

УДК 533

## **Процессы переноса вблизи цилиндрического зонда в потоке плотной плазмы в магнитном поле.**

Котельников В.А., Котельников М.В., Мальцев-Горский Д.А.

Аннотация: Сформулирована математическая и численная модели процессов переноса электрического заряда вблизи цилиндрического зонда в поперечном потоке плотной плазмы при наличии осевого магнитного поля.

Обнаружена нелинейность в поведении средней плотности электронного тока в зависимости от параметра Холла. В ограниченном интервале изменения числа Рейнольдса кривые проходят через максимум, который сохраняется при изменении безразмерного радиуса зонда, его потенциала из отношения температур ионов и электронов. Дано физическое объяснение обнаруженному нелинейному эффекту.

Ключевые слова: процессы переноса, уравнение эйлера, уравнение пуассона, метод крупных частиц, магнитное поле, плотная слабоионизованная плазма, параметр холла.

### **Введение**

Исследования процессов переноса в потоках плотной плазмы в магнитном поле актуально для развития методов зондовой диагностики, для понимания процессов в МГД-генераторах, некоторых типов плазмотронов, плазмохимических реакторов и других устройств, использующих потоки плотной плазмы в магнитном поле.

В настоящей работе основное внимание уделяется переносу заряда на положительно заряженный цилиндрический электрод, находящийся в поперечном потоке слабоионизованной плотной плазмы в продольном магнитном поле (рис. 1)

Радиус цилиндра  $r_p$ , его потенциал  $\varphi_p$ . Предполагается, что длина зонда много больше его радиуса.

## Постановка задачи

Математическая модель задачи включает уравнения неразрывности для ионов и электронов, уравнения движения заряженных компонент, уравнение Пуассона для самосогласованного электрического поля, а так же систему уравнений Эйлера для нейтральной компоненты. [1]

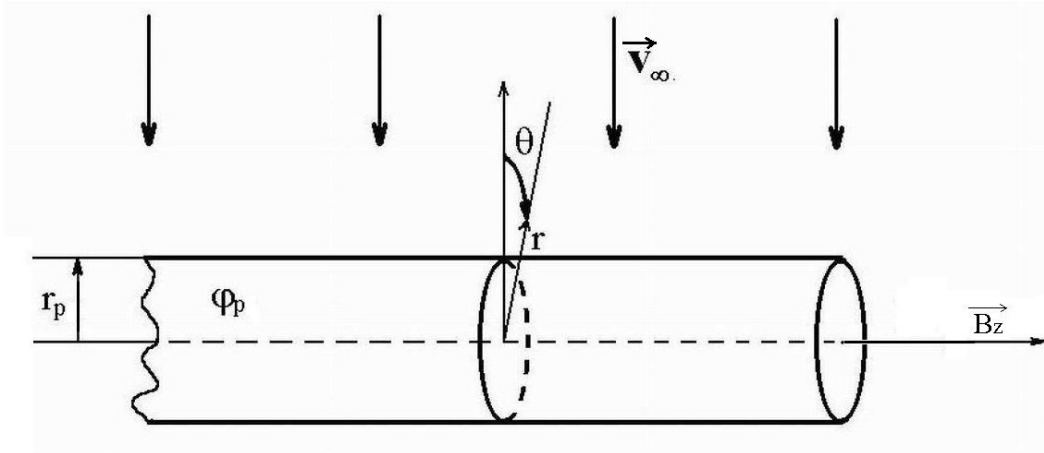


Рис. 1 Расположение зонда в потоке.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial n_i}{\partial t} + \operatorname{div}(n_i \mathbf{u}_i) &= 0 \\
 \frac{\partial n_e}{\partial t} + \operatorname{div}(n_e \mathbf{u}_e) &= 0 \\
 m_i \frac{d\mathbf{u}_i}{dt} &= -\frac{kT_i}{n_i} \nabla n_i + Ze(\mathbf{E} + \mathbf{u}_i \times \mathbf{B}) - \mu_{ia} \nu_{ia} (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_a) \\
 m_e \frac{d\mathbf{u}_e}{dt} &= -\frac{kT_e}{n_e} \nabla n_e - e(\mathbf{E} + \mathbf{u}_e \times \mathbf{B}) - \mu_{ea} \nu_{ea} (\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_a) \\
 \Delta \varphi &= e(n_e - Zn_i) / \varepsilon_0, \mathbf{E} = -\nabla \varphi \\
 \frac{\partial \rho_a}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_a \mathbf{u}_a) &= 0 \\
 \frac{\partial(\rho_a \mathbf{u}_a)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_a \mathbf{u}_a \mathbf{u}_a) &= -\nabla P_a \\
 \frac{\partial(\rho_a E_a)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_a \mathbf{u}_a E_a) &= -\operatorname{div}(\mathbf{u}_a P_a) \\
 P_a &= (E_a - \mathbf{u}_a^2 / 2) \rho_a (\gamma - 1), \quad E_a = C_v T_a + \mathbf{u}_a^2 / 2
 \end{aligned} \tag{1}$$

В приведенной системе уравнений  $n, u, T, \rho, \mu, \nu, P, \varphi, \vec{E}, \vec{B}$  - концентрация, скорость, температура, плотность, приведенная масса, частота столкновений, давление, потенциал, напряженность электрического поля и индукция магнитного поля соответственно. Остальные обозначений общепринятые. Индексы  $i, e, a$  относятся к ионам, электронам и нейтральным частицам. Кроме системы (1) математическая модель включает также систему начальных и граничных условий. На границе втекания задавались параметры плазмы, на границе вытекания ставились условия свободного вытекания. Потенциал цилиндра считался постоянным, потенциал на удаленных границах полагался равным нулю. На электроде ставится условие непротекания для нейтральных частиц и условие идеальной каталитичности для заряженных компонент плазмы.

В системе (1) отсутствуют уравнения энергии для ионов и электронов. Это связано с тем, что в условиях слабой степени ионизации температура ионов полагается равной температуре нейтральных частиц, а температура электронов  $T_e$  варьировалась в виде параметра  $\varepsilon = \frac{T_i}{T_e}$ .

Учтены также следующие допущения:

- химические реакции заморожены;
- вязкостью пренебрегаем;
- собственное магнитное поле мало в сравнении с внешним;

Сформулированная задача оказывается многопараметрической. Среди основных параметров укажем следующие:

- $r_0 = \frac{r_p}{r_D}$  ( $r_D$  - радиус Дебая) – безразмерный радиус цилиндра;
- $\varphi_0 = \frac{e\varphi_p}{kT_i}$  - безразмерный потенциал цилиндра;
- $D = \frac{D_e}{D_i} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{m_i}{m_e} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{T_e}{T_i} \right)^{\frac{1}{2}}$  - отношение коэффициентов диффузии электронов и

ионов;

- $u_0 = \frac{v_\infty}{(D_i / r_D)}$  - безразмерная направленная скорость;
- $\varepsilon = \frac{T_i}{T_e}$  - отношение температур ионов и электронов;

- $\beta_{i,e} = \frac{2\omega_{i,e}}{v_{i,e;a}}$  - параметр Холла; ( $\omega_{i,e} = \frac{eB}{m_{i,e}}$  - ларморовская частота вращения)

Сформулированная задача решалась численно. Условие слабой степени ионизации позволяет отдельно решать уравнения для нейтральных частиц. Решение осуществлялось с использованием метода крупных частиц Давыдова [2,3]. Полученные поля скоростей, концентраций, температур нейтральных атомов использовались как фон для решения электродинамической части задачи. Уравнения неразрывности и движения для ионов и электронов также решались методом крупных частиц. При этом на каждом временном слое напряженность электрического поля  $\vec{E}$  получалась путем решения уравнения Пуассона. Последнее решалось с использованием метода разделения переменных Фурье [4].

### Результаты вычислительных экспериментов

Результаты вычислительных экспериментов представлены на рис. 2 ÷ 11. Экспериментальные данные удобно представлять в зависимости от безразмерных комплексов, таких как число Маха  $M$ , равное отношению направленной скорости  $u_0$  к скорости звука и электрическое число Рейнольдса  $Re_\ominus$ , равное отношению конвективных членов уравнения к диффузионным членам. Оно может быть выражено произведением ионного числа Шмидта на число Рейнольдса потока ( $Re_\ominus = Re \cdot Sc_i$ ).

В случае положительно заряженного цилиндра ( $\varphi_0 > 0$ ) на его поверхность осуществляется перенос из окружающей плазмы отрицательного заряда, т.е., в зондовой цепи протекает электронный ток. Наличие направленной скорости приводит к появлению с теневой стороны цилиндра вытянутой возмущенной области (следа). Вследствие этого наряду с радиальным электрическим полем  $E_r$  возникает также азимутальное электрическое поле  $E_\theta$ . При отсутствии магнитного поля ( $B_z = 0$ ) имеет место плоскость симметрии, проходящая через вектор скорости  $\vec{u}_0$  и ось цилиндра. При включенном магнитном поле ( $B_z > 0$ ) плоскость симметрии отсутствует. Это связано с тем, что в скрещенных полях  $\vec{E}_\theta$  и  $\vec{B}_z$  возникает дрейфовое движение, которое направлено с одной стороны цилиндра от него, а с другой – по направлению к цилиндру. В теневой области в зависимости от параметров задачи может возникать вихревое движение, приводящее к возникновению локальных максимумов электронного тока.

На рис.2 приведена зависимость безразмерной плотности электронного тока  $j_{e\text{cp}}$  на поверхность цилиндра от двух параметров: параметра Холла  $\beta_i$  и электрического числа Рейнольдса  $Re_\omega$ . Значения остальных параметров указаны на рисунке.

$$(j_{e\text{cp}} = \frac{J_e}{M_J}, M_J = \frac{en_{i\infty}D_i}{r_D})$$

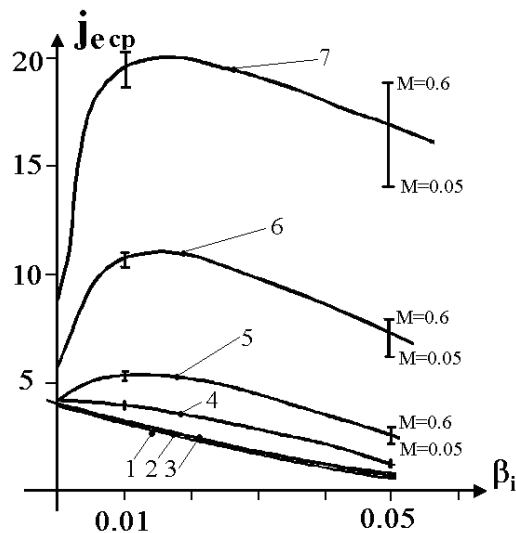


Рис. 2. Зависимость средней плотности электронного тока от параметров  $\beta_e$  и  $Re_\omega$   
 $(r_0 = 10, M = 0.05 - 0.6, \varphi_0 = 5, \varepsilon = 0.3)$   
 1 -  $Re_\omega = 10$ ; 2 - 25; 3 - 50;  
 4 - 100; 5 - 200; 6 - 500; 7 - 1000.

Кривые, приведенные на рис. 2, в определенном интервале изменения параметров  $\beta_i$  и  $Re_\omega$  существенно нелинейны. При  $Re_\omega < 100$  средняя плотность электронного тока  $j_{e\text{cp}}$  с ростом магнитного поля (оно входит в параметр  $\beta_i$ ) уменьшается, что согласуется с известными в литературе данными [5]: уменьшением поперечной диффузии заряженных частиц в магнитном поле. Однако в области  $Re_\omega > 100$  в интервале  $\beta_i < 10^{-2}$   $j_{e\text{cp}}$  растет с ростом индукции  $B$ , а при  $\beta_i > 2 \cdot 10^{-2}$  начинает уменьшаться, как и при  $Re_\omega < 100$ .

Обнаруженный эффект проявляется при различных значениях числа Маха в интервале  $0.05 \leq M \leq 0.6$ . На рис. 3-5 приведены аналогичные рис.2 зависимости, но при других значениях параметра  $r_0$  ( $3 \leq r_0 \leq 100$ )

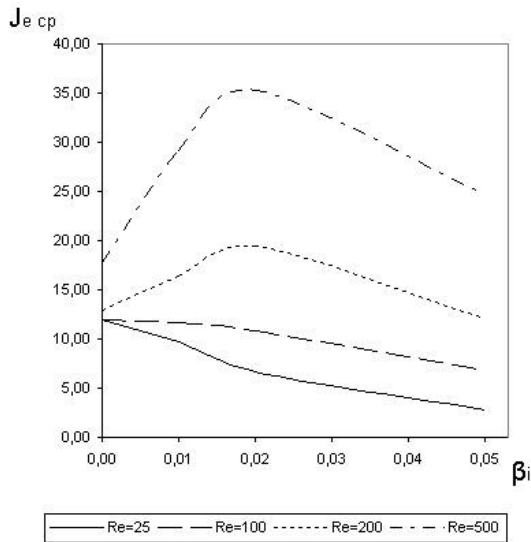


Рис.3 Зависимость средней плотности электронного тока от параметров  $\beta_i$  и  $Re_\nu$  ( $r_0 = 3, M = 0.6, \varphi_0 = 5, \varepsilon = 0,3$ )

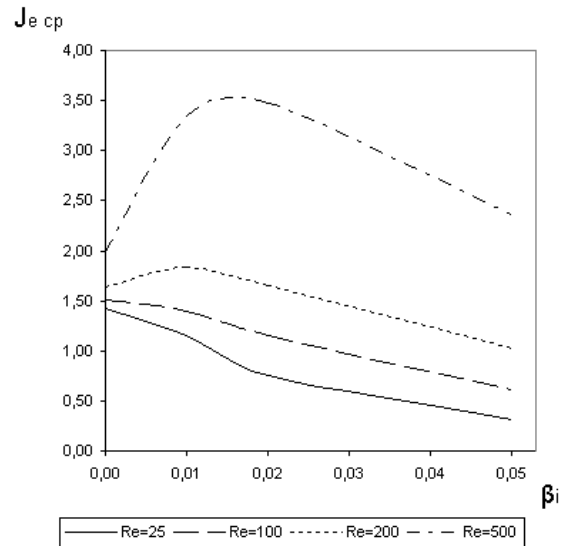


Рис.4 Зависимость средней плотности электронного тока от параметров  $\beta_i$  и  $Re_\nu$  ( $r_0 = 30, M = 0.6, \varphi_0 = 5, \varepsilon = 0,3$ )

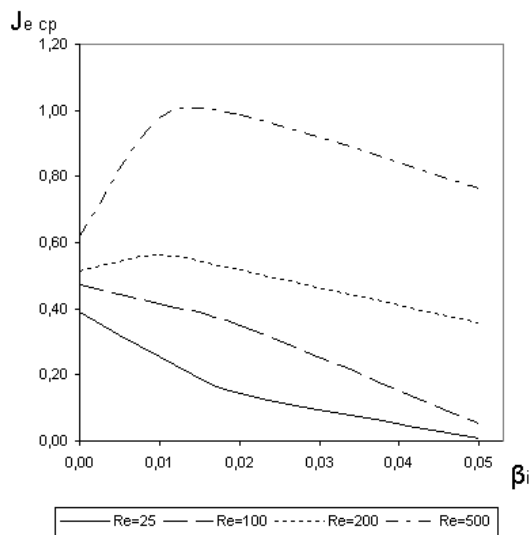


Рис. 5 Зависимость средней плотности электронного тока от параметров  $\beta_e$  и  $Re_\nu$  ( $r_0 = 100, M = 0.6, \varphi_0 = 5, \varepsilon = 0,3$ ).

Исследовалось также влияние на среднюю плотность электронного тока параметра  $\varepsilon$  ( $0,1 \leq \varepsilon \leq 2$ ). Соответствующие кривые приведены на рис. 6,7.

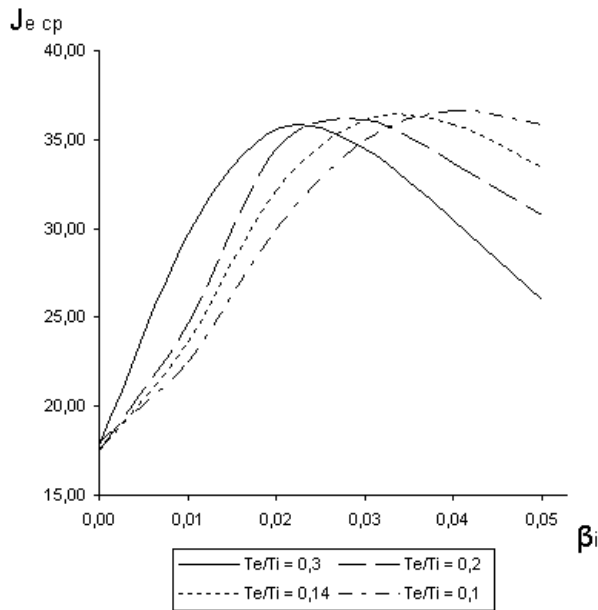


Рис.6 Зависимость средней плотности электронного тока от параметров  $\beta_i$  и  $\varepsilon$  ( $Re_{\vartheta} = 500, r_0 = 3, M = 0.6, \varphi_0 = 5$ )

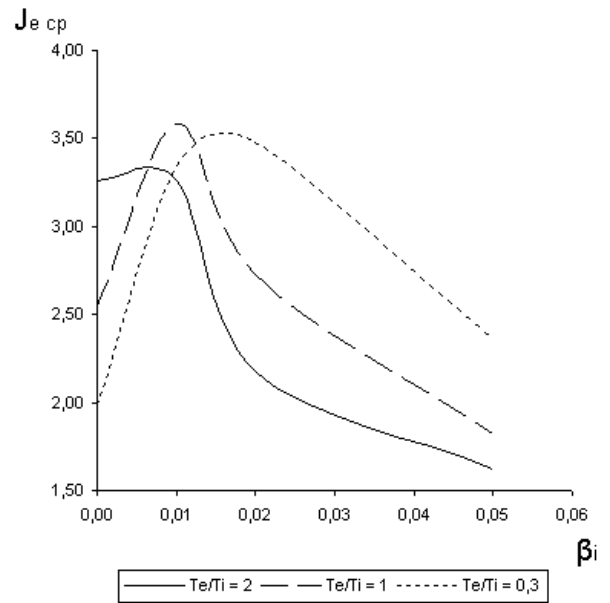


Рис.7 Зависимость средней плотности электронного тока от параметров  $\beta_i$  и  $\varepsilon$  ( $Re_{\vartheta} = 500, r_0 = 30, M = 0.6, \varphi_0 = 5$ )

На рис.8 ÷ 10 даны аналогичные зависимости от параметра  $\varphi_0$  ( $1 \leq \varphi_0 \leq 7$ )

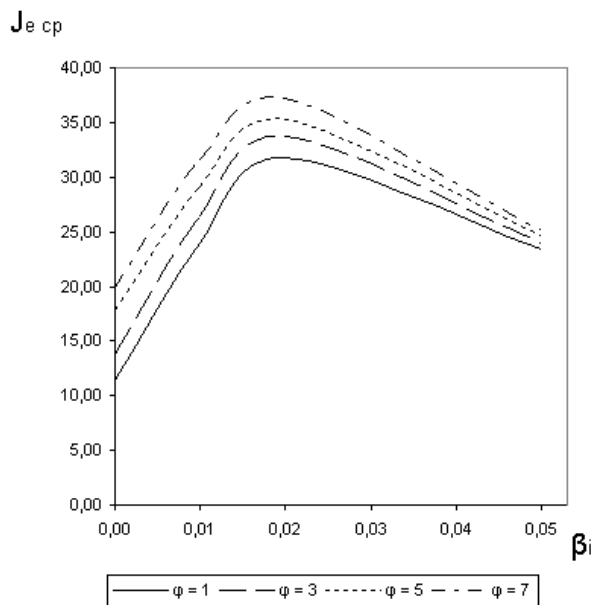


Рис.8 Зависимость средней плотности электронного тока от параметров  $\beta_i$  и  $\varphi_0$  ( $Re_{\vartheta} = 500, r_0 = 3, M = 0.6, \varepsilon = 0.3$ )

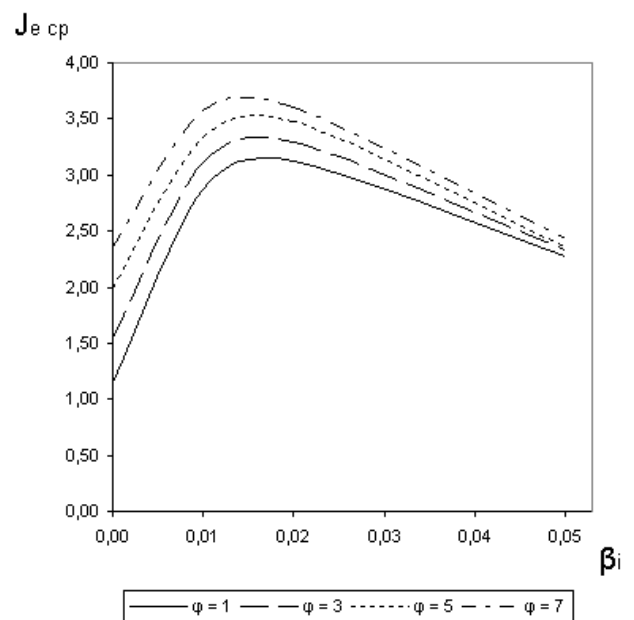


Рис.9 Зависимость средней плотности электронного тока от параметров  $\beta_i$  и  $\varphi_0$  ( $Re_{\vartheta} = 500, r_0 = 30, M = 0.6, \varepsilon = 0.3$ )

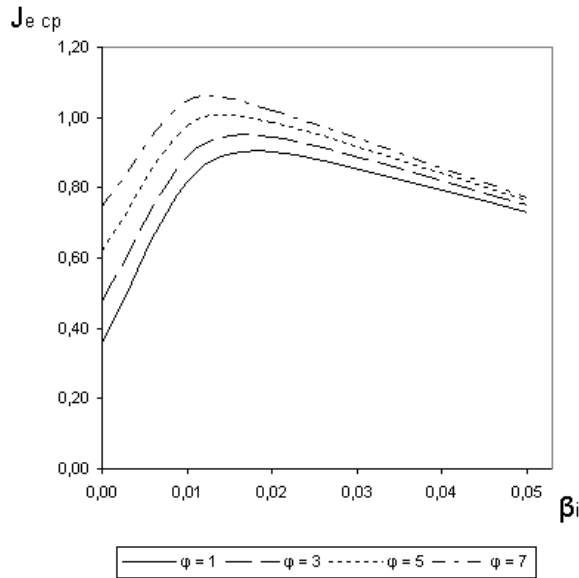


Рис.10 Зависимость средней плотности электронного тока от параметров  $\beta_i$  и  $\varphi_0$   
 $(Re_{\varnothing} = 500, r_0 = 100, M = 0.6, \varepsilon = 0.3)$

Из приведенных на рис.2 ÷ 10 кривых следует:

1. Обнаруженная в численных экспериментах нелинейность в поведении средней плотности электронного тока в зависимости от чисел  $Re_{\varnothing}$  и  $\beta_i$  (в ограниченном интервале их изменения) имеет место при различных значениях характерных параметров задачи  $M, r_0, \varphi_0, \varepsilon$ .

2. Зависимость  $j_{e\text{ ср}}$  от числа Маха в интервале  $0.05 \leq M \leq 0.6$  относительно невелика. С ростом числа  $M$   $j_{e\text{ ср}}$  также растет, что связано с зависимостью  $E_{\theta}$  от  $u_0$ .

3. Зависимость  $j_{e\text{ ср}}$  от  $r_0$  качественно повторяется. С уменьшением  $r_0$   $j_{e\text{ ср}}$  увеличивается, что совпадает с данными Лафрамбуаза [6] и других авторов [7,8]. Это вызвано увеличением пристеночной напряженности электрического поля при уменьшении радиуса кривизны зонда.

4. Зависимость  $j_{e\text{ ср}}$  от  $\varphi_0$  обратна зависимости от  $r_0$ . С ростом  $\varphi_0$   $j_{e\text{ ср}}$  растет, поскольку возрастает пристеночная напряженность электрического поля.

5. С ростом электронной температуры (параметр  $\varepsilon = \frac{T_i}{T_e}$  уменьшается) максимум  $j_{e\text{ ср}}$  смещается в сторону более высоких значений  $\beta_i$ . Это объясняется тем, что более высокотемпературные электроны замагничиваются при более высоких значениях индукции магнитного поля  $B$ .



В заключение дадим физическое объяснение обнаруженной нелинейности в поведении кривых  $j_{e\text{cp}} = f(\beta_i)$ . С этой целью рассмотрим распределение плотности электронного тока  $j_e$  по обводу цилиндра. При относительно больших числах Рейнольдса ( $\text{Re}_e > 100$ ) эффекты, связанные с конвекцией, преобладают над диффузией и подвижностью. Вследствие этого плотность тока на боковую поверхность цилиндра мала (заряженные частицы, участвующие в конвективном движении, пролетают мимо цилиндра). Имеет место только ток электронов на лобовую часть и на теньвую, если там имеются вихри. При включении осевого магнитного поля возникающие пондеромоторные силы приводят к существенному росту тока  $j_e$  на одну из боковых поверхностей цилиндра, которое

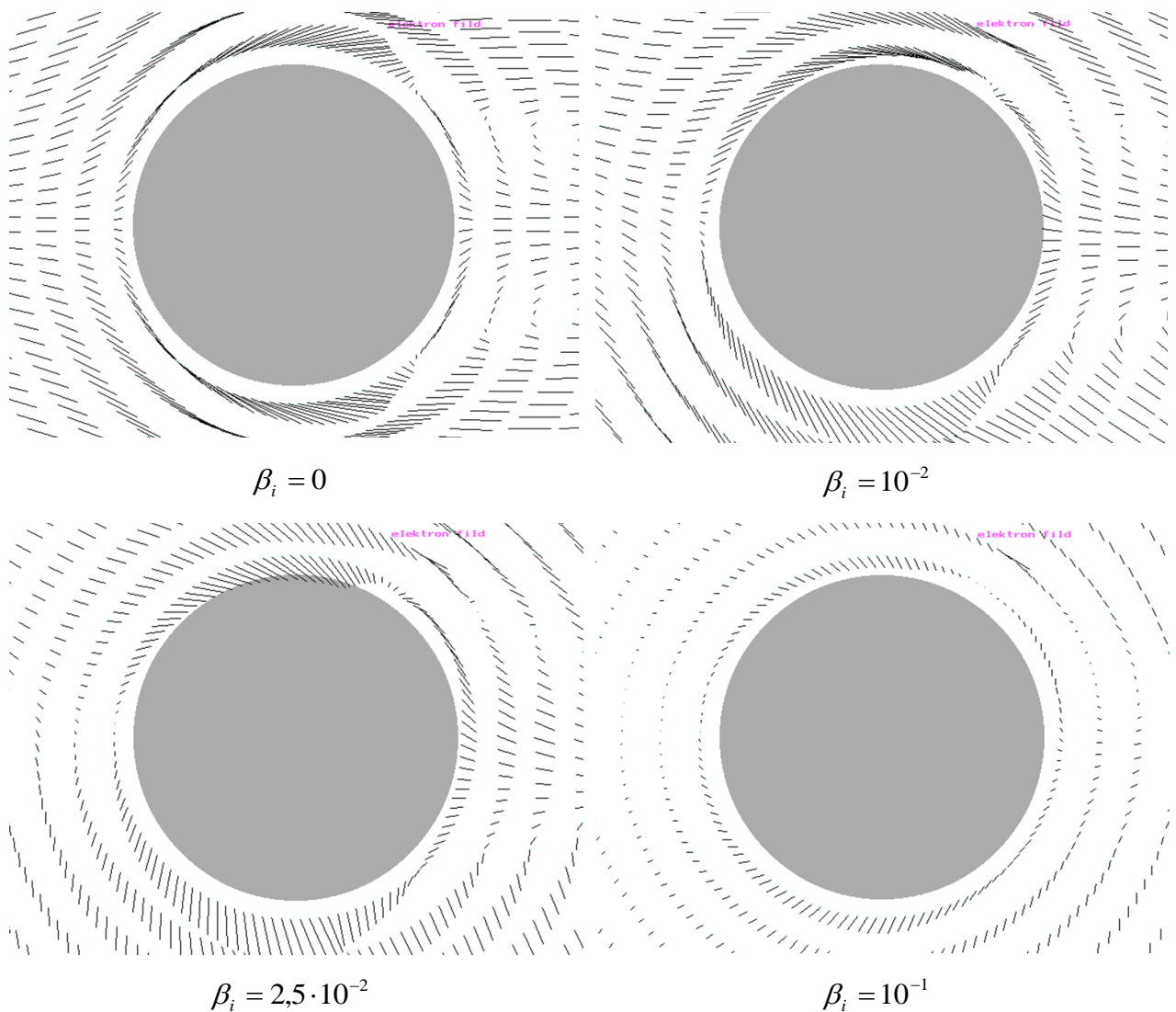


Рис. 11. Влияние магнитного поля на поле скоростей электронов.

( $\text{Re}_e = 10^4$ ;  $M = 0,6$ ;  $r_0 = 10$ ,  $\varphi_0 = 5$ )

превышает уменьшение тока на лобовую и теневую области и противоположный бок цилиндра. При дальнейшем увеличении индукции магнитного поля  $B$  ( $\beta_i > 10^{-2}$ ) растет степень замагниченности электронов и это ведет к уменьшению  $j_{e\text{cp}}$  также, как это имеет место при ( $Re_{\text{э}} < 100$ ). В качестве подтверждения приведенного физического анализа на рис.11 приведены (по результатам численных экспериментов) линии тока электронов вблизи поверхности цилиндра при  $Re_{\text{э}} = 10^4$  и четырех значениях параметра Холла  $\beta_i = 0; 10^{-2}; 2,5 \cdot 10^{-2}; 10^{-1}$ . При  $\beta_i = 0$  линии тока почти параллельны боковым поверхностям цилиндра. При  $\beta_i = 10^{-2}$  под действием пондеромоторных сил с одной стороны цилиндра появляется составляющая вектора скорости электронов, направленная к поверхности цилиндра. При  $\beta_i = 2,5 \cdot 10^{-2}$  эта составляющая достигает максимума, а при  $\beta_i = 10^{-1}$  она снова уменьшается за счет замагничивания электронов.

## Библиографический список

1. В.А. Котельников, М.В. Котельников, В.Ю. Гидаспов. Математическое моделирование обтекания тел потоками столкновительной и бесстолкновительной плазмы – М.:Физматлит, 2010, 266с.
2. О.М. Белоцерковский, Ю.М. Давыдов. Метод крупных частиц в газовой динамике. Вычислительный эксперимент. – М.: Наука, 1982, 392с.
3. Ю.М. Давыдов. Метод крупных частиц // Математическая энциклопедия. – М.: Сов. энциклопедия, 1985 – т.3, с.125-129.
4. Н.С. Бахвалев, Н.П. Жидков, Г.Н. Кобельков. Численные методы – М.: Наука, 1989, 608с.
5. Д.А. Франк-Каменецкий. Лекции по физике плазмы. – М.: Атомиздат, 1968, 286с.
6. J.G. Laframboise. Theory of cylindrical and spherical Langmuir probes in collisionless plasma at rest // Rarefied Gas Dynamics – 1966 – V.II, №4, P.22.
7. Чан П., Телбот Л., Турян К. Электрические зонды в неподвижной и движущейся плазме (теория и приложения) – М.: Мир, 1976 – 202с.
8. Котельников В.А., Ульданов С.В., Котельников М.В. Процессы переноса в пристеночных слоях плазмы. – М.: Наука, 2004. – 422с.

## Сведения об авторах

Котельников Вадим Алексеевич, профессор Московского авиационного института (государственного технического университета), д.т.н.,  
МАИ, Волоколамское ш., 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993;  
тел.: (499) 158-19-70; e-mail: mvk\_home@mail.ru

Котельников Михаил Вадимович, профессор Московского авиационного института (государственного технического университета), д.т.н.,  
МАИ, Волоколамское ш., 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993;  
тел.: (499) 158-19-70; e-mail: mvk\_home@mail.ru

Мальцев-Горский Дмитрий Александрович, студент Московского авиационного института (государственного технического университета).  
Авиационная ул., д. 70 к.3, кв. 67, Москва 123182;  
тел.: 8-926-330-6393; e-mail: netdmg@msn.com