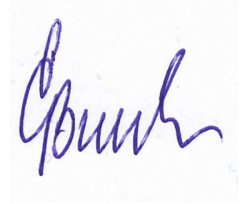


На правах рукописи



ВИШЕНКОВА ЕКАТЕРИНА АЛЕКСЕЕВНА

**Исследование влияния высокочастотных
вибраций на устойчивость движения
механических систем**

01.02.01 – Теоретическая механика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2018

Работа выполнена на кафедре «Мехатроники и теоретической механики» федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)».

Научный руководитель: **Холостова Ольга Владимировна**,
доктор физико-математических наук,
доцент.

Официальные оппоненты: **Кугушев Евгений Иванович**,
доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры теоретической механики и мехатроники механико-математического факультета федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова».

Батхин Александр Борисович,
кандидат физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник федерального государственного учреждения «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша Российской академии наук».

Ведущая организация: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов».

Защита состоится «26» октября 2018 г. в 10:00 на заседании диссертационного совета Д 212.125.14 в Московском авиационном институте (национальном исследовательском университете), по адресу: 125993, г. Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, д. 4.

С диссертацией можно ознакомиться в научно-технической библиотеке Московского авиационного института и на сайте института
https://mai.ru/events/defence/index.php?ELEMENT_ID=95149.

Автореферат разослан «_____» _____ 2018 г.

Отзывы и замечания по автореферату в двух экземплярах, заверенные печатью, просьба высылать по вышеуказанному адресу на имя ученого секретаря диссертационного совета.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
к.ф.-м.н, доцент



Гидаснов В.Ю.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. В последние десятилетия стало актуальным применение в различных механизмах и агрегатах высокочастотных вибраций, позволяющих изменить характер движения или повысить устойчивость системы. Вибрационные устройства нашли применение во многих сферах производства, в том числе в авиационной промышленности и ракетостроении. Для создания и совершенствования подобных устройств активно проводится поиск и исследование новых динамических эффектов, предполагающих как более детальный анализ существующих систем, так и изучение модельных систем. В частности, актуальными остаются задачи исследования частных движений систем, моделируемых твердым телом или системой твердых тел.

Классической задачей вибрационной механики является задача динамической стабилизации верхнего неустойчивого положения равновесия математического маятника за счет быстрых вертикальных вибраций точки подвеса, рассмотренная впервые А. Стефенсоном (1908 г.). Развитие этой задачи получило в работах П. Л. Капицы, Н. Н. Боголюбова и многих других исследователей. Ряд работ (А. Стефенсон, А. П. Маркеев, Т. Г. Стрижак, О. В. Холостова и др.) посвящен динамике сферического маятника, двойного маятника, волчка Лагранжа с вибрирующей точкой подвеса. Недавно получена (А. П. Маркеев) приближенная автономная система дифференциальных уравнений движения тела с произвольной геометрией масс при наличии высокочастотных вибраций одной из его точек, и в рамках этой системы проведен ряд исследований устойчивости частных движений тела (относительных равновесий, стационарных вращений и др.).

Особый интерес представляет случай высокочастотных вертикальных вибраций точки подвеса, для которого многие частные движения тела схожи со случаем тела с неподвижной точкой. Одним из таких типов движений являются перманентные вращения, открытые Б. К. Млодзеевским и О. Штауде (1894 г.) и представляющие собой равномерные вращения вокруг вертикальной (и фиксированной в теле) оси. Устойчивость перманентных вращений тела с неподвижной точкой исследовалась Р. Граммелем, В. В. Румянцевым, К. Магнусом, В. Н. Рубановским, Я. В. Татариновым, О. В. Холостовой и др.

Актуальным является изучение влияния быстрых вертикальных вибраций на существование и области устойчивости данных движений, а также выявление случаев, возникающих только при наличии вибраций.

Цель работы. Целью данной диссертационной работы является исследование устойчивости перманентных вращений в приближенной задаче о движении тяжелого твердого тела при наличии вертикальных высокочастотных гармонических вибраций точки подвеса, а также исследование задачи о существовании и устойчивости периодических движений двойного маятника при горизонтальных высокочастотных гармонических вибрациях точки подвеса.

Методы исследования. Для достижения цели работы в диссертации

применялись методы теорий устойчивости линейных и нелинейных гамильтоновых систем, включая устойчивость при резонансах и КАМ–теорию. Были применены методы нормальных форм Пуанкаре, нормализация гамильтонианов проводилась при помощи преобразования Биркгофа и преобразования Депри–Хори. При проведении анализа использовались компьютерные системы аналитических вычислений и численные расчеты.

Достоверность результатов. Достоверность представленных в диссертации результатов обеспечивается применением строгих математических методов исследования, высокой точностью проведенных численных расчетов, а также тем, что выводы, полученные в предельных случаях аналитически, полностью согласуются с результатами численного анализа.

Научная новизна. В диссертации получены следующие новые научные результаты:

1. В приближенной задаче динамики тяжелого твердого тела с произвольной геометрией масс при наличии вертикальных высокочастотных гармонических вибраций точки подвеса найдено уравнение конуса допустимых осей перманентных вращений вокруг вертикали, обобщение уравнения конуса Штауде для тела с неподвижной точкой. Дано описание допустимых дуг перманентных вращений в случае расположения центра масс тела на главной оси инерции, а также в случае динамически симметричного тела.
2. В рамках приближенной автономной системы канонических дифференциальных уравнений проведено исследование устойчивости перманентных вращений тела в случае расположения центра масс тела на главной оси инерции. Рассмотрены вращения вокруг этой главной оси, а также вокруг осей, лежащих в главных плоскостях инерции, примыкающих к этой оси. В четырехмерном пространстве параметров проведен исчерпывающий анализ устойчивости в линейном приближении данных вращений. В ряде областей найдены достаточные условия устойчивости.
3. В областях выполнения только необходимых (не являющихся достаточными) условий устойчивости проведен нелинейный анализ устойчивости исследуемых перманентных вращений. Получены уравнения поверхностей резонансов третьего и четвертого порядков, а также поверхности вырождения. Подробно изучены два частных случая геометрии масс тела, когда тело динамически симметрично или распределение масс в нем соответствует случаю Бобылева–Стеклова. Проверены критерии устойчивости в резонансных случаях.
4. Рассмотрен частный случай перманентных вращений динамически симметричного твердого тела, обусловленный вибрациями, для которого частота вибраций точки подвеса и угловая скорость перманентного вращения связаны соотношением специального вида. Проведен полный линейный и нелинейный анализ устойчивости этого движения.

5. Исследованы движения системы, состоящей из двух шарнирно соединенных тонких однородных стержней при горизонтальных высокочастотных гармонических вибрациях малой амплитуды точки ее подвеса. В приближенной задаче изучена устойчивость четырех положений относительного равновесия на вертикали. Показано, что устойчивым может быть только нижнее («висящее») положение. Для системы двух одинаковых стержней вопрос об устойчивости рождающегося из него периодического движения решен в строгой нелинейной постановке.
6. Для системы двух одинаковых стержней решен также вопрос о существовании, бифуркациях и устойчивости (в нелинейной постановке) высокочастотных периодических движений малой амплитуды, происходящих в окрестности наклонных положений стержней.

Положения и результаты, выносимые на защиту.

1. Уравнение конуса допустимых осей перманентных вращений (аналог конуса Штауде для тела с неподвижной точкой) в приближенной задаче о движении тяжелого твердого тела при наличии быстрых вертикальных вибраций точки подвеса малой амплитуды.
2. Описание допустимых дуг перманентных вращений в случае расположения центра масс тела на главной оси инерции для точки подвеса, а также в случае динамически симметричного тела.
3. Полный линейный анализ устойчивости перманентных вращений тела с центром масс на главной оси инерции: случаи вращения тела вокруг этой оси (центр масс выше или ниже точки подвеса) и вокруг осей, лежащих в главных плоскостях инерции, примыкающих к этой оси. Аналитическое и графическое представление достаточных и только необходимых (не являющихся достаточными) областей устойчивости. Сравнение с соответствующими результатами для тела с неподвижной точкой.
4. Нелинейный анализ устойчивости для указанных случаев перманентных вращений: получение уравнений поверхностей резонансов третьего и четвертого порядков, а также поверхности вырождения. Подробный анализ для случая динамически симметричного тела и случая Бобылева–Стеклова.
5. Полный линейный и нелинейный анализ частного случая перманентных вращений динамически симметричного твердого тела, вызванного вибрациями и не существующего для тела с неподвижной точкой.
6. Анализ устойчивости четырех положений относительного равновесия на вертикали в приближенной задаче о движении двойного маятника при наличии быстрых горизонтальных гармонических вибраций точки подвеса. Нелинейный анализ устойчивости периодического движения,

рождающегося из нижнего («висящего») положения, в случае двух одинаковых стержней маятника.

7. Решение задачи о существовании, бифуркациях и устойчивости (в строгой нелинейной постановке) высокочастотных периодических движений системы двух одинаковых стержней, происходящих в окрестности наклонных положений стержней.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертационная работа развивает актуальное направление исследования воздействия высокочастотных вибраций на устойчивость механических систем. Решены новые задачи устойчивости для ряда частных режимов движения твердого тела и двойного маятника при наличии вибраций, получены и описаны новые динамические эффекты. Результаты исследования могут быть полезны при разработке вибрационных механизмов и систем, в том числе используемых в авиационной промышленности и ракетостроении, и анализе их свойств.

Часть результатов диссертации может быть включена в качестве дополнительных глав к общему курсу теоретической механики, а также в спецкурсы по динамике твердого тела и теории устойчивости.

Апробация результатов. Результаты диссертации докладывались

- на научных семинарах кафедры теоретической механики Московского авиационного института,
- на Всероссийской конференции «Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем» (РУДН, 2012, Москва),
- на XII Всероссийском совещании по проблемам управления (ИПУ РАН, 2014, Москва),
- на XVIII Международном симпозиуме «Динамика виброударных (сильно нелинейных) систем» (ИМАШ РАН, 2015, Москва),
- на 14-й Международной конференции «Авиация и космонавтика» (МАИ, 2015, Москва),
- на XXVII Международной инновационно-ориентированной конференции молодых учёных и студентов «МИКМУС» (ИМАШ РАН, 2015, Москва),
- на LI Всероссийской конференции по проблемам динамики, физики частиц, физики плазмы и оптоэлектроники (РУДН, 2016, Москва),
- на XLIII Международной конференции «Гагаринские чтения» (МАИ, 2017, Москва).

Работа поддержана грантом РФФИ (проекты №14-01-00380, №17-01-00123).

Публикации. Основные положения диссертационного исследования опубликованы в 11 научных работах, из них 4 статьи [1–4] в журналах, входящих

в перечень ВАК, 7 публикаций [5–11] в различных сборниках и материалах конференций.

Личный вклад автора. Содержание диссертационной работы и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы и получены лично автором. Постановки задач, исследованных в рамках подготовки диссертационной работы, задавались научным руководителем.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, двух частей, пяти глав, заключения, списка литературы из 90 наименований. Работа содержит 18 иллюстраций, 8 таблиц. Общий объем диссертации составляет 117 страниц.

Содержание работы

Во введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулированы ее цель и задачи. Приведен обзор исследований устойчивости движений механических систем при воздействии высокочастотных вибраций и работ по изучению устойчивости перманентных вращений твердого тела с неподвижной точкой. Дано краткое изложение содержания по главам.

В первой части изучается устойчивость перманентных вращений в приближенной задаче о движении тяжелого твердого тела при наличии высокочастотных вертикальных гармонических вибраций одной из его точек.

В первой главе ставится задача о движении тяжелого твердого тела массы m , одна из точек которого (точка подвеса O) совершает гармонические колебания по закону $\zeta(t) = a \cos \Omega t$. Введены поступательно движущаяся система координат $OXYZ$, ось OZ которой направлена вертикально вверх, и жестко связанная с телом система координат, оси которой направлены вдоль главных осей инерции тела для точки O . Ориентация связанной системы относительно $OXYZ$ задана углами Эйлера ψ , θ , φ . Главные моменты инерции тела для точки O обозначены через A , B и C , координаты центра масс тела и орта \vec{n} оси OZ в связанных осях — через x_G , y_G , z_G и γ_1 , γ_2 , γ_3 .

Пусть амплитуда a колебаний точки подвеса мала по сравнению с приведенной длиной $\ell = A/(mx_G)$, а частота Ω колебаний велика по сравнению с характерной частотой $\Omega_1 = \sqrt{g/\ell}$, при этом $a\Omega \sim 1$. Введен малый параметр ε и безразмерная частота ω_0 по формулам $\varepsilon^2 = a/\ell$ ($0 < \varepsilon \ll 1$), $\Omega_1/\Omega = \varepsilon^2\omega_0$.

При помощи методов теории возмущений гамильтониан системы приведен к виду, главная часть которого в слагаемых до четвертого порядка по ε включительно не содержит времени. Как в исходной, так и в преобразованной системе координата ψ циклическая, соответствующий ей импульс постоянен.

Введены безразмерные импульсы p_ψ , p_θ , p_φ , безразмерные параметры α , β и σ_1 , σ_2 по формулам: $\alpha = A/B$, $\beta = A/C$, $\sigma_1 = y_G/x_G$, $\sigma_2 = z_G/x_G$. За независимую переменную принято безразмерное «время» $\tau = \Omega_1 t$.

Приближенный гамильтониан системы может быть переписан в безразмерном виде (за переменными оставлены предыдущие обозначения):

$$H = \frac{\alpha \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}{2 \sin^2 \theta} (p_\psi - p_\varphi \cos \theta)^2 + \frac{1}{2} (\alpha \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) p_\theta^2 + \quad (1)$$

$$+ \frac{(1 - \alpha) \sin \varphi \cos \varphi}{\sin \theta} (p_\psi - p_\varphi \cos \theta) p_\theta + \frac{1}{2} \beta p_\varphi^2 + \Pi^{(\nu)}.$$

Последнее слагаемое в гамильтониане (1) представляет собой вибратонный потенциал, задаваемый формулой:

$$\Pi^{(\nu)} = \xi [(\sigma_2 \sin \theta \cos \varphi - \sigma_1 \cos \theta)^2 + (\cos \theta - \sigma_2 \sin \theta \sin \varphi)^2 \alpha +$$

$$+ (\cos \varphi - \sigma_1 \sin \varphi)^2 \beta \sin^2 \theta] / 2, \quad \xi = \frac{m x_G a^2 \Omega^2}{2 A g} \quad (\xi > 0).$$

Параметр ξ характеризует частоту вибрации точки подвеса.

Решения полной неавтономной системы $\hat{\theta}, \hat{\varphi}, \hat{p}_\theta, \hat{p}_\varphi$ на интервале времени τ порядка $\varepsilon^{-1/2}$ связаны с решениями преобразованной приближенной автономной системы с гамильтонианом (1) при помощи соотношений вида:

$$\hat{\theta} = \theta + O(\varepsilon^{3/2}), \quad \hat{p}_\theta = p_\theta - m \dot{\zeta}(t) [(x_G \sin \varphi + y_G \cos \varphi) \cos \theta - z_G \sin \theta] + O(\varepsilon^{1/2}),$$

$$\hat{\varphi} = \varphi + O(\varepsilon^{3/2}), \quad \hat{p}_\varphi = p_\varphi - m \dot{\zeta}(t) [x_G \cos \varphi - y_G \sin \varphi] \sin \theta + O(\varepsilon^{1/2}).$$

Движения тела с вибрирующей точкой подвеса могут быть описаны также при помощи приближенной автономной системы дифференциальных уравнений, записанной в форме модифицированных уравнений Эйлера–Пуассона, в правые части которых следует добавить компоненты вектора вибратонного момента $M^{(\nu)}$, получаемые по формулам:

$$M_x^{(\nu)} = \frac{\partial \Pi^{(\nu)}}{\partial \gamma_3} \gamma_2 - \frac{\partial \Pi^{(\nu)}}{\partial \gamma_2} \gamma_3, \quad M_y^{(\nu)} = \frac{\partial \Pi^{(\nu)}}{\partial \gamma_1} \gamma_3 - \frac{\partial \Pi^{(\nu)}}{\partial \gamma_3} \gamma_1, \quad M_z^{(\nu)} = \frac{\partial \Pi^{(\nu)}}{\partial \gamma_2} \gamma_1 - \frac{\partial \Pi^{(\nu)}}{\partial \gamma_1} \gamma_2.$$

Далее движения тела изучаются в рамках приближенной системы, записанной в гамильтоновой форме или в уравнениях Эйлера–Пуассона.

Рассмотрены частные движения — перманентные вращения тела, происходящие вокруг оси, фиксированной в теле и в системе координат $OXYZ$, с постоянной угловой скоростью ω . Как и для тела с неподвижной точкой подвеса, оси перманентных вращений тела при наличии вертикальных вибраций точки подвеса могут быть только вертикальными. Введена безразмерная угловая скорость перманентного вращения $\eta = \omega / \Omega_1$ ($\eta > 0$).

Получено уравнение, описывающее в пространстве величин $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$

геометрическое место допустимых осей перманентных вращений:

$$\eta^2 \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \sigma_2 \gamma_1 \gamma_2 + \frac{\beta-1}{\beta} \sigma_1 \gamma_1 \gamma_3 + \frac{\alpha-\beta}{\alpha\beta} \gamma_2 \gamma_3 \right) - \xi \left(\sigma_2^2 (1-\alpha) (\sigma_2 \gamma_1 \gamma_2 - \sigma_1 \gamma_1 \gamma_3 - \gamma_2 \gamma_3) + \sigma_1^2 (1-\beta) (\sigma_2 \gamma_1 \gamma_2 - \sigma_1 \gamma_1 \gamma_3 + \gamma_2 \gamma_3) + (\alpha-\beta) (\gamma_2 \gamma_3 - \sigma_2 \gamma_1 \gamma_2 - \sigma_1 \gamma_1 \gamma_3) + [(1-\alpha)\gamma_3^2 + (\beta-1)\gamma_2^2 + (\alpha-\beta)\gamma_1^2] \sigma_1 \sigma_2 \right) = 0. \quad (2)$$

Это уравнение эллиптического конуса, переходящее в случае отсутствия вибрации ($\xi = 0$) в известное уравнение конуса Штауде.

В диссертации рассмотрены два частных случая геометрии масс тела, когда центр масс находится на одной из главных осей инерции тела для точки O и когда тело динамически симметрично ($\alpha = 1$), а центр масс занимает произвольное положение. Опишем соответствующие допустимые оси перманентных вращений.

1. Пусть центр масс тела лежит на главной оси инерции Ox . Уравнение (2) сводится к $\gamma_2 \gamma_3 (\xi \alpha \beta - \eta^2) = 0$. Возможны следующие варианты:

- Ось вращения — главная ось инерции Ox , содержащая центр масс. В этом случае, как и для тела с неподвижной точкой, угловая скорость перманентного вращения может быть произвольной, при этом центр масс системы может располагаться ниже или выше точки подвеса.
- Ось вращения лежит в одной из главных плоскостей инерции, примыкающих к главной оси Ox . Пусть это, например, плоскость Oxz . В этой плоскости строится единичная окружность с центром в точке O и рассматривается геометрическое место точек пересечения допустимых осей с этой окружностью, образующих допустимые дуги. Если $\xi < 1/\alpha$, то допустимые дуги — полуокружности, лежащие в нижней или верхней полуплоскостях для случаев $\beta < 1$ и $\beta > 1$ соответственно. Если $\xi > 1/\alpha$, то допустимые дуги определяются условиями $0 < \gamma_1 < 1$ и $1/(\xi\alpha) < \gamma_1 < 1$ при $\beta < 1$ (рис. 1 а) и условием $0 < \gamma_1 < 1/(\xi\alpha)$ при $\beta > 1$ (рис. 1 б).
- Если $\eta^2 = \xi\alpha\beta > 1$, то допустимая дуга составляет окружность, задаваемую условием $\gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1 - (\gamma_1^*)^2$, $\gamma_1^* = 1/(\xi\alpha\beta)$.

2. В случае динамически симметричного тела предполагается, что оси Ox и Oy выбраны так, чтобы центр масс лежал в плоскости Oxz ($\sigma_1 = 1$). Уравнение (2) в этом случае сводится к $\gamma_2 [\eta^2 \gamma_3 - \beta \xi (\gamma_3 - \sigma_2 \gamma_1)] = 0$.

- В случае $\gamma_2 = 0$, когда оси перманентных вращений лежат в плоскости Oxz , содержащей центр масс, вид допустимых дуг зависит от параметров σ_2 и ξ . Для $1/2 \leq \beta < 1$ допустимые дуги на рис. 2 показаны сплошными линиями, для случая $\beta > 1$ — пунктирными.

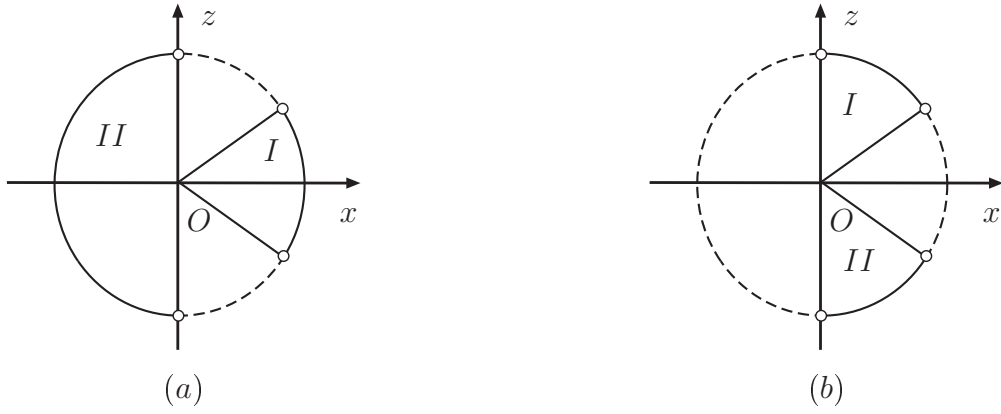


Рис. 1. Допустимые дуги в случае $\xi > 1/\alpha$

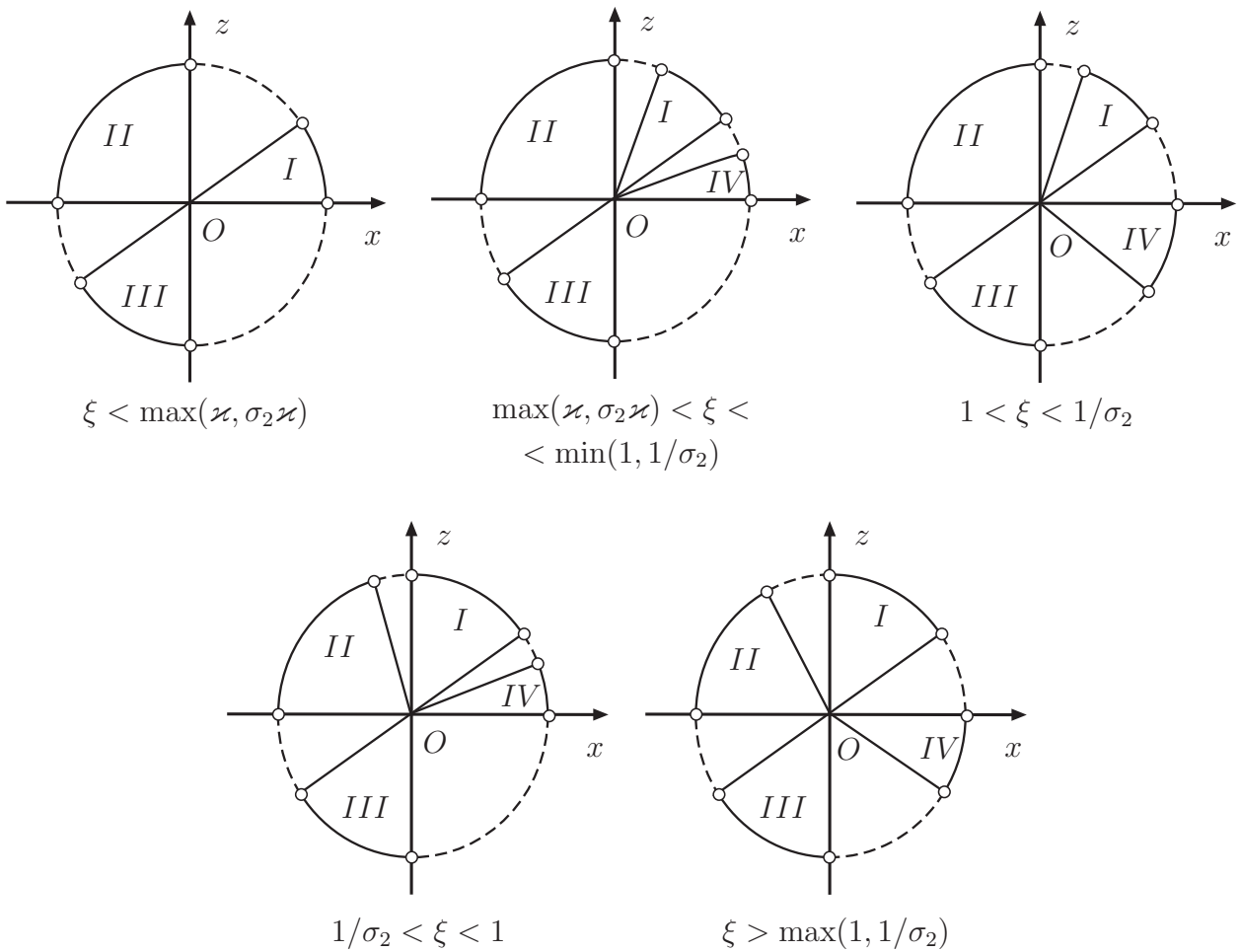


Рис. 2. Допустимые дуги для различных значений σ_2 и ξ ($\varkappa = [\xi(\sigma_2^2 + 1)]^{-1}$.)

- В плоскости $\eta^2 \gamma_3 = \beta \xi (\gamma_3 - \sigma_2 \gamma_1)$ перманентные вращения существуют, если параметры задачи связаны соотношением $\xi = \eta^2 / \beta$ и $\xi \sigma_2 > 1$. При этом $\gamma_1 = 0$, $\gamma_3 = \gamma_3^* = 1 / (\xi \sigma_2)$, $\gamma_2 = \pm \sqrt{1 - \gamma_3^2}$, а ось перманентных вращений лежит в главной плоскости Oyz .

Во второй главе приведено исследование устойчивости перманентных

вращений твердого тела вокруг главной оси инерции Ox , содержащей центр масс. Здесь и в следующих главах уравнения движения рассматриваются в гамильтоновой форме, а устойчивость перманентных вращений понимается как устойчивость соответствующих положений равновесия приведенной (по Раусу) гамильтоновой системы с двумя степенями свободы. Используются известные методы линейного и нелинейного анализа устойчивости автономных гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Исследуемому движению отвечает положение равновесия системы с гамильтонианом (1) вида:

$$\theta_0 = \pi/2, \quad \varphi = \varphi_0 \quad (\cos \varphi_0 = 0), \quad p_{\theta_0} = 0, \quad p_{\varphi_0} = 0, \quad p_\eta = \eta = \text{const}. \quad (3)$$

Анализ устойчивости проведен в четырехмерном пространстве параметров α, β, ξ, η . Инерционные параметры α, β должны удовлетворять неравенствам, следующим из неравенств треугольника для моментов инерции $\alpha + \beta - \alpha\beta \geq 0, \alpha - \beta + \alpha\beta \geq 0, \beta - \alpha + \alpha\beta \geq 0$.

Введем возмущения по формулам $\theta = \theta_0 + x_1, \varphi = \varphi_0 + x_2, p_\theta = p_{\theta_0} + y_1, p_\varphi = p_{\varphi_0} + y_2$ и представим гамильтониан в виде: $H = H_2 + H_4 + \dots$, где H_2 и H_4 — формы второй и четвертой степени, а многоточие — совокупность слагаемых не менее шестой степени относительно возмущений.

Достаточные условия устойчивости исследуемых решений (условия положительной определенности квадратичной формы H_2) имеют вид:

$$\eta^2(\alpha - 1) - s\alpha + \xi\alpha\beta > 0, \quad \eta^2(\beta - 1) - s\beta + \xi\alpha\beta > 0, \quad s = \text{sign}(\sin \varphi_0).$$

В случае знакопеременности формы H_2 будем исследовать характеристическое уравнение соответствующей ей линейной системы, имеющее вид:

$$\begin{aligned} \lambda^4 + a\lambda^2 + b &= 0, \\ a &= (2 - \alpha - \beta + \alpha\beta)\eta^2 - s(\alpha + \beta) + \xi(\alpha^2 + \beta^2), \\ b &= [\eta^2(\alpha - 1) + \alpha(\xi\beta - s)][\eta^2(\beta - 1) + \beta(\xi\alpha - s)]. \end{aligned}$$

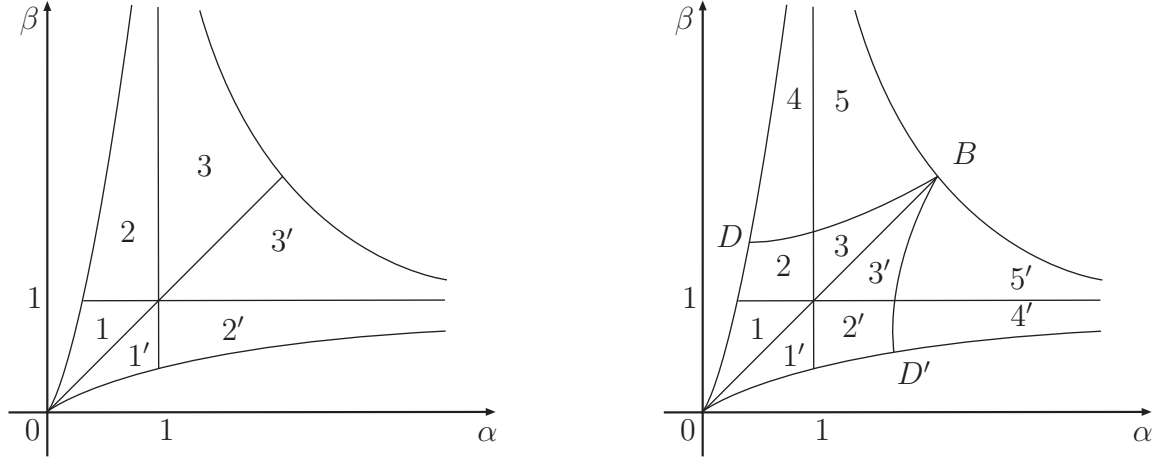
При выполнении условий

$$a > 0, \quad b > 0, \quad d = a^2 - 4b > 0 \quad (4)$$

его корни $\pm i\sigma_j$ ($j = 1, 2$) уравнения чисто мнимые, и исследуемые решения устойчивы в линейном приближении. Неравенства (4) являются необходимыми условиями устойчивости решений (3). Если хотя бы одно из неравенств (4) выполняется с противоположным знаком, то имеет место неустойчивость.

Изложим результаты исследования выписанных условий устойчивости. Допустимую часть плоскости параметров α, β разобьем на ряд областей с качественно различными результатами устойчивости (рис. 3 *a, b*).

1. *Центр масс тела ниже точки подвеса.* В областях 1, 2 необходимые и достаточные условия устойчивости выполняются при $\eta^2 < \alpha(\xi\beta + 1)/(1 -$



(a) центр масс тела ниже точки подвеса

(b) центр масс тела выше точки подвеса

Рис. 3. Разбиение допустимой области параметров α, β

α), а в области 3 — при любых значениях параметра η ($\eta > 0$). В области 1 могут выполняться только необходимые (не являющиеся достаточными) условия устойчивости вида $\eta^2 > \beta(\xi\alpha + 1)/(1 - \beta)$. Таким образом, наличие вибрации расширяет диапазон угловых скоростей выполнения достаточных условий устойчивости. В областях 1'–3' условия устойчивости получаются из соответствующих условий для областей 1–3 заменой $\alpha \leftrightarrow \beta$.

2. *Центр масс тела выше точки подвеса.* Условия устойчивости получены для точек всех областей на рис. 3 b. Для каждой из областей полуось положительных значений параметра ξ разбита на несколько интервалов, границы которых зависят от исследуемой точки (α, β) области. Для каждого такого интервала, в свою очередь, выписаны ограничения на параметр η , определяющие достаточные и только необходимые условия устойчивости. В качестве примера приведем результаты для областей 1 и 4 (табл. 1).

Таблица 1. Достаточные и необходимые условия устойчивости для областей 1 и 4

Обл.	Значения ξ	Достаточные условия	Только необходимые условия
1	$\xi \leq \xi_1$	—	$\eta > \eta_4$
	$\xi_1 < \xi < \xi_3$	—	$\eta_1 < \eta < \eta_3, \eta > \eta_4$
	$\xi_3 < \xi < 1/\alpha$	—	$\eta > \eta_1$
	$1/\alpha < \xi < 1/(\alpha\beta)$	$\eta < \eta_2$	$\eta > \eta_1$
	$\xi > 1/(\alpha\beta)$	$\eta < \eta_1$	$\eta > \eta_2$
4	$\xi < \xi_2$	—	—
	$\xi_2 < \xi \leq \xi_1$	—	$\eta_4 < \eta < \eta_2$
	$\xi_1 < \xi < \xi_3$	—	$\eta_1 < \eta < \eta_3, \eta_4 < \eta < \eta_2$
	$\xi_3 < \xi < 1/(\alpha\beta)$	—	$\eta_1 < \eta < \eta_2$
	$1/(\alpha\beta) < \xi < 1/\alpha$	$\eta_2 < \eta < \eta_1$	—
	$\xi > 1/\alpha$	$\eta < \eta_1$	—

Введенные в таблице обозначения таковы:

$$\xi_1 = \frac{3\alpha - 2\alpha^2 - 2\alpha\beta + \alpha^2\beta + \beta}{2\alpha\beta + \alpha^2(1 - \alpha - \beta) + \beta^2(\alpha - 1)^2}, \quad \xi_3 = \frac{\alpha - 2}{\alpha^2 - \alpha - \beta},$$

$$\xi_2 = \frac{3\beta - 2\alpha\beta - 2\beta^2 + \alpha\beta^2 + \alpha}{2\alpha\beta + \alpha^2(\beta - 1)^2 + \beta^2(1 - \beta - \alpha)}, \quad \eta_1^2 = \frac{\alpha(\xi\beta - 1)}{1 - \alpha}, \quad \eta_2^2 = \frac{\beta(\xi\alpha - 1)}{1 - \beta}.$$

Обозначения η_3 и η_4 не приведены в силу громоздкости.

Нелинейный анализ устойчивости. В областях выполнения только необходимых условий устойчивости проведен нелинейный анализ устойчивости.

При отсутствии резонанса четвертого порядка ($\kappa_1 \neq 3\kappa_2$) нормализованный гамильтониан в симплектических полярных координатах имеет вид:

$$H = \kappa_1 r_1 - \kappa_2 r_2 + c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2 + O(r_j^{5/2}).$$

Перманентное вращение устойчиво по Ляпунову при выполнении условия теоремы Арнольда – Мозера: $\Delta = c_{20}\sigma_2^2 + c_{11}\kappa_1\kappa_2 + c_{02}\sigma_1^2 \neq 0$. Если $\Delta = 0$, то имеется вырождение в членах четвертого порядка; этот случай требует дальнейшей нормализации и в диссертации не рассматривался.

Если в системе реализуется резонанс четвертого порядка ($\kappa_1 = 3\kappa_2$), то нормализованная функция Гамильтона имеет вид:

$$H = 3\kappa_2 r_1 - \kappa_2 r_2 + c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2 + k_4 r_1^{1/2} r_2^{3/2} \cos(\varphi_1 + 3\varphi_2) + O(r_j^{5/2}).$$

При этом, если выполняется условие $|c_{20} + 3c_{11} + 9c_{02}| > 3\sqrt{3}k_4$ ($k_4 \geq 0$), то исследуемое решение устойчиво по Ляпунову. При выполнении неравенства с противоположным знаком имеем неустойчивость.

В диссертации выписаны уравнения поверхности резонанса четвертого порядка и поверхности вырождения для произвольных допустимых значений параметров. Подробный нелинейный анализ проведен для двух частных случаев геометрии масс тела: случая динамически симметричного тела ($\alpha = 1$) и случая Бобылева–Стеклова ($\alpha = 2$). В трехмерном пространстве параметров ξ, η, β построены сечения $\beta = \text{const}$ для различных (допустимых) значений параметра β . Результаты для случая $\alpha = 1$ представлены на рис. 4 в плоскости параметров ξ, η . Серым цветом показаны области неустойчивости. Не закрашены области выполнения достаточных условий устойчивости (области правее граничной прямой $\xi = 1/\beta$) и области выполнения только необходимых условия устойчивости (левее этой прямой). В последних областях кривые резонанса четвертого порядка изображены полужирными линиями на участках устойчивости и пунктирными линиями на участках неустойчивости; кривые вырождения показаны точечными линиями.

В случае $\alpha = 2$ для всех допустимых β ($2/3 < \beta < 2$) качественный вид диаграммы устойчивости совпадает с показанным на рис. 4 с, только прямо-

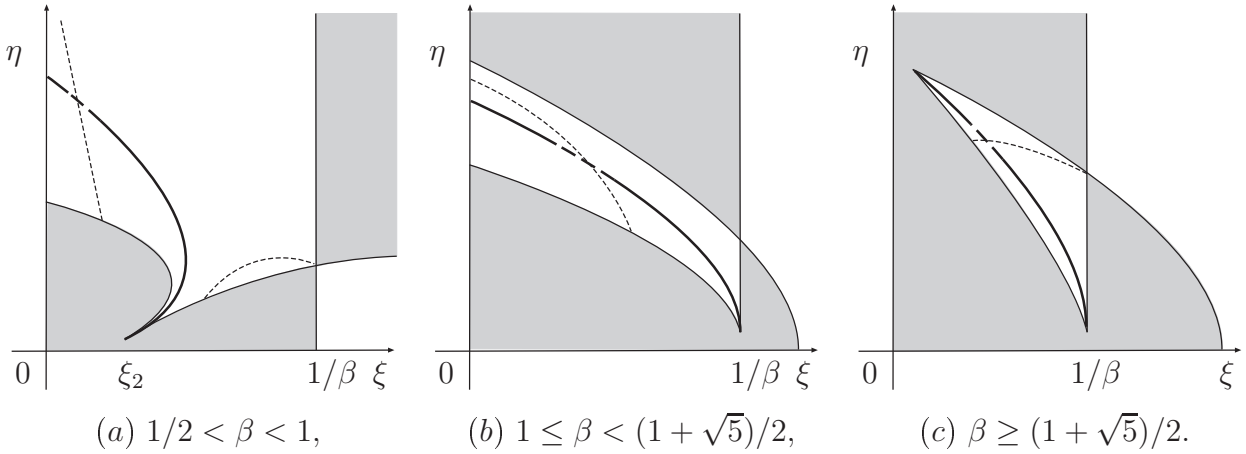


Рис. 4. Нелинейный анализ устойчивости

линейная граница $\xi = 1/\beta$ заменяется криволинейной границей $\eta = \eta_1$.

Для рассмотренных значений параметра β установлено, что для всех точек резонансных кривых, кроме небольшой зоны неустойчивости, содержащей в себе точки их пересечения с кривыми вырождения, имеет место устойчивость по Ляпунову.

Результаты второй главы опубликованы в работе [2].

В третьей главе приведено исследование устойчивости перманентных вращений твердого тела вокруг осей, лежащих в главной плоскости инерции Oxz , примыкающей к главной оси инерции Ox , содержащей центр масс. Этим движениям отвечают положения равновесия приведенной системы с гамильтонианом (1), задаваемые соотношениями:

$$\theta = \theta_0, \quad \varphi = \varphi_0 \quad (\cos \varphi_0 = 0), \quad p_{\theta_0} = 0, \quad p_{\varphi_0} = \frac{\eta}{\beta} \cos \theta_0, \quad p_{\psi} = \eta \left(\sin^2 \theta_0 + \frac{\cos^2 \theta_0}{\beta} \right),$$

где величина θ_0 определяется из уравнения $[(\beta - 1)\eta^2 + \xi\alpha\beta] \sin \varphi_0 \sin \theta_0 = \beta$.

Проведен анализ устойчивости, аналогичный описанному в главе 2. Достаточные условия устойчивости рассматриваемых перманентных вращений определяются системой неравенств:

$$(\beta - \alpha)(\xi\alpha\beta - \eta^2) > 0, \tag{5}$$

$$(\beta - 1)^3\eta^6 + 3\xi\alpha\beta(\beta - 1)^2\eta^4 + 3\beta^2(\beta - 1)(\xi^2\alpha^2 - \beta + 1)\eta^2 < \beta^3\xi\alpha(1 - \xi^2\alpha^2 - \beta).$$

Необходимые условия устойчивости задаются системой (4).

В диссертации проведен подробный аналитический, численный и графический анализ систем (5) и (4). Результаты представлены в форме, аналогичной описанной в главе 2. Область допустимых значений параметров α, β (рис. 5) разделена на области 1–9; внутри области 2 выделена подобласть 2*.

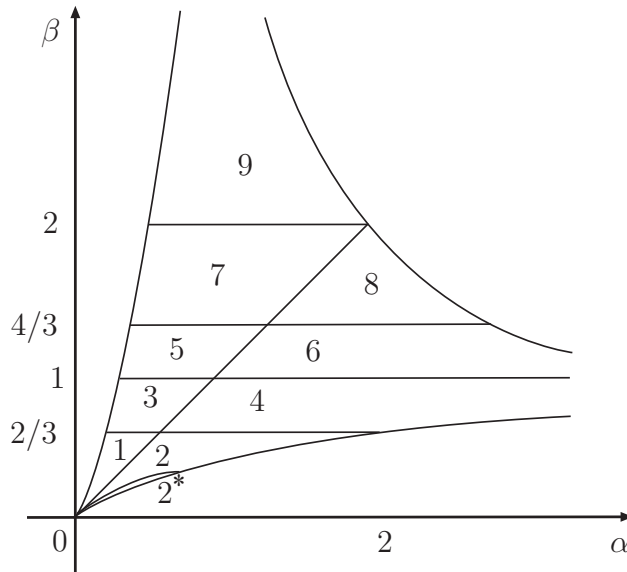


Рис. 5. Разбиение допустимой области параметров α, β

На рис. 6 в плоскости параметров η, ξ (при фиксированных α, β) представлена характерная для каждой области картина устойчивости. Прямые $\eta = \eta_1$ и $\eta = \eta_2$ в областях 1–4 отвечают правой и левой границам областей существования перманентных вращений при расположении центра масс тела выше и ниже точки подвеса соответственно. В областях между этими прямыми перманентные вращения не существуют. Области 5–9 относятся к вращениям, для которых центр масс тела находится выше точки подвеса. Сплошным цветом закрашены области выполнения достаточных условий устойчивости, в заштрихованных областях выполняются только необходимые условия, в оставшихся областях имеет место неустойчивость.

Проведенный анализ показывает, что перманентные вращения, для которых центр масс тела расположен ниже точки подвеса, в областях 2, 2*, 4 устойчивы при всех допустимых значениях параметров η, ξ . Эти движения устойчивы и в случае отсутствия вибрации ($\xi = 0$), однако с появлением вибрации точки подвеса нижняя граница диапазона допустимых значений угловых скоростей перманентных вращений возрастает. В областях 1 и 3 рассматриваемые вращения всегда неустойчивы, как и при отсутствии вибраций.

Перманентные вращения, для которых центр масс расположен выше точки подвеса, можно стабилизировать в областях 1–4 в определенном диапазоне угловых скоростей за счет вибраций точки подвеса; при отсутствии вибраций имеет место неустойчивость. В областях 5, 7, 8, 9, по сравнению со случаем отсутствия вибрации, сдвигается в сторону уменьшения нижняя граница угловых скоростей устойчивых перманентных вращений. Для точек области 8 увеличение параметра ξ приводит к исчезновению подобласти выполнения до-

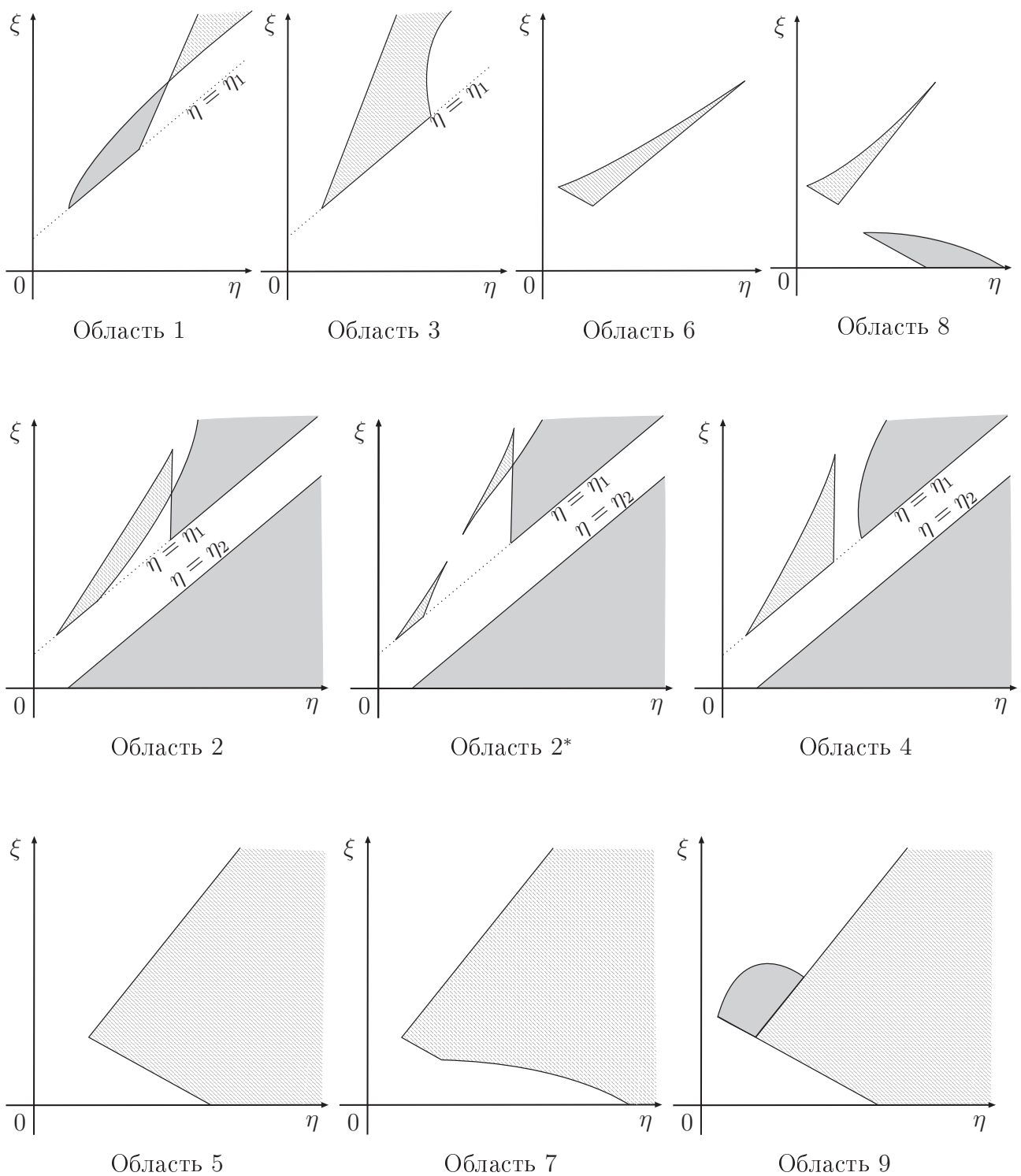


Рис. 6. Области устойчивости

статочных условий устойчивости, при этом имеется новая подобласть устойчивости в линейном приближении, появляющаяся за счет вибрации. В области 9 при $\xi > 0$, кроме расширения области устойчивости в линейном приближении, появляется подобласть выполнения достаточных условий устойчивости. В области 6 имеет место стабилизация для определенного диапазона угловых скоростей и частоты вибрации точки подвеса.

Нелинейный анализ устойчивости. Рассмотрены нерезонансный случай ($\kappa_1 \neq 2\kappa_2, \kappa_1 \neq 3\kappa_2$) и случаи резонансов третьего ($\kappa_1 = 2\kappa_2$) и четвертого ($\kappa_1 = 3\kappa_2$) порядков. Нормальные формы гамильтониана и критерии устойчивости для нерезонансного случая и случая резонанса четвертого порядка приведены в главе 2. В случае резонанса третьего порядка нормальная форма гамильтониана возмущенного движения имеет вид:

$$H = 2\kappa_2 r_1 - \kappa_2 r_2 + k_3 \sqrt{r_1} r_2 \sin(\varphi_1 + 2\varphi_2) + c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2 + O(r_j^{5/2}).$$

Если $k_3 = 0$ и $c_{20} + 2c_{11} + 4c_{02} \neq 0$, исследуемое решение устойчиво.

Подробный нелинейный анализ проведен для тех же, что и в главе 2, частных случаев геометрии масс. В случае динамически симметричного тела были рассмотрены области 2, 4, 5, 7, 9. В качестве примера приведем результаты для областей 2 и 4, проиллюстрированные на рис. 7 аналогичным описанному во второй главе образом. Кривые резонанса третьего порядка показаны тонкими линиями.

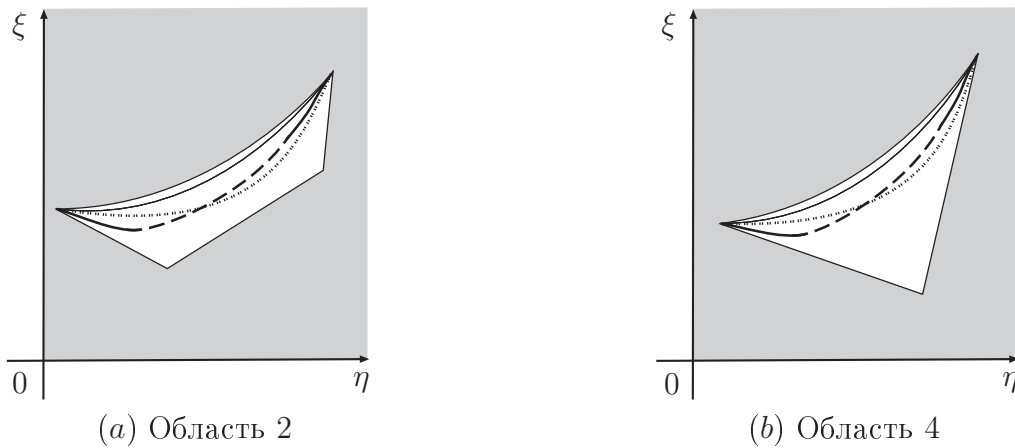


Рис. 7. Нелинейный анализ устойчивости для областей 2 и 4

Установлено, что для точек кривой резонанса третьего порядка имеет место неустойчивость. На кривых резонанса четвертого порядка существуют участки неустойчивости в случае их пересечения с кривыми вырождения, содержащие точки их пересечения, а также при «сближении» этих кривых.

В случае Бобылева–Стеклова состав кривых и картина устойчивости качественно не отличаются от представленной на рис. 7 b.

Результаты третьей главы опубликованы в работе [3].

В четвертой главе приведено исследование устойчивости частного случая перманентных вращений динамически симметричного твердого тела, для которого параметры η и ξ связаны соотношением $\xi = \eta^2/\beta$. Этому вращению

отвечает положение равновесия системы с гамильтонианом (1) вида:

$$\theta_0 = \arccos \frac{\beta}{\sigma_2 \eta^2} \left(\eta^2 > \frac{\beta}{\sigma_2} \right), \quad \varphi_0 = 0, \quad p_{\theta_0} = 0, \quad p_{\varphi_0} = \frac{1}{\sigma_2 \eta}, \quad p_{\psi} = \eta - \frac{\beta(\beta - 1)}{\eta^3 \sigma_2^2}.$$

Проведен его линейный и нелинейный анализ устойчивости в трехмерном пространстве параметров η , σ_2 , β при фиксированном значении параметра ξ . Достаточные условия устойчивости имеют вид:

$$\begin{aligned} \eta^4 \sigma_2^2 (1 - \sigma_2^2) + \beta(4\beta^2 + \beta[\sigma_2^2 - 5] + 1) &> 0, \\ \eta^4 \sigma_2^2 (\beta + \sigma_2^2 - \beta \sigma_2^2) + \beta^2 (\beta - 1) (\sigma_2^2 + 4\beta - 1) &< 0, \\ (\beta - 1) [\beta(\beta - 1)(4\beta + \sigma_2^2) - \eta^4 \sigma_2^4] &< 0. \end{aligned}$$

Только необходимые условия устойчивости определяются системой неравенств

$$\begin{aligned} (\beta - 1) [\beta(\beta - 1)(4\beta + \sigma_2^2) - \eta^4 \sigma_2^4] &< 0, \\ \beta(\beta^3 + 3\beta^2 + \beta[\sigma_2^2 - 5] + 1) - \eta^4 \sigma_2^2 (\sigma_2^2 + \beta^2 - 1) &> 0, \\ \eta^8 \sigma_2^4 \Gamma - 2\beta \sigma_2^2 \eta^4 \Lambda + \beta^2 \Upsilon &> 0, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \Gamma &= \sigma_2^4 - 2(\beta - 1)^2 \sigma_2^2 + (\beta^2 - 1)^2, \quad \Lambda = \sigma_2^4 \beta - (\beta - 1)(2\beta^2 - 7\beta + 1) \sigma_2^2 + (\beta - 1)^5, \\ \Upsilon &= \sigma_2^4 \beta^2 - 2\beta(\beta^2 - 6\beta + 1)(\beta - 1) \sigma_2^2 + (\beta^2 - 6\beta + 1)(\beta - 1)^4. \end{aligned}$$

Установлено, что достаточные условия устойчивости не выполняются для любых допустимых значений параметров η , β , σ_2 . Только необходимые условия устойчивости сводятся к условию $\eta_A^4 < \eta^4 < \eta_E^4$ в области I' и $\beta^2/\sigma_2^2 < \eta^4 < \eta_E^4$ — в области II (рис. 8 а). Здесь $\eta_A^4 = \beta(\beta - 1)(4\beta + \sigma_2^2)/\sigma_2^4$, а η_E^4 — меньший из корней квадратного (относительно η^4) трехчлена в (6).

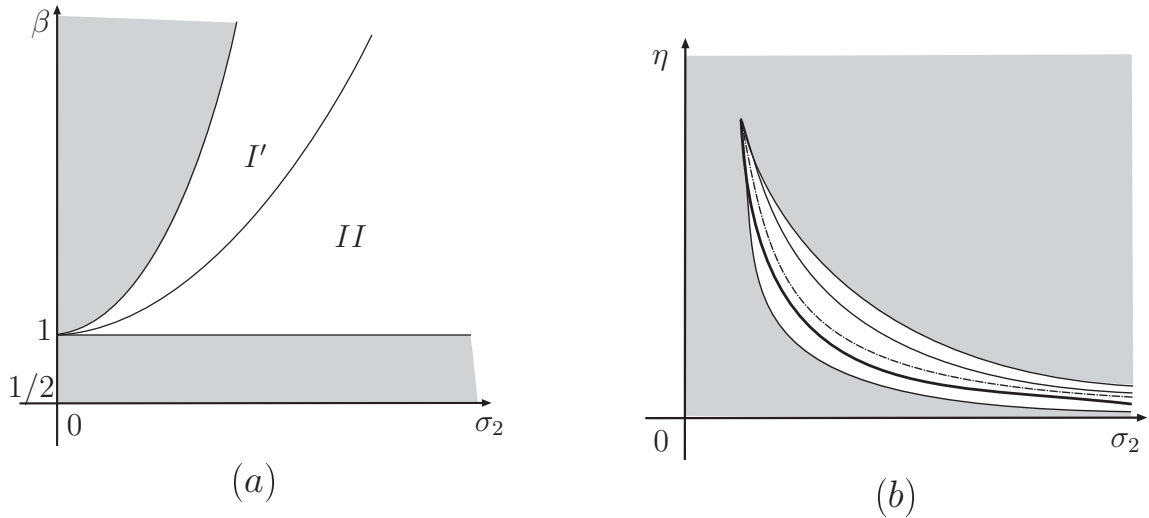


Рис. 8. Случай динамически симметричного тела

Нелинейный анализ устойчивости. Нелинейный анализ устойчивости проведен в трехмерном пространстве параметров в областях выполнения только необходимых условий устойчивости. В этих областях строились сечения $\beta = \text{const}$ для различных значений β из интервала $1 < \beta < 10$. Выявлено, что картина устойчивости в рассмотренных сечениях качественно не меняется и имеет характерный вид, представленный на рис. 8 *b*. При этом показаны одновременно части сечения, относящиеся к областям *I'* и *II* на рис. 8 *a*. Изображения на рис. 8 *b* областей устойчивости и неустойчивости, а также резонансных кривых и кривых вырождения аналогичны принятым в предыдущих главах. Установлено, что на резонансных кривых третьего порядка имеет место неустойчивость, а на резонансных кривых четвертого порядка — устойчивость по Ляпунову.

Результаты четвертой главы опубликованы в работе [4].

Во **второй части** исследуется движение двойного маятника — системы из двух тонких шарнирно соединенных однородных стержней — точка подвеса которого совершает горизонтальные гармонические колебания по закону $a \cos(\Omega t)$. Массы стержней и их длины обозначим через m_1, m_2 и l_1, l_2 .

Считаем, что амплитуда a колебаний точки подвеса мала по сравнению с длиной первого стержня l_1 , а частота Ω велика по сравнению с характерной частотой $\sqrt{g/l_1}$. Введем малый параметр $\varepsilon = a/l_1$ ($0 < \varepsilon \ll 1$) и безразмерную частоту ω , определяемую формулой $\varepsilon^2 \omega^2 = g/(l_1 \Omega^2)$. Полагаем $\omega \sim 1$, тогда $a\Omega \sim 1$.

При помощи близкой к тождественной канонической замены гамильтониан системы приведен к виду, главная часть которого (в слагаемых до второго порядка по ε включительно) не содержит времени τ . В безразмерных переменных и параметрах гамильтониан системы имеет вид:

$$H = \frac{6[\mu\lambda^2 p_{\theta_1}^2 + (1 + 3\mu)p_{\theta_2}^2 - 3\mu\lambda p_{\theta_1} p_{\theta_2} \cos(\theta_1 - \theta_2)]}{\mu\lambda^2[4(1 + 3\mu) - 9\mu \cos^2(\theta_1 - \theta_2)]} + \frac{1}{4}\varepsilon^2 \Pi + O(\varepsilon^3), \quad (7)$$

$$\Pi = -2(\mu\lambda\omega^2 \cos \theta_2 + (1 + 2\mu)\omega^2 \cos \theta_1) +$$

$$+ 3 \frac{(1 + 2\mu)^2 \cos^2 \theta_1 - 3\mu(1 + 2\mu) \cos(\theta_1 - \theta_2) \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \mu(1 + 3\mu) \cos^2 \theta_2}{4(1 + 3\mu) - 9\mu \cos^2(\theta_1 - \theta_2)}.$$

Приближенный гамильтониан (в котором отброшено слагаемое $O(\varepsilon^3)$) отвечает консервативной системе с двумя степенями свободы с потенциальной энергией $\varepsilon^2 \Pi/4$. Здесь θ_1 , и θ_2 — углы отклонения стержней от нижнего вертикального положения, p_{θ_1} и p_{θ_2} — канонически сопряженные с углами импульсы, обезразмеренные с помощью множителя $m_1 l_1^2 \Omega$. Также введены безразмерные параметры $\mu = m_2/m_1$, $\lambda = l_2/l_1$ и безразмерное время $\tau = \Omega t$. Слагаемое $O(\varepsilon^3)$ 2π -периодично по τ .

Приближенная система имеет четыре частных решения, отвечающих по-

ложениям относительного равновесия двойного маятника, для которых два стержня маятника расположены на одной вертикали. При этом $p_{\theta_1} = p_{\theta_2} = 0$ и выполняется одно из соотношений:

$$1)\theta_{1*} = \theta_{2*} = 0; \quad 2)\theta_{1*} = \theta_{2*} = \pi; \quad 3)\theta_{1*} = \pi, \theta_{2*} = 0; \quad 4)\theta_{1*} = 0, \theta_{2*} = \pi. \quad (8)$$

Линейный анализ устойчивости. Пусть q_1, q_2 — возмущения переменных θ_1, θ_2 относительно их равновесных значений. Условия устойчивости и неустойчивости положений равновесия приближенной системы найдем, исследуя квадратичную относительно величин q_j часть потенциальной энергии, представленную в виде (множитель $\varepsilon^2/4$ отброшен):

$$\Pi_2(q_1, q_2) = u_{20}q_1^2 + 2u_{11}q_1q_2 + u_{02}q_2^2, \quad u_{ij} = \text{const}. \quad (9)$$

Достаточные условия устойчивости положения равновесия (условия минимума функции потенциальной энергии) задаются неравенствами:

$$u_{20} > 0, \quad d = u_{20}u_{02} - u_{11}^2 > 0. \quad (10)$$

Анализ показал, что нижнее «висящее» положение устойчиво, если

$$\omega^2 > \omega_1^2, \quad \omega_1^2 = \frac{3}{2\lambda(4 + 3\mu)^2(1 + 2\mu)}(3\mu^3\lambda + 13\lambda\mu^2 + 16\lambda\mu + 4\lambda + 2\mu + 1 + \sqrt{(\mu + 2)^4(3\mu + 1)^2\lambda^2 + (6\mu^4 + 23\mu^3 + 18\mu^2 - 12\mu - 8)\lambda + (2\mu + 1)^2}) \quad (11)$$

и неустойчиво при изменении знака неравенства на противоположный. В исходных размерных переменных это условие означает, что частота вибрации точки подвеса не превосходит некоторого фиксированного значения $\Omega < \Omega_*$:

$$\Omega_* = \sqrt{\frac{3gl_1 \left((4l_2 + l_1)m_1^3 + 2(8l_2 + l_1)m_2m_1^2 + 13l_2m_2^2m_1 + 3l_2m_2^3 + \sqrt{\varkappa} \right)}{2a^2l_2(4m_1 + 3m_2)^2(2m_2 + m_1)}},$$

$$\varkappa = (m_1 + 3m_2)^2(2m_1 + m_2)^4l_2^2 + m_1^4l_1^2(2m_2 + m_1)^2 - (2m_1 + m_2)^2(2m_2 + m_1)(2m_1 - 3m_2)m_1^2l_1l_2, \quad (\varkappa > 0).$$

Исследование остальных положений равновесия показало, что для них условия (10) не выполняются, функция потенциальной энергии не имеет минимума, и эти положения равновесия неустойчивы.

Методом Пуанкаре построены аналитические по ε , 2π -периодические по τ движения двойного маятника, рождающиеся из вертикальных относительных равновесий приближенной системы, имеющие вид

$$\varphi_1'(\tau) = \theta_{1*} + \varepsilon \frac{6(3\mu \cos(\theta_{1*} - \theta_{2*}) \cos \theta_{2*} - 2(1 + 2\mu) \cos \theta_{1*})}{9\mu \cos^2(\theta_{1*} - \theta_{2*}) - 4 - 12\mu} \cos \tau + O(\varepsilon^2),$$

$$\begin{aligned}
\varphi'_2(\tau) &= \theta_{2*} + \varepsilon \frac{6(3(1+2\mu)\cos(\theta_{1*}-\theta_{2*})\cos\theta_{1*} - 2(1+3\mu)\cos\theta_{2*})}{\lambda(9\mu\cos^2(\theta_{1*}-\theta_{2*}) - 4 - 12\mu)} \cos\tau + O(\varepsilon^2), \\
p'_{\varphi_1}(\tau) &= \varepsilon \frac{(1+2\mu)\cos\theta_{1*}}{2} \sin\tau + O(\varepsilon^2), \\
p'_{\varphi_2}(\tau) &= \varepsilon \frac{\mu\lambda\cos\theta_{2*}}{2} \sin\tau + O(\varepsilon^2).
\end{aligned} \tag{12}$$

Устойчивому и неустойчивым равновесиям соответствуют устойчивое в линейном приближении и неустойчивые периодические движения маятника. Это следует из непрерывности по ε характеристических показателей линеаризованных уравнений возмущенного движения.

Нелинейный анализ устойчивости. Для системы, состоящей из двух одинаковых стержней ($\lambda = 1, \mu = 1$), проведен нелинейный анализ устойчивости периодического движения, рождающегося из нижнего положения относительного равновесия в предположении, что выполнено условие (11), переписываемое при сделанных предположениях в виде $\omega > \omega_1 = \sqrt{78 + 12\sqrt{37}}/14 \approx 0.87772$ или, в исходных переменных, $\Omega < \sqrt{gl_1(78 + 12\sqrt{37})}/(14a)$.

Проведена нормализация гамильтониана возмущенного движения в членах до четвертого порядка включительно относительно возмущений. При отсутствии резонанса четвертого порядка ($3\sigma_1 \neq \sigma_2$) нормализованный гамильтониан имеет вид

$$\begin{aligned}
\Gamma &= \varepsilon \left[(\sigma_1 + O(\varepsilon))r_1 + (\sigma_2 + O(\varepsilon))r_2 \right] + \\
&+ \varepsilon^2 \left[(c_{20} + O(\varepsilon))r_1^2 + (c_{11} + O(\varepsilon))r_1r_2 + (c_{02} + O(\varepsilon))r_2^2 \right] + O(\varepsilon^3), \\
c_{11} &= 81[117649\omega^6 + 1513728 + 806736\omega^4 + 829962\omega^2]/(2744\sigma_1\sigma_2c^2), \\
c_{20,02} &= a_2 \pm a_1c/(784c^2a_3), \quad c = \sqrt{16807\omega^4 - 17493\omega^2 + 6192}, \\
a_1 &= 372712032\omega^6 - 1006466958\omega^4 + 617372280\omega^2 - 14874516, \\
a_2 &= -48735627654\omega^8 + 156828117033\omega^6 - 151648837956\omega^4 + \\
&+ 49864296762\omega^2 - 1196073216, \quad a_3 = 1372\omega^4 - 1092\omega^2 + 27.
\end{aligned} \tag{13}$$

где слагаемые $O(\varepsilon)$ постоянны, а слагаемое $O(\varepsilon^3)$ означает совокупность членов не менее пятой степени относительно $r_j^{1/2}$ ($j = 1, 2$) с 2π -периодическими по τ коэффициентами.

Проверялся знак величины $D_2 = c_{11}^2 - 4c_{20}c_{02}$. Выявлено, что на интервалах $\omega_1 < \omega < \omega^*$, $\omega^* < \omega$ справедливы соотношения $D_2 > 0$ и $D_2 < 0$ соответственно, а в точке $\omega^* \approx 2.61958$ D_2 обращается в нуль. Отсюда следует, что исследуемое периодическое движение устойчиво для большинства (в смысле меры Лебега) начальных условий (кроме, может быть, точки $\omega = \omega^*$). Кроме того, на интервалах $\omega_1 \leq \omega < \omega_2$ ($\omega_2 \approx 1.33931$), $\omega^* \leq \omega$ квадратичная форма $c_{20}r_1^2 + c_{11}r_1r_2 + c_{02}r_2^2$ является соответственно положительно опреде-

ленной и отрицательно определенной при $r_1 \geq 0$, $r_2 \geq 0$, поэтому исследуемое движение формально устойчиво на данных интервалах.

В случае $3\sigma_1 = \sigma_2$ ($\omega = \sqrt{294 + 210\sqrt{2149}/98} \approx 1.022$) резонанса четвертого порядка в членах четвертой степени добавляется резонансное слагаемое $\varepsilon^2 k r_1^{3/2} r_2^{1/2} \cos(3\varphi_1 - \varphi_2)$ и $c_{20} \approx 8.685$, $c_{02} \approx 92.686$, $c_{11} \approx 30.653$, $k \approx 17.943$. Показано, что в данном резонансном случае имеет место формальная устойчивость.

Положения равновесия приближенной системы, отличные от вертикальных. Для системы двух одинаковых стержней изучен вопрос о существовании, бифуркациях и устойчивости высокочастотных периодических движений малой амплитуды, отличных от периодических движений вблизи вертикали. В приближенной системе им отвечают положения равновесия, определяемые условиями

$$\partial\Pi/\partial\theta_1 = 0, \quad \partial\Pi/\partial\theta_2 = 0,$$

сводящимися к системе уравнений

$$\begin{aligned} 9w[2 \cos \theta_1 \sin \theta_1 - \sin(2\theta_1 - \theta_2) \cos \theta_2] + 2\omega^2 \sin \theta_1 &= 9\zeta, \\ 3w[9 \cos \theta_1 \sin(2\theta_2 - \theta_1) - 4 \sin 2\theta_2] - 2\omega^2 \sin \theta_2 &= 27\zeta, \\ w &= (9 \cos^2(\theta_2 - \theta_1) - 16)^{-1}, \\ \zeta &= w^2 [9 \cos \theta_1 (\cos \theta_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) - \cos \theta_1) - 4 \cos^2 \theta_2] \sin 2(\theta_2 - \theta_1). \end{aligned}$$

В плоскости величин θ_1 , θ_2 построено геометрическое место точек, являющихся решениями этой системы. При этом величина ω рассматривалась как параметр ($\omega > 0$). Полученные решения проверены на устойчивость с помощью условий, аналогичных неравенствам (10).

Показано, что «боковые» положения равновесия приближенной системы существуют только в диапазоне частот колебаний точки подвеса, для которых вертикальные относительные равновесия неустойчивы. В зависимости от частоты вибрации точки подвеса таких равновесий может быть от одной до шести симметричных пар. Одна или две пары в зависимости от значения ω устойчивы в области существования, остальные неустойчивы.

В плоскости θ_1 , θ_2 геометрическое место устойчивых равновесных точек на рис. 9 образуют кривые номерами 1 и 3', отмеченные жирными линиями и существующими соответственно на интервалах $\omega \leq 0.87772$ и $\omega \leq 0.6128$. Неустойчивые точки образуют на рис. 9 кривые с номерами 2, 3'', 4 и 5 (тонкие линии), им отвечают интервалы угловой скорости $\omega \leq 0.8376$, $\omega \leq 0.6128$, $\omega \leq 0.1673$ и $\omega \leq 0.1598$.

Периодические движения в системе двух одинаковых стержней и их устойчивость. При помощи теории периодических движений Пуанкаре для каждого положения равновесия $\theta_1 = \theta_{1*}$, $\theta_2 = \theta_{2*}$ приближенной системы

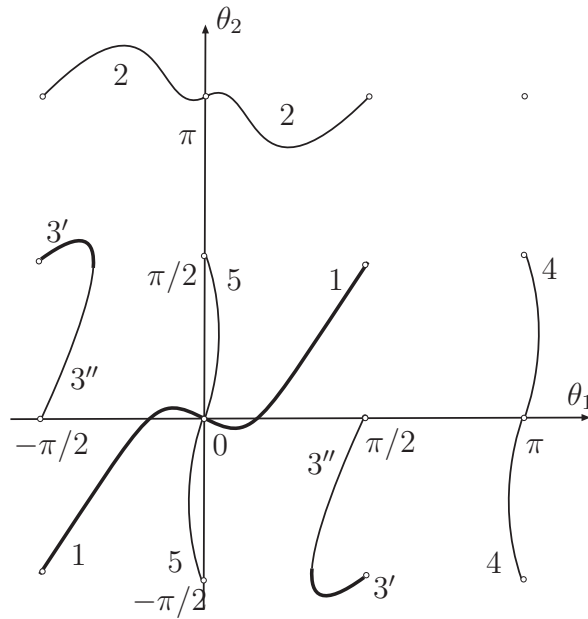


Рис. 9. Положения равновесия

построено аналитическое по ε , 2π -периодическое по τ решение исходной системы (12) (при $\lambda = 1$, $\mu = 1$). Периодические решения полной системы, рождающиеся из неустойчивых и устойчивых положений равновесия приближенной системы, соответственно неустойчивы или устойчивы в линейном приближении.

Проведен полный нелинейный анализ при помощи численного расчета вдоль кривых 1 и 3'. Показано, что в области устойчивости в линейном приближении рассматриваемые периодические движения устойчивы для большинства начальных условий и формально устойчивы.

Результаты второй части опубликованы в работе [1].

Публикации автора диссертации в журналах, входящих в перечень ВАК

1. Вишенкова Е.А., Холостова О.В. К динамике двойного маятника с горизонтально вибрирующей точкой подвеса // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2012. Вып. 2. С. 25–40.
2. Вишенкова Е.А. Об устойчивости частных решений приближенных уравнений движения тяжелого твердого тела с вибрирующей точкой подвеса // Нелинейная динамика. 2015. Т. 11. № 3. С. 459–474.
3. Вишенкова Е.А., Холостова О.В. О влиянии вертикальных вибраций на устойчивость перманентных вращений твердого тела вокруг осей, лежащих в главной плоскости инерции // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2017. Вып. 1. С. 98–120.

4. Вишенкова Е.А., Холостова О.В. Исследование перманентных вращений тяжелого динамически симметричного твердого тела с вибрирующей точкой подвеса // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2017. Вып. 4. С. 590–607.

Прочие публикации автора диссертации

5. Вишенкова Е.А. Об устойчивости перманентного вращения твердого тела с вибрирующей точкой подвеса вокруг главной оси, содержащей центр масс // Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем. Тезисы докладов Всероссийской конференции с международным участием. Москва, РУДН, 23–27 апреля 2012 года. С. 169–171.
6. Вишенкова Е.А. Исследование влияния быстрых вибраций на устойчивость перманентных вращений твердого тела вокруг оси, содержащей центр масс // XII Всероссийское совещание по проблемам управления. Тезисы докладов. Россия. Москва, ИПУ РАН, 16–19 2014 года. С. 1863–1871.
7. Вишенкова Е.А. Исследование влияния быстрых вибраций на устойчивость перманентных вращений твердого тела с центром масс на главной оси // Сборник трудов XVIII Международного Симпозиума «Динамика виброударных (сильно нелинейных) систем», Dyvis-2015. Москва–Бекасово. М: ИМАШ РАН, 2015. С. 84–92.
8. Вишенкова Е.А. Об устойчивости перманентных вращений несимметричного гироскопа с вибрирующей точкой подвеса // 14-я Международная конференция «Авиация и космонавтика – 2015». Тезисы докладов. 16–20 ноября 2015 года. Москва. С. 392–394.
9. Вишенкова Е.А. О влиянии быстрых вибраций на устойчивость перманентных вращений твердого тела вокруг осей из главной плоскости инерции // XXVII Международная инновационно-ориентированная конференция молодых учёных и студентов «МИКМУС-2015». Тезисы докладов. Москва: ИМАШ РАН. 2015. С. 207–210.
10. Вишенкова Е.А. Влияние высокочастотных вибраций точки подвеса на устойчивость перманентных вращений твердого тела вокруг осей, лежащих в главной плоскости инерции // LII Всероссийская конференция по проблемам динамики, физики частиц, физики плазмы и оптоэлектроники. Тезисы докладов. Москва, 17–19 мая 2016 года. С. 124–128.
11. Вишенкова Е.А. Исследование устойчивости перманентных вращений твердого тела с вибрирующим подвесом вокруг осей, лежащих в главной плоскости инерции // XLIII Международная молодежная научная конференция «Гагаринские чтения – 2017». Тезисы докладов. 5–19 апреля 2017 года. Москва. С. 1041–1042.