

УДК 536.24

© О.М. АЛИФАНОВ, Н.А. ИВАНОВ,
В.А. КОЛЕСНИКОВ, А.Г. МЕДНОВ, 2009

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК АНИЗОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ ИЗ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Олег Михайлович АЛИФАНОВ родился в 1941 г. в городе Москве. Декан МАИ, заведующий кафедрой. Член-корреспондент РАН. Доктор технических наук. Основные научные интересы — в области прямых и обратных задач теории тепломассообмена летательных аппаратов. Автор более 350 научных работ. E-mail: alf@cosmos.com.ru,

Oleg M. ALIFANOV, D.Sci., a Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, was born in 1941 in Moscow. He is the Dean of the Aerospace Engineering School and the Head of a Department at the MAI. His major research interests are in direct and inverse heat-mass exchange problems for aerospace vehicles. He has published over 350 technical papers. E-mail: alf@cosmos.com.ru

Николай Анатольевич ИВАНОВ родился в 1937 г. в городе Москве. Заведующий лабораторией МАИ. Основные научные интересы — в области тепломассообмена. Автор более 30 научных работ. E-mail: tdm1@mail.ru

Nickolay A. IVANOV, was born in 1937 in Moscow. He is the Head of a Laboratory at the MAI. His research interests are in heat-mass exchange problems. He has published more than 30 technical papers. E-mail: tdm1@mail.ru

Василий Анатольевич КОЛЕСНИКОВ родился в 1978 году в Московской области. Младший научный сотрудник МАИ. Основные научные интересы — в области обратных задач. E-mail: tdm1@mail.ru

Vassily A. KOLESNIKOV, was born in 1978, in the Moscow Region. He is a Junior Research Associate at the MAI. His research interests are in inverse problems. E-mail: tdm1@mail.ru

Алексей Георгиевич МЕДНОВ родился в 1939 г. в городе Ленинграде, Ведущий инженер МАИ. Основные научные интересы — в области тепломассообмена. Автор более 30 научных работ. E-mail: tdm1@mail.ru

Alexey G. MEDNOV, was born in 1939 in Leningrad. He is Principal Engineer at the MAI. His research interests are in heat-mass exchange problems. He has published more than 30 technical papers. E-mail: tdm1@mail.ru

Разработано алгоритмическое и программное обеспечение метода определения теплофизических характеристик анизотропных материалов из решения обратной задачи теплопроводности в экстремальной постановке. Эффективность метода проиллюстрирована на примере восстановления по результатам физического эксперимента тензора теплопроводности и объемной теплоемкости перспективного для применения в авиационно-космической технике ортотропного материала на основе углеродных волокон и эпоксидного связующего.

Algorithms and software are developed to analyze thermophysical characteristics of anisotropic materials basing on a solution of inverse heat conductivity problem stated as an extremal one. An efficiency of the technique is demonstrated as applies to a recovery of the thermal conductivity tensor and volumetric heat capacity basing on physical experiment results. The recovery is carried out for an orthotropic material built on carbon fibers and epoxy binder. This material is promising for design of aerospace structures.

Ключевые слова: обратная задача; теплофизические характеристики; анизотропный материал.

Key words: inverse problem, thermophysical properties, anisotropic material.

Обозначения

- T — температура;
- $\lambda_{11}(T), \lambda_{22}(T), \lambda_{12}(T)$ — элементы тензора теплопроводности материала;
- $C(T)$ — объемная теплоемкость материала;
- J — целевой функционал;
- xoy — прямоугольная система координат;
- τ — время;
- $S(x, y, \tau)$ — мощность источника внутренних тепловыделений;
- m — число участков разбиения области определения искомых функций;
- $\vec{\lambda} = (\lambda_{11}^{(k)}, \lambda_{22}^{(k)}, \lambda_{12}^{(k)}, C^{(k)}), k = 1, 2, \dots, (m+3)$ — обобщенный вектор значений параметров аппроксимирующих функций;
- $J'(\vec{\lambda})$ — градиент функционала;
- $\theta(x, y, \tau)$ — приращение температуры;
- $\bar{\Delta}$ — обобщенная относительная величина возмущения параметров функций;
- ξ — глубина спуска.

При проектировании объектов авиационно-космической техники необходимо иметь данные о теплофизических характеристиках используемых или предполагаемых к использованию материалов с учетом зависимости этих характеристик от температуры, направления и с учетом особенностей протекающих в этих материалах физических и физико-химических процессов. Под теплофизическими характеристиками здесь понимаются компоненты тензора теплопроводности материалов и их объемная теплоемкость. Перспективным методом определения этих характеристик в широком диапазоне температур считается метод, применяемый при решении коэффициентных обратных задач, суть которых заключается в определении неизвестных коэффициентов математической модели нестационарного теплового состояния образца материала при известных граничных, начальных условиях и известных мгновенных значениях температур в некоторых точках исследуемого образца [1, 2].

В статье излагается методический подход и алгоритм решения задачи определения температурных зависимостей элементов тензора теплопроводности анизотропных материалов и их объемной теплоемкости. Хотя в статье алгоритм решения задачи представлен для случая восстановления матрицы теплопроводности второго порядка, однако такой же подход можно использовать и для определения матрицы теплопроводности третьего порядка.

Рассмотрим процесс нестационарного теплообмена в прямоугольной области анизотропного в

отношении теплопроводности материала. Математическая модель этого процесса имеет вид следующей краевой задачи с граничными условиями первого рода:

$$C(T) \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_{11}(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_{22}(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_{12}(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right) + S(x, y, \tau);$$

$$x \in [0; a]; \quad y \in [0; b]; \quad \tau \in [0; \tau_m]; \quad (1)$$

$$T(x, y, 0) = \varphi_0(x, y); \quad (2)$$

$$T(x_G, y_G, \tau) = \varphi_G(x_G, y_G, \tau); \quad x_G = \{0; a\};$$

$$y_G = \{0; b\}; \quad \tau \in [0, \tau_m], \quad (3)$$

где $\varphi_0(x, y)$ и $\varphi_G(x_G, y_G, \tau)$ — начальное и граничное распределение температур;

$C(T), \lambda_{11}(T), \lambda_{22}(T), \lambda_{12}(T)$ — объемная теплоемкость и компоненты тензора теплопроводности соответственно;

$S(x, y, \tau)$ — функция внутреннего источника тепла.

Решим задачу восстановления функций $\lambda_{11}(T), \lambda_{22}(T), \lambda_{12}(T)$ и $C(T)$ на основании информации о мгновенных значениях температур в определенных n точках прямоугольной области $D = [0; a] \times [0; b]$ ($T(x_i, y_i, \tau) = f(x_i, y_i, \tau), i = 1, 2, \dots, n$) и известных функциях $S(x, y, \tau), \varphi_0(x, y), \varphi_G(x_G, y_G, \tau)$. Данная задача относится к некорректно поставленным коэффициентным обратным задачам, что требует применения для ее решения регуляризирующего алгоритма. Задачу будем решать в экстремальной постановке, а именно: будем искать решение задачи с помощью одного из регуляризирующих итерационных алгоритмов, который дает минимизирующую последовательность для функционала невязки J , характеризующего среднее квадратичное отклонение вычисленных с помощью математической модели (1)–(3) температур в отмеченных n точках области D от заданных (измеряемых в эксперименте) значений $f(x_i, y_i, \tau)$:

$$J = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_0^{\tau_m} (T(x_i, y_i, \tau) - f(x_i, y_i, \tau))^2 d\tau. \quad (4)$$

Подлежащие определению функции $\lambda_{11}(T)$, $\lambda_{22}(T)$, $\lambda_{12}(T)$ и $C(T)$ будем искать в параметризованном виде:

$$\lambda_{11}(T) = \sum_{k=1}^{m+3} \lambda_{11}^{(k)} B_k(T); \quad \lambda_{22}(T) = \sum_{k=1}^{m+3} \lambda_{22}^{(k)} B_k(T);$$

$$\lambda_{12}(T) = \sum_{k=1}^{m+3} \lambda_{12}^{(k)} B_k(T); \quad C(T) = \sum_{k=1}^{m+3} C^{(k)} B_k(T),$$

где $B_k(T)$ — последовательность кубических B -сплайнов; $T \in [T_{\min}, T_{\max}]$; m — число участков разбиения области определения искомых функций при осуществлении их сплайн-аппроксимации;

$$\bar{\lambda}_{11} = (\lambda_{11}^{(k)}, k = 1, 2, \dots, (m+3));$$

$$\bar{\lambda}_{22} = (\lambda_{22}^{(k)}, k = 1, 2, \dots, (m+3));$$

$$\bar{\lambda}_{12} = (\lambda_{12}^{(k)}, k = 1, 2, \dots, (m+3));$$

$$\bar{C} = (C^{(k)}, k = 1, 2, \dots, (m+3))$$

— векторы значений параметров сплайн-функций, аппроксимирующих искомые функции. Будем последовательно уточнять решение, определяя поправки к векторам параметров аппроксимирующих сплайн-функций из условия убывания функционала J . В качестве численного метода минимизации функционала применим метод сопряженных градиентов.

В рассмотренной постановке, строго говоря, решение обратной задачи может быть неединственным. Выход из этой ситуации (если невозможно изменить эту постановку, например из-за трудностей экспериментального характера) видится в учете подходящей априорной информации об искомых величинах, в частности о качественном характере их изменения на интересующем нас температурном интервале. В дальнейшем будем считать, что искомые величины являются достаточно регулярными функциями, не обладающими чрезмерно тонкой структурой. Тогда возможен переход к малопараметрическому представлению этих функций. В принятой выше сплайновой форме задания искомых величин мы будем ограничиваться малым числом m участков аппроксимации, в то же время число точек n , где заданы временные зависимости температур, будет достаточно большим. Но в любом случае, поскольку строгие условия однозначности нам не известны, целесообразно провести численную проверку на выполнение этих условий, отда-

вая себе отчет, конечно, в ограниченности такого подхода.

При реализации градиентных методов минимизации целевого функционала самыми важными моментами в этой реализации является вычисление градиента функционала J перед каждым уточнением вектора параметров (на каждой итерации) и определение глубины (шага) спуска в направлении вектора \bar{P} , зависящем от значений градиента на данной и предыдущей итерациях.

Для получения формулы градиента функционала J будем решать задачу минимизации функционала невязки как задачу на условный экстремум методом множителей Лагранжа при ограничениях, определяемых условиями (1)–(3) [3].

Составим функционал Φ Лагранжа

$$\begin{aligned} \Phi = & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_0^{\tau_m} (T(x_i, y_i, \tau) - f(x_i, y_i, \tau))^2 d\tau + \\ & + \sum_{i=1}^n \int_0^{\tau_m} \psi(x_i, y_i, \tau) \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_{11}(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) \right]_{x=x_i, y=y_i} + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_{22}(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right) \Big|_{x=x_i, y=y_i} + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_{12}(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right) \Big|_{x=x_i, y=y_i} + \\ & + S(x_i, y_i, \tau) - \left(C(T) \frac{\partial T}{\partial \tau} \right) \Big|_{x=x_i, y=y_i} \Big] d\tau + \\ & + \sum_{i=1}^n \gamma(x_i, y_i) [T(x_i, y_i) - T_0(x_i, y_i)]. \end{aligned} \quad (5)$$

Дадим векторам значений параметров искомых функций малые возмущения, причем такие, чтобы относительные величины возмущений каждой координаты всех векторов были одинаковыми. То есть возмущения должны удовлетворять условию

$$\Delta \bar{\lambda}_{11}^{(k)} = \Delta \bar{\lambda}_{22}^{(k)} = \Delta \bar{\lambda}_{12}^{(k)} = \Delta \bar{C}^{(k)},$$

$$k = 1, 2, \dots, m+3; \quad \Delta \bar{\lambda}_{11}^{(1)} = \Delta \bar{\lambda}_{11}^{(2)} = \dots = \Delta \bar{\lambda}_{11}^{(m+3)}.$$

Обозначим эти одинаковые относительные величины приращений через $\bar{\Delta}$. Функции $\lambda_{11}(T)$, $\lambda_{22}(T)$, $\lambda_{12}(T)$, $C(T)$ получают некоторые вариации $\Delta \lambda_{11}$, $\Delta \lambda_{22}$, $\Delta \lambda_{12}$, ΔC соответственно. Тогда температурное поле $T(x, y, \tau)$ также получит возмущение и изменится на величину $\theta(x, y, \tau)$.

Вариации искомых функций определяются одинаковыми по структуре соотношениями, которые, например, для функции $\lambda_{11}(T)$ имеют вид

$\Delta\lambda_{11} = \tilde{\lambda}_{11}(T + \theta) - \lambda_{11}(T)$, где $\tilde{\lambda}_{11}(T + \theta)$ — возмущенное значение функции $\lambda_{11}(T)$ в какой-то точке. Возмущение является следствием приращения параметров этой функции и приращения температуры в рассматриваемой точке. То есть

$$\tilde{\lambda}_{11}(T + \theta) = \sum_{k=1}^{m+3} (\lambda_{11}^{(k)} + \Delta\lambda_{11}^{(k)}) B_k(T + \theta).$$

Характеризуя приращение функции $B_k(T)$ ее дифференциалом в точке T

$$B_k(T + \theta) \approx B_k(T) + \frac{dB_k(T)}{dT} \theta,$$

получим следующее выражение для возмущенного значения функции $\lambda_{11}(T)$:

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_{11}(T + \theta) &= (1 + \bar{\Delta}) \cdot \sum_{k=1}^{m+3} \left(\lambda_{11}^{(k)} B_k(T) + \lambda_{11}^{(k)} \frac{dB_k(T)}{dT} \theta \right) = \\ &= (1 + \bar{\Delta}) \cdot \left(\lambda_{11}(T) + \frac{d\lambda_{11}(T)}{dT} \theta \right). \end{aligned}$$

Тогда первое слагаемое в правой части уравнения теплопроводности (1) при возмущенных значениях параметров искомым функций примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (\tilde{\lambda}_{11}(T + \theta)) \frac{\partial(T + \theta)}{\partial x} &= (1 + \bar{\Delta}) \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_{11}(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \right. \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_{11}(T) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{d\lambda_{11}(T)}{dT} \frac{\partial T}{\partial x} \theta \right) + \\ &\left. + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{d\lambda_{11}(T)}{dT} \frac{\partial \theta}{\partial x} \theta \right) \right]. \end{aligned}$$

Такой же вид примет второе слагаемое и почти такой же вид третье слагаемое правой части уравнения (1). Слагаемое, стоящее в левой части уравнения (1), при возмущенных параметрах запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{C}(T + \theta) \frac{\partial(T + \theta)}{\partial \tau} &= \\ &= \sum_{k=1}^{m+3} \left((C^{(k)} + \Delta C^{(k)}) B_k(T + \theta) \frac{\partial(T + \theta)}{\partial \tau} \right) = (1 + \bar{\Delta}) \times \\ &\times \left[C(T) \frac{\partial T}{\partial \tau} + C(T) \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{dC(T)}{dT} \frac{\partial T}{\partial \tau} \theta + \frac{dC(T)}{dT} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \theta \right]. \end{aligned}$$

Вычтя из уравнения теплопроводности, записанного для возмущенных параметров искомым функций, невозмущенное уравнение теплопроводности, получим уравнение, определяющее совместно с уравнениями (1)—(3) поле приращений тем-

ператур при возмущении параметров искомым функций на относительную величину $\bar{\Delta}$:

$$\begin{aligned} C(T) \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{dC(T)}{dT} \left(\frac{\partial T}{\partial \tau} + \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \right) \theta &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_{11}(T) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \left(\theta \frac{d\lambda_{11}(T)}{dT} \left(\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_{22}(T) \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left(\theta \frac{d\lambda_{22}(T)}{dT} \left(\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \right) + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_{12}(T) \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) + \\ &+ 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\theta \frac{d\lambda_{12}(T)}{dT} \left(\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \right) - \frac{\bar{\Delta}}{1 + \bar{\Delta}} S(x, y, \tau), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\theta(x, y, 0) = 0; \quad \theta(x_T, y_T, \tau) = 0,$$

где $x_T = \{0; a\}$; $y_T = \{0; b\}$; $\tau \in [0; \tau_m]$.

При возмущении параметров искомым функций обобщенный функционал (функционал Лагранжа) получит вариацию $\Delta\Phi$. Ограничиваясь линейной частью приращения целевого функционала J , можно эту вариацию записать в виде

$$\begin{aligned} \Delta\Phi &= \sum_{i=1}^n \int_0^{\tau_m} (T(x_i, y_i, \tau) - f(x_i, y_i, \tau)) \cdot \theta(x_i, y_i, \tau) \cdot d\tau + \\ &+ \sum_{i=1}^n \int_0^{\tau_m} \psi(x_i, y_i, \tau) \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_{11}(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \right. \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \left(\theta \cdot \frac{d\lambda_{11}(T)}{dT} \left(\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_{22}(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left(\theta \cdot \frac{d\lambda_{22}(T)}{dT} \left(\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \right) + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_{12}(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \\ &+ 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\theta \cdot \frac{d\lambda_{12}(T)}{dT} \left(\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \right) - \left(C(T) \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{dC(T)}{dT} \times \right. \\ &\left. \times \theta \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial \tau} + \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \right) \right) \Big]_{x=x_i, y=y_i} - \frac{\bar{\Delta}}{1 + \bar{\Delta}} \cdot S(x_i, y_i, \tau) \Big\} d\tau. \end{aligned} \quad (7)$$

Заметим, что все входящие в выражение (7) переменные и их производные вычисляются в точках $i = 1, 2, \dots, n$.

Необходимым условием достижения функционалом J минимума при ограничениях (1)—(3) является равенство нулю полной вариации функции

онала $\Phi (\Delta\Phi = 0)$. Приравнивая правую часть соотношения (7) к нулю и разрешая полученное уравнение относительно $\psi(x_i, y_i, \tau)$, можно получить формулу для определения множителя Лагранжа. Эта формула имеет громоздкий вид, но в силу ожидаемой гладкости искомых функций и малости θ при малых $\bar{\Delta}$ ее можно упростить, если пренебречь в выражении для $\psi(x_i, y_i, \tau)$ членами, содержащими произведение θ на производные искомых функций. В итоге получим следующее выражение для множителя Лагранжа $\psi(x_i, y_i, \tau)$:

$$\psi(x_i, y_i, \tau) = \frac{[f(x_i, y_i, \tau) - T(x_i, y_i, \tau)] \cdot \theta(x_i, y_i, \tau)}{\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_{11}(T) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_{22}(T) \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_{12}(T) \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) - C(T) \frac{\partial \theta}{\partial \tau} - \bar{\Delta} \cdot S(x, y, \tau)}, \quad (8)$$

где $x = x_i, y = y_i$ (т. е. все производные и функции $\lambda_{11}, \lambda_{22}, \lambda_{12}, C$ и S вычисляются в точках (x_i, y_i, τ)).

Входящие в выражения (8) значения $\theta(x_i, y_i, \tau)$ и значения их производных определяются в процессе решения задачи о расчете поля приращений температур при возмущении параметров искомых функций.

Для получения формулы градиента целевой функции преобразуем выражение для $\Delta\Phi$. Линейную часть приращения целевого функционала

$$\sum_{i=1}^n \int_0^{\tau_i} (T(x_i, y_i, \tau) - f(x_i, y_i, \tau)) \cdot \theta(x_i, y_i, \tau) \cdot d\tau$$

представим в виде

$$\sum_{k=1}^{m+3} J'(\lambda_{11}^{(k)}) \cdot \Delta\lambda_{11}^{(k)} + \sum_{k=1}^{m+3} J'(\lambda_{22}^{(k)}) \cdot \Delta\lambda_{22}^{(k)} + \sum_{k=1}^{m+3} J'(\lambda_{12}^{(k)}) \cdot \Delta\lambda_{12}^{(k)} + \sum_{k=1}^{m+3} J'(C^{(k)}) \cdot \Delta C^{(k)},$$

который соответствует трактовке градиента функционала в данном конкретном случае (в данной задаче).

Второе слагаемое в выражении для $\Delta\Phi$ представим несколько иначе, чем в соотношении (7). Для этого воспользуемся выражениями для возмущенных значений искомых функций, т. е. выражениями для $\tilde{\lambda}_{11}(T + \theta), \tilde{\lambda}_{22}(T + \theta), \tilde{\lambda}_{12}(T + \theta), \tilde{C}(T + \theta)$.

Группируя члены, содержащие одни и те же вариации, а затем приравнивая к нулю коэффициенты при них, т. е. при вариациях $\Delta\lambda_{11}^{(k)}, \Delta\lambda_{22}^{(k)}, \Delta\lambda_{12}^{(k)}, \Delta C^{(k)}, k = 1, 2, \dots, (m + 3)$, получим выражения для градиента функционала, похожие по структуре на выражение градиента функционала в работах [1, 2, 4] для случая одномерной теплопроводности:

$$J'(\lambda_{11}^{(k)}) = \sum_{i=1}^n \int_0^{\tau_m} \psi(x_i, y_i, \tau) \cdot \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} B_k(T) + \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 \frac{dB_k(T)}{dT} \right) d\tau;$$

$$J'(\lambda_{22}^{(k)}) =$$

$$= \sum_{i=1}^n \int_0^{\tau_m} \psi(x_i, y_i, \tau) \cdot \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} B_k(T) + \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 \frac{dB_k(T)}{dT} \right) d\tau; \quad (9)$$

$$J'(\lambda_{12}^{(k)}) =$$

$$= \sum_{i=1}^n \int_0^{\tau_m} \psi(x_i, y_i, \tau) \cdot \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} B_k(T) + \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} \frac{dB_k(T)}{dT} \right) d\tau;$$

$$J'(C^{(k)}) = \sum_{i=1}^n \int_0^{\tau_m} \psi(x_i, y_i, \tau) \frac{\partial T}{\partial \tau} B_k(T) d\tau.$$

Однако следует особо отметить, что входящий в выражения для градиента множитель Лагранжа определяется не в процессе решения краевой сопряженной задачи, как это делается в отмеченных работах, а через процедуру вычисления поля приращений температур при возмущении всех параметров искомых функций на одну и ту же относительную величину $\bar{\Delta}$. При этом значение градиента практически не зависит от величины $\bar{\Delta}$ при условии ее малости. Расчеты показывают, что эту величину можно задавать в диапазоне $10^{-2} - 10^{-4}$.

Что касается задачи определения оптимальной глубины (шага) спуска в направлении, определяемом методом сопряженных градиентов, то ее можно решать или численно, или приближенно, используя известный подход, основанный на линеаризации зависимости целевой функции от шага спуска в направлении антиградиента и нахождении минимума этой линеаризованной зависимости [1, 2]. Для реализации такого приближенного подхода необходимо решить задачу о приращении поля температур, но в несколько другой постановке, чем та постановка, которая рассматривалась выше в обеспечении определения множителей Лагранжа и получения формулы для градиента целевой функции. В данном случае каждому параметру искомых функций даются возмущения, пропорциональные соответствующим компонентам градиента функционала. Обозначим этот коэффициент пропорциональ-

ности через ξ_0 . Тогда малые возмущения $\Delta\bar{\lambda}$, даваемые обобщенному вектору $\bar{\lambda}$, при решении задачи о приращении поля температур определяются следующим выражением:

$$\Delta\bar{\lambda} = \xi_0 J'(\bar{\lambda}). \quad (10)$$

Важным является вопрос о выборе коэффициента ξ_0 , обеспечивающего малость $\Delta\bar{\lambda}$. Пусть эта малость определяется числом δ , составляющим малую долю, например тысячную, от модуля вектора $\bar{\lambda}$. Тогда, учитывая соотношение (10), получим

$$\xi_0 = \frac{\delta \cdot |\bar{\lambda}|}{|J'(\bar{\lambda})|}. \quad (11)$$

Реализуя отмеченный выше подход для оценки глубины спуска в направлении антиградиента целевого функционала, в итоге получим следующее расчетное выражение для ξ :

$$\xi = \frac{\sum_{i=1}^n \int_0^{\tau_m} (T(x_i, y_i, \tau, \bar{\lambda}) - f(x_i, y_i, \tau)) \theta(x_i, y_i, \tau, \xi_0 J'(\bar{\lambda})) d\tau}{\sum_{i=1}^n \int_0^{\tau_m} (\theta(x_i, y_i, \tau, \xi_0 \cdot J'(\bar{\lambda}))^2 \cdot d\tau)} \xi_0, \quad (12)$$

где коэффициент ξ_0 определяется соотношением (11).

Проверка эффективности разработанного алгоритма и компьютерной программы решения задачи определения теплофизических характеристик

анизотропных материалов осуществлялась как в различных вычислительных экспериментах, так и в процессе решения задачи на основе физических экспериментов с образцом ортотропного материала.

Эксперименты проводились Н.А. Ивановым и А.Г. Медновым на тепловакуумном стенде ТВС-1М лаборатории 601 МАИ с использованием экспериментального модуля ЭМ-ОТ. Прототипом этого модуля явилось экспериментальное устройство, принципиальная схема которого приведена в работах [6, 7]. Исследуемый образец, схематично изображенный на рис. 1, имел форму параллелепипеда и собирался из четырех пластин размером 64×64 мм и толщиной 5 мм, вырезаемых из листовой заготовки. Для исключения контактного сопротивления между пластинами на их поверхности наносилась высокотеплопроводная смазка. Собранный образец помещался в измерительный узел экспериментальной установки и устанавливался между двумя алюминиевыми радиаторами, охлаждаемыми проточной водой. К двум другим сторонам образца прижимались массивные алюминиевые пластины, находящиеся в тепловом контакте с радиаторами, и, наконец, еще две стороны образца закрывались накладками из теплоизоляционного материала. Для обеспечения хорошего теплового контакта образца с радиаторами и алюминиевыми пластинами также использовалась высокотеплопроводная смазка. Такая конструкция экспериментального модуля позволяет создавать в центральном сечении образца температурное поле, близкое к двумерному, и обеспечивает постоянство температуры на границе образца. Источником нагрева в процессе эксперимента являлся электрический линейный нагреватель диаметром 0,5 мм, установленный по оси об-

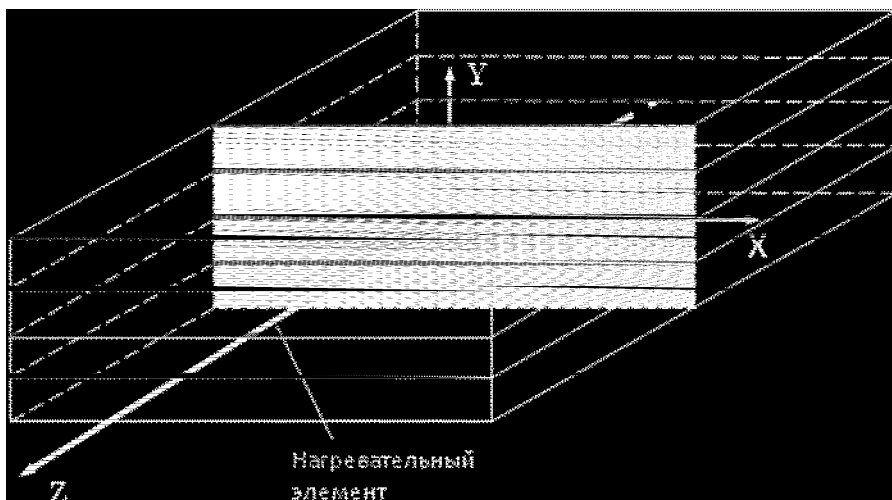


Рис. 1. Схема образца исследуемого материала:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 — точки размещения температурных датчиков ($T_1(\tau) - T_7(\tau)$)

разца. Мощность нагревателя в процессе эксперимента изменялась по заранее заданной зависимости. Между соприкасающимися пластинами были установлены шесть внутренних термодатчиков. Кроме внутренних точек, измерялись температуры и в пяти точках наружного контура образца.

При определении теплофизических характеристик материала использовались результаты трех экспериментов, различающихся величиной подводимой к линейчатому нагревателю мощности и продолжительностью испытаний. Продолжительность экспериментов (τ_{\max}) составила приблизительно 2000 с. Замеры температур и выделяемой электронагревателем мощности осуществлялись с шагом 4,5 с. Перед непосредственным использованием результатов всех измерений осуществлялось их сглаживание с помощью сплайн-аппроксимации в области $\tau \in [0, \tau_{\max}]$. При аппроксимации результатов измерений область определения разбивалась на m частей. Значение m принималось на единицу меньшим числа измерений. Экспериментальные данные по подводимой к линейчатому электронагревателю мощности $I(\tau)$ представлены для трех проведенных экспериментов на рис. 2.

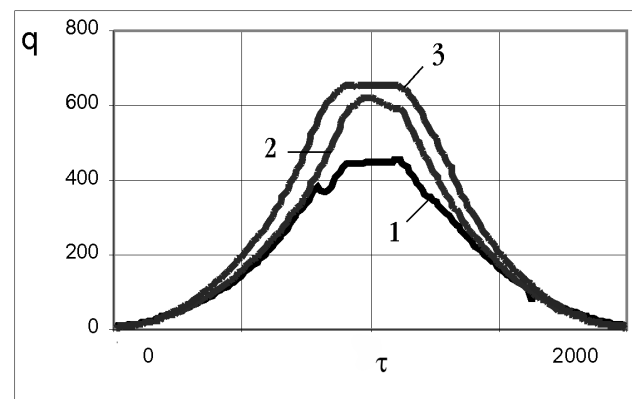


Рис. 2. Зависимость от времени τ внутренних тепловыделений q

Результаты восстановления температурных зависимостей теплофизических характеристик исследуемого материала представлены на графиках рис. 3. Номера кривых на этих графиках соответствуют номерам экспериментов. Восстановленные значения $\lambda_{12}(T)$ оказались пренебрежимо малы (не превышали 0,005), поэтому на графиках не иллюстрируются. Заметим, что $\lambda_{11}(T)$ характеризует теплопроводность исследуемого композиционного материала в направлении основных углеродных волокон (в направлении оси x на схеме рис. 1), а $\lambda_{22}(T)$

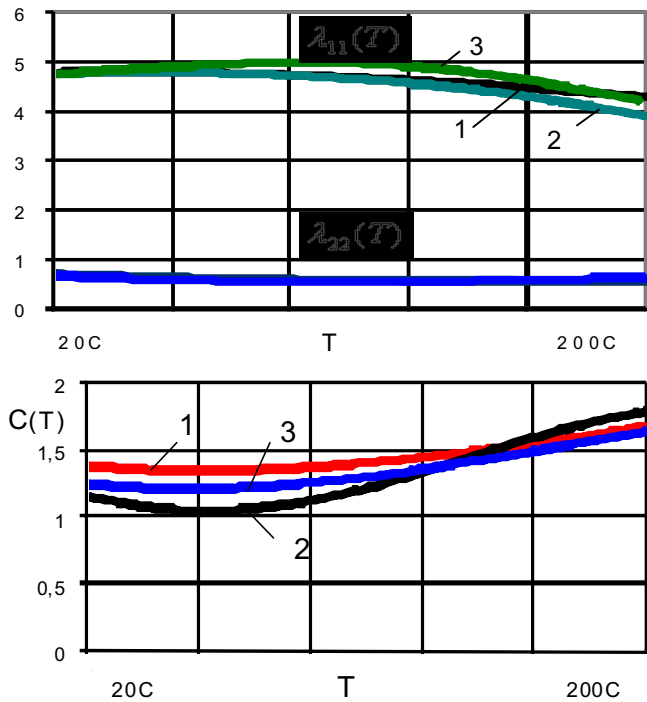


Рис. 3. Зависимость от температуры восстановленных $\lambda_{11}(T), \lambda_{22}(T)$ и $C(T)$:
1 — эксперимент; 2 — эксперимент;
3 — эксперимент

— в перпендикулярном основным волокнам направлении (в направлении оси y). Полученные в разных экспериментах результаты удовлетворительно согласуются.

Наглядной характеристикой степени достоверности полученных результатов решения задачи могут служить величины отклонения заданных температур (измеряемых в физическом эксперименте) в определенных точках образца от расчетных температур в тех же точках при восстановленных теплофизических характеристиках исследуемого материала. В связи с этим значительный интерес представляют три серии графиков на рис. 4, где иллюстрируются отклонения результатов расчета температур в пяти внутренних точках образца при восстановленных с помощью разработанного алгоритма теплофизических характеристиках материала от измеряемых на тепловом стенде в первом, втором и третьем экспериментах. При этом расчет температур осуществлялся при том же законе изменения по времени функции $I(\tau)$, что и в экспериментах, и при совпадении начальных и граничных условий. Из графиков следует, что величины отклонений расчетных температур от регистрируемых во всех трех экспериментах при восстановленных теплофизических характеристиках материала по модулю практически не превышают 2°C . Это дает основание считать разработанный алгоритм восстановле-

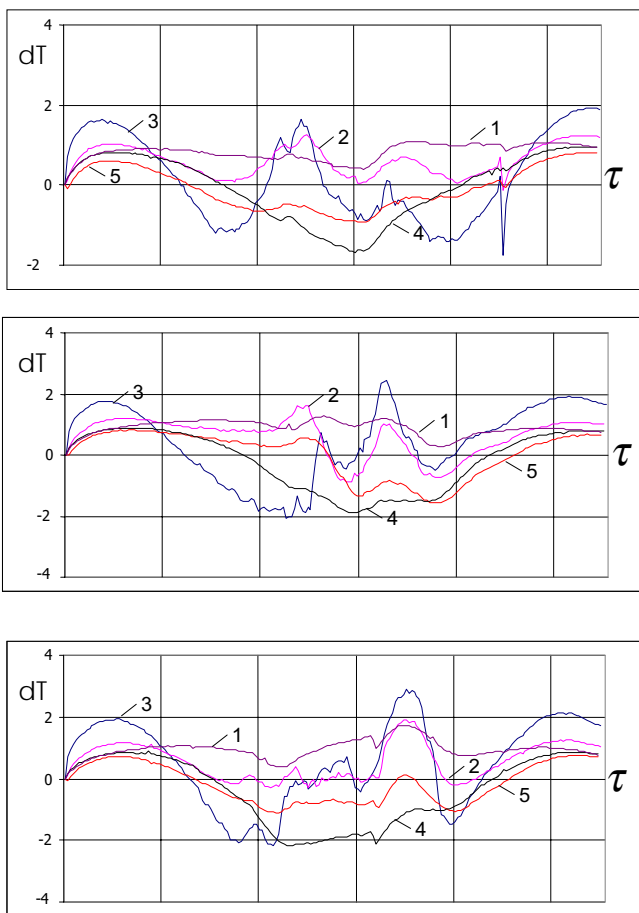


Рис. 4. Отклонения расчётных температур при выявленных значениях искомым функций от измеряемых в трех экспериментах в пяти внутренних точках образца материала

ния теплофизических характеристик материалов достаточно эффективным, и полученные результаты по зависимости теплофизических характеристик материала от температуры можно использовать для целей математического моделирования тепловых процессов в материалах и конструкциях.

Выводы

Разработанные авторами методика и алгоритм решения обратной задачи определения элементов тензора теплопроводности и объемной теплоемкости анизотропных в отношении тепловой проводимости материалов апробированы в процессе решения задачи восстановления теплофизических характеристик конструкционного ортотропного материала по результатам измерений температуры в определенных точках образца и результатам измерения подводимой к центральной области образца тепловой мощности.

Библиографический список

1. Алифанов О.М. Обратные задачи теплообмена. — М.: Машиностроение, 1988.
2. Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В. Экстремальные методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1988.
3. Алифанов О.М., Михайлов В.В. Решение нелинейной обратной задачи теплопроводности итерационным методом // ИФЖ. 1978. Т. XXXV. №6. С. 1123-1128.
4. Артюхин Е.А. Восстановление температурной зависимости коэффициента теплопроводности из решения обратной задачи // ТВТ. 1981. Т.19. №5. С. 963-967.
5. Карслоу У., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. — М.: Наука, 1964.
6. R. Abou Khachfe, J. L. Bailleul, Y. Jarny. The simultaneous determination of thermal conductivity and heat capacity within an orthotropic medium by using conjugate gradient algorithm. 16 th IMACS World Congress (2000 IMACS)
7. Alifanov O.M., Jarny Y., Prosuntsov P.V. Complex identification of thermophysical properties of anisotropic composite material. Proceedings of 5th International Conference Inverse Problems: Theory and Practice (Cambridge, UK, July 11-15, 2005). Vol.III.- Leeds University Press, 2005, pp.A04.1-A04.10.

Московский авиационный институт
Статья поступила в редакцию 20.04.2009