УДК 519.3

О ПРИМЕНЕНИИ СПЕКТРАЛЬНОЙ ФОРМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОПИСАНИЯ К ИДЕНТИФИКАЦИИ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ КОСМИЧЕСКИМИ АППАРАТАМИ

РЫБАКОВ Константин Александрович, доцент Московского авиационного института (государственного технического университета), к.ф.-м.н.
E-mail: rkoffice@mail.ru.

RYBAKOV Konstantin A., Moscow Aviation Institute, Ph.D., Associate Professor.
E-mail: rkoffice@mail.ru.

ХАКИМОВ Зуфар Радикович, менеджер проектов ООО Яндекс.
E-mail: zufarkhakimov@yandex.ru.

KHAKIMOV Zufar R., Yandex.
E-mail: zufarkhakimov@yandex.ru

Рассматривается метод решения задачи идентификации линейных систем управления с применением спектральной формы математического описания. В основе метода лежит представление искомого решения совокупностью коэффициентов разложения в ряд Фурье по полной ортонормированной системе функций (базисной системе), что позволяет свести задачу к решению системы линейных алгебраических уравнений, вид которой инвариантен к выбору базисной системы.

We suggest the new approach to linear control system identification with using the spectral form of mathematical description. The proposed method allows to transform linear integral equation into the linear algebraic equations, and to arrive at a solution in an explicit form.

Ключевые слова: идентификация, система управления, космический аппарат, интегральные уравнения, уравнение Вольтерра, спектральный метод, спектральная характеристика.

Key words: identification, control system, space vehicle, linear integral equations, Volterra equation, spectral method, spectral characteristic, orthonormal basis.

Введение

Задача идентификации является одной из важнейших задач проектирования и расчета систем управления космическими аппаратами и другими сложными техническими объектами. Идентификация заключается в определении характеристики системы (фактически построении математической модели) по известным входному и выходному сигналам (или по результатам их наблюдения) [2, 8].

Если принять, что модель системы управления линейна, то один из возможных подходов (при описании систем с помощью переходных функций [2, 3]) состоит в сведении решения задачи идентификации к решению линейного интегрального уравнения относительно неизвестной характеристики системы (импульсной переходной функции).

Теория интегральных уравнений и ее часть, посвященная линейным интегральным уравнениям, является важным разделом современной математики. Не только задачи идентификации систем управления, но и многие физические задачи приводят к интегральным уравнениям, поэтому развитие методов их решения представляется актуальным [1, 7]. Стоит отметить, что для многих интегральных уравнений не удается найти точное аналитическое решение, это приводит к необходимости использовать различные приближенные методы, например методы, основанные на замене ядра уравнения, сведение интегрального уравнения к дифференциальному уравнению, метод квадратур, операционный метод и пр. При этом выбор метода зачастую зависит от типа самого уравнения.

В данной работе предлагается метод решения линейных интегральных уравнений, основанный на использовании спектральной формы математического описания, составляющей единый подход к решению линейных операторных уравнений (в том числе дифференциальных, разностных и др.) [4—6].

1. Постановка задачи

При описании линейных систем управления с помощью переходных функций входной и выходной сигналы связаны соотношением

$$x(t) = \int_0^t k(t,\tau) g(\tau) d\tau, \quad t \in [0,\theta], \tag{1}$$

где $k(t,\tau)$ — импульсная переходная функция системы, т.е. реакция на входное воздействие в виде δ-функции $\delta(t-\tau)$ при нулевых начальных условиях; θ — правая граница промежутка времени, на котором исследуется система управления.

Соотношение (1) можно рассматривать как линейное интегральное уравнение Вольтерра первого рода относительно функции $g(\tau)$ (в этом случае импульсная переходная функция $k(t,\tau)$ является ядром уравнения). Если система стационарна, ее импульсную переходную функцию можно рассматривать как функцию одной переменной, так как $k(t,\tau) = k(t-\tau)$, следовательно,

$$x(t) = \int_0^t k(\eta) g(t-\eta) d\eta, \quad t \in [0,\theta]. \tag{2}$$

Тогда соотношение, связывающее входной и выходной сигналы, можно трактовать как линейное интегральное уравнение Вольтерра первого рода относительно импульсной переходной функции $k(\eta) = k(t-\tau)$ (в этом случае ядром уравнения является функция $g(t-\eta)$).

Далее рассмотрим задачу решения интегрального уравнения Вольтерра первого рода в приложении к идентификации систем управления, т.е. задачу определения импульсной переходной функции $k(\eta)$ при известных входном сигнале $g(t)$ и выходном сигнале $x(t)$ (задача нахождения входного сигнала по известной модели системы управления и выходному сигналу решается аналогично).

Перепишем уравнение (2) в операторной форме:

$$\mathcal{H} k(t) = x(t), \tag{3}$$

где $\mathcal{H}$ — линейный оператор, определяемый соотношением $\mathcal{H} k(t) = \int_0^t k(\eta) g(t-\eta) d\eta$.

Предполагается, что существует единственное решение рассматриваемого уравнения и выполнены условия

$$\int_0^\theta g^2(t) dt < \infty; \quad \int_0^\theta x^2(t) dt < \infty. \tag{4}$$

2. Использование спектральной формы математического описания для решения линейных интегральных уравнений

Напомним [4, 6], что в основе спектрального метода лежит представление сигналов упорядоченной совокупностью коэффициентов разложения в ряд Фурье по полной ортонормированной системе функций. Если $\{p(i,t)\}_{i=0}^{\infty}$ — полная ортонормированная система функций, т.е. базисная система пространства $L_2([0,\theta])$, то любая функция $x(t) \in L_2([0,\theta])$ может быть представлена в виде ряда $x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i p(i,t)$ на промежутке $[0,\theta]$, где коэффициенты разложения x_i вычисляются по следующему правилу:

$$x_i = \int_0^\theta p(i,t) x(t) dt, \quad i = 0,1,2,\ldots \tag{5}$$

Упорядоченная совокупность коэффициентов разложения x_i, представленная в виде бесконечной матрицы-столбца, называется спектральной характеристикой функции $x(t)$, а отображение, ставящее в соответствие функции ее спектральную характеристику, называется спектральным преобразованием и обозначается через S:

$$X = S[x(t)], \quad X = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Обратный переход от спектральной характеристики к исходной функции осуществляется с помощью обратного спектрального преобразования:

$$x(t) = S^{-1}[X] = \sum_{i=0}^{\infty} x_i p(i,t), \quad t \in [0,\theta]. \tag{7}$$

Линейному оператору $\mathcal{H}$, заданному на пространстве $L_2([0,\theta])$, ставится в соответствие бесконечная матрица (спектральная характеристика оператора $\mathcal{H}$), элементы h_{ij} которой определяются соотношением

$$h_{ij} = \int_0^\theta p(i,t) \mathcal{H} p(j,t) dt =$$

$$= \int_0^\theta p(i,t) \int_0^t p(j,\eta) g(t-\eta) d\eta \, dt, \quad i,j = 0,1,2,\ldots \tag{8}$$

Отображение, ставящее в соответствие линейному оператору его спектральную характеристику, также называется спектральным преобразованием:

$$H = S[\mathcal{H}], \quad H = \begin{bmatrix} h_{00} & h_{01} & h_{02} & \cdots \\ h_{10} & h_{11} & h_{12} & \cdots \\ h_{20} & h_{21} & h_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}. \qquad (9)$$

Применим спектральное преобразование к левой и правой частям уравнения (3):

$$S[\mathcal{H}k(t)] = S[x(t)].$$

Согласно свойствам спектрального преобразования [4], $S[\mathcal{H}k(t)]$ можно представить в виде произведения $S[\mathcal{H}] \cdot S[k(t)]$. Таким образом, получаем уравнение $H \cdot K = X$, в котором K и X — спектральные характеристики функций $k(t)$ и $x(t)$ соответственно (см. (5), (6)), а H — спектральная характеристика линейного оператора $\mathcal{H}$ (см. (8), (9)). Это линейное уравнение относительно спектральной характеристики K искомой функции $k(\eta)$ (система линейных уравнений относительно коэффициентов разложения k_i), его решение имеет вид

$$K = H^{-1} \cdot X, \qquad (10)$$

где H^{-1} — обратная матрица по отношению к матрице H.

3. Алгоритм решения интегрального уравнения спектральным методом

1. Выбрать базисную систему $\{p(i,t)\}_{i=0}^{\infty}$ пространства $L_2([0,\theta])$.

2. Вычислить спектральную характеристику H линейного оператора $\mathcal{H}$ (см. (8), (9)) и спектральную характеристику X выходного сигнала $x(t)$ (см. (5), (6)).

3. Найти спектральную характеристику K импульсной переходной функции, используя соотношение (10).

4. По формуле обращения (7) найти искомую функцию:

$$k(\eta) = \sum_{i=0}^{\infty} k_i p(i,\eta). \qquad (11)$$

Замечания.

1. Алгебраические операции над бесконечными матрицами (сложение, умножение и т.п.) аналогичны соответствующим операциям над матрицами с конечным числом элементов [4], но, как правило, при вычислениях бесконечные матрицы «усекаются» и, таким образом, решение интегрального уравнения приближенно ищется в виде

$$k(\eta) = \sum_{i=0}^{L-1} k_i p(i,\eta),$$

т.е. в виде линейной комбинации первых L функций базисной системы. Число L называется порядком усечения спектральных характеристик. При этом в формулах (5) и (8) индексы i и j принимают значения $0,1,\ldots,L-1$. При усечении спектральных характеристик H представляет собой квадратную матрицу размеров $L \times L$, а K и X — матрицы-столбцы размеров $L \times 1$.

2. В качестве базисных систем могут быть использованы, например, полиномы Лежандра, тригонометрические функции и функции Уолша [4, 6]. Приведем соотношения, задающие эти базисные системы на промежутке $[0,\theta]$:

а) полиномы Лежандра:

$$\hat{P}(i,t) = \\ = \sqrt{\frac{2i+1}{\theta}} \sum_{\nu=0}^{i} (-1)^{i-\nu} \frac{t^\nu}{\theta^\nu} \frac{(i+\nu)!}{(\nu!)^2 (i-\nu)!}, \; i = 0,1,2,\ldots; \qquad (12)$$

б) косинусоиды:

$$\hat{C}(i,t) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{1}{\theta}}, & i = 0; \\ \sqrt{\dfrac{2}{\theta}} \cos\left(\dfrac{i\pi t}{\theta}\right), & i = 1,2,3,\ldots; \end{cases} \qquad (13)$$

в) функции Уолша:

$$\hat{\Omega}(i,t) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{1}{\theta}}, & i = 0; \\ \sqrt{\dfrac{1}{\theta}} \prod\limits_{\{k:\, a_k = 1\}} r(k,t), & i = 1,2,3,\ldots, \end{cases} \qquad (14)$$

где $r(k,t) = \mathrm{sign}(\sin(2^k \pi t / \theta))$ — функции Радемахера; a_k — коэффициенты в двоичном представлении числа i.

Пример. Решить задачу идентификации линейной стационарной системы управления с учетом того, что при входном сигнале $g(t) = 1(t)$ (единичное ступенчатое воздействие [3]) выходной сигнал $x(t) = 1 - e^{-0{,}5t}$, а при входном сигнале $g(t) = e^{-0{,}5t}$ выходной сигнал $x(t) = 0{,}5te^{-0{,}5t}$.

Базисная система	Порядок усечения L		
	4	8	16
Полиномы Лежандра $\{\hat{P}(i,t)\}_{i=0}^{\infty}$	$8{,}07\cdot10^{-6}/7{,}93\cdot10^{-6}$	$1{,}55\cdot10^{-12}/1{,}54\cdot10^{-12}$	$3{,}40\cdot10^{-11}/1{,}66\cdot10^{-9}$
Косинусоиды $\{\hat{C}(i,t)\}_{i=0}^{\infty}$	$3{,}57\cdot10^{-3}/3{,}50\cdot10^{-3}$	$1{,}39\cdot10^{-3}/1{,}37\cdot10^{-3}$	$5{,}33\cdot10^{-4}/5{,}29\cdot10^{-4}$
Функции Уолша $\{\hat{\Omega}(i,t)\}_{i=0}^{\infty}$	$1{,}80\cdot10^{-2}/1{,}75\cdot10^{-2}$	$8{,}87\cdot10^{-3}/8{,}62\cdot10^{-3}$	$4{,}30\cdot10^{-3}/4{,}24\cdot10^{-3}$

Будем искать решение задачи на отрезке $[0,1]$, используя различные базисные системы.

1. Выберем в качестве базиса пространства $L_2([0,1])$ систему $\{\hat{P}(i,t)\}_{i=0}^{\infty}$ полиномов Лежандра (12) при $\theta = 1$.

2. Вычислим спектральные характеристики оператора $\mathcal{H}$ при $g(t-\eta) = 1(t-\eta)$ и выходного сигнала $x(t) = 1 - e^{-0{,}5t}$ относительно системы полиномов Лежандра.

Элементы h_{ij} спектральной характеристики H линейного оператора $\mathcal{H}$ определяются выражением (8):

$$h_{ij} = \int_0^1 \hat{P}(i,t)\left[\int_0^t \hat{P}(j,\eta)\,1(t-\eta)d\eta\right]dt,\ i,j = 0,1,2,\ldots,$$

а для вычисления координат x_i спектральной характеристики X функции $x(t)$ используется соотношение (5):

$$x_i = \int_0^1 \hat{P}(i,t)(1 - e^{-0.5t})dt,\ i = 0,1,2,\ldots$$

3. Найдем спектральную характеристику K импульсной переходной функции: $K = H^{-1}\cdot X$.

4. По формуле обращения (11) найдем искомую функцию: $k(\eta) = \sum_{i=0}^{\infty} k_i p(i,\eta)$.

Для других входного и выходного сигналов, а также других базисных систем, а именно косинусоид $\{\hat{C}(i,t)\}_{i=0}^{\infty}$ и функций Уолша $\{\hat{\Omega}(i,t)\}_{i=0}^{\infty}$ (см. (13) и (14)) следует применить ту же последовательность действий.

В явном виде получить выражения для коэффициентов k_i достаточно сложно, поэтому воспользуемся процедурой «усечения» спектральных характеристик (см. п. 1 замечания) и получим приближенные решения при различных порядках усечения. Погрешности нахождения импульсной переходной функции в сравнении с точным решением ($k(\eta) = 0{,}5e^{-0{,}5\eta}$, система представляет собой апериодическое звено с постоянной времени $T = 2$ [3]) приведены в таблице для выбранных базисных систем и различных порядков усечения. Погрешности вычисляются как нормы разности точного и приближенного решений в пространстве $L_2([0,1])$, для разных пар входного и выходного сигналов они указаны через знак дроби.

Выводы

Предложенный метод, основанный на спектральной форме математического описания, является достаточно универсальным, он удобен для реализации на ЭВМ, поскольку решение задачи идентификации линейной системы сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений. При приближенном решении точность метода зависит от выбора базисной системы и порядка усечения спектральных характеристик.

Работа выполнена в рамках аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы 2009-2010 гг.; проект 2.1.1/2904». Название проекта: Перспективные методы в современных задачах управления, оценивания и классификации.

Библиографический список

1. *Васильева А.Б., Тихонов Н.А.* Интегральные уравнения. — М.: Физматлит, 2002.

2. *Воронов А.А.* Основы теории автоматического управления. Ч. III. Оптимальные, многосвязные и адаптивные системы. — Л.: Энергия, 1970.

3. *Пантелеев А.В., Бортаковский А.С.* Теория управления в примерах и задачах. — М.: Высшая школа, 2003.

4. *Пантелеев А.В., Рыбаков К.А., Сотскова И.Л.* Спектральный метод анализа нелинейных стохастических систем управления. — М.: Вузовская книга, 2006.

5. *Рыбаков К.А., Хакимов З.Р.* Применение спектральной формы математического описания к решению линейных интегральных уравнений // 2-я Всероссийская конференция ученых, молодых специалистов и студентов «Информационные технологии в авиационной и космической технике — 2009»: Тез. докл. — М.: Изд-во МАИ-ПРИНТ, 2009. — С. 90.

6. *Солодовников В.В., Семенов В.В.* Спектральная теория нестационарных систем управления. — М.: Наука, 1974.

7. *Цлаф Л.Я.* Вариационное исчисление и интегральные уравнения. — М.: Наука, 1966.

8. *Эйкхофф П.* Основы идентификации систем управления. — М.: Мир, 1975.