

ТРЕНИЕ И ИЗНОС В МАШИНАХ

УДК 539.3

ВАРИАЦИОННАЯ ФОРМУЛИРОВКА И ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОБ ИЗНАШИВАНИИ СТРУКТУРНО-НЕОДНОРОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПРИ КОНТАКТЕ С ЖЕСТКИМ ШТАМПОМ

Бобылёв А.А.* , Белашова И.С.**

*Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет,
МАДИ, Ленинградский проспект, 64, Москва, 125319, Россия*

**e-mail: abobylov@gmail.com*

***e-mail: irina455@inbox.ru*

Рассмотрена плоская контактная задача об изнашивании упругой полуплоскости со структурно-неоднородной поверхностью при контакте с жестким неизнашиваемым штампом. При постановке задачи предполагается, что упругие характеристики материала являются структурно нечувствительными и одинаковыми во всех точках полуплоскости, а параметры, характеризующие износостойкие свойства материала, зависят от линейного износа. Получена вариационная формулировка задачи в напряжениях в виде системы квазивариационного неравенства эволюционного типа и дифференциального уравнения первого порядка. Для дискретизации задачи по времени использована явная разностная схема Эйлера, а дискретизация задачи по пространственным координатам производилась на основе гранично-элементного подхода. Проведенные расчеты показали, что структурная неоднородность по глубине изнашиваемой поверхности существенно влияет на характер процесса приработки сопряжения.

Ключевые слова: структурно-неоднородная поверхность, износостойкая задача, вариационное неравенство, интегрированные фундаментальные решения, метод граничных элементов.

Введение

Основным методом повышения износостойкости деталей машин на протяжении длительного времени в машиностроении является повышение твердости трущихся поверхностей деталей. Технологии поверхностного упрочнения позволяют получать модифицированные слои различного состава с заданной структурой и новыми свойствами [1]. В частности, после лазерного легирования поверхность материалов представляет собой структуру,

дисперсионно-упрочненную наночастицами в результате конвективного механизма массопереноса. Поверхностная твердость после такой обработки может достигать 28000 МПа. Поэтому исследования кинетики изнашивания модифицированных поверхностей материалов с учётом особенностей их формирования и структурной неоднородности по глубине являются актуальными.

В настоящее время проведены многочисленные экспериментальные исследования эффективности

технологий поверхностного упрочнения, установлены эмпирические зависимости, позволяющие оптимизировать технологические параметры процессов поверхностного упрочнения [2].

Следует отметить, что экспериментальные исследования процессов износа весьма трудоемки и длительны. Поэтому актуальными являются разработка математических моделей и компьютерное моделирование процессов износа структурно-неоднородных поверхностей. Основой для разработки математических моделей может служить механика контактного взаимодействия, являющаяся мощным средством решения различных проблем трибологии.

Систематическое исследование различных постановок износосеконтактных задач было положено работами Л. А. Галина [3] и продолжено в работах И. Г. Горячевой [4, 5], И. А. Солдатенкова [6] и других исследователей. Обзор основных результатов приведен в [7].

В общем случае износосеконтактные задачи даже для линейно-упругих тел являются нелинейными вследствие как нелинейности локального закона изнашивания, так и изменения размеров области контакта в процессе изнашивания. Один из эффективных подходов к решению контактных задач с заранее неизвестной площадкой контакта — использование вариационных методов. Вариационные формулировки используются как для исследования проблем существования и единственности решения контактных задач, так и для фактического построения численных решений [8–11].

В работе [12] получена вариационная формулировка в перемещениях задачи об изнашивании поверхности упругого тела конечных размеров при контакте с жестким штампом.

Целью настоящей работы является получение вариационной формулировки в напряжениях износосеконтактной задачи и разработка на её основе вычислительного алгоритма, а также исследование процессов изнашивания структурно-неоднородных поверхностей.

Постановка задачи

Рассмотрим задачу об изнашивании упругого тела со структурно-неоднородной плоской поверхностью цилиндрическим штампом, скользящим возвратно-поступательно с постоянной скоростью вдоль своей образующей (рис. 1). Касательные напряжения на площадке контакта упругого тела со штампом действуют в направлении скольжения штампа и вызывают изнашивание тела. Штамп считается абсолютно жестким и неизнашиваемым. Будем предполагать, что упругие характеристики материала являются структурно нечувствительны-

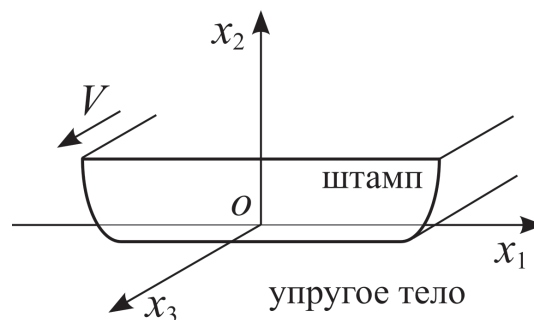


Рис. 1. Расчетная схема

ми и одинаковыми во всех точках тела, а параметры, характеризующие износостойкие свойства материала, не изменяются в направлении скольжения штампа. В этом случае износосеконтактная задача может быть исследована в плоской (двумерной) постановке.

Пусть в неподвижной прямоугольной системе координат Ox_1x_2 упругое тело занимает полубесконечную область $\Omega = \{x = (x_1, x_2) \in R^2 : x_2 \leq 0\}$ с границей Γ . Процесс изнашивания упругого тела рассматривается на конечном временном интервале $[0, T]$. Далее через S^2 будем обозначать пространство симметричных тензоров второго ранга над евклидовым пространством R^2 . Под $\vec{u}(x, t)$, $\hat{\varepsilon}(x, t)$ и $\hat{\sigma}(x, t)$ будем понимать соответственно вектор перемещений и тензоры деформации и напряжений в точке $x \in \Omega$ в момент времени $t \in [0, T]$. Деформации считаются малыми. Напряжения в упругом теле в недеформированном состоянии отсутствуют.

Напряженно-деформированное состояние упругого тела Ω описывается системой уравнений:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}(x, t)}{\partial x_j} = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T); \quad (1)$$

$$\varepsilon_{ij}(x, t) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i(x, t)}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j(x, t)}{\partial x_i} \right), \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T); \quad (2)$$

$$\sigma_{ij}(x, t) = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}(x, t), \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T), \quad (3)$$

где $\hat{C} = \{C_{ijkl}\}$ — тензор модулей упругости.

Часть границы Γ упругого тела, по которой возможен контакт со штампом, обозначим Γ_p . Форма штампа описывается функцией $\Phi(x)$, значение которой в точке $x \in \Gamma_p$ равно расстоянию от этой точки до поверхности штампа, измеренному вдоль направления внешней нормали $\vec{\nu}(x)$ к поверхнос-

ти тела. Расстояние $\Phi(x)$ отсчитывается по отношению к недеформированному состоянию упругого тела в начальный момент времени $t=0$. Для определенности будем полагать $\Phi(0)=0$. Главный вектор $\vec{R}(t)=(R_1, R_2)$ и главный момент $M(t)$ внешних сил, приложенных к штампу, считаются заданными. В качестве центра приведения выбирается начало декартовой неподвижной системы координат Ox_1x_2 . Положение штампа определяется вектором перемещений $\vec{\delta}(t)=(\delta_1, \delta_2)$ и углом поворота $\varphi(t)$ штампа как жесткого целого. Далее будем полагать, что в направлении, перпендикулярном направлению скольжения, касательные напряжения на поверхности упругого тела отсутствуют и $R_1(t)=0$, $\delta_1(t)=0$.

Изнашивание тела характеризуется линейным износом $w(x, t)$. Предполагается, что износ мал и соизмерим с упругими перемещениями поверхности, а граничные условия можно отнести к недеформированной поверхности упругого тела. Контактное взаимодействие тела Ω с жестким штампом на части поверхности Γ_p описывается линеаризованными условиями идеального одностороннего контакта с учетом износа:

$$u_2(x, t) \leq w(x, t) + \Phi(x) + \delta_2(t) + \varphi(t)x_1, \quad (x, t) \in \Gamma_p \times (0, T); \quad (4)$$

$$\sigma_{22}(x, t) \leq 0, \quad (x, t) \in \Gamma_p \times (0, T); \quad (5)$$

$$\sigma_{12}(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Gamma_p \times (0, T); \quad (6)$$

$$\sigma_{22}(x, t) \{ u_2(x, t) - w(x, t) - \Phi(x) - \delta_2(t) - \varphi(t)x_1 \} = 0, \quad (x, t) \in \Gamma_p \times (0, T). \quad (7)$$

Оставшаяся часть поверхности $\Gamma \setminus \Gamma_p$ свободна от внешних нагрузок:

$$\sigma_{22}(x, t) = \sigma_{12}(x, t) = 0, \quad (x, t) \in (\Gamma \setminus \Gamma_p) \times (0, T). \quad (8)$$

Уравнения равновесия жесткого штампа имеют вид

$$\int_{\Gamma_p} \sigma_{22}(x, t) d\Gamma_p = R_2(t), \quad \int_{\Gamma_p} \sigma_{22}(x, t) x_1 d\Gamma_p = M(t), \quad t \in [0, T]. \quad (9)$$

Локальный закон изнашивания, справедливый в каждой точке площадки контакта, имеет вид степенной зависимости от контактного давления:

$$\frac{\partial w(x, t)}{\partial t} = K_w(x, w) \left[\sigma_{22}(x, t) \right]^{\alpha(x, w)}, \quad (x, t) \in \Gamma_p \times (0, T), \quad (10)$$

где $K_w(x, w)$ — коэффициент износа, зависящий от скорости, температуры и условий взаимодействия; $\alpha(x, w)$ — параметр.

Для тел со структурно-неоднородной поверхностью величины $K_w(x, w)$ и $\alpha(x, w)$ в общем случае являются функциями координат и линейного износа $w(x, t)$. Начальный износ отсутствует:

$$w(x, 0) = 0. \quad (11)$$

Сформулируем постановку рассматриваемой износоконтактной задачи.

Задача А. Найти поле перемещений

$$\vec{u}(u_i): \Omega \times [0, T] \rightarrow R^2,$$

тензор деформаций

$$\hat{\varepsilon}(\varepsilon_{ij}): \Omega \times [0, T] \rightarrow S^2,$$

напряжений

$$\hat{\sigma}(\sigma_{ij}): \Omega \times [0, T] \rightarrow S^2,$$

линейный износ

$$w: \Gamma_p \times [0, T] \rightarrow R,$$

перемещение

$$\delta_2: [0, T] \rightarrow R,$$

угол поворота

$$\varphi: [0, T] \rightarrow R$$

штампа как жесткого целого, удовлетворяющие соотношениям (1)—(11).

Отметим, что фактическая зона контакта упругого тела со штампом неизвестна, может изменяться во времени и подлежит определению в процессе решения задачи.

Вопросы существования и единственности решения контактных задач теории упругости с односторонними связями подробно рассмотрены в [8, 10, 11]. В частности, из этих результатов следует, что, если решение задачи А существует, оно не является единственным: перемещения упругого

тела и штампа определяются с точностью до смещений рассматриваемой системы как жесткого целого. Далее будем предполагать, что решение задачи А существует.

Вариационная формулировка задачи

Для решения задачи используется вариационный подход [8—11, 13]. Введем гильбертово пространство тензорных функций

$$U(\Omega) = \left\{ \hat{\tau} = \{\tau_{ij}\} \in [L_2(\Omega)]^{2 \times 2} : \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \in L_2(\Omega), i, j = 1, 2 \right\},$$

оснащенное скалярным произведением

$$(\hat{\sigma}, \hat{\tau})_U = \int_{\Omega} \left[\sigma_{ij} \tau_{ij} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_k} \right] d\Omega.$$

Далее будем говорить, что поле напряжений $\hat{\tau} = (\tau_{ij}) \in U(\Omega)$ удовлетворяет условиям совместности, если существует поле перемещений $\vec{v} \in [W_2^1(\Omega)]^2$ такое, что

$$\tau_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}(\vec{v}),$$

где $\hat{\varepsilon}(\vec{v})$ — тензорный оператор деформаций (2).

Выделим в пространстве U подпространство напряжений, удовлетворяющих в области Ω однородным уравнениям равновесия и условиям совместности:

$$U_0(\Omega) = \{ \hat{\tau} \in U(\Omega) : \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = 0, x \in \Omega;$$

$$\tau_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}(\vec{v}), C_{ijkl} \in L_{\infty}(\Omega) : \vec{v} \in [W_2^1(\Omega)]^2 \}.$$

Существуют следовые отображения, определяющие для элементов $\hat{\tau} \in U_0$ векторные функции перемещений и напряжений на границе Γ_p [13]. Отметим, что следовое отображение определяет перемещения на границе Γ_p с точностью до смещений упругого тела как жесткого целого.

Образуем множество статически возможных напряжений, удовлетворяющих в области Ω условиям совместности:

$$V(t) = \{ \hat{\tau} \in U_0(\Omega) : \tau_{22}(x) \leq 0, x \in \Gamma_p;$$

$$\tau_{22}(x) = 0, x \in \Gamma \setminus \Gamma_p; \tau_{12}(x) = 0, x \in \Gamma;$$

$$\int_{\Gamma_p} \tau_{22} d\Gamma_p = R_2(t); \int_{\Gamma_p} \tau_{22} x_1 d\Gamma_p = M(t), t \in [0, T].$$

Далее предполагается, что множество $V(t)$, $t \in [0, T]$, не пусто. Нетрудно проверить, что в этом случае оно является выпуклым и замкнутым в пространстве U_0 .

Тензорные функции напряжений точек упругого тела Ω в момент времени $t \in [0, T]$ будем рассматривать как элементы пространства U_0 , а функции износа — как элементы пространства $H^{1/2}(\Gamma_p)$.

Введем граничные билинейные

$$a(\cdot, \cdot) : U_0(\Omega) \otimes U_0(\Omega) \rightarrow R,$$

$$d(\cdot, \cdot) : U_0(\Omega) \otimes H^{1/2}(\Gamma_p) \rightarrow R$$

и граничную линейную $b(\cdot) : U_0(\Omega) \rightarrow R$ формы:

$$a(\hat{\sigma}, \hat{\tau}) = \langle \tau_{22}, v_2(\hat{\sigma}) \rangle_{\Gamma_p};$$

$$d(w, \hat{\tau}) = \langle \tau_{22}, w \rangle_{\Gamma_p};$$

$$b(\hat{\tau}) = \langle \tau_{22}, \Phi \rangle_{\Gamma_p},$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma_p}$ — каноническая билинейная форма на $[H^{-1/2}(\Gamma_p)] \otimes [H^{1/2}(\Gamma_p)]$; $v_2(\hat{\sigma})$ — компонента векторного поля перемещений \vec{v} , соответствующего полю напряжений $\hat{\sigma}$.

Для интегрируемых функций ϕ и ψ

$$\langle \phi, \psi \rangle_{\Gamma_p} = \int_{\Gamma_p} \phi \psi d\Gamma_p.$$

Используя результаты работ [8—13], можно получить граничную вариационную формулировку в напряжениях рассматриваемой износоконтактной задачи.

Задача Б. Найти поле напряжений

$$\hat{\sigma}(\sigma_{ij}) : [0, T] \rightarrow V$$

и линейный износ

$$w : [0, T] \rightarrow H^{1/2}(\Gamma_p)$$

такие, что для всех $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} a(\hat{\sigma}(t), \hat{\tau} - \hat{\sigma}(t)) - d(w(t), \hat{\tau} - \hat{\sigma}(t)) - \\ - b(\hat{\tau} - \hat{\sigma}(t)) \geq 0 \quad \forall \hat{\tau} \in V(t); \end{aligned} \quad (12)$$

$$\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} = K_w(x,w) \left[\left[\sigma_{22}(x,t) \right] \right]^{\alpha(x,w)}; \quad (13)$$

$$w(x,0) = 0. \quad (14)$$

Имеют место следующие утверждения:

Утверждение 1. Пусть функции, характеризующие упругие свойства тела, внешние воздействия и условия контактного взаимодействия, являются ограниченными по нормам соответствующих пространств и обладают следующими свойствами гладкости:

$$\begin{aligned} C_{ijkl} \in L_\infty(\Omega), R_2 \in L_\infty(0,T), M \in L_\infty(0,T), \\ \Phi \in H^{1/2}(\Gamma_p), K_w \in L_\infty(\Gamma_p), \alpha \in L_\infty(\Gamma_p). \end{aligned} \quad (15)$$

Кроме того, компоненты тензора модулей упругости удовлетворяют условию симметричности

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{klij} \leq C_1, C_1 = \text{const} > 0 \quad (16)$$

и условию эллиптичности

$$C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \geq C_2 \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl}, C_2 = \text{const} > 0 \quad \forall \{\varepsilon_{ij}\} \in L_2(\Omega). \quad (17)$$

Тогда решение задачи А является решением задачи Б.

Утверждение 2. Пусть $\{\hat{\sigma}, w\}$ — решение задачи Б и выполняются условия (15)—(17). Тогда существуют поля перемещений $\bar{u}(\hat{\sigma})$ и деформаций $\hat{\varepsilon}(\hat{\sigma})$ упругого тела, перемещение δ_2 и угол поворота φ штампа как жесткого целого, удовлетворяющие (по крайней мере в обобщенном смысле) всем условиям задачи А.

Отметим, что перемещения упругого тела и штампа, соответствующие решению $\{\hat{\sigma}, w\}$ задачи Б, определяются с точностью до смещений рассматриваемой системы как жесткого целого.

Вычислительный алгоритм

Произведём полудискретизацию вариационной задачи Б по временной переменной. Разобьём временную ось на равные отрезки $[t^{k-1}, t^k]$, $k = \overline{1, K}$. Длину этих отрезков обозначим через Δt . Обозначим через $\hat{\sigma}^k(x)$, $w^k(x)$, $R_2^k(x)$, $M^k(x)$ приближённые значения $\hat{\sigma}(x,t)$, $w(x,t)$, $R_2(t)$, $M(t)$ соответственно в момент времени t^k . Аналогично обозначим $V^k = V(t)|_{t=t^k}$. Заменим оператор дифференци-

рования по времени разностным соотношением, используя явную двухслойную схему (схему Эйлера). В результате получим:

$$\begin{aligned} w^k(x) = \\ = w^{k-1}(x) + \Delta t \cdot K_w(x, w^{k-1}) \left[\left[\sigma_{22}^{k-1}(x) \right] \right]^{\alpha(x, w^{k-1})}; \end{aligned} \quad (18)$$

$$a(\hat{\sigma}^k, \hat{\tau} - \hat{\sigma}^k) - d(w^k, \hat{\tau} - \hat{\sigma}^k) - b(\hat{\tau} - \hat{\sigma}^k) \geq 0 \quad \forall \hat{\tau} \in V^k; \quad (19)$$

$$w^0(x) = 0. \quad (20)$$

Явная схема Эйлера наиболее проста для вычислительной реализации, но она относится к классу условно устойчивых. Получить аналитическое выражение для ограничения на шаг по времени и использовать его при численном решении задач достаточно сложно. Поэтому в настоящей работе рациональный шаг по времени, обеспечивающий устойчивость разностной схемы при минимальных вычислительных затратах, определялся методом вычислительного эксперимента.

На каждом шаге вычислительного процесса (18) — (20) необходимо решить вариационное неравенство (19), соответствующее контактной задаче о вдавливании в упругую полуплоскость жесткого штампа, форма которого описывается функцией $\Phi(x) + w^k(x)$, т.е. учитывает текущий износ контактной пары.

Из условий (16)—(17) следует, что билинейная форма $a(\cdot, \cdot)$ является непрерывной симметричной и положительно определенной на $U(\Omega) \otimes U(\Omega)$. Можно показать, что имеет место следующее утверждение.

Утверждение 3. Вариационное неравенство (19) эквивалентно следующей экстремальной задаче: найти элемент $\hat{\sigma}^k \in V^k$ такой, что

$$J(\hat{\sigma}^k) = \inf_{\hat{\tau} \in V^k} \left\{ J(\hat{\tau}) = \frac{1}{2} a(\hat{\tau}, \hat{\tau}) - d(w^k, \hat{\tau}) - b(\hat{\tau}) \right\}. \quad (21)$$

Произведём дискретизацию экстремальной задачи (21) по пространственным координатам. Основная трудность, возникающая при использовании граничных вариационных формулировок в напряжениях, состоит в аппроксимации пространства U_0 , элементы которого удовлетворяют, по крайней мере в обобщенном смысле, уравнениям равновесия и условиям совместности. Для решения этой проблемы могут быть эффективно использованы про-

странства интегрированных фундаментальных решений (ИФР) [14].

Решение задачи (21) можно представить в виде

$$\sigma_{ij}^k(x) = \int_{\Gamma_p} G_{ij}^\sigma(x, \xi) q(\xi) d\Gamma_p(\xi), \quad (22)$$

где $\hat{G}^\sigma(x, \xi) = \{G_{ij}^\sigma\}$ — тензор напряжений решения задачи Фламана о действии нормальной сосредоточенной силы на поверхности упругой полуплоскости; $q(\xi) = -\sigma_{22}(\xi)$ — контактное давление на Γ_p .

Для построения конечномерного пространства ИФР на основе интегрального представления (22) в настоящей работе используется гранично-элементный подход. Выберем тип граничных элементов и произведем триангуляцию $T_h(\Gamma_p)$. Будем полагать, что выполненная триангуляция удовлетворяет стандартным требованиям [15]. Узлы гранично-элементной сетки обозначим $P_n, n = \overline{1, N}$.

Построим конечномерное пространство граничных элементов $X^h(\Gamma_p)$, $\dim X^h(\Gamma_p) = N$. Используя интегральное представление (22), определим на $X^h(\Gamma_p)$ линейный интегральный оператор $\hat{\tau} = H(q)$. Область значений оператора H образует конечномерное пространство ИФР $Z_\sigma^h(\Omega)$. Несложно показать, что $\dim Z_\sigma^h(\Omega) = N$.

Далее предполагается, что $X^h(\Gamma_p) \subset L_2(\Gamma_p)$. Из свойств упругих потенциалов [15] следует, что в этом случае элементы пространства $Z_\sigma^h(\Omega)$ удовлетворяют в области Ω однородным уравнениям равновесия и условиям совместности. Обозначим через $Z_u^h(\Omega)$ пространство векторных функций перемещений, соответствующих тензорным функциям напряжений из $Z_\sigma^h(\Omega)$.

Пространство напряжений U_0 , удовлетворяющих в области Ω однородным уравнениям равновесия и условиям совместности, аппроксимируем конечномерным пространством ИФР $Z_\sigma^h(\Omega)$, а пространство функций износа $H^{1/2}(\Gamma_p)$ — пространством граничных элементов $X^h(\Gamma_p)$.

Введем операторы Π_h -интерполяции [16]

$$\Pi_\sigma : Z_\sigma^h(\Omega) \rightarrow X^h(\Gamma_p); \quad \Pi_u : Z_u^h(\Omega) \rightarrow X^h(\Gamma_p),$$

аппроксимирующие соответственно компоненты τ_{22} и v_2 следов функций из пространств $Z_\sigma^h(\Omega)$ и $Z_u^h(\Omega)$ на поверхности Γ_p по их значениям в узлах триангуляции $T_h(\Gamma_p)$.

Граничные билинейные формы $a(\cdot, \cdot)$ и $d(\cdot, \cdot)$ аппроксимируем соответственно граничными билинейными формами $a^h(\cdot, \cdot) : Z_\sigma^h(\Omega) \otimes Z_\sigma^h(\Omega) \rightarrow R$ и $d^h(\cdot, \cdot) : X^h(\Gamma_p) \otimes Z_\sigma^h(\Omega) \rightarrow R$:

$$a^h(\hat{\sigma}, \hat{\tau}) = \int_{\Gamma_p} \Pi_\sigma(\hat{\tau}) \Pi_u(\vec{v}(\hat{\sigma})) d\Gamma_p;$$

$$d^h(w, \hat{\tau}) = \int_{\Gamma_p} \Pi_\sigma(\hat{\tau}) w d\Gamma_p,$$

а линейную форму $b(\cdot)$ — линейной формой $b^h(\cdot) : Z_\sigma^h(\Omega) \rightarrow R$:

$$b^h(\hat{\tau}) = \int_{\Gamma_p} \Pi_\sigma(\hat{\tau}) \Phi d\Gamma_p.$$

Нетрудно видеть, что использование указанных аппроксимаций эквивалентно применению для вычисления значений граничных форм $a(\cdot, \cdot)$, $d(\cdot, \cdot)$ и $b(\cdot)$ процедур численного интегрирования. Оценки погрешности введенных аппроксимаций могут быть получены аналогично тому, как это сделано в работе [16] для конечно-элементных аппроксимаций.

Для аппроксимации множества V^k применим коллокационный метод, выбирая в качестве точек коллокации узлы гранично-элементной сетки. В результате получим множество

$$V_h^k = \{\hat{\tau} \in Z_\sigma^h(\Omega) : \tau_{22}(P_n) \leq 0, n = \overline{1, N};$$

$$\int_{\Gamma_p} \tau_{22} d\Gamma_p = R^k; \quad \int_{\Gamma_p} \tau_{22} x_1 d\Gamma_p = M^k\}, \quad k = \overline{1, K}.$$

Несложно показать, что множество V_h^k является выпуклым и замкнутым в пространстве $Z_\sigma^h(\Omega)$.

Таким образом, применяя метод Ритца к задаче (21), получим приближенную экстремальную задачу: найти элемент $\hat{\sigma}_h^k \in V_h^k$ такой, что

$$J_0^h(\hat{\sigma}_h^k) = \inf_{\hat{\tau} \in V_h^k} \left\{ J^h(\hat{\tau}) = \frac{1}{2} a^h(\hat{\tau}, \hat{\tau}) - d^h(w^k, \hat{\tau}) - b^h(\hat{\tau}) \right\}. \quad (23)$$

При сделанных выше предположениях относительно условий аппроксимации условия разрешимости конечномерной задачи (23) совпадают с соответствующими условиями для задачи (21). Оценка погрешности приближенного решения $\hat{\sigma}_h^k$ может быть получена аналогично тому, как это сделано в монографии [16] для конечно-элементных аппроксимаций решения задачи о препятствии.

Введем векторы узловых контактных давлений $Q = (q(P_1), \dots, q(P_N)) \in R^N$ и узлового износа $W = (w(P_1), \dots, w(P_N)) \in R^N$, а также определим оператор $\Pi_X: R^N \rightarrow X^h(\Gamma_p)$ интерполяции функций из пространства граничных элементов $X^h(\Gamma_p)$ по их значениям в узлах триангуляции $T_h(\Gamma_p)$.

Из формулы (18) следует, что компоненты вектора узлового износа $W^k \in R^N$ на k -м временном слое вычисляются по формулам

$$w_n^k = w_n^{k-1} + \Delta t \cdot K_w(P_n, w_n^{k-1}) \left[q_n^{k-1} \right]^{\alpha(P_n, w_n^{k-1})}. \quad (24)$$

Учитывая изоморфизм пространств R^N , $X^h(\Gamma_p)$

и $Z_\sigma^h(\Omega)$, несложно показать, что задача (23) эквивалентна задаче квадратичного программирования: найти вектор узловых контактных давлений $Q^k \in V_q^k$, такой, что

$$J_1^h(Q^k) = \min_{Q \in V_q^k} \left\{ J_1^h(Q) = \frac{1}{2} Q^T A Q - W^T D Q - B^T Q \right\}, \quad (25)$$

где A — квадратная положительно определенная матрица размера $N \times N$, матрица податливости упругого тела Ω ; D — квадратная симметричная матрица размера $N \times N$; $B \in R^N$ — вектор обобщенных узловых параметров, характеризующих форму штампа; $V_q^k \subset R^N$ — множество статически допустимых узловых контактных давлений.

Элементы матриц A , D и вектора B вычисляются соответственно по формулам

$$A_{ij} = \sum_{n=1}^N \left(\int_{\Gamma_p} \varphi_i(\xi) \varphi_n(\xi) d\Gamma_p(\xi) \cdot \int_{\Gamma_p} G_2^u(P_n, \xi) \varphi_j(\xi) d\Gamma_p(\xi) \right);$$

$$D_{ij} = \int_{\Gamma_p} \varphi_i(\xi) \varphi_j(\xi) d\Gamma_p(\xi);$$

$$B_i = \int_{\Gamma_p} \Phi(\xi) \varphi_i(\xi) d\Gamma_p(\xi),$$

где $G_2^u(P_n, \xi)$ — компонента вектора перемещений вдоль оси Ox_2 в узле гранично-элементной сетки P_n решения задачи Фламана о действии нормальной сосредоточенной силы в точке ξ поверхности упругой полуплоскости.

Несмотря на то что матрица A является несимметричной квадратной матрицей, матрица Гессе H (матрица вторых частных производных) функции $J_1^h(Q)$ является симметричной. Ее элементы вычисляются по формуле

$$H_{ij} = \frac{1}{2} (A_{ij} + A_{ji}).$$

Множество V_q^k имеет вид

$$V_q^k = \{Q = (q_1, \dots, q_N) \in R^N : q_n \leq 0, n = \overline{1, N}; \sum_{n=1}^N C_n^R q_n = R_2^k; \sum_{n=1}^N C_n^M q_n = M^k\},$$

где

$$C_n^R = \int_{\Gamma_p} \varphi_n(\xi) d\Gamma_p(\xi), \quad n = \overline{1, N};$$

$$C_n^M = \int_{\Gamma_p} \varphi_n(\xi) \xi d\Gamma_p(\xi), \quad n = \overline{1, N}.$$

Основная сложность, возникающая при разработке алгоритмов численного решения задачи квадратичного программирования (25), состоит в наличии ограничений в виде равенств, содержащих все переменные задачи. Для упрощения вида ограничений предложено линейное преобразование переменных $Y = CQ$, такое, что

$$y_n = \begin{cases} q_n, & n \neq r, \quad n \neq m; \\ \sum_{n=1}^N C_n^R q_n, & n = r; \\ \sum_{n=1}^N C_n^M q_n, & n = m, \end{cases}$$

где m, r — номера двух компонент вектора узловых контактных давлений.

Выбор номеров r и m в общем случае произволен при условии, что в этих узлах контактное давление отлично от нуля, т. е. выполняются неравенства $q_r < 0$ и $q_m < 0$. При решении конкретной задачи такие узлы гранично-элементной сетки может быть выбраны из априорных соображений. Корректность сделанного выбора проверяется путем апостериорного анализа полученного решения.

Нетрудно видеть, что матрица C является невырожденной, и выражения для элементов матриц C^{-1} и C^{-T} несложно получить в явном виде.

В результате преобразования переменных получим следующую задачу квадратичного программирования: найти элемент $Y^k \in V_y^k$, такой, что

$$J_2^h(Y^k) = \min_{Y \in V_y^k} \left\{ J_2^h(Y) = \frac{1}{2} Y^T \tilde{A} Y - W^T \tilde{D} Y - \tilde{B}^T Y \right\}, \quad (26)$$

где $\tilde{A} = C^{-T} A C^{-1}$; $\tilde{D} = D C^{-1}$; $\tilde{B} = C^{-T} B$;

$$V_y^k = \{Y = (y_1, \dots, y_N) \in R^N : y_n \leq 0, n = \overline{1, N},$$

$$n \neq r, n \neq m; y_r = R_2^k; y_m = M^k\}.$$

В настоящей работе для численного решения задачи (26) используется вариант метода сопряженных градиентов, предложенный в [17] для решения контактной задачи о вдавлении в упругое тело жесткого штампа с заданной глубиной внедрения.

Численные результаты

Разработанный вычислительный алгоритм реализован в виде пакета прикладных программ для решения износоконтактных задач. В качестве примера ниже приведены результаты численного решения плоской задачи об изнашивании упругой полуплоскости со структурно-неоднородной поверхностью плоским штампом со скругленными краями. Форма штампа описывалась функцией

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0, & |x_1| \leq a; \\ \frac{(x_1 - a)^2}{2R}, & a < |x_1|, \end{cases}$$

где a — полуширина плоского основания штампа; R — радиус кривизны скругленного края.

Контакт упругой полуплоскости с жестким штампом возможен по части поверхности

$$\Gamma_p = \{x = (x_1, x_2) \in R^2 : |x_1| < L/2, x_2 = 0\},$$

где $L \geq 2(a + R)$.

Предполагалось, что упругие характеристики материала (модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν) являются структурно нечувствительными и одинаковыми во всех точках полуплоскости, а параметр, характеризующий износостойкие свойства материала, зависит от линейного износа:

$$K_w(x, w) = \frac{\tilde{K}}{[E\varphi(w)]^{\alpha(x, w)}}, \quad \alpha(x, w) = \text{const},$$

где $\tilde{K} = \text{const}$.

Рассмотрены шесть вариантов изменения функции $\varphi(w)$ в пределах прилегающего к поверхности Γ_p слоя толщиной h :

1) $\varphi(w) = 1$ (структурно-однородная поверхность);

2) $\varphi(w) = 2 - w/h$;

3) $\varphi(w) = 1 + (1 - w/h)^4$;

4) $\varphi(w) = 1 + (1 - w/h)^{1/4}$;

5) $\varphi(w) = 2 + 4(0,5 - w/h)^2$;

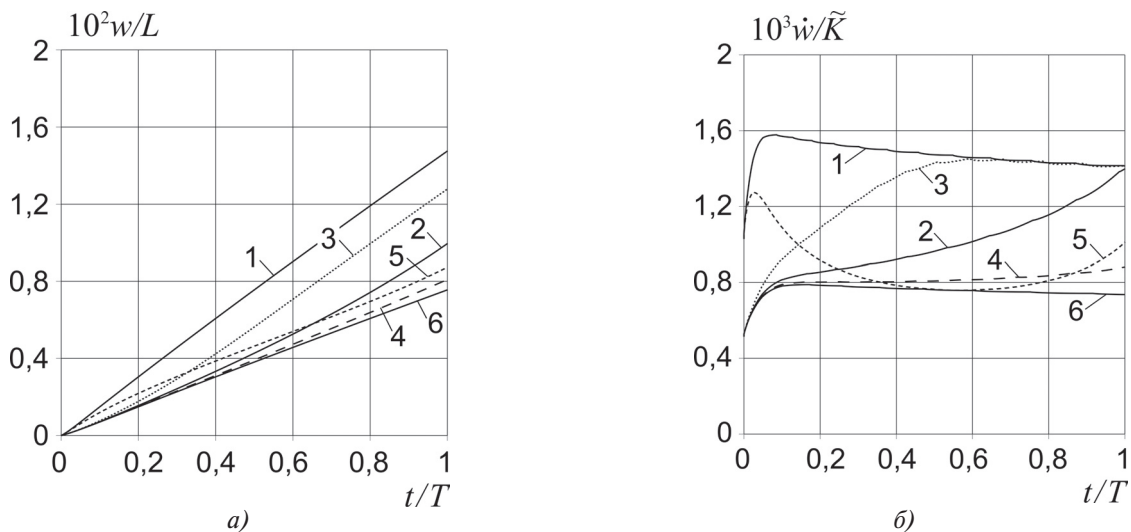
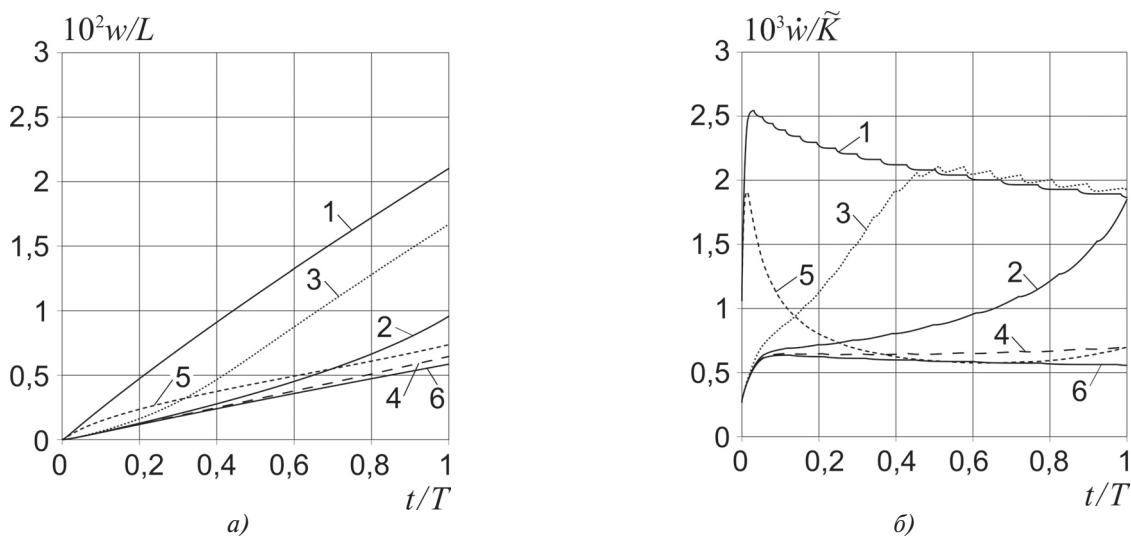
6) $\varphi(w) = 2$.

Вне приповерхностного слоя толщиной h полагалось $\varphi(w) = 1$.

Значения физических и геометрических параметров при проведении расчетов принимались следующими: модуль Юнга $E = 200$ ГПа; коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$; линейные размеры $L = 1$ м, $a = 0,3L$, $R = 0,1L$, $h = 0,01L$; усилие $R_2(t) = 200$ Н; момент $M(t) = 0$; время процесса изнашивания $T = 10^6$ с.

Оптимальные параметры дискретизации задачи по пространственным координатам и времени определялись методом вычислительного эксперимента. Приведенные ниже численные результаты получены с использованием для дискретизации области Γ_p равномерной сетки из 300 граничных элементов с постоянной аппроксимацией контактного давления и разбиением временного интервала $[0, T]$ на 100000 шагов.

На рис. 2 и 3 изображены зависимости линейного износа w и скорости изнашивания \dot{w} в центре площадки контакта от времени t для значений параметров, характеризующих износостойкие свойства материала: $\tilde{K} = 10^{-5}$ м/с, $\alpha = 1$ и $\tilde{K} = 10^{-2}$ м/с, $\alpha = 2$ соответственно. Номера кривых на рис. 2 и 3

Рис. 2. Зависимости линейного износа (а) и скорости изнашивания (б) от времени ($\tilde{K} = 10^{-5}$ м/с, $\alpha = 1$)Рис. 3. Зависимости линейного износа (а) и скорости изнашивания (б) от времени ($\tilde{K} = 10^{-2}$ м/с, $\alpha = 2$)

соответствуют номерам приведенных выше вариантов изменения функции $\varphi(w)$.

Нетрудно видеть, что структурная неоднородность по глубине изнашиваемой поверхности существенно влияет на характер процесса приработки сопряжения. Отметим, что в процессе изнашивания увеличиваются размеры площадки фактического контакта штампа с упругой полуплоскостью. Вследствие этого при постоянном усилии прижатия штампа уменьшается скорость внедрения штампа в упругое тело даже при отсутствии упрочнения поверхности.

Выводы

Для решения рассматриваемой износоконтактной задачи использован вариационный подход. Получена формулировка задачи в напряжениях в виде системы квазивариационного неравенства эво-

люционного типа и дифференциального уравнения первого порядка. Для дискретизации задачи по времени использована явная разностная схема Эйлера. В результате на каждом временном шаге для определения контактного давления требуется решить эллиптическое вариационное неравенство или эквивалентную ему экстремальную задачу. Дискретизация задач по пространственным координатам производилась с использованием пространства интегрированных фундаментальных решений задачи Фламана о действии нормальной сосредоточенной силы на поверхности упругой полуплоскости. При построении пространства ИФР применялся гранично-элементный подход. Использовались элементы с постоянным по длине распределением контактного давления. В результате дискретизации получена задача квадратичного программирования с ограничениями в виде равенств. Предложено линейное преобразование переменных, позволяющее

упростить вид ограничений. Для численного решения задачи использован вариант метода сопряженных градиентов, учитывающий специфику ограничений.

Результаты расчетов продемонстрировали существенное влияние структурной неоднородности по глубине изнашиваемой поверхности на характер процесса приработки сопряжения поверхности упругого тела с жестким штампом.

Разработанный вычислительный алгоритм может быть использован для исследования методом вычислительного эксперимента эффективности различных технологий поверхностного упрочнения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект №13-01-00728).

Библиографический список

1. *Белашова И.С., Шашков Д.П.* Поверхностное упрочнение инструментальных сталей с применением лазерного нагрева. — М.: Техполиграфцентр, 2004. — 147 с.
2. *Шашков Д.П., Белашова И.С.* Поверхностное упрочнение инструментальных сталей. — М.: Техполиграфцентр, 2004. — 376 с.
3. *Галин Л.А.* Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. — М.: Наука, 1980. — 303 с.
4. *Горячева И.Г., Добычин М.Н.* Контактные задачи в трибологии. — М.: Машиностроение, 1988. — 256 с.
5. *Горячева И.Г.* Механика фрикционного взаимодействия. — М.: Наука, 2001. — 478 с.
6. *Солдатенков И.А.* Износоконтактная задача с приложениями к инженерному расчету износа. — М.: Физматкнига, 2010. — 160 с.
7. *Горячева И.Г., Солдатенков И.А.* Контактная задача с учетом износа // Механика контактных взаимодействий. М.: Физматлит, 2001. С. 438-458.
8. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. — М.: Наука, 1980. — 383 с.
9. *Kalker J.J.* Variational principles of contact elastostatics // Journal of the Institute of Mathematics and its Applications, 1977, vol. 20 (2). Pp. 199-219.
10. *Кравчук А.С.* Вариационные и квазивариационные неравенства в механике. — М.: МГАПИ, 1997. — 340 с.
11. *Панагиотопулос П.* Неравенства в механике и их приложения. Выпуклые и невыпуклые функционалы энергии. — М.: Мир, 1989. — 496 с.
12. *Бобылев А.А.* Вариационный метод решения контактных задач для тел конечных размеров при наличии износа // Современные проблемы механики контактных взаимодействий. Днепропетровск: ДГУ, 1990. С. 49-52.
13. *Темам Р.* Математические задачи теории пластичности. — М.: Наука, 1991. — 288 с.
14. *Алексидзе М.А.* Фундаментальные функции в приближенных решениях граничных задач. — М.: Наука, 1991. — 352 с.
15. *Угодчиков А.Г., Хуторянский Н.М.* Метод граничных элементов в механике деформируемого твердого тела. — Казань: Издательство Казанского университета, 1986. — 295 с.
16. *Сьярле Ф.* Метод конечных элементов для эллиптических задач. — М.: Мир, 1980. — 512 с.
17. *Бобылев А.А.* Об одном варианте численного решения контактных задач теории упругости // Решение прикладных задач математической физики и дискретной математики: сб. науч. тр. Днепропетровск: ДГУ, 1987. С. 23-29.

VARIATIONAL FORMULATION AND NUMERICAL ALGORITHM FOR THE STRUCTURAL NON-UNIFORM SURFACE WEAR-OUT BY RIGID PUNCH PROBLEM SOLUTION

Bobylov A.A.* , Belashova I.S.**

*Moscow State Automobile and Road Technical University,
MADI, 64, Leningradsky prospect, Moscow, 125319, Russia*

** e-mail: abobylov@gmail.com*

*** e-mail: irina455@inbox.ru*

Abstract

The paper considers a flat contact problem on an elastic half-plane with structurally non-uniform surface wear-out by the rigid wear-free punch. While stating the problem we suppose that elastic characteristics of the material are structurally tolerant and identical in all

points of the body, and parameters characterizing wear-resistant properties of the material depend on the value of linear wear. We also suppose predetermined the main vector and the main moment of force applied to the rigid punch.

To solve the contact wear-out problem under consideration we implemented variational approach. As a result, we obtained the problem formulation in tensions in terms of the system of quasivariational inequality of evolutionary type and first-order differential equation. For the problem time sampling, Euler explicit difference scheme was used. Thus, to determine contact pressure an elliptic inequity or extremum problem equal to it should be solved on each time step. We performed the problems quantization over spatial coordinates using the space of integrated fundamental solutions of the Flamant on the effect of normal concentrated force over the surface of elastic half-plane. We used boundary element approach to plot the surface of integrated fundamental solutions. Elements with a uniform distribution of contact pressure were used. As a result of sampling we formulated the problem of quadratic programming with restrictions in the form of equalities. The linear transformation of variables, allowing simplification of the restrictions was suggested. For numerical solution of the problem we used a variant of conjugate gradients method taking into account specificity of restrictions.

The calculations carried out showed that structural heterogeneity over the depth of the wear-out surface significantly influences the nature of the interface wear-in process.

The developed computational algorithm can be implemented for study of the efficiency of various technologies for superficial hardening by the method of computing experiment.

Keywords: structurally non-uniform surface, wear-out contact problem, variational inequality, integrated fundamental solutions, boundary element method.

References

1. Belashova I.S., Shashkov D.P. *Poverkhnostnoe uprochnenie instrumental'nykh staley s primeneniem lazernogo nagreva* (Surface Hardening of Tool Steels Using Laser Heating), Moscow, Tehpoligrafcentr, 2004, 147 p.
2. Shashkov D.P., Belashova I.S. *Poverkhnostnoe uprochnenie instrumental'nykh staley* (Surface Hardening of Tool Steels), Moscow, Tehpoligrafcentr, 2004, 376 p.
3. Galin L.A. *Kontaktnye zadachi teorii uprugosti i vyazkouprugosti* (Contact Problems of Theory of Elasticity and Viscoelasticity), Moscow, Nauka, 1980, 303 p.
4. Goryacheva I.G., Dobychin M.N. *Kontaktnye zadachi v tribologii* (Contact problems in tribology), Moscow, Mashinostroenie, 1988, 256 p.
5. Goryacheva I.G. *Mekhanika friktsionnogo vzaimodeistviya* (Mechanics of Friction Interaction), Moscow, Nauka, 2001, 478 p.
6. Soldatenkov I.A. *Iznosokontaktynaya zadacha s prilozheniyami k inzhenernomu raschetu iznosa* (Wear-out Contact Problem with Application for Engineering Calculation of Wear-out), Moscow, Fizmatkniga, 2010, 160 p.
7. Goryacheva I.G., Soldatenkov I.A. *Mekhanika kontaktnykh vzaimodeistvii. Sbornik statei*, Moscow, FIZMATLIT, 2001, pp. 438-458.
8. Duvaut G., Lions J.-L. *Les Inequations en Mecanique et en Physique*, Paris, Dunod, 1972, 405 p.
9. Kalker J.J. Variational principles of contact elastostatics. *Journal of the Institute of Mathematics and its Applications*, 1977, vol. 20 (2), pp. 199-219.
10. Kravchuk A.S. *Variatsionnye i kvazivariatsionnye neravenstva v mekhanike* (Variational and Quasivariational Inequalities in Mechanics), Moscow, MGAPI, 1997, 340 p.
11. Panagiotopoulos P. *Inequality Problems in Mechanics and Applications. Convex and Nonconvex Energy Functions*, Boston-Basel-Stuttgart, Birkhauser, 1985, 412 p.
12. Bobylov A.A. *Sovremennye problemy mekhaniki kontaktnykh vzaimodeistvii. Sbornik statei*, Dnepropetrovsk, DGU, 1990, pp. 49-52.
13. Temam R. *Mathematical Problems in Plasticity*, Paris, Gauthier-Villars, 1985, 354 p.
14. Aleksidze M.A. *Fundamental'nye funktsii v priblizhennykh resheniyakh granichnykh zadach* (Fundamental Functions in Approximate Solution of Boundary Problems), Moscow, Nauka, Fizmatlit, 1991, 352 p.
15. Ugodchikov A.G., Khutoryanskii N.M. *Metod granichnykh elementov v mekhanike deformiruemogo tverdogo tela* (Boundary Element Method in Solid Mechanics), Kazan', Izdatel'stvo Kazanskogo universiteta, 1986, 295 p.
16. Ciarlet P. *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, Amsterdam-New York-Oxford, North-Holland, 1978, 530 p.
17. Bobylov A.A. *Reshenie prikladnykh zadach matematicheskoi fiziki i diskretnoi matematiki. Sbornik statei*, Dnepropetrovsk, DGU, 1987, pp. 23-29.