10. *Болдырев А.В., Комаров В.А., Лантева М.Ю., Попович К.Ф.* Учет статической аэроупругости на ранних стадиях проектирования // Общероссийский научно-технический журнал «Полет». 2008. №1. С.34-39.

11. *Комаров В.А.* Весовой анализ авиационных конструкций: теоретические основы // Общероссийский научно-технический журнал «Полет». 2000. №1. С.31-39.

Самарский государственный  
аэрокосмический университет  
Статья поступила в редакцию 1.11.2008