

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)

На правах рукописи



Борщев Никита Олегович

**МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ТЕПЛОВОЙ МОДЕЛИ
МНОГОРАЗОВОГО ЭЛЕМЕНТА КОНСТРУКЦИИ СПУСКАЕМОГО
КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С УЧЕТОМ СВОЙСТВА
АНИЗОТРОПИИ**

Специальность:

05.07.03 – Прочность и тепловые режимы летательных аппаратов

Диссертация

на соискание учёной степени кандидата технических наук

Научный руководитель:

Антонов Виктор Алексеевич

кандидат технических наук

Москва – 2021

ОГЛАВЛЕНИЕ

| | |
|--|----|
| ВВЕДЕНИЕ | 4 |
| 1 АНАЛИЗ ТЕКУЩЕГО СОСТОЯНИЯ ПРОБЛЕМЫ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ИССЛЕДОВАНИЯ..... | 11 |
| 1.1 Тепловые математические модели. Общие сведения | 11 |
| 1.2 Общие сведения об обратных задачах теплообмена и их основные виды | 19 |
| 1.3 Объект исследования и постановка задачи моделирования теплового состояния конструкции | 21 |
| 2 МЕТОДИКА ИДЕНТИФИКАЦИИ СИММЕТРИЧНОГО ТЕНЗОРА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ | 30 |
| 2.1 Представление исследуемых характеристик | 30 |
| 2.2 Метод регуляризации А. Н. Тихонова..... | 32 |
| 2.3 Алгоритм итерационной регуляризации | 36 |
| 2.4 Организация останова итерационного процесса..... | 42 |
| 2.5 Составление целевого функционала невязки..... | 47 |
| 2.6 Составление вариации целевого функционала | 48 |
| 2.7 Компоненты градиентов теплофизических параметров | 55 |
| 2.8 Выбор шага спуска..... | 60 |
| 2.9 Алгоритм метода сопряжённых градиентов | 62 |
| 3 МОДЕРНИЗАЦИЯ ЧИСЛЕННОГО МЕТОДА ДЛЯ РЕАЛИЗАЦИИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ТЕПЛОПЕРЕНОСА ТЕПЛОВЫХ ПОТОКОВ В АНИЗОТРОПНЫХ ТВЁРДЫХ ТЕЛАХ | 64 |
| 3.1 Численное решение поставленной задачи..... | 64 |
| 3.2 Алгоритм численного решения задачи вариации температурного поля..... | 80 |
| 3.3 Вычисление функционала от полученного решения | 90 |
| 4 ТЕПЛОВАЯ ОТРАБОТКА ОБЪЕКТА ИССЛЕДОВАНИЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО СОСТОЯНИЯ КОНСТРУКЦИИ | 94 |
| 4.1 Исходные данные для проектирования стенда для проведения наземной тепловой отработки изделия..... | 94 |

| | |
|--|------------|
| 4.2 Численное моделирование и результаты расчётов обратной задачи радиационного теплопереноса | 97 |
| 4.3 Методика проведения теплостатических испытаний..... | 104 |
| 4.4 Экспериментальная установка..... | 106 |
| 4.5 Результаты теплостатических испытаний активного стыковочного агрегата и теплозащитного покрытия | 112 |
| 5 АНАЛИЗ СВОЙСТВ РАЗРАБОТАННОГО ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО АЛГОРИТМА | 121 |
| 5.1 О существовании, единственности и устойчивости решений обратных задач теплопроводности в анизотропных твёрдых телах.... | 121 |
| 5.2 Оценка сходимости итерационного процесса..... | 125 |
| 5.3 Результаты расчётов компонент симметричного тензора теплопроводности | 132 |
| ЗАКЛЮЧЕНИЕ | 137 |
| СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ И УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ..... | 139 |
| СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ..... | 140 |
| ПРИЛОЖЕНИЕ А Акт о внедрении результатов диссертационной работы в учебный процесс ФГБОУ ВО МАИ..... | 151 |
| ПРИЛОЖЕНИЕ Б Акт о внедрении результатов диссертационной работы в АО «НПО ЭНЕРГОМАШ»..... | 153 |

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования.

При создании новых образцов ракетно-космической техники, функционирование которых сопровождается интенсивными процессами тепломассопереноса, особое внимание уделяется исследованию их теплофизическим характеристикам, тепловому проектированию и экспериментальной отработке тепловых режимов.

Повышенное внимание к указанным исследованиям связано прежде всего с ужесточением условий теплового нагружения конструкции во время эксплуатации, уменьшением температурных допусков на целевую аппаратуру, повышенными требованиями к надёжности, прочности, экономии топливно-энергетических ресурсов.

Создание современной космической техники требует большого объёма экспериментальных исследований, включающих тепло-вакуумные испытания. Важным моментом является создание эффективных методов диагностики и идентификации теплообменных процессов на основе экспериментальных данных и результатов испытаний.

Важное место в исследовании теплообменных процессов заняла методология решения обратных задач теплопроводности (ОЗТ). Решение обратной задачи заключается в определении краевых условий или коэффициентов уравнения (физических свойств вещества) для заданного распределения температур в пространстве и во времени.

Методы обратных задач теплопроводности дают возможность исследовать сложные нестационарные процессы теплопереноса в элементах конструкции, обладают высокой информативностью и позволяют принимать обоснованные решения для проектирования ракетно-космической техники. В настоящее время методы исследований, основывающиеся на принципах решения обратных задач теплопроводности, находят всё более широкое применение. Большой вклад в разработку методов и алгоритмов решения

обратных задач теплообмена внесли академик Тихонов А. Н., Сенкевич Е. А., Алифанов О. М., Формалёв В. Ф., Резник С. В., Просунцов П. В., Алексеев А. К., Артюхин Е. А., Елисеев В. Н., Кабанихин И. С., Коздоба Л. А., Полежаев Ю. В., Мацевитый Ю. М., Юдин В. М., Яголой А. Г., J.V. Beck, G. Chaven, Y. Jarny.

Подходы к параметрической идентификации коэффициентов математических моделей, базирующиеся на методах решения некорректных задач широко анализировались в нашей стране, а также в других странах и показали свою эффективность при разработках и исследованиях в космической, авиационной, автомобильной отраслях техники, металлургии, энергетике и т.д.

В настоящей работе рассматривается комплексный подход к определению теплофизических характеристик твёрдых материалов в целях обеспечения уточнения физико-математических моделей расчёта теплонагруженных конструкций ракетно-космической техники на всех её этапах эксплуатации. Элементами комплексного подхода являются следующие этапы:

1. На первом этапе решается обратная граничная задача идентификации радиационного теплообмена по воспроизведению теплового аэродинамического падающего потока на конструкцию активного стыковочного агрегата (АСА). Решение данной задачи позволяет получить данные для разработки и создания экспериментального стенда, позволяющего имитировать условия спуска возвращаемого аппарата. Результатом тепловой обработки АСА на созданном стенде является температурное поле стыковочного агрегата.

2. На втором этапе по полученному температурному полю решается обратная задача по поиску компонентов тензора теплопроводности.

Степень разработанности темы исследования.

Существует ряд работ и исследований в области теплового проектирования конструкций ракетно-космической техники, выполненных из

композиционных материалов. Данные материалы обладают явно выраженной анизотропией. В настоящее время огромный вклад в исследование теплового состояния анизотропных твёрдых тел внесли Формалёв В. Ф. и Колесник С. А. В работах этих авторов расчёты проводились в декартовой системе координат при заданных граничных условиях первого рода (заданных температур).

В настоящей диссертации рассмотрена реальная конструкция активного стыковочного агрегата, исследуемая в граничных условиях второго рода (падающий тепловой поток). Задача решена в цилиндрической системе координат в связи с осевой симметричностью АСА.

Цель и задачи исследования.

Цель – разработка методики по определению компонентов тензора теплопроводности анизотропного материала шпангоута стыковочного агрегата спускаемого аппарата по данным теплофизического эксперимента.

Для достижения цели поставлены и решены следующие **основные задачи:**

1. Проанализировать существующие математические модели распространения тепловых потоков в сплошной однородной анизотропной среде с целью создания обобщённой математической модели для идентификации компонентов тензора теплопроводности, удовлетворяющей инженерным требованиям.

2. Разработать алгоритм решения обратной задачи параметрической идентификации математической модели распространения тепловых потоков в сплошной однородной анизотропной среде.

3. Модернизировать численный метод для реализации параметрической идентификации математической модели теплопереноса тепловых потоков в анизотропных твёрдых телах, позволяющего вычислить компоненты тензора теплопроводности.

4. Решить обратную задачу радиационного теплопереноса по воспроизведению теплового аэродинамического падающего потока на конструкцию АСА для создания специального экспериментального стенда,

позволившего имитировать тепловую аэродинамическую нагрузку лучистым тепловым диффузным потоком.

5. Выбрать проектные параметров ИК-имитаторов стенда для моделирования аэродинамического теплового нагрева шпангоута лучистым тепловым диффузным потоком.

Объект исследования – тепловое состояние шпангоута АСА по данным датчиков температур.

Предмет исследования – распределение тепловых потоков в элементе шпангоута АСА.

Научная новизна исследования.

Научную новизну работы определяют методы исследования тепловой модели многогранного элемента конструкции спускаемого космического аппарата с учётом свойства анизотропии, а именно:

1. Обобщённая математическая модель шпангоута стыковочного агрегата, позволяющая провести идентификацию компонентов симметричного тензора теплопроводности.

2. Алгоритм решения задачи параметрического определения компонентов вектора теплопроводности элемента шпангоута АСА, позволяющий определить ориентацию вектора теплопроводности в обеспечении уточнённого теплового состояния конструкции.

3. Проектные параметры ИК-имитаторов стенда (задаваемые на них тепловые потоки, их геометрические характеристики и расположение в пространстве) для воспроизведения условий эксплуатации АСА на основе решения обратной задачи радиационного теплопереноса стохастическим методом моделирования Монте-Карло.

Теоретическая и практической значимость работы.

Теоретическая значимость заключается в том, что полученные выводы дополняют теорию теплового проектирования изделий ракетно-космической техники с явно выраженной анизотропией теплопроводности. Основные теоретические результаты могут стать основой для дальнейшего изучения

теплового состояния конструкций спускаемых космических аппаратов при сверхкритическом тепловом нагружении.

Практическая значимость:

1. Методика по определению компонент симметричного тензора теплопроводности элемента шпангоута АСА.
2. Разработка прикладного программного обеспечения по определению ориентации главных осей тензора теплопроводности для материалов с явно-выраженной анизотропией.
3. Выбор тепловой мощности ИК-имитаторов и их пространственного расположения для экспериментального стенда по моделированию внешнего теплосилового нагружения шпангоута АСА.

Методология и методы исследования.

При решении поставленных задач использовались метод итерационной регуляризации, а также метод регуляризации А. Н. Тихонова, градиентный метод сопряжённых направлений, метод переменных направлений с экстраполяцией В. Ф. Формалёва, программная среда Fortran для решения поставленной задачи, стохастический метод Монте-Карло для моделирования тепловой лучистой нагрузки, программная среда «Therm» для оценки теплового состояния объекта.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Обобщённая математическая модель шпангоута стыковочного агрегата.
2. Алгоритм идентификации симметричного тензора теплопроводности шпангоута активного стыковочного агрегата по данным замеров температур.
3. Обобщённая методика идентификации симметричного тензора теплопроводности шпангоута активного стыковочного агрегата по данным замеров температур.
4. Проектные параметры ИК-имитаторов стенда для моделирования аэродинамического теплового нагрева шпангоута активного стыковочного

агрегата многообразных спускаемых космических аппаратов лучистым тепловым диффузным потоком.

Степень достоверности и апробация результатов.

Достоверность результатов подтверждается строгой постановкой задачи исследования с принятыми допущениями, чёткой формулировкой применяемых формализованных описаний, результатами программной реализации и хорошей сходимостью результатов теоретического исследования симметричного тензора теплопроводности шпангоута АСА с их реальными значениями.

Результаты работы неоднократно докладывались и обсуждались на международных и всероссийских конференциях и заседаниях: 16-я Международная конференция «Авиация и космонавтика» – г. Москва, 2017; 17-я Международная конференция «Авиация и космонавтика» – г. Москва, 2018; 15-я Российская конференция по теплофизическим свойствам веществ – г. Москва, 2018; 7-я Российская национальная конференция по теплообмену – г. Москва, 2018; 18-я Международная конференция «Авиация и космонавтика» – г. Москва, 2019; 44-е академические чтения по космонавтике – г. Москва, 2020 г.

По материалам диссертации опубликовано 8 работ, в которых отражены основные положения исследования, в том числе 3 статьи в ведущих научных изданиях, включённых в перечень рецензируемых изданий ВАК и международные системы цитирования Web of Science и Scopus, а также тезисы докладов конференций.

Личный вклад автора.

1. Формулировка цели и задач исследования.
2. Обобщённая методика идентификации симметричного тензора теплопроводности.
3. Модернизация численного метода для реализации параметрической идентификации математической модели теплопереноса тепловых потоков в анизотропных твёрдых телах.

4. Выбор проектных параметров стенда для моделирования аэродинамического теплового нагрева шпангоута АСА многоразовых спускаемых космических аппаратов лучистым тепловым диффузным потоком.

Внедрение результатов работы.

Результаты работы внедрены в АО НПО «Энергомаш» в части создания алгоритма и методики по определению ориентации вектора теплопроводности. Отдельные разделы работы используются в учебном процессе ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» при чтении лекций по дисциплине «Конструирование и расчёт аппаратов систем обеспечения жизнедеятельности», а также при проведении курсового и дипломного проектирования.

1 АНАЛИЗ ТЕКУЩЕГО СОСТОЯНИЯ ПРОБЛЕМЫ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ИССЛЕДОВАНИЯ

1.1 Тепловые математические модели. Общие сведения

Математическое моделирование – это замена реального объекта исследования (ОИ) абстрактным математическим объектом с сохранением основных черт его поведения. Каждому ОИ можно сопоставить некоторое множество математических моделей, отличающихся числом учёта различных факторов. Благодаря использованию математической модели и развитию вычислительных технологий можно натуральный эксперимент заменить вычислительным. Математические модели могут быть как простыми, так и сложными, однако при использовании простейших моделей ОИ можно получить аналитическое решение в виде определённой зависимости от конкретных параметров, выявить некоторые качественные свойства или несколько характерных параметров ОИ, а на основе явных решений задачи произвести оптимизацию. Наглядным примером такой модели является уравнение теплопроводности – дифференциальное уравнение второго порядка в частных производных, позволяющее определить при различных видах воздействий на ОИ изменение температуры конструкции. Для более сложной (многофакторной) модели, например, модели термоупругости, термопластичности, часто аналитическое исследование краевой задачи невозможно, её необходимо анализировать численно [1 – 12]. При выборе числа факторов и размерности модели во внимание принимаются различные соображения; главное же правило при создании математической модели – адекватность модели изучаемому процессу.

Таким образом, математическое моделирование это один из самых эффективных способов дать обоснованные рекомендации по исследованию какого-либо эффекта оптимальному конструированию ОИ или прогнозированию его поведения в будущем при некоторых типах воздействий.

Постановка вопроса о математическом моделировании порождает следующую последовательность действий, условно состоящую из трёх этапов: модель–алгоритм–программа.

Пусть $Au = f$ – математическая модель ОИ, где $A: U \rightarrow F$ некоторый оператор, U, F – функциональные пространства. Для построения математической модели ОИ на основании установленной связи между входом и выходом ОИ необходимо выбрать вид этой связи или определить структуру оператора A , осуществляющего отображение входа u на выход f . Фактически исследовать всегда при составлении модели решает проблему «чёрного ящика», на который можно действовать и регистрировать отклик на воздействие.

Для построения физико-математической модели решаются две задачи:

Прямая задача. При заданном операторе A и воздействии (заданном f) необходимо определить u .

Обратная задача. В рамках выбранной модели, при заданном воздействии и решении определить некоторые характеристики оператора A .

Отметим, что в реальном моделировании процесс создания модели как раз начинается с этапа решения обратной задачи. Так, например, сформулировать начальные условия (теплоёмкость, теплопроводность), а потом решать прямую задачу по определению температурного поля конструкции.

Далее приведём некоторые наиболее популярные методы моделирования тепловых процессов анизотропных конструкций при их известной ориентации главных осей тензора теплопроводности.

Метод тепловых балансов.

При использовании метода тепловых балансов (метода сосредоточенных параметров [13]) конструкция разбивается на L изотермических узлов, для которых задаются их массы, теплоёмкости и внутренние тепловыделения. Между узлами задаются тепловые связи. Каждому из узлов могут быть поставлены в соответствие одна или несколько

поверхностей, на которых происходит лучистый теплообмен. Между поверхностями рассчитываются лучистые связи (угловые коэффициенты). Для каждого узла составляется уравнение теплового баланса. В результате получается следующая система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$m_i C_i(T_i) \frac{dT_i(\tau)}{d\tau} = Q_{ki} + Q_{ni} + Q_{ri} + Q_{vi} + Q_{ai} \quad (1.1)$$

с начальными условиями $T_i = T_i^0; 1 \leq i \leq L$,

где m_i и C_i – масса и теплоёмкость узла i , соответственно;

T_i – температура узла i , К;

τ – время, с;

Q_{ki} – кондуктивный тепловой поток к узлу i , Вт;

Q_{ni} – нелинейный тепловой поток к узлу i , Вт;

Q_{ri} – результирующий лучистый тепловой поток к узлу i , Вт;

Q_{vi} – поток внутренних тепловыделений в узле i , Вт;

Q_{ai} – атмосферный тепловой поток, к узлу i , Вт.

В результате решения системы уравнений находятся температуры всех расчётных узлов. Увеличивая число узлов можно получить температурное поле по конструкции с требуемой степенью детализации.

В расчётной модели (1.1) могут быть заданы узлы, температура которых постоянна или является известной функцией времени.

Кондуктивный (линейный) тепловой поток Q_{ki} к узлу i определяется выражением

$$Q_{ki} = \sum_{k=1}^n P_{ik}(T_k - T_i), \quad (1.2)$$

где P_{ik} – проводимость тепловой связи между узлами i и k , Вт/К;

T_k – температура узла k , связанного с узлом i тепловой связью P_{ik} , К;

n – количество кондуктивных тепловых связей узла i .

Нелинейный и результирующий лучистые тепловые потоки Q_{vi} и Q_{ri} к узлу i определяются по формулам, приведённым в разделе 2 по описанию расчёта лучистого теплообмена.

Атмосферный тепловой поток Q_{ai} к узлу определяется следующим образом

$$Q_{ai} = \sum_{j=1}^n F_j (q_{mj} + q_{rj}) \quad (1.3)$$

где q_{mj} , q_{rj} – молекулярный и рекомбинационный тепловые потоки.

Внутренние тепловыделения в узлах задаются циклограммой – значениями $Q_{vi}(\tau_0), Q_{vi}(\tau_1), \dots, Q_{vi}(\tau_q)$ в моменты времени $\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_q$. По этим значениям Q_{vi} аппроксимируется линейной или ступенчатой функцией времени. При этом на интервале $\tau_{q-1} \leq \tau \leq \tau_q$ либо меняется линейно от значения $Q_{vi}(\tau_{q-1})$ до $Q_{vi}(\tau_q)$, либо сохраняет постоянное значение $Q_{vi}(\tau_{q-1})$.

Кондуктивные тепловые связи.

Величина P_{ik} для кондуктивной передачи тепла может быть найдена, если известно термическое сопротивление R_{ik} между узлами, по формуле

$$P_{ik} = \frac{1}{R_{ik}}, \quad (1.4)$$

где R_{ik} выражается на основе закона Фурье

$$R_{ik} = \frac{1}{Q} \int_{l_i}^{l_k} \frac{Q(l) dl}{\lambda(l) F_{ik}(l)}. \quad (1.5)$$

Если между точками l_i и l_k отсутствуют источники и стоки тепла, то $Q_l = Q = const$ и тогда

$$R_{ik} = \frac{1}{Q} \int_{l_i}^{l_k} \frac{dl}{\lambda(l) F_{ik}(l)}, \quad (1.6)$$

где λ – коэффициент теплопроводности, $\frac{\text{Вт}}{\text{мК}}$;

F_{ik} – площадь теплового контакта узлов i и k , м^2 ;

l – длина пути теплового потока, м.

Для постоянных λ и F_{ik}

$$R_{ik} = \frac{l_k - l_i}{\lambda F_{ik}}. \quad (1.7)$$

С помощью слагаемого P_{ik} можно учесть конвективный теплообмен при постоянном коэффициенте теплоотдачи элемента i с окружающей средой, имеющей температуру T_k .

В этом случае

$$P_{ik} = \alpha_{ik}(T_i)F_{ik}, \quad (1.8)$$

где $\alpha_{ik}(T)$ – коэффициент теплоотдачи от элемента i к среде k , $\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\text{К}}$;

F_{ik} – площадь поверхности теплообмена, м^2 .

Тепловые связи не могут быть вычислены по формулам (1.4) – (1.8). В этих случаях расчёты обычно проводятся для хороших (больших) и плохих (малых) тепловых связей, или величина тепловой связи подбирается по результатам расчётов температур, тогда для реальной конструкции должна быть обеспечена, полученная из расчётов тепловая связь или значения связей, которые не удаётся получить расчётным путём с достаточной точностью, должны быть определены из эксперимента. Так, например, в местах контакта различных деталей фактическая площадь контакта, как правило, не известна и может отличаться от номинальной площади контакта в десятки раз, поэтому величину тепловых связей в таких случаях можно определить с достаточной точностью только экспериментально. После этого можно провести расчёты для различных условий теплового нагружения конструкции.

В результате решения системы уравнений находятся температуры всех расчётных узлов. Увеличивая число узлов, можно получить температурное поле по конструкции с требуемой степенью детализации.

Конечно-разностные методы и метод конечных элементов.

Для расчёта температурных полей сложных конструкций в современной практике используется также метод конечных элементов (МКЭ) [13 – 31], который позволяет учесть реальную конфигурацию рассматриваемых областей, различие их теплофизических свойств, переменность тепловой

проводимости в различных направлениях (анизотропность). Данный метод часто называют методом рассредоточенных параметров.

Перенос тепла по конструкции описывается уравнением Фурье

$$C(T)\rho(T)\frac{\partial T(M, \tau)}{\partial \tau} = \operatorname{div}[\vec{\lambda}(T)\operatorname{grad}T(M, \tau)] + q(M, \tau); \quad (1.9)$$

$$M \in G(x, y, z); 0 \leq \tau \leq \infty,$$

где G – двух- или трёхмерная область;

$C(T)$, $\rho(T)$, $\lambda(T)$ – теплоёмкость, плотность и теплопроводность материала, соответственно;

$q(M, \tau)$ – распределение объемной плотности внутренних источников тепла.

Уравнение теплопроводности дополняется условиями однозначности: геометрическими характеристиками области, значениями теплофизических параметров, начальными и граничными условиями.

Область G разбивается на конечные элементы, в пределах которых можно принять допущение

$$q(M, \tau) \approx q(\tau). \quad (1.10)$$

На каждом элементе вводится пространственная сетка и распределение температуры $T(M, \tau)$ аппроксимируется кусочно-непрерывными функциями в виде

$$T(M, \tau) = \tilde{T}(M, \tau) = \sum_{i=1}^n T_i(\tau)N_i(M), \quad (1.11)$$

где n – число узлов пространственной сетки на элементе;

$T_i(\tau)$ – значение температуры в i -ом узле в момент времени τ ;

$N_i(M)$ – базисные функции пространственных координат, равные единице в соответствующих им узлах и нулю – в остальных узлах.

Для анализа процесса теплопроводности в трёхмерной области $G(x, y, z)$, имеющей произвольную криволинейную границу, область разбивается на элементы таким образом, чтобы они наилучшим образом описывали её форму. На любом из элементов уравнение теплопроводности (1.9) можно записать в следующем виде

$$\begin{aligned} & \frac{\partial T(M, \tau)}{\partial \tau} - \frac{1}{C(T)\rho} \left\{ \lambda_{xx} \frac{\partial^2 T(M, \tau)}{\partial x^2} + \lambda_{yy} \frac{\partial^2 T(M, \tau)}{\partial y^2} + \lambda_{zz} \frac{\partial^2 T(M, \tau)}{\partial z^2} \right\} + \\ & + \frac{d\lambda_{xx}(T)}{dT} \frac{\partial^2 T(M, \tau)}{\partial x^2} + \frac{d\lambda_{yy}(T)}{dT} \frac{\partial^2 T(M, \tau)}{\partial y^2} + \frac{d\lambda_{zz}(T)}{dT} \frac{\partial^2 T(M, \tau)}{\partial z^2} = \quad (1.12) \\ & = \frac{q_v}{C(T)\rho}. \end{aligned}$$

где q_v – объёмный источник тепловыделения;

$\lambda_{xx}, \lambda_{yy}, \lambda_{zz}$, – значения коэффициента теплопроводности вдоль координатных осей Ox , Oy и Oz , соответственно.

Система уравнений МКЭ строится в соответствии с методом взвешенных невязок. Уравнение теплопроводности умножается на базисные функции элемента N_i , $i = 1, 2, \dots, n$ (n равно 9 в двумерном, 20 или 27 – в трёхмерном случае) и интегрируется по его объёму V_e . В результате получается система n уравнений

$$\begin{aligned} & \int_{V_e} \frac{\partial T(M, \tau)}{\partial \tau} dV_e \\ & - \frac{1}{C(T)\rho} \int_{V_e} N_i \left\{ \lambda_{xx} \frac{\partial^2 T(M, \tau)}{\partial x^2} + \lambda_{yy} \frac{\partial^2 T(M, \tau)}{\partial y^2} + \lambda_{zz} \frac{\partial^2 T(M, \tau)}{\partial z^2} \right\} + \\ & + \frac{d\lambda_{xx}(T)}{dT} \frac{\partial^2 T(M, \tau)}{\partial x^2} + \frac{d\lambda_{yy}(T)}{dT} \frac{\partial^2 T(M, \tau)}{\partial y^2} + \\ & \left. \frac{d\lambda_{zz}(T)}{dT} \frac{\partial^2 T(M, \tau)}{\partial z^2} \right] dV_e = \int_{V_e} \frac{q_v}{C(T)\rho} dV_e; M \in x, y, z; 1 \leq i \leq n. \quad (1.13) \end{aligned}$$

Интеграл левой части по формуле Грина преобразуется к виду

$$\begin{aligned} & \int_{V_e} N_i \left[\lambda_{xx} \frac{\partial^2 T(M, \tau)}{\partial x^2} + \lambda_{yy} \frac{\partial^2 T(M, \tau)}{\partial y^2} + \lambda_{zz} \frac{\partial^2 T(M, \tau)}{\partial z^2} + \frac{d\lambda_{xx}(T)}{dT} \frac{\partial^2 T(M, \tau)}{\partial x^2} + \right. \\ & \left. + \frac{d\lambda_{yy}(T)}{dT} \frac{\partial^2 T(M, \tau)}{\partial y^2} + \frac{d\lambda_{zz}(T)}{dT} \frac{\partial^2 T(M, \tau)}{\partial z^2} \right] dV_e = \\ & = \int_{S_e} N_i [\vec{\lambda}] (\nabla T, d\vec{S}) - \int_{V_e} N_i [\vec{\lambda}] (\nabla N_i, \nabla [\vec{\lambda}] T(M, \tau)) dV_e, \quad (1.14) \end{aligned}$$

где $d\vec{S}$ – векторный элемент площади поверхности элемента;

S_e – площадь поверхности элемента.

Для элемента, расположенного внутри области G , интеграл по S_e равен нулю и после преобразований (1.13), (1.14) получается следующая система уравнений

$$\begin{aligned} & \int_{V_e} N_i \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tau} dV_e + \frac{1}{C(T)\rho} \int_{V_e} \left\{ \lambda_{xx} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} + \lambda_{yy} \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y} + \lambda_{zz} \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial z} \right\} dV_e + \\ & \frac{1}{C(T)\rho} \int_{V_e} \left\{ \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{d\lambda_{xx}}{dT} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} + \lambda_{yy} \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{d\lambda_{yy}}{dT} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y} + \lambda_{zz} \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{d\lambda_{zz}}{dT} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial z} \right\} dV_e \\ & = \int_{V_e} \frac{q_v}{C(T)\rho} dV_e, \end{aligned} \quad (1.15)$$

где \tilde{T} – аппроксимационная функция T .

Далее вводится сетка по времени, производная $\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tau}$ заменяется конечно-разностным аналогом

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tau} \approx \frac{\tilde{T}^{j+1} - \tilde{T}^j}{\Delta \tau}.$$

Система уравнений записывается для $(j+1)$ -го временного слоя:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta \tau} \sum_{k=1}^n T_k^{j+1} \int_{V_e} N_i N_k dV_e + \frac{1}{C(T)\rho} \sum_{k=1}^n T_k^{j+1} \int_{V_e} \left[\lambda_{xx} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} + \lambda_{yy} \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y} \right. \\ & \quad \left. + \lambda_{zz} \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial z} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{d\lambda_{xx}}{dT} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} + \lambda_{yy} \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{d\lambda_{yy}}{dT} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y} + \lambda_{zz} \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{d\lambda_{zz}}{dT} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial z} \right] dV_e = \\ & = \frac{1}{\Delta \tau} \int_{V_e} N_i N_k dV_e + \int_{V_e} N_i \frac{q_v}{C(T)\rho} dV_e, \quad 1 \leq i \leq n. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Базисные функции N_i зависят от координат x, y, z , связанных с областью G , но N_i определены в локальной системе координат ξ, η, μ . Необходимо выполнить переход из локальной системы ξ, η, μ в глобальную x, y, z . При этом область правильной формы (куб или квадрат) может быть отображена в криволинейную, границами которой являются поверхности 2-го порядка. Для отображения используются те же базисные функции N_i , что и для аппроксимации функции температуры T :

$$x = \sum_{i=1}^n x_i N_i(\xi, \eta, \mu), \quad (1.17)$$

$$y = \sum_{i=1}^n y_i N_i(\xi, \eta, \mu), \quad (1.18)$$

$$z = \sum_{i=1}^n z_i N_i(\xi, \eta, \mu), \quad (1.19)$$

где x_i, y_i, z_i – значения глобальных координат в соответствующих узлах криволинейного элемента.

Получаемые в результате подобного отображения конечные элементы называются изопараметрическими.

1.2 Общие сведения об обратных задачах теплообмена и их основные виды

Рассмотрим основные этапы идентификации объекта исследования.

Пусть

$$Au = f \text{ (математическая модель ОИ)}, \quad (1.20)$$

где $A: U \rightarrow F$ – некоторый оператор;

U, F – функциональные пространства.

Задача определения оператора A может быть разделена на 2 этапа:

- 1) структурная идентификация,
- 2) параметрическая идентификация.

На первом этапе определяется структура параметра оператора A , которая зависит как от самого ОИ, так и от целей моделирования. На этапе структурной идентификации используются фундаментальные законы природы, присущие той или иной области естественных наук, вариационные принципы, статические закономерности, причём одному и тому же ОИ можно сопоставить целую иерархию математических моделей.

Наиболее часто в математическом моделировании используются следующие основные виды операторов:

- конечномерный оператор (A – матрица, $Au = F$ – система линейных алгебраических уравнений),

- дифференциальный оператор (или матричный дифференциальный),
- дифференциальный оператор в частных производных (или матричный дифференциальный оператор в частных производных),
- более сложные операторы – интегральные, интегрально-дифференциальные.

На втором этапе параметрической идентификации определяются числовые параметры или функции, входящие в описание оператора A (элементы матриц, коэффициенты дифференциальных операторов и граничные условия).

С точки зрения соотношения причина следствие все задачи математического моделирования можно разбить на два класса: прямые и обратные задачи.

Для прямых задач требуется найти следствия по их известным причинам. В качестве этих причин могут фигурировать следующие факторы:

- 1) начальные условия для (например, температура в начальный момент времени при расчёте теплового состояния ОИ),
- 2) коэффициенты дифференциальных операторов, моделирующих ОИ,
- 3) граничные условия (внешнее тепловое воздействие при расчёте теплового состояния ОИ),
- 4) область, занятая ОИ (геометрия области).

В качестве следствия обычно используются компоненты физических моделей (температура, напряжения, деформации).

Прямые задачи об отыскании следствий, т.е. расчёте компонент физических полей составляют суть современной классической математической физики. Для таких задач разработаны аналитические и численные методы решения, доказаны теоремы существования и единственности решения.

Для обратных задач в рамках выбранной физико-математической модели известны причины, требуется найти причины и причинно-следственные связи. В этом суть параметрической идентификации [5].

Обратные задачи обладают рядом «неприятных» с точки зрения обработки информации свойств. Во-первых, обратные задачи являются нелинейными, во-вторых, возможна не единственность решения при одной и той же входной информации. В-третьих, является их неустойчивость при малых возмущениях искомых параметров. Задачи, обладающие такими свойствами, являются некорректными. Стоит отметить огромное количество работ, связанных с различными аспектами обратных задач [14 – 30].

В начале 20-го века Адамар ввёл понятие корректности: задача (1.20) нахождения элемента u считается корректно поставленной по Адамару, если выполняются следующие три условия:

- 1) область значений оператора A совпадает с F (решение операторного уравнения (1.20) существует для любой его правой части – условие разрешимости);
- 2) равенство $Au_1 = Au_2$ для некоторых $u_1, u_2 \in D_A$ влечёт за собой $u_1 = u_2$;
- 3) обратный оператор непрерывен на F .

Научное направление, посвящённое исследованию некорректных задач, связано с работами известных советских математиков: Тихонова А. Н., Марчука Г. И., Лаврентьева М. М., Самарского А. А., Романова В. Г., Кабанихина С. И. [31].

1.3 Объект исследования и постановка задачи моделирования теплового состояния конструкции

Объектом исследования является передний шпангоут активного стыковочного агрегата возвращаемого аппарата (ВА) перспективного транспортного корабля (ПТК) «Орёл» для которого в 2019 году проведены теплостатические испытания (ТСИ) по определению экспериментального нестационарного температурного поля по известному внешнему тепловому воздействию.

ПТК «Орёл» – многоразовый пилотируемый космический корабль (рисунок 1), который должен прийти на смену пилотируемым кораблям серии «Союз» и автоматическим грузовым кораблям серии «Прогресс». Производится ОАО «РКК «Энергия» им. С.П. Королева». Планируется выводить на орбиту с помощью ракеты-носителя среднего класса «Феникс».



Рисунок 1 – Конфигурация ПТК «Орёл»

Целью создания нового корабля является обеспечение национальной безопасности, технологической независимости, обеспечение доступа России в космос со своей территории, доставка людей и грузов на орбитальные станции, полёт на полярную и экваториальную орбиту, исследование Луны и посадки на неё.

Передний шпангоут АСА возвращаемого аппарата ПТК, как объект исследования, выбран с целью апробацию разрабатываемого алгоритма по определению коэффициентов симметричного тензора теплопроводности его металлической части. Принципиальный вид ОИ приведён на рисунке 2.

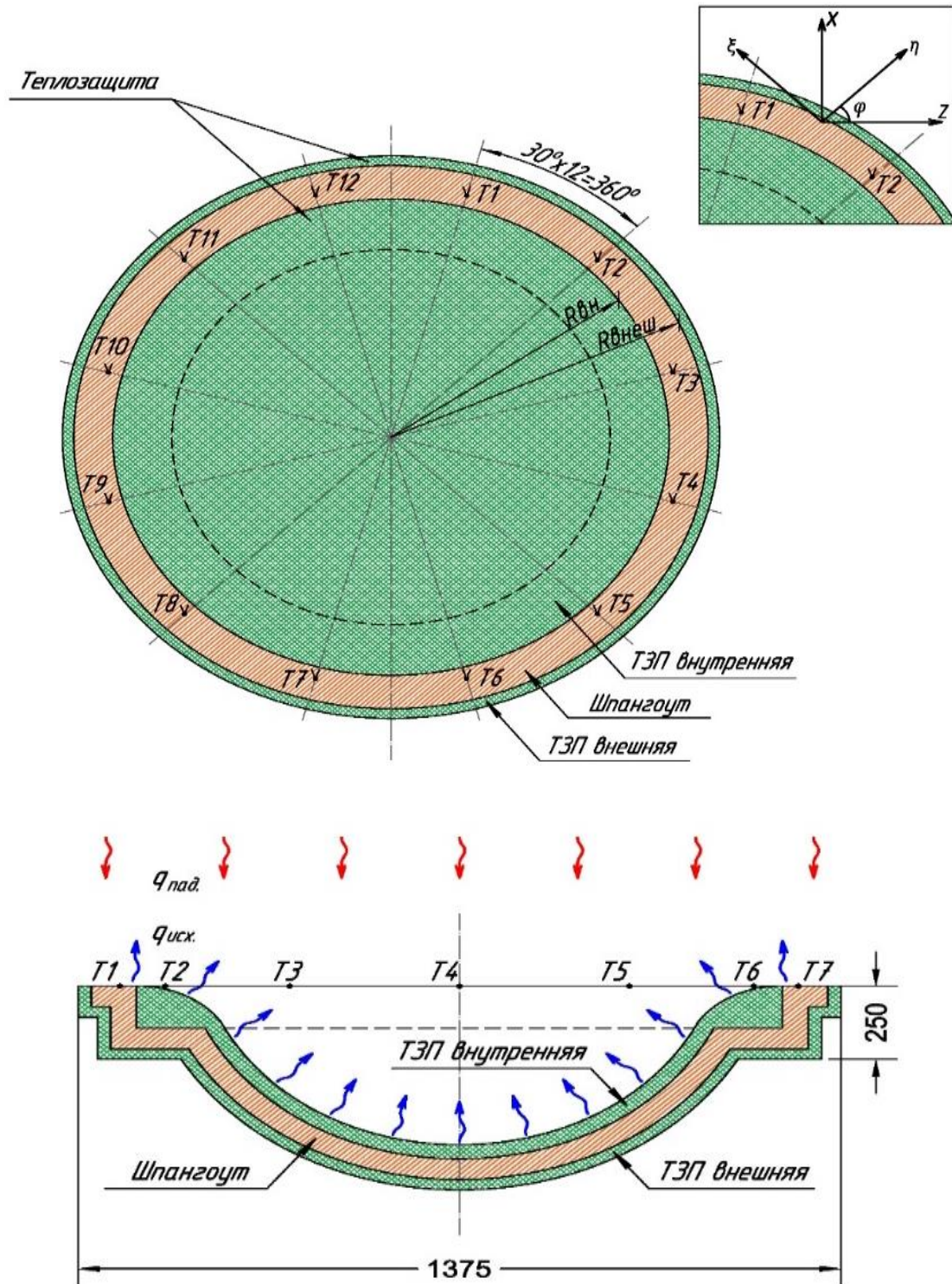


Рисунок 2 – Расчётная схема АСА в одной плоскости симметрии

При спуске в плотных слоях атмосферы Земли на АСА воздействует аэродинамический тепловой поток (приходящие стрелки на рисунке 2). Одновременно происходит излучение тепловой энергии в атмосферу (уходящие стрелки на рисунке 2).

По торцу стыковочного агрегата (рисунок 2) расположен шпангоут шириной 200 мм. На корабль и стыковочный агрегат нанесено теплоизолирующее покрытие для предотвращения перегрева при прохождении плотных слоёв атмосферы. На переднюю часть шпангоута теплоизоляция не наносится, т.к. этой частью шпангоута стыковочного агрегата транспортный корабль сопрягается при стыковке со станцией.

При спуске корабля в плотных слоях атмосферы на него воздействует аэродинамический тепловой поток, достигающий 70 кВт/м². Под воздействием теплового потока температурное поле шпангоута изменяется в широком диапазоне, что может приводить к значительной его деформации.

При проведении термосиловых испытаний на передний торец шпангоута симметрично установлены 12 термопар. По данным термопар идентифицируется его тепловая математическая модель шпангоута для нахождения ориентации главных осей теплопроводности относительно выбранной системы координат (рисунок 2).

Для идентификации теплофизических характеристик первоочередной задачей является составление тепловой физико-математической модели, по которой будет происходить восстановление целевых характеристик. Поскольку исследуемый элемент конструкции спроектирован как многоразовый и в самой конструкции есть неучтённые в физико-математической тепловой модели клеевые стыки с теплозащитным покрытием, то целесообразно рассматривать данную конструкцию как анизотропную, стоит также сказать, что в природе «чисто» изотропных материалов нет в принципе. Уровень анизотропии зависит от ориентации волокон, кристаллической решётки материала и уровня нагрева. Также следует отметить, что для апробации разрабатываемого алгоритма необходимо провести сравнение полученных результатов с материалом, теплофизические характеристики которого хорошо изучены.

Запишем для этого уравнение теплопроводности [9] для полностью анизотропного материала в общем виде при решении задачи Неймана, то есть

задании теплового потока на его границах в трёхмерной постановке в декартовых координатах

$$\begin{aligned}
& C(T)\rho \frac{\partial T(M, \tau)}{\partial \tau} \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_{xx}(T) \frac{\partial T(M, \tau)}{\partial x} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_{xy}(T) \frac{\partial T(M, \tau)}{\partial y} \right) \\
&+ \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_{yy}(T) \frac{\partial T(M, \tau)}{\partial y} \right) \\
&+ 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_{xz}(T) \frac{\partial T(M, \tau)}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_{zz}(T) \frac{\partial T(M, \tau)}{\partial z} \right), M \in (x, y, z); \quad (1.21)
\end{aligned}$$

Граничные условия будут иметь следующий вид:

$$\lambda_{xx}(T) \frac{\partial T(M, \tau)}{\partial x} + \lambda_{xy}(T) \frac{\partial T(M, \tau)}{\partial y} + \lambda_{xz}(T) \frac{\partial T(M, \tau)}{\partial z} = q_1, M \in \Gamma_1; \quad (1.22)$$

$$\lambda_{xx}(T) \frac{\partial T(M, \tau)}{\partial x} + \lambda_{xy}(T) \frac{\partial T(M, \tau)}{\partial y} + \lambda_{xz}(T) \frac{\partial T(M, \tau)}{\partial z} = q_2, M \in \Gamma_2; \quad (1.23)$$

$$\lambda_{yy}(T) \frac{\partial T(M, \tau)}{\partial y} + \lambda_{xy}(T) \frac{\partial T(M, \tau)}{\partial x} + \lambda_{zy}(T) \frac{\partial T(M, \tau)}{\partial z} = q_3, M \in \Gamma_3; \quad (1.24)$$

$$\begin{aligned}
& - \left[\lambda_{yy}(T) \frac{\partial T(M, \tau)}{\partial y} + \lambda_{xy}(T) \frac{\partial T(M, \tau)}{\partial x} + \lambda_{zy}(T) \frac{\partial T(M, \tau)}{\partial z} \right] \\
&= q_4, M \in \Gamma_4; \quad (1.25)
\end{aligned}$$

$$\lambda_{zz}(T) \frac{\partial T(M, \tau)}{\partial x} + \lambda_{zx}(T) \frac{\partial T(M, \tau)}{\partial x} + \lambda_{zy}(T) \frac{\partial T(M, \tau)}{\partial y} = q_5, M \in \Gamma_5; \quad (1.26)$$

$$- \left[\lambda_{zz}(T) \frac{\partial T(M, \tau)}{\partial x} + \lambda_{zx}(T) \frac{\partial T(M, \tau)}{\partial x} + \lambda_{zy}(T) \frac{\partial T(M, \tau)}{\partial y} \right] = q_6, M \in \Gamma_6, \quad (1.27)$$

где $C(T)$ – удельная теплоемкость материала, $\frac{\text{Дж}}{\text{кгК}}$;

ρ – плотность материала, $\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$;

$\lambda_{xx}(T), \lambda_{xy}(T), \lambda_{zz}(T)$ – компоненты тензора теплопроводности;

T – температура, К

q_i – тепловой удельный поток, $\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$

Примем следующие допущения:

1. Будем считать в силу симметрии конструкции, что распределение температурного поля по конструкции будет тоже симметрично. Таким образом можно принять нулевые условия сопряжения по угловой координате

и рассматривать постановку задачи испытуемого ОИ в цилиндрических криволинейных координатах при наличии симметричного тензора теплопроводности в декартовых координатах.

2. Так как оба боковых торца теплоизолированы аблирующей теплозащитой, то целесообразно принять двумерную постановку задачи при нулевом перетекании тепла вдоль радиуса.

$$\begin{aligned}
& H_1 H_2 H_3 C(T) \rho \frac{\partial T(M, \tau)}{\partial \tau} \\
&= \frac{\partial}{\partial p_1} \left[H_2 H_3 \left(\lambda_{p_1, p_1} \frac{\partial T(M, \tau)}{H_1 \partial p_1} + \lambda_{p_1, p_2} \frac{\partial T(M, \tau)}{H_2 \partial p_2} + \lambda_{p_1, p_3} \frac{\partial T(M, \tau)}{H_3 \partial p_3} \right) \right] \\
&+ \\
&+ \frac{\partial}{\partial p_2} \left[H_1 H_3 \left(\lambda_{p_2, p_1} \frac{\partial T(M, \tau)}{H_1 \partial p_1} + \lambda_{p_2, p_2} \frac{\partial T(M, \tau)}{H_2 \partial p_2} + \lambda_{p_2, p_3} \frac{\partial T(M, \tau)}{H_3 \partial p_3} \right) \right] + \\
&\frac{\partial}{\partial p_3} \left[H_2 H_3 \left(\lambda_{p_3, p_1} \frac{\partial T(M, \tau)}{H_1 \partial p_1} + \lambda_{p_3, p_2} \frac{\partial T(M, \tau)}{H_2 \partial p_2} \right. \right. \\
&\left. \left. + \lambda_{p_3, p_3} \frac{\partial T(M, \tau)}{H_3 \partial p_3} \right) \right], M \in (p_1, p_2, p_3), \tag{1.28}
\end{aligned}$$

где компоненты тензоры теплопроводности определяются выражением:

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} \lambda_{p_1, p_1} & \lambda_{p_1, p_2} & \lambda_{p_1, p_3} \\ \lambda_{p_2, p_1} & \lambda_{p_2, p_2} & \lambda_{p_2, p_3} \\ \lambda_{p_3, p_1} & \lambda_{p_3, p_2} & \lambda_{p_3, p_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{H_1 \partial p_1} & \frac{\partial y}{H_1 \partial p_1} & \frac{\partial z}{H_1 \partial p_1} \\ \frac{\partial x}{H_2 \partial p_2} & \frac{\partial y}{H_2 \partial p_2} & \frac{\partial z}{H_2 \partial p_2} \\ \frac{\partial x}{H_3 \partial p_3} & \frac{\partial y}{H_3 \partial p_3} & \frac{\partial z}{H_3 \partial p_3} \end{pmatrix} \times \\
& \times \begin{pmatrix} \lambda_{xx} & \lambda_{xy} & \lambda_{xz} \\ \lambda_{yx} & \lambda_{yy} & \lambda_{yz} \\ \lambda_{zx} & \lambda_{zy} & \lambda_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{H_1 \partial p_1} & \frac{\partial x}{H_2 \partial p_2} & \frac{\partial x}{H_3 \partial p_3} \\ \frac{\partial y}{H_1 \partial p_2} & \frac{\partial y}{H_3 \partial p_3} & \frac{\partial y}{H_3 \partial p_3} \\ \frac{\partial z}{H_1 \partial p_1} & \frac{\partial z}{H_2 \partial p_2} & \frac{\partial z}{H_3 \partial p_3} \end{pmatrix} \tag{1.29}
\end{aligned}$$

В цилиндрической системе координат для двумерной постановки задачи

$$p_1 = 0, p_2 = \theta, p_3 = z, \quad (1.30)$$

$$x = r \cos(\theta), y = 0, z = z. \quad (1.31)$$

Таким образом, можем переписать рассматриваемую постановку задачи в виде

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda_{\theta\theta}(T) \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda_{\theta z}(T) \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial z} \right) \\ & + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_{\theta z}(T) \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial \theta} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_{zz}(T) \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial z} \right) = C(T) \rho \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial \tau}; z \in [0; l_z], \theta \in [0; \pi], \tau > 0; \end{aligned} \quad (1.32)$$

Граничные условия будут иметь следующий вид:

$$- \left[\lambda_{\theta z}(T) \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial z} + \frac{\lambda_{\theta\theta}(T)}{r} \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial \theta} \right] = 0, z \in [0; l_z], \theta = 0, \tau > 0; \quad (1.33)$$

$$\left[\lambda_{\theta z}(T) \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial r} + \frac{\lambda_{\theta\theta}(T)}{r} \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial \theta} \right] = 0, z \in [0; l_z], \theta = \pi, \tau > 0; \quad (1.34)$$

$$- \left[\lambda_{zz}(T) \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial z} + \lambda_{z\theta}(T) \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{r \partial \theta} \right] = 0, z = 0, \theta \in [0; \pi], \tau > 0; \quad (1.35)$$

$$\begin{aligned} & \left[\lambda_{zz}(T) \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial z} + \lambda_{z\theta}(T) \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{r \partial \theta} \right] = q^{\text{эф}}(T^4) - q^{\text{к}}(T), z = l_z, \theta \\ & \in [0; \pi], \tau > 0; \end{aligned} \quad (1.36)$$

Расчётные формулы по определению эффективного теплового потока имеют вид [31 – 37]

$$q^{\text{рез}}(T^4) = \sum_{i=1}^N q_{\text{М}}^{\text{эф}} - \varepsilon_{\text{М}} \sigma T(\text{М}, \tau)^4, \quad (1.37)$$

где эффективный тепловой поток определяется выражением

$$q_M^{\text{эф}} = \sum_{j=1}^N q_j^{\text{изл}} + \frac{(1 - \varepsilon_j)}{F_j} \int_{F_j} q_j(M, \tau) \varphi_{M \rightarrow j} dF_j \quad (1.38)$$

Угловой коэффициент переизлучения или ядро интегрального уравнения определяется выражением

$$\varphi_{M \rightarrow j} = \frac{\cos \theta_M \cos \theta_j}{\pi l^2} \quad (1.39)$$

где θ_M – угол между нормалью к рассматриваемой площадке конструкции и направлением на ИК-имитатор;

θ_j – угол между нормалью к рассматриваемой площадкой конструкции и направлением на ОИ;

N – количество ИК-имитаторов;

ε_M – интегральная степень черноты поверхности материала i -й поверхности;

T – средняя температура i -й поверхности.

Тепловой конвективный поток определяется следующими зависимостями

$$q_{i,j}^k = \alpha_k(T)(T(r, \theta, \tau) - T_c), \quad (1.40)$$

где $\alpha_k(T)$ – коэффициент теплоотдачи нагреваемого объекта в окружающую среду. Вычисляется этот коэффициент из решения критериального уравнения вида:

$$\alpha_k(T) = Nu_l(T) \frac{\lambda_B(T_c)}{l_{\text{эф}}}, \quad (1.41)$$

где λ_B – коэффициент теплопроводности воздуха, $\frac{\text{Вт}}{\text{мК}}$;

$l_{\text{эф}}$ – характерный размер (размер, вдоль которого движется тепловой конвективный поток);

T_c – температура окружающей среды, К;

$Nu_l(T)$ – критерий Нуссельта.

Для определения коэффициента теплоотдачи воспользуемся критериальными соотношениями, полученными при решении задач обтекания

равновесным воздухом конструкций при схожих условиях окружающей среды. Локальное число Нуссельта при решении уравнений движения газа и закона сохранения энергии определяется выражением Ида [38].

Для ламинарного пограничного слоя

$$Nu_l = \frac{3}{4} \left(\frac{2Pr(T_c)}{5(1 + 2Pr(T_c))^{\frac{1}{2}} + 2Pr(T_c)} \right)^{\frac{1}{4}} (Gr_r Pr(T_c))^{\frac{1}{4}} \text{ при } Re < 2300. \quad (1.42)$$

Для переходного и турбулентного пограничного слоя

$$Nu_l = 0.17(Gr_r Pr)^{\frac{1}{4}} \text{ при } Re > 2300, \quad (1.43)$$

где Re – критерий Рейнольдса;

Pr – число Прандтля;

Gr_l – критерий Гросгоффа

$$Gr_l = \frac{U_c^2(r) \Delta r^2}{\nu(T_c)^2} \equiv \frac{g \beta r^3 (T(r, \theta, \tau) - T_c)}{\nu(T_c)^2},$$

$$U_c = \sqrt{\beta r T((r, \theta, \tau) - T_c)};$$

ν – коэффициент кинематической вязкости, $\frac{m^2}{c}$;

$\beta = \frac{1}{T_c}$ – коэффициент температурного расширения идеального газа.

2 МЕТОДИКА ИДЕНТИФИКАЦИИ СИММЕТРИЧНОГО ТЕНЗОРА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

2.1 Представление исследуемых характеристик

Рассмотрим задачу восстановления функций: $\lambda_{zz}(T), \lambda_{\theta z}(T), \lambda_{\theta\theta}(T)$ на основании информации о мгновенных значениях температур в определённых точках замеров тепловых потенциалов цилиндрической области.

Подлежащие определению искомые теплофизические функции $\lambda_{zz}(T), \lambda_{\theta z}(T), \lambda_{\theta\theta}(T)$ будем искать в следующем виде [26]:

$$\begin{aligned}\lambda_{\theta\theta}(T) &\approx \sum_{m=1}^M \lambda_m^{\theta\theta} N_m(T), \\ \lambda_{\theta z}(T) &\approx \sum_{m=1}^M \lambda_m^{\theta z} N_m(T),\end{aligned}\quad (2.1)$$

$$\lambda_{zz}(T) \approx \sum_{m=1}^M \lambda_m^{zz} N_m(T). \quad (2.2)$$

Для аппроксимации компонент вектора теплопроводности воспользуемся линейно-непрерывными базисными функциями:

$$N_m^\lambda(T) = \begin{cases} 0, T < T_{m-1} \\ \frac{T - T_{m-1}}{T_m - T_{m-1}}, T_{m-1} \leq T \leq T_m, \\ \frac{T_{m+1} - T}{T_{m+1} - T_m}, T_{m-1} \leq T \leq T_m, \\ 0, T > T_m, m = \overline{1, M} \end{cases}$$

В узле с номером m , она имеет значение равное единице ($N_m(T) = 1$), в остальных узлах она равна нулю ($N_m(T) = 0$); m -число участков разбиения области определения искомых функций при осуществлении их сплайн-аппроксимации.

Для конечно-разностной аппроксимации по времени введём временную сетку с равномерным шагом [9]

$$\omega^\tau = \left\{ \tau^k = k\tau, k = \overline{0, K}, \tau = \frac{t_{max}}{K} \right\}$$

и пространственную сетку с шагами h_θ по переменной θ и h_z по переменной z .

Определим количество M временных блоков, в каждом из которых одинаковое число K_m ($m = 1, M$) шагов τ по времени и на каждом из которых коэффициенты λ_m^s $s = \theta\theta, \theta z, zz$ в линейных комбинациях постоянны.

Это количество определим из верхней оценки функциональной невязки

$$6K_m \delta_f^2 \leq \delta_{\text{sum}}, \quad (2.3)$$

где 6 – число узлов с замерах температуры по времени, K_m – число временных слоёв в каждом блоке.

Из (2.3) получаем количество K_m временных шагов τ в каждом m -ом блоке, $m = 1, M$, для всех характеристик

$$K_m = \frac{\delta_{\text{sum}}}{6\delta_f^2}. \quad (2.4)$$

Если теперь весь временной промежуток $[0, \tau_{\text{max}}]$ разделить на число K_m временных слоев в каждом блоке, получим количество M конечных элементов в (13.0) – (13.2), а длина ΔT_m каждого конечного элемента $m = 1, M$ равна

$$\Delta T_m = \frac{T_{\text{max}} - T_{\text{min}}}{M}, m = 1, M. \quad (2.5)$$

$$M = \frac{\tau_{\text{max}}}{K_m}, m = 1, M. \quad (2.6)$$

Таким образом, равномерной сетке по времени ставится в соответствие более крупная (блоковая, с числом слоев K_m в каждом блоке) сетка по времени с одинаковым числом слоев по времени внутри каждого блока. Который в свою очередь, ставится в соответствие неравномерная сетка по функции T (рисунок 3), причем эта сетка может быть построена после численного решения прямой задачи с граничными условиями второго рода или третьего родов. Когда станет известно значение максимальной температуры T_{max} , а минимальная температура ставится равной значению температуры окружающей среды в начальный момент времени.

Для граничных условий первого рода эти значения уже известны, и величину ΔT_m можно определить а priori (до решения прямой задачи) [9].

Для граничных условий второго рода необходимо сперва оценить максимальную возможную температуру, для этого целесообразно решить задачу для одного наиболее термонапряженного узла (в зависимости от величины падающей тепловой нагрузки) до времени пика теплового потока τ_{max}).

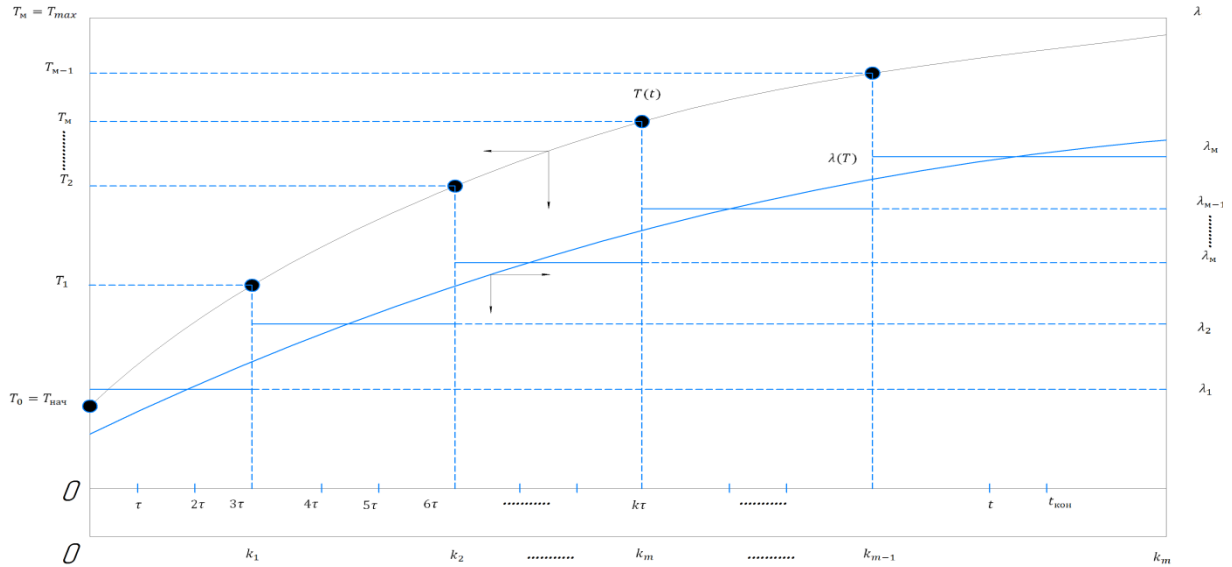


Рисунок 3 – Согласование равномерной блоковой сетки по времени с неравномерной сеткой по функции T

Выражение для оценки максимальной температуры конструкции может быть получено из следующего выражения:

$$T_{max} = T_{min} + \frac{2q_{sum}\tau_{max}}{c(T)\rho h_z}, = \quad (2.7)$$

где

$$q_{sum} = q^{pez}(T^4) - q^k(T). \quad (2.8)$$

2.2 Метод регуляризации А. Н. Тихонова

Рассмотрим некорректную задачу (1.20), причём A – непрерывный оператор. Из анализа, приведённого в [9] следует, что использовать функционал невязки для построения регуляризирующего решения нельзя, и необходимо сформировать другой, более общий функционал по сравнению с

функционалом невязки. Таким функционалом является стабилизирующий функционал А.Н. Тихонова

$$M^\alpha[u] = \|Au - f\|_F^2 + \alpha\|u\|^2, \alpha > 0. \quad (2.9)$$

Определение 1. Оператор $M^{\alpha'}[u]$ называется производной функционала M^α по Фреше, если

$$M^\alpha[u + \Delta u] - M^\alpha[u] = M^{\alpha'}[u]\Delta u + \gamma(u, \Delta u). \quad (2.10)$$

Причём

$$\lim_{\|\Delta u\| \rightarrow 0} \frac{\|\gamma(u, \Delta u)\|}{\|\Delta u\|} = 0.$$

Теорема 2.1 [22]. Для любого $\alpha > 0 \forall f \in F$ задача об отыскании минимума функционала (2.9) разрешима и имеет единственное решение $T^\alpha \in D(A)$, где $D(A)$ – область определения оператора A ; кроме того если $0 \in D(A)$, то справедливо соотношение корректности:

$$\|u^\alpha\| \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \|f\|_F. \quad (2.11)$$

Доказательство данной теоремы представлено в [25].

Теорема 2.2 [25]. Пусть A – взаимно-однозначный оператор, точное решение $\bar{T} \in D(A)$; тогда $u_\eta^\alpha \rightarrow \bar{u}$ при $\eta \rightarrow 0$, если $\alpha(\eta) \rightarrow 0$ таким образом, что $\frac{(h+\eta)^2}{\alpha(\eta)} \rightarrow 0$.

Теорема 2.3 [25]. Если $\|\bar{f} - f_\delta\| < \delta, \bar{f} = A\bar{u}, \|\bar{A} - A_h\| < h \rightarrow \mu_\eta(f_\delta, A_h) \rightarrow 0$ при $\eta \rightarrow 0$.

Введём в рассмотрение функцию

$$\zeta_\eta(\alpha) = \|A_h u_\eta^\alpha - f_\delta\|^2 - (\delta + h\|u_\eta^\alpha\|)^2 - (\mu_\eta(f_\delta, A_h))^2. \quad (2.12)$$

На основании теоремы имеет место следующий критерий.

1. Если $\|f_\delta\| < \delta^2 + (\mu_\eta(f_\delta, A_h))^2$, то полагаем $u_\eta^\alpha = 0$.
2. Если $\|f_\delta\| \geq \delta^2 + (\mu_\eta(f_\delta, A_h))^2$, то:
 - а) если $\zeta_\eta(\alpha)$ имеет корень α^* , то в качестве решения полагаем $u_\eta^\alpha = u_\eta^{\alpha^*}$;
 - б) если $\zeta_\eta(\alpha) > 0$, то полагаем $\mu_\eta = \lim u_\eta^\alpha, \alpha \rightarrow 0$.

Составление целевого функционала невязки.

Рассмотрим общий подход к построению устойчивых вычислительных алгоритмов решения некорректных задач, предложенный А.Н. Тихоновым [7,8]. Метод основан на переходе от исходного уравнения первого рода к задаче минимизации целевого функционала невязки между теоретическими величинами и экспериментальными с дополнительным стабилизирующим слагаемым

$$S(\lambda_p) = \frac{1}{2} \int_0^{\tau_{\max}} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K ([T(\lambda_p^{(n)}, z_j, \theta_k, \tau) - \tilde{T}]^2) d\tau, p = \theta\theta, z\theta, zz. \quad (2.13)$$

Приближенное решение исходной задачи есть экстремаль этого функционала

$$S(\lambda_p) = \min S(T),$$

где γ – параметр регуляризации, величина которого согласуется с погрешностью задания входных данных.

Функционал имеет вид

$$S(\lambda_p) = \frac{1}{2} \int_0^{\tau_{\max}} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K ([T(\lambda_p^{(n)}, z_j, \theta_k, \tau) - \tilde{T}]^2 + \frac{1}{2} \gamma(\delta) \|\lambda_p\|^2) d\tau, \quad (2.14)$$

где норма вычисляется из стабилизирующего функционала первого порядка

$$\|\lambda_p\|^2 = \int_0^{\tau_{\max}} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K [|\lambda(S)|^2 + \left| \frac{\partial \lambda(S)}{\partial S} \right|^2] d\tau, p = \theta\theta, z\theta, zz, \quad (2.15)$$

где

$$|\lambda(S)| = \lambda_{\theta\theta}(T)^2 + \lambda_{z\theta}(T)^2 + \lambda_{zz}(T)^2; \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial \lambda(S)}{\partial S} = \frac{\lambda^{n+1} - \lambda^{(n)}}{S^{n+1} - S^{(n)}}. \quad (2.17)$$

Это позволяет гарантировать сходимость приближенных решений к точному в выбранной метрике пространства, а, следовательно, и равномерную сходимость.

Вычисление регуляризирующего параметра.

Параметр регуляризации производится в соответствии с обобщённым функционалом невязки [7, 8]:

$$\theta(\gamma) = [T(\lambda^{(n)}) - \tilde{T}]^2 - (\delta + h\|\lambda\|^2)^2 - \mu_\eta^2(\tilde{T}) = 0. \quad (2.18)$$

Для отыскания корня обобщённой невязки на каждом итерационном шаге используется метод хорд для решения нелинейных алгебраических уравнений.

Пусть $\gamma_0 = \frac{1}{\mu_0}$, $\gamma_1 = \frac{1}{\mu_1}$ таковы, что $\theta(\gamma_0) > 0$ и $\theta(\gamma_1) < 0$, и пусть $\gamma_1 > \gamma_0$. Тогда последовательность метода хорд, построенная по формулам:

$$\mu_n = \mu_0 - \frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma(\mu_0) - \sigma(\mu_1)} \sigma(\mu_0), \quad \gamma_n = \frac{1}{\mu_n}, \quad \mu_0 = \mu_1, \quad \mu_1 = \mu_n. \quad (2.19)$$

Будет монотонной $\mu_{n+1} > \mu_n$ и при этом $\sigma(\mu_n) \geq 0$ для всех n . Сходимость метода хорд в этом случае не гарантируется.

Если же и $h \neq 0$ и оператор задан с погрешностью, то выпуклость обобщенной невязки $\sigma(\mu) = \theta(1/\mu)$ может нарушаться и гарантировать монотонность и сходимость последовательности метода хорд в этом случае нельзя. Однако, если $\sigma(\mu_n) = \theta\left(\frac{1}{\mu_n}\right) > 0$ для всех μ_n , построенных по формулам, то в силу монотонности обобщённой невязки $\mu_{n+1} > \mu_n$. Таким образом, если значения обобщённой невязки во всех точках μ_n положительны, то можно утверждать, что метод хорд сходится. Если же $\sigma(\mu_{n_0})$ при каком-либо n_0 , то дальнейшее применение метода хорд в формуле необоснованно. Поэтому в этом случае для решения уравнения $\sigma(\mu) = 0$ при $n > n_0$ применяется модификация метода хорд:

$$\mu_n = \mu_0 - \frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma(\mu_0) - \sigma(\mu_1)} \sigma(\mu_0), \quad \gamma_n = \frac{1}{\mu_n}. \quad (2.20)$$

Если $\sigma(\mu_0)\sigma(\mu_n) < 0$, то $\mu_0 = \mu_n$

Если $\sigma(\mu_1)\sigma(\mu_n) < 0$, $\mu_1 = \mu_n$

Выполнение одного из этих условий всегда можно гарантировать.

2.3 Алгоритм итерационной регуляризации

Практическое применение для определения характеристик теплообмена методологии идентификации выдвигает целый ряд требований к используемым методам и вычислительным алгоритмам решения обратных задач. Эти требования обусловлены, прежде всего, некорректностью обратных задач, а также весьма большим многообразием их возможных постановок [39 – 42].

В силу некорректности обратных задач для их решения необходимо использовать специальные регуляризирующие методы и алгоритмы, обеспечивающие устойчивые приближенные решения [14 – 31]. Широкое многообразие возникающих на практике постановок обратных задач требует применения таких методов, которые могут быть использованы для решения различных типов обратных задач, включая линейные и нелинейные, с минимально необходимым объёмом экспериментальных данных и в переопределённых постановках, с подвижными границами и другие. Кроме того, возникает достаточно широкий спектр разнообразных требований с точки зрения программной реализации вычислительных алгоритмов. К ним можно отнести возможность создания универсальных, применимых к различным типам обратных задач программных комплексов, относительно низкая трудоёмкость модификации программ и ряд других.

Сравнительный анализ показывает, что одним из наиболее универсальных методов, на основе которого возможна разработка удовлетворяющих перечисленным выше требованиям вычислительных алгоритмов, а также соответствующего программного обеспечения для решения некорректных обратных задач теплообмена различных типов является метод итерационной регуляризации [40–54].

Суть метода итерационной регуляризации заключается в следующем [48]. Рассмотрим некоторую абстрактную обратную задачу, записанную в операторной форме. Пусть математическая модель процесса нестационарного

теплообмена при взаимодействии анализируемой системы (элемента конструкции) с окружающей средой имеет вид

$$L(x, \tau, T, \bar{u})T(x, \tau) = 0, x \in \Omega, \tau \in (0, \tau_m],$$

$$T(0, \tau) = T_0(x), x \in \bar{\Omega}$$

$$B(x, \tau, T, \bar{u})T(x, \tau) = 0, x \in \partial\Omega, \tau \in (0, \tau_m].$$

Пусть вектор характеристик неизвестен, однако имеются данные измерений температуры в некотором числе M точек области. Обратная задача заключается в определении \bar{u} из условий модели процесса нестационарного теплообмена, представленной выше.

Эта математическая модель при заданных значениях вектора характеристик \bar{u} позволяет вычислить температуры в точках установки термодатчиков. Другими словами, эта модель позволяет осуществить преобразование характеристик в температуру в точках измерений. В результате измерений формируется векторная функция $f = \{\tilde{T}(\tau)\}_1^M$. Пусть элементы \bar{u} и f принадлежат некоторым пространствам U и F соответственно. Тогда анализируемую обратную задачу можно представить в виде уже знакомого (1.20) операторного уравнения первого рода [14 – 31]

$$A\bar{u} = f, u \in F, A: U \rightarrow F, \quad (2.21)$$

где оператор A строится на основании модели исследуемого процесса, а правая часть формируется с использованием экспериментальных данных. Пространства U и F выбираются, исходя из особенностей рассматриваемой задачи. Они должны содержать достаточно широкие классы функций, и включать в себя все возможные решения и любые правые части f с учётом искажений, вносимых измерительными приборами. Чаще всего в качестве U и F берётся пространство L_2 функций с интегрируемым квадратом.

Так как правая часть уравнения (2.21) формируется на основании результатов измерений, то элемент f всегда известен с некоторой погрешностью

$$\delta = \|f - \tilde{f}\|, \quad (2.22)$$

где \tilde{f} – точное значение этого элемента. Кроме того, при численном построении оператора A также возникают погрешности, связанные с использованием различных приближений, аппроксимирующих зависимостей и других операций, а также с погрешностями округления при проведении вычислений. В результате и оператор A известен неточно. Погрешность задания оператора A можно характеризовать величиной

$$h = \|A - \bar{A}\|, \quad (2.23)$$

где A – точный оператор. Таким образом, исходные данные при практическом решении обратной задачи заданы с погрешностью, которая может быть записана в виде точностного параметра $f(h, \delta)$ формируем функционал невязки

$$L(u) = \|A\bar{u} - f\|_F \quad (2.24)$$

и рассмотрим задачу его минимизации относительно \bar{u} . При решении конкретной обратной задачи в пространстве U искомым характеристикам, вообще говоря, необходимо выделить область допустимых решений $D \in U$. Однако, во многих практических задачах какая-либо конструктивная априорная информация об области D отсутствует. Поэтому обычно полагается, что $D = U$, т.е. полученное в результате минимизации (2.24) решение \bar{u} удовлетворяет всем возможным ограничениям и, следовательно, для минимизации функционала $L(\bar{u})$ можно использовать методы безусловной минимизации. С помощью метода минимизации первого порядка, построим минимизирующую функционал (2.24) последовательность

$$\bar{u}^{s+1} = \bar{u}^s - \alpha_s G \left(L_u^{i(s)} \right), s = 0, 1, \dots, s, \quad (2.25)$$

где s – номер итерации, α_s – глубина спуска, выбираемая из условия

$$\alpha_s = \text{Argmin} L \left(\bar{u}^s - \alpha_s G \left(L_u^{i(s)} \right) \right), \alpha_s > 0, \quad (2.26)$$

$G \left(L_u^{i(s)} \right)$ – оператор, характеризующий используемый метод минимизации [55, 56]; \bar{u}^0 – задаваемое априорно начальное приближение; s –

номер последней итерации, определяемый в процессе решения задачи из регуляризирующего условия останова, осуществляемого в соответствии с принципом обобщённой невязки

$$s: L(u^s) \cong \varepsilon(h, \delta).$$

Оказывается, что изложенный метод последовательных приближений порождает в соответствии с общим определением регуляризирующего оператора (семейства операторов) по А.Н. Тихонову, регуляризирующее семейство операторов, в котором параметром регуляризации является величина $1/s$ [7, 8].

Для линейных некорректных задач (когда оператор A линейен) метод итерационной регуляризации получил строгое математическое обоснование и практическое подтверждение данными математического моделирования [48]. Применительно к нелинейным задачам какие-либо результаты обоснования устойчивости итерационных алгоритмов в настоящее время получены для ограниченного числа постановок задачи. Однако результаты проведённых обширных вычислительных экспериментов при решении обратных задач теплообмена различных типов подтверждают высокую эффективность метода итерационной регуляризации и для анализа широкого круга нелинейных задач.

При решении обратных задач преобразование $A\bar{u}$ в уравнении (2.21) представляет собой функцию теплового состояния анализируемой системы, вычисленную в точках установки термодатчиков. Для расчёта этой величины необходимо решать исходную прямую задачу теплообмена при некоторых значениях искомого в обратной задаче характеристик.

При практической реализации итерационных алгоритмов решения обратных задач часто бывает весьма затруднительно оценить погрешность задания оператора A в уравнении (2.21) [57, 58]. Поскольку ошибки округления при проведении вычислений достаточно малы и, как правило, значительно меньше, чем погрешность измерений, то погрешности аппроксимации оператора A стремятся уменьшить за счёт соответствующего

выбора параметров вычислительного алгоритма. В частности, при использовании численных методов решения краевых задач предварительно проводятся вычислительные эксперименты, цель которых состоит в выборе таких параметров разностных сеток, что при их дальнейшем улучшении (например, увеличении числа шагов по пространству или времени) точность решения задачи практически не увеличивается. На основании результатов математического моделирования делается вывод, что погрешность задания оператора A значительно меньше погрешностей измерений. В результате имеются основания считать, что оператор A известен почти точно и вместо соотношения (2.24) можно использовать условие невязки

$$S: L(\bar{u}^s) \cong \delta.$$

С точки зрения общей последовательности вычислительных операций итерационные алгоритмы решения обратных задач в основном строятся в соответствии с традиционной процедурой оптимизации на основе градиентных методов [59 – 61]. Применительно к численному решению обратных задач эта процедура включает в себя следующие основные операции:

1. Задание начального приближения искомых характеристик.
2. Численное решение прямой задачи теплообмена при заданном приближении искомых характеристик.
3. Вычисление значения функционала невязки.
4. Проверка условия выхода из итерационного процесса (2.25) если условие выхода выполнено, то осуществляется переход к п. 9, в противном случае – к п. 5.
5. Определение градиента функционала невязки.
6. Вычисление глубины спуска из условия (2.26).
7. Формирование нового приближения искомых характеристик, используя соотношение (2.25).
8. Проверка выхода из итерационного процесса по близости решения на двух соседних итерациях. Если условие выхода выполнено, то

осуществляется переход к п. 9, в противном случае – к п. 2, и процесс последовательных приближений продолжается.

9. Процесс последовательных приближений закончен.

Необходимость введения пункта 8 продиктована следующими соображениями. В случае неадекватности принятой математической модели реальному процессу теплообмена заданный уровень невязки может никогда не достигаться в ходе итерационного процесса. Это обусловлено тем, что при расчёте температур в точках установки термодатчиков в данном случае за счёт неадекватности модели возникает систематическая погрешность относительно экспериментальных данных. Аналогичная ситуация может иметь место и при наличии в экспериментальной информации неучтённой на этапе подготовки исходных данных для решения обратной задачи систематической погрешности. Кроме того, неудачно выбранная аппроксимация искомых функциональных характеристик также может не позволить достичь требуемого уровня невязки.

В изложенной процедуре важнейшими операциями, реализация которых решающим образом влияет на вычислительную эффективность итерационных алгоритмов решения обратных задач, являются шаги 5 и 6, а также шаг 4. Достаточно подробному изложению эффективных подходов к практической реализации этих вычислительных операций посвящены последующие разделы. Здесь важно отметить, что в целях сокращения общего количества вычислений весьма целесообразно дополнительно ввести в рассмотрение два типа краевых задач: сопряжённой краевой задачи и краевой задачи для вариаций температур. Первая из них даёт возможность получить аналитические выражения для градиента функционала невязки, а вторая – вычислить линейную оценку глубин спуска. Практика решения обратных задач теплообмена различных типов показала высокую эффективность такого подхода. В результате выполнение каждой из операций 5 и 6 состоит из двух составляющих.

Операция 5:

5.1. Численное решение сопряжённой краевой задачи.

5.2. Вычисление градиента функционала невязки.

Операция 6:

6.1. Численное решение краевой задачи (или нескольких краевых задач) для вариаций температур.

6.2. Вычисление линейной оценки глубины спуска.

Следует подчеркнуть, что изложенная последовательность операций остаётся неизменной при решении обратных задач различных типов. Это позволяет разработать программные комплексы, большая часть которых является универсальной или проблемно-независимой в рамках некоторого класса рассматриваемых задач.

2.4 Организация останова итерационного процесса

При численной реализации алгоритмов решения обратных задач всегда имеют место погрешности, которые следует отнести к погрешностям во входных данных.

Неопределённости в расчётах температурных режимов элементов конструкции [60 – 68] в условиях эксплуатации обусловлены целым рядом причин: неопределённостями физико-математических моделей описания теплопереноса, неопределённостями значений физических величин, используемых в этих моделях, неопределённостями в задании граничных и начальных условий и др.

К настоящему времени разработано большое количество физико-математических моделей, описывающих теплоперенос в материалах. Модели различаются по степени подробности учёта процессов и, соответственно, различаются наборами используемых в них физических величин. Значения этих величин входят в задачу прогрева в виде коэффициентов и свободных членов. Для термически разлагающихся материалов различают теплофизические и кинетические характеристики. Эти характеристики

определяются экспериментально после обработки результатов испытаний в соответствии с выбранной физико-математической модели. При этом одноименные характеристики, полученные для различных физико-математических моделей, могут отличаться в разы.

Далее приведены все виды погрешностей, входящих в исходные данные при идентификации искомых теплофизических характеристик и, как результат закладывающие несоответствия с реальными теплофизическими величинами:

1. Алгоритмическая погрешность: Погрешность, зависящая от степени соответствия алгоритма измерения математическому определению измеряемой характеристики (чаще всего это относится к измерению параметров случайных процессов).

2. Аппаратурная погрешность: Погрешность, обусловленная несовершенством средств измерений, их схемного решения, недостаточной точностью реализации принятого алгоритма измерений.

3. Внешние погрешности: Погрешности, возникающие при действии различных факторов, внешних по отношению к средству измерения. К ним часто относят ошибки экспериментатора при настройке средства измерения и при снятии показаний.

4. Грубая погрешность: Погрешность, существенно превышающая уровень, оправданный условиями измерения, свойствами применяемых средств измерений и квалификацией экспериментатора. Грубые погрешности измерения обнаруживают статистическими методами и исключают из рассмотрения.

5. Доверительная вероятность: Вероятность, с которой оцениваемый параметр, a попадает в заданный диапазон его возможных значений.

6. Доверительный интервал: Диапазон значений параметра a , который с заданной доверительной вероятностью включает оцениваемое значение параметра a .

7. Погрешность классификации: Погрешность, обусловленная несоответствием реального (исследуемого) объекта или процесса выбранной

модели объекта или физико-математической модели описания процесса.

8. Погрешность метода: Погрешность, возникающая вследствие недостаточной разработанности теории явлений, которые положены в основу измерения, и тех соотношений, которые используются для оценки измеряемой величины.

9. Приписанная погрешность: Погрешность, приписываемая любому результату измерений (определений), полученная для совокупности результатов аналогичных измерений (определений), выполняемых по одной и той же аттестованной методике.

10. Разброс значений параметра: Диапазон значений параметра вследствие погрешностей его определения.

11. Систематическая погрешность: Составляющая погрешности измерения, которая остаётся постоянной или закономерно изменяется при повторных измерениях одной и той же величины.

12. Случайная погрешность: Непредсказуемая составляющая погрешности измерения, характеристики и закономерности изменения которой проявляются лишь на значительном числе результатов измерения.

Все перечисленные виды погрешностей в сумме приводят к неустойчивости решения при приближении точки минимума целевого функционала.

Следует отметить, что поиск экстремума функций многих переменных с помощью методов оптимизации градиентного типа имеет следующую особенность. При задании начального приближения, достаточно далёкого от искомого решения, на первых итерациях процесса последовательных приближений имеет место достаточно высокая скорость сходимости, которая с увеличением номера итерации заметно падает. Это свойство оказывается весьма полезным при решении некорректных (неустойчивых) задач, которыми являются обратные задачи.

Практика решения граничных и коэффициентных обратных задач теплопроводности итерационными методами градиентного типа показывает,

что при достаточно гладких начальных приближениях искомых функций (как в непрерывной, так и в параметрической форме) неустойчивость или осциллирующий характер решения возникает не сразу, а нарастает достаточно медленно и начинает проявляться, начиная с некоторого номера итерации. Причём в коэффициентных обратных задачах влияние погрешностей во входных данных на регулярность решения проявляется значительно слабее. При достаточно малом количестве коэффициентов в параметрическом представлении искомого решения неустойчивость вообще может не наступить при весьма большом числе итераций [48].

Оказывается, что предельный номер итерации, при котором начинает проявляться неустойчивый характер соответствующего этому номеру приближения искомой функции может быть определён в соответствии с принципом невязки. В этом случае останов итерационного процесса осуществляется при выполнении условия

$$L^S \leq \delta_{sum},$$

где δ_{sum} – погрешность входных данных, вычисленная в той же метрике, что и целевой функционал;

$$\delta_{sum} = \delta_a + \delta_f + \delta_{окр}, \quad (2.27)$$

δ_f – погрешность входных температур, определяемая следующим выражением

$$\delta_f = \int_0^{\tau_{max}} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \delta_L(\tau) d\tau, \quad (2.28)$$

где δ_L – оценка изменения среднеквадратичного отклонения измеренных температур в точке с заданной координатой по времени t от истинного значения;

δ_a – погрешности, обусловленные аппроксимацией исходной задачи конечноразностным аналогом и соответствующей параметризацией искомых функций;

$\delta_{окр}$ – погрешности округления.

Поэтому погрешностями, связанными с округлением результатов арифметических операций, обычно пренебрегают.

Кроме того, учитывая тот факт, что в реальных измерениях значение δ_f достаточно велико, за счёт соответствующего выбора параметров разностной сетки, а также вида зависимостей, аппроксимирующих искомые функции во многих практических ситуациях можно добиться выполнения условия $\delta_f \gg \delta_a$.

В этом случае $\delta = \delta_f$ и условие останова итерационного процесса имеет вид $L^S \leq \delta_f$.

Критерий (2.28) оказался весьма плодотворным при решении обратных задач теплопроводности. В работах [30 – 31] на основе математического моделирования продемонстрирована его высокая эффективность. Более детальные исследования [69] доказали, что итерационные метода градиентного типа решения некорректно поставленных задач общего вида

$$A_h = f_\tau,$$

где A_h – некоторый линейный оператор, заданный с погрешностью;

f_τ – заданные с погрешностью входные данные.

Данные результаты дают возможность использования итерационных методов для широкого круга важных для практических приложений задач идентификации, включая коэффициентные обратные задачи теплопроводности. Несмотря на то, что теоретическое обоснование итерационных методов имеется только для линейных некорректных задач, практика решения нелинейных обратных задач теплопроводности показывает высокую эффективность в этих случаях. Следует отметить, что применительно к нелинейным коэффициентным обратным задачам в некоторых случаях условие (2.26) может не достигаться в процессе минимизации целевого функционала. Такая ситуация может реализоваться, например, при достаточно грубой аппроксимации искомым зависимостей характеристик тепло и массопереноса от температуры при их параметрическом представлении. Аналогичные результаты могут быть

получены при математическом моделировании на ЭВМ решения обратных задач на точных входных данных. Поэтому при практической реализации итерационных алгоритмов рекомендуется поступать следующим образом. Если в процессе итераций изменение величины целевого функционала достаточно мало, т.е.

$$|L^s - L^{s-1}| < \xi, \quad (2.29)$$

где ξ – некоторое малое число, и при этом условие невязки (2.26) не достигается, то необходимо осуществить останов итерационного процесса. Как правило, при обработке реальных экспериментальных данных в этом случае требуется улучшить качество аппроксимации искомых характеристик. При использовании, например, сплайн-аппроксимации это означает, что необходимо увеличить количество узлов сплайна.

2.5 Составление целевого функционала невязки

Для получения формулы градиента функционала J будем решать задачу минимизации функционала невязки как задачу на условный экстремум методом множителей Лагранжа при ограничениях, определяемых условием (1.21) [70 – 76].

Составим функционал L Лагранжа:

$$\begin{aligned} L(\lambda_p) = & \frac{1}{2} \int_0^{\tau_{\max}} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K [T(z_j, \theta_k, \tau) - \tilde{T}]^2 d\tau + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^{\tau_{\max}} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \frac{\psi(z_j, \theta_k, \tau)}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda_{\theta\theta}(T) \frac{\partial T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial \theta} \right) \\ & + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda_{\theta z}(T) \frac{\partial T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial z} \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_{zz}(T) \frac{\partial T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial z} \right) - C(T) \rho \frac{\partial T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial \tau}] d\tau \end{aligned} \quad (2.31)$$

При использовании метода регуляризации А.Н. Тихонова, ограничиваясь слагаемыми первого порядка точности, получаем

$$\begin{aligned}
L(\lambda_p) = & \frac{1}{2} \int_0^{\tau_{\max}} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K ([T(z_j, \theta_k, \tau) - \tilde{T}]^2 + \frac{1}{2} \gamma(\delta) \|\lambda_m^{\theta\theta^2} + \lambda_m^{z\theta^2} + \lambda_m^{\theta\theta^2}\|) d\tau \\
& + \frac{1}{2} \int_0^{\tau_{\max}} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \frac{\psi(z_j, \theta_k, \tau)}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda_{\theta\theta}(T) \frac{\partial T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial \theta} \right) \\
& + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda_{\theta z}(T) \frac{\partial T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial z} \right) + \\
& + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_{zz}(T) \frac{\partial T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial z} \right) - C(T) \rho \frac{\partial T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial \tau}] d\tau. \tag{2.32}
\end{aligned}$$

2.6 Составление вариации целевого функционала

Дадим векторам значений параметров искомым функциям малые возмущения, причём такие, чтобы относительные величины возмущений каждой координаты всех векторов были одинаковыми, тогда температурное поле также получит приращение некоторой величины.

Таким образом, теплофизические характеристики имеют следующие приращения.

Для первой компоненты тензора

$$\begin{aligned}
\lambda_m^{zz}(T + \Delta T) &= (1 + \bar{\Delta}) \sum_{m=1}^M \left(\lambda_m^{zz} N_m(T) + \lambda_m^{zz} \frac{N_m(T)}{dT} \Delta T \right) = \\
&= (1 + \bar{\Delta}) \left(\lambda_{zz}(T) + \frac{d\lambda_{zz}(T)}{dT} \Delta T \right). \tag{2.32}
\end{aligned}$$

Для второй компоненты тензора:

$$\begin{aligned}
\lambda_m^{z\theta}(T + \Delta T) &= (1 + \bar{\Delta}) \sum_{m=1}^M \left(\lambda_m^{z\theta} N_m(T) + \lambda_m^{z\theta} \frac{N_m(T)}{dT} \Delta T \right) = \\
&= (1 + \bar{\Delta}) \left(\lambda_{z\theta}(T) + \frac{d\lambda_{z\theta}(T)}{dT} \Delta T \right). \tag{2.33}
\end{aligned}$$

Для третьей компоненты тензора:

$$\begin{aligned}\lambda_m^{\theta\theta}(T + \Delta T) &= (1 + \bar{\Delta}) \sum_{m=1}^M \left(\lambda_m^{\theta\theta} N_m(T) + \lambda_m^{\theta\theta} \frac{N_m(T)}{dT} \Delta T \right) = \\ &= (1 + \bar{\Delta}) \left(\lambda_{\theta\theta}(T) + \frac{d\lambda_{\theta\theta}(T)}{dT} \Delta T \right).\end{aligned}\quad (2.34)$$

Тогда первое и третье слагаемые в левой части уравнения теплопроводности примут следующий вид.

Первое слагаемое

$$\begin{aligned}(1 + \bar{\Delta}) \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_{zz}(T(\theta, z, \tau) + \Delta T(\theta, z, \tau)) \frac{\partial(T(\theta, z, \tau) + \Delta T(\theta, z, \tau))}{\partial z} \right) &= \\ &= (1 + \bar{\Delta}) \left[\frac{\partial}{\partial z} (\lambda_{zz}(T) \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial z}) + \lambda_{zz}(T) \frac{\partial \Delta T(\theta, z, \tau)}{\partial z} + \right. \\ &\quad \left. \frac{d\lambda_{zz}(T)}{dT} \frac{\partial \Delta T(\theta, z, \tau)}{\partial z} \Delta T(\theta, z, \tau) + \frac{d\lambda_{zz}(T)}{dT} \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial r} \Delta T(\theta, z, \tau) \right] = \\ &= (1 + \bar{\Delta}) \left[\frac{\partial}{\partial z} (\lambda_{zz}(T) \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial z}) + \lambda_{zz}(T) \frac{\partial \Delta T(\theta, z, \tau)}{\partial z} \right. \\ &\quad \left. + \frac{d\lambda_{zz}(T)}{dT} \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial z} \Delta T(\theta, z, \tau) \right. \\ &\quad \left. + \frac{d\lambda_{zz}(T)}{dT} \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial z} \Delta T(\theta, z, \tau) \right];\end{aligned}\quad (2.35)$$

Третье слагаемое

$$\begin{aligned}(1 + \bar{\Delta}) \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda_{\theta\theta}(T(\theta, z, \tau) + \Delta T(\theta, z, \tau)) \frac{\partial(T(\theta, z, \tau) + \Delta T(\theta, z, \tau))}{\partial \theta} \right) &= \\ &= (1 + \bar{\Delta}) \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\lambda_{\theta\theta}(T) \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial \theta}) + \lambda_{\theta\theta}(T) \frac{\partial \Delta T(\theta, z, \tau)}{\partial \theta} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{d\lambda_{\theta\theta}(T)}{dT} \frac{\partial \Delta T(\theta, z, \tau)}{\partial \theta} \Delta T(\theta, z, \tau) + \frac{d\lambda_{\theta\theta}(T)}{dT} \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial \theta} \Delta T(\theta, z, \tau) \right] = \\ &= (1 + \bar{\Delta}) \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\lambda_{\theta\theta}(T) \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial \theta}) + \lambda_{\theta\theta}(T) \frac{\partial \Delta T(\theta, z, \tau)}{\partial \theta} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{d\lambda_{\theta\theta}(T)}{dT} \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial \theta} \Delta T(\theta, z, \tau) \right].\end{aligned}\quad (2.36)$$

Второе слагаемое в левой части

$$(1 + \bar{\Delta}) \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_{z\theta}(T(\theta, z, \tau) + \Delta T) \frac{\partial(T(\theta, z, \tau) + \Delta T(\theta, z, \tau))}{\partial \theta} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= (1 + \bar{\Delta}) \frac{2}{r} \left[\frac{\partial}{\partial z} (\lambda_{r\theta}(T)) \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial \theta} + \lambda_{z\theta}(T) \frac{\partial \Delta T(\theta, z, \tau)}{\partial \theta} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{d\lambda_{z\theta}(T)}{dT} \frac{\partial \Delta T(\theta, z, \tau)}{\partial \theta} \Delta T(\theta, z, \tau) + \frac{d\lambda_{z\theta}(T)}{dT} \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial \theta} \Delta T(\theta, z, \tau) \right]. \quad (2.37)
\end{aligned}$$

Тогда возмущённое уравнение теплопроводности при изменении параметров на величину Δ будет иметь вид

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_{zz}(T) \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial z} + \lambda_{zz}(T) \frac{\partial \Delta T(\theta, z, \tau)}{\partial z} + \frac{d\lambda_{zz}(T)}{dT} \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial z} \Delta T(\theta, z, \tau) \right) + \\
&\quad \frac{2}{r} \left[\frac{\partial}{\partial z} (\lambda_{r\theta}(T)) \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial \theta} + \lambda_{z\theta}(T) \frac{\partial \Delta T(\theta, z, \tau)}{\partial \theta} + \right. \\
&\quad \left. \frac{d\lambda_{z\theta}(T)}{dT} \frac{\partial \Delta T(\theta, z, \tau)}{\partial \theta} \Delta T(\theta, z, \tau) + \frac{d\lambda_{z\theta}(T)}{dT} \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial \theta} \Delta T(\theta, z, \tau) \right] + \\
&\quad \frac{2}{r} \left[\frac{\partial}{\partial z} (\lambda_{r\theta}(T)) \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial \theta} + \lambda_{z\theta}(T) \frac{\partial \Delta T(\theta, z, \tau)}{\partial \theta} + \right. \\
&\quad \left. \frac{d\lambda_{z\theta}(T)}{dT} \frac{\partial \Delta T(\theta, z, \tau)}{\partial \theta} \Delta T(\theta, z, \tau) + \frac{d\lambda_{z\theta}(T)}{dT} \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial \theta} \Delta T(\theta, z, \tau) \right] = \\
&\quad = \frac{c(T)}{1 + \bar{\Delta}} \frac{\partial \Delta T(r, \theta, \tau)}{\partial \tau}. \quad (2.35)
\end{aligned}$$

Выражение для возмущённого теплового лучистого удельного потока примет следующий вид при допущении о незначительном вкладе диффузного переизлучения между ИК-имитаторами и испытуемым объектом на температурное поле объекта

$$q_{\text{эф}}(T + \Delta T) = q_{\text{пад}} - \varepsilon \sigma T(\theta, z, \tau)^4 - 4\varepsilon \sigma T(\theta, z, \tau)^3 \Delta T(\theta, z, \tau); \quad (2.36)$$

Выражение для возмущённого теплового конвективного потока примет следующий вид

$$\begin{aligned}
q^k(T + \Delta T) &= \alpha_k(T + \Delta T)(T + \Delta T - T_c) = \\
&= \left(\alpha_k(T) + \frac{d\alpha_k(T)}{dT} \right) (T + \Delta T - T_c). \quad (2.37)
\end{aligned}$$

Выражение для производной от коэффициента теплоотдачи по температуре

$$\frac{\partial \alpha_k(T)}{\partial C_m} = \frac{\lambda_B(T_c)}{l} \frac{\partial Nu_l(T)}{\partial C_m} = \frac{\lambda_B(T_c)}{l} \times$$

$$\times \left[\frac{3}{16(\text{Gr}_l \text{Pr}(T_c))^{\frac{3}{4}}} \left(\frac{2\text{Pr}(T_c)}{5(1+2\text{Pr}(T_c)^{\frac{1}{2}}+2\text{Pr}(T_c))} \right)^{\frac{1}{4}} \frac{\partial \text{Gr}_l(T)}{\partial T} \text{ при } \text{Re} < 2300; \right.$$

$$\left. \frac{0.0425}{(\text{Gr}_l \text{Pr}(T_c))^{\frac{3}{4}}} \frac{\partial \text{Gr}_l(T)}{\partial C_m} \text{ при } \text{Re} > 2300; \right] \quad (2.38)$$

Выражение для производной от критерия Гросгофа по компоненте тензора теплопроводности T:

$$\frac{\partial \text{Gr}_l(T)}{\partial T} = \frac{g\beta l^3}{\nu(T_c)^2} \quad (2.39)$$

Возмущённые граничные условия имеют вид:

$$-\left[\left(\lambda_{z\theta}(T) + \frac{d\lambda_{z\theta}(T)}{dT} \Delta T(\theta, z, \tau) \right) \frac{\partial T(\theta, z, \tau) + \Delta T(\theta, z, \tau)}{\partial z} + \right.$$

$$\left. + \left(\lambda_{\theta\theta}(T) + \frac{d\lambda_{\theta\theta}(T)}{dT} \Delta T(\theta, z, \tau) \right) \frac{1}{r} \frac{\partial T(\theta, z, \tau) + \Delta T(\theta, z, \tau)}{\partial \theta} \right] = 0, \quad (2.40)$$

$$z \in [0; l_z], \theta = 0, \tau > 0;$$

$$\left(\lambda_{z\theta}(T) + \frac{d\lambda_{z\theta}(T)}{dT} \Delta T \right) \frac{\partial T(\theta, z, \tau) + \Delta T(\theta, z, \tau)}{\partial z} +$$

$$+ \left(\lambda_{\theta\theta}(T) + \frac{d\lambda_{\theta\theta}(T)}{dT} \Delta T(\theta, z, \tau) \right) \frac{1}{r} \frac{\partial T(\theta, z, \tau) + \Delta T(\theta, z, \tau)}{\partial \theta} = 0, \quad (2.41)$$

$$z \in [0; l_z], \theta = \pi, \tau > 0;$$

$$-\left[\left(\lambda_{zz}(T) + \frac{d\lambda_{zz}(T)}{dT} \Delta T \right) \frac{\partial T(\theta, z, \tau) + \Delta T(\theta, z, \tau)}{\partial z} + \right.$$

$$\left. + \left(\lambda_{z\theta}(T) + \frac{d\lambda_{z\theta}(T)}{dT} \Delta T \right) \frac{\partial T(\theta, z, \tau) + \Delta T(\theta, z, \tau)}{r \partial \theta} \right] = 0,$$

$$z = 0, \theta \in [0; \pi], \tau > 0;$$

$$+ \left(\lambda_{z\theta}(T) + \frac{d\lambda_{z\theta}(T)}{dT} \Delta T \right) \frac{\partial T(\theta, z, \tau) + \Delta T(\theta, z, \tau)}{r \partial \theta} = 0, \quad (2.42)$$

$$z = 0, \theta \in [0; \pi], \tau > 0;$$

$$\begin{aligned}
& \left(\lambda_{zz}(T) + \frac{d\lambda_{zz}(T)}{dT} \Delta T \right) \frac{\partial T(\theta, z, \tau) + \Delta T(\theta, z, \tau)}{\partial z} + \\
& + \left(\lambda_{z\theta}(T) + \frac{d\lambda_{z\theta}(T)}{dT} \Delta T \right) \frac{\partial T(\theta, z, \tau) + \Delta T(\theta, z, \tau)}{r \partial \theta} = q^{\text{эф}}(T^4) - q^{\text{к}}(T), \quad (2.43) \\
& z = l_z, \theta \in [0; \pi], \tau > 0;
\end{aligned}$$

Теперь вычтем из возмущённого уравнения теплопроводности невозмущённое, получим уравнение, определяющее поле приращения температур при возмущении параметров на величину Δ :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\lambda_{\theta\theta}(T) \frac{\partial \Delta T(\theta, z, \tau)}{\partial \theta} + \frac{d\lambda_{\theta\theta}(T)}{dT} \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial \theta} \Delta T(\theta, z, \tau) \right] + \\
& + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left[\lambda_{z\theta}(T) \frac{\partial \Delta T(\theta, z, \tau)}{\partial \theta} + \frac{d\lambda_{z\theta}(T)}{dT} \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial \theta} \Delta T(\theta, z, \tau) \right] + \\
& + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_{zz}(T) \frac{\partial \Delta T(\theta, z, \tau)}{\partial z} + \frac{d\lambda_{zz}(T)}{dT} \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial z} \Delta T(\theta, z, \tau) \right) = \\
& = C(T) \frac{\partial \Delta T(\theta, z, \tau)}{\partial \tau}. \quad (2.44)
\end{aligned}$$

Выражения для потоков будут иметь следующий вид.

Для диффузного лучистого потока

$$q_{\text{эф}}(\Delta T) = -4\varepsilon\sigma T^3 \Delta T(\theta, z, \tau). \quad (2.45)$$

Для конвективного естественного потока выражение относительно возмущающей температуры при линеаризации коэффициента теплоотдачи:

$$q^{\text{к}}(\Delta T) = \alpha_{\text{к}}(T) \Delta T(\theta, z, \tau) + \frac{d\alpha_{\text{к}}(T)}{dT} \Delta T(\theta, z, \tau). \quad (2.46)$$

Граничные условия будут иметь следующий вид

$$\begin{aligned}
& - \left[\frac{d\lambda_{z\theta}(T)}{dT} \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial z} \Delta T(\theta, z, \tau) + \frac{d\lambda_{\theta\theta}(T)}{dT} \frac{1}{r} \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial \theta} \Delta T(\theta, z, \tau) + \right. \\
& \left. + \lambda_{z\theta}(T) \frac{\partial \Delta T(\theta, z, \tau)}{\partial z} + \frac{\lambda_{\theta\theta}(T)}{r} \frac{\partial \Delta T(\theta, z, \tau)}{\partial \theta} \right] = 0, \quad (2.47) \\
& z \in [0; l_z], \theta = 0, \tau > 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{d\lambda_{z\theta}(T)}{dT} \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial z} \Delta T(\theta, z, \tau) + \frac{d\lambda_{\theta\theta}(T)}{dT} \frac{1}{r} \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial \theta} \Delta T(\theta, z, \tau) + \\ & + \lambda_{z\theta}(T) \frac{\partial \Delta T(\theta, z, \tau)}{\partial z} + \frac{\lambda_{\theta\theta}(T)}{r} \frac{\partial \Delta T(\theta, z, \tau)}{\partial \theta} = 0, \end{aligned} \quad (2.48)$$

$$z \in [0; l_z], \theta = \pi, \tau > 0;$$

$$\begin{aligned} & - \left[\frac{d\lambda_{zz}(T)}{dT} \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial z} \Delta T(\theta, z, \tau) + \frac{d\lambda_{z\theta}(T)}{dT} \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{r \partial \theta} \Delta T(\theta, z, \tau) + \right. \\ & \left. + \lambda_{zz}(T) \frac{\partial \Delta T(\theta, z, \tau)}{\partial z} + \lambda_{z\theta}(T) \frac{\partial \Delta T(\theta, z, \tau)}{r \partial \theta} \right] = 0, \end{aligned} \quad (2.49)$$

$$z = 0, \theta \in [0; \pi], \tau > 0;$$

$$\begin{aligned} & \frac{d\lambda_{zz}(T)}{dT} \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial z} \Delta T(\theta, z, \tau) + \frac{d\lambda_{z\theta}(T)}{dT} \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{r \partial \theta} \Delta T(\theta, z, \tau) + \\ & + \lambda_{zz}(T) \frac{\partial \Delta T(\theta, z, \tau)}{\partial z} + \lambda_{z\theta}(T) \frac{\partial \Delta T(\theta, z, \tau)}{r \partial \theta} \\ & = -4\varepsilon\sigma T^3 \Delta T(\theta, z, \tau) - \alpha_k(T) \Delta T(\theta, z, \tau) - \\ & - \frac{d\alpha_k(T)}{dT} \Delta T(\theta, z, \tau), \end{aligned} \quad (2.50)$$

$$z = l_z, \theta \in [0; \pi], \tau > 0.$$

При возмущении параметров искомым функций обобщённый функционал L (функционал Лагранжа) получит вариацию ΔL

$$\Delta L = \delta L + I_1. \quad (2.51)$$

При решении методом регуляризации А. Н. Тихонова

$$\Delta L = \delta L + I_1 + I_\gamma. \quad (2.52)$$

Выражение для линейной части приращения функционала невязки имеет вид:

$$\delta L(r, \theta, \tau) = \int_0^{\tau_{\max}} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K [T(z_j, \theta_k, \tau) - \tilde{T}] \Delta T(\theta, z, \tau) d\tau. \quad (2.53)$$

Выражение I_1 получено таким образом, что в него вход

$$\begin{aligned}
I_1(\theta, z, \tau) = & \int_0^{\tau_{\max}} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K (\Psi(z_j, \theta_k, \tau) \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} [\lambda_{\theta\theta}(T)] \frac{\partial \Delta T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial \theta} + \right. \\
& \left. + \frac{d\lambda_{\theta\theta}(T)}{dT} \frac{\partial T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial \theta} \Delta T(z_j, \theta_k, \tau) + \right. \\
& \left. + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left[\lambda_{z\theta}(T) \frac{\partial \Delta T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial \theta} + \frac{d\lambda_{z\theta}(T)}{dT} \frac{\partial T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial \theta} \Delta T(z_j, \theta_k, \tau) \right] + \right. \\
& \left. \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_{zz}(T) \frac{\partial \Delta T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial z} + \frac{d\lambda_{zz}(T)}{dT} \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial z} \Delta T(z_j, \theta_k, \tau) \right) - \right. \\
& \left. - C(T) \frac{\partial \Delta T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial \tau} \right) d\tau; \tag{2.55}
\end{aligned}$$

$$I_\gamma = \Delta\gamma[\lambda_m^{zz} + \lambda_m^{\theta z} + \lambda_m^{\theta\theta}]d\tau. \tag{2.56}$$

Таким образом запишем новый вид вариации функционала

$$\begin{aligned}
\delta L = & \int_0^{\tau_{\max}} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K [T(z_j, \theta_k, \tau) - \tilde{T}] \Delta T(z_j, \theta_k, \tau) + \\
& + \int_0^{\tau_{\max}} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K (\Psi(z_j, \theta_k, \tau) \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\lambda_{\theta\theta}(T) \frac{\partial \Delta T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial \theta} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{d\lambda_{\theta\theta}(T)}{dT} \frac{\partial T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial \theta} \Delta T(z_j, \theta_k, \tau) \right] \right. \\
& \left. + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left[\lambda_{z\theta}(T) \frac{\partial \Delta T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial \theta} + \frac{d\lambda_{z\theta}(T)}{dT} \frac{\partial T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial \theta} \Delta T(z_j, \theta_k, \tau) \right] + \right. \\
& \left. \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_{zz}(T) \frac{\partial \Delta T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial z} + \frac{d\lambda_{zz}(T)}{dT} \frac{\partial T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial z} \Delta T(z_j, \theta_k, \tau) \right) - \right. \\
& \left. - C(T) \frac{\partial \Delta T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial \tau} \right) d\tau. \tag{2.57}
\end{aligned}$$

При решении задачи методом Тихонова

$$\delta L = \int_0^{\tau_{\max}} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K ([T(z_j, \theta_k, \tau) - \tilde{T}] \Delta T(z_j, \theta_k, \tau) +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^{\tau_{\max}} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K (\Psi(z_j, \theta_k, \tau) \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\lambda_{\theta\theta}(T) \frac{\partial \Delta T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial \theta} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{d\lambda_{\theta\theta}(T)}{dT} \frac{\partial T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial \theta} \Delta T(z_j, \theta_k, \tau) \right] \right) \\
& + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left[\lambda_{z\theta}(T) \frac{\partial \Delta T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial \theta} + \frac{d\lambda_{z\theta}(T)}{dT} \frac{\partial T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial \theta} \Delta T(z_j, \theta_k, \tau) \right] + \\
& \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_{zz}(T) \frac{\partial \Delta T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial z} + \frac{d\lambda_{zz}(T)}{dT} \frac{\partial T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial z} \Delta T(z_j, \theta_k, \tau) \right) - \\
& - C(T) \frac{\partial \Delta T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial \tau} + \Delta \gamma [\lambda_m^{zz} + \lambda_m^{\theta z} + \lambda_m^{\theta\theta}] d\tau. \tag{2.58}
\end{aligned}$$

Исходя из условия глобального минимума функционала можно выразить множитель Лагранжа

$$\Psi(z_j, \theta_k, \tau) = \frac{[T(z_j, \theta_k, \tau) - \tilde{T}] \Delta T(z_j, \theta_k, \tau)}{\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\lambda_{\theta\theta}(T) \frac{\partial \Delta T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial \theta} \right] + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left[\lambda_{z\theta}(T) \frac{\partial \Delta T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial \theta} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_{zz}(T) \frac{\partial \Delta T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial z} \right)}.$$

Или при решении задачи методом Тихонова

$$\begin{aligned}
& \Psi(z_j, \theta_k, \tau) \\
& = \frac{[T(z_j, \theta_k, \tau) - \tilde{T}] \Delta T(z_j, \theta_k, \tau) + \Delta \gamma [\lambda_m^{zz} + \lambda_m^{\theta z} + \lambda_m^{\theta\theta}]}{\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\lambda_{\theta\theta}(T) \frac{\partial \Delta T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial \theta} \right] + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left[\lambda_{z\theta}(T) \frac{\partial \Delta T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial \theta} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_{zz}(T) \frac{\partial \Delta T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial z} \right)}.
\end{aligned}$$

2.7 Компоненты градиентов теплофизических параметров

Для получения формулы градиента целевой функции преобразуем выражение для $\delta L(r, \theta, \tau)$. Линейную часть приращения целевого функционала, то есть выражение (2.57) представим в виде:

$$\sum_{m=1}^M \frac{\partial \delta I}{\partial \lambda_m^{zz}} \Delta \lambda_m^{zz} + \sum_{m=1}^M \frac{\partial \delta I}{\partial \lambda_m^{\theta z}} \Delta \lambda_m^{\theta z} + \sum_{m=1}^M \frac{\partial \delta I}{\partial \lambda_m^{\theta\theta}} \Delta \lambda_m^{\theta\theta}, \tag{2.59}$$

который соответствует трактовке градиента функционала в данном конкретном случае (в данной задаче). Второе слагаемое в выражении для δL представим несколько иначе, чем в соотношении (2.57). Для этого воспользуемся приведёнными выше выражениями для возмущённых значений

искомых функций, то есть выражениями для $\lambda_m^{zz}(T + \Delta T)$, $\lambda_m^{z\theta}(T + \Delta T)$, $\lambda_m^{\theta\theta}(T + \Delta T)$.

Другой вид возмущённого уравнения теплопроводности при изменении параметров на величину Δ будет иметь вид

Первое слагаемое

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\sum_{m=1}^M (\lambda_m^{zz} + \Delta\lambda_m^{zz})(N_m(T) + \frac{N_m(T)}{dT} \Delta T) \frac{\partial(T(\theta, z, \tau) + \Delta T(\theta, z, \tau))}{\partial z} \right)$$

Третье слагаемое

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sum_{m=1}^M (\lambda_m^{\theta\theta} + \Delta\lambda_m^{\theta\theta})(N_m(T) + \frac{N_m(T)}{dT} \Delta T) \frac{\partial(T(\theta, z, \tau) + \Delta T(\theta, z, \tau))}{\partial \theta} \right)$$

Второе слагаемое в левой части

$$\frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left(\sum_{m=1}^M (\lambda_m^{z\theta} + \Delta\lambda_m^{z\theta})(N_m(T) + \frac{N_m(T)}{dT} \Delta T) \frac{\partial(T(\theta, z, \tau) + \Delta T(\theta, z, \tau))}{\partial \theta} \right)$$

Далее, как и раньше вычтем из возмущённого уравнения теплопроводности невозмущённое, чтобы получить уравнение, определяющее поле приращения температур при возмущении параметров на величину Δ .

Первое слагаемое

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial z} \left(\sum_{m=1}^M (\lambda_m^{zz} + \Delta\lambda_m^{zz})(N_m(T) + \frac{N_m(T)}{dT} \Delta T) \frac{\partial(T(\theta, z, \tau) + \Delta T(\theta, z, \tau))}{\partial z} \right) - \\ & \frac{\partial}{\partial z} \left(\sum_{m=1}^M \lambda_m^{zz} N_m(T) \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial z} \right) = \\ & = \frac{\partial}{\partial z} \left(\sum_{m=1}^M \Delta\lambda_m^{zz} (N_m(T) + \frac{N_m(T)}{dT} \Delta T) \frac{\partial(T(\theta, z, \tau) + \Delta T(\theta, z, \tau))}{\partial z} \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left(\sum_{m=1}^M \Delta\lambda_m^{zz} N_m(T) \frac{\partial \Delta T(\theta, z, \tau)}{\partial z} + \frac{N_m(T)}{dT} \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial z} \Delta T(\theta, z, \tau) \right). \quad (2.60) \end{aligned}$$

Третье слагаемое

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sum_{m=1}^M (\lambda_m^{\theta\theta} + \Delta\lambda_m^{\theta\theta})(N_m(T) + \frac{N_m(T)}{dT} \Delta T) \frac{\partial(T(\theta, z, \tau) + \Delta T(\theta, z, \tau))}{\partial \theta} \right) - \\ & - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sum_{m=1}^M \lambda_m^{\theta\theta} N_m(T) \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial \theta} \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sum_{m=1}^M \Delta \lambda_m^{\theta\theta} \left(N_m(T) + \frac{N_m(T)}{dT} \Delta T \right) \frac{\partial (T(\theta, z, \tau) + \Delta T(\theta, z, \tau))}{\partial \theta} \right) + \\
&\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sum_{m=1}^M \lambda_m^{\theta\theta} \left(N_m(T) \frac{\partial \Delta T(\theta, z, \tau)}{\partial \theta} + \frac{N_m(T)}{dT} \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial \theta} \Delta T(\theta, z, \tau) \right) \right). \quad (2.61)
\end{aligned}$$

Для второго слагаемого

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left(\sum_{m=1}^M (\lambda_m^{z\theta} + \Delta \lambda_m^{z\theta}) \left(N_m(T) + \frac{N_m(T)}{dT} \Delta T \right) \frac{\partial (T(\theta, z, \tau) + \Delta T(\theta, z, \tau))}{\partial \theta} \right) - \\
&\quad - \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left(\sum_{m=1}^M \lambda_m^{z\theta} N_m(T) \frac{\partial (T(\theta, z, \tau) + \Delta T(\theta, z, \tau))}{\partial \theta} \right) = \\
&= \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left(\sum_{m=1}^M \Delta \lambda_m^{z\theta} \left(N_m(T) + \frac{N_m(T)}{dT} \Delta T \right) \frac{\partial (T(\theta, z, \tau) + \Delta T(\theta, z, \tau))}{\partial \theta} \right) + \\
&\frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left(\sum_{m=1}^M \lambda_m^{z\theta} \left(N_m(T) \frac{\partial \Delta T(\theta, z, \tau)}{\partial \theta} + \frac{N_m(T)}{dT} \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial \theta} \Delta T \right) \right). \quad (2.62)
\end{aligned}$$

Таким образом, получаем уравнение теплопроводности относительно приращения теплофизических параметров

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sum_{m=1}^M \Delta \lambda_m^{\theta\theta} \left(N_m(T) + \frac{N_m(T)}{dT} \Delta T \right) \frac{\partial (T(\theta, z, \tau) + \Delta T(\theta, z, \tau))}{\partial \theta} \right) + \\
&\quad + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sum_{m=1}^M \lambda_m^{\theta\theta} \left(N_m(T) \frac{\partial \Delta T(\theta, z, \tau)}{\partial \theta} + \frac{N_m(T)}{dT} \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial \theta} \Delta T \right) \right) + \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial z} \left(\sum_{m=1}^M \Delta \lambda_m^{zz} \left(N_m(T) + \frac{N_m(T)}{dT} \Delta T \right) \frac{\partial (T(\theta, z, \tau) + \Delta T(\theta, z, \tau))}{\partial z} \right) + \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial z} \left(\sum_{m=1}^M \Delta \lambda_m^{zz} \left(N_m(T) \frac{\partial \Delta T(\theta, z, \tau)}{\partial z} + \frac{N_m(T)}{dT} \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial z} \Delta T \right) \right) + \\
&\quad + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left(\sum_{m=1}^M \Delta \lambda_m^{z\theta} \left(N_m(T) + \frac{N_m(T)}{dT} \Delta T \right) \frac{\partial (T(\theta, z, \tau) + \Delta T(\theta, z, \tau))}{\partial \theta} \right) + \\
&\quad + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left(\sum_{m=1}^M \lambda_m^{z\theta} \left(N_m(T) \frac{\partial \Delta T(\theta, z, \tau)}{\partial \theta} + \frac{N_m(T)}{dT} \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial \theta} \Delta T \right) \right) =
\end{aligned}$$

$$= \frac{\partial C(T)}{\partial T} \Delta T(\theta, z, \tau). \quad (2.63)$$

Для граничных условий будем иметь следующие выражения.

Перепишем наш функционал в немного другом виде

$$\begin{aligned} \Delta L(r, \theta, \tau) = & \sum_{m=1}^M \frac{\partial \delta I}{\partial \lambda_m^{zz}} \Delta \lambda_m^{zz} + \sum_{m=1}^M \frac{\partial \delta I}{\partial \lambda_m^{\theta z}} \Delta \lambda_m^{\theta z} + \sum_{m=1}^M \frac{\partial \delta I}{\partial \lambda_m^{\theta \theta}} \Delta \lambda_m^{\theta \theta} + \\ & \int_0^{\tau_{\max}} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \{ (\Psi(z_j, \theta_k, \tau) \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sum_{m=1}^M \Delta \lambda_m^{\theta \theta} (N_m(T) \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \frac{dN_m(T)}{dT} \Delta T) \frac{\partial (T(z_j, \theta_k, \tau) + \Delta T(z_j, \theta_k, \tau))}{\partial \theta} \right) \right] \right. \\ & \left. + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sum_{m=1}^M \lambda_m^{\theta \theta} (N_m(T) \frac{\partial \Delta T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial \theta} + \frac{N_m(T)}{dT} \frac{\partial T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial \theta} \Delta T) \right) \right) + \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial z} \left(\sum_{m=1}^M \Delta \lambda_m^{zz} (N_m(T) + \frac{N_m(T)}{dT} \Delta T) \frac{\partial (T(z_j, \theta_k, \tau) + \Delta T(z_j, \theta_k, \tau))}{\partial z} \right) \right) + \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial z} \left(\sum_{m=1}^M \Delta \lambda_m^{zz} (N_m(T) \frac{\partial \Delta T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial z} + \frac{N_m(T)}{dT} \frac{\partial T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial z} \Delta T) \right) \right) + \\ & \left. + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left(\sum_{m=1}^M \Delta \lambda_m^{z\theta} \left(N_m(T) + \frac{N_m(T)}{dT} \Delta T \right) \frac{\partial (T(z_j, \theta_k, \tau) + \Delta T(z_j, \theta_k, \tau))}{\partial \theta} \right) \right) + \\ & \left. + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left(\sum_{m=1}^M \lambda_m^{z\theta} \left(N_m(T) \frac{\partial \Delta T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial \theta} + \frac{N_m(T)}{dT} \frac{\partial T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial \theta} \Delta T \right) \right) \right) - \\ & \left. - \frac{\partial C(T)}{\partial T} \Delta T(z_j, \theta_k, \tau) + \Delta \gamma [\lambda_m^{zz} + \lambda_m^{\theta z} + \lambda_m^{\theta \theta}] \right\} d\tau. \quad (2.64) \end{aligned}$$

При использовании метода А.Н. Тихонова

$$\Delta L(r, \theta, \tau) = \sum_{m=1}^M \frac{\partial \delta I}{\partial \lambda_m^{zz}} \Delta \lambda_m^{zz} + \sum_{m=1}^M \frac{\partial \delta I}{\partial \lambda_m^{\theta z}} \Delta \lambda_m^{\theta z} + \sum_{m=1}^M \frac{\partial \delta I}{\partial \lambda_m^{\theta \theta}} \Delta \lambda_m^{\theta \theta} +$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\tau_{\max}} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \{(\psi(z_j, \theta_k, \tau) \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sum_{m=1}^M \Delta \lambda_m^{\theta\theta} \left(N_m(T) \right. \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. \left. + \frac{dN_m(T)}{dT} \Delta T \right) \frac{\partial \left(T(z_j, \theta_k, \tau) + \Delta T(z_j, \theta_k, \tau) \right)}{\partial \theta} \right) \right] + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sum_{m=1}^M \lambda_m^{\theta\theta} (N_m(T)) \frac{\partial \Delta T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial \theta} + \frac{N_m(T)}{dT} \frac{\partial T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial \theta} \Delta T \right) \right) + \\
& \quad \left. + \frac{\partial}{\partial z} \left(\sum_{m=1}^M \Delta \lambda_m^{zz} (N_m(T) + \frac{N_m(T)}{dT} \Delta T) \frac{\partial \left(T(z_j, \theta_k, \tau) + \Delta T(z_j, \theta_k, \tau) \right)}{\partial z} \right) \right) + \\
& \quad \left. + \frac{\partial}{\partial z} \left(\sum_{m=1}^M \Delta \lambda_m^{zz} (N_m(T)) \frac{\partial \Delta T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial z} + \frac{N_m(T)}{dT} \frac{\partial T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial z} \Delta T \right) \right) + \\
& \quad \left. + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left(\sum_{m=1}^M \Delta \lambda_m^{z\theta} \left(N_m(T) + \frac{N_m(T)}{dT} \Delta T \right) \frac{\partial \left(T(z_j, \theta_k, \tau) + \Delta T(z_j, \theta_k, \tau) \right)}{\partial \theta} \right) \right) + \\
& \quad \left. + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left(\sum_{m=1}^M \lambda_m^{z\theta} \left(N_m(T) \frac{\partial \Delta T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial \theta} + \frac{N_m(T)}{dT} \frac{\partial T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial \theta} \Delta T \right) \right) \right) - \\
& \quad - \frac{\partial C(T)}{\partial T} \Delta T(z_j, \theta_k, \tau) + \Delta \gamma [\lambda_m^{zz} + \lambda_m^{\theta z} + \lambda_m^{\theta\theta}] \} d\tau. \tag{2.65}
\end{aligned}$$

Выражение для первой компоненты тензора теплопроводности

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \delta L}{\partial \lambda_m^{zz}} \\
& = - \int_0^{\tau_{\max}} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \psi(z_j, \theta_k, \tau) \frac{\partial}{\partial z} \left[\sum_{m=1}^M N_m(T) \frac{\partial \left(T(z_j, \theta_k, \tau) + \Delta T(z_j, \theta_k, \tau) \right)}{\partial z} \right] d\tau. \tag{2.66}
\end{aligned}$$

При использовании метода А.Н. Тихонова

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \delta L}{\partial \lambda_m^{zz}} = - \int_0^{\tau_{\max}} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \psi(\theta, z, \tau) \left[\frac{\partial}{\partial z} \left[\sum_{m=1}^M N_m(T) \frac{\partial \left(T(z_j, \theta_k, \tau) + \Delta T(z_j, \theta_k, \tau) \right)}{\partial z} \right] \right. \\
& \quad \left. + \Delta \gamma \lambda_m^{zz} \right] d\tau \tag{2.67}
\end{aligned}$$

Выражение для второй компоненты тензора теплопроводности

$$\frac{\partial \delta L}{\partial \lambda_m^{\theta z}} = - \int_0^{\tau_{max}} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \frac{\Psi(z_j, \theta_k, \tau)}{r^2 \partial \theta} \left(\sum_{m=1}^M N_m(T) \frac{\partial (T(z_j, \theta_k, \tau) + \Delta T(z_j, \theta_k, \tau))}{\partial \theta} \right) d\tau. \quad (2.68)$$

При использовании метода А.Н. Тихонова

$$\frac{\partial \delta L}{\partial \lambda_m^{\theta z}} = - \int_0^{\tau_{max}} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \frac{\Psi(z_j, \theta_k, \tau)}{r^2 \partial \theta} \left[\left(\sum_{m=1}^M N_m(T) \frac{\partial (T(z_j, \theta_k, \tau) + \Delta T(z_j, \theta_k, \tau))}{\partial \theta} \right) + \Delta \gamma \lambda_m^{\theta z} \right] d\tau; \quad (2.69)$$

Выражение для третьей компоненты тензора теплопроводности

$$\frac{\partial \delta L}{\partial \lambda_m^{\theta \theta}} = -2 \int_0^{\tau_{max}} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \frac{\Psi(z_j, \theta_k, \tau)}{r \partial z} \left(\sum_{m=1}^M N_m(T) \frac{\partial (T(z_j, \theta_k, \tau) + \Delta T(z_j, \theta_k, \tau))}{\partial \theta} \right) d\tau. \quad (2.70)$$

При использовании метода А.Н. Тихонова

$$\frac{\partial \delta L}{\partial \lambda_m^{\theta \theta}} = -2 \int_0^{\tau_{max}} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \frac{\Psi(z_j, \theta_k, \tau)}{r \partial z} \left[\left(\sum_{m=1}^M N_m(T) \frac{\partial (T(z_j, \theta_k, \tau) + \Delta T(z_j, \theta_k, \tau))}{\partial \theta} \right) + \Delta \gamma \lambda_m^{\theta \theta} \right] d\tau. \quad (2.71)$$

2.8 Выбор шага спуска

Оценочную формулу для определения оптимальной глубины (шага) спуска в направлении, определяемом методом сопряжённых градиентов, можно получить, если воспользоваться известным подходом, основанным на линеаризации зависимости целевой функции от шага спуска в направлении антиградиента, и нахождении минимума этой линеаризованной зависимости [77]. Для реализации такого подхода необходимо решить задачу о приращении поля температур, но в несколько другой постановке чем та постановка, которая рассматривалась выше в обеспечение определения множителей Лагранжа и получения формулы для градиента целевой функции. В данном случае каждому параметру искомым функций даются возмущения,

пропорциональные соответствующим компонентам градиента функционала. Обозначим этот коэффициент пропорциональности через α_0 . Тогда малые возмущения, даваемые обобщенному вектору теплопроводности и объемной теплоемкости при решении задачи о приращении поля температур, определяются следующим выражением.

Для обобщенного вектора теплопроводности

$$\Delta \vec{\lambda} = \alpha_0 L'(\vec{\lambda}) \quad (2.72)$$

важным является вопрос о выборе коэффициента α_0 , обеспечивающего малость. Пусть эта малость определяется числом ω , составляющим малую долю от модуля вектора теплопроводности $\vec{\lambda}$ и объемной теплоемкости. Тогда, учитывая соотношения, получим

$$\alpha_0 = \frac{\omega \vec{\lambda}}{|L'(\vec{\lambda})|}. \quad (2.73)$$

Чтобы получить оценочную формулу для α^s [78 – 81] введём в рассмотрение скалярную функцию F аргумента α^s , характеризующую изменение величины целевого функционала $L'(\vec{\lambda})$ в направлении антиградиента в точке $\vec{\lambda}$

$$F(\alpha^s) = L(\vec{\lambda} - \alpha^s L'(\vec{\lambda})). \quad (2.74)$$

Будем считать α^s малой величиной, квадратом и высшими степенями которой можно пренебречь. Тогда используя разложение функции в ряд Тейлора по степеням $\alpha^s L'(\vec{\lambda})$ и пренебрегая нелинейными членами в этом разложении, получим

$$F(\alpha^s) = \int_0^{\tau_{max}} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \left[T(z_j, \theta_k, \tau) + \frac{\partial T(\vec{\lambda})}{\partial \vec{\lambda}} \alpha^s L'(\vec{\lambda}) - \tilde{T} \right]^2 d\tau. \quad (2.75)$$

Величины частных производных $\frac{\partial T(\vec{\lambda})}{\partial \vec{\lambda}}$ заменим их конечно-разностными аналогами

$$\frac{\partial T(\vec{\lambda}, C)}{\partial \vec{\lambda}} = \frac{\Delta T(r, \theta, \tau)}{\alpha_0 L'(\vec{\lambda}, C)}, \quad (2.76)$$

где $\Delta T(r, \theta, \tau)$ – решение задачи для приращения температуры.

Дифференцируя полученное выражение для $F(\alpha^S)$ по α^S и приравнявая производную к 0, а также разрешая его относительно α^S , получим следующее выражение для оценки глубины спуска в направлении антиградиента целевого функционала

$$\alpha^S = \int_0^{\tau_{max}} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K [T(z_j, \theta_k, \tau) - \tilde{T}] \frac{\alpha_0}{\Delta T(z_j, \theta_k, \tau)} d\tau. \quad (2.77)$$

2.9 Алгоритм метода сопряжённых градиентов

В качестве численного метода минимизации целевого функционала применим метод сопряжённых градиентов, как наиболее точного метода первого порядка точности, позволяющего достичь требуемой сходимости за минимальное число итераций.

Применительно к рассматриваемой задаче для обобщённого вектора теплопроводности имеем следующий итерационный алгоритм численного решения

$$\vec{\lambda}^{n+1} = \vec{\lambda}^n + \Delta \vec{\lambda}^{n+1}, \quad (2.78)$$

$$\text{где } -\Delta \vec{\lambda}^{n+1} = -\beta_k p^{(n)}. \quad (2.79)$$

Направление спуска определяется из следующих выражений:

$$\vec{p}^n = \text{grad}S(\vec{\lambda}^n) + \beta_n \vec{p}^{n-1}; \quad (2.80)$$

$$\beta_0 = 0, p^{(0)} = \text{grad}S(\lambda^{(0)}); \quad (2.81)$$

$$\beta_n = \frac{|\text{grad}S(\lambda^{(n)})|^2}{|\text{grad}S(\lambda^{(n-1)})|^2}. \quad (2.82)$$

Критерием останова итерационного процесса является выражение

$$|\text{grad}S(\lambda^{(0)})| = \sqrt{\left\{ \sum_{p=1}^3 \left[\frac{\partial S(\lambda^{(n)})}{\partial \lambda_p} \right]^2 \right\}} \leq \delta_{sum}. \quad (2.84)$$

Учитывая возможное существенное отличие друг от друга модулей векторов $\vec{\lambda}_{zz}, \vec{\lambda}_{z\theta}, \vec{\lambda}_{\theta\theta}$ и разительное отличие этих векторов от вектора C (в десятки – сотни тысяч раз), итерационный процесс по уточнению приближений этих векторов должен осуществляться для каждого вектора отдельно, например, поочерёдно. При реализации градиентных методов минимизации целевого функционала самыми важными моментами в этой реализации является вычисление градиента функционала S перед каждым уточнением вектора параметров (на каждой итерации) и определение глубины (шага) спуска в направлении вектора P , зависящем от значений градиента на данной и предыдущей итерациях.

Таким образом, получена методика идентификации компонент симметричного тензора теплопроводности, включающая следующую последовательность действий:

1. Решается «прямая» задача теплопереноса внутри выбранного ОИ в анизотропном приближении при выбранном начальном приближении вектора теплопроводности.
2. Составляется среднеквадратичный регуляризируемый функционал невязки между теоретическим и экспериментальным полем температур.
3. Выбирается регуляризирующий параметр в соответствии с выбранным методом регуляризации.
4. Решается задача оптимизации по поиску искомым характеристик в виде параметров, помноженных на их базисные функции, учитывающие их зависимость от температуры ОИ.
5. Если разница на двух соседних итерациях значений, полученных новых параметризованных характеристик по модулю меньше интегральной погрешности, то считается, что мы попали в точку глобального минимума, иначе необходимо выполнить пп. 1 – 5. ещё раз.

3 МОДЕРНИЗАЦИЯ ЧИСЛЕННОГО МЕТОДА ДЛЯ РЕАЛИЗАЦИИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ТЕПЛОПЕРЕНОСА ТЕПЛОВЫХ ПОТОКОВ В АНИЗОТРОПНЫХ ТВЁРДЫХ ТЕЛАХ

3.1 Численное решение поставленной задачи

Для численного решения прямой нелинейной задачи в анизотропной полосе будем использовать экономичный, абсолютно устойчивый конечно-разностный метод [82 – 84] переменных направлений с экстраполяцией (МПНЭ), изложенный в работе [9], с линеаризацией нелинейных коэффициентов по одному из следующих методов (усреднения приводятся в направлении пространственной переменной z ; в направлении переменной θ используются аналогичные соотношения).

Коэффициенты математической модели при решении краевых задач вычисляются путём линейной интерполяции таблично заданных функций, что существенно уменьшает время вычислений. Если исходные табличные данные задаются с большой дискретностью, предварительно осуществляется их интерполяция базисными функциями с целью построения последующей линейной интерполяции.

1) характеристики переноса вычисляются по распределению функции и на предыдущем временном слое, где они известны

$$\tilde{\lambda}_i^n \equiv \lambda^n(T_i^k); \tilde{\lambda}_i^n \equiv C^n(T_i^k);$$

2) приводится усреднение по характеристикам между двумя узлами i и $(i+1)$

$$\tilde{\lambda}_{i\pm 1/2}^n = \frac{1}{2} \left[\tilde{\lambda}^n(T_i^{k+1}) - \tilde{\lambda}^n \left(T_{i\pm \frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \right) \right], \quad (3.1)$$

где

$$\begin{aligned}\tilde{\lambda}^n(T_p^{k+1/2}) &= 2\lambda^n(T_p^k) - 2\lambda^n\left(T_p^{k-\frac{1}{2}}\right) + O(\tau^2), p = i, i \pm 1, n \\ &= zz, z\theta, \theta\theta;\end{aligned}\quad (3.2)$$

$$C_i^{k+1/2} = 2C(T_i^k) - C\left(T_i^{k-\frac{1}{2}}\right) + O(\tau^2); \quad (3.3)$$

3) приводится усреднение по функции и между двумя узлами i и $(i+1)$

$$C_i^{k+\frac{1}{2}} \frac{T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - T_{i,j}^k}{\frac{\tau}{2}} = \Lambda_{zz} T^{k+\frac{1}{2}} + 2\Lambda_{z\theta} T^{k+\frac{1}{2}} + \Lambda_{\theta\theta} T^{k+\frac{1}{2}}. \quad (3.4)$$

На сетках с шаблоном, представленным на рисунке 4, схема МПНЭ примет вид

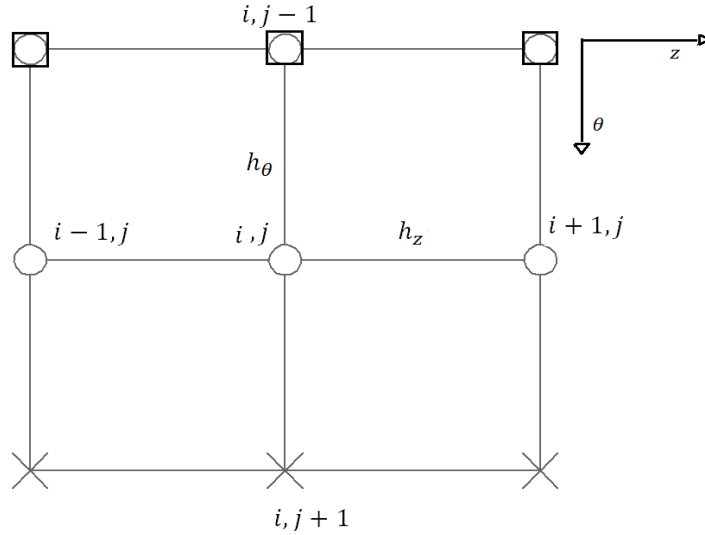


Рисунок 4 – Конечно-разностный шаблон МПНЭ

$$\begin{aligned}\Lambda_{zz} T^{k+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{h_z} \left(\frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i+1,j} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i,j}}{2} \frac{T_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} - T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}}{h_z} \right. \\ &\quad \left. - \frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i,j} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i-1,j}}{2} \frac{T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - T_{i-1,j}^{k+\frac{1}{2}}}{h_z} \right); \end{aligned}\quad (3.5)$$

$$\Lambda_{z\theta} \tilde{T}^{k+\frac{1}{2}} = \frac{2}{2rh_z} \left(\frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i+1,j+1} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i+1,j-1}}{2} \frac{\tilde{T}_{i+1,j+1}^{k+\frac{1}{2}} - T_{i+1,j-1}^{k+\frac{1}{2}}}{h_\theta} \right) - \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{2}{2rh_z} \left(\frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i-1,j+1} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i-1,j-1}}{2} \frac{\tilde{T}_{i-1,j+1}^{k+\frac{1}{2}} - T_{i-1,j-1}^{k+\frac{1}{2}}}{h_\theta} \right); \\
\Lambda_{\theta\theta} \tilde{T}^{k+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{r^2 h_\theta} \left(\frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,j+1} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,j}}{2} \frac{\tilde{T}_{i,j+1}^{k+\frac{1}{2}} - T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}}{h_\theta} \right. \\
& \quad \left. - \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,j} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,j-1}}{2} \frac{T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - T_{i,j-1}^{k+\frac{1}{2}}}{h_\theta} \right). \tag{3.7}
\end{aligned}$$

Аппроксимация конвективного теплового потока на предыдущем временном слое, где температура $T_{i,j}^k$ известна

$$q_{i,j}^k = \alpha_k(T_{i,j}^k) (T_{i,j}^{k+1/2} - T_c) = \alpha_k(T_{i,j}^k) T_{i,j}^{k+1/2} - T_{i,j}^{k+1/2} T_c, \tag{3.8}$$

$$\alpha_k(T_{i,j}^k) = Nu_l(T_{i,j}^k) \frac{\lambda_B(T_c)}{l_{\text{эф}}}. \tag{3.9}$$

Для ламинарного пограничного слоя

$$Nu_l = \frac{3}{4} \left(\frac{2Pr(T_c)}{5(1 + 2Pr(T_c)^{\frac{1}{2}} + 2Pr(T_c))} \right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{\beta r^3 (T_{i,j+1}^k - T_c)}{\nu(T_c)^2} Pr \right)^{\frac{1}{4}}; Re < 2300 \tag{3.10}$$

Для турбулентного пограничного слоя получаем

$$Nu_l = 0.17 \left(\left(\frac{g\beta r^3 (T_{i,j}^k - T_c)}{\nu(T_c)^2} \right) Pr \right)^{\frac{1}{4}} \text{ при } Re > 2300. \tag{3.11}$$

Для аппроксимации граничных условий со вторым порядком разложим значения составляющих векторов тепловых потоков на границах $z=0$, $z=l_z$, в окрестности этих границ в ряды Тейлора до вторых производных включительно, получим:

$$\lambda_{zz}(T) \frac{\partial T(z, \theta, \tau)}{\partial z} \Big|_{i,j+1}^{k+1/2} \quad (3.12)$$

$$= \lambda_{zz}(T) \frac{\partial T(z, \theta, \tau)}{\partial z} \Big|_{i,0} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_{zz}(T) \frac{\partial T(z, \theta, \tau)}{\partial z} \right) \frac{h_z}{2} + O(h_z^2)$$

$$\lambda_{zz}(T) \frac{\partial T(z, \theta, \tau)}{\partial z} \Big|_{i,j-1}^{k+1/2} \quad (3.13)$$

$$= \lambda_{zz}(T) \frac{\partial T(z, \theta, \tau)}{\partial z} \Big|_{i,j} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_{zz}(T) \frac{\partial T(z, \theta, \tau)}{\partial z} \right) \frac{h_z}{2} + O(h_z^2),$$

откуда с использованием дифференциального уравнения и конечно-разностной аппроксимации левых частей в последних соотношениях центральными разностями, находим:

$$\lambda_{zz}(T) \frac{\partial T(r, \theta, \tau)}{\partial z} \Big|_{i,0}^{k+1/2} = \lambda_{zz}(T) \frac{T_{i,1}^{k+1/2} - T_{i,0}^{k+1/2}}{2(\frac{h_z}{2})} + O\left(\frac{h_z^2}{4}\right) - \frac{h_z}{2} \left[C(T) \rho \frac{\partial T(z, \theta, \tau)}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_{zz}(T) \frac{\partial T(z, \theta, \tau)}{\partial z} \right) - \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda_{z\theta}(T) \frac{\partial T(z, \theta, \tau)}{\partial z} \right) \right] \Big|_{0,j}^{k+1/2} + O(h_z^2); \quad (3.14)$$

$$\lambda_{zz}(T) \frac{\partial T(z, \theta, \tau)}{\partial z} \Big|_{i,j}^{k+1} = \lambda_{zz}(T) \frac{T_{i,j}^{k+1/2} - T_{i,j}^{k+1/2}}{2(\frac{h_z}{2})} + O\left(\frac{h_z^2}{4}\right) - \frac{h_z}{2} \left[C(T) \rho \frac{\partial T(z, \theta, \tau)}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_{zz}(T) \frac{\partial T(z, \theta, \tau)}{\partial z} \right) - \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda_{z\theta}(T) \frac{\partial T(z, \theta, \tau)}{\partial z} \right) \right] \Big|_{0,j}^{k+1/2} + O(h_z^2) \quad (3.15)$$

Подставляя в краевые условия и аппроксимируя дифференциальные операторы, входящие в, получим для подсхемы

$$\begin{aligned}
& \frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i,1} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i,0} T_{i,1}^{k+\frac{1}{2}} - T_{i,0}^{k+\frac{1}{2}}}{2} + \frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i+1,0} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i-1,0} \tilde{T}_{i,1}^{k+\frac{1}{2}} + \tilde{T}_{i,0}^{k+\frac{1}{2}}}{2r_i} \frac{2(\frac{h_z}{2})}{2(\frac{h_z}{2})} \\
& \frac{h_z}{2} \left[\tilde{C} \frac{T_{i,0}^{k+\frac{1}{2}} - T_{i,0}^k}{\frac{\tau}{2}} - \frac{1}{h_\theta} \left(\frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i+1,0} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,0} T_{i+1,0}^{k+\frac{1}{2}} - T_{i,0}^{k+\frac{1}{2}}}{2} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,0} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i-1,0} T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - T_{i-1,0}^{k+\frac{1}{2}}}{2} \frac{1}{h_\theta} \right) - \frac{2}{2rh_\theta} \left(\frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i,1} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i,0} T_{i+1,1}^{k+\frac{1}{2}} - T_{i+1,0}^{k+\frac{1}{2}}}{2} - \frac{2h_z}{2} \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i-1,1} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i-1,0} T_{i+1,1}^{k+\frac{1}{2}} - T_{i+1,0}^{k+\frac{1}{2}}}{2} \frac{1}{\frac{2h_z}{2}} \right) \right] + O(h_z^2 + h_\theta^2) = \\
& = \sum_{i=1}^N q^{\text{пад}} - (\varepsilon_{i,j} \sigma T_{i,0}^{4k} + 4\varepsilon_{i,j} \sigma T_{i,j}^{3k} \times \\
& \times \left(T_{i,0}^{k+\frac{1}{2}} - T_{i,0}^k \right) - \alpha_\kappa (T_{i,j}^k) T_{i,0}^{k+\frac{1}{2}} - T_{i,0}^{k+\frac{1}{2}} T_c; \quad i = 0, \dots, I, j = J; \tag{3.16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i,j} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i,j-1} T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - T_{i,j-1}^{k+\frac{1}{2}}}{2} \frac{2(\frac{h_z}{2})}{2(\frac{h_z}{2})} - \frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i+1,j} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i-1,j} \tilde{T}_{i,1} + \tilde{T}_{i,0}}{2r_i} \frac{2(\frac{h_\theta}{2})}{2(\frac{h_\theta}{2})} \\
& - \frac{h_z}{2} \left[\tilde{C} \frac{T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - T_{i,j}^k}{\frac{\tau}{2}} - \frac{1}{h_\theta} \left(\frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i+1,j} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,j} T_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} - T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}}{2} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,j} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i-1,j} T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - T_{i-1,j}^{k+\frac{1}{2}}}{2} \frac{1}{h_\theta} \right) - \frac{2}{2rh_\theta} \left(\frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i+1,j} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i+1,j-1} T_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} - T_{i+1,j-1}^{k+\frac{1}{2}}}{2} - \frac{2h_z}{2} \right. \right.
\end{aligned}$$

$$-\frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i-1,J} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i-1,J-1} \frac{T_{i-1,J}^{k+\frac{1}{2}} - T_{i-1,J-1}^{k+\frac{1}{2}}}{2h_z}}{2} + O(h_z^2 + h_\theta^2 + \tau) = 0; \quad (3.17)$$

$$i = 0, \dots, I, j = 0.$$

Таким образом, конечно-разностная задача сводится к системе линейных алгебраических дифференциальных уравнений (СЛАУ) с трёхдиагональными матрицами (порядок аппроксимации отброшен) [85 – 88]

$$b_1 T_1^{k+1/2} - c_1 T_2^{k+1/2} = d_1; j = 1, k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.18)$$

$$a_j T_{j-1}^{k+1/2} + b_j T_i^{k+1/2} - c_j T_{j+1}^{k+1/2} = d_j \quad (3.19)$$

$$a_{j-1} T_{j-2}^{k+1/2} + b_{j-1} T_{j-1}^{k+1/2} = d_{j-1}, j = J - 1, k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.20)$$

Коэффициенты СЛАУ определяются выражениями:

$$a_j = \frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i,j} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i-1,j}}{2h_z^2}; \quad (3.21)$$

$$b_j = -\frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i+1,j} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i,j}}{2h_z^2} + \frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i,j} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i-1,j}}{2h_z^2} - \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,j+1} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,j}}{2r^2 h_\theta^2} + \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,j} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,j-1}}{2r^2 h_\theta^2}; \quad (3.22)$$

$$c_j = -\frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i,j} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i-1,j}}{2h_z^2}; \quad (3.33)$$

$$d_j = C_j^{k+1} \frac{T_{i,j}^k}{\tau}. \quad (3.34)$$

СЛАУ в количестве $J-1$ уравнений имеет трёхдиагональный вид, причём $a_1 = 0$ и $c_{J-1} = 0$.

Решение СЛАУ определяются в форме:

$$T_j^{k+\frac{1}{2}} = A_j T_{j+1}^{k+\frac{1}{2}} + B_j, j = 1, J - 1; \quad (3.17)$$

$$T_0^{k+\frac{1}{2}} = f(q_i); T_J^{k+\frac{1}{2}} = f(q_I), \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ \sum_{i=1}^N q^{\text{пад}} + (\varepsilon_{i,j} \sigma T_{i,0}^{4k} + 4\varepsilon_{i,j} \sigma T_{i,j,0}^{3k}) T_{i,0}^k - \alpha_{\kappa}(T_{i,j}^k) T_c - \frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i,1} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i,0}}{2} \frac{T_{i,1}^{k+\frac{1}{2}}}{2 \left(\frac{h_z}{2}\right)} - \right. \\
& - \frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i+1,0} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i-1,0}}{2r} \frac{T_{i,1}^{k+\frac{1}{2}}}{2 \left(\frac{h_{\theta}}{2}\right)} + \frac{h_z}{2} \left[-\tilde{C} \frac{T_{i,0}^k}{\frac{\tau}{2}} - \frac{1}{h_{\theta}} \left(\frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i+1,0} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,0}}{2} \frac{T_{i+1,0}^{k+\frac{1}{2}}}{h_{\theta}} \right. \right. \\
& - \\
& \left. \left. + \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,0} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i-1,0}}{2} \frac{T_{i,0}^{k+\frac{1}{2}}}{h_{\theta}} - \frac{2}{2rh_{\theta}} \left(\frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i+1,1} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i,0}}{2} \frac{T_{i+1,1}^{k+\frac{1}{2}} - T_{i+1,0}^{k+\frac{1}{2}}}{\frac{2h_z}{2}} - \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - \frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i-1,1} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i-1,0}}{2} \frac{T_{i-1,1}^{k+\frac{1}{2}} - T_{i-1,0}^{k+\frac{1}{2}}}{\frac{2h_z}{2}} \right) \right] \right\} / \\
& / \left(-\frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i,1} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i,0}}{4 \left(\frac{h_z}{2}\right)} + \frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i+1,0} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i-1,0}}{4r \left(\frac{h_{\theta}}{2}\right)} - \frac{h_z}{2} \left[\frac{\tilde{C}}{\frac{\tau}{2}} \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{h_{\theta}} \left(-\frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i+1,0} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,0}}{2} + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,0} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i-1,0}}{2} \frac{T_{i,0}^{k+\frac{1}{2}}}{h_{\theta}} \right) \right] + \alpha_{\kappa}(T_{i,j}^k) + \varepsilon_{i,j} \sigma T_{i,0}^{4k} + 4\varepsilon_{i,j} \sigma T_{i,j,0}^{3k} \right); \tag{3.24}
\end{aligned}$$

$$T_0^{k+\frac{1}{2}} = A_0 T_0^{k+\frac{1}{2}} + B_0. \tag{3.25}$$

Откуда получаем явные зависимости для A_0 и B_0 :

$$\begin{aligned}
A_0 = & \left[-\frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i,1} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i,0}}{4 \left(\frac{h_z}{2}\right)} - \frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i+1,0} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i-1,0}}{4r \left(\frac{h_{\theta}}{2}\right)} \right] / \left(-\frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i,1} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i,0}}{4 \left(\frac{h_z}{2}\right)} + \right. \\
& \left. + \frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i+1,0} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i-1,0}}{4r \left(\frac{h_{\theta}}{2}\right)} - \frac{h_z}{2} \left[\frac{\tilde{C}}{\frac{\tau}{2}} - \frac{1}{h_{\theta}} \left(-\frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i+1,0} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,0}}{2} + \right. \right. \right.
\end{aligned}$$

$$+ \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,0} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i-1,0} T_{i,0}^{k+\frac{1}{2}}}{2} \Big] + \alpha_{\kappa}(T_{i,j}^k) + \varepsilon_{i,j} \sigma T_{i,0}^{4k} + 4\varepsilon_{i,j} \sigma T_{i,j,0}^{3k}; \quad (3.26)$$

$$B_0 = \left[\sum_{i=1}^N q^{\text{над}} + (\varepsilon_{i,j} \sigma T_{i,0}^{4k} + 4\varepsilon_{i,j} \sigma T_{i,j,0}^{3k}) T_{i,0}^k - \alpha_{\kappa}(T_{i,j}^k) T_c \right] + \frac{h_z}{2} \left[-\tilde{C} \frac{T_{i,0}^k}{\tau} \right. \\ \left. - \frac{1}{h_{\theta}} \left(\frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i+1,0} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,0} T_{i+1,0}^{k+\frac{1}{2}}}{2} - \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,0} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i-1,0} T_{i,0}^{k+\frac{1}{2}}}{2} \frac{1}{h_{\theta}} - \frac{2}{2rh_{\theta}} \left(\frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i+1,1} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i,0} T_{i+1,1}^{k+\frac{1}{2}} - T_{i+1,0}^{k+\frac{1}{2}}}{2} - \frac{T_{i+1,0}^{k+\frac{1}{2}}}{\frac{2h_z}{2}} \right. \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i-1,1} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i-1,0} T_{i-1,1}^{k+\frac{1}{2}} - T_{i-1,0}^{k+\frac{1}{2}}}{2} \frac{1}{\frac{2h_z}{2}} \right) \right] / \left(-\frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i,1} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i,0}}{4 \left(\frac{h_z}{2} \right)} + \right. \\ \left. + \frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i+1,0} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i-1,0}}{4r \left(\frac{h_{\theta}}{2} \right)} - \frac{h_z}{2} \left[\frac{\tilde{C}}{\tau} - \frac{1}{h_{\theta}} \left(-\frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i+1,0} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,0}}{2} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,0} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i-1,0} T_{i,0}^{k+\frac{1}{2}}}{2} \right) \right] + \alpha_{\kappa}(T_{i,j}^k) + \varepsilon_{i,j} \sigma T_{i,0}^{4k} + 4\varepsilon_{i,j} \sigma T_{i,j,0}^{3k}. \quad (3.27)$$

Также необходимо найти выражения для $T_{J-1}^{k+\frac{1}{2}}, T_J^{k+\frac{1}{2}}$. Для этого выразим из выражения для $T_{J-1}^{k+\frac{1}{2}}$ через $T_J^{k+\frac{1}{2}}$.

Таким образом, получим систему уравнений

$$T_{i,j-1}^{k+\frac{1}{2}} = \left[-\frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i,j} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i,j-1} T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}}{2} - \frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i+1,j} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i-1,j} \tilde{T}_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} + \tilde{T}_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}}}{2r} \frac{1}{2 \left(\frac{h_{\theta}}{2} \right)} \right. \\ \left. - \frac{h_z}{2} \left[\tilde{C} \frac{T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - T_{i,j}^k}{\tau} - \frac{1}{h_{\theta}} \left(\frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i+1,j} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,j} T_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} - T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}}{2} - \right. \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,J} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i-1,J} T_{i,J}^{k+\frac{1}{2}} - T_{i-1,J}^{k+\frac{1}{2}}}{2 h_{\theta}} \\
& - \frac{2}{2rh_{\theta}} \left(\frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i+1,J} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i+1,J-1} T_{i+1,J}^{k+\frac{1}{2}} - T_{i+1,J-1}^{k+\frac{1}{2}}}{2} \frac{2h_z}{2} - \right. \\
& \left. - \frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i-1,J} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i-1,J-1} T_{i-1,J}^{k+\frac{1}{2}} - T_{i-1,J-1}^{k+\frac{1}{2}}}{2} \frac{2h_z}{2} \right) / \left[- \frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i,J} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i,J-1}}{4 \left(\frac{h_z}{2} \right)} \right] \quad (3.28)
\end{aligned}$$

$$T_{i,J-1}^{k+\frac{1}{2}} = A_{J-1} T_J^{k+\frac{1}{2}} + B_{J-1}; \quad (3.29)$$

откуда получаем явные зависимости для $T_{i,J-1}^{k+\frac{1}{2}}$ и $T_J^{k+\frac{1}{2}}$:

$$\begin{aligned}
T_J^{k+\frac{1}{2}} = & - \frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i+1,J} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i-1,J} \tilde{T}_{i+1,J}^{k+\frac{1}{2}} + \tilde{T}_{i+1,J}^{k+\frac{1}{2}}}{2r} - \frac{h_z}{2} \left[-\tilde{C} \frac{T_{i,J}^k}{\frac{\tau}{2}} \right. \\
& - \frac{1}{h_{\theta}} \left(\frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i+1,J} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,J} T_{i+1,J}^{k+\frac{1}{2}}}{2} \frac{2h_z}{2} \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{h_{\theta} 2} \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,J} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i-1,J} T_{i-1,J}^{k+\frac{1}{2}}}{2} \frac{1}{h_{\theta}} \right] \right. \\
& - \frac{2}{2rh_{\theta}} \left(\frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i+1,J} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i+1,J-1} T_{i+1,J}^{k+\frac{1}{2}} - T_{i+1,J-1}^{k+\frac{1}{2}}}{2} \frac{2h_z}{2} - \right. \\
& \left. - \frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i-1,J} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i-1,J-1} T_{i-1,J}^{k+\frac{1}{2}} - T_{i-1,J-1}^{k+\frac{1}{2}}}{2} \frac{2h_z}{2} \right) - B_{J-1} / \left[A_{J-1} + \frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i,J} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i,J-1}}{4 \left(\frac{h_z}{2} \right)} \right. \\
& \left. + \frac{h_z}{2} \left[\frac{\tilde{C}}{\frac{\tau}{2}} + \frac{1}{h_{\theta}} \left(\frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i+1,J} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,J}}{2h_{\theta}} \right) \right] \right]. \quad (3.30)
\end{aligned}$$

При подстановке полученного выражения для $T_J^{k+\frac{1}{2}}$ в (3.29) получаем T_J^k .

Теперь запишем вид схемы на целом временном слое

$$C_i^{k+1} \frac{T_{i,j}^{k+1} - T_{i,j}^{k-1/2}}{\frac{\tau}{2}} = \Lambda_{zz} T^{k+1} + 2\Lambda_{z\theta} T^{k+1} + \Lambda_{\theta\theta} T^{k+1}, \quad (3.31)$$

где

$$\Lambda_{zz} T^{k+1} = \frac{1}{h_z} \left(\frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i+1,j} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i,j}}{2} \frac{T_{i+1,j}^{k+1} - T_{i,j}^{k+1}}{h_z} - \frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i,j} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i-1,j}}{2} \frac{T_{i,j}^{k+1} - T_{i-1,j}^{k+1}}{h_z} \right); \quad (3.32)$$

$$\Lambda_{z\theta} T^{k+1} = \frac{1}{h_\theta} \left(\frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i,j+1} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i,j}}{2} \frac{T_{i,j+1}^{k+1} - T_{i,j}^{k+1}}{h_z} - \frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i,j} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i,j-1}}{2} \frac{T_{i,j}^{k+1} - T_{i,j-1}^{k+1}}{h_z} \right); \quad (3.33)$$

$$\Lambda_{\theta\theta} T^{k+1} = \frac{1}{r^2 h_\theta} \left(\frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,j+1} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,j}}{2} \frac{T_{i,j+1}^{k+1} - T_{i,j}^{k+1}}{h_\theta} - \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,j} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,j-1}}{2} \frac{T_{i,j}^{k+1} - T_{i,j-1}^{k+1}}{h_\theta} \right). \quad (3.34)$$

Теперь аналогично запишем аппроксимацию граничных условий составляющих векторов тепловых потоков на границах $\theta = 0, \theta = \pi$ для целого временного слоя, получим

$$\begin{aligned} \lambda_{\theta\theta}(T) \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{r \partial \theta} \Big|_{0,j+1}^{k+1} &= \lambda_{\theta\theta}(T) \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{r \partial \theta} \Big|_{0,j}^{k+1} + \\ &+ \frac{\partial}{r \partial \theta} \left(\lambda_{\theta\theta}(T) \frac{\partial T(z, \theta, \tau)}{\partial \theta} \right) \frac{h_\theta}{2} + O(h_\theta^2) \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$\lambda_{\theta\theta}(T) \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{r \partial \theta} \Big|_{i-1,j}^{k+1} = \lambda_{\theta\theta}(T) \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{r \partial \theta} \Big|_{i,j}^{k+1} +$$

$$+ \frac{\partial}{r \partial \theta} \left(\lambda_{\theta\theta}(T) \frac{\partial T(z, \theta, \tau)}{\partial \theta} \right) \frac{h_\theta}{2} + O(h_\theta^2), \quad (3.36)$$

откуда с использованием дифференциального уравнения и конечно-разностной аппроксимации левых частей в последних соотношениях центральными разностями, находим:

$$\begin{aligned} \lambda_{\theta\theta}(T) \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{r \partial \theta} \Big|_{0,j}^{k+1} &= \lambda_{\theta\theta}(T) \frac{T_{1,j}^{k+1} - T_{0,j}^{k+1}}{2(\frac{h_\theta}{2})} + O\left(\frac{h_\theta^2}{4}\right) - \\ - \frac{h_\theta}{2} \left[C(T) \rho \frac{\partial T(z, \theta, \tau)}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_{zz}(T) \frac{\partial T(z, \theta, \tau)}{\partial z} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda_{\theta z}(T) \frac{\partial T(z, \theta, \tau)}{\partial z} \right) \right] \Big|_{0,j}^{k+1} + O(h_\theta^2) \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} \lambda_{\theta\theta}(T) \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{r \partial \theta} \Big|_{1,j}^{k+1} &= \lambda_{\theta\theta}(T) \frac{T_{1,j}^{k+1} - T_{1-1,j}^{k+1}}{2(\frac{h_\theta}{2})} + O\left(\frac{h_\theta^2}{4}\right) + \\ + \frac{h_\theta}{2} \left[C(T) \rho \frac{\partial T(z, \theta, \tau)}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_{zz}(T) \frac{\partial T(z, \theta, \tau)}{\partial z} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda_{\theta z}(T) \frac{\partial T(z, \theta, \tau)}{\partial z} \right) \right] \Big|_{1,j}^{k+1} + O(h_\theta^2) \end{aligned} \quad (3.38)$$

Откуда по аналогии, находим:

$$\begin{aligned} &\frac{(\tilde{\lambda}_{\theta z})_{0,j+1} - (\tilde{\lambda}_{\theta z})_{0,j-1}}{2h_z} \frac{T_{0,j+1}^{k+1} - T_{0,j}^{k+1}}{2} + \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{1,j} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{0,j}}{r} \frac{T_{1,j}^{k+1} - T_{0,j}^{k+1}}{2h_\theta} + \\ &+ \frac{h_\theta}{2} \left[\tilde{C} \frac{T_{0,j}^{k+\frac{1}{2}} - T_{0,j}^k}{\frac{\tau}{2}} - \frac{1}{h_z} \left(\frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{0,j+1} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{1,j}}{2} \frac{T_{0,j+1}^{k+\frac{1}{2}} - T_{0,j}^{k+\frac{1}{2}}}{h_z} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{0,0} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{0,j-1}}{2} \frac{T_{0,j}^{k+\frac{1}{2}} - T_{0,j-1}^{k+\frac{1}{2}}}{h_z} \right) - \frac{2}{2rh_\theta} \left(\frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{1,j} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{0,j}}{2} \frac{T_{1,j+1}^{k+\frac{1}{2}} - T_{0,j+1}^{k+\frac{1}{2}}}{\frac{2h_z}{2}} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{1,j-1} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{0,j-1}}{2} \frac{T_{1,j-1}^{k+\frac{1}{2}} - T_{0,j-1}^{k+\frac{1}{2}}}{\frac{2h_z}{2}} \right) \right] + O(h_z^2 + h_\theta^2 + \tau) = 0; j = 0, \dots, J; i = 0; \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta z})_{I,j+1} - (\tilde{\lambda}_{\theta z})_{I,j-1}}{2h_z} \frac{T_{I,j+1}^{k+1} - T_{I,j}^{k+1}}{2} - \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{I,j} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{I-1,j}}{r} \frac{T_{I,j}^{k+1} - T_{I-1,j}^{k+1}}{2h_\theta} - \\
& - \left[\tilde{C} \frac{T_{I,j}^{k+\frac{1}{2}} - T_{I,j}^k}{\frac{\tau}{2}} - \frac{1}{h_z} \left(\frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{I,j+1} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{I,j}}{2} \frac{T_{I,j+1}^{k+\frac{1}{2}} - T_{I,j}^{k+\frac{1}{2}}}{h_z} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{I,j} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{I,j-1}}{2} \frac{T_{I,j}^{k+\frac{1}{2}} - T_{I,j-1}^{k+\frac{1}{2}}}{h_z} \right) \right. \\
& \left. - \frac{2}{2rh_\theta} \left(\frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{I,j+1} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{I-1,j+1}}{2} \frac{T_{I,j+1}^{k+\frac{1}{2}} - T_{I-1,j+1}^{k+\frac{1}{2}}}{\frac{2h_z}{2}} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{I-1,j-1} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{I-1,j-1}}{2} \frac{T_{I-1,j-1}^{k+\frac{1}{2}} - T_{I-1,j-1}^{k+\frac{1}{2}}}{\frac{2h_z}{2}} \right) \right] + O(h_z^2 + h_\theta^2 + \tau) \quad (3.40)
\end{aligned}$$

$$= 0;$$

$$j = 0, \dots, J; i = I$$

Таким образом, также на целом временном слое получаем СЛАУ:

$$b_1 T_1^{k+1} - c_1 T_2^{k+1} = 0; i = 1, k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.41)$$

$$a_i T_{i-1}^{k+1} + b_i T_i^{k+1} - c_i T_{i+1}^{k+1} = 0 \quad (3.42)$$

$$a_{I-1} T_{I-2}^{k+1} + b_{I-1} T_{I-1}^{k+1} = 0, i = I - 1, k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.43)$$

Решение СЛАУ определяются в форме:

$$T_i^{k+1} = A_i T_{i+1}^{k+1} + B_i, i = 1, I - 1; \quad (3.44)$$

$$T_0^{k+1} = f(q_i); T_I^{k+1} = f(q_I), \quad (3.45)$$

где A_i, B_i – прогоночные коэффициенты, определяемые путём последовательного исключения неизвестных в СЛАУ (3.41 – 3.43)

$$T_i^{k+1} = \frac{c_i}{b_i - a_i A_{i-1}} T_{i+1}^{k+1} + \frac{d_i + a_i B_{i-1}}{b_i - a_i A_{i-1}}, i = 1, I - 1; \quad (3.46)$$

И последующего сравнения (3.44) с (3.46) для каждого $i, i = 1, I - 1$, получим

$$\begin{aligned}
& -\frac{2}{2rh_\theta} \left(\frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{1,j} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{0,j}}{2} \frac{T_{i,j+1}^{k+\frac{1}{2}} - T_{0,j+1}^{k+\frac{1}{2}}}{\frac{2h_z}{2}} \right. \\
& \quad \left. - \frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{1,j-1} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{0,j-1}}{2} \frac{T_{1,j-1}^{k+\frac{1}{2}} - T_{0,j-1}^{k+\frac{1}{2}}}{\frac{2h_z}{2}} \right) \Big] \Big] / \\
& / \left[\frac{(\tilde{\lambda}_{\theta z})_{0,j+1} - (\tilde{\lambda}_{\theta z})_{0,j-1}}{4h_z} + \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{1,j} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{0,j}}{2rh_\theta} + \frac{h_\theta}{2} \left[\frac{\tilde{C}}{\tau} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{1}{h_z} \left(\frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{0,j+1} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,j}}{2h_z} - \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{0,j} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{0,j-1}}{2h_z} \right) \right] \right] \quad (3.52)
\end{aligned}$$

$$T_0^{k+1} = A_0 T_1^{k+1} + B_0 \quad (3.53)$$

Откуда получаем явные зависимости для A_0 и B_0 :

$$\begin{aligned}
A_0 = & -\frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{1,j} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{0,j}}{2h_\theta r} / \left[\frac{(\tilde{\lambda}_{\theta z})_{0,j+1} - (\tilde{\lambda}_{\theta z})_{0,j-1}}{4h_z} + \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{1,j} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{0,j}}{2rh_\theta} + \right. \\
& \left. + \frac{h_\theta}{2} \left[\frac{\tilde{C}}{\tau} - \frac{1}{h_z} \left(\frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{0,j+1} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,j}}{2h_z} - \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{0,j} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{0,j-1}}{2h_z} \right) \right] \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_0 = & \left\{ -\frac{(\tilde{\lambda}_{\theta z})_{0,j+1} - (\tilde{\lambda}_{\theta z})_{0,j-1}}{2h_z} \frac{T_{0,j+1}^{k+1}}{2} - \right. \\
& -\frac{h_\theta}{2} \left[-\tilde{C} \frac{T_{0,j}^k}{\tau} - \frac{1}{h_z} \left(\frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{0,j+1} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,j}}{2} \frac{T_{0,j+1}^{k+\frac{1}{2}}}{h_z} + \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{0,0} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{0,j-1}}{2} \frac{T_{0,j-1}^{k+\frac{1}{2}}}{h_z} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{2}{2rh_\theta} \left(\frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{1,j} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{0,j}}{2} \frac{T_{i,j+1}^{k+\frac{1}{2}} - T_{0,j+1}^{k+\frac{1}{2}}}{\frac{2h_z}{2}} \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. - \frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{1,j-1} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{0,j-1}}{2} \frac{T_{1,j-1}^{k+\frac{1}{2}} - T_{0,j-1}^{k+\frac{1}{2}}}{\frac{2h_z}{2}} \right) \right] \right\} /
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& / \left[\frac{(\tilde{\lambda}_{\theta z})_{0,j+1} - (\tilde{\lambda}_{\theta z})_{0,j-1}}{4h_z} + \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{1,j} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{0,j}}{2rh_\theta} + \frac{h_\theta}{2} \left[\frac{\tilde{C}}{\tau} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{1}{h_z} \left(\frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{0,j+1} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,j}}{2h_z} - \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. - \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{0,j} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{0,j-1}}{2h_z} \right) \right] \right] \tag{3.54}
\end{aligned}$$

Также необходимо найти выражения для T_{I-1}^{k+1}, T_I^{k+1} . Для этого выразим из выражения для T_{I-1}^{k+1} через T_I^{k+1} . Таким образом, получим систему уравнений:

$$\begin{aligned}
T_{I-1,j}^{k+1} = & \left[\tilde{C} \frac{T_{I,j}^{k+\frac{1}{2}} - T_{I,j}^k}{\frac{\tau}{2}} - \frac{1}{h_z} \left(\frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{I,j+1} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{I,j}}{2} \frac{T_{I,j+1}^{k+\frac{1}{2}} - T_{I,j}^{k+\frac{1}{2}}}{h_z} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{I,j} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{I,j-1}}{2} \frac{T_{I,j}^{k+\frac{1}{2}} - T_{I,j-1}^{k+\frac{1}{2}}}{h_z} \right) - \frac{2}{2rh_\theta} \left(\frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{I,j+1} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{I-1,j+1}}{2} \frac{T_{I,j+1}^{k+\frac{1}{2}}}{\frac{2h_z}{2}} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{I-1,j-1} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{I-1,j-1}}{2} \frac{T_{I-1,j-1}^{k+\frac{1}{2}} - T_{I-1,j-1}^{k+\frac{1}{2}}}{\frac{2h_z}{2}} \right) \right] / \\
& \left[\frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{I,j} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{I-1,j}}{2h_\theta r} + \frac{2}{2rh_\theta} \frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{I,j+1} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{I-1,j+1}}{2h_z} \right] \tag{3.55}
\end{aligned}$$

$$T_{I-1}^{k+1} = A_{I-1} T_I^{k+1} + B_{I-1} \tag{3.56}$$

При подстановке полученного выражения для T_{I-1}^{k+1} в (3.56) получаем T_I^k .

3.2 Алгоритм численного решения задачи вариации температурного поля

Для численного решения прямой нелинейной задачи вариации температурного поля также будем использовать МПНЭ.

Коэффициенты математической модели при решении краевых задач вычислены в ходе составления конечно-разностного шаблона, использованного при решении задачи (2.44 – 2.50).

$$\frac{C_i^{k+\frac{1}{2}}}{1+\bar{\Delta}} \frac{\Delta T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - \Delta T_{i,j}^k}{\frac{\tau}{2}} = \Delta \Lambda_{zz} T^{k+\frac{1}{2}} + 2\Delta \Lambda_{z\theta} T^{k+\frac{1}{2}} + \Delta \Lambda_{\theta\theta} T^{k+\frac{1}{2}}; \quad (3.57)$$

на сетках с шаблоном, представленным на рисунке 4, схема МПНЭ для уравнения (3.57) примет вид

$$\Delta \Lambda_{zz} T^{k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{h_z} \left(\frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i,j+1} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i,j}}{2} \frac{\Delta T_{i,j+1}^{k+\frac{1}{2}} - \Delta T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}}{h_z} - \frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i,j} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i,j-1}}{2} \frac{\Delta T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - \Delta T_{i,j-1}^{k+\frac{1}{2}}}{h_z} \right) - \frac{1}{h_z} \left(\frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i,j+1} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i,j}}{2} \frac{\Delta T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}}{h_z} - \frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i,j} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i,j-1}}{2} \frac{\Delta T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}}{h_z} \right) \quad (3.58)$$

$$\Delta \Lambda_{\theta\theta} T^{k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{h_\theta r^2} \left(\frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,j+1} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,j}}{2} \frac{\widetilde{\Delta T}_{i,j+1}^{k+\frac{1}{2}} - \Delta T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}}{h_\theta} \right) - \frac{1}{h_\theta r^2} \left(\frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,j} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,j-1}}{2} \frac{\Delta T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - \Delta T_{i,j-1}^{k+\frac{1}{2}}}{h_\theta} \right); \quad (3.59)$$

$$\Delta\Lambda_{z\theta}T^{k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{h_\theta r^2} \left(\frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,j} + (\lambda_{\theta\theta})_{i,j-1} \Delta T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}}{2} - \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,j} + (\lambda_{\theta\theta})_{i,j-1} \Delta T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}}{2} \frac{1}{h_\theta} \right) - \frac{2}{2rh_z} \left(\frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i+1,j+1} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i+1,j-1} \Delta T_{i+1,j+1}^{k+\frac{1}{2}} - T_{i+1,j-1}^{k+\frac{1}{2}}}{2} - \frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i+1,j+1} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i-1,j+1} \Delta T_{i-1,j+1}^{k+\frac{1}{2}} - T_{i-1,j+1}^{k+\frac{1}{2}}}{2} \frac{1}{h_\theta} \right) \quad (3.60)$$

Теперь необходимо провести аппроксимацию вариаций тепловых потоков.

1. Для вариации диффузного лучистого теплового потока

$$\delta q_{\text{эф}}(\Delta T) = -4\varepsilon_m \sigma T_{i,j_1}^{k+\frac{1}{2}3} \Delta T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}. \quad (3.61)$$

2. Для вариации конвективного естественного теплового потока выражение относительно возмущающей температуры при линеаризации коэффициента теплоотдачи

$$q^k(\Delta T) = \alpha_k \left(T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} \right) \Delta T_{i,j}^k + \frac{d\alpha_k(T)}{dT} \Delta T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}, \quad (3.62)$$

где выражение для производной конвективного коэффициента теплоотдачи не зависит от вариации температуры и уже посчитано ранее.

Для аппроксимации граничных условий ограничимся первым порядком точности

$$\lambda_{zz}(T) \frac{\partial \Delta T(z, \theta, \tau)}{\partial z} \Big|_{i,1}^{k+1/2} = \lambda_{zz}(T) \frac{\partial \Delta T(z, \theta, \tau)}{\partial z} \Big|_{i,0} + O(h_z) \quad (3.63)$$

$$\lambda_{zz}(T) \frac{\partial \Delta T(z, \theta, \tau)}{\partial z} \Big|_{i,j-1}^{k+1/2} = \lambda_{zz}(T) \frac{\partial \Delta T(z, \theta, \tau)}{\partial z} \Big|_{i,j} + O(h_z). \quad (3.64)$$

Откуда с использованием конечно-разностной аппроксимации граничных условий получаем

$$\frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i,1} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i,0} \Delta T_{i,1}^{k+\frac{1}{2}} - \Delta T_{i,0}^{k+\frac{1}{2}}}{2} = - \frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i,1} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i,0} \Delta T_{i,0}^{k+\frac{1}{2}}}{2} \frac{1}{2 \left(\frac{h_z}{2} \right)}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{(\tilde{\lambda}_{\theta z})_{i,1} + (\tilde{\lambda}_{\theta z})_{i,0}}{2} \frac{\partial \Delta T_{i,0}^{k+\frac{1}{2}}}{2r \left(\frac{h_\theta}{2}\right)} - \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta z})_{i+1,1} + (\tilde{\lambda}_{\theta z})_{i,0}}{2} \frac{\Delta \tilde{T}_{i+1,0}^{k+\frac{1}{2}} - \Delta T_{i,0}^{k+\frac{1}{2}}}{2r \left(\frac{h_\theta}{2}\right)} = 0; \\
& \frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i,1} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i,0}}{2} \frac{\Delta T_{i,J}^{k+\frac{1}{2}} - \Delta T_{i,J-1}^{k+\frac{1}{2}}}{2 \left(\frac{h_z}{2}\right)} = -\frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i,1} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i,0}}{2} \frac{\Delta T_{i,J}^{k+\frac{1}{2}}}{2 \left(\frac{h_z}{2}\right)} - \\
& -\frac{(\tilde{\lambda}_{\theta z})_{i,1} + (\tilde{\lambda}_{\theta z})_{i,0}}{2} \frac{\partial \Delta T_{i,J}^{k+\frac{1}{2}}}{2r \left(\frac{h_\theta}{2}\right)} - \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta z})_{i+1,J} + (\tilde{\lambda}_{\theta z})_{i,J}}{2} \frac{\Delta \tilde{T}_{i+1,J}^{k+\frac{1}{2}} - \Delta T_{i,J}^{k+\frac{1}{2}}}{2r \left(\frac{h_\theta}{2}\right)} = \\
& = -4\varepsilon_M \sigma T_{i,j1}^{k+\frac{1}{2}3} \Delta T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - \alpha_K \left(T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}\right) \Delta T_{i,j}^k - \frac{d\alpha_K(T)}{dT} \Delta T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}. \quad (3.65)
\end{aligned}$$

Таким образом, конечно-разностная задача сводится к СЛАУ с трёхдиагональными матрицами (порядок аппроксимации отброшен):

$$b_1 \Delta T_1^{k+1/2} - c_1 \Delta T_2^{k+1/2} = d_1; i = 1, k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.66)$$

$$a_j \Delta T_{j-1}^{k+1/2} + b_j \Delta T_j^{k+1/2} - c_j T_{j+1}^{k+1/2} = d_j \quad (3.67)$$

$$a_{j-1} \Delta T_{j-2}^{k+1/2} + b_{j-1} \Delta T_{j-1}^{k+1/2} = d_{j-1}, j = J - 1, k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.68)$$

Коэффициенты СЛАУ определяются выражениями:

$$a_j = -\frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i,j} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i,j-1}}{2h_z^2}; \quad (3.69)$$

$$b_j = -\frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i,j+1} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i,j}}{2h_z^2} + \frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i,j} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i,j-1}}{2h_z^2} - \quad (3.70)$$

$$-\frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,j+1} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,j}}{2r^2 h_\theta^2} + \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,j} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,j-1}}{2r^2 h_\theta^2};$$

$$c_j = -\frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i,j} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i-1,j}}{2h_z^2}; \quad (3.71)$$

$$d_j = C_j^{k+1} \frac{T_{i,j}^k}{1 + \bar{\Delta} \frac{\tau}{2}}. \quad (3.72)$$

СЛАУ в количестве $J-1$ уравнений имеет трёхдиагональный вид, причём $a_1 = 0$ и $c_{J-1} = 0$.

Решение СЛАУ определяются в форме

$$\Delta T_j^{k+\frac{1}{2}} = A_j \Delta T_{j+1}^{k+\frac{1}{2}} + B_j, j = 1, I - 1; \quad (3.73)$$

$$\Delta T_0^{k+\frac{1}{2}} = f(q_i); T_J^{k+\frac{1}{2}} = f(q_J), \quad (3.74)$$

где A_j, B_j – прогоночные коэффициенты, определяемые путём последовательного исключения неизвестных в СЛАУ (3.66 – 3.68).

$$\Delta T_j^{k+1} = \frac{c_j}{b_j - a_j A_{j-1}} \Delta T_{j+1}^{k+\frac{1}{2}} + \frac{d_j + a_j B_{j-1}}{b_j - a_j A_{j-1}}, j = 1, J - 1; \quad (3.75)$$

И последующего сравнения (3.75) с (3.73) для каждого $i, i = 1, I - 1$, получим

$$A_j = \frac{c_j}{b_j - a_j A_{j-1}}, B_j = \frac{d_j + a_j B_{j-1}}{b_j - a_j A_{j-1}}, \quad j = 1, J - 1; \quad (3.76)$$

Так как для $j = 1$ $a_1 = 0$, то

$$A_1 = \frac{c_1}{b_1}, \quad A_1 = \frac{d_1}{b_1}; \quad (3.77)$$

В прямом ходе прогонки определяются прогоночные коэффициенты $A_j, B_j, j = 1, J - 2$, по формулам (3.76), (3.77). При $j = 1, J - 1$ $c_{j-1} = 0$ и, следовательно

$$A_{j-1} = 0, B_{j-1} = \frac{d_{j-1} + a_{j-1} B_{j-2}}{b_{j-1} - a_{j-1} A_{j-2}}; \quad (3.78)$$

В обратном ходе определяются значения $T_j^{k+\frac{1}{2}}, i = 1, I - 1, I - 2, \dots, 1$ по формулам и прогоночным коэффициентам

$$\begin{aligned} \Delta T_{j-1}^{k+\frac{1}{2}} &= A_{j-1} \Delta T_j^{k+\frac{1}{2}} + B_{j-1} (A_{j-1} = 0) \\ \Delta T_{j-2}^{k+\frac{1}{2}} &= A_{j-2} \Delta T_{j-1}^{k+\frac{1}{2}} + B_{j-2} (A_{j-1} = 0) \end{aligned} \quad (3.79)$$

.....

$$\Delta T_1^{k+\frac{1}{2}} = A_1 \Delta T_2^{k+\frac{1}{2}} + B_1.$$

Для нахождения коэффициентов A_0, B_0 воспользуемся нашим выражением по аппроксимации граничного теплового потока (3.65), откуда выразим значение $\Delta T_0^{k+\frac{1}{2}}$ через $\Delta T_1^{k+\frac{1}{2}}$.

Таким образом, получим систему из двух уравнений:

$$\Delta T_{i,0}^{k+\frac{1}{2}} = \left[-\frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i,1} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i,0}}{4} \frac{\Delta T_{i,1}^{k+\frac{1}{2}}}{\left(\frac{h_z}{2}\right)} + \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta z})_{i+1,1} + (\tilde{\lambda}_{\theta z})_{i,0}}{2} \frac{\Delta \tilde{T}_{i+1,0}^{k+\frac{1}{2}}}{2r\left(\frac{h_\theta}{2}\right)} \right] /$$

$$/ \left[-\frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i,1} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i,0}}{4\left(\frac{h_z}{2}\right)} + \frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i,1} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i,0}}{4\left(\frac{h_z}{2}\right)} + \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta z})_{i,1} + (\tilde{\lambda}_{\theta z})_{i,0}}{4r\left(\frac{h_\theta}{2}\right)} \right. \quad (3.80)$$

$$\left. + \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta z})_{i+1,1} + (\tilde{\lambda}_{\theta z})_{i,0}}{4r\left(\frac{h_\theta}{2}\right)} \right]$$

$$\Delta T_0^{k+\frac{1}{2}} = A_0 \Delta T_1^{k+\frac{1}{2}} + B_0; \quad (3.81)$$

Откуда получаем явные зависимости для A_0 и B_0 :

$$A_0 = -\frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i,1} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i,0}}{4\left(\frac{h_z}{2}\right)} /$$

$$/ \left[-\frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i,1} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i,0}}{4\left(\frac{h_z}{2}\right)} + \frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i,1} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i,0}}{4\left(\frac{h_z}{2}\right)} + \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta z})_{i,1} + (\tilde{\lambda}_{\theta z})_{i,0}}{4r\left(\frac{h_\theta}{2}\right)} \right. \quad (3.82)$$

$$\left. + \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta z})_{i+1,1} + (\tilde{\lambda}_{\theta z})_{i,0}}{4r\left(\frac{h_\theta}{2}\right)} \right]$$

$$B_0 = \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta z})_{i+1,1} + (\tilde{\lambda}_{\theta z})_{i,0}}{2} \frac{\Delta \tilde{T}_{i+1,0}^{k+\frac{1}{2}}}{2r\left(\frac{h_\theta}{2}\right)} /$$

$$/[-\frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i,1} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i,0}}{4\left(\frac{h_z}{2}\right)} + \frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i,1} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i,0}}{4\left(\frac{h_z}{2}\right)} + \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta z})_{i,1} + (\tilde{\lambda}_{\theta z})_{i,0}}{4r\left(\frac{h_\theta}{2}\right)} + \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta z})_{i+1,1} + (\tilde{\lambda}_{\theta z})_{i,0}}{4r\left(\frac{h_\theta}{2}\right)}] \quad (3.83)$$

Также необходимо найти выражения для $\Delta T_{J-1}^{k+\frac{1}{2}}, \Delta T_J^{k+\frac{1}{2}}$. Для этого выразим из выражение для $\Delta T_{J-1}^{k+\frac{1}{2}}$ через $\Delta T_J^{k+\frac{1}{2}}$. Таким образом, получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} \Delta T_{i,J-1}^{k+\frac{1}{2}} = & -[-4\varepsilon_M \sigma T_{i,j1}^{k+\frac{1}{2}3} \Delta T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - \alpha_\kappa \left(T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}\right) \Delta T_{i,j}^k - \frac{d\alpha_\kappa(T)}{dT} \Delta T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} \\ & - \frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i,1} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i,0}}{2} \frac{\Delta T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}}{2\left(\frac{h_z}{2}\right)} - \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta z})_{i,1} + (\tilde{\lambda}_{\theta z})_{i,0}}{2} \frac{\partial \Delta T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}}{2r\left(\frac{h_\theta}{2}\right)} \\ & - \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta z})_{i+1,J} + (\tilde{\lambda}_{\theta z})_{i,J}}{2} \frac{\Delta \tilde{T}_{i+1,J}^{k+\frac{1}{2}} - \Delta T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}}{2r\left(\frac{h_\theta}{2}\right)} \\ & - \frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i,1} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i,0}}{2} \frac{\Delta T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}}{2\left(\frac{h_z}{2}\right)}] / \frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i,1} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i,0}}{4\left(\frac{h_z}{2}\right)} \end{aligned} \quad (3.84)$$

$$\Delta T_{i,J-1}^{k+\frac{1}{2}} = A_{J-1} \Delta T_J^{k+\frac{1}{2}} + B_{J-1}; \quad (3.85)$$

Откуда получаем явные зависимости для $\Delta T_{i,J-1}^{k+\frac{1}{2}}$ и $\Delta T_J^{k+\frac{1}{2}}$:

$$\begin{aligned} \Delta T_J^{k+\frac{1}{2}} = & [-[-4\varepsilon_M \sigma T_{i,j1}^{k+\frac{1}{2}3} \Delta T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - \alpha_\kappa \left(T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}\right) \Delta T_{i,j}^k - \frac{d\alpha_\kappa(T)}{dT} \Delta T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} \\ & - \frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i,1} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i,0}}{2} \frac{\Delta T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}}{2\left(\frac{h_z}{2}\right)} - \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta z})_{i,1} + (\tilde{\lambda}_{\theta z})_{i,0}}{2} \frac{\partial \Delta T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}}{2r\left(\frac{h_\theta}{2}\right)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta z})_{i+1,j} + (\tilde{\lambda}_{\theta z})_{i,j} \Delta \tilde{T}_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} - \Delta T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}}{2} \\
& - \frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i,1} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i,0} \frac{\Delta T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}}{2} \Big|}{2 \left(\frac{h_z}{2}\right)} \Big/ \frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i,1} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i,0}}{4 \left(\frac{h_z}{2}\right)} - \\
& B_{J-1} \Big] / A_{J-1}. \tag{3.86}
\end{aligned}$$

При подстановке полученного выражения для $\Delta T_J^{k+\frac{1}{2}}$ в (3.85) получаем

$$\Delta T_{J-1}^{k+1/2}$$

Далее запишем вид схемы на целом временном слое

$$\frac{C_i^{k+1}}{1 + \bar{\Delta}} \frac{\Delta T_{i,j}^{k+1} - \Delta T_{i,j}^k}{\frac{\tau}{2}} = \Delta \Lambda_{zz} T^{k+1} + 2 \Delta \Lambda_{z\theta} T^{k+1} + \Delta \Lambda_{\theta\theta} T^{k+1};$$

$$\begin{aligned}
\Delta \Lambda_{zz} T^{k+1} = & \frac{1}{h_z} \left(\frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i,j+1} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i,j} \frac{\Delta T_{i,j+1}^{k+1} - \Delta T_{i,j}^{k+1}}{h_z}}{2} \right. \\
& \left. - \frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i,j} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i,j-1} \frac{\Delta T_{i,j}^{k+1} - \Delta T_{i,j-1}^{k+1}}{h_z}}{2} \right) +
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{h_z} \left(\frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i,j+1} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i,j} \frac{\Delta T_{i,j}^{k+1}}{h_z}}{2} - \frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i,j} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i,j-1} \frac{\Delta T_{i,j}^{k+1}}{h_z}}{2} \right) \tag{3.87}$$

$$\begin{aligned}
\Delta \Lambda_{\theta\theta} T^{k+1} = & \frac{1}{h_\theta r^2} \left(\frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,j+1} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,j} \frac{\Delta \tilde{T}_{i,j+1}^{k+1} - \Delta T_{i,j}^{k+1}}{h_\theta}}{2} \right) - \\
& - \frac{1}{h_\theta r^2} \left(\frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,j} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i-1,j} \frac{\Delta T_{i,j}^{k+1} - \Delta T_{i-1,j}^{k+1}}{h_\theta}}{2} \right); \tag{3.88}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{h_\theta r^2} \left(\frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,j} + (\lambda_{\theta\theta})_{i,j-1} \frac{\Delta T_{i,j}^{k+1}}{h_\theta}}{2} - \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,j} + (\lambda_{\theta\theta})_{i,j-1} \frac{\Delta T_{i,j}^{k+1}}{h_\theta}}{2} \right) \\
\Delta \Lambda_{z\theta} T^{k+1} = & \frac{2}{2rh_z} \left(\frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i+1,j+1} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i+1,j-1} \frac{\Delta \tilde{T}_{i+1,j+1}^{k+1} - T_{i+1,j-1}^{k+1}}{h_\theta}}{2} \right) -
\end{aligned}$$

$$\frac{2}{2rh_z} \left(\frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i+1,j+1} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i-1,j+1}}{2} \frac{\Delta T_{i-1,j+1}^{k+1} - T_{i-1,j+1}^{k+1}}{h_\theta} \right) \quad (3.89)$$

Аналогично запишем аппроксимацию граничных условий составляющих векторов тепловых потоков на границах $\theta = 0, \theta = \pi$ для целого временного слоя, получим:

$$\lambda_{\theta\theta}(T) \frac{\partial \Delta T(\theta, z, \tau)}{r \partial \theta} \Big|_{0,j+1}^{k+1} = \lambda_{\theta\theta}(T) \frac{\partial \Delta T(\theta, z, \tau)}{r \partial \theta} \Big|_{0,j}^{k+1} + O(h_\theta); \quad (3.90)$$

$$\lambda_{\theta\theta}(T) \frac{\partial \Delta T(\theta, z, \tau)}{r \partial \theta} \Big|_{I-1,j}^{k+1} = \lambda_{\theta\theta}(T) \frac{\partial \Delta T(\theta, z, \tau)}{r \partial \theta} \Big|_{I,j}^{k+1} + O(h_\theta). \quad (3.91)$$

Откуда с использованием конечно-разностной аппроксимации граничных условий получаем:

$$\begin{aligned} & - \left[\frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{0,j+1} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{0,j+1}}{2} \frac{\Delta T_{0,j}^{k+1}}{\frac{h_z}{2}} + \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{0,j+1} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{0,j}}{2} \frac{1}{r} \frac{\Delta T_{0,j}^{k+1}}{\frac{h_\theta}{2}} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{0,j+1} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{0,j+1}}{2} \frac{\Delta T_{0,j}^{k+1} - \Delta T_{0,j+1}^{k+1}}{\frac{h_z}{2}} \right. \\ & \quad \left. + \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,j+1} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,j}}{2r} \frac{\Delta T_{1,j}^{k+1} - \Delta T_{0,j}^{k+1}}{h_\theta} \right] = 0, i = 0, j = 1, J \end{aligned} \quad (3.92)$$

$$\begin{aligned} & \left[\frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{I,j+1} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{I,j+1}}{2} \frac{\Delta T_{I,j}^{k+1}}{\frac{h_z}{2}} + \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{I,j+1} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{I,j}}{2} \frac{1}{r} \frac{\Delta T_{I,j}^{k+1}}{\frac{h_\theta}{2}} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{I,j+1} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{I,j+1}}{2} \frac{\Delta T_{I,j}^{k+1} - \Delta T_{I,j-1}^{k+1}}{\frac{h_z}{2}} \right. \\ & \quad \left. + \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{I,j+1} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{I,j}}{2r} \frac{\Delta T_{I,j}^{k+1} - \Delta T_{I,j+1}^{k+1}}{h_\theta} \right] = 0, i = I, j = 1, J \end{aligned} \quad (3.93)$$

Таким образом, также на целом временном слое получаем СЛАУ:

$$b_1 \Delta T_1^{k+\Delta 1} - c_1 \Delta T_2^{k+1} = 0; i = 1, k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.94)$$

$$a_i \Delta T_{i-1}^{k+1} + b_i \Delta T_i^{k+1} - c_i \Delta T_{i+1}^{k+1} = 0 \quad (3.95)$$

$$a_{I-1} \Delta T_{I-2}^{k+1} + b_{I-1} \Delta T_{I-1}^{k+1} = 0, i = I - 1, k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.96)$$

Решение СЛАУ определяется в форме:

$$\begin{aligned}
& / \left[- \frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{0,j+1} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{0,j+1}}{2 \frac{h_z}{2}} + \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{0,j+1} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{0,j}}{2} \frac{1}{r \frac{h_\theta}{2}} - \right. \\
& \left. - \frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{0,j+1} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{0,j+1}}{2} \frac{\Delta T_{0,j+1}^{k+1}}{\frac{h_z}{2}} + \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,j+1} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,j}}{2r} \frac{\Delta T_{1,j}^{k+1}}{h_\theta} \right]; \quad (3.104)
\end{aligned}$$

$$\Delta T_0^{k+1} = A_0 \Delta T_2^{k+\frac{1}{2}} + B_0; \quad (3.105)$$

Откуда получаем явные зависимости для A_0 и B_0 :

$$\begin{aligned}
A_0 = & - \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,j+1} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,j}}{2rh_\theta} / \left[- \frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{0,j+1} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{0,j+1}}{2 \frac{h_z}{2}} \right. \\
& + \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{0,j+1} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{0,j}}{2} \frac{1}{r \frac{h_\theta}{2}} - \\
& \left. - \frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{0,j+1} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{0,j+1}}{2} \frac{\Delta T_{0,j+1}^{k+1}}{\frac{h_z}{2}} + \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,j+1} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,j}}{2r} \frac{\Delta T_{1,j}^{k+1}}{h_\theta} \right]; \quad (3.106)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_0 = & \left[\frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{0,j+1} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{0,j+1}}{2 \frac{h_z}{2}} \right] / \\
& / \left[- \frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{0,j+1} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{0,j+1}}{2 \frac{h_z}{2}} + \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{0,j+1} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{0,j}}{2} \frac{1}{r \frac{h_\theta}{2}} - \right. \\
& \left. - \frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{0,j+1} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{0,j+1}}{2} \frac{\Delta T_{0,j+1}^{k+1}}{\frac{h_z}{2}} + \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,j+1} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,j}}{2r} \frac{\Delta T_{1,j}^{k+1}}{h_\theta} \right]. \quad (3.107)
\end{aligned}$$

Также необходимо найти выражения для $\Delta T_{I-1}^{k+1}, \Delta T_I^{k+1}$. Для этого выразим из выражение для T_{I-1}^{k+1} через T_I^{k+1} . Таким образом, получим систему уравнений:

$$\Delta T_{I-1,j}^{k+1} = - \left[\frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{I,j+1} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{I,j+1}}{2} \frac{\Delta T_{I,j}^{k+1}}{\frac{h_z}{2}} + \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{I,j+1} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{I,j}}{2} \frac{1}{r} \frac{\Delta T_{I,j}^{k+1}}{\frac{h_\theta}{2}} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{I,j+1} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{I,j+1}}{2} \frac{\Delta T_{I,j}^{k+1} - \Delta T_{I,j-1}^{k+1}}{\frac{h_z}{2}} + \\
& + \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{I,j} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{I-1,j}}{2r} \frac{\Delta T_{I,j}^{k+1}}{h_\theta} \Big/ \left[\frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{I,j} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{I-1,j}}{2r} \frac{\Delta T_{I,j}^{k+1}}{h_\theta} \right]; \quad (3.108)
\end{aligned}$$

$$\Delta T_0^{k+1} = A_0 \Delta T_2^{k+\frac{1}{2}} + B_0. \quad (3.109)$$

При подстановке полученного выражения для ΔT_{I-1}^{k+1} в (3.109) получаем ΔT_I^k .

3.3 Вычисление функционала от полученного решения

Для целей численного интегрирования можно воспользоваться различными численными методами [89]. При этом должна обеспечиваться высокая точность вычисления функционала невязки от решения соответствующей краевой задачи, так как большие погрешности в величине градиента могут привести к отсутствию сходимости процесса минимизации в ходе решения обратной задачи.

Рассмотрим сначала интегрирование сеточных функций от решения краевой задачи только по пространству. Границы областей интегрирования должны совпадать с узлами конечно-разностной стеки, применявшейся при решении выбранной постановки задач. Интегрирование функций (2.66 – 2.71) по пространству осуществляется по следующим формулам.

Выражение для первой компоненты тензора теплопроводности

$$\begin{aligned}
f_{\lambda_{zz}} = & \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K [T_{j,k} - \tilde{T}_{j,k}] \Delta T_{j,k} \left[\sum_{m=1}^M N_m(T) \frac{T_{j+1,k} - T_{j,k} + \Delta T_{j+1,k} - \Delta T_{j,k}}{2h_z} \right] / \\
& / \left[\frac{1}{h_z h_\theta r^2} \left[\sum_{m=1}^M \lambda_m^{\theta\theta} N_m(T) \frac{\Delta T_{j,k+1} - \Delta T_{j,k}}{h_\theta} \right] + \frac{2}{r h_z^2} \left[\sum_{m=1}^M \lambda_m^{\theta z} N_m(T) \frac{\Delta T_{j,k+1} - \Delta T_{j,k}}{h_\theta} \right] \right] \\
& +
\end{aligned}$$

$$+ \frac{2}{h_z^2} \left(\sum_{m=1}^M \lambda_m^{zz} N_m(T) \frac{T_{j+1,k} - T_{j,k}}{h_z} \right) \Big]. \quad (3.110)$$

При решении задачи методом регуляризации А.Н. Тихонова для первой компоненты тензора теплопроводности

$$\begin{aligned} f_{\lambda_{zz}} = & \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \{ [T_{j,k} - \tilde{T}_{j,k}] \Delta T_{j,k} + I_\gamma \} \left[\sum_{m=1}^M N_m(T) \frac{T_{j+1,k} - T_{j,k} + \Delta T_{j+1,k} - \Delta T_{j,k}}{2h_z} \right] \\ & + \\ & + \Delta\gamma \lambda_m^{zz} \} / \left[\frac{1}{h_z h_\theta r^2} \left[\sum_{m=1}^M \lambda_m^{\theta\theta} N_m(T) \frac{\Delta T_{j,k+1} - \Delta T_{j,k}}{h_\theta} \right] \right. \\ & \left. + \frac{2}{r h_z^2} \left[\sum_{m=1}^M \lambda_m^{\theta z} N_m(T) \frac{\Delta T_{j,k+1} - \Delta T_{j,k}}{h_\theta} \right] \right] + \\ & + \frac{2}{h_z^2} \left(\sum_{m=1}^M \lambda_m^{zz} N_m(T) \frac{T_{j+1,k} - T_{j,k}}{h_z} \right). \end{aligned} \quad (3.111)$$

Для интегрирования по времени можно воспользоваться формулой Симпсона, тогда получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta L}{\partial \lambda_m^{zz}} = & \int_0^{\tau_{max}} f_{\lambda_{zz}} d\tau = \frac{h_\tau}{12} \left[f_{\lambda_{zz}}(\tau) + 4f_{\lambda_{zz}}\left(\frac{\tau + h_\tau}{2}\right) + f_{\lambda_{zz}}(\tau + h_\tau) \right], \\ & \tau \in [0, \tau_{max} - h_\tau] \end{aligned} \quad (3.112)$$

Выражение для второй компоненты тензора теплопроводности

$$\begin{aligned} f_{\lambda_{\theta z}} = & - \int_0^{\tau_{max}} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K [T_{j,k} - \tilde{T}_{j,k}] \Delta T_{j,k} \left[\sum_{m=1}^M N_m(T) \frac{T_{j,k+1} - T_{j,k} + \Delta T_{j,k+1} - \Delta T_{j,k}}{2h_\theta} \right] / \\ & / \left[\frac{1}{h_z h_\theta r} \left[\sum_{m=1}^M \lambda_m^{\theta\theta} N_m(T) \frac{\Delta T_{j,k+1} - \Delta T_{j,k}}{h_\theta} \right] \right. \\ & \left. + \frac{2}{r^2 h_z h_\theta} \left[\sum_{m=1}^M \lambda_m^{\theta z} N_m(T) \frac{\Delta T_{j,k+1} - \Delta T_{j,k}}{h_\theta} \right] \right] + \end{aligned}$$

$$+ \frac{2}{rh_\theta h_z^2} \left(\sum_{m=1}^M \lambda_m^{zz} N_m(T) \frac{T_{j+1,k} - T_{j,k}}{h_z} \right)]. \quad (3.113)$$

При решении задачи методом регуляризации А.Н. Тихонова для второй компоненты тензора теплопроводности

$$\begin{aligned} f_{\lambda_{\theta z}} = & - \int_0^{\tau_{max}} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \{ [T_{j,k} - \tilde{T}_{j,k}] \Delta T_{j,k} \\ & + I_\gamma] \left[\sum_{m=1}^M N_m(T) \frac{T_{j,k+1} - T_{j,k} + \Delta T_{j,k+1} - \Delta T_{j,k}}{2h_\theta} \right] \\ & + \Delta \gamma \lambda_m^{zz} \} / \left[\frac{1}{h_z h_\theta r} \left[\sum_{m=1}^M \lambda_m^{\theta\theta} N_m(T) \frac{\Delta T_{j,k+1} - \Delta T_{j,k}}{h_\theta} \right] \right. \\ & \left. + \frac{2}{r^2 h_z h_\theta} \left[\sum_{m=1}^M \lambda_m^{\theta z} N_m(T) \frac{\Delta T_{j,k+1} - \Delta T_{j,k}}{h_\theta} \right] + \right. \\ & \left. + \frac{2}{rh_\theta h_z^2} \left(\sum_{m=1}^M \lambda_m^{zz} N_m(T) \frac{T_{j+1,k} - T_{j,k}}{h_z} \right) \right]. \quad (3.114) \end{aligned}$$

По аналогии получим (3.112)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta L}{\partial \lambda_m^{\theta z}} = & \int_0^{\tau_{max}} f_{\lambda_{\theta z}} d\tau = \frac{h_\tau}{12} \left[\left(f_{\lambda_{\theta z}}(\tau) + 4f_{\lambda_{\theta z}}\left(\frac{\tau + h_\tau}{2}\right) + f_{\lambda_{\theta z}}(\tau + h_\tau) \right) \right], \quad (3.115) \\ & \tau \in [0, \tau_{max} - h_\tau]. \end{aligned}$$

Выражение для третьей компоненты тензора теплопроводности:

$$\begin{aligned} f_{\lambda_{\gamma\theta}} = & \int_0^{\tau_{max}} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K [T_{j,k} - \tilde{T}_{j,k}] \Delta T_{j,k} \left[\sum_{m=1}^M N_m(T) \frac{T_{j,k+1} - T_{j,k} + \Delta T_{j,k+1} - \Delta T_{j,k}}{2h_\theta} \right] / \\ & / \left[\frac{1}{h_\theta^2 r^4} \left[\sum_{m=1}^M \lambda_m^{\theta\theta} N_m(T) \frac{\Delta T_{j,k+1} - \Delta T_{j,k}}{h_\theta} \right] + \frac{2}{r^3 h_z h_\theta} \left[\sum_{m=1}^M \lambda_m^{\theta z} N_m(T) \frac{\Delta T_{j,k+1} - \Delta T_{j,k}}{h_\theta} \right] \right. \\ & + \\ & \left. + \frac{2}{rh_\theta h_z} \left(\sum_{m=1}^M \lambda_m^{zz} N_m(T) \frac{T_{j+1,k} - T_{j,k}}{h_z} \right) \right]; \quad (3.116) \end{aligned}$$

При решении задачи методом регуляризации А.Н. Тихонова для второй компоненты тензора теплопроводности

$$\begin{aligned}
 f_{\lambda_{\theta\theta}} = & \int_0^{\tau_{max}} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \{ [T_{j,k} - \tilde{T}_{j,k}] \Delta T_{j,k} \\
 & + +I_{\gamma} \left[\sum_{m=1}^M N_m(T) \frac{T_{j,k+1} - T_{j,k} + \Delta T_{j,k+1} - \Delta T_{j,k}}{2h_{\theta}} \right] + \\
 & + \Delta \gamma \lambda_m^{\theta\theta} / \left[\frac{1}{h_{\theta}^2 r^4} \left[\sum_{m=1}^M \lambda_m^{\theta\theta} N_m(T) \frac{\Delta T_{j,k+1} - \Delta T_{j,k}}{h_{\theta}} \right] \right. \\
 & \left. + \frac{2}{r^3 h_z h_{\theta}} \left[\sum_{m=1}^M \lambda_m^{\theta z} N_m(T) \frac{\Delta T_{j,k+1} - \Delta T_{j,k}}{h_{\theta}} \right] \right] + \\
 & \left. + \frac{2}{r h_{\theta} h_z} \left(\sum_{m=1}^M \lambda_m^{zz} N_m(T) \frac{T_{j+1,k} - T_{j,k}}{h_z} \right) \right]. \quad (3.117)
 \end{aligned}$$

По аналогии с (3.112) получим

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \delta L}{\partial \lambda_m^{\theta\theta}} = & \int_0^{\tau_{max}} f_{\lambda_{\theta\theta}} d\tau = \frac{h_{\tau}}{12} \left[\left(f_{\lambda_{\theta\theta}}(\tau) + 4f_{\lambda_{\theta\theta}}\left(\frac{\tau + h_{\tau}}{2}\right) + f_{\lambda_{\theta\theta}}(\tau + h_{\tau}) \right) \right], \quad (3.118) \\
 & \tau \in [0, \tau_{max} - h_{\tau}].
 \end{aligned}$$

Суммарная интегральная погрешность вычислительного процесса на n -ой итерации может быть оценена по следующей зависимости

$$\delta = O(\Delta T + \Delta \tau + z^2 + \Delta \theta^2), \Delta T = \max T(\theta, z, \tau).$$

Таким образом, была произведена модернизация метода идентификации симметричного тензора теплопроводности, заключающаяся в следующем:

1. Решение «прямой» задачи теплопроводности при наличии сложного лучисто-конвективного теплового потока на одной из границ конструкции шпангоута при его аппроксимации до второго порядка точности.
2. Решение задачи восстановления компонент симметричного тензора теплопроводности двумя методами регуляризации: методом итерационной регуляризации и методом регуляризации А.Н. Тихонова.

4 ТЕПЛОВАЯ ОТРАБОТКА ОБЪЕКТА ИССЛЕДОВАНИЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО СОСТОЯНИЯ КОНСТРУКЦИИ

4.1 Исходные данные для проектирования стенда для проведения наземной тепловой обработки изделия

На рисунке 5 показано распределение тепловых аэродинамических потоков по передней части АСА [90]. Основными нагреваемыми зонами являются: титановый шпангоут, кольцо теплозащитного покрытия (ТЗП) и сферическая часть ТЗП.

Распределения тепловых потоков получены на основе результатов расчётных исследований численного решения полной системы уравнений Навье-Стокса [90].

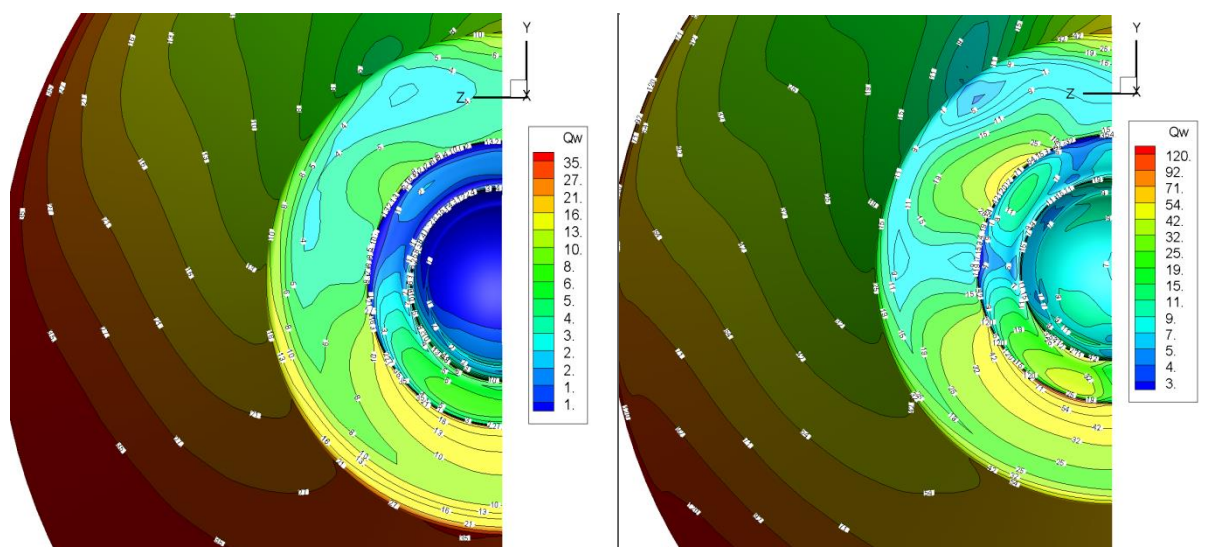


Рисунок 5 – Распределения тепловых потоков, полученные на основе результатов расчётов для двух моментов времени

На рисунке 6 показана схема расположения основных участков, нагреваемых при экспериментальной обработке. Считаем, что конструкция стыковочного агрегата и распределение тепловых потоков имеет плоскость, поэтому на рисунке 5 показана только половина передней части ВА.

Основными нагреваемыми зонами являются: титановый шпангоут, кольцо ТЗП и сферическая часть ТЗП.

Согласно пространственно-временной модели (ПВМ) тепловые потоки на титановый шпангоут и кольцо ТЗП зависят от угловой координаты ω , отсчитываемой по часовой стрелке от оси симметрии. В диапазоне $\omega = 0 \div 90^\circ$ тепловые потоки описываются функцией

$$q = (q_1 - q_3) \cdot \cos \omega + q_3,$$

для диапазона $\omega = 90 \div 180^\circ$

$$q = (q_2 - q_3) \cdot \cos \left(2\omega - \frac{3}{2}\pi \right) + q_3. \quad (4.1)$$

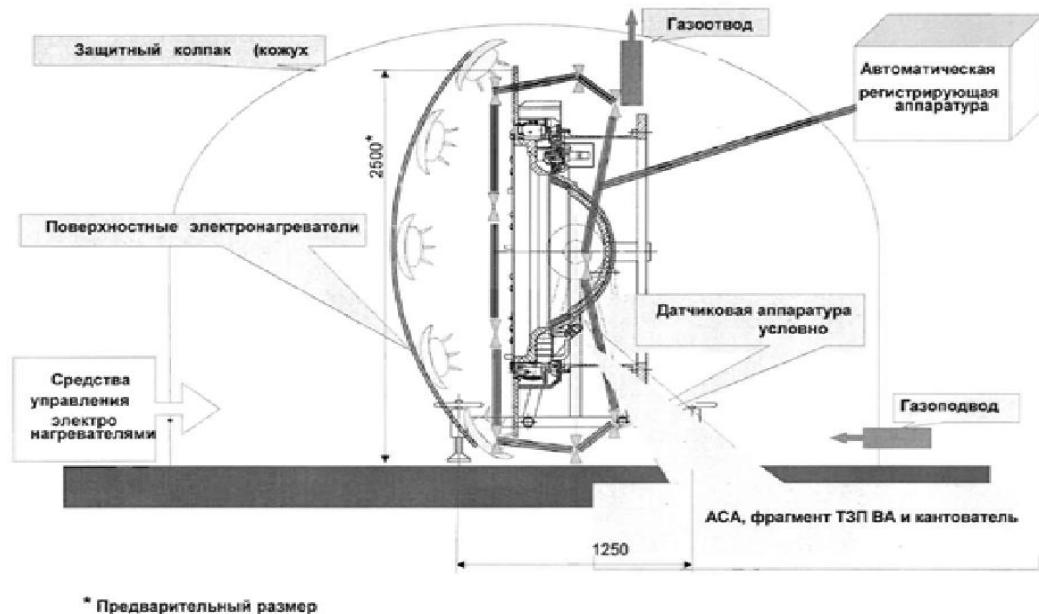


Рисунок 6 – Схема расположения основных участков, нагреваемых при экспериментальной отработке

Используемые при расчёте температур АСА тепловые аэродинамические нагрузки, полученные согласно ПВМ, представлены на рисунке 7.

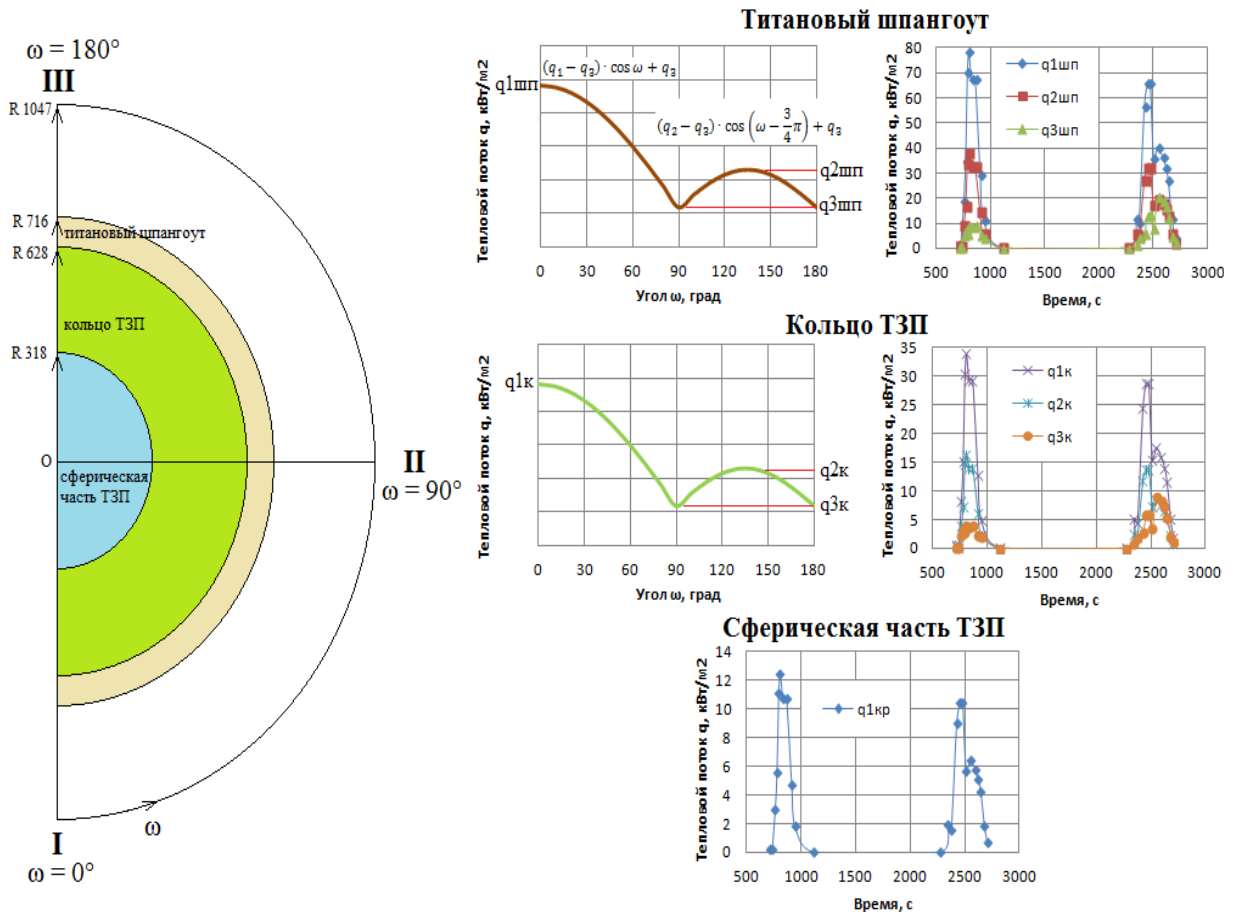


Рисунок 7 – Распределение тепловой аэродинамической нагрузки

Принятая ПВМ внешнего теплового нагрева, используется для выбора ИК-имитаторов лучистого нагрева с кварцево-галогенными лампами (КГЛ) и для дальнейших расчётов температур при ТСИ.

Для моделирования тепловых аэродинамических нагрузок при спуске ВА ПТК принято решение использовать лучистый нагрев испытуемого изделия АСА с помощью КГЛ.

Методика расчётного моделирования радиационного нагрева от КГЛ и систем КГЛ изложены в работе [3].

На рисунке 8 приведены угловые распределения потоков для трёх рассматриваемых зон при максимальной тепловой нагрузке ($t = 806 \text{ C}$).

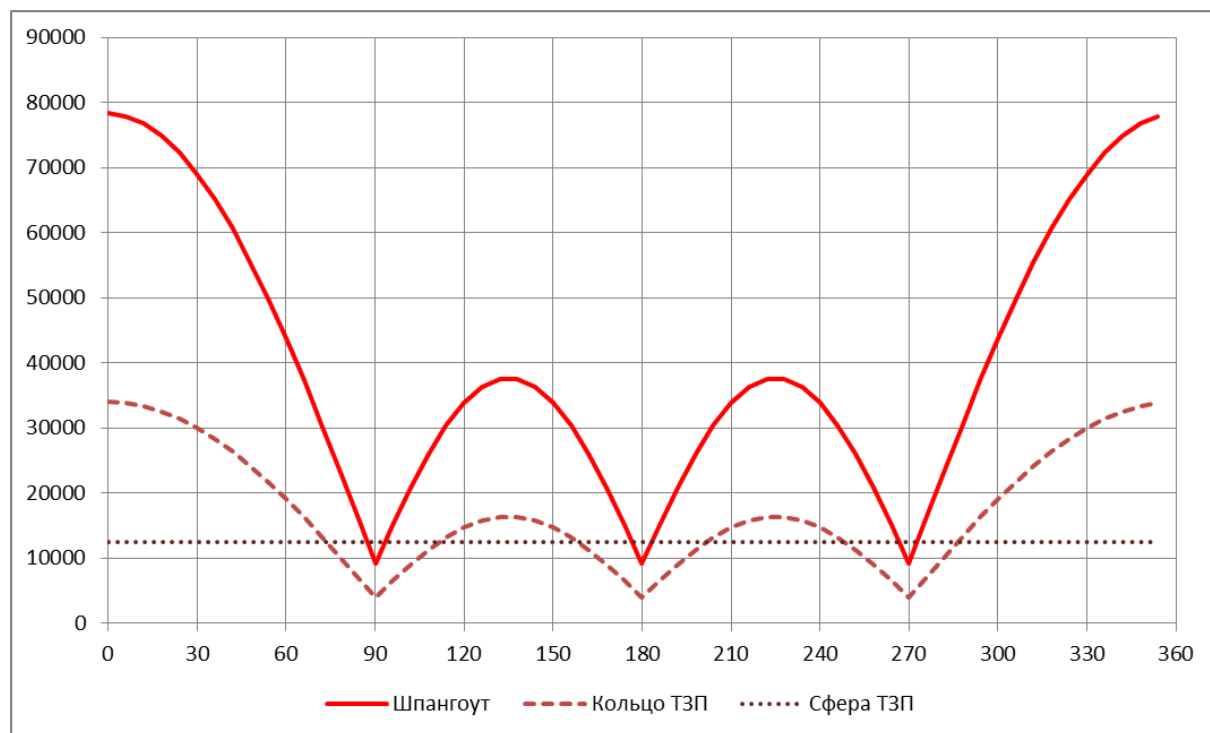


Рисунок 8 – Угловое распределения потоков для трёх рассматриваемых зон при максимальной тепловой нагрузке

4.2 Численное моделирование и результаты расчётов обратной задачи радиационного теплопереноса

При моделировании лучистого теплообмена в системе излучающих и поглощающих поверхностей хорошо разработаны и применяются методы расчёта на основе моделей диффузного отражения и излучения (метод угловых коэффициентов).

Наиболее корректным подходом в системе зеркальных поверхностей представляется трассировка лучей методом Монте-Карло [92]. Основным недостатком данного метода является значительное время расчёта, необходимое для достижения требуемой точности. Однако в этих методах используются упрощённые модели источников излучения, и рассчитывается только излучения, уходящее в сторону наблюдателя, игнорируются невидимые поверхности и т.д.

Метод состоит в следующем. Все поверхности системы задаются пространственными прямоугольниками. Для каждого прямоугольника заданы:

- координаты базовой точки $O(x, y, z)$;
- векторы сторон A и B (длины векторов равны длинам сторон a и b);
- вектор нормали N (единичной длины).

Кроме того для такого прямоугольника задаётся равномерное по сторонам разбиение на сетку вспомогательных прямоугольников ($m \times n$). Плотности лучистых потоков рассчитываются для каждой прямоугольной ячейки этой сетки. Также для каждой этой ячейки задаются собственные физические характеристики теплопереноса (коэффициента отражения, поглощения, зеркальности и прозрачности). В то же время геометрические характеристики каждой ячейки сетки целиком задаётся базовым прямоугольником. Все ячейки имеют общую нормаль N и одинаковую площадь

$$F = \frac{ab}{mn}. \quad (4.2)$$

Центральная точка каждой ячейки определяется векторным выражением

$$C_{i,j} = O + \frac{A \left(i + \frac{1}{2}\right)}{m} + B \left(j + \frac{1}{2}\right) n. \quad (4.3)$$

Лучистые потоки в системе моделируются множеством лучей, выпускаемых источниками излучения случайным образом в соответствии с используемой моделью излучения. Каждый луч задаётся координатами начальной точки P , единичным вектором направления R и скалярной величиной q , соответствующей мощности излучения.

Точка пересечения такого луча с произвольно ориентированным в пространстве прямоугольником рассчитывается по векторному соотношению:

$$O = Au + Bv = PP + Rw. \quad (4.4)$$

Если $w > 0, 0 < u < 1, 0 < v < 1$, то луч пересекает прямоугольник. Элемент сетки (i, j) , покрывающей прямоугольник, определяется значениями параметров u, v

$$i = um, j = vn.$$

Если элемент (i, j) оказывается полностью прозрачным, то пересечение игнорируется, а из всех «непрозрачных» пересечений выбирается ближайшее: пересечение с минимальным положительным значением параметра w . По коэффициенту поглощения ε для этого элемента и «мощности» q луча рассчитывается приращение поглощённого элементом лучистого потока

$$dq_{i,j} = \varepsilon q. \quad (4.5)$$

На эту величину уменьшается «мощность» луча q :

$$q' = q - dq_{i,j}. \quad (4.6)$$

Если новое значение q не равно 0, то это означает, что луч переотражается, и следует вычислить новые значения начальной точки P и направления луча R . Координаты начальной точки отражённого P' луча определяется случайным образом по следующим соотношениям

$$R' = \left(\frac{A}{a}\right) \cos(\varphi) + \left(\frac{B}{b}\right) \sin(\gamma) + N \cos(\gamma), \quad (4.7)$$

где φ – случайное число от 0 до 2π ;

$\cos(\gamma)$ – случайное число от 0 до 1.

В случае зеркальной модели отражения направление отражённого луча R' определяется направлением падающего и рассчитывается по векторному соотношению

$$R' = R - 2(NR)N, \quad (4.8)$$

где N – нормаль к поверхности;

R – направление падающего луча;

(NR) – скалярное произведение этих векторов.

Расчёт переотражений каждого луча продолжается до тех пор, пока луч полностью не поглотится или пока не было обнаружено ни одного пересечения луча с поверхностью.

Предлагается использовать лампы номинальной мощностью 1 кВт и длиной ~ 350 мм собранные в «пакеты» на панелях излучателей. Панель излучателя представляет собой металлический прямоугольник, теплоизолированный с обратной (нерабочей) стороны шириной 400x150 мм.

На каждой панели может располагаться до 10 ламп. Количество ламп на каждой конкретной панели определяется мощностью, которую необходимо подавать на данный излучатель.

Для имитации потоков предлагается использовать 11 излучателей. Мощности излучателей, схема их размещения и создаваемые потоки приведены на рисунке 4. Помимо излучателей целесообразно использовать также 4 отражателя с теми же размерами (400x150) с теплоизолированными обратными поверхностями (на рисунке 9 изображены серым цветом).

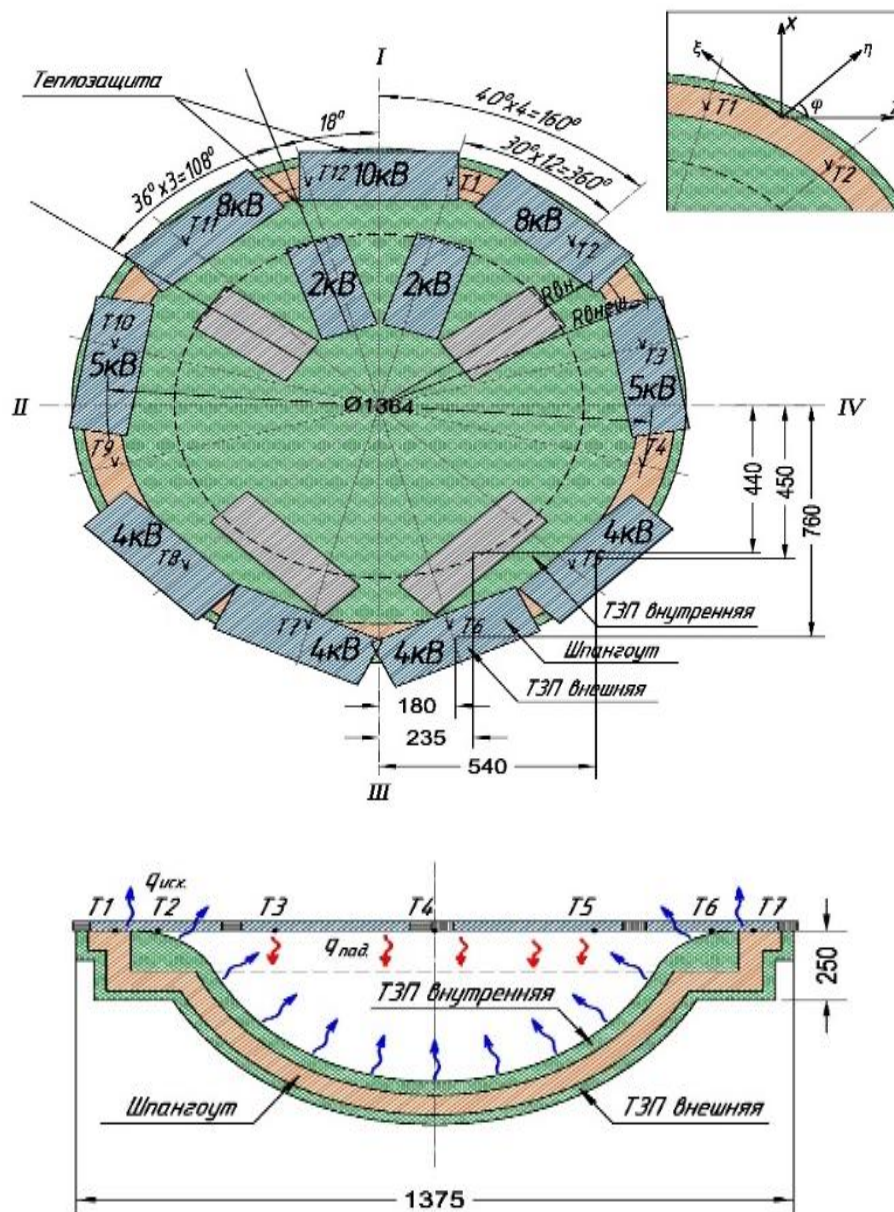


Рисунок 9 – Схема размещения ИК-имитаторов (слева) и распределения падающей тепловой лучистой нагрузки по элементам конструкции

На рисунках 10 – 12 приведены результаты сравнения угловых распределений тепловых потоков от имитаторов с заданными распределениями для каждой из трёх зон [92 – 94].

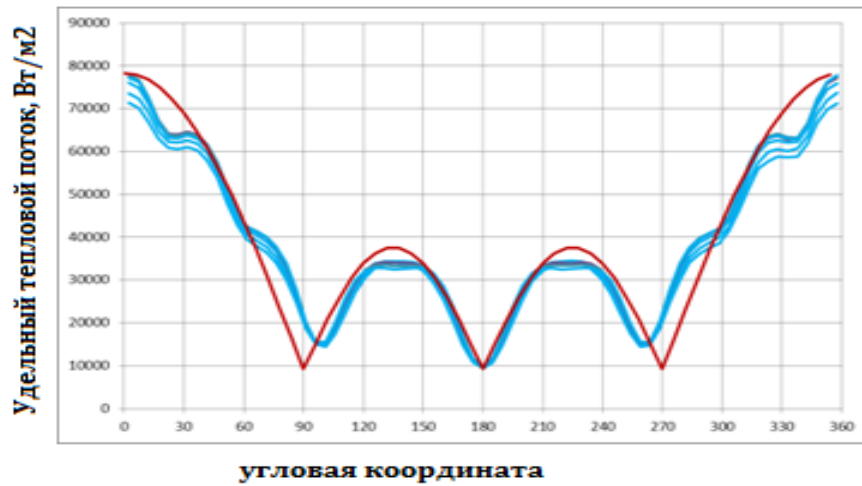


Рисунок 10 – Распределение тепловых потоков от имитаторов для шпангоута

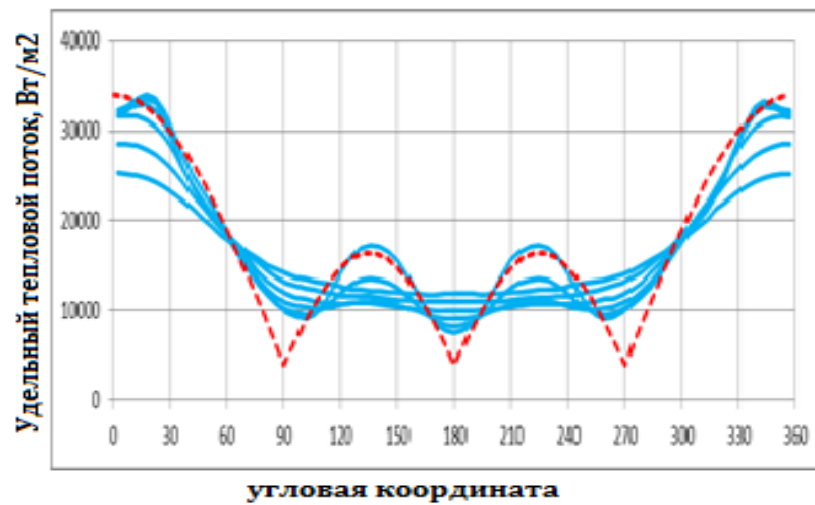


Рисунок 11 – Распределение тепловых потоков от имитаторов для кольца
ТЗП



Рисунок 12 – Распределение тепловых потоков от имитаторов для сферы ТЗП

На рисунках 13 и 14 необходимые тепловые мощности на ИК-имитаторах и их температуры поверхности, задаваемые для выдерживания необходимого падающего лучистого потока на поверхности ОИ имитирующего аэродинамический спуск АСА.

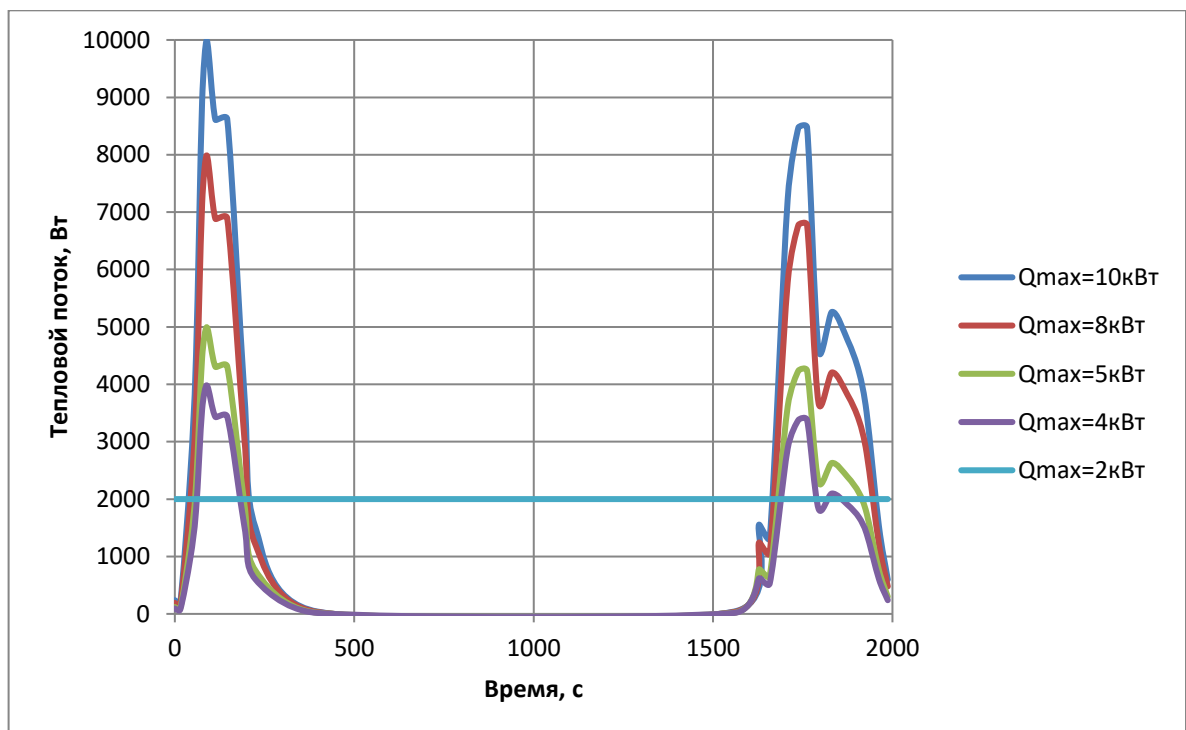


Рисунок 13 – Графики зависимостей излучающих потоков с поверхностями ламп от времени в зависимости от их максимальной излучающей способности

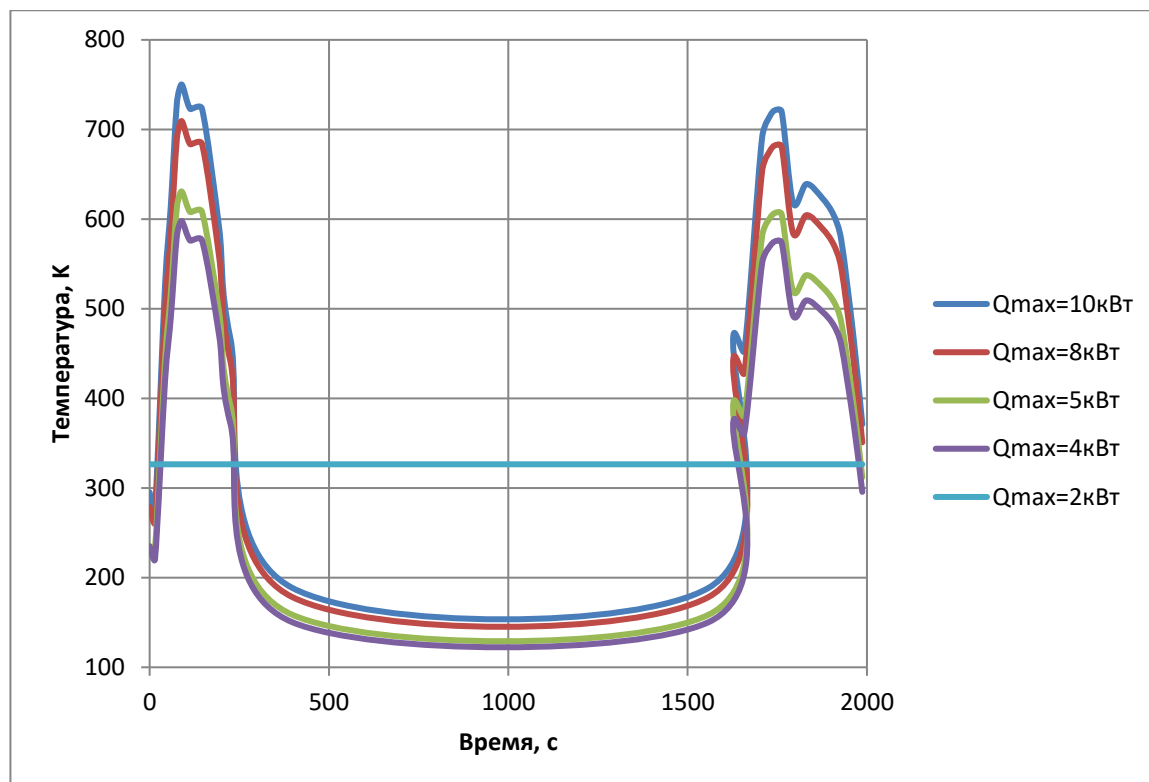


Рисунок 14 – Графики зависимостей температур поверхностей лампы от времени в зависимости от их максимальной излучающей способности

Таким образом, с использованием ПВМ аэродинамической тепловой нагрузки при спуске АСА ВА ПТК представлены результаты расчёта:

- в части способа и схемного решения имитации аэродинамического нагрева АСА путём лучистого нагрева с помощью КГЛ при проведении ТСИ натурного образца;
- в части температур теплозащитного покрытия и металлического корпуса АСА, состоящего из полусферической передней части, усечённого конуса, шпангоута.

1. Моделирование аэродинамического нагрева должно осуществляться на ЭУ посредством лучистого нагрева с помощью блоков имитаторов ИК-излучения с КГЛ. Нагревательные блоки имеют габаритные размеры $0,4 \times 0,15 \text{ м}^2$ с диапазоном мощностей имитаторов 2–10 кВт. По разработанной схеме размещения имитаторов с КГЛ на основе прямой трассировки лучей методом Монте-Карло в системе зеркальных поверхностей и модели диффузного излучения и отражения для не зеркальных поверхностей

выполнено расчётное моделирование лучистого теплообмена в системе блоков имитаторов с КГЛ и поверхности АСА. Рассмотрены два варианта размещения блоков ИК-имитаторов: базовый вариант, состоящий из 11 блоков и 4 зеркальных поверхностей и модифицированный вариант из 12 блоков и 4 зеркальных поверхностей. На основе расчёта лучистого теплообмена определены результирующие и поглощённые тепловые потоки на элементах поверхностей АСА с течением времени.

Предпочтительным следует считать модифицированный вариант размещения ИК-имитаторов из 12 блоков при разъёмной компоновочной схеме дополнительного двенадцатого блока.

Определены циклограммы падающих потоков, необходимые для расчёта подводимых электрических мощностей на КГЛ.

Сравнительный анализ расчётной внешней тепловой аэродинамической нагрузки на АСА при использовании ПВМ и при лучистом теплообмене с использованием КГЛ показал, что:

- в зонах повышенного нагрева шпангоута тепловая нагрузка, полученная по ПВМ выше, чем при лучистом нагреве на 12%, а в зонах минимального нагрева ниже на 45%.
- в зонах нагрева тора ТЗП тепловая нагрузка, полученная по ПВМ выше, чем при лучистом нагреве на 9%, а в зонах минимального нагрева ниже на 50%.
- в зонах нагрева сферы ТЗП тепловая нагрузка, при расчёте по ПВМ ниже, чем при лучистом нагреве на 45%.

4.3 Методика проведения теплостатических испытаний

Для осуществления режимов нагрева и проведения типовых (2-х нырковых) испытаний проводится монтаж и отладка экспериментальной установки. Она состоит из нагревателя (стойки с ламповыми панелями), системы нагрева и управления нагревом, системы измерений, системы

удаления продуктов термодеструкции (при необходимости), системы подачи в зону нахождения ОИ инертных газов (при необходимости). При отладке экспериментальной установки (ЭУ) после её монтажа апробируется работа всех систем ЭУ.

Вид ЭУ показан на рисунке 15. Разбивка ОИ на зоны нагрева показана на рисунке 3.

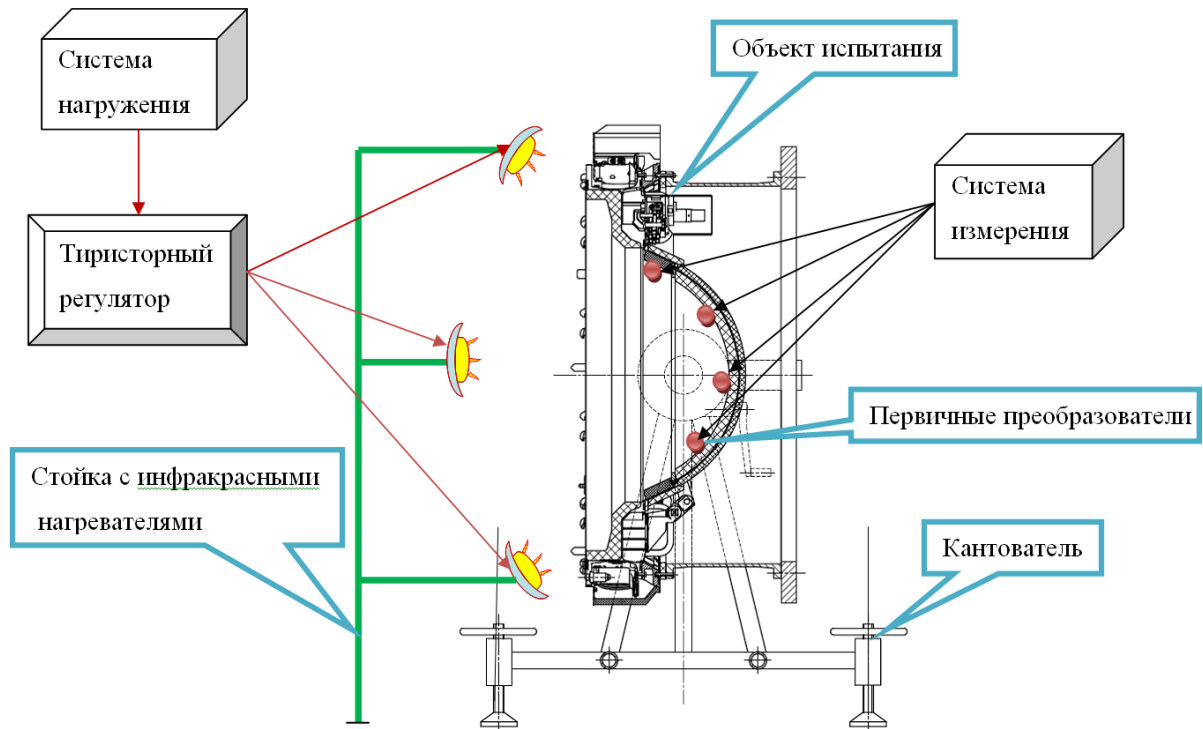


Рисунок 15 – Вид экспериментальной установки

Нестационарный нагрев проводится по программе, составленной на основе расчёта теплового потока (рисунок 5) и температурного поля для зон нагрева ОИ (рисунки 6, 7). В качестве датчиков температуры применяются термопары типа ХА(К) и термометры сопротивления ТЭП-018. Кроме измерения температуры термопарами проводится контроль теплового потока, поступающего от панелей нагревателя к элементам конструкции АСА.

Проводятся также измерения перемещений элементов конструкции АСА. Необходимость задействования при проведении теплостатических испытаний АСА систем подачи в зону нахождения ОИ инертного газа и системы удаления продуктов термодеструкции определяется при проведении отладочных испытаний ЭУ с наличием в ней ОИ.

4.4 Экспериментальная установка

Для проведения теплостатических испытаний АСА и фрагмента теплозащитного покрытия, возвращаемого привлекается экспериментальная установка. Структурная схема экспериментальной установки приведена на рисунке 16.

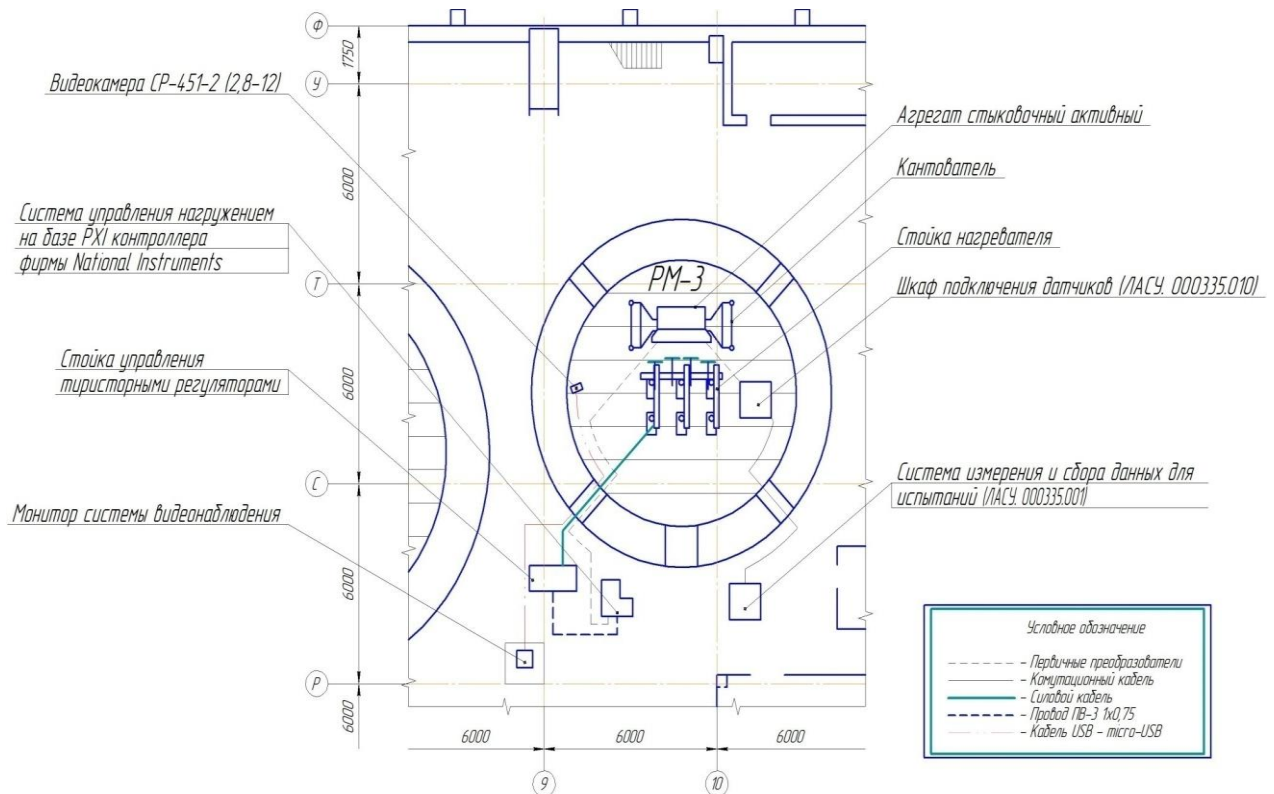


Рисунок 16 – Структурная схема экспериментальной установки

В состав экспериментальной установки входят следующие элементы:

- нагреватель для создания переменного по времени теплового потока;
- средства управления тепловым потоком нагревателя;
- датчиковая аппаратура (датчики для измерений перемещений и температуры);
- кабельная сеть для обеспечения подачи электроэнергии в нагреватель и в устройство управления нагревом;
- автоматическая регистрирующая аппаратура;

- защитный кожух (при необходимости) для обеспечения возможности создания инертной газовой среды и удаления продуктов термодеструкции;
- система (средства) подачи нейтрального газа в зону нахождения ОИ;
- система (средства) удаления продуктов термодеструкции;
- объект испытаний.

Средства нагрева.

Нагрев элементов ОИ до заданных температур осуществляется с помощью специального нагревателя. Он состоит из стойки, панелей с нагревательными элементами и кронштейнов, с помощью которых проводится крепление панелей к стойке и регулировка величины расстояния от панелей до ОИ. В качестве нагревательных элементов применяются кварцевые лампы типа КГТ 230-1000 (380, П14/63).

При проведении испытаний проводится зональный нагрев. Область нагрева АСА разделяется на 6 зон. Регулировка величин температуры в каждой зоне проводится автономно по разработанной программе нагрева.

В качестве устройства для управления нагревом служит блок тиристорных регуляторов. Каждый тиристор марки Меандр управляет нагревом одной зоны ОИ. Управление нагревом проводится по программе по обратной связи с использованием показаний, установленной в этой зоне термопары марки ХА. При этом осуществляется контроль теплового потока, попадающего на эту зону от панели нагревателя.

Средства измерения.

При проведении теплостатических испытаний АСА и его элементов измеряются в каждом критическом элементе конструкции ОИ температура, тепловой поток, падающий от панели нагревателя, а также перемещение конструкции ОИ под воздействием неравномерного температурного поля в зонах нагрева ОИ.

Измерение температуры.

Измерение температуры в 12 зонах нагрева ОИ и на металлическом корпусе АСА осуществляется непрерывно в течение всего цикла нагрева. При одном цикле нагрева время проведения измерений составляет ориентировочно 2000 с. Измерение, обработка и регистрация температуры на металлическом корпусе АСА осуществляется с помощью измерительно-вычислительного комплекса «ИВК-11», в зонах нагрева ОИ – с помощью Системы измерений и сбора данных с использованием установки измерительной LTR-EU-16-1, зав. № 2D563509.

Результаты измерений и их обработки отображаются в процессе испытаний на дисплее.

В качестве первичных преобразователей температуры используются термопары типа ХА или ХК с диапазоном измерения $(0 \div 800)^\circ\text{C}$ и $(0 \div 600)^\circ\text{C}$ соответственно, устанавливаемые на поверхность ОИ с помощью клея ВК-9 или К-400 в соответствии с ОСТ 92-4313-79. Кроме термопар для измерения температур используются датчики температур типа ТЭП-018.

Измерение тепловых потоков.

Измерение тепловых потоков, падающих от панелей нагревателя на конструктивные элементы ОИ, осуществляется непрерывно в течение процесса нагрева.

В качестве первичных преобразователей используются датчики теплового потока ФОА 036 с диапазоном измерений $(0-100)$ кВт/м².

Перечень основных и вспомогательных средств измерений приведён в таблице.

Таблица – Применяемые средства измерений (СИ)

| Наименование СИ, тип | Технические и метрологические характеристики | Наименование измеряемой величины или функциональное назначение |
|---|--|---|
| Основные средства измерений | | |
| Преобразователи температуры термоэлектрические (термопары) хромель-копелевые. Тип термопары ТХК (L) (ГОСТ Р 8.585-01, ГОСТ 6616-94) | Обозначение по ГОСТ 6616-94: L. Диапазон измеряемых температур от минус 200 °С до плюс 600 °С. Абсолютная погрешность $\pm 2,5$ °С | Измерение температуры поверхности изделия |
| Преобразователи температуры термоэлектрические (термопары) хромель-алюминиевые. Тип термопары ТХА (K) (ГОСТ Р 8.585-01, ГОСТ 6616-94) | Обозначение по ГОСТ 6616-94: K. Диапазон измеряемых температур от минус 200 °С до плюс 1200 °С. Абсолютная погрешность $\pm 2,5$ °С | Измерение температуры поверхности изделия |
| Преобразователи перемещений тип SDS/R | Преобразователи тензорезисторные мостовой схемы. Диапазон измеряемых перемещений от 0 до 10 мм. Погрешность измерений перемещений ± 6 % при доверительной вероятности 0,95 | Измерение перемещений элементов изделия |
| Установка измерительная LTR с модулем LTR 27 | Пределы основной приведённой погрешности 0,1 %. Диапазон измерения входного сигнала от минус 25 до плюс 75 мВ | Измерение сигнала с выхода термопар и датчиков теплового потока |
| Преобразователи температуры - - термометры сопротивления. Тип: ТЭП-018 | Преобразовательные тензорезисторные. Диапазон измеряемых температур от минус 260 до плюс 300 °С. Абсолютная погрешность ± 4 °С | Измерение температуры поверхности изделия |

| Вспомогательные средства измерений | | |
|---|--|--|
| Преобразователи теплового потока. Тип: ФОА 036 | Диапазон измеряемых тепловых потоков (0-100) кВт. Погрешность измерений $\pm 2\%$ | Контроль теплового потока достигающего поверхности изделия |
| Измеритель параметров микроклимата «Метеоскоп-М» (Госреестр № 32014-11) | Диапазон измерений температуры: от минус 40 до плюс 85 °С. Предел допускаемой абсолютной погрешности измерений температуры: $\pm 0,2$ °С. Диапазон измерений давления воздуха: от 80 до 110 кПа. Пределы допускаемой абсолютной погрешности измерений давления: $\pm 0,13$ кПа. Диапазон измерений относительной влажности: от 3 до 97 %. Пределы допускаемой абсолютной погрешности измерений давления: $\pm 3\%$ | Контроль условий выполнения измерений |

Обеспечение нейтральной среды.

При проведении теплостатических испытаний АСА в зоне нахождения ОИ обеспечивается инертная газовая среда (при необходимости) для предотвращения возгорания находящихся в этой зоне элементов ЭУ и АСА (кабелей системы измерения, ТЗП, ТЗИ и т.п.). С этой целью в лабораторном зале около смотрового люка бокса РМ-3 помещаются баллоны с газообразным азотом. Монтируется система подачи азота в зону, где располагается ОИ. По команде ведущего испытания оператором подаётся азот в ЭУ. Необходимость создания в зоне нахождения ОИ нейтральной среды определяется при проведении отладочных испытаний ЭУ.

Обеспечение удаления продуктов деструкции тепловой защиты АСА.

Для удаления продуктов термодеструкции тепловой защиты АСА используется вентиляционная система бокса РМ-3. Вентиляционная система бокса обеспечивает восьмикратный обмен воздуха и работает реверсивно, т.е. нижний ярус воздухозаборника может работать на приток воздуха, а верхний ярус воздухозаборника – на вытяжку и наоборот.

С целью ускорения удаления продуктов деструкции на полу бокса у ЭУ может устанавливаться дополнительно к общей вентиляции переносной

вентилятор. Он включается в случае значительного задымления помещения бокса РМ-3.

Управление нагревом при испытаниях.

Управление нагревом (мощностью, подводимой на кварцевые галогенные лампы) проводится в автоматическом режиме с помощью тиристорных регуляторов мощности с учётом обратной связи от термопар. Программа управления реализована на применении ПИД-регулятора, где коэффициенты «П», «И» и «Д» подбираются опытным путём. Финальная проверка работы программы управления проводится во время технологической опрессовки. Структурная схема управления нагревом показана на рисунке 17.

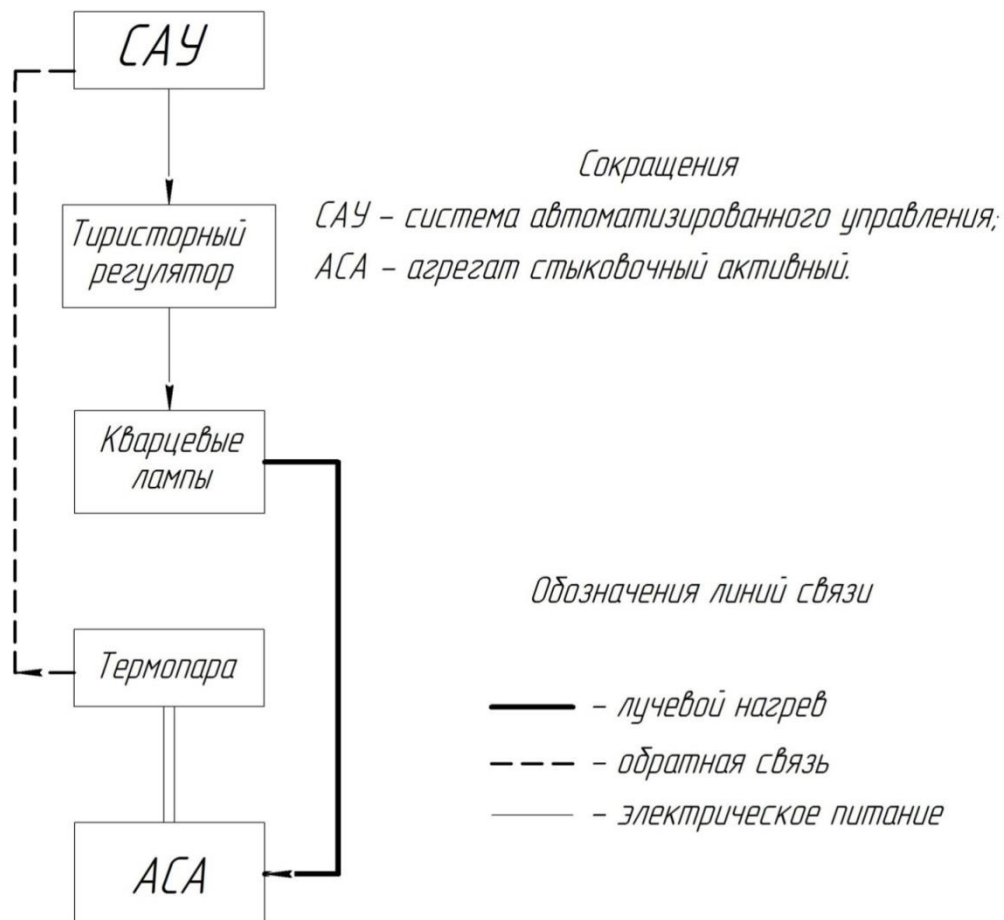


Рисунок 17 – Структурная схема автоматического управления нагревом

4.5 Результаты теплостатических испытаний активного стыковочного агрегата и теплозащитного покрытия

Теплостатические испытания АСА проводятся в лабораторном зале корпуса КТПИ в пневмогидробоксе РМ-3. Условия проведения испытаний должны соответствовать следующим требованиям:

- температура окружающей среды (15÷40) °С;
- относительная влажность воздуха (45÷80) %;
- давление воздуха (93,4-106,6) кПа.

Режимы, порядок, виды и этапы испытаний приведены в разделе 4.2.

На рисунках 18 и 19 представлен внешний вид АСА после проведения типового испытания № 1.

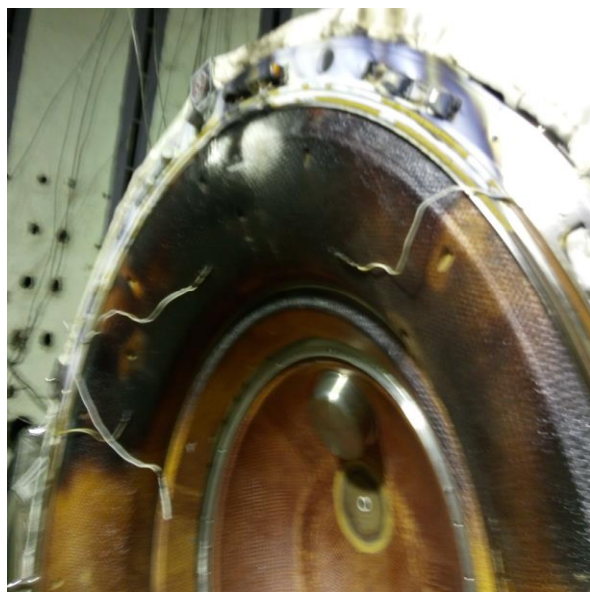


Рисунок 18 – Вид на I плоскость АСА



Рисунок 19 – Вид на III плоскость АСА

Внешним осмотром состояния ТЗП АСА определены следы термодеструкции ТЗП в зонах нагрева напротив нагревательных панелей без нарушения целостности ТСП-Ф.

Внешним осмотром АСА механических повреждений и оплавлений узлов и элементов крепления не обнаружено.

Прокладки стыковочной поверхности повреждены по всему периметру, а в 1-й зоне нагрева (I плоскость АСА) прогорели до установочной канавки.

Стыковочная поверхность АСА чистая по всему периметру за исключением зоны I плоскости, где имеются следы копоти и цвета побежалости.

Толкатели АСА в хорошем состоянии, антифрикционное покрытие присутствует.

Головки крюков механизма герметизации стыка в хорошем состоянии, за исключением зоны I плоскости, где имеются следы копоти и цвета побежалости.

Направляющие, гнезда и головки датчиков стыковочной плоскости АСА в хорошем состоянии, следов теплового воздействия (следов копоти и цветов побежалости) не имеют.

Контактное поле электроразъёмов стыка в хорошем состоянии, за исключением зоны I плоскости, где имеются следы копоти.

Защитная крышка герморазъёмов стыковочного механизма следов теплового воздействия (следов копоти и цветов побежалости) не имеет.

Результаты теплостатических испытаний (ТСИ) в зависимости от номера серии представлены на рисунках 20 – 33, где $T_{пi}$ – место установки термопары.

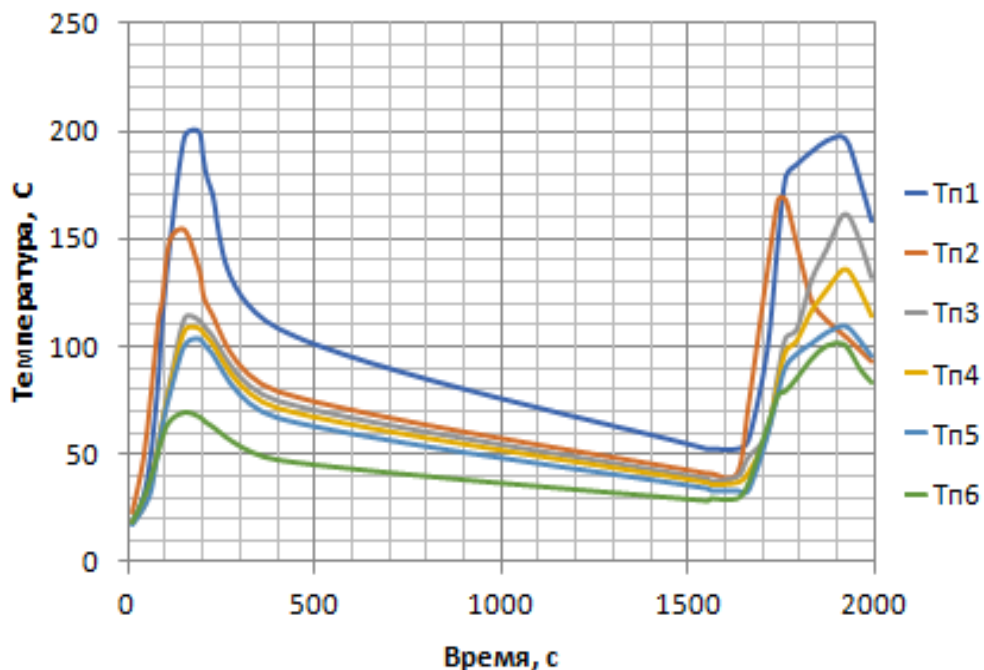


Рисунок 20 – Экспериментальное температурное поле после 1-й серии ТСИ

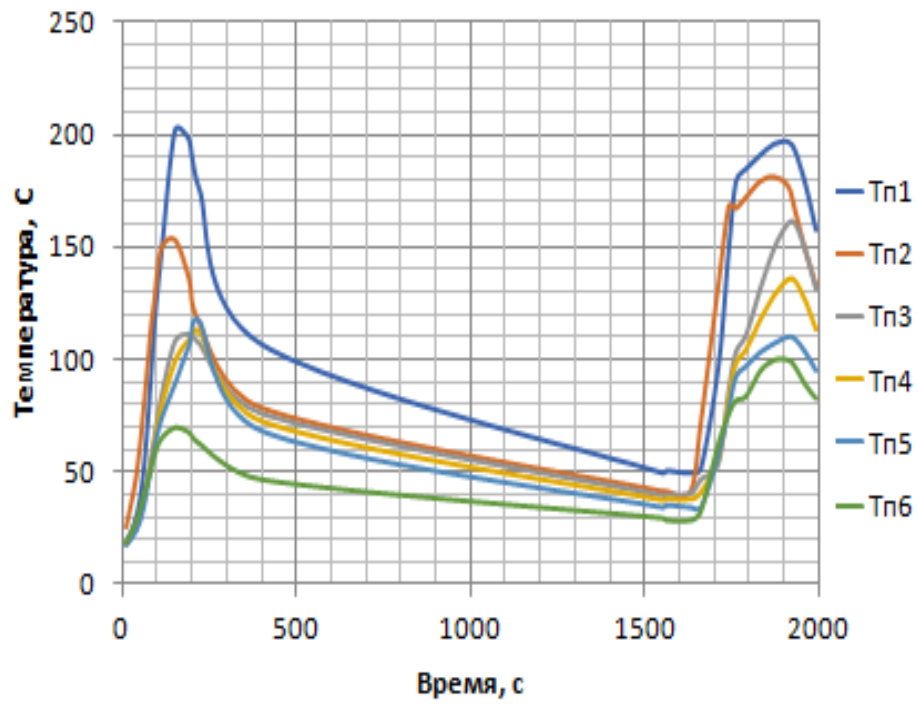


Рисунок 21 – Экспериментальное температурное поле после 2-й серии ТСИ

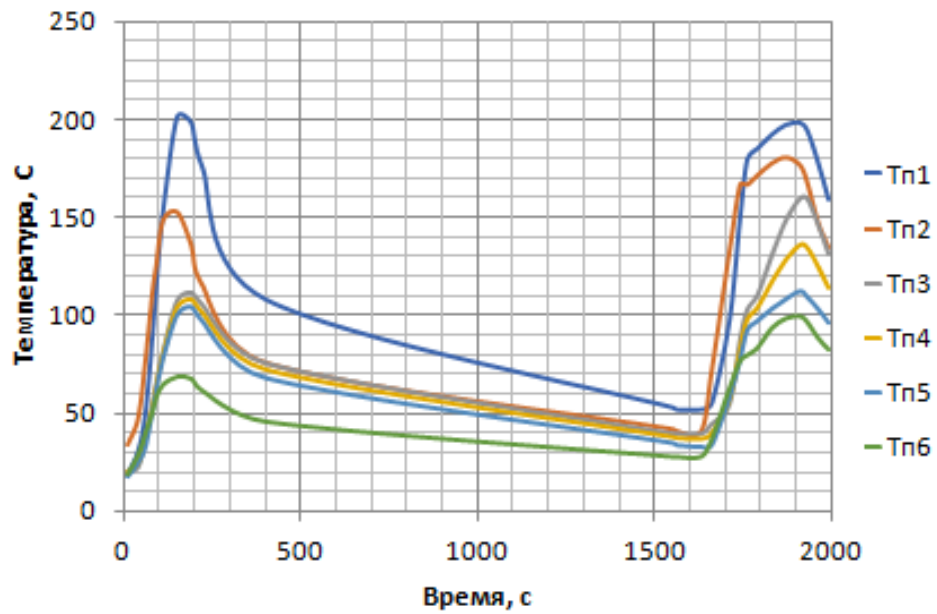


Рисунок 22 – Экспериментальное температурное поле после 3-й серии ТСИ

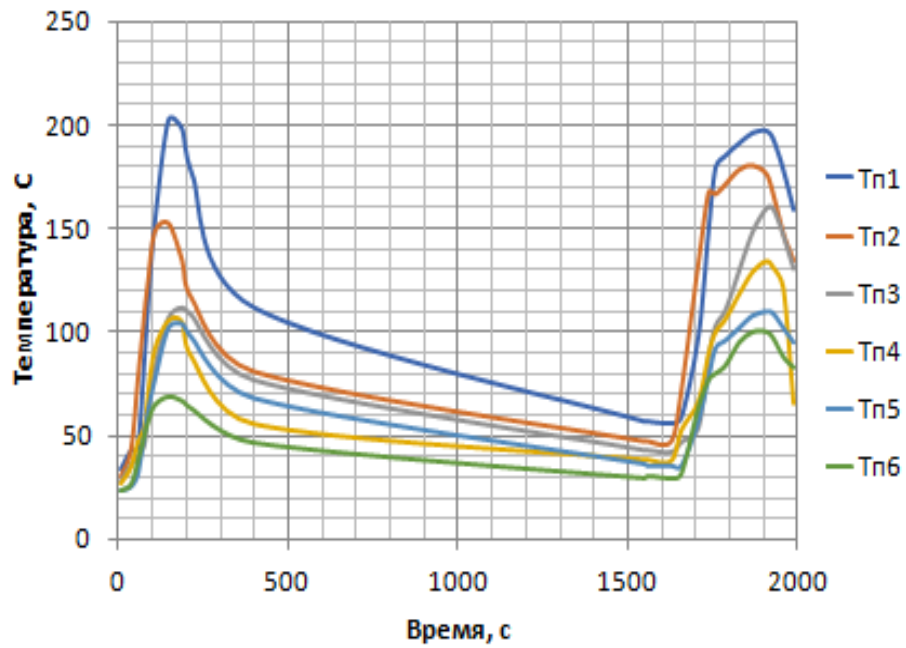


Рисунок 23 – Экспериментальное температурное поле после 4-й серии ТСИ

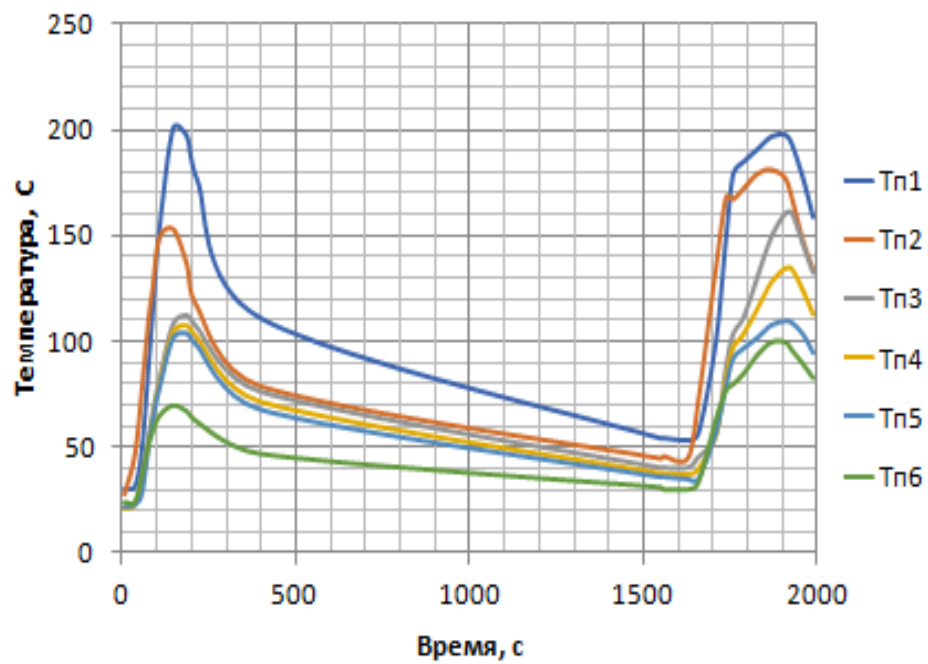


Рисунок 24 – Экспериментальное температурное поле после 5-й серии ТСИ

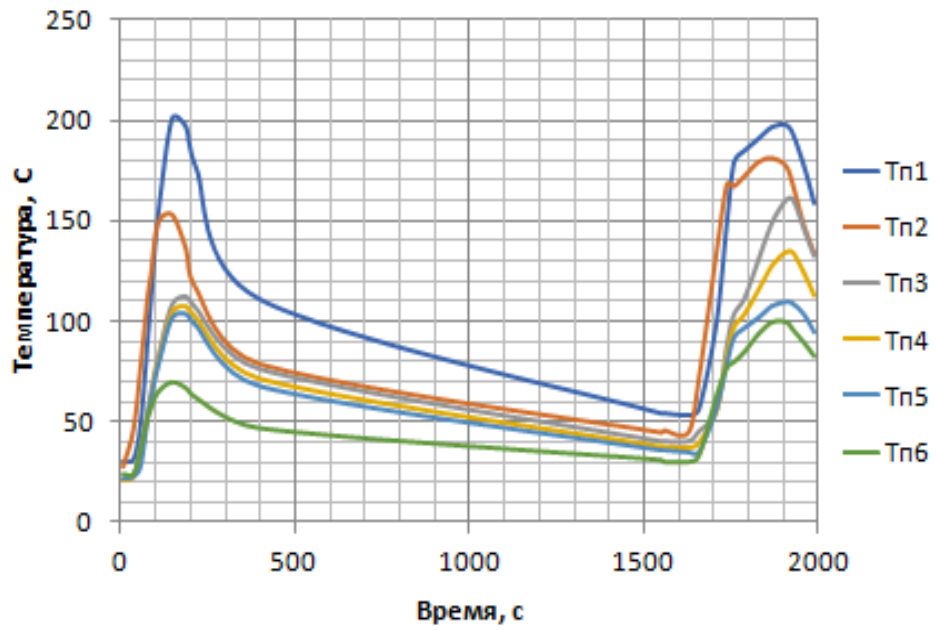


Рисунок 25– Экспериментальное температурное поле после 6-й серии ТСИ

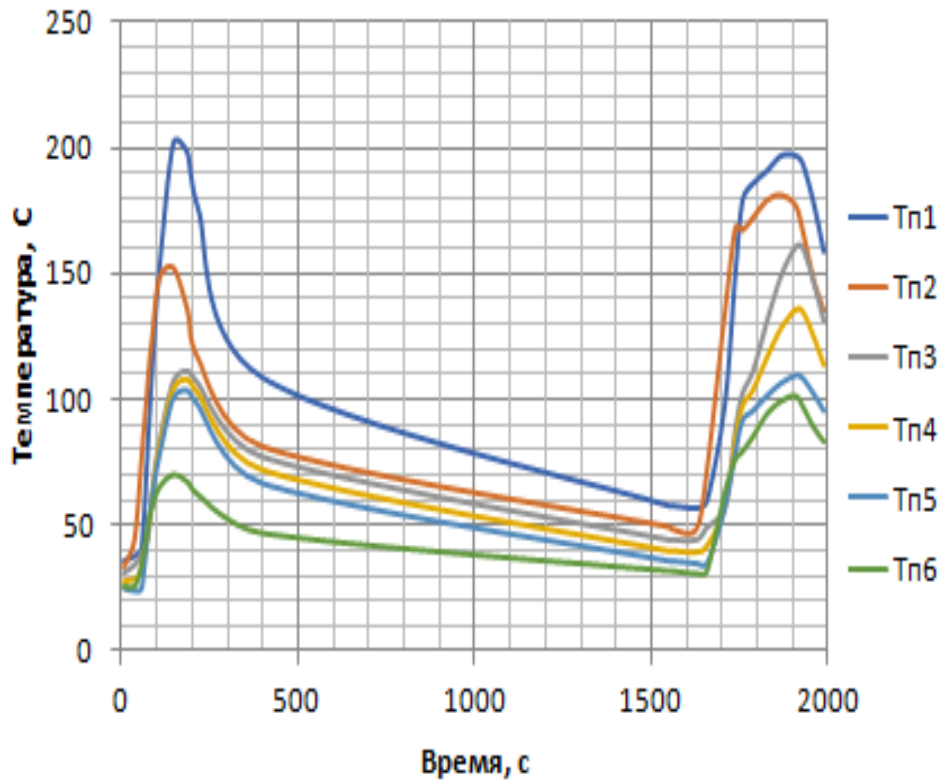


Рисунок 26 – Экспериментальное температурное поле после 8-й серии ТСИ

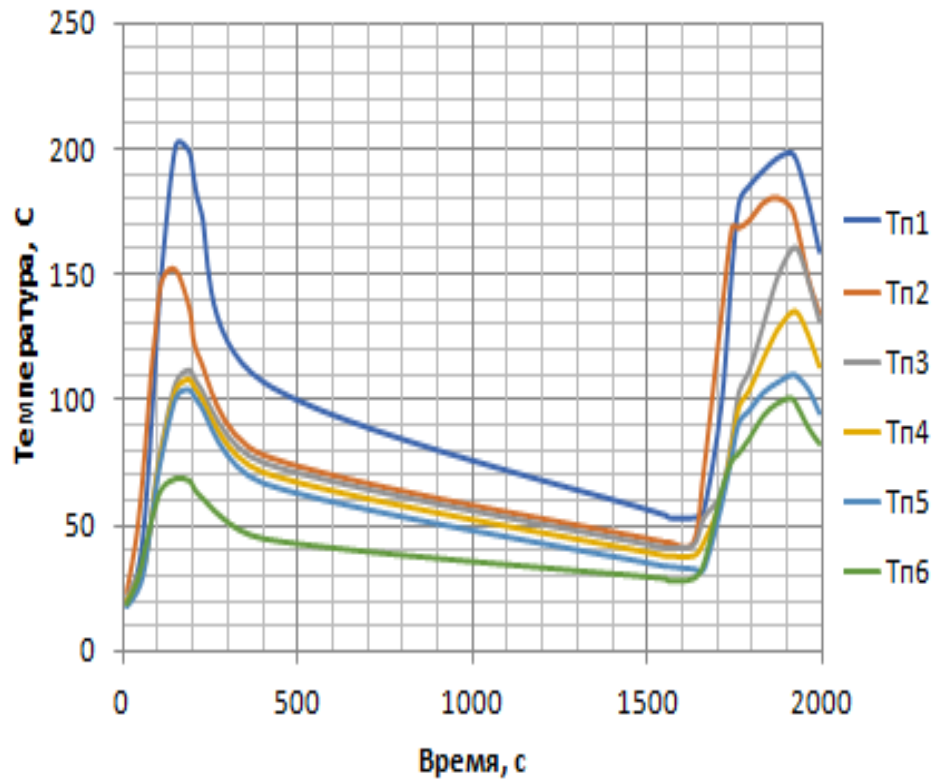


Рисунок 27 – Экспериментальное температурное поле после 9-й серии ТСИ

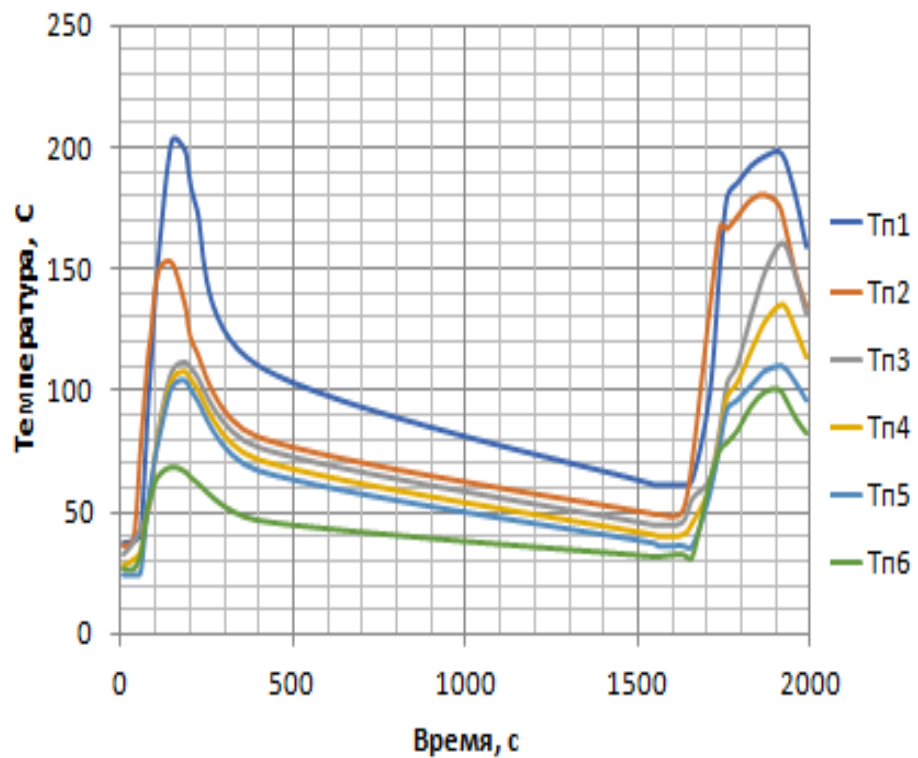


Рисунок 28 – Экспериментальное температурное поле после 10-й серии ТСИ

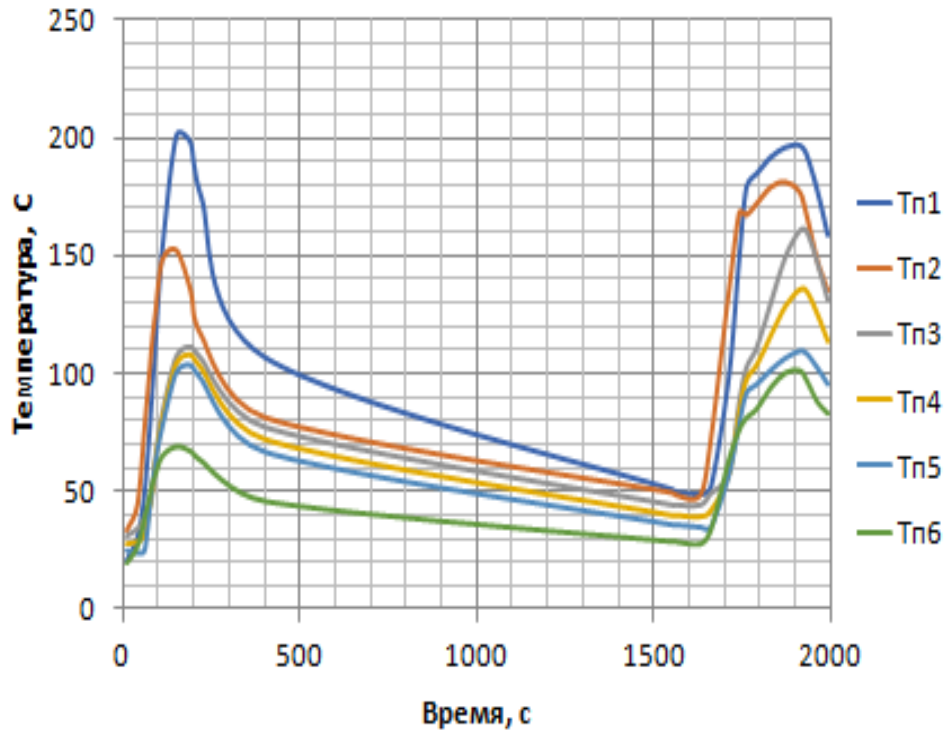


Рисунок 29 – Экспериментальное температурное поле после 11-й серии ТСИ

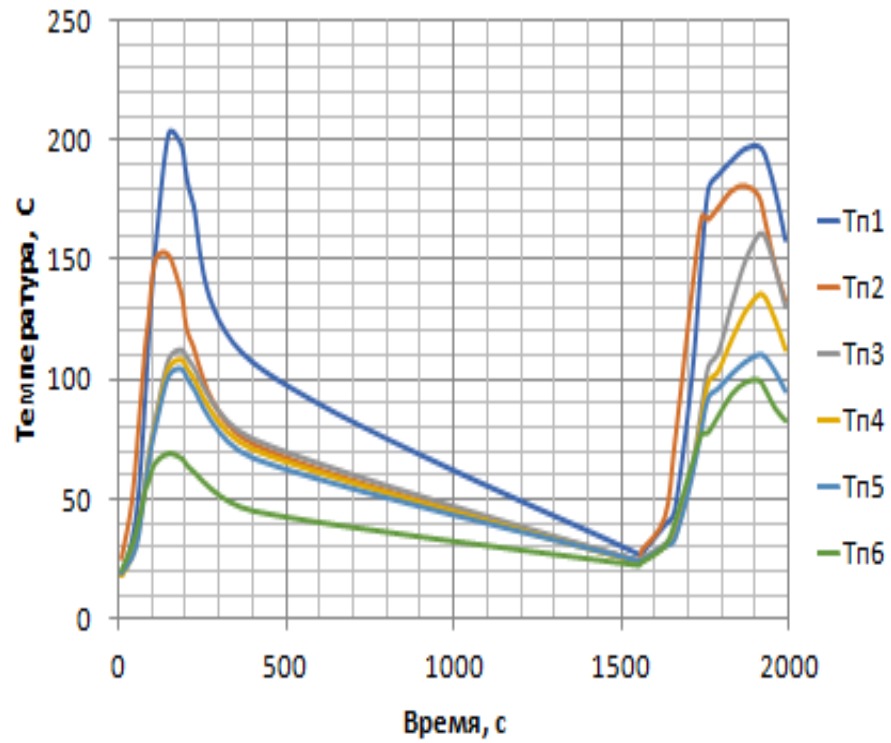


Рисунок 30 – Экспериментальное температурное поле после 12-й серии ТСИ

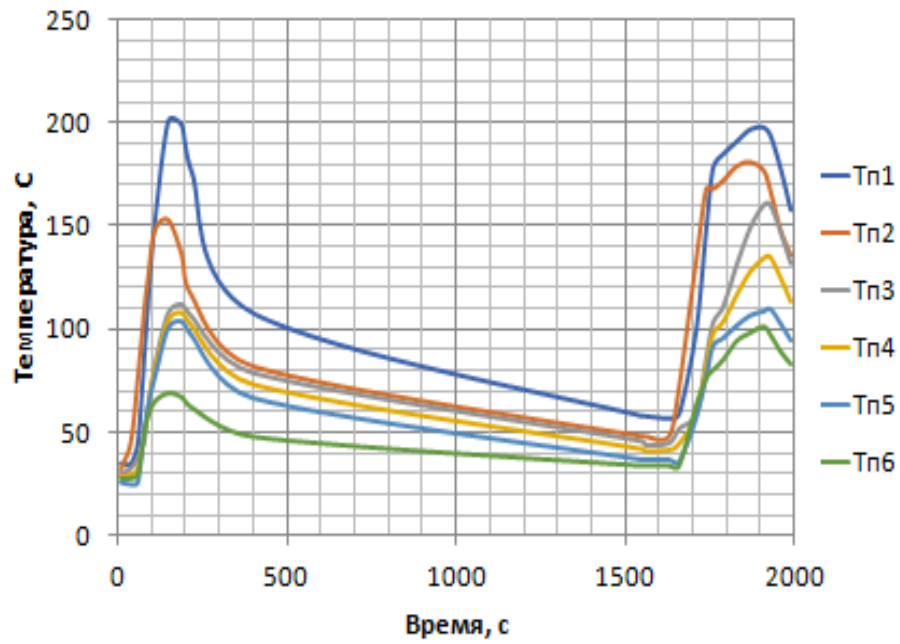


Рисунок 31 – Экспериментальное температурное поле после 13-й серии ТСИ

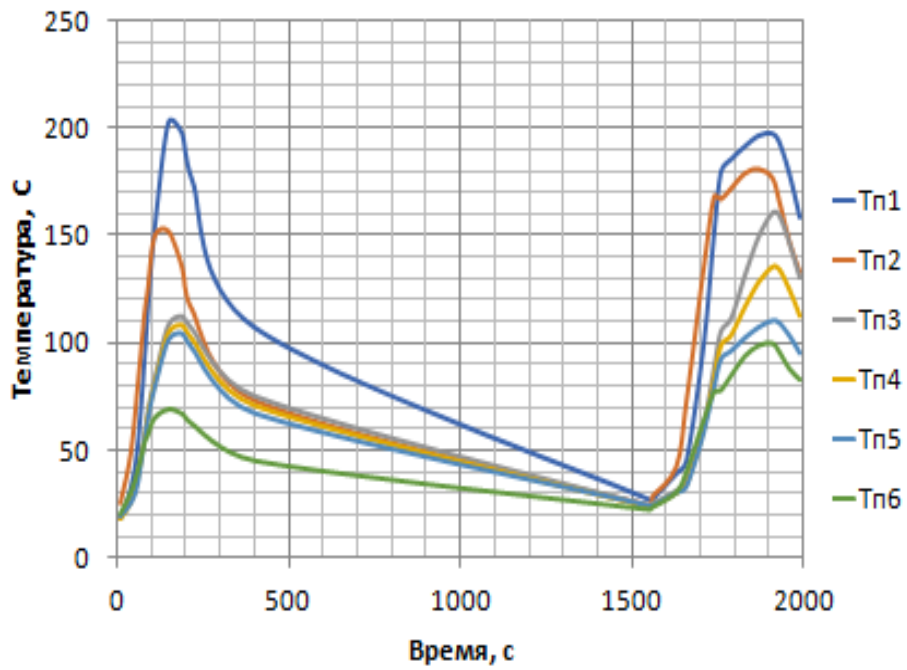


Рисунок 32 – Экспериментальное температурное поле после 14-й серии ТСИ

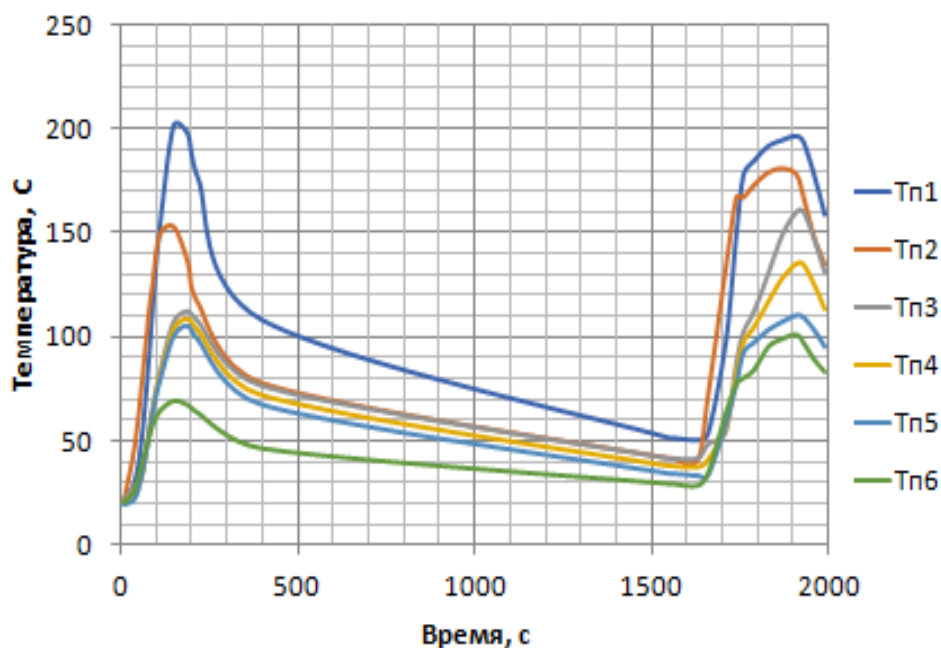


Рисунок 33 – Экспериментальное температурное поле после 15-й серии ТСИ

Таким образом, максимальный температурный пик приходится на первый нырок в атмосферу с учётом инерционности конструкции и составляет чуть более 200 С.

Данный массив цифровой информации является исходными данными для апробации разработанной методики по идентификации симметричного тензора теплопроводности материала на основе выбранной постановки задачи.

Таким образом в данной главе представлены результаты решения граничной обратной задачи радиационного теплопереноса по моделированию лучистой тепловой диффузной нагрузки стохастическим методом Монте-Карло по воспроизведению условий спуска АСА со второй космической скоростью в плотных слоях атмосферы Земли для получения условий теплового нагружения конструкции и экспериментального распределения температурного поля по конструкции.

Представлена методика проведения теплостатических испытаний АСА. Получено нестационарное распределение температурного поля шпангоута АСА по полученному тепловому воздействию.

5 АНАЛИЗ СВОЙСТВ РАЗРАБОТАННОГО ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО АЛГОРИТМА

5.1 О существовании, единственности и устойчивости решений обратных задач теплопроводности в анизотропных твёрдых телах

Решение обратной задачи является корректным, если оно удовлетворяет следующим требованиям [9]:

- решение существует;
- решение единственно;
- решение устойчиво, т.е. малым погрешностям входных данных-экспериментальных значений температур соответствуют малые погрешности искомого вектора λ , т.е. имеется непрерывная зависимость решения от входных данных.

Теорема 5.1. Пусть матрица Z чувствительности такова, что для любой итерации процесса, а, следовательно, и выполняются неравенства:

$$|\alpha^{s+1}| \|Z^{(T)s+1}\| < |\alpha^{s+1}| \|Z^{(T)s}\| \text{ и } \|Z^{(T)s} Z^s\| < \frac{1 - \alpha^{s+1}}{2|\alpha^s| \|\alpha^{s+1}\|},$$

где $\|Z^{(T)}\|$ – любая матричная норма транспонированной матрицы компонент градиента функционала или коэффициентов чувствительности.

Тогда итерационный процесс удовлетворяет принципу сжимающих отображений:

$$\|\Delta\lambda^{s+1}\| \leq q \|\Delta\lambda^s\|, \quad q < 1. \quad (5.1)$$

Т.е. существует единственная точка, к которой последовательность стремится, как к своему пределу

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \lambda^s = \lambda^*. \quad (5.2)$$

Для доказательства теоремы приведём следующую лемму.

Лемма 1. Итерационные квадратные матрицы $Z^{T(s)}Z^{(s)}$ размером P (P – количество искоемых параметров), являются нормальными, т.е.

Т.е. матрица $Z^T Z$ – положительно определена и имеет положительный спектр. Это имеет место на каждой итерации в методе сопряженных градиентов, поскольку не делалось никаких предположений относительно знаков коэффициентов чувствительности $\frac{\partial T_{ij}^k}{\partial \lambda_p}$, $p = 1, P$.

Таким образом, матрица $Z^{T(s)} Z^{(s)}$ является нормальной, т.е. лемма доказана.

Возвращаясь к теореме, рассмотрим итерационный процесс на двух соседних итерациях:

$$\lambda^{(s+1)} = \lambda^{(s)} - \alpha_s p_s(\lambda^{(s+1)}); \quad (5.8)$$

$$\lambda^{(s+2)} = \lambda^{(s+1)} - \alpha_{s+1} p_{s+1}(\lambda^{(s+2)}). \quad (5.9)$$

В которые подставим линеаризованные значения градиента функционала.

Линеаризованные значения градиента функционала в окрестности λ_p имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial S(\lambda^{(n)}, \lambda^{(n)})}{\partial \lambda_p} = & \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K [(T_{ij}^k(\lambda^{(n)}) - \bar{T}_{ij}^k) + \sum_{p=1}^P \frac{\partial (T_{ij}^k(\lambda^{(n)}, C^{(n)}))}{\partial \lambda_p}] \frac{\partial (T_{ij}^k(\lambda^{(n)}))}{\partial \lambda_p} + \\ & + \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K [(T_{ij}^k(\lambda^{(n)}) - \bar{T}_{ij}^k) + \frac{\partial (T_{ij}^k(\lambda^{(n)}))}{\partial C_p}] \frac{\partial (T_{ij}^k(\lambda^{(n)}))}{\partial \lambda_p}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Получим для направлений спуска на двух соседних итерациях:

$$p_s = [Z^{T(s)}(T^{(s)} - \tilde{T}) + Z^{T(s)} Z^{(s)} \Delta \lambda^{(s)}]; \quad (5.11)$$

$$p_{s+1} = [Z^{T(s+1)}(T^{(s+1)} - \tilde{T}) + Z^{T(s+1)} Z^{(s+1)} \Delta \lambda^{(s+1)}] + \quad (5.12)$$

$$\beta_s [Z^{T(s)}(T^{(s)} - \tilde{T}) + Z^{T(s)} Z^{(s)} \Delta \lambda^{(s)}];$$

$$\beta_s = \frac{|Z^{T(s+1)}(T^{(s+1)} - \tilde{T}) + Z^{T(s+1)} Z^{(s+1)} \Delta \lambda^{(s+1)}|^2}{|Z^{T(s)}(T^{(s)} - \tilde{T}) + Z^{T(s)} Z^{(s)} \Delta \lambda^{(s)}|^2}. \quad (5.13)$$

Разлагая вектор $T^{(s+1)}$ в ряд Тейлора в окрестности $\lambda^{(s)}$ с сохранением линейных относительно $\Delta \lambda^{(s)} = \lambda^{(s+1)} - \lambda^{(s)}$ членов, получим из (5.8 – 5.13)

$$\begin{aligned}
& (E + \alpha_s Z^{T(s)} Z^{(s)}) \Delta \lambda^{(s)} = -\alpha_s Z^{T(s)} (T^{(s)} - \tilde{T}), \\
& (E + \alpha_{s+1} Z^{T(s+1)} Z^{(s+1)}) \Delta \lambda^{(s+1)} + \beta_s (E + Z^{T(s)} Z^{(s)}) \Delta \lambda^{(s)} = \\
& = -\alpha_{s+1} Z^{T(s+1)} \left(T^{(s)} + \frac{\partial T^{(s)}}{\partial \lambda_1} \Delta \lambda_1^{(s)} + \dots + \frac{\partial T^{(s)}}{\partial \lambda_p} \Delta \lambda_p^{(s)} - \tilde{T} \right) - \\
& - \alpha_{s+1} \beta_s Z^{T(s+1)} \left(T^{(s)} + \frac{\partial T^{(s)}}{\partial \lambda_1} \Delta \lambda_1^{(s)} + \dots + \frac{\partial T^{(s)}}{\partial \lambda_p} \Delta \lambda_p^{(s)} - \tilde{T} \right) \\
& = -\alpha_{s+1} Z^{T(s+1)} (T^{(s)} - \tilde{T}) - \alpha_{s+1} Z^{T(s+1)} Z^{T(s)} \Delta \lambda^{(s)} \\
& - \alpha_{s+1} \beta_s Z^{T(s+1)} (T^{(s)} - \tilde{T}) - \alpha_{s+1} \beta_s Z^{T(s+1)} Z^{T(s)} \Delta \lambda^{(s)}; \tag{5.14}
\end{aligned}$$

$$\beta_s = \frac{[Z^{T(s+1)} (T^{(s+1)} - \tilde{T}) + Z^{T(s+1)} Z^{(s+1)} \Delta \lambda^{(s+1)}]^2}{[Z^{T(s)} (T^{(s)} - \tilde{T}) + Z^{T(s)} Z^{(s)} \Delta \lambda^{(s)}]^2}. \tag{5.15}$$

Применяя к равенству операцию нормы, используя свойство нормы произведения матриц и результаты леммы 1, получим

$$\begin{aligned}
\|\Delta \lambda^{(s)}\| & \leq |\alpha_s| \left\| (E + \alpha_{s+1} Z^{T(s+1)} Z^{(s+1)})^{-1} \right\| \|Z^{T(s)} (T^{(s)} - \tilde{T})\| \leq \\
& \leq |\alpha_s| \|Z^{T(s)}\| \|T^{(s)} - \tilde{T}\|. \tag{5.16}
\end{aligned}$$

Поскольку матрица $(E + \alpha_{s+1} Z^{T(s+1)} Z^{(s+1)})$ положительно определена, так как на основании леммы 1 квадратная матрица $Z^{T(s)} Z^{(s)} > 0$, то существует обратная ей матрица $(E + \alpha_{s+1} Z^{T(s+1)} Z^{(s+1)})^{-1}$, вследствие чего из (5.14) имеем

$$\begin{aligned}
\Delta \lambda^{(s+1)} & = (E + \alpha_{s+1} Z^{T(s+1)} Z^{(s+1)})^{-1} = \alpha_{s+1} Z^{T(s+1)} \times \\
& \times [(T^{(s)} - \tilde{T}) Z^{T(s+1)} Z^{T(s)} \Delta \lambda^{(s)} - \beta_s T^{(s)} - \tilde{T}) Z^{T(s+1)} Z^{T(s)} \Delta \lambda^{(s)}]. \tag{5.17}
\end{aligned}$$

Откуда, в силу условия $|\alpha^{s+1}| \|Z^{(T)s+1}\| < |\alpha^{s+1}| \|Z^{(T)s}\|$ и $\|Z^{(T)s} Z^s\| < \frac{1-\alpha^{s+1}}{2|\alpha^s| \|\alpha^{s+1}\|}$, равенства (5.14) и неравенства (5.16), (5.17) получаем

$$\begin{aligned}
\|\Delta \lambda^{(s+1)}\| & \leq |\alpha_{s+1}| \left\| (E + \alpha_{s+1} Z^{T(s+1)} Z^{(s+1)})^{-1} \right\| \\
& \|E + \alpha_s Z^{T(s)} Z^{(s)}\| + |\alpha_s| \|Z^{T(s)} Z^{(s)}\| \|\Delta \lambda^{(s)}\| \leq \\
& \leq |\alpha_{s+1}| (1 + 2|\alpha_s| \|Z^{T(s)} Z^{(s)}\|) \|\Delta \lambda^{(s)}\|. \tag{5.18}
\end{aligned}$$

Если в последнем соотношении потребовать выполнение условия

$$\frac{\|\Delta\lambda^{(s+1)}\|}{\|\Delta\lambda^{(s)}\|} \leq |\alpha_{s+1}|(1 + 2|\alpha_s|\|Z^{T(s)}Z^{(s)}\|) < 1, \quad (5.19)$$

то

$$\|Z^{T(s)}Z^{(s)}\| \leq \frac{1 - |\alpha_{s+1}|}{2|\alpha_s||\alpha_{s+1}|}. \quad (5.20)$$

Таким образом, при выполнении условия (5.20) выполняется принцип сжимающих отображений

$$\|\Delta\lambda^{s+1}\| \leq q\|\Delta\lambda^{(s)}\|, \quad q = |\alpha_{s+1}|(1 + 2|\alpha_s|\|Z^{T(s)}Z^{(s)}\|). \quad (5.21)$$

Т.е. существует единственная точка λ^* , к которой стремится последовательность $\{\Delta\lambda^{(s)}\}$ как к своему пределу, что доказывает теорему 5.1.

В этих условиях итерационного процесса (2.78 – 2.82) $p_s \rightarrow 0$, когда $\lambda^{(s)} \rightarrow \lambda^*$, т.е. λ^* является единственным решением обратной задачи.

5.2 Оценка сходимости итерационного процесса

На рисунках 34 – 37 представлены результаты моделирования температурного поля методом итерационной регуляризации в зависимости от номера итерации в местах установки датчиков температур.

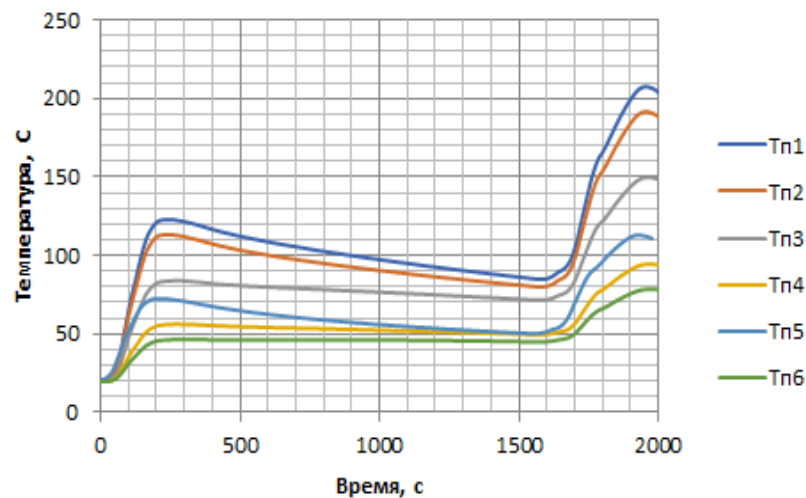


Рисунок 34 – Температурное поле на 1-й итерации

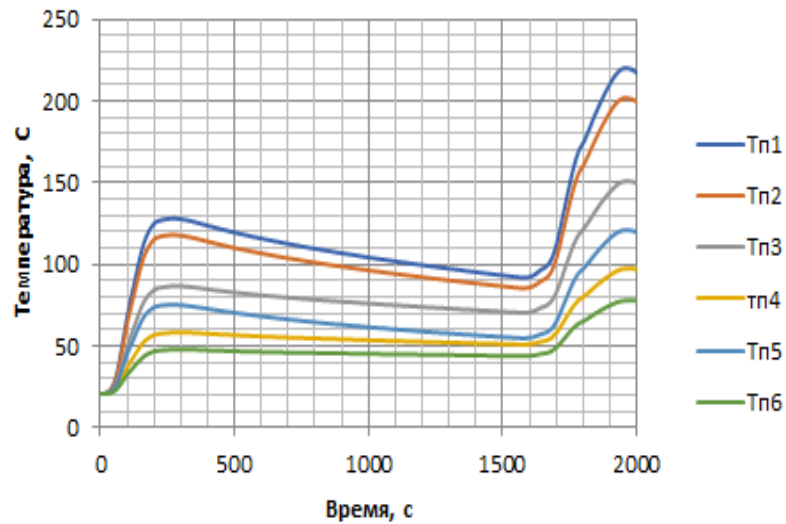


Рисунок 36 – Температурное поле на 2-й итерации

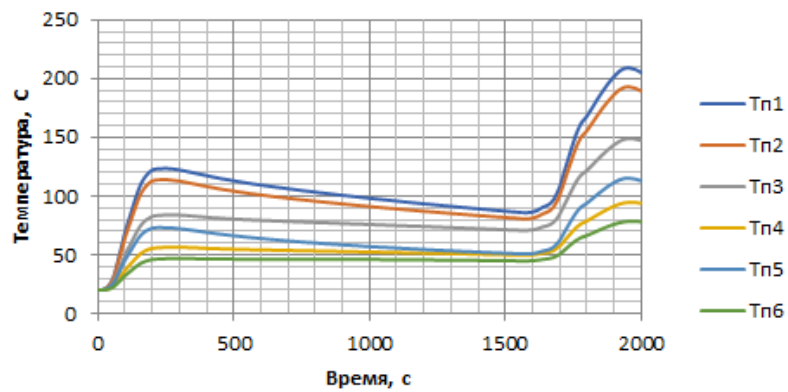


Рисунок 35 – Температурное поле на 5-й итерации

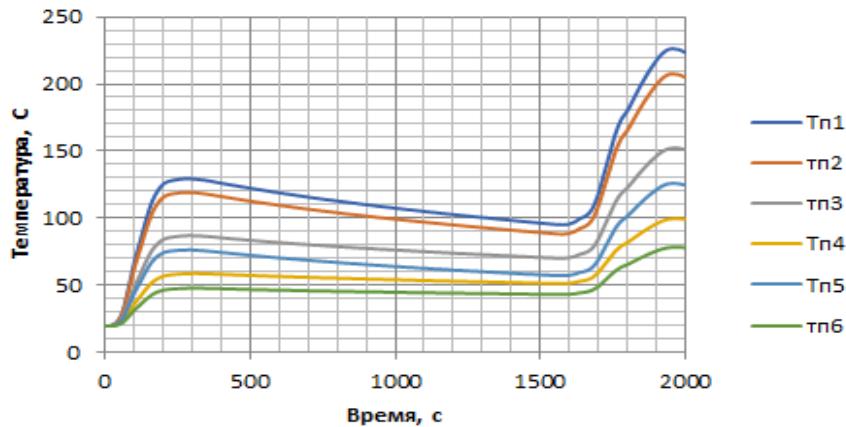


Рисунок 37 – Температурное поле на 6-й итерации

На рисунках 38 – 41 представлены результаты моделирования вариации температурного поля при численном решении полученной постановки задачи (1.21–1.27) при решении задачи восстановления компонент симметричного

тензора теплопроводности методом итерационной регуляризации в зависимости от номера итерации в местах установки датчиков температур.

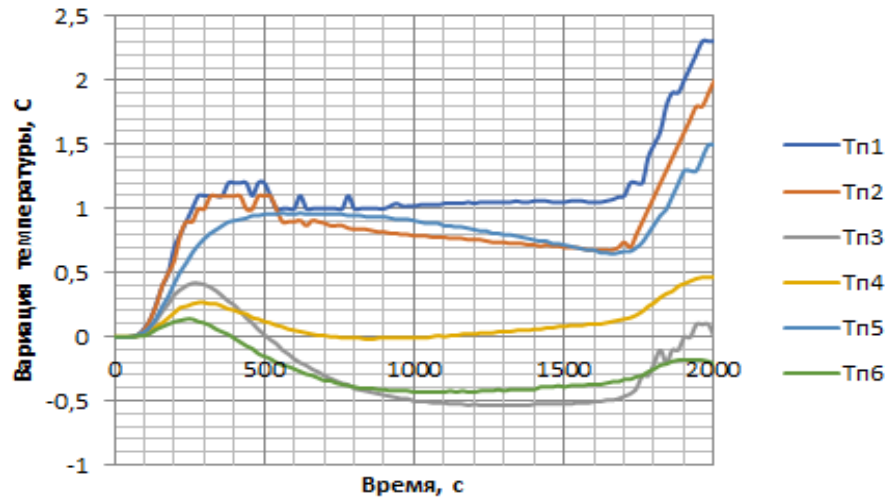


Рисунок 38 – Вариация температурного поля на 1-й итерации

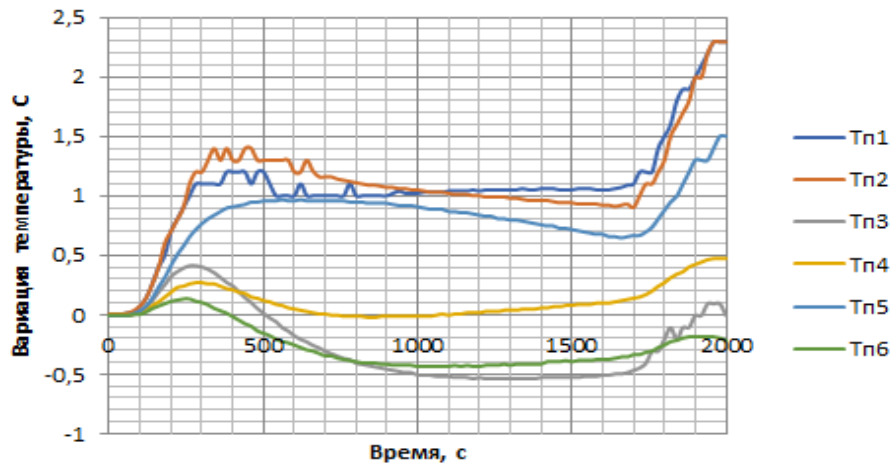


Рисунок 39 – Вариация температурного поля на 2-й итерации

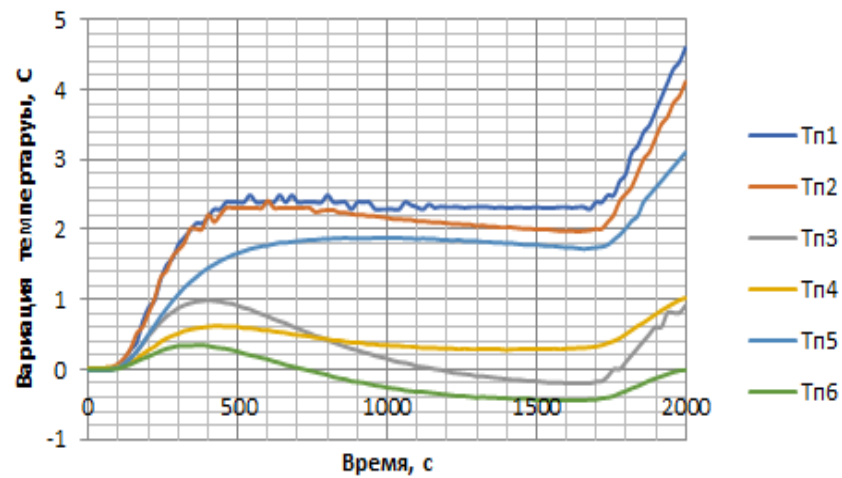


Рисунок 40 – Вариация температурного поля на 5-й итерации

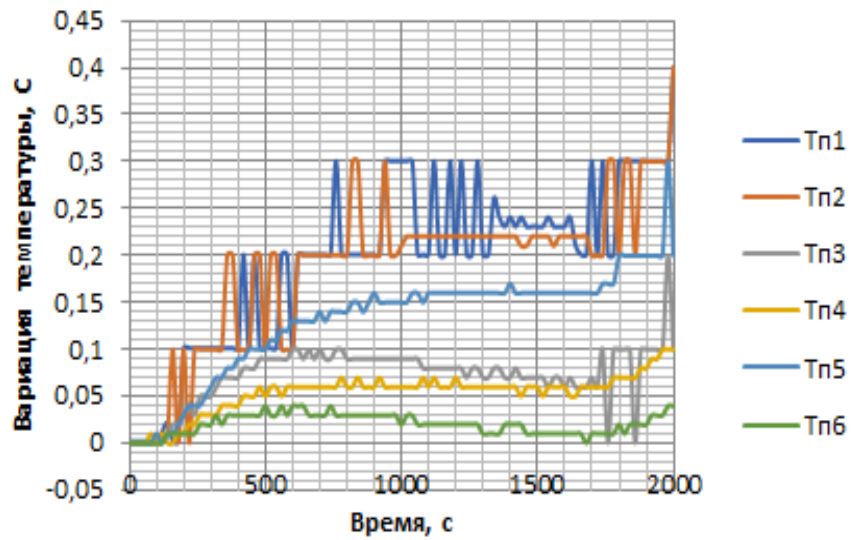


Рисунок 41 – Вариация температурного поля на 6-й итерации

На рисунках 42 – 45 представлены результаты моделирования температурного поля методом регуляризации А.Н. Тихонова в зависимости от номера итерации в местах установки датчиков температур.

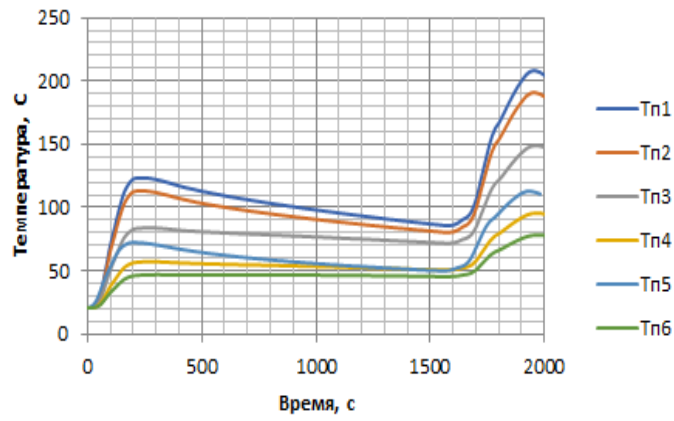


Рисунок 42 – Температурное поле на 1-й итерации

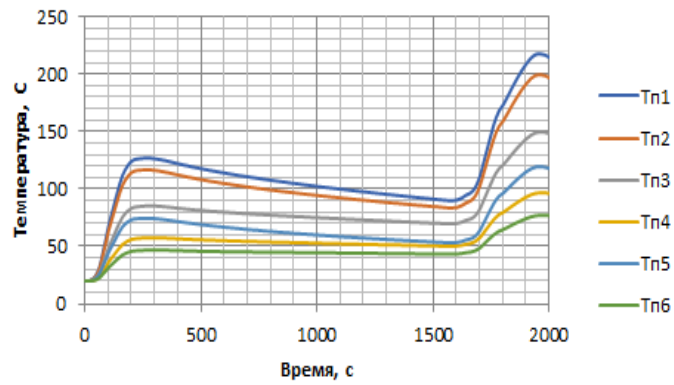


Рисунок 43 – Температурное поле на 2-й итерации

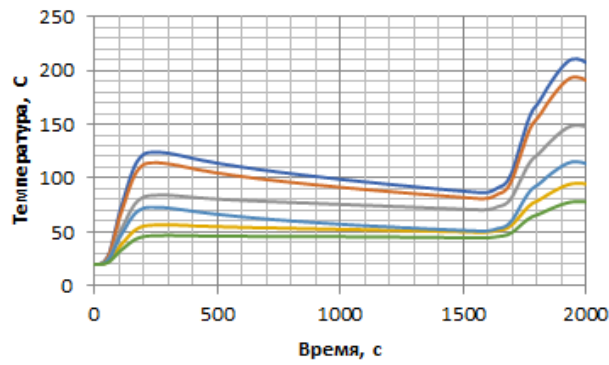


Рисунок 44 – Температурное поле на 5-й итерации

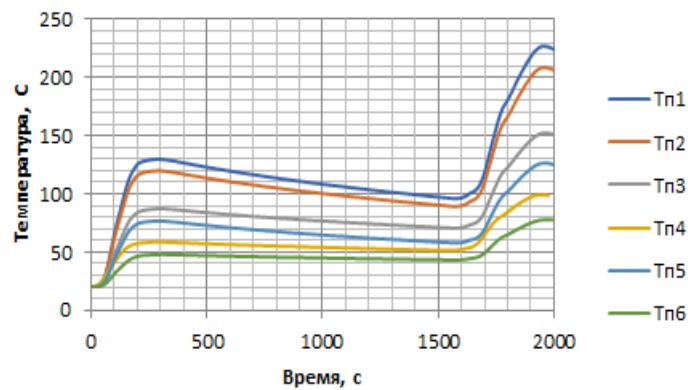


Рисунок 45 – Температурное поле на 6-й итерации

На рисунках 46 – 49 представлены результаты моделирования вариации температурного поля методом регуляризации А.Н. Тихонова в зависимости от номера итерации в местах установки датчиков температур.

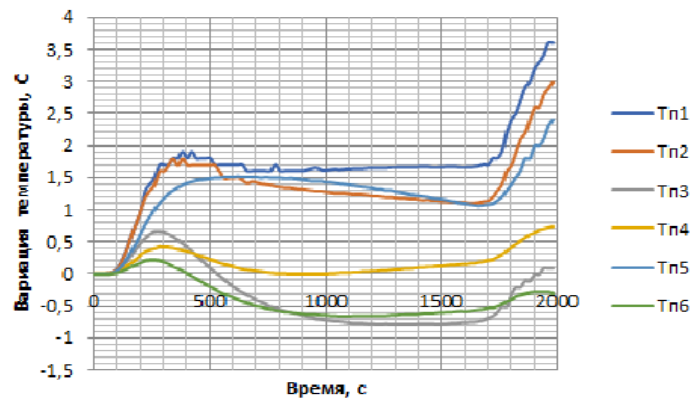


Рисунок 46 – Вариация температурного поля на 1-й итерации

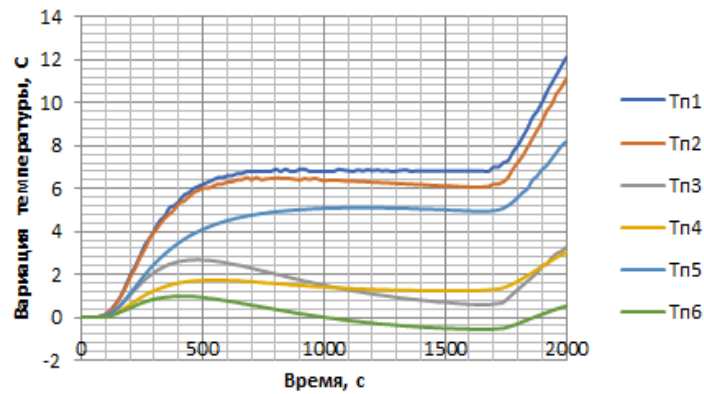


Рисунок 47 – Вариация температурного поля на 2-й итерации

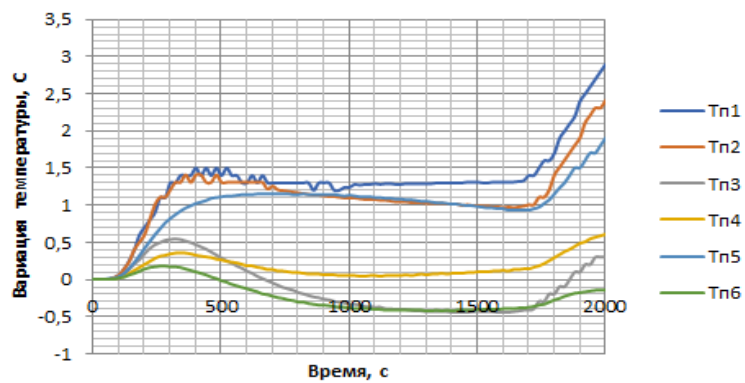


Рисунок 48 – Вариация температурного поля на 5-й итерации

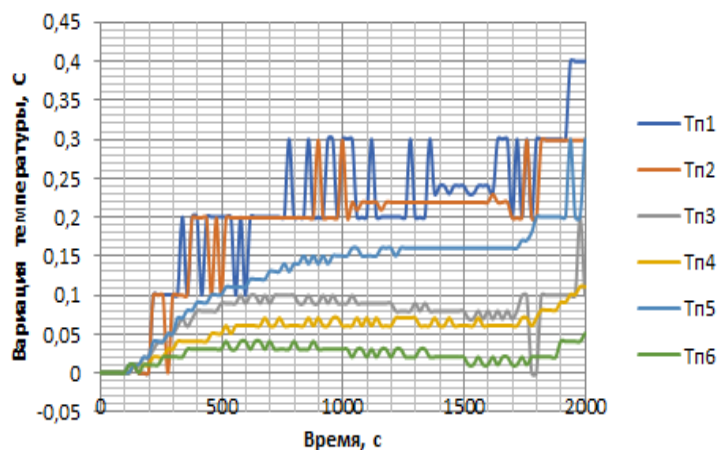


Рисунок 49 – Вариация температурного поля на 6-й итерации

Из графиков видно, что кривые везде положительны, что свидетельствует о единственности решения ОЗТ, а значит коэффициенты чувствительности материала везде также положительны.

Для оценки динамики сходимости итерационного процесса на рисунке 50 приведены графические зависимости не регуляризуемых невязок [95, 96] для двух рассматриваемых методов регуляризации в зависимости от номера итерации (синий цвет – метод итерационной регуляризации, красный цвет – метод регуляризации А.Н. Тихонова).

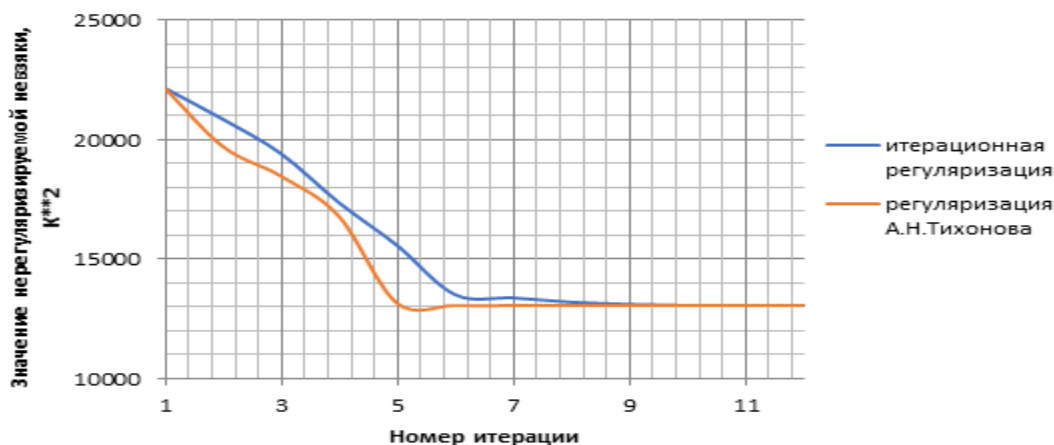


Рисунок 50 – Значение не регуляризуемого функционала невязки при решении задачи идентификации методом регуляризации А.Н. Тихонова и итерационной регуляризации

Как видно из графических зависимостей, сходимость итерационного процесса при одинаковых начальных приближениях выше у метода

регуляризации А.Н. Тихонова. Это объясняется тем, что среднеквадратичная ошибка регуляризуется при использовании метода А.Н. Тихонова уже на первой итерации, а метод итерационной регуляризации работает, начиная со второй итерации.

На рисунках 51 и 52 представлены результаты моделирования температурного поля методом итерационной регуляризации при решении выбранной постановки задачи (1.21–1.27) в зависимости от номера итерации в местах установки датчиков температур ($T_{п_i}$ – номер термопары).

5.3 Результаты расчётов компонент симметричного тензора теплопроводности

Результаты расчётов компонент симметричного тензора теплопроводности методом итерационной регуляризации приведены на рисунке 51, а результаты метода регуляризации А.Н. Тихонова – на рисунке 52 [97, 98].

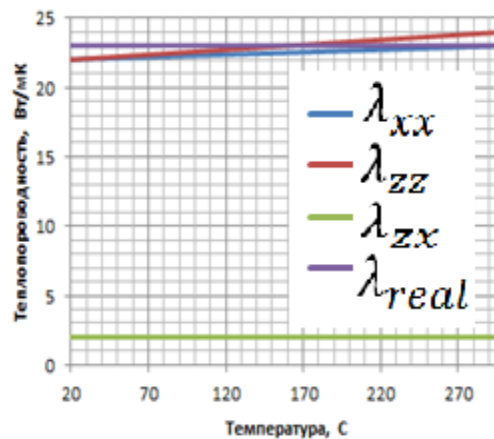


Рисунок 51– Значения восстановленного симметричного тензора теплопроводности методом итерационной регуляризации

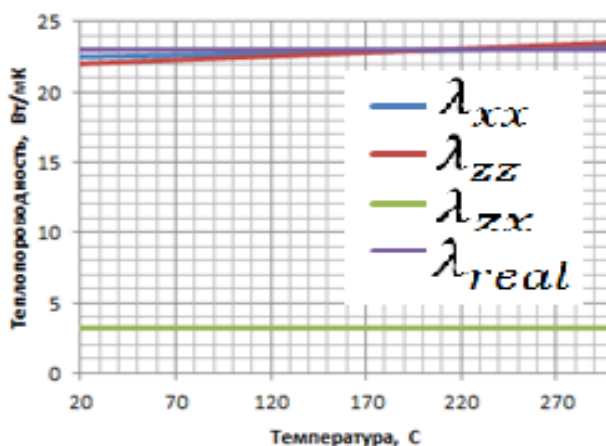


Рисунок 52 – Значения восстановленного симметричного тензора теплопроводности методом регуляризации А.Н. Тихонова

Также большой интерес представляют собой данные об относительных погрешностях расчётов, вычисленных по формуле

$$\delta_{\text{отн}} = \left| \frac{\lambda_p - \lambda_{real}}{\lambda_{real}} \right|, p = xx, zz, zx.$$

Результаты относительных погрешностей расчётов при решении коэффициентной ОЗТ методом итерационной регуляризации представлены на рисунке 53, а регуляризацией А.Н. Тихонова – на рисунке 54.

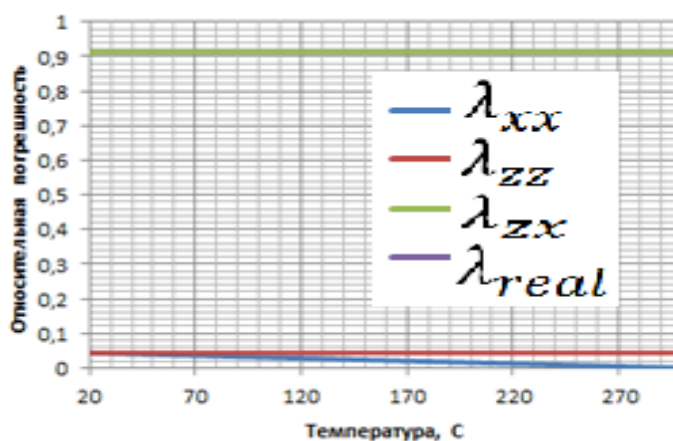


Рисунок 53 – Значения относительных погрешностей восстановленных компонент тензора теплопроводности методом итерационной регуляризации

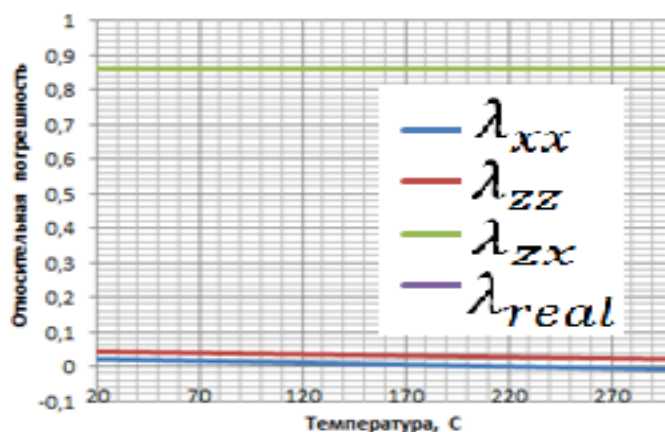


Рисунок 54 – Значения относительных погрешностей восстановленных компонент тензора теплопроводности методом регуляризации А.Н. Тихонова

Как видно из графиков, для выбранного объекта испытаний не характерна явно выраженная анизотропия при таком уровне теплового воздействия.

Главные компоненты тензора теплопроводности и угол ориентации главных осей определяются по следующим зависимостям:

$$\varphi = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2\lambda_{xy}(T)}{\lambda_{xx}(T) - \lambda_{yy}(T)};$$

$$\lambda_{\xi}(T) = \lambda_{xx}(T)\cos^2(\varphi) + \lambda_{yy}(T)\sin^2(\varphi) + \lambda_{xy}(T)\sin(2\varphi);$$

$$\lambda_{\eta}(T) = \lambda_{yy}(T)\cos^2(\varphi) + \lambda_{xx}(T)\sin^2(\varphi) + \lambda_{xy}(T)\sin(2\varphi).$$

Результаты расчётов главных компонент тензора теплопроводности методом итерационной регуляризации приведены на рисунке 55, а результаты метода регуляризации А.Н. Тихонова – на рисунке 56.

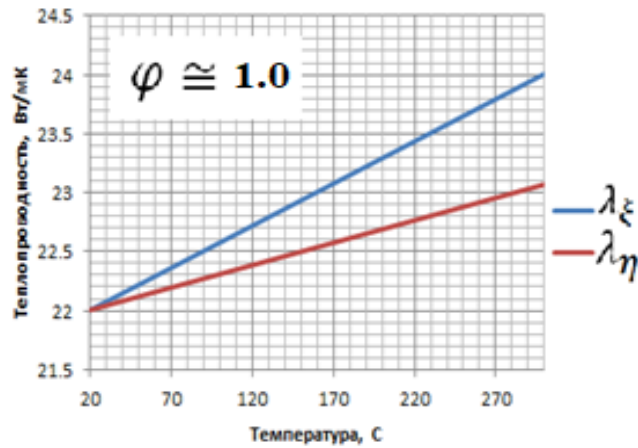


Рисунок 55 – Значения восстановленных главных осей тензора теплопроводности методом итерационной регуляризации

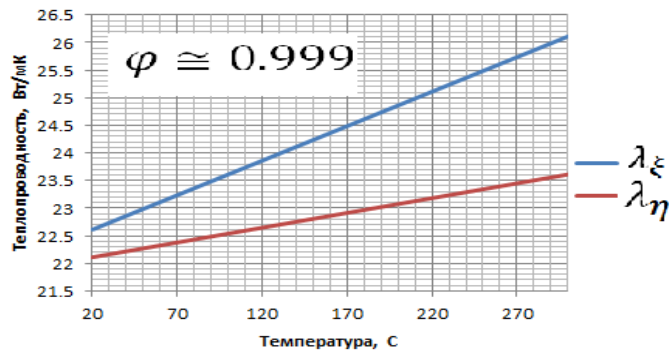


Рисунок 56 – Значения восстановленных главных осей тензора теплопроводности методом регуляризации А.Н. Тихонова

Результаты относительных погрешностей расчётов для восстановленных главных осей при решении коэффициентной ОЗТ методом итерационной регуляризации представлены на рисунке 57, а регуляризацией А.Н. Тихонова – на рисунке 58.

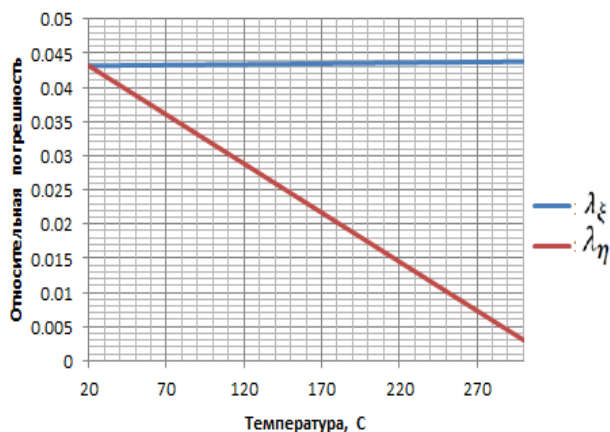


Рисунок 57 – Значения относительных погрешностей восстановленных компонент тензора теплопроводности методом регуляризации

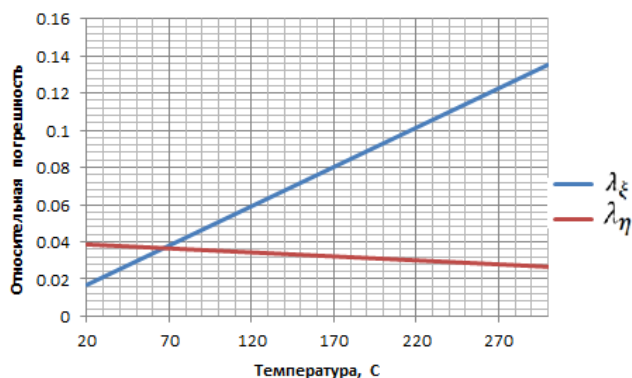


Рисунок 58 – Значения относительных погрешностей восстановленных главных тензора теплопроводности методом регуляризации А.Н. Тихонова

Таким образом, по результатам расчётов можно сделать следующие выводы:

1. Симметричная компонента тензора теплопроводности является около нулевой при малом отличии двух ортогональных компонент тензора друг от друга, что говорит о том, что материал при таком уровне температур не проявляет явно выраженную анизотропию.

2. По результатам расчётов относительных погрешностей можно говорить о малом отличии в пределах доверительной погрешности настоящих от расчётных теплофизических характеристик. Таким образом, можно косвенно утверждать об успешной апробации разработанной методики.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработаны алгоритм и методика идентификации симметричного тензора теплопроводности анизотропного материала шпангоута активного стыковочного агрегата космического спускаемого аппарата, основанные на параметрической идентификации тепловой физико-математической модели распространения тепловых потоков в анизотропной среде методом итерационной регуляризации и методом регуляризации А.Н. Тихонова.

1. Модернизирован численный метод для реализации параметрической идентификации математической модели теплопереноса тепловых потоков в анизотропных твёрдых телах, позволяющий вычислить компоненты тензора теплопроводности. Отличительной особенностью модернизации является получение аналитических зависимостей для компонентов градиента целевого функционала невязки.

2. Проведён анализ эффективности разработанного алгоритма с помощью вычислительного эксперимента, и сделаны выводы о влиянии выбранного метода регуляризации на сходимость и точность решения обратной задачи нестационарной теплопроводности. Показано, что для исследуемого материала, относительная погрешность не превосходит 14% при решении задачи методом итерационной регуляризацией и 4,5 % при решении задачи методом А.Н. Тихонова по сравнению с реальным значением теплопроводности титана.

3. Решена обратная задача радиационного теплопереноса энергии методом Монте-Карло по воспроизведению тепловой аэродинамической падающей нагрузки лучистым тепловым диффузным потоком для формирования натуральных условий проведения экспериментальной тепловой отработки активного стыковочного агрегата космического спускаемого аппарата.

4. Выбраны проектные параметры стенда, а именно тепловые мощности, задаваемые на ИК-имитаторах, и их пространственное расположение, по воспроизведению условий спуска спускаемого аппарата в

атмосфере, позволяющего проводить экспериментальную тепловую отработку изделий многоразовых спускаемых аппаратов.

5. Разработанная методика может быть использована при проектировании теплоограждающих конструкций спускаемых космических аппаратов, выполненных из композиционных нетерморазлагающихся материалов.

В качестве следующего этапа развития научных исследований по данной тематике могут рассматриваться обратные задачи идентификации для высокопористых терморазлагающихся композиционных теплозащитных материалов при сверхкритических уровнях температур, которые могут наблюдаться при входе космического аппарата в плотные слои атмосферы различных планет.

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ И УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

В настоящей рукописи диссертации применяют следующие сокращения и обозначения.

| | |
|-------|--|
| АСА | – активный стыковочный агрегат |
| ВА | – возвращаемый аппарат |
| ИК | – инфракрасный |
| КА | – космический аппарат |
| КГЛ | – кварцево-галогенная лампа |
| МКЭ | – метод конечных элементов |
| МПНЭ | – метод переменных направлений с экстраполяцией |
| ОЗТ | – обратная задача теплопроводности |
| ОИ | – объект исследования |
| ПВМ | – пространственно-временная модель |
| ПТК | – перспективный транспортный корабль |
| СИ | – средства измерений |
| СЛАУ | – система линейных алгебраических дифференциальных уравнений |
| ТЗП | – теплозащитное покрытие |
| ТСИ | – теплостатическое испытание |
| ЭУ | – экспериментальная установка |
| Therm | – программная среда для оценки теплового состояния объекта |

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алифанов, О. М. Обратные задачи в исследовании сложного теплообмена / О. М. Алифанов, Е. А. Артюхин, А. В. Ненарокомов. – Москва : Янус-К, 2009. – 300 с.
2. Алифанов, О. М. Идентификация процессов теплообмена летательных аппаратов / О. М. Алифанов. – Москва : Машиностроение, 1979.
3. Резник, С. В., Просунцов, П. В. Расчётно-экспериментальное определение теплопроводности углепластика в плоскости армирования на основе бесконтактного измерения температуры / С. В. Резник, П. В. Просунцов // Тепловые процессы в технике. – 2016. – Т. 8, № 12. – С. 557–563.
4. Резник, С. В. Перспективы повышения размерной стабильности и весовой эффективности рефлекторов космических антенн из композиционных материалов / С. В. Резник, П. В. Просунцов, А. Д. Новиков // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. – 2018. – № 1(694). – С. 71–83.
5. Резник, С. В., Денисов, О. В. Постановка и результаты тепловых испытаний элементов композитных стержневых космических конструкций / С. В. Резник, О. В. Денисов // Вестник МГТУ им. Баумана. – 2008. – № 4(73). – С. 81–89.
6. Лаврентьев, М. М. О некоторых некорректных задачах математической физики / М. М. Лаврентьев. – Новосибирск : Изд-во СО АН СССР, 1962. – 92 с.
7. Тихонов, А. Н. О решении некорректно поставленных задач / А. Н. Тихонов // Докл. АН СССР. – 1942. – Т. 39, №5.
8. Тихонов, А. Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации / А. Н. Тихонов // Докл. АН СССР. – 1963. – Т. 151, №3. – С. 501–504.
9. Тихонов, А. Н., Арсенин, В. Я. Методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. – Москва : Наука, 1974.

10. Ватульян, А. О. Коэффициентные обратные задачи механики / А.О. Ватульян. – Москва : Физматлит, 2019.
11. Формалёв, В. Ф. Теплоперенос в анизотропных твёрдых телах / В. Ф. Формалёв. – Москва : Физматлит, 2015.
12. Самарский, А. А., Вабищевич, П. Н. Численные методы решения обратных задач математической физики / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич. – Санкт-Петербург : Изд-во ЛКИ, 2015. – С. 78–80.
13. Формалёв, В. Ф. Теплопроводность анизотропных твёрдых тел. Аналитические методы решения задач / В. Ф. Формалёв. – Москва : Физматлит, 2014.
14. Акопьян, В. А. Методы и алгоритмы определения полного набора совместимых материальных констант пьезокерамических материалов / В. А. Акопьян, А. Н. Соловьёв, С. Н. Шевцов. – Ростов-на-Дону : Изд-во ЮФУ, 2008. – 144 с.
15. Граничные интегральные уравнения для решения динамических задач трёхмерной теории пороупругости / А. В. Аменицкий, А. А. Белов, Л. А. Игунов, И. С. Карелин // Проблемы прочности и пластичности. – 2009. – № 71. – С. 164–171.
16. Богачёв, И. В., Ватульян, А. О. Обратные коэффициентные задачи для диссипативных операторов и идентификация свойств вязкоупругих материалов / И. В. Богачёв, А. О. Ватульян // Владикавказский математический журнал. – 2012. – № 3. – С. 31–44.
17. Богачёв, И. В. Идентификация свойств неоднородной электроупругой среды / И. В. Богачёв, А. О. Ватульян, О. В. Явруян // ПММ. – 2012. – Т. 65, № 5. – С. 860–866.
18. Богачёв, И. В. Об одном методе идентификации свойств многослойных мягких биологических тканей / И. В. Богачёв, А. О. Ватульян, В. В. Дударев // Российский журнал биомеханики. – 2013. – Т. 17, № 3. – С. 37–48.
19. Богачёв, И. В. Идентификация характеристик функционально-

градиентного пьезометрического стержня / И. В. Богачёв, А. О. Ватульян, В. В. Дударев // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2016. – Т. 22, № 2. – С. 201–212.

20. Ватульян, А. О. Обратные задачи в механике деформируемого твёрдого тела / А. О. Ватульян. – Москва : Физматлит, 2007. – 223 с.

21. Ватульян, А. О. Интегральные уравнения в обратных задачах определения коэффициентов дифференциальных операторов теории упругости / А. О. Ватульян // Доклады РАН. – 2005. – Т. 405, №3. – С. 343–345.

22. Ватульян, А. О. Проблемы идентификации неоднородных свойств твёрдых тел / А. О. Ватульян // Вестник Самарского госуниверситета. Естественные науки. – 2007. – № 4. – С. 93–103.

23. Погорелов, А. Г. Обратные задачи нестационарной химической кинетики / А. Г. Погорелов. – Москва : Наука, 1988.

24. Алифанов, О. М. Регуляризационные схемы решения обратных задач теплопроводности / О. М. Алифанов // ИФЖ. – 1973. – Т. 24, № 2. – С. 324–333.

25. Алифанов, О. М. Экстремальные методы решения некорректных задач и их приложения к обратным задачам теплообмена / О. М. Алифанов, Е. А. Артюхин, С. В. Румянцев. – Москва : Наука, 1988.

26. Алифанов, О. М. Сплайн-аппроксимация решения обратной задачи теплопроводности, учитывающая гладкость искомой функции / О. М. Алифанов, Е. А. Артюхин, А. В. Ненарокомов // ТВТ. – 1987. – Т. 25, № 4. – С. 693–699.

27. Алифанов, О. М. Решение граничных и коэффициентных обратных задач теплопроводности итерационными методами / О. М. Алифанов, Е. А. Артюхин, С. В. Румянцев // Книга. Тепломассообмен. – Минск : ИТМО АН БССР, 1980. – Т. 9. – С. 106–112.

28. Малоземов, В. В. Системы терморегулирования космических аппаратов / В. В. Малоземов, Н. С. Кудрявцева. – Москва: Машиностроение, 1995.

29. Малоземов, В. В. Тепловой режим космических аппаратов / В. В. Малоземов. – Москва: Машиностроение, 1980.

30. Резник, С. В. Исследование теплопроводности углепластиков в широком диапазоне эксплуатационных температур с использованием элементов натуральных конструкций / С. В. Резник, О. В. Денисов, В. А. Нелюб // Все материалы. Энциклопедический справочник. – 2012, № 3. – С. 2–6.

31. Лаврентьев, М. М. Некорректные задачи математической физики и анализа / М. М. Лаврентьев, В. Г. Романов, С. П. Шишатский. – Москва : Наука, 1980.

32. Чиркин, В. С. Теплопроводность промышленных материалов / В. С. Чиркин. – Москва : Машгиз, 1962. – 484 с. ; Санкт-Петербург : Изд-во ЛКИ, 2009.

33. Формалёв В. Ф., Ревизников, Д. Л. Численные методы / В. Ф. Формалёв, Д. Л. Ревизников. – Москва : Физматлит, 2005.

34. Суринов, Ю. А. О некоторых вопросах стохастической теории переноса излучения и радиационного теплообмена / Ю. А. Суринов // Изв. вузов. Чёрная металлургия. – 1992. – № 5. – С. 76–81.

35. Суринов, Ю. А. Обобщённый зональный метод исследования и расчёта лучистого теплообмена в поглощающей и рассеивающей среде / Ю. А. Суринов // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. – 1975. – № 4. – С. 122–137.

18. Рубцов, В. В., Суринов, Ю. А. О методах решения нестационарных задач теории радиационно-кондуктивного теплообмена / В. В. Рубцов, Ю. А. Суринов // ЖВМиМФ. – 1989. – Т. 29, № 11. – С. 1705–1713.

19. Рубцов, В. В. О существовании и единственности решения стационарных задач радиационно-кондуктивного теплообмена / В. В. Рубцов // Сборник прикладных научно-технических работ областного факультета «Промышленное и гражданское строительство». – Москва : Изд-во МГСУ. – 2000. – С. 127–132.

36. Белоногов, Е. К., Зацепин, А. Ю. Интегральные уравнения обратных задач радиационного теплообмена / Е. К. Белоногов, А. Ю. Зацепин // ИФЖ. – 1985. – №6. – С. 916–920.

37. Блох, А. Г. Теплообмен излучением. Справочник / А. Г. Блох, Ю. А. Журавлев, Л. Н. Рыжков. – Москва : Энергоатомиздат, 1991.

38. Джалурия, Й. Естественная конвекция / Й. Джалурия. – Москва : Мир, 1983.

39. Мишин, В. П. Обратные и сопряжённые задачи теплообмена / В. П. Мишин // ИФЖ. – 1977. – Т. 33, № 6. – С. 965–966.

40. Мишин, В. П., Алифанов, О. М. Обратные задачи теплообмена – области применения при проектировании и испытаниях технических объектов / В. П. Мишин, О. М. Алифанов // ИФЖ. – 1982. – Т. 42, № 2. – С. 181–192.

41. Мишин, В. П., Алифанов, О. М. Повышение качества отработки теплонагруженных конструкций и обратные задачи теплообмена. Общие вопросы теории / В. П. Мишин, О. М. Алифанов // Машиноведение. – 1986. – № 5. – С. 19–29.

42. Мишин, В. П., Алифанов, О. М. Повышение качества отработки теплонагруженных конструкций и обратные задачи теплообмена. Практические приложения / В. П. Мишин, О. М. Алифанов // Машиноведение. – 1986. – № 6. – С.П-21.

43. Алифанов, О. М. Решение задачи нестационарной теплопроводности и её применение для исследования теплозащитных материалов / О. М. Алифанов // Книга. Исследование нестационарного конвективного тепло- и массообмена. – Минск : Наука и техника, 1971. – С. 322–333.

44. Алифанов, О. М. Регуляризация решений обратных задач теплопроводности / О. М. Алифанов // Книга. Тепло- и массоперенос. – Минск : Наука и техника. – 1972. – Т. 8. – С. 89–98.

45. Алифанов, О. М. Применение принципа регуляризации для

построения приближенных решений обратных задач теплопроводности / О. М. Алифанов // ИФЖ. – 1972. – Т. 23, № 6. – С. 1084–1091.

46 Алифанов, О. М. О регуляризационных схемах приближенного решения нелинейной обратной задачи теплопроводности / О. М. Алифанов // ИФЖ. – 1974. – Т. 26, № 1. – С. 116–121.

47. Алифанов, О. М. Определение граничного теплового режима из решения обратной задачи теплопроводности / О. М. Алифанов // ИФЖ. – 1974. – Т. 26, № 2. – С. 349–358.

48. Лыков, А. В., Перельман, Т. Л. Вопросы нестационарного теплообмена между теплом и обтекающим его потоком газа / А. В. Лыков, Т. Л. Перельман // Книга. Тепло- и массоперенос. – Минск : Наука и техника, 1966. – Т. 6. – С. 63–85.

49. Лыков, А. В. Теория теплопроводности / А. В. Лыков. – Москва : Высшая школа, 1967. – 600 с.

50. Карслоу, Г., Егер, Д. Теплопроводность твёрдых тел / Г. Карслоу, Д. Егер. – Москва : Наука, 1964. – 488 с.

51. Борщев, Н. О. Решение обратной коэффициентной задачи по восстановлению тензора теплопроводности ортотропного материала / Н. О. Борщев, А. Е. Сорокин, А. Е. Белявский // Тезисы докладов 18-й Международной конференции «Авиация и космонавтика – 2019». – Москва : Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет). – 2019. – С. 133.

52. Кутателадзе, С. С., Боришановский, В. М. Справочник по теплопередаче / С. С. Кутателадзе, В. М. Боришановский. – Москва : ГЭИ, 1959. – 416 с.

53. Борщев, Н. О. Прогнозирование теплопередающих характеристик теплоограждающих конструкций по данным теплофизических экспериментов / Н. О. Борщев // Пилотируемые полёты в космос. Материалы XIII Международной научно-практической конференции. – 2019. – С. 159–160.

54. Борщев, Н. О. Параметрическая идентификация тензора теплопроводности и удельной теплоёмкости твёрдых тел по данным теплофизических экспериментов методом итерационной регуляризации / Н. О. Борщев, А. Е. Белявский, Д. К. Винокуров // Сборник тезисов. – в 2-х т. – Академические чтения по космонавтике, посвящённые памяти академика С. П. Королёва и других выдающихся отечественных учёных – пионеров освоения космического пространства. – Москва. – 2020. – С. 90–92.

55. Артюхин, Е. А., Румянцев, С. В. Градиентный метод нахождения гладких решений граничных обратных задач теплопроводности / Е. А. Артюхин, С. В. Румянцев // ИФЖ. – 1980. – Т. 39, № 2. – С. 259–263.

56. Артюхин, Е. А., Румянцев, С. В. Об оптимальном выборе шагов спуска в градиентных методах решения обратных задач теплопроводности / Е. А. Артюхин, С. В. Румянцев // ИФЖ. – 1980. – Т. 39, № 2. – С. 264–269.

57. Геращенко, О. П. Температурные измерения / О. П. Геращенко, А. Н. Гордов, В. И. Лах [и др.]. – Киев : Наукова думка, 1984. – 496 с.

58. Елисеев, В. Н., Соловов, В. А. Теоретическое и экспериментальное исследование погрешности измерения температур термомпарами в теплоизоляционных материалах / В. Н. Елисеев, В. А. Соловов // МФЖ. – 1983. – Т. 45, №5. – С. 737–742.

59. Расчёт нестационарного температурного поля титановых изделий, подверженных лучисто-конвективному нагреву / Н. О. Борщев, Д. К. Винокуров, О. А. Юранев, А. Е. Белявский, А. Е. Сорокин А.Е. // Титан. – 2020, № 1 (67). – С. 43–48.

60. Оценка влияния энергетических установок космических аппаратов на массу радиационной системы охлаждения / Н. О. Борщев, Д. К. Винокуров, А. Е. Белявский, А. Е. Сорокин // СТИН. – 2020, № 2. – С. 31–33.

61. Алифанов, О. М., Румянцев, С. В. Некоторые вопросы применения итерационной регуляризации для решения некорректных обратных задач / О. М. Алифанов, С. В. Румянцев // ИФЖ. – 1987. – Т. 53, № 5. – С. 843–852.

62. Авдуевский, В. С. Основы теории полёта космических аппаратов / В. С. Авдуевский, Н. А. Анфимов, Б. М. Антонов [и др.] ; под ред. Г. С. Нариманова и М. К. Тихонравова. – Москва : Машиностроение, 1972. – 607 с.

63. Авдуевский, В. С. Основы теплопередачи в авиационной и ракетно-космической технике / В. С. Авдуевский, Б. М. Галицейский, Г. А. Глебов [и др.] ; под ред. В. К. Кошкина. – Москва : Машиностроение, 1992. – 520 с.

64. Алексеев, А. К. К определению температуры в плотности теплового потока из решения обратной задачи теплопроводности в термодеструктурирующем материале / А. К. Алексеев, А. Ю. Чистов, Б. А. Шведов // ИФЖ. – 1993. – Т. 65, № 6. – С. 652–656.

65. Геращенко, О. П. Температурные измерения / О. П. Геращенко, А. Н. Гордов, В. И. Лах [и др.]. – Киев : Наукова думка, 1984. – 496 с.

66. Гольдман, Н. Л. Обратные задачи Стефана / Н. Л. Гольдман // ИФЖ. – 1993. – Т. 65, № 6. – С. 684–689.

67. Гончаров, Н. В., Миков, В. П. Решение обратной задачи по определению трёх характеристик волокнистого композита / Н. В. Гончаров, В. П. Миков // ИФЖ. – 1990. – Т. 58, № 3. – С. 493–499.

68. Гончаров, И. В. Временная зависимость коэффициента теплообмена между компонентами композита в процессе теплопередачи / И. В. Гончаров, В. П. Миков, В. П. Соболев // ИФЖ. – Т. 60, № 6. – С. 947

69. Беляев, Н. М., Рядно, А. А. Методы теории теплопроводности, ч. 1, 2 / Н. М. Беляев, А. А. Рядно. – Москва : Высшая школа, 1982. – 304 с.

70. Васильев, Ф. П. Методы оптимизации / Ф. П. Васильев. – Москва : Изд-во Факториал, 2011.

71. Калашников, А. Л. Порядковая регуляризация некорректной задачи оптимального управления / А. Л. Калашников // Сб. Дифференциальные и интегральные уравнения, вып. 2. – 1978. – Горький : Изд-во горьковского университета.

72. Полак, Э. Численные методы оптимизации. Единый подход /

Э. Полак ; Пер. с англ. – Москва : Мир, 1974. – 374 с.

73. Гилл, Ф., Мюррей, У., Райт, М. Практическая оптимизация / Ф. Гилл, У. Мюррей, М. Райт ; Пер. с англ. – Москва : Мир, 1985. – 509 с.

74. Svanberg, K. The method of moving asymptotes – a new method for structural optimization / K. Svanberg // International Journal for Numerical Methods of Engineering. – 1987. – Vol. 24, № 2. – P. 359–373.

75. Пантелеев, А. В. Метаэвристические алгоритмы поиска глобального экстремума / А. В. Пантелеев. – Москва : Изд-во МАИ-Принт, 2009 – 160 с.

76. Евтушенко, Ю. Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации / Ю. Г. Евтушенко. – Москва : Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1982. – 432 с.

77. Алифанов, О. М., Колесников, В. А. Определение элементов тензора теплопроводности анизотропных материалов из решения обратной задачи / О. М. Алифанов, В. А. Колесников // Труды МАИ. – 2012. – № 58. – URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=33402> (дата обращения: 12.03.2021).

78. Сеа, Ж. Оптимизация. Теория и алгоритмы / Ж. Сеа. – Москва : Мир, 1973.

79. Алексеев, Г. В. Оптимизация в стационарных задачах тепломассопереноса и магнитной гидродинамики / Г. В. Алексеев. – Москва : Научный мир, 2010. – 410 с. – ISBN: 978-5-91522-233-4.

80. Алексеев, В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление / В. М. Алексеев, В. М. Тихомиров, С. В. Фомин. – Москва : Физматлит, 2009.

81. Алексеев, В. М., Галеев, Э. М., Тихомиров, В. М. Сборник задач по оптимизации. Теория. Примеры. Задачи / В. М. Алексеев, Э. М. Галеев, В. М. Тихомиров. – Москва : Физматлит, 2005.

82. Кунц, К. С. Численный анализ / К. С. Кунц ; Пер.с англ. под ред. Ю. В. Благовещенского. – Москва : Техника, 1964.

83. Самарский, А. А., Гулин, А. В. Устойчивость разностных схем / А. А. Самарский, А. В. Гулин. – Москва : Изд-во Либроком, 2009.

84. Самарский, А. А., Андреев, В. Б. Разностные методы для эллиптических уравнений / А. А. Самарский, В. Б. Андреев. – Москва : Наука, 2009.

85. Булавский, В. А. Численные методы линейного программирования / В. А. Булавский, Р. А. Звягина, М. А. Яковлева. – Москва : Наука, 1977.

86. Ашманов, С. А. Линейное программирование / С. А. Ашманов. – Москва : Наука, 1981.

87. Данфорд, Н., Шварц, Дж. Т. Линейные операторы. Общая теория / Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц. – Москва : Прогресс, 1962.

88. Данциг, Дж. Линейное программирование, его применения и обобщения / Дж. Данциг. – Москва : Наука, 1972.

89. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления : учеб. пособие для вузов: в 2 т. / Н. С. Пискунов. – Изд.13-е. – Москва : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1985. – 432 с.

90. Власов, В. И. Исследование ламинарного тепловых потоков на поверхности аппарата сегментально-конической формы при его спуске с околоземной орбиты // Космонавтика и ракетостроение. – 2012, № 1. – С. 14–21.

91. Поршаков, Б. П. Термодинамика и теплопередача (в технологических процессах нефтяной и газовой промышленности) / Б. П. Поршаков, Р.Н. Бикчентай, Б. А. Романов. – Москва : Недра, 1987. – 349 с.

92. Борщев, Н. О., Антонов, В. А. Моделирование аэродинамического теплового нагрева автономного спускаемого аппарата лучистым нагревом для условий теплостатическим испытаний / Н. О. Борщев, В. А. Антонов // Труды 7-й российской национальной конференции по теплообмену (РНКТ-7). – 2018. – Москва : МЭИ.

93. Борщев, Н. О., Антонов, В. А. Теоретическое исследование тепловых режимов автономного спускаемого аппарата в плотных слоях атмосферы Земли для условий теплостатических испытаний / Н. О. Борщев, В. А. Антонов // Труды 7-й российской национальной конференции по

теплообмену (РНКТ-7). – 2018. – Москва : МЭИ.

94. Борщев, Н. О. Оценка влияния теплофизических процессов на объект в условиях тепловакуумных испытаний / Н. О. Борщев, В. А. Антонов, И. А. Протопопов // Тезисы докладов 17-й международной конференции «Авиация и космонавтика». – 2017. – Москва : МАИ.

95. Андронов, В. Г., Белоусов, Е. Г. О слабой сходимости по аргументу метода штрафных функций / В. Г. Андронов, Е. Г. Белоусов // ЖВМиФ. – 1997. – Т. 37, № 4. – С. 404–414.

96. Андронов, В. Г., Белоусов, Е. Г. О бержевой сходимости метода штрафных функций / В. Г. Андронов, Е. Г. Белоусов // ЖВМиФ. – 1998. – Т. 38, № 4. – С. 404–414.

97. Борщев, Н. О., Сорокин, А. Е., Белявский, А. Е. Алгоритм параметрического определения теплофизических характеристик покрытий / Н. О. Борщев, А. Е. Сорокин, А. Е. Белявский // СТИН. – 2019. – № 9. – С. 34–37.

98. Борщев, Н. О., Сорокин, А. Е., Белявский, А. Е. Алгоритм определения тензора теплопроводности методом регуляризации Тихонова А.Н. в сферических координатах / Н. О. Борщев, А. Е. Сорокин, А. Е. Белявский // СТИН. – 2020, № 2. – С. 25–27.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

**Акт о внедрении результатов диссертационной работы
в учебный процесс ФГБОУ ВО МАИ**



Утверждаю

Проректор по учебной работе

Козорез Д. А.

« 15.03 » 2021 г.

Акт

О внедрении диссертационной работы Борщева Никиты Олеговича

В учебный процесс федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», осуществляемый кафедрами: 903 «Перспективные материалы и технологии аэрокосмического назначения», 310 «Электроэнергетические, электромеханические и биотехнические системы», 614 «Экология, системы жизнеобеспечения и безопасность жизнедеятельности».

Настоящим актом подтверждается использование результатов, полученных в диссертационной работе Борщева Н. О. «Методы исследования тепловой модели многозависимого элемента конструкции спускаемого космического аппарата с учетом свойства анизотропии», при реализации учебных программ бакалавриата по направлению 12.04.04. «Биотехнические системы и технологии» в курсах «Введение в авиационную и ракетно-космическую технику», «Тепловые основы технологических процессов», «Теплофизика».

Результаты исследований, изложенные в диссертации, имеют научное и практическое значение. Выводы и рекомендации диссертационной работы применяются при реализации основной образовательной программы высшего образования по направлению (уровень бакалавриата) по направлению 12.03.04 «Биотехнические системы и технологии», профили: «Биотехнические и медицинские аппараты и системы», «Инженерное дело в аэрокосмической медицине», «Инженерное дело в медико-биологической практике».

Директор Дирекции Института № 6
«Аэрокосмический»,
к.т.н., доцент

О.В. Тушавина

Директор Дирекции Института № 9
«Институт общинженерной подготовки»,
Заведующий кафедрой 903,
д.ф.-м.н., профессор

Л.Н. Рабинский

Заведующий кафедрой 310,
д.т.н., профессор

К. Л. Ковалев

Заведующий кафедрой 614,
к.э.н., доцент

А.Е. Сорокин

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

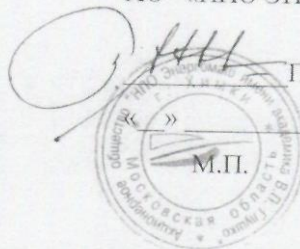
**Акт о внедрении результатов диссертационной работы
в АО «НПО ЭНЕРГОМАШ»**

УТВЕРЖДАЮ

Заместитель генерального
директора - Главный конструктор
АО «НПО ЭНЕРГОМАШ»

П.С. Лёвочкин

2020 г.

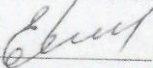


АКТ

об использовании результатов диссертационной работы
Борщева Никиты Олеговича

Настоящим актом подтверждается, что результаты диссертационного исследования Борщева Н.О., а именно алгоритм и методика параметрической идентификации ориентации вектора теплопроводности, приняты к внедрению в производственный процесс при проведении подготовки к огневым испытаниям ЖРД большой мощности и уточнении теплофизических свойств материалов, использующихся при производстве ракетных двигателей.

Начальник отдела 769  С.А. Скибин

Начальник отдела 730  Е.Н. Семина