

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение

высшего образования

МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ

(национальный исследовательский университет)

На правах рукописи



Ибрагимов Данис Наилевич

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ ПО
БЫСТРОДЕЙСТВИЮ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ С
ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Специальность 05.13.18

Математическое моделирование, численные методы, комплексы программ

Специальность 05.13.01

Системный анализ, управление и обработка информации

(авиационная и ракетно-космическая техника)

Диссертация на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук,

профессор А. Н. Сиротин

Москва, 2017 год

Оглавление

Введение	4
1 Математическое моделирование и оптимизация по быстродействию линейных автономных бесконечномерных дискретных систем	19
1.1. Постановка задачи	20
1.2. Дополнительные построения	23
1.3. Критерий оптимальности в задаче быстродействия для граничных точек множества 0-управляемости	33
1.4. Оптимальное управление для внутренних точек множеств 0-управляемости	39
1.5. Модельные примеры	44
1.6. Выводы по главе 1	52
2 Математическое моделирование и оптимизация по быстродействию линейных неавтономных конечномерных дискретных систем	54
2.1. Постановка задачи	54
2.2. Дополнительные построения	56
2.3. Критерий оптимальности в задаче быстродействия	61
2.4. Случай множества допустимых значений управлений в форме эллипсоида	66
2.5. Задача оптимальной по быстродействию коррекции орбиты спутника	68
2.6. Выводы по главе 2	73
3 Алгоритм решения задачи быстродействия для линейной дискретной системы с линейными ограничениями	75
3.1. Обоснование алгоритма	75
3.2. Алгоритм решения задачи быстродействия в случае линейных ограничений	81
3.3. Модификация алгоритма для случая скалярного управления	82
3.4. Метод сведения решения задачи быстродействия для системы с выпуклым множеством допустимых значений управлений к случаю линейных ограничений	86
3.5. Оптимальное по быстродействию демпфирование высотного сооружения	95

3.6. Выводы по главе 3	99
4 Комплекс программ для решения задачи быстрогодействия	101
4.1. Описание комплекса программ	101
4.2. Задача наискорейшей ликвидации углового отклонения тела, подвешенного на струне	103
4.3. Выводы по главе 4	104
Заключение	106
Список литературы	108

Введение

Исторически развитие теории оптимального управления начиналось с изучения динамических систем с непрерывным временем. Данные задачи были тесно связаны с задачами вариационного исчисления, став их логическим продолжением. Первые публикации по этой тематике выполнили Охоцимский Д.Е., Энеев Т.М., Шатровский Л.И., Брайсон А., Денхем В., Миеле А., Келли Г. [15, 56, 76, 77]. Все последующие методы решения задач оптимального управления для систем с непрерывным временем базировались на принципе максимума Понтрягина Л.С. [59], который определил необходимые условия оптимальности. На его основе были разработаны прямые методы [55], основанные на спуске в пространстве управлений, методы основанные на вариациях в пространстве состояний [42, 43, 82, 83].

В монографии Моисеева Н.Н. [51], посвященной численным методам оптимального управления, впервые предлагается иной подход, основанный на методах нелинейного программирования, который впоследствии был развит в работах Гноевского Л.С., Ермольева Ю.М., Гуленко В.П., Мельца И.О., Пропоа А.И., Пшеничного Б.Н., Евтушенко Ю.Г. [19, 21–23, 48, 49, 60–62, 64, 65, 72]. Такой подход оказался эффективным по ряду причин: с его помощью удалось обосновать некоторые, предложенные ранее, эвристические алгоритмы, возникла возможность их обобщения; методы нелинейного программирования позволили решать сложные задачи оптимального управления со смешанными ограничениями.

Главным препятствием при построении соответствующих методов решения задач оптимального управления для систем с дискретным временем являлось их существенное отличие от непрерывных систем. В то время, как задача оптимального управления для непрерывного времени представляет собой задачу вариационного исчисления, в дискретном случае она является задачей нелинейного программирования большой размерности, что определяет принци-

ально иной набор средств её решения, необходимых и достаточных условий оптимальности (в частности теорема Куна-Таккера). Также траектория системы в дискретном случае представляет собой последовательность векторов состояния в отличие от непрерывного времени, где траектория является непрерывной функцией. Для линейных систем не всегда удается перейти к обратному времени в дискретном случае, что обусловлено возможной вырожденностью оператора системы управления, в непрерывном случае такой проблемы не возникает, так как фундаментальная матрица системы дифференциальных уравнений, описывающих динамику, является невырожденной в любой момент времени.

Таким образом, в непрерывном случае принцип максимума как основной инструмент решения задач оптимального управления получил широкое освещение и развитие в различных монографиях Понтрягина Л.С., Болтянского В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф., Евтушенко Ю.Г., Табака Д., Куо Б. [11, 21, 59, 72] и большом количестве статей, например, работы Анорова В.П., Бережинского Т.А., Волина Ю.М., Островского Г.М., Первозванского А.А., Розоноэра Л.И., Харатишвили Г.Л., Berkovitz L.D. [4, 14, 55, 57, 67, 68, 73, 82, 83]. При этом существуют различные подходы к доказательству принципа максимума, как к необходимым условиям оптимальности экстремали в задаче вариационного исчисления: на основе метода множителей Лагранжа, множеств управляемости, метода игольчатых вариаций, уравнений Гамильтона-Якоби-Беллмана. Для дискретных же систем известен единственный подход к доказательству принципа максимума, который фактически является необходимым условием экстремума задачи нелинейного программирования, – на основе метода множителей Лагранжа. Основные результаты представлены в сравнительно небольшом числе монографий и публикаций [12, 17, 18, 60–63, 75, 78, 84–86, 94, 99–106, 115, 116] следующих авторов: Болтянский В.Г., Габасов Р., Кириллова Ф.М., Пропой А.И., Цыпкин Я.З., Яковлев В.М., Fisher M.E., Gayek J.E., Katz S., Pearson J.D., Halkin H., Holtzman J.M., Horn F., Jackson R., Chang S.S.L.

Принцип максимума в дискретном случае имеет ряд специфических особенностей, осложняющих его практическое применение: в отличие от непре-

рывного времени, гамильтониан на оптимальной траектории для автономных систем не является постоянным по времени и не равняется нулю для систем с нефиксированным временем (соответствующий факт продемонстрирован в [63]), сопряженная система в общем случае строится в обратном времени (т.е. каждый k -й вектор состояния сопряженной системы определяется как функция от $(k + 1)$ -го вектора), переход к которому может быть затруднен в случае вырожденности оператора системы.

Также на данный момент известны следующие современные исследования в разделе дискретного принципа максимума [79,112,117,120,121] следующих авторов: Ait Rami M., Chen X., Zhou X. Y., Wang G., Yu Z., Wu Z., Lin X. Zhang W., Peng S., связанные с его применением для линейных стохастических систем.

Среди задач оптимального управления для дискретных систем выделяется задача быстродействия. Хотя для решения задач оптимального управления с критерием в виде сумм дискретный принцип максимума работает корректно, при решении задачи быстродействия возникают сложности: в методе множителей Лагранжа все множители одновременно могут обращаться в нуль, что приводит к нерегулярности экстремума. Функционал качества, который является временем работы системы, может принимать значения только из множества неотрицательных целых чисел, то есть фактически является дискретным, что приводит к отсутствию его непрерывности по управлению и, как следствие, отсутствию непрерывности функции Лагранжа. Оптимальное управление, в отличие от линейно-квадратичных задач оптимального управления, не единственно. Если начальное состояние системы является внутренней точкой множества 0-управляемости – множества тех начальных состояний, из которых можно перевести систему в начало координат за фиксированное число шагов, то принцип максимума приобретает вырожденный характер, т.е. управление в этом случае оптимально в задаче быстродействия тогда и только тогда, когда все векторы сопряженной системы тождественно равны нулю. Как следствие, оказывается невозможным определить оптимальное управление из условия максимума гамильтониана, т.к. он постоянен на всём множестве допусти-

мых значений управлений. Качественные исследования задачи быстродействия для дискретных систем были проведены в работах Морозова И.И., Desoer С.А., Lin W.S. [53, 88–90, 111].

Метод динамического программирования [8] позволяет решить задачу быстродействия для дискретных систем. Однако в силу сложности построения функции Беллмана, которая фактически является минимальным числом шагов, за которое возможно перевести систему в начало координат из текущего состояния посредством выбора допустимого управления (значение функции Беллмана можно вычислить путем последовательного построения множеств 0-управляемости до тех пор, пока текущее состояние системы не будет принадлежать очередному множеству), его применение сводится к направленному перебору возможных траекторий системы до тех пор, пока последующее состояние не будет принадлежать множеству 0-управляемости за число шагов на единицу меньше. Решение на основе принципа максимума является более удобным с аналитической точки зрения.

В рамках работы изложен подход к решению задачи быстродействия для линейной дискретной системы на основе принципа максимума. Предложены условия, при которых он оказывается корректным. Полученные результаты обобщены на случай бесконечномерных систем. Доказательство принципа максимума при этом основывается на идее существования единственного разложения граничных точек алгебраической суммы строго выпуклых множеств. Характерной особенностью такого подхода является отсутствие его аналога для систем с непрерывным временем. Результаты работы имеют ряд принципиальных отличий от материалов приведенных выше. В [53, 88–90, 94, 111] исследуются только системы с одномерным множеством допустимых значений управлений, в работах, посвященных дискретному принципу максимума, как правило множество допустимых значений управлений предполагается некоторого специального вида: многогранник или эллипсоид. В свою очередь в данной работе подход к решению задачи быстродействия сформулирован в виде принципа максимума для произвольного строго выпуклого множества допустимых значе-

ний управлений, фазовое пространство динамической системы предполагается произвольной размерности (в том числе бесконечной), что, насколько известно автору, не было опубликовано до сих пор ни в одной работе.

Для реализации численных процедур решения задачи быстродействия в конечномерном случае для произвольного выпуклого компактного множества допустимых значений управлений также рассмотрены алгоритмы полиэдральной аппроксимации множеств управляемости и достижимости. Существует большое число различных методов полиэдральной аппроксимации выпуклых компактных множеств, представленных, например, в работах [13, 92, 95–98, 113, 114, 118]. Схожие алгоритмы рассматривались в большом количестве статей, связанных с аппроксимацией множеств достижимости, среди которых стоит выделить работы Костоусовой Е.К., Куржанского А.Ф. Fisher M.E., Gayek J.E. [40, 94, 109]. Сравнительный анализ различных методов полиэдральной аппроксимации, их эффективности и свойств представлен в [37]. Однако их применение для решения задачи быстродействия для линейной дискретной системы неизвестно.

Объектом исследования являются линейные дискретные системы управления с ограниченным управлением. **Предметом исследования** является оптимальное по быстродействию управление такими системами.

Цель и задачи работы. Целью диссертационной работы является исследование свойств и разработка методов и алгоритмов для решения задач быстродействия для линейных дискретных систем с ограниченным управлением.

Для достижения поставленной цели решены следующие задачи:

1) исследован класс математических моделей линейных дискретных неавтономных систем с конечномерным вектором состояния и строго выпуклым множеством допустимых значений управлений;

2) формализован и исследован новый класс математических моделей линейных дискретных автономных систем с бесконечномерным вектором состояния и строго выпуклым множеством допустимых значений управлений, в каж-

дой граничной точке которого нормальный конус представляет собой одномерное множество;

3) сформулированы и доказаны в виде принципа максимума достаточные условия оптимальности управления в задаче быстродействия для линейных дискретных автономных систем с бесконечномерным вектором состояния и строго выпуклым множеством допустимых значений управлений, в каждой граничной точке которого нормальный конус представляет собой одномерное множество;

4) сформулированы и доказаны в виде принципа максимума достаточные условия оптимальности управления в задаче быстродействия для линейных дискретных неавтономных систем с конечномерным вектором состояния и строго выпуклым множеством допустимых значений управлений;

5) разработан численный метод решения задачи быстродействия для линейных дискретных автономных систем с конечномерным вектором состояния и линейными ограничениями на управление;

6) разработан комплекс программ, реализующих эти численные методы;

7) при помощи полученных результатов решен ряд модельных примеров и прикладных задач оптимального управления.

Методы исследования. Для решения поставленных задач используются методы математического моделирования, теории оптимального управления, выпуклого анализа, функционального анализа, в частности: принцип максимума, методы теории линейных операторов. Для разработки комплекса программ, реализующего алгоритмы решения исследуемых задач, и для проведения вычислительных экспериментов используются компьютерные технологии.

Достоверность результатов обеспечивается строгостью математических формулировок и доказательств утверждений, подтверждением полученных теоретических результатов численными экспериментами.

Научная новизна. Полученные в диссертационной работе результаты по оптимальному управлению дискретными системами являются новыми, в частности, сформулированы и доказаны условия оптимальности управления в виде

принципа максимума в задаче быстрогодействия для автономных и неавтономных систем со строго выпуклым множеством допустимых значений управлений, разработан алгоритм, позволяющий построить оптимальное управление в случае линейных ограничений, предложена модификация алгоритма на случай скалярного управления и произвольного выпуклого компактного множества допустимых значений управлений.

Практическая ценность. Результаты исследования могут быть использованы при проектировании систем демпфирования, систем управления движением летательных аппаратов, они позволяют находить решения задач оптимального дискретного управления на основе научного подхода. также они могут быть использованы в учебном процессе.

Структура и объём диссертации. Диссертация содержит введение, 4 главы, заключение и список используемой литературы. Работа состоит из 119 страниц, включая 6 рисунков, 5 таблиц и список литературы, содержащий 121 наименование.

Содержание диссертации

Во введении дан подробный обзор имеющихся работ по выбранной теме диссертационного исследования и смежным темам, сформулирована цель работы, аргументирована её научная новизна и практическая ценность, а также в сжатом виде изложено содержание глав диссертации.

В первой главе сформулирована постановка задачи в общем виде: построение оптимального по быстроддействию процесса управления линейной дискретной системой с ограниченным управлением. Решение поставленной задачи осуществляется посредством класса множеств 0-управляемости, где каждое множество 0-управляемости за N шагов состоит из тех и только из тех начальных состояний системы, из которых она может быть переведена в 0 за N шагов. Данный класс множеств позволяет конструктивно сформулировать критерий оптимальности управления в решаемой задаче быстрогодействия: управление оптимально тогда и только тогда, когда переводит систему в множество 0-управляемости за число шагов меньшее на 1. Также рассмотрены основные

свойства класса множеств 0-управляемости. Построено описание множества 0-управляемости за произвольное число шагов в явном виде: оно представляет собой алгебраическую сумму различных линейных преобразований множества допустимых значений управлений.

Рассмотрена линейная дискретная система управления с бесконечномерным вектором состояния и строго выпуклым слабо компактным множеством допустимых значений управлений, каждой граничной точке которого соответствует одномерный нормальный конус. Доказано, что предложенный класс множеств является замкнутым относительно линейных преобразований и сложения по Минковскому; данный факт гарантирует, что каждое множество 0-управляемости также будет принадлежать выбранному классу. Сформулировано и доказано утверждение о том, что граничная точка суммы двух множеств допускает единственное разложение на элементы слагаемых множеств. Причем элементы разложения являются граничными точками для своих множеств и имеют одинаковые нормальные конусы.

Данное свойство позволяет утверждать, что если начальное состояние системы принадлежит границе множества 0-управляемости, то оптимальная траектория единственна и проходит по точкам также граничным для соответствующих множеств 0-управляемости. Управление также единственно и достигается на границе множества допустимых значений управлений, определяемой посредством нормального конуса. Таким образом, критерий оптимальности управления сформулирован в виде принципа максимума, построены рекуррентные соотношения для сопряженной системы, доказано, что ее начальное состояние является опорным вектором ко множеству 0-управляемости за минимальное число шагов в точке начального состояния.

Описанный подход не может быть обобщен для случая, когда начальное состояние является внутренней точкой, так как в этом случае нормальный конус не определен. Тем не менее рекуррентные соотношения, аналогичные принципу максимума, могут быть записаны и для случая внутренней точки, но новой информации они не дают, поскольку справедливы лишь в том слу-

чае, когда начальное состояние и, следовательно, вся траектория сопряженной системы состоит из нулевых функционалов. Более того, доказано, что оптимальное управление не будет единственным, а множество всех оптимальных траекторий обладает мощностью не меньшей, чем мощность континуума.

Также в первой главе разработан метод, позволяющий свести случай внутренней точки к разрешенному случаю граничной точки. Данный подход основан на пропорциональном сжатию множества допустимых значений управлений до тех пор, пока начальное состояние не окажется на границе множества 0-управляемости новой системы.

Для демонстрации эффективности разработанных методов решены задачи быстрогодействия для нескольких бесконечномерных дискретных систем.

Во второй главе изложено обобщение методов и утверждений, предложенных в первой главе на случай, когда рассматриваемая система управления не является стационарной, то есть линейный оператор системы и множество допустимых значений управлений зависят от номера текущего шага. Предполагается, что на каждом шаге линейный оператор является невырожденным, а множество допустимых значений управлений компактно, строго выпукло и содержит 0 в качестве своей внутренней точки. Класс множеств 0-управляемости в этом случае определяется значениями двух параметров: числом шагов N , за которое систему требуется перевести в начало координат, и значением текущего шага k . Доказано, что при фиксированном значении текущего шага k последовательность множеств 0-управляемости является возрастающей по N . Для каждого натурального значения N и k множество 0-управляемости допускает разложение на алгебраическую сумму различных линейных преобразований множества допустимых значений управлений.

В отличие от первой главы не рассматривается ограничение на множество допустимых значений управлений, связанное с единичной размерностью нормального конуса для каждой граничной точки. Тем не менее класс строго выпуклых компактов также является замкнутым относительно операции сложения по Минковскому и линейных преобразований. При этом каждая гранич-

ная точка суммы двух множеств допускает единственное разложение на элементы слагаемых множеств. Причем элементы разложения являются граничными точками для своих множеств и пересечение их нормальных конусов образует нормальный конус для суммы.

Данный факт позволяет по аналогии с первой главой сформулировать условия оптимальности процесса управления для начальных состояний, расположенных на границе множества θ -управляемости, в виде принципа максимума и доказать, что процесс будет оптимальным в задаче быстрогодействия тогда и только тогда, когда начальное состояние сопряженной системы принадлежит нормальному конусу к множеству θ -управляемости в начальном состоянии.

В случае, когда начальное состояние является внутренней точкой множества θ -управляемости, принцип максимума приобретает вырожденный характер и не позволяет вычислить оптимальное управление. Тем не менее метод сведения данного случая к уже решенному, описанный в первой главе, удастся применить и для нестационарной системы, что позволяет определить оптимальный процесс для любого начального состояния исходной системы.

Для случая, когда на каждом шаге множество допустимых значений управлений является эллипсоидом, то есть множеством уровня некоторой положительно определенной квадратичной формы, удастся построить общий вид оптимального управления в явном виде. Данный факт обусловлен тем, что возможно явно описать нормальный конус для каждой граничной точки эллипсоида. Также составлена система алгебраических уравнений, единственным решением которой является начальное состояние сопряженной системы.

Разработана детерминированная дискретная модель движения спутника по околокруговой орбите. Предполагается, что спутник оснащен импульсными двигателями малой тяги. Требуется за минимальное время произвести коррекцию орбиты спутника. Доказано, что рассматриваемая задача является задачей быстрогодействия для линейной дискретной трехмерной нестационарной системы со строго выпуклым компактным множеством допустимых значений управлений. Посредством разработанных методов для заданного начального состояния

вычислено оптимальное управление и построена оптимальная траектория.

В третьей главе рассмотрено решение задачи быстродействия для линейной дискретной системы управления с конечномерным вектором состояния и линейными ограничениями на управление. Предполагается, что матрица системы невырождена, а множество допустимых значений управлений представляет собой выпуклый многогранник. Как продемонстрировано в [69] класс многогранников является замкнутым относительно линейных преобразований и сложения множеств по Минковскому. Это гарантирует, что множество θ -управляемости за произвольное число шагов также является многогранником и может быть описано в виде выпуклой оболочки своих крайних точек, для построения которой могут быть применены различные алгоритмы [80].

При помощи критерия принадлежности точки многограннику, сформулированного при помощи функционала Минковского и сводящегося к решению задачи линейного программирования, доказан критерий оптимальности управления в задаче быстродействия в рассмотренном случае. Таким образом, в случае линейных ограничений на управление в исходной системе решение задачи быстродействия сводится к решению ряда задач линейного программирования.

На основе сформулированных и доказанных утверждений разработан алгоритм решения задачи быстродействия для линейной автономной дискретной системы с конечномерным вектором состояния и линейными ограничениями на управление, который может быть эффективно реализован в виде программного комплекса

Отдельно рассмотрен случай, когда множество допустимых значений управлений одномерно, то есть является отрезком. Этот случай характерен тем, что удаётся в явном виде указать оптимальное позиционное управление. Данный факт оказывается возможным в связи с тем, что множество достижимости представляет собой отрезок, и его пересечение с множеством θ -управляемости также является отрезком, границы которого легко могут быть определены в ходе решения ряда систем линейных алгебраических уравнений, если использовать описание множества θ -управляемости в виде полиэдра.

В случае, когда множество допустимых значений управлений является произвольным выпуклым компактом, на основе алгоритма полиэдральной аппроксимации [16, 70] разработан метод сведения исходной задачи быстродействия к рассмотренному случаю линейных ограничений. Данный метод базируется на замене исходного множества допустимых значений управлений на вписанный в него многогранник. Сходимость алгоритма полиэдральной аппроксимации в смысле метрики Хаусдорфа позволяет добиться произвольной степени точности решения поставленной задачи.

Для демонстрации разработанных алгоритмов и методов производится решение задачи демпфирования высотного сооружения, расположенного в зоне сейсмической активности. Сейсмические возмущения вызывают колебания сооружения, приводящие к потере его устойчивости и, в конечном счете, к его разрушению. В этой связи возникает задача гашения колебаний сооружения посредством дополнительно прикладываемых сил, реализуемых при помощи создания специального этажа с размещением на нем некоторой достаточно малой массы (по сравнению с общей массой сооружения), перемещаемой в соответствии с законом управления в форме обратной связи по текущим показаниям датчиков, что позволяет оказывать управляющее воздействие на данный этаж. На основе модели, предложенной в [5], строится дискретная модель рассматриваемой системы, для которой решается соответствующая задача быстродействия.

Четвертая глава посвящена описанию комплекса программ, реализующего алгоритм, разработанный в главе 3.

Для демонстрации эффективности работы программного комплекса решается задача наискорейшей ликвидации углового отклонения тела, подвешенного на упругой струне и способного совершать вращательные движения. На основе модели, описанной в [36], разработана дискретная модель управления угловым вращением тела. Управление осуществляется посредством вентиляторных двигателей. Требуется ориентировать объект по заданному направлению за минимальное время. Построенная математическая модель является двумер-

ной линейной дискретной системой со скалярным управлением, что позволяет применить для решения задачи быстрогодействия разработанный программный комплекс.

В заключении приведены основные научные результаты, полученные автором работы.

Соответствие диссертации паспорту научной специальности. Исследованы математические модели линейных дискретных систем с ограниченным управлением (**область исследования 2 специальности 05.13.18**). Для линейных дискретных систем с конечномерным вектором состояния в случае линейных ограничений на управление разработан новый численный метод решения задачи быстрогодействия, реализованный в виде комплекса программ (**область исследования 4 специальности 05.13.18**). Сформулирован и доказан критерий оптимальности управления в задаче быстрогодействия для линейной бесконечномерной дискретной автономной системы со строго выпуклым множеством допустимых значений управлений (**области исследования 1, 4 специальности 05.13.01**). Сформулирован и доказан критерий оптимальности управления в задаче быстрогодействия для линейной конечномерной дискретной неавтономной системы со строго выпуклым множеством допустимых значений управлений (**области исследования 1, 4 специальности 05.13.01**).

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на следующих научных конференциях:

- 1) московская молодежная научно-практическая конференция «Инновации в авиации и космонавтике» (Москва, 2013);
- 2) 13-я международная конференция «Авиация и космонавтика» (Москва, 2014);
- 3) 14-я международная конференция «Авиация и космонавтика» (Москва, 2014);
- 4) XX международная научная конференция «Системный анализ, управление и навигация» (Евпатория, 2015);
- 5) Международная конференция по математической теории управления

и механике (Суздаль, 2015);

6) Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль, 2016).

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 11 работах, из которых 5 опубликованы в журналах, рекомендованных ВАК [24–28], в том числе 2 опубликованы в журналах, цитируемых международной базой Web of Science [24, 25], и 6 из которых опубликованы в тезисах докладов [29–34]. Разработан и зарегистрирован комплекс программ [35].

Личный вклад. Автором на основе класса множеств 0-управляемости построен алгоритм решения задачи 0-управляемости для линейной дискретной системы с линейными ограничениями на управление, а также алгоритм сведения к рассмотренному случаю случая произвольного выпуклого компактного множества допустимых значений управлений. В виде программного комплекса на языке C++ автором реализован разработанный алгоритм, проведены вычислительные эксперименты и анализ полученных результатов. Совместно с Сиротиным А.Н. построен явный вид оптимального позиционного управления для случая скалярного управления, а также доказаны достаточные условия оптимальности управления для бесконечномерной системы со строго выпуклым множеством допустимых управлений, сформулированные в виде принципа максимума.

В рамках диссертационного исследования принято участие в проекте РФФИ №15-08-01902 «Методы синтеза переключаемых и дискретных систем управления подвижными объектами при ограниченных ресурсах» и в гос. задании №1.1191.201К «Конструктивные методы оценивания и управления непрерывно-дискретными гибридными системами в условиях неопределенности».

Благодарности. Автор выражает глубокую признательность научному руководителю профессору А. Н. Сиротину, заведующему кафедрой «Теория вероятностей и компьютерное моделирование» МАИ профессору А. И. Кибзуну, профессору А. С. Бортаковскому, профессору К. В. Семенихину и профессору В. И. Синицину за ценные комментарии и замечания, а также за другую по-

мощь, оказанную диссертанту в процессе исследований и написания диссертации.

Глава 1. Математическое моделирование и оптимизация по быстродействию линейных автономных бесконечномерных дискретных систем

Целью данной главы является постановка задачи математического моделирования и оптимизации по быстродействию линейных дискретных систем с ограниченным множеством допустимых значений управлений и описание подхода к решению поставленной задачи. Множество допустимых значений управлений предполагается строго выпуклым, что позволяет сформулировать критерий оптимальности управления в виде принципа максимума для общего случая бесконечномерного вектора состояния.

В разделе 1.1. приведена постановка задачи и описан общий подход к её решению. В разделе 1.2. доказаны свойства класса строго выпуклых множеств, на которых основано решение поставленной задачи. В разделе 1.3. в виде принципа максимума сформулирован критерий оптимальности траектории и управления для случая, когда начальное состояние является граничной точкой для одного из множеств 0-управляемости системы управления. В разделе 1.4. продемонстрирована неединственность оптимального управления для случая, когда начальное состояние является внутренней точкой по отношению к множеству 0-управляемости, что приводит к невозможности применять соотношения, сформулированные в разделе 1.3. Также в разделе 1.4. построен метод, позволяющий свести случай внутренней точки к случаю из раздела 1.3. В разделе 1.5. построены математические модели различных систем управления с бесконечномерным вектором состояния, для которых решена задача быстродействия. В разделе 1.6. сформулированы выводы по главе 1.

1.1. Постановка задачи

Рассматривается линейная система управления с дискретным временем (A, \mathcal{U}) и бесконечномерным вектором состояния

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + u(k), \\ x(0) &= x_0, \quad u(k) \in \mathcal{U}, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \end{aligned} \tag{1.1}$$

где $x(k) \in \mathbb{L}$ – вектор состояния системы. Предполагается, что пространство \mathbb{L} является нормированным. $\mathcal{U} \subset \mathbb{L}$ – выпуклое и ограниченное множество допустимых значений управлений, $A: \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{L}$ – линейный и ограниченный оператор.

Допустимым процессом $\{u(k), x(k)\}_{k=0}^N$ системы (A, \mathcal{U}) для $N \in \mathbb{N}$ называется процесс, полученный согласно рекуррентным соотношениям (1.1) и удовлетворяющий условию $x(N) = 0$. Для системы (1.1) решается задача быстрогодействия: для некоторого заданного $x(0) = x_0$ требуется построить допустимый процесс, для которого величина $N_{min} \in \mathbb{N}$, соответствующая условию $x(N_{min}) = 0$, минимальна среди всех допустимых процессов. Т.е. необходимо построить набор допустимых управлений $u^*(0), \dots, u^*(N_{min} - 1) \in \mathcal{U}$, переводящих систему из начального состояния в начало координат за минимальное число шагов N_{min} . Такой набор управлений будем называть оптимальным в задаче быстрогодействия, а полученную совокупность состояний $\{x^*(k)\}_{k=1}^{N_{min}}$ системы (A, \mathcal{U}) на основе выбора на каждом шаге $k = \overline{0, N_{min}}$ в качестве управляющего воздействия оптимального управления – оптимальной траекторией.

Определим семейство множеств 0-управляемости $\{\mathcal{X}(N)\}_{N=0}^{\infty}$, где $\mathcal{X}(N)$ представляет собой множество начальных состояний системы (1.1), для которых существует допустимый процесс, переводящий систему в начало координат за N шагов

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(N) &= \{x_0 \in \mathbb{L}: \exists u(0), \dots, u(N-1) \in \mathcal{U}: x(N) = 0\}, \quad N \in \mathbb{N}, \\ \mathcal{X}(0) &= \{0\}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Тогда условие $N_{min} < \infty$ можно представить в виде

$$x_0 \in \bigcup_{N=0}^{\infty} \mathcal{X}(N).$$

При помощи класса множеств 0-управляемости можно вычислить оптимальное значение критерия качества в задаче быстродействия:

$$N_{min} = \min\{N \in \mathbb{N} : x_0 \in \mathcal{X}(N)\}.$$

А также сформулировать критерий оптимальности траектории и управления в следующем виде: набор управлений $u^*(0), \dots, u^*(N_{min} - 1)$ и траектория $\{x^*(k)\}_{k=1}^{N_{min}}$ системы (1.1) оптимальны в задаче быстродействия в том и только в том случае, если для всех $k = \overline{1, N_{min}}$ верно включение

$$x^*(k) \in \mathcal{X}(N_{min} - k).$$

Данное условие позволяет решить задачу быстродействия посредством класса множеств 0-управляемости.

Считается, что линейный оператор A обратим.

ЛЕММА 1.1. Пусть семейство множеств $\{\mathcal{X}(N)\}_{N=0}^{\infty}$ определяется соотношениями (1.2). Тогда справедливо представление

$$\mathcal{X}(N) = \sum_{k=1}^N (-A^{-k}\mathcal{U}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1.1. Согласно (1.2) $x_0 \in \mathcal{X}(N)$ тогда и только тогда, когда найдется набор управлений $u(0), \dots, u(N - 1) \in \mathcal{U}$ таких, что

$$0 = x(N) = Ax(N - 1) + u(N - 1) = \dots = A^N x_0 + A^{N-1}u(0) + \dots + u(N - 1).$$

Таким образом, $x_0 \in \mathcal{X}(N)$ тогда и только тогда, когда найдется набор управлений $u(0), \dots, u(N - 1) \in \mathcal{U}$ таких, что

$$x_0 = - \sum_{k=1}^N A^{-k}u(k - 1).$$

$$\mathcal{X}(N) = \sum_{k=1}^N (-A^{-k}\mathcal{U}).$$

□

СЛЕДСТВИЕ 1.1. Пусть семейство множеств $\{\mathcal{X}(N)\}_{N=0}^{\infty}$ определяется соотношениями (1.2). Тогда справедливы рекуррентные соотношения

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(N+1) &= \mathcal{X}(N) + (-A^{-(N+1)}\mathcal{U}), \\ A\mathcal{X}(N+1) &= \mathcal{X}(N) + (-\mathcal{U}). \end{aligned} \tag{1.3}$$

ЛЕММА 1.2. Пусть семейство множеств $\{\mathcal{X}(N)\}_{N=0}^{\infty}$ определяется соотношениями (1.2). Тогда для произвольного $N \in \mathbb{N}$ включение $\mathcal{X}(N-1) \subset \mathcal{X}(N)$ верно тогда и только тогда, когда $0 \in \mathcal{U}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1.2. Пусть

$$\mathcal{X}(N-1) \subset \mathcal{X}(N), \quad N \in \mathbb{N}.$$

Тогда

$$\{0\} = \mathcal{X}(0) \subset \mathcal{X}(1) = -A^{-1}\mathcal{U}.$$

То есть существует $u \in \mathcal{U}$ такой, что $A^{-1}u = 0$. Откуда в силу невырожденности отображения A следует, что $u = 0$.

Пусть $0 \in \mathcal{U}$, тогда для любого $N \in \mathbb{N}$ и для всех $x_0 \in \mathcal{X}(N-1)$ в силу следствия 1.1 верно включение

$$x_0 = x_0 + A^{-N} \cdot 0 \in \mathcal{X}(N).$$

То есть

$$\mathcal{X}(N-1) \subset \mathcal{X}(N), \quad N \in \mathbb{N}.$$

□

Предположение о том, что последовательность множеств 0-управляемости является вложенной, достаточно естественно, так как может быть истолковано следующим образом: если система может быть переведена из данного начального состояния в ноль за N шагов, то и за большее число шагов тоже может быть переведена. Поэтому в дальнейшем будут рассматриваться только те системы управления (A, \mathcal{U}) , для которых выполнено включение $0 \in \mathcal{U}$.

Лемма 1.1 дает конструктивный подход к описанию множества 0-управляемости за произвольное число шагов, представляющего комбинацию

суммы и линейных преобразований множества допустимых значений управлений. Если выбрать \mathcal{U} из класса множеств замкнутых относительно данных операций, то тем самым можно гарантировать принадлежность множества $\mathcal{X}(N)$ тому же самому классу. Это может значительно упростить задачу аналитического описания множества 0-управляемости.

1.2. Дополнительные построения

Для решения задачи быстрогодействия системы (1.1) введем дополнительные ограничения на класс множеств допустимых значений управлений \mathcal{U} . Для этого рассмотрим некоторые вспомогательные утверждения.

Множество $\mathcal{U} \subset \mathbb{L}$ называется строго выпуклым, если для любых $u^1 \in \mathcal{U}$ и $u^2 \in \mathcal{U}$ и произвольного числа $\lambda \in (0; 1)$ выполняется условие

$$\lambda u^1 + (1 - \lambda)u^2 \in \text{int } \mathcal{U}.$$

Пространство, сопряженное к \mathbb{L} , обозначим через \mathbb{L}^* . Результат действия линейного и ограниченного функционала $p \in \mathbb{L}^*$ на вектор нормированного пространства $x \in \mathbb{L}$ обозначим через (p, x) .

Функционал $p \in \mathbb{L}^* \setminus \{0\}$ называется опорным к множеству \mathcal{U} в точке $u \in \partial\mathcal{U}$, если

$$\mathcal{U} \subset \{x \in \mathbb{L} : (p, x) \leq (p, u)\}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. В дальнейшем будем предполагать, что $0 \in \text{int } \mathcal{U}$. Непустая внутренность \mathcal{U} обусловлена тем, что в общем случае для выпуклых множеств может не существовать внутренних точек. Это приводит к тому, что не для каждой граничной точки можно построить опорный функционал.

Опорной функцией множества \mathcal{U} называется функция, определяемая соотношением

$$s(p, \mathcal{U}) = \sup_{u \in \mathcal{U}} (p, u).$$

Нормальным конусом $\mathcal{N}(u, \mathcal{U}) \subset \mathbb{L}^*$ множества \mathcal{U} в точке $u \in \partial\mathcal{U}$ называется множество, состоящее из всех функционалов, опорных к множеству \mathcal{U} в точке u , т.е.

$$\mathcal{N}(u, \mathcal{U}) = \{p \in \mathbb{L}^* \setminus \{0\} : s(p, \mathcal{U}) \leq (p, u)\}.$$

Выделим класс множеств \mathbb{U}_1 такой, что

$$\mathbb{U}_1 = \{\mathcal{U} \subset \mathbb{L}: \forall u^1, u^2 \in \mathcal{U}, \lambda \in (0;1) \quad \lambda u^1 + (1-\lambda)u^2 \in \text{int } \mathcal{U}; \\ \forall u \in \partial \mathcal{U} \quad \dim \mathcal{N}(u, \mathcal{U}) = 1\}.$$

Другими словами, \mathbb{U}_1 – класс строго выпуклых множеств, в каждой граничной точке которых нормальный конус представляет собой луч (одномерное множество).

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. В дальнейшем будем предполагать, что множество допустимых значений управлений системы (1.1) принадлежит классу \mathbb{U}_1 .

Построим примеры множеств, принадлежащих классу \mathbb{U}_1

ПРИМЕР 1.1. Пусть \mathbb{L} – гильбертово пространство. Тогда согласно [39] \mathbb{L}^* изоморфно \mathbb{L} , т.е. произвольный линейный и ограниченный функционал может быть представлен в виде скалярного произведения на некоторый фиксированный вектор из \mathbb{L} . В связи с этим в рамках данного примера будем называть $A^*: \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{L}$ оператором, сопряженным к линейному и ограниченному оператору $A: \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{L}$, если для двух произвольных векторов $x \in \mathbb{L}$ и $y \in \mathbb{L}$ верно соотношение

$$(x, Ay) = (A^*x, y).$$

Оператор $A: \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{L}$ положительно определен, если для любого $x \in \mathbb{L}$, $x \neq 0$

$$(x, Ax) > 0.$$

Положительно определенный оператор A в гильбертовом пространстве является обратимым [20].

Пусть оператор $H: \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{L}$ положительно определен и является самосопряженным: $H^* = H$. Тогда эллипсоидом называется множество вида

$$\mathcal{U} = \{u \in \mathbb{L}: (u, Hu) \leq 1\}.$$

Справедливо включение

$$\mathcal{U} \in \mathbb{U}_1.$$

ПРИМЕР 1.2. Предположение о существовании скалярного произведения в пространстве \mathbb{L} в примере 1.1 является существенным. Вообще говоря, в произвольном нормированном пространстве такой объект, как шар, являющийся частным случаем эллипсоида, не является элементом класса \mathbb{U}_1 .

Рассмотрим пространство непрерывных на отрезке функций $C([0; 1])$ с нормой, определяемой соотношением

$$\|x\|_{C([0;1])} = \max_{t \in [0;1]} |x(t)|,$$

которое не является евклидовым.

Шар единичного радиуса с центром в нуле определяется соотношением

$$\mathcal{U} = \{u \in C([0; 1]): \|u\|_{C([0;1])} \leq 1\}.$$

Тогда

$$u^1(t) = \min\{1, 2t\} \in \partial\mathcal{U}, \quad u^2(t) = \min\{1, 3t\} \in \partial\mathcal{U}.$$

Причем

$$\max_{t \in [0;1]} \left| \frac{1}{2}u^1(t) + \frac{1}{2}u^2(t) \right| = 1,$$

т.е. $\frac{1}{2}u^1(t) + \frac{1}{2}u^2(t) \in \partial\mathcal{U}$. Следовательно, шар \mathcal{U} не является строго выпуклым множеством, а значит, не принадлежит классу \mathbb{U}_1 .

ПРИМЕР 1.3. Наличие скалярного произведения в \mathbb{L} является достаточным, но не необходимым условием принадлежности шара классу \mathbb{U}_1 .

Рассмотрим класс пространств l_r , где $r \in (1; +\infty)$ [39], которые в общем случае не являются евклидовыми (за исключением гильбертового пространства l_2).

Верно, что множество

$$\mathcal{U} = \{u \in l_r: \|u\|_{l_r} \leq 1\}$$

принадлежит классу \mathbb{U}_1 .

Рассмотрим теперь некоторые свойства класса \mathbb{U}_1 . Обозначим через $\mathcal{S}^* \subset \mathbb{L}^*$ сферу единичного радиуса с центром в нуле в сопряженном пространстве:

$$\mathcal{S}^* = \{p \in \mathbb{L}^*: \|p\|_{\mathbb{L}^*} = 1\}.$$

Тогда по определению класса \mathbb{U}_1 для некоторого фиксированного $\mathcal{U} \in \mathbb{U}_1$ и для каждого $u \in \partial\mathcal{U}$ множество $\mathcal{N}(u, \mathcal{U}) \cap \mathcal{S}^*$ состоит из единственного элемента $p \in \mathbb{L}^*$. Т.е. существует отображение $\pi_{\mathcal{U}}: \partial\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{S}^*$, определяемое соотношением

$$\pi_{\mathcal{U}}(u) = p, \quad p \in \mathcal{N}(u, \mathcal{U}) \cap \mathcal{S}^*.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. В дальнейшем будем предполагать, что множество \mathcal{U} является слабо компактным. Это необходимо для существования отображения, обратного к $\pi_{\mathcal{U}}$, что эквивалентно существованию единственной точки максимума функционала $p \in \mathcal{S}^*$ на \mathcal{U} . Сформулируем данный факт в виде следующей леммы, которая представляет собой следствие слабой теоремы Вейерштрасса [50].

ЛЕММА 1.3. Пусть зафиксировано произвольное $\mathcal{U} \in \mathcal{U}_1$. Тогда существует отображение

$$\pi_{\mathcal{U}}^{-1}: \mathcal{S}^* \rightarrow \partial\mathcal{U},$$

обратное к $\pi_{\mathcal{U}}$.

Для произвольного $p \in \mathcal{S}^*$ значение отображения можно вычислить следующим образом:

$$\pi_{\mathcal{U}}^{-1}(p) = \arg \max_{\tilde{u} \in \partial\mathcal{U}} (p, \tilde{u}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1.3. Зафиксируем произвольный граничный элемент $u \in \partial\mathcal{U}$. Тогда по определению опорного функционала

$$(\pi_{\mathcal{U}}(u), u) = \max_{\tilde{u} \in \mathcal{U}} (\pi_{\mathcal{U}}(u), \tilde{u}),$$

$$u \in \text{Arg} \max_{\tilde{u} \in \mathcal{U}} (\pi_{\mathcal{U}}(u), \tilde{u}).$$

Покажем, что $u \in \mathcal{U}$ является единственной точкой максимума функции $(\pi_{\mathcal{U}}(u), \tilde{u})$.

Обозначим через $x \in \mathbb{L}$ вектор такой, что $(\pi_{\mathcal{U}}(u), x) > 0$. Такой вектор найдется, поскольку функционал $\pi_{\mathcal{U}}(u)$ является линейным и не тождественно равным нулю.

Предположим, что найдется $u' \in \partial\mathcal{U}$ такой, что $u \neq u'$, $(\pi_{\mathcal{U}}(u), u') = s(\pi_{\mathcal{U}}(u), \mathcal{U})$. В силу того, что \mathcal{U} строго выпукло,

$$\frac{1}{2}(u + u') \in \text{int}\mathcal{U},$$

т.е. существует $\varepsilon > 0$ такое, что

$$v = \frac{1}{2}(u' + u) + \varepsilon x \in \mathcal{U}.$$

$$\begin{aligned} (\pi_{\mathcal{U}}(u), v) &= (\pi_{\mathcal{U}}(u), \frac{1}{2}(u + u') + \varepsilon x) = \frac{1}{2}(\pi_{\mathcal{U}}(u), u) + \frac{1}{2}(\pi_{\mathcal{U}}(u), u') + \varepsilon(\pi_{\mathcal{U}}(u), x) = \\ &= s(\pi_{\mathcal{U}}(u), \mathcal{U}) + \varepsilon(\pi_{\mathcal{U}}(u), x) > s(\pi_{\mathcal{U}}(u), \mathcal{U}). \end{aligned}$$

Но по определению опорной функции имеем $(\pi_{\mathcal{U}}(u), v) \leq s(\pi_{\mathcal{U}}(u), \mathcal{U})$. Пришли к противоречию.

Таким образом, существует единственный вектор $u \in \partial\mathcal{U}$ такой, что

$$s(\pi_{\mathcal{U}}(u), \mathcal{U}) = (\pi_{\mathcal{U}}(u), u).$$

Теперь для некоторого $p \in \mathcal{S}^*$ вычислим

$$\pi_{\mathcal{U}}(\arg \max_{\tilde{u} \in \partial\mathcal{U}}(p, \tilde{u})).$$

В силу включения $p \in \mathbb{L}^*$ верно, что p слабо непрерывен, а множество \mathcal{U} слабо компактное, тогда согласно теореме Вейерштрасса максимум выражения (p, \tilde{u}) будет достигнут на некоторой точке $u \in \partial\mathcal{U}$. По определению нормального конуса $p \in \mathcal{N}(u, \mathcal{U})$.

Поскольку $\mathcal{U} \in \mathbb{U}_1$, то найдется такое $\alpha > 0$, что любой функционал $\tilde{p} \in \mathcal{N}(u, \mathcal{U})$ можно представить в виде

$$\tilde{p} = \alpha p.$$

Тогда p является единственным элементом множества $\mathcal{N}(u, \mathcal{U})$, обладающим единичной нормой.

Следовательно,

$$\pi_{\mathcal{U}}(\arg \max_{\tilde{u} \in \partial\mathcal{U}}(p, \tilde{u})) = p.$$

□

Из леммы 1.3 для произвольного $p \in \mathcal{S}^*$ вытекает равенство

$$(p, \pi_{\mathcal{U}}(u)) = s(p, \mathcal{U}).$$

Рассмотрим еще одно важное свойство класса \mathbb{U}_1 – его замкнутость относительно невырожденных линейных преобразований.

ЛЕММА 1.4. Пусть $A: \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{L}$ – линейный ограниченный и обратимый оператор, $\mathcal{U} \in \mathbb{U}_1$. Тогда

- i) $A \partial\mathcal{U} = \partial(A \mathcal{U})$,
- ii) $\mathcal{N}(Au, A \mathcal{U}) = (A^{-1})^* \mathcal{N}(u, \mathcal{U})$,
- iii) $A \mathcal{U} \in \mathbb{U}_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1.4. Пусть $u \in \partial\mathcal{U}$, а p – опорный функционал ко множеству \mathcal{U} в точке u .

i – ii) Покажем, что функционал $(A^{-1})^*p$ является опорным функционалом ко множеству $A\mathcal{U}$ в точке Au . Тем самым покажем, что точка Au является граничной точкой множества $A\mathcal{U}$. Для этого предположим, что найдется точка $u' \in A\mathcal{U}$, отличная от Au , такая что

$$((A^{-1})^*p, Au) < ((A^{-1})^*p, u').$$

Тогда точка $A^{-1}u' \in \mathcal{U}$. При этом верны следующие соотношения:

$$(p, u) = (p, A^{-1}Au) = ((A^{-1})^*p, Au) < ((A^{-1})^*p, u') = (p, A^{-1}u').$$

Что противоречит определению опорного функционала. Таким образом, точка Au – граничная точка множества $A\mathcal{U}$.

iii) В силу биективности невырожденного линейного преобразования будет верно и обратное: если $u' \in \partial(A\mathcal{U})$, то $A^{-1}u' \in \partial\mathcal{U}$. Причем внутренние точки множества \mathcal{U} переводятся посредством невырожденного линейного преобразования во внутренние точки множества $A\mathcal{U}$.

Пусть $u' \in A\mathcal{U}$ и $u'' \in A\mathcal{U}$, $\lambda \in (0; 1)$. Учитывая, что \mathcal{U} – строго выпуклое,

$$A^{-1}(\lambda u' + (1 - \lambda)u'') = \lambda A^{-1}u' + (1 - \lambda)A^{-1}u'' \in \text{int } \mathcal{U}.$$

Следовательно,

$$(\lambda u' + (1 - \lambda)u'') \in \text{int } (A\mathcal{U}),$$

т.е. множество $A\mathcal{U}$ является также строго выпуклым.

Предположим, что существует функционал p' , который является также опорным ко множеству $A\mathcal{U}$ в точке Au и линейно независимым с функционалом $(A^{-1})^*p$. Согласно представлению $A^{-1}(A\mathcal{U})$ функционал A^*p' является опорным ко множеству \mathcal{U} в точке u . Причем функционалы A^*p' и p линейно независимы, что противоречит предположению о том, что $\mathcal{U} \in \mathbb{U}_1$.

Окончательно, $A\mathcal{U} \in \mathbb{U}_1$

□

Исследуем свойства класса множеств \mathbb{U}_1 . Везде далее в этом разделе будем предполагать, что

$$\begin{aligned} \mathcal{X}, \mathcal{U} &\in \mathbb{U}_1, \\ 0 &\in \text{int } \mathcal{X} \cap \text{int } \mathcal{U}, \\ \mathcal{X}, \mathcal{U} &\text{ слабо компактны.} \end{aligned}$$

ЛЕММА 1.5. Пусть $\mathcal{Y} = \mathcal{X} + \mathcal{U}$. Тогда

$$\begin{aligned} i) &\mathcal{Y} \text{ слабо компактно,} \\ ii) &0 \in \text{int } \mathcal{Y}, \\ iii) &\mathcal{Y} \in \mathbb{U}_1. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1.5. *i)* Слабая компактность \mathcal{Y} следует из того факта, что алгебраическая сумма Минковского двух компактных множеств, как показано в [58], также является компактом.

ii) Пусть $x \in \text{int } \mathcal{X}$, $u \in \text{int } \mathcal{U}$. Тогда существуют открытый шар с центром в точке x и радиуса $\varepsilon_1 > 0$ и открытый шар с центром в точке u и радиуса $\varepsilon_2 > 0$ такие, что

$$\begin{aligned} O_{\varepsilon_1}(x) &\subset \text{int } \mathcal{X}, \\ O_{\varepsilon_2}(u) &\subset \text{int } \mathcal{U}, \end{aligned}$$

где через $O_r(x_0) = \{x \in \mathbb{L} : \|x_0 - x\| < r\}$ обозначим открытый шар радиуса r с центром в точке x_0 .

Тогда

$$O_{\min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}}(x + u) \subset O_{\varepsilon_1}(x) + O_{\varepsilon_2}(u) \subset \mathcal{Y}.$$

Т.е. $x + u \in \text{int } \mathcal{Y}$.

Следовательно, $0 \in \text{int } \mathcal{Y}$;

iii) Пусть $y^1, y^2 \in \mathcal{Y}$, $\lambda \in (0; 1)$. Тогда по определению алгебраической суммы Минковского, существуют $x^1, x^2 \in \mathcal{X}$ и $u^1, u^2 \in \mathcal{U}$ такие, что

$$y^1 = x^1 + u^1, \quad y^2 = x^2 + u^2.$$

Поскольку $\mathcal{X}, \mathcal{U} \in \mathbb{U}_1$, то

$$\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2 \in \text{int } \mathcal{X}, \quad \lambda u^1 + (1 - \lambda)u^2 \in \text{int } \mathcal{U}.$$

Следовательно,

$$\lambda y^1 + (1 - \lambda)y^2 = \lambda(x^1 + u^1) + (1 - \lambda)(x^2 + u^2) \in \text{int } \mathcal{Y},$$

т.е. \mathcal{Y} является строго выпуклым.

Предположим, что существуют функционалы $p^1, p^2 \in \mathbb{L}^* \setminus \{0\}$ и вектор $y \in \partial \mathcal{Y}$ такие, что

$$\begin{aligned} \text{cone}\{p^1\} \cap \text{cone}\{p^2\} &= \{0\}, \\ s(p^1, \mathcal{Y}) &= (p^1, y), \quad s(p^2, \mathcal{Y}) = (p^2, y). \end{aligned}$$

По определению алгебраической суммы множеств найдутся $x \in \mathcal{X}$ и $u \in \mathcal{U}$ такие, что $y = x + u$.

Предположим, что p^1 не является опорным функционалом ко множеству \mathcal{X} в точке x , т.е. существует вектор $\tilde{x} \in \partial \mathcal{X}$ такой, что

$$s(p^1, \mathcal{X}) = (p^1, \tilde{x}) > (p^1, x).$$

Однако $\tilde{x} + u \in \mathcal{Y}$,

$$(p^1, \tilde{x} + u) = (p^1, \tilde{x}) + (p^1, u) > (p^1, x) + (p^1, u) = (p^1, y) = s(p^1, \mathcal{Y}).$$

Пришли к противоречию, т.е. p^1 является опорным функционалом множества \mathcal{X} в точке x . Проведя аналогичную цепочку рассуждений для функционала p^2 , получим, что ко множеству \mathcal{X} в точке x существуют два линейно независимых опорных функционала, что невозможно, так как $\mathcal{X} \in \mathbb{U}_1$.

Получаем, $\mathcal{Y} \in \mathbb{U}_1$.

□

ЛЕММА 1.6. Пусть $\mathcal{Y} = \mathcal{X} + \mathcal{U}$, $x^* \in \partial \mathcal{X}$, $u^* \in \partial \mathcal{U}$.

i) Включение $x^* + u^* \in \partial \mathcal{Y}$ справедливо в том и только в том случае, когда

$$\pi_{\mathcal{X}}(x^*) = \pi_{\mathcal{U}}(u^*).$$

ii) если включение $x^* + u^* \in \partial \mathcal{Y}$ верно, то

$$\pi_{\mathcal{X}}(x^*) = \pi_{\mathcal{U}}(u^*) = \pi_{\mathcal{Y}}(x^* + u^*).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1.6. *i)* Пусть $x \in \partial\mathcal{X}$, $u \in \partial\mathcal{U}$ и предположим, что

$$\pi_{\mathcal{U}}(u) = p_u, \quad \pi_{\mathcal{X}}(x) = p_x, \quad p_u \neq p_x.$$

$$\mathcal{N}(x, \mathcal{X}) = \text{cone}\{p_x\} \setminus \{0\},$$

$$\mathcal{N}(u, \mathcal{U}) = \text{cone}\{p_u\} \setminus \{0\},$$

$$\mathcal{N}(u, \mathcal{U}) \cap \mathcal{N}(x, \mathcal{X}) = \emptyset.$$

Зафиксируем произвольный функционал $p \in \mathbb{L}^* \setminus \{0\}$. Для него справедливо неравенства

$$(p, x) \leq s(p, \mathcal{X}),$$

$$(p, u) \leq s(p, \mathcal{U}).$$

Данные неравенства не могут одновременно обращаться в равенства. Действительно, если

$$(p, x) = s(p, \mathcal{X}),$$

$$(p, u) = s(p, \mathcal{U}),$$

то по определению опорного функционала

$$p \in \mathcal{N}(u, \mathcal{U}) \cap \mathcal{N}(x, \mathcal{X}) = \emptyset,$$

что невозможно.

Справедливо неравенство

$$(p, x + u) = (p, x) + (p, u) < \max_{\tilde{x} \in \mathcal{X}}(p, \tilde{x}) + \max_{\tilde{u} \in \mathcal{U}}(p, \tilde{u}) = \max_{\substack{\tilde{x} \in \mathcal{X} \\ \tilde{u} \in \mathcal{U}}}(p, \tilde{x} + \tilde{u}) = \max_{\tilde{y} \in \mathcal{Y}}(p, \tilde{y}).$$

Поэтому не существует функционала $p \in \mathbb{L}^* \setminus \{0\}$, опорного к \mathcal{Y} в точке $x + u$. Тогда $x + u \notin \partial\mathcal{Y}$, и при этом $x + u \in \mathcal{Y}$. Следовательно, $x + u \in \text{int } \mathcal{Y}$.

Предположим, что $x^* \in \partial\mathcal{X}$ и $u^* \in \partial\mathcal{U}$ удовлетворяют условию

$$\pi_{\mathcal{U}}(u^*) = \pi_{\mathcal{X}}(x^*) = p \in \mathcal{S}^*.$$

Т.е.

$$\mathcal{N}(x^*, \mathcal{X}) = \mathcal{N}(u^*, \mathcal{U}) = \text{cone}\{p\} \setminus \{0\}.$$

По определению опорного функционала

$$(p, x^*) = s(p, \mathcal{X}),$$

$$(p, u^*) = s(p, \mathcal{U}).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} (p, x^* + u^*) &= (p, x^*) + (p, u^*) = s(p, \mathcal{X}) + s(p, \mathcal{U}) = \max_{\tilde{x} \in \mathcal{X}} (p, \tilde{x}) + \max_{\tilde{u} \in \mathcal{U}} (p, \tilde{u}) = \\ &= \max_{\substack{\tilde{x} \in \mathcal{X} \\ \tilde{u} \in \mathcal{U}}} ((p, \tilde{x}) + (p, \tilde{u})) = \max_{\substack{\tilde{x} \in \mathcal{X} \\ \tilde{u} \in \mathcal{U}}} (p, \tilde{x} + \tilde{u}) = \max_{\tilde{y} \in \mathcal{Y}} (p, \tilde{y}) = s(p, \mathcal{Y}). \end{aligned}$$

ii) Поскольку p – опорный функционал ко множеству \mathcal{Y} в точке $x^* + u^*$,

то

$$x^* + u^* \in \partial \mathcal{Y},$$

$$\mathcal{N}(x^* + u^*, \mathcal{Y}) = \text{cone}\{p\} \setminus \{0\}.$$

□

ЛЕММА 1.7. Пусть $\mathcal{Y} = \mathcal{X} + \mathcal{U}$. Тогда

i) каждый вектор $y^* \in \partial \mathcal{Y}$ представим единственным образом $y^* = x^* + u^*$, где $x^* \in \partial \mathcal{X}$, $u^* \in \partial \mathcal{U}$;

ii) для любого вектора $x^* \in \partial \mathcal{X}$ существует единственный $u^* \in \partial \mathcal{U}$ такой, что $y^* = x^* + u^* \in \partial \mathcal{Y}$.

iii) $\mathcal{N}(x^*, \mathcal{X}) = \mathcal{N}(u^*, \mathcal{U}) = \mathcal{N}(y^*, \mathcal{Y})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1.7. Поскольку $\mathcal{X}, \mathcal{U}, \mathcal{Y} \in \mathbb{U}_1$, то для каждого множества справедлива лемма 1.3, а значит, определены соответствующие биективные отображения $\pi_{\mathcal{X}}, \pi_{\mathcal{U}}, \pi_{\mathcal{Y}}$.

i) Пусть $y^* \in \partial \mathcal{Y}$, тогда в силу утверждения ii) леммы 1.6 верно представление

$$y^* = \pi_{\mathcal{X}}^{-1}(\pi_{\mathcal{Y}}(y^*)) + \pi_{\mathcal{U}}^{-1}(\pi_{\mathcal{Y}}(y^*)). \quad (1.4)$$

Предположим, что для некоторых $\tilde{x} \in \mathcal{X}$, $\tilde{u} \in \mathcal{U}$, где хотя бы $\tilde{x} \neq \pi_{\mathcal{X}}^{-1}(\pi_{\mathcal{Y}}(y^*))$, вектор $y^* \in \partial \mathcal{Y}$ допускает представление

$$y^* = \tilde{x} + \tilde{u}.$$

Поскольку $y^* \in \partial\mathcal{Y}$, то в силу утверждения *i*) леммы 1.6

$$\pi_{\mathcal{X}}(\tilde{x}) = \pi_{\mathcal{U}}(\tilde{u}) = \pi_{\mathcal{Y}}(y^*).$$

$$\pi_{\mathcal{X}}(\tilde{x}) = \pi_{\mathcal{X}}(\pi_{\mathcal{X}}^{-1}(\pi_{\mathcal{Y}}(y^*))),$$

$$\tilde{x} = \pi_{\mathcal{X}}^{-1}(\pi_{\mathcal{Y}}(y^*)).$$

Получаем противоречие.

Следовательно, $y^* \in \partial\mathcal{Y}$ допускает единственное представление (1.4).

ii) Пусть $x^* \in \partial\mathcal{X}$, тогда в силу леммы 1.6 для любого $u^* \in \partial\mathcal{U}$ включение $x^* + u^* \in \partial\mathcal{Y}$ будет выполнено тогда и только тогда, когда

$$\pi_{\mathcal{U}}(u^*) = \pi_{\mathcal{X}}(x^*).$$

$$u^* = \pi_{\mathcal{U}}^{-1}(\pi_{\mathcal{X}}(x^*)).$$

iii) Если обозначить $y^* = x^* + u^*$, то верно равенство

$$\mathcal{N}(x^*, \mathcal{X}) = \mathcal{N}(u^*, \mathcal{U}) = \mathcal{N}(y^*, \mathcal{Y}).$$

□

1.3. Критерий оптимальности в задаче быстродействия для граничных точек множества 0-управляемости

В этом разделе исследуем свойства оптимальных траекторий системы (1.1) в том случае, когда она удовлетворяет ограничению $\mathcal{U} \in \mathbb{U}_1$, а начальное состояние системы лежит на границе множества 0-управляемости $x_0 \in \partial\mathcal{X}(N_{min})$. Фактически сформулированные далее критерии оптимальности траектории и управления базируются на леммах 1.7 и 1.3. С учетом представления (1.3) лемма 1.7 гарантирует единственность оптимальной траектории и оптимального управления для граничных точек множества 0-управляемости, которые могут быть вычислены при помощи отображения $\pi_{\mathcal{U}}^{-1}$, существование которого гарантирует лемма 1.3.

ТЕОРЕМА 1.1 (КРИТЕРИЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ ТРАЕКТОРИИ). Пусть $x^*(0) = x_0 \in \partial\mathcal{X}(N_{min})$. Траектория $\{x^*(k)\}_{k=0}^{N_{min}}$ оптимальна тогда и только тогда, когда справедливы равенства

- i) $x^*(k) \in \partial\mathcal{X}(N_{min} - k)$, $k = \overline{0, N_{min}}$;
- ii) $\mathcal{N}(x^*(k), \mathcal{X}(N_{min} - k)) = A^* \mathcal{N}(x^*(k+1), \mathcal{X}(N_{min} - k - 1))$, $k = \overline{0, N_{min} - 2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1. Согласно следствию 1.1 справедливо рекуррентное соотношение

$$\mathcal{X}(N+1) = A^{-1}\mathcal{X}(N) + (-A^{-1}\mathcal{U}).$$

Согласно лемме 1.1 $\mathcal{X}(1) = -A^{-1}\mathcal{U}$. Учитывая, что если обратимый оператор A линейный и ограниченный, то оператор A^{-1} также является линейным и ограниченным [39], получим в силу утверждению *iii*) леммы 1.4

$$\mathcal{X}(1) = -A^{-1}\mathcal{U} \in \mathbb{U}_1,$$

$$A^{-1}\mathcal{X}(1) \in \mathbb{U}_1.$$

Предположим, что $\mathcal{X}(N) \in \mathbb{U}_1$, тогда согласно утверждению *ii*) леммы 1.5

$$\mathcal{X}(N+1) = A^{-1}\mathcal{X}(N) + (-A^{-1}\mathcal{U}) \in \mathbb{U}_1.$$

По индукции $\mathcal{X}(N) \in \mathbb{U}_1$ для любого $N \in \mathbb{N}$.

Предположим, что траектория $\{x^*(k)\}_{k=0}^{N_{min}}$ оптимальная, т.е.

$$x^*(k) \in \mathcal{X}(N_{min} - k), \quad k = \overline{0, N_{min}}.$$

Согласно утверждению *i*) леммы 1.7 вектор $x^*(0) \in \partial\mathcal{X}(N_{min})$ допускает единственное представление

$$\begin{aligned} x^*(0) &= x^* + u^*, \\ x^* &\in \partial(A^{-1}\mathcal{X}(N_{min} - 1)), \quad u^* \in \partial(-A^{-1}\mathcal{U}). \end{aligned} \tag{1.5}$$

Обозначим:

$$x^*(1) = Ax^*, \quad u^*(0) = -Au^*.$$

В силу утверждения *i*) леммы 1.4 $x^*(1) \in \partial\mathcal{X}(N_{min} - 1)$ и $u^*(0) \in \partial\mathcal{U}$. Тогда справедливо единственное представление

$$x^*(0) = A^{-1}x^*(1) - A^{-1}u^*(0),$$

или

$$x^*(1) = Ax^*(0) + u^*(0).$$

Согласно утверждению *iii*) леммы 1.7 из (1.5) следует

$$\mathcal{N}(u^*, -A^{-1}\mathcal{U}) = \mathcal{N}(x^*, A^{-1}\mathcal{X}(N_{min} - 1)) = \mathcal{N}(x^*(0), \mathcal{X}(N_{min})).$$

В силу утверждения *ii*) леммы 1.4

$$\mathcal{N}(x^*(0), \mathcal{X}(N_{min})) = \mathcal{N}(A^{-1}x^*(1), A^{-1}\mathcal{X}(N_{min} - 1)) = A^* \mathcal{N}(x^*(1), \mathcal{X}(N_{min} - 1)).$$

Предположим, что $x^*(k) \in \partial\mathcal{X}(N_{min} - k)$. Согласно утверждению *i*) леммы 1.7 точка $x^*(k)$ допускает единственное представление

$$x^*(k) = \tilde{x}^* + \tilde{u}^*,$$

$$\tilde{x}^* \in \partial(A^{-1}\mathcal{X}(N_{min} - k)), \quad \tilde{u}^* \in \partial(-A^{-1}\mathcal{U}).$$

Обозначим:

$$x^*(k+1) = A\tilde{x}^*, \quad u^*(k) = -A\tilde{u}^*.$$

В силу утверждения *i*) леммы 1.4

$$\begin{aligned} x^*(k+1) &\in \partial\mathcal{X}(N_{min} - k - 1), \\ u^*(k) &\in \partial\mathcal{U}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Тогда справедливо единственное представление

$$x^*(k) = A^{-1}x^*(k+1) - A^{-1}u^*(k),$$

$$x^*(k+1) = Ax^*(k) + u^*(k).$$

Согласно утверждению *iii*) леммы 1.7

$$\mathcal{N}(u^*, -A^{-1}\mathcal{U}) = \mathcal{N}(\tilde{x}^*, A^{-1}\mathcal{X}(N_{min} - k - 1)) = \mathcal{N}(x^*(k), \mathcal{X}(N_{min} - k)). \tag{1.7}$$

В силу пункта *ii*) леммы 1.4

$$\mathcal{N}(x^*(k), \mathcal{X}(N_{min}-k)) = \mathcal{N}(A^{-1}x^*(k+1), A^{-1}\mathcal{X}(N_{min}-k-1)) = A^* \mathcal{N}(x^*(k), \mathcal{X}(N_{min}-k-1)).$$

Прямое утверждение теоремы доказано согласно методу математической индукции.

Обратное следует непосредственно из утверждения *i*) и определения оптимальной траектории.

□

СЛЕДСТВИЕ 1.2. Пусть $x^*(0) = x_0 \in \partial\mathcal{X}(N_{min})$. Тогда существует единственная оптимальная траектория $\{x^*(k)\}_{k=0}^{N_{min}}$ в задаче быстрогодействия.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 1.2. Существование оптимальной траектории следует непосредственно из теоремы 1.1. В силу утверждения *i*) леммы 1.7 из (1.5) вытекает единственность.

□

ЛЕММА 1.8. Пусть $x^*(0) \in \partial\mathcal{X}(N_{min})$, а $\{x^*(k)\}_{k=0}^{N_{min}}$ — оптимальная траектория системы (1.1) в задаче быстрогодействия. Пусть также $p(k)$ — опорный функционал ко множеству $\mathcal{X}(k)$ в точке $x^*(N_{min}-k)$, $k = \overline{1, N_{min}}$, т.е.

$$p(k) \in \mathcal{N}(x^*(N_{min}-k), \mathcal{X}(k)), \quad k = \overline{1, N_{min}}.$$

Тогда семейство опорных функционалов $\{p(k)\}_{k=1}^{N_{min}}$ определяется рекуррентными соотношениями

$$\begin{aligned} p(k) &= (A^{-1})^* p(k+1), \quad k = \overline{1, N_{min}-1}, \\ p(N_{min}) &\in \mathcal{N}(x^*(0), \mathcal{X}(N_{min})). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1.8. Как известно [39], для любого линейного и ограниченного оператора A справедливо равенство

$$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*.$$

Тогда согласно утверждению *ii*) теоремы 1.1 для оптимальной траектории для любого $k = \overline{0, N_{min}-2}$ выполнено условие

$$\mathcal{N}(x^*(k+1), \mathcal{X}(N_{min}-k-1)) = (A^{-1})^* \mathcal{N}(x^*(k), \mathcal{X}(N_{min}-k)).$$

Если

$$p(N_{min} - k - 1) \in \mathcal{N}(x^*(k + 1), \mathcal{X}(N_{min} - k - 1)),$$

то

$$p(N_{min} - k - 1) \in (A^{-1})^* \mathcal{N}(x^*(k), \mathcal{X}(N_{min} - k)).$$

И поэтому можно определить

$$p(N_{min} - k - 1) = (A^{-1})^* p(N_{min} - k).$$

Если изменить порядок индексов, то получим непосредственно утверждение леммы

$$p(k) = (A^{-1})^* p(k + 1), \quad k = \overline{1, N_{min} - 1}.$$

□

Определим семейство функционалов $\{\psi(k)\}_{k=0}^{N_{min}-1}$ по формуле

$$\psi(k) = -p(N_{min} - k).$$

Функционалы $\psi(k)$, $k = \overline{0, N_{min} - 1}$ назовем сопряженными функционалами системы (1.1).

ТЕОРЕМА 1.2 (УРАВНЕНИЯ СОПРЯЖЕННОЙ СИСТЕМЫ). Пусть $x^*(0) \in \partial\mathcal{X}(N_{min})$, а $\{x^*(k)\}_{k=0}^{N_{min}}$ – оптимальная траектория системы (1.1) в задаче быстрогодействия. Тогда сопряженные функционалы можно определить исходя из рекуррентных соотношений

$$\begin{aligned} \psi(k + 1) &= (A^{-1})^* \psi(k), \quad k = \overline{0, N_{min} - 2}, \\ &- \psi(0) \in \mathcal{N}(x^*(0), \mathcal{X}(N_{min})). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.2. Утверждение теоремы получается непосредственно в результате замены индексов в лемме 1.8.

□

ТЕОРЕМА 1.3 (ПРИНЦИП МАКСИМУМА). Пусть $x^*(0) \in \partial\mathcal{X}(N_{min})$. Управление $\{u^*(k)\}_{k=0}^{N_{min}-1}$ является оптимальным в задаче быстрогодействия системы (1.1) тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} i) \quad &u^*(k) \in \partial\mathcal{U}, \quad k = \overline{0, N_{min} - 1}, \\ ii) \quad &u^*(k) = \arg \max_{u \in \mathcal{U}} ((A^{-1})^* \psi(k), u). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.3. Как показано в (1.6) для каждого $k = \overline{0, N_{min} - 1}$ верно i).

ii) Согласно (1.7) из утверждения ii) леммы 1.4 вытекает равенство

$$\mathcal{N}(x^*(k), \mathcal{X}(N_{min} - k)) = -A^* \mathcal{N}(u^*(k), \mathcal{U}),$$

и, далее,

$$\mathcal{N}(u^*(k), \mathcal{U}) = -(A^{-1})^* \mathcal{N}(x^*(k), \mathcal{X}(N_{min} - k)).$$

Поэтому

$$-(A^{-1})^* p(N_{min} - k) = (A^{-1})^* \psi(k) \in \mathcal{N}(u^*(k), \mathcal{U}),$$

т.е. функционал $(A^{-1})^* \psi(k)$ является опорным ко множеству \mathcal{U} в точке $u^*(k)$.

Тогда согласно лемме 1.3 $u^*(k)$ может быть найдено в виде

$$u^*(k) = \arg \max_{u \in \mathcal{U}} ((A^{-1})^* \psi(k), u).$$

Докажем обратное утверждение теоремы. Пусть управление $\{u^*(k)\}_{k=0}^{N_{min}-1}$ удовлетворяет i) и ii), тогда согласно теореме 1.1 существует единственная оптимальная траектория $\{x^*(k)\}_{k=0}^{N_{min}}$. Достаточно показать, что для каждого $k = \overline{0, N_{min} - 1}$ выполняется равенство

$$x^*(k+1) = Ax^*(k) + u^*(k),$$

что эквивалентно

$$x^*(k) = A^{-1}x^*(k+1) + (-A^{-1})u^*(k). \quad (1.8)$$

Согласно утверждению i) теоремы 1.1

$$x^*(k) \in \partial \mathcal{X}(N_{min} - k), \quad x^*(k+1) \in \partial \mathcal{X}(N_{min} - k - 1).$$

В силу утверждения i) леммы 1.1

$$A^{-1}x^*(k+1) \in \partial(A^{-1}\mathcal{X}(N_{min} - k - 1)), \quad (-A^{-1})u^*(k) \in \partial(-A^{-1}\mathcal{U}).$$

Исходя из следствия 1.1

$$\mathcal{X}(N_{min} - k) = A^{-1}\mathcal{X}(N_{min} - k - 1) + (-A^{-1}\mathcal{U}).$$

Согласно лемме 1.7 условие (1.8) эквивалентно двум равенствам:

$$\begin{cases} \mathcal{N}(x^*(k), \mathcal{X}(N_{min} - k)) = \mathcal{N}(A^{-1}x^*(k+1), A^{-1}\mathcal{X}(N_{min} - k - 1)), \\ \mathcal{N}(x^*(k), \mathcal{X}(N_{min} - k)) = \mathcal{N}(-A^{-1}u^*(k), -A^{-1}\mathcal{U}). \end{cases} \quad (1.9)$$

Из теоремы 1.2 имеем

$$\begin{aligned} (A^{-1})^*\psi(k) &\in \mathcal{N}(u^*(k), \mathcal{U}), \\ -\psi(k) &\in \mathcal{N}(x^*(k), \mathcal{X}(N_{min} - k)). \end{aligned}$$

Откуда согласно утверждению *ii*) леммы 1.3 для всех $k = \overline{0, N_{min} - 1}$ следует (1.9).

□

СЛЕДСТВИЕ 1.3. Пусть $x^*(0) \in \partial\mathcal{X}(N_{min})$. Тогда существует единственное оптимальное управление $\{u^*(k)\}_{k=0}^{N_{min}-1}$ в задаче быстрогодействия системы (1.1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 1.3. Согласно теореме 1.3 существует оптимальное управление в задаче быстрогодействия. Единственность оптимального управления на каждом шаге следует из пункта *i*) леммы 1.7 и условия (1.6).

□

1.4. Оптимальное управление для внутренних точек множеств 0-управляемости

Рассмотрим случай

$$x_0 \in \text{int } \mathcal{X}(N_{min}) \setminus \mathcal{X}(N_{min} - 1). \quad (1.10)$$

Утверждения, аналогичные теоремам 1.1-1.3, для этого случая не могут быть получены и не состоятельны по причинам принципиального характера. Действительно, доказательства теорем 1.1-1.3 основаны на использовании леммы 1.7. Однако эта лемма оказывается неприменима для внутренних точек, т.е. для рассматриваемого случая (1.10). Более того, оказывается некорректной формулировка теоремы 1.2, поскольку по определению семейство сопряженных функционалов задается граничными точками множеств 0-управляемости. Тем

не менее утверждение теорем 1.2 и 1.3 можно расширить для произвольных $x_0 \in \mathcal{X}(N_{min}) \setminus \mathcal{X}(N_{min} - 1)$, но это не добавляет новой информации.

Пусть $\{\psi(k)\}_{k=0}^{N_{min}-1} \subset \mathbb{L}^*$, $\{u(k)\}_{k=0}^{N_{min}-1} \subset \mathbb{L}$ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \psi(k+1) &= (A^{-1})^* \psi(k), \quad \psi(0) = \psi_0, \\ u(k) &= \arg \max_{u \in \mathcal{U}} ((A^{-1})^* \psi(k), u). \end{aligned} \tag{1.11}$$

ТЕОРЕМА 1.4. *i) Если $x_0 \in \partial\mathcal{X}(N_{min}) \setminus \mathcal{X}(N_{min} - 1)$, то существует единственный конус $\mathcal{N}(x_0, \mathcal{X}(N_{min}))$ такой, что управления, определяемые соотношениями (1.11), оптимальны в задаче быстрогодействия системы (A, \mathcal{U}) тогда и только тогда, когда $-\psi_0 \in \mathcal{N}(x_0, \mathcal{X}(N_{min}))$.*

ii) Если $x_0 \in \text{int } \mathcal{X}(N_{min}) \setminus \mathcal{X}(N_{min} - 1)$, управления в системе (A, \mathcal{U}) определяются соотношениями (1.11), то для любого $\psi_0 \in \mathbb{L}^ \setminus \{0\}$ справедливо $x(N_{min}) \neq 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.4. Пункт *i)* следует непосредственно из теорем 1.2 и 1.3.

ii) Предположим противоположное: существует такое $\psi_0 \in \mathbb{L}^* \setminus \{0\}$, что траектория системы (1.1), построенная по соотношениям (1.11), удовлетворяет условию $x(N_{min}) = 0$. Тогда

$$0 = x(N_{min}) = A^{N_{min}} x_0 + \sum_{k=0}^{N_{min}-1} A^k u(N_{min} - k - 1).$$

Пусть $\tilde{x}_0 = \pi_{\mathcal{X}(N_{min})}^{-1}(\psi_0)$. Согласно лемме 1.3 $\tilde{x}_0 \in \partial\mathcal{X}(N_{min})$, при этом в силу теорем 1.2 и 1.3 управление, построенное исходя из соотношений (1.11), является оптимальным в задаче быстрогодействия для $x(0) = \tilde{x}_0$. Тогда

$$0 = A^{N_{min}} \tilde{x}_0 + \sum_{k=0}^{N_{min}-1} A^k u(N_{min} - k - 1).$$

Следовательно,

$$A^{N_{min}} \tilde{x}_0 = A^{N_{min}} x_0,$$

$$\tilde{x}_0 = x_0.$$

Это невозможно, поскольку точка \tilde{x}_0 является граничной для множества $\mathcal{X}(N_{min})$, а точка x_0 – внутренняя.

□

СЛЕДСТВИЕ 1.4. *Управление, построенное по соотношениям (1.11), является оптимальным в задаче быстрогодействия системы (A, \mathcal{U}) для случая (1.10) тогда и только тогда, когда $\psi_0 = 0$.*

Для случая (1.10) рассмотрим способ построения оптимального управления системой (1.1) в исследуемой задаче быстрогодействия. Покажем, что оно неединственно. Более того, их множество обладает мощностью континуума.

Обозначим:

$$\alpha = \mu(x_0, \mathcal{X}(N_{min})).$$

Рассмотрим новую систему управления (A, \mathcal{U}_α)

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + u(k), \\ x(0) &= x_0, \quad u(k) \in \mathcal{U}_\alpha, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \tag{1.12}$$

где $\mathcal{U}_\alpha = \alpha\mathcal{U}$.

Для системы (1.12) аналогично определим семейство множеств 0-управляемости $\{\mathcal{X}_\alpha(N)\}_{N=0}^\infty$. Поскольку верно включение (1.10), то в силу определения функционала Минковского верно неравенство $\alpha < 1$.

ЛЕММА 1.9. *Для системы управления (A, \mathcal{U}_α) выполнены следующие соотношения:*

- i) $\mathcal{X}_\alpha(N) = \alpha\mathcal{X}(N)$,*
- ii) $\mathcal{X}_\alpha(N) \subset \mathcal{X}(N)$,*
- iii) $x_0 \in \partial\mathcal{X}_\alpha(N_{min})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1.9. *i)* Согласно лемме 1.1 верно представление

$$\mathcal{X}_\alpha(N) = \sum_{k=1}^N (-A^{-k}\mathcal{U}_\alpha) = \sum_{k=1}^N (-\alpha A^{-k}\mathcal{U}) = \alpha \sum_{k=1}^N (-A^{-k}\mathcal{U}) = \alpha \mathcal{X}(N).$$

ii) Поскольку $0 \in \mathcal{X}(N)$, $\mathcal{X}(N)$ выпукло, $\alpha < 1$, то очевидно включение

$$\mathcal{X}_\alpha(N) = \alpha\mathcal{X}(N) \subset \mathcal{X}(N).$$

iii) По определению функционала Минковского $x_0 \in \alpha\mathcal{X}(N_{min}) = \mathcal{X}_\alpha(N_{min})$. Но при этом для любого $\alpha' \in (0; \alpha)$ аналогичное включение неверно. Обозначим через $\varepsilon = \frac{1}{\alpha'} - \frac{1}{\alpha} > 0$, тогда

$$\frac{1}{\alpha}x_0 + \varepsilon x_0 = \frac{1}{\alpha'}x_0 \notin \mathcal{X}(N_{min}),$$

$$x_0 + \varepsilon \alpha x_0 \notin \mathcal{X}_\alpha(N_{min}).$$

Т.е. не существует ни одной окрестности точки x_0 , которая лежала бы полностью внутри $\mathcal{X}_\alpha(N_{min})$. По определению граничной точки $x_0 \in \partial\mathcal{X}(N_{min})$.

□

ТЕОРЕМА 1.5. Пусть траектория $\{x'(k)\}_{k=0}^{N_{min}}$ системы (A, \mathcal{U}_α) определяется по соотношениям

- i) $x'(0) = x_0$,
- ii) $u'(k) = \alpha \arg \max_{u \in \mathcal{U}} ((A^{-1})^* \psi(k), u)$,
- iii) $-\psi(k) \in \mathcal{N}(x'(k), \mathcal{X}_\alpha(N_{min} - k))$,
- iv) $x'(k+1) = Ax'(k) + u'(k)$, $k = \overline{0, N_{min} - 1}$.

Тогда траектория $\{x'(k)\}_{k=0}^{N_{min}}$ и управление $\{u'(k)\}_{k=0}^{N_{min}-1}$ системы (1.1) оптимальны в задаче быстрогодействия.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.5. Утверждение вытекает непосредственно из того факта, что система управления (A, \mathcal{U}_α) в силу леммы 1.9 удовлетворяет условиям принципа максимума для граничных точек, доказанного в теореме 1.3.

□

ЛЕММА 1.10. Пусть точка $x'(0) = x_0$ из условия (1.10), набор управлений $\{u'(k)\}_{k=0}^{N_{min}-1}$ определен согласно теореме 1.5.

Тогда найдется другой набор оптимальных управлений $\{u''(k)\}_{k=0}^{N_{min}-1}$ такой, что при некотором $k \in \{0, \dots, N_{min} - 1\}$ выполнено условие

$$u''(k) \neq u'(k).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1.10. Согласно следствию 1.1 верно представление (1.3) для семейства множеств 0-управляемости. В частности,

$$\mathcal{X}(N_{min}) = A^{-1}\mathcal{X}(N_{min} - 1) + (-A^{-1}\mathcal{U}).$$

Причем $x'(0) = x_0 \in \partial(\alpha\mathcal{X}(N_{min}))$. Тогда согласно утверждению i) леммы 1.7 для $x'(0)$ допустимо представление

$$x'(0) = x' + u', \quad x' \in \partial(\alpha A^{-1}\mathcal{X}(N_{min} - 1)), \quad u' \in \partial(-\alpha A^{-1}\mathcal{U}).$$

Следовательно, по определению функционала Минковского

$$\begin{aligned}\mu(x', A^{-1}\mathcal{X}(N_{min} - 1)) &\leq \alpha < 1, \\ \mu(x', -A^{-1}\mathcal{U}) &\leq \alpha < 1.\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}x' &\in \text{int } A^{-1}\mathcal{X}(N_{min} - 1), \\ u' &\in \text{int } (-A^{-1}\mathcal{U}).\end{aligned}$$

Исходя из утверждения *i*) леммы 1.4 оказываются верны соотношения

$$\begin{aligned}x'(1) &= Ax' \in \text{int } \mathcal{X}(N_{min} - 1), \\ u'(0) &= -Au' \in \text{int } \mathcal{U}, \\ x'(0) &= A^{-1}x' - A^{-1}u', \\ x'(1) &= Ax'(0) + u'(0).\end{aligned}$$

В силу непрерывности отображения $f(u) = Ax'(0) + u$ для произвольного $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для каждого $u''(0) \in O_\delta(u'(0))$ будет выполнено условие

$$x''(1) = f(u''(0)) = Ax'(0) + u''(0) \in O_\varepsilon(x'(1)).$$

Выберем ε так, чтобы

$$O_\delta(u'(0)) \subset \text{int } \mathcal{U}, \quad O_\varepsilon(x'(1)) \subset \text{int } \mathcal{X}(N_{min} - 1).$$

Это возможно в силу того, что $x'(1) \in \text{int } \mathcal{X}(N_{min} - 1)$, $u'(0) \in \text{int } \mathcal{U}$.

Таким образом, найдется некоторое допустимое управление $u''(0) \neq u'(0)$, которое переводило бы систему из $x'(0) \in \mathcal{X}(N_{min})$ в состояние $x''(1) \in \mathcal{X}(N_{min} - 1)$.

□

ЛЕММА 1.11. Пусть точка $x'(0) = x_0$ из условия (1.10), $\{u'(k)\}_{k=0}^{N_{min}-1}$ — набор оптимальных управлений, полученный на основании теоремы 1.5, $\{u''(k)\}_{k=0}^{N_{min}-1}$ — набор оптимальных управлений, полученный на основании леммы 1.10.

Тогда для всех $\lambda \in [0; 1]$ найдется набор управлений $\{u^*(k)\}_{k=0}^{N_{min}-1}$, оптимальных в исходной задаче быстрогодействия системы (A, \mathcal{U}) , такой что

$$u^*(0) = \lambda u'(0) + (1 - \lambda)u''(0).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1.11. Поскольку согласно теореме 1.5 и лемме 1.10 верны включения

$$x'(1) = Ax'(0) + u'(0) \in \mathcal{X}(N_{min} - 1),$$

$$x''(1) = Ax'(0) + u''(0) \in \mathcal{X}(N_{min} - 1),$$

а множество $\mathcal{X}(N_{min} - 1)$ выпукло, то для любых $\lambda \in [0; 1]$

$$\begin{aligned} x^*(1) &= \lambda x'(1) + (1 - \lambda)x''(1) = Ax'(0) + \lambda u'(0) + (1 - \lambda)u''(0) = \\ &= Ax'(0) + u^*(0) \in \mathcal{X}(N_{min} - 1). \end{aligned}$$

Тогда по определению множества 0-управляемости найдется набор управлений $\{u^*(k)\}_{k=1}^{N_{min}-1}$ такой, что траектория системы (A, \mathcal{U}) , построенная согласно соотношениям (1.1), удовлетворяет условию $x^*(N_{min}) = 0$, т.е. является оптимальной.

□

1.5. Модельные примеры

ПРИМЕР 1.4. Рассмотрим систему управления (A_σ, \mathcal{U}) с вектором состояния из пространства l_r , где $r \in (1; +\infty)$, для которой решается задача быстрого действия. В качестве множества допустимых значений управлений выберем шар

$$\mathcal{U} = \{u \in l_r : \|u\|_{l_r} \leq 1\}.$$

Докажем включение $\mathcal{U} \in \mathbb{U}_1$.

Пусть $u^1 \in \mathcal{U}$ и $u^2 \in \mathcal{U}$, $u^1 \neq u^2$, $\lambda \in (0; 1)$. Поскольку последовательности u^1 и u^2 различны, то найдется $i' \in \mathbb{N}$ такое, что $u_{i'}^1 \neq u_{i'}^2$. В силу строгой выпуклости функции $f(t) = |t|^r$ для всех $r > 1$ верно неравенство

$$|\lambda u_{i'}^1 + (1 - \lambda)u_{i'}^2|^r < \lambda |u_{i'}^1|^r + (1 - \lambda)|u_{i'}^2|^r.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|\lambda u^1 + (1 - \lambda)u^2\|_{l_r}^r &= \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda u_i^1 + (1 - \lambda)u_i^2|^r = \\ &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i'}}^{\infty} |\lambda u_i^1 + (1 - \lambda)u_i^2|^r + |\lambda u_{i'}^1 + (1 - \lambda)u_{i'}^2|^r \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i'}}^{\infty} \lambda |u_i^1|^r + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i'}}^{\infty} (1 - \lambda) |u_i^2|^r + |\lambda u_{i'}^1 + (1 - \lambda) u_{i'}^2|^r < \\
 &< \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i'}}^{\infty} \lambda |u_i^1|^r + (1 - \lambda) |u_i^2|^r + \lambda |u_{i'}^1|^r + (1 - \lambda) |u_{i'}^2|^r = \\
 &= \lambda \sum_{i=1}^{\infty} |u_i^1|^r + (1 - \lambda) \sum_{i=1}^{\infty} |u_i^2|^r \leq \lambda + (1 - \lambda) = 1.
 \end{aligned}$$

Таким образом, \mathcal{U} является строго выпуклым множеством.

Как известно [39], пространство l_r^* изоморфно пространству l_q , где $\frac{1}{r} + \frac{1}{q} = 1$, т.е. для любого функционала $p \in l_r^*$ найдется последовательность $\tilde{p} \in l_q$ такая, что для любого $x \in l_r$ верно равенство

$$(p, x) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{p}_i x_i.$$

Построим для каждой граничной точки $u \in \partial \mathcal{U}$ последовательность $\tilde{p}(u)$ по правилу

$$\tilde{p}_i(u) = \text{sign}(u_i) |u_i|^{r-1}.$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\tilde{p}_i(u)|^q = \sum_{i=1}^{\infty} |\text{sign}(u_i) |u_i|^{r-1}|^q = \sum_{i=1}^{\infty} |u_i|^{qr(1-\frac{1}{r})} = \sum_{i=1}^{\infty} |u_i|^r = 1,$$

т.е. $\tilde{p}(u) \in l_q$, следовательно, соответствующий функционал $p(u)$ является линейным и ограниченным. Из неравенства Гельдера следует, что для любого $\tilde{u} \in \mathcal{U}$

$$(p(u), \tilde{u}) \leq \|p(u)\|_{l_r^*} \|\tilde{u}\|_{l_r} = \|\tilde{p}(u)\|_{l_q} \|\tilde{u}\|_{l_r} \leq 1.$$

С другой стороны,

$$(p(u), u) = \sum_{i=1}^{\infty} \text{sign}(u_i) |u_i|^{r-1} u_i = \sum_{i=1}^{\infty} |u_i|^r = \|u\|_{l_r}^r = 1.$$

Тогда по определению функционал $p(u)$ является опорным ко множеству \mathcal{U} в точке u .

Предположим, что найдется функционал $p' \notin \text{cone}\{p(u)\}$ также опорный ко множеству \mathcal{U} в точке u . Для удобства будем полагать, что $\|p'\|_{l_r^*} = 1$. Построим последовательность u' по правилу

$$u'_i = \text{sign}(\tilde{p}'_i) |\tilde{p}'_i|^{q-1},$$

где $\tilde{p}' \in l_q$ – последовательность, порождающая функционал p' .

$$\sum_{i=1}^{\infty} |u'_i|^r = \sum_{i=1}^{\infty} |\text{sign}(\tilde{p}'_i)|\tilde{p}'_i|^{q-1}|^r = \sum_{i=1}^{\infty} |\tilde{p}'_i|^{qr(1-\frac{1}{q})} = \sum_{i=1}^{\infty} |\tilde{p}'_i|^q = 1.$$

Таким образом, $u' \in \partial\mathcal{U}$. С учетом того, что $p(u') = p'$, получим, что p' является опорным функционалом ко множеству \mathcal{U} в точке u' , которая по построению отлична от u .

Рассмотрим для некоторого произвольного $\lambda \in (0; 1)$ величину

$$(p', \lambda u + (1 - \lambda)u') = \lambda(p', u) + (1 - \lambda)(p', u') = \lambda + (1 - \lambda) = 1.$$

С другой стороны, согласно неравенству Гельдера для любой точки $\tilde{u} \in \mathcal{U}$

$$(p', \tilde{u}) \leq \|p'\|_{l_r^*} \|\tilde{u}\|_{l_r} = \|\tilde{u}\|_{l_r} \leq 1.$$

Следовательно, функционал p' является опорным ко множеству \mathcal{U} в точке $\lambda u + (1 - \lambda)u'$, что невозможно, поскольку в силу строгой выпуклости \mathcal{U}

$$\lambda u + (1 - \lambda)u' \in \text{int } \mathcal{U}.$$

Получаем, что множество $\text{cone}\{p(u)\} \setminus \{0\}$ полностью исчерпывает множество всех опорных функционалов ко множеству \mathcal{U} в точке u . Следовательно, $\mathcal{U} \in \mathbb{U}_1$.

Опорный функционал $\pi_{\mathcal{U}}(u)$ для каждой u из $\partial\mathcal{U}$ порождается последовательностью

$$\tilde{p} = \frac{1}{\|u\|_{l_r}} (\text{sign}(u_1)|u_1|^{r-1}, \text{sign}(u_2)|u_2|^{r-1}, \dots) \in l_q. \quad (1.13)$$

И наоборот, $\pi_{\mathcal{U}}^{-1}(p) \in \partial\mathcal{U}$ определяется соотношением

$$\begin{aligned} \pi_{\mathcal{U}}^{-1}(p) &= \frac{1}{\|\tilde{p}\|_{l_q}} (\text{sign}(\tilde{p}_1)|\tilde{p}_1|^{q-1}, \text{sign}(\tilde{p}_2)|\tilde{p}_2|^{q-1}, \dots) \in l_r, \\ (p, x) &= \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{p}_i x_i. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Пусть отображение $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ является биективным. Тогда определим оператор A_{σ} в виде

$$Ax = (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots).$$

Для удобства будем считать, что A_{σ} определен на более широком множестве

$$A_{\sigma}: \bigcup_{r \in (1; +\infty)} l_r \rightarrow \bigcup_{r \in (1; +\infty)} l_r,$$

полагая, что если $x \in l_r$, то $A_{\sigma}x \in l_r$.

Построенный таким образом оператор A_σ является обратимым. Обратный к нему оператор имеет вид

$$A_\sigma^{-1}x = (x_{\sigma^{-1}(1)}, x_{\sigma^{-1}(2)}, \dots).$$

Фактически оператор A_σ является аналогом оператора, производящего последовательные повороты на угол $\frac{\pi}{2}$ в плоскости взаимно перпендикулярных осей. Причем верно равенство для любых $x \in l_r$ и $p \in l_r^*$

$$(p, A_\sigma x) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{p}_i x_{\sigma(1)} = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{p}_{\sigma^{-1}(1)} x_i = (A_\sigma^* p, x),$$

т.е. действие сопряженного оператора на последовательность $\tilde{p} \in l_q$, порождающую функционал $p \in l_r^*$, аналогично действию обратного оператора.

Поскольку для каждого $x \in l_r$ выполнено условие

$$\|x\|_{l_r} = \|A_\sigma x\|_{l_r},$$

то для всех $k \in \mathbb{N}$

$$-A_\sigma^{-k} \mathcal{U} = \mathcal{U}.$$

Тогда в силу следствия 1.1

$$\mathcal{X}(N) = N \mathcal{U}.$$

Выберем в качестве начального состояния системы (A_σ, \mathcal{U}) вектор $x^0 \in l_r$, удовлетворяющий условию $\|x^0\| = N_{min}$, т.е. $x^0 \in \partial\mathcal{X}(N_{min})$. Построим оптимальное управление и траекторию системы согласно теореме 1.3.

Из (1.13) следует, что $\psi(0)$ порождается последовательностью

$$\tilde{\psi}(0) = -\frac{1}{\|x^0\|} (\text{sign}(x_1^0)|x_1^0|^{r-1}, \text{sign}(x_2^0)|x_2^0|^{r-1}, \dots) \in l_q,$$

причем $\|\psi(0)\|_{l_r^*} = 1$. Тогда в силу (1.14) и леммы 1.3

$$\begin{aligned} u^*(0) &= \arg \max_{u \in \mathcal{U}} ((A_\sigma^{-1})^* \psi(0), u) = \pi_{\mathcal{U}}^{-1}((A_\sigma^{-1})^* \psi(0)) = \\ &= \frac{1}{N_{min}} \left(\text{sign}(\tilde{\psi}_{\sigma(1)}(0)) |\tilde{\psi}_{\sigma(1)}(0)|^{q-1}, \text{sign}(\tilde{\psi}_{\sigma(2)}(0)) |\tilde{\psi}_{\sigma(2)}(0)|^{q-1}, \dots \right) = \\ &= \frac{1}{N_{min}} \left(-\text{sign}(x_{\sigma(1)}^0) |x_{\sigma(1)}^0|^{(q-1)(p-1)}, -\text{sign}(x_{\sigma(2)}^0) |x_{\sigma(2)}^0|^{(q-1)(p-1)}, \dots \right) = \\ &= \frac{1}{N_{min}} \left(-\text{sign}(x_{\sigma(1)}^0) |x_{\sigma(1)}^0|, -\text{sign}(x_{\sigma(2)}^0) |x_{\sigma(2)}^0|, \dots \right) = -\frac{A_\sigma x^0}{N_{min}}. \end{aligned}$$

Тогда

$$x^*(1) = A_\sigma x^0 + u^*(0) = A_\sigma x^0 - \frac{1}{N_{min}} A_\sigma x^0 = \frac{N_{min} - 1}{N_{min}} A_\sigma x^0.$$

Предположим, что для некоторого $k \in \{0, \dots, N_{min} - 2\}$ верны соотношения

$$\begin{aligned} x^*(k) &= \frac{N_{min} - k}{N_{min}} A_\sigma^k x^0, \\ u^*(k) &= -\frac{1}{N_{min}} A_\sigma^{k+1} x_0. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Проверим (1.15) для $k + 1$.

$$x^*(k+1) = A_\sigma x^*(k) + u^*(k) = \frac{N_{min} - k}{N_{min}} A_\sigma^{k+1} x^0 - \frac{1}{N_{min}} A_\sigma^{k+1} x_0 = \frac{N_{min} - (k + 1)}{N_{min}} A_\sigma^{k+1} x^0.$$

Тогда последовательность, порождающая по теореме Рисса сопряженный функционал $\psi(k + 1)$, согласно (1.13) имеет вид

$$\tilde{\psi}(k+1) = -\frac{1}{\|x(k+1)\|} (\text{sign}(x_1(k+1))|x_1(k+1)|^{r-1}, \text{sign}(x_2(k+1))|x_2(k+1)|^{r-1}, \dots) \in l_q,$$

Причем $\|\psi(k+1)\|_{l_q^*} = 1$. В силу (1.14) и леммы 1.3

$$\begin{aligned} u^*(k+1) &= \arg \max_{u \in \mathcal{U}} ((A_\sigma^{-1})^* \psi(k+1), u) = \pi_{\mathcal{U}}^{-1}((A_\sigma^{-1})^* \psi(k+1)) = \\ &= \frac{1}{\|x(k+1)\|} \left(\text{sign}(\tilde{\psi}_{\sigma(1)}(k+1)) |\tilde{\psi}_{\sigma(1)}(k+1)|^{q-1}, \right. \\ &\quad \left. \text{sign}(\tilde{\psi}_{\sigma(2)}(k+1)) |\tilde{\psi}_{\sigma(2)}(k+1)|^{q-1}, \dots \right) = \\ &= \frac{1}{\|x(k+1)\|} \left(-\text{sign}(x_{\sigma(1)}(k+1)) |x_{\sigma(1)}(k+1)|^{(q-1)(p-1)}, \right. \\ &\quad \left. -\text{sign}(x_{\sigma(2)}(k+1)) |x_{\sigma(2)}(k+1)|^{(q-1)(p-1)}, \dots \right) = \\ &= \frac{1}{\|x(k+1)\|} \left(-\text{sign}(x_{\sigma(1)}(k+1)) |x_{\sigma(1)}(k+1)|, -\text{sign}(x_{\sigma(2)}(k+1)) |x_{\sigma(2)}(k+1)|, \dots \right) = \\ &= -\frac{A_\sigma x(k+1)}{\|x(k+1)\|} = -\frac{1}{N_{min}} A_\sigma^{k+1} x^0. \end{aligned}$$

Согласно методу математической индукции соотношения (1.15) верны для любых $k = \overline{0, N_{min} - 1}$. Причем $x^*(N_{min}) = 0$, т.е. управление и траектория (1.15) являются оптимальными в задаче быстрогодействия системы (A_σ, \mathcal{U}) .

ПРИМЕР 1.5. В качестве примера рассмотрим систему управления (A_θ, \mathcal{U}) , для которой решается задача быстрогодействия. Вектор состояния является элементом пространства функций, непрерывных на окружности. Пусть $S^1 = \{t \in \mathbb{R}^2 : t_1^2 + t_2^2 = 1\}$ – окружность единичного радиуса с центром в нуле. Примем в качестве \mathbb{L} пространство непрерывных на S^1 вещественнозначных функций $C_2(S^1)$. Норму введем по формуле

$$\|x\|_{C_2(S^1)} = \left(\int_{S^1} |x(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}},$$

где интеграл понимается в смысле криволинейного интеграла вдоль замкнутой кривой S^1 .

Пространство $C_2(S^1)$ является евклидовым, при этом скалярное произведение ассоциированное с нормой имеет вид

$$(x_1, x_2) = \int_{S^1} x_1(t)x_2(t)dt, \quad x_1, x_2 \in C_2(S^1).$$

Пространство $C_2(S^1)$ изоморфно пространству функций, непрерывных на отрезке $[0; 2\pi]$, принимающих одинаковые значения на концах отрезка:

$$C_2([0; 2\pi]) = \{y: [0; 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}, y - \text{непрерывна}, y(0) = y(2\pi)\}.$$

Изоморфизм понимается в смысле существования линейного биективного отображения $\tau: C_2(S^1) \rightarrow C_2([0; 2\pi])$, сохраняющего норму. Данное отображение имеет вид

$$(\tau(x))(\varphi) = x(\cos \varphi, \sin \varphi), \quad \tau \in [0; 2\pi].$$

Норма действительно будет сохранена в силу равенства двух интегралов

$$\left(\int_{S^1} |x(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{[0; 2\pi]} |x(\cos \varphi, \sin \varphi)|^2 d\varphi \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Рассмотрим линейный ограниченный оператор $\mathcal{A}_\theta: C_2(S^1) \rightarrow C_2(S^1)$, действующий по правилу

$$(\mathcal{A}_\theta x)(t) = x \left(\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} t \right).$$

Физический смысл данного оператора проявляется в том, как преобразуются под его действием элементы изоморфного пространства. Пусть $y(\varphi) = x(\cos \varphi, \sin \varphi)$, тогда

$$(\mathcal{A}_\theta x)(t) = x(\cos(\varphi - \theta), \sin(\varphi - \theta)),$$

$$((\tau \circ \mathcal{A}_\theta \circ \tau^{-1})(y))(\varphi) = y((\varphi - \theta) \bmod 2\pi).$$

Т.е. оператор \mathcal{A}_θ представляет собой поворот функции на угол θ , откуда очевидно, что он является обратимым оператором,

$$\mathcal{A}_\theta^{-1} = \mathcal{A}_{-\theta}.$$

Также в силу того, что замкнутая кривая S^1 инвариантна относительно поворота на угол θ , верно равенство

$$\|\mathcal{A}_\theta x\|_{C_2(S^1)} = \left(\int_{S^1} |(\mathcal{A}_\theta x)(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{S^1} |x(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = \|x\|_{C_2(S^1)}.$$

В качестве множества допустимых управлений выберем шар единичного радиуса с центром в нуле

$$\mathcal{U} = \{u \in C_2(S^1): \|u\|_{C_2(S^1)} \leq 1\}.$$

Как показано в примере 1.1, $\mathcal{U} \in \mathbb{U}_1$.

Следовательно, система $(\mathcal{A}_\theta, \mathcal{U})$ удовлетворяет условиям теорем 1.1, 1.2 и 1.3, а значит, оптимальное управление может быть вычисленно на основе принципа максимума.

Для решения задачи быстродействия построим также сопряженный оператор \mathcal{A}_θ^* . Пусть $p \in C_2^*(S^1)$ имеет вид

$$(p, x) = \int_{S^1} \tilde{p}(t)x(t)dt.$$

Тогда

$$\begin{aligned} (p, \mathcal{A}_\theta x) &= \int_{S^1} \tilde{p}(t)\mathcal{A}_\theta x(t)dt = \int_{S^1} \mathcal{A}_{-\theta}\tilde{p}(t)x(t)dt. \\ (\mathcal{A}_\theta^* p, x) &= \int_{S^1} \mathcal{A}_{-\theta}\tilde{p}(t)x(t)dt. \end{aligned}$$

Опишем класс множеств 0-управляемости. Поскольку оператор \mathcal{A}_θ является биективным и сохраняющим норму, множество допустимых управлений \mathcal{U} представляет собой шар единичного радиуса с центром в нуле, то верно соотношение

$$\mathcal{A}_\theta^{-1}\mathcal{U} = \mathcal{U}.$$

Тогда в силу леммы 1.1

$$\mathcal{X}(N) = \sum_{k=1}^N (-\mathcal{A}_\theta^{-k}\mathcal{U}) = \sum_{k=1}^N (-\mathcal{U}) = \sum_{k=1}^N \mathcal{U} = B_N(0) = \{x \in C_2(S^1): \|x\| = N\}.$$

Выберем в качестве начального состояния системы $x_0 \in C_2(S^1)$ с целочисленным значением нормы. Тогда очевидно, что $N_{min} = \|x_0\|$, $x_0 \in \partial\mathcal{X}(N_{min})$. В силу (1.12) и теоремы 1.2 уравнения сопряженной системы примут вид

$$\begin{aligned} \psi(k+1) &= (\mathcal{A}_\theta^{(-1)})^* \psi(k), \quad k = \overline{0, N_{min} - 1}, \\ (\psi(0), x) &= - \int_{S^1} x_0(t)x(t)dt. \end{aligned}$$

Вычислим оптимальное управление согласно теореме 1.3.

$$u^*(0) = \arg \max_{u \in \mathcal{U}} ((\mathcal{A}_\theta^{-1})^* \psi(0), u) = \arg \max_{u \in \mathcal{U}} \int_{S^1} -\mathcal{A}_{-(-\theta)} x_0(t)u(t)dt.$$

$$u^*(0) = -\frac{\mathcal{A}_\theta x_0}{\|\mathcal{A}_\theta x_0\|} = -\frac{1}{N_{min}} \mathcal{A}_\theta x_0,$$

$$x^*(1) = \mathcal{A}_\theta x_0 + u^*(0) = \frac{N_{min} - 1}{N_{min}} \mathcal{A}_\theta x_0 \in \mathcal{X}(N_{min} - 1).$$

Предположим, что для некоторого $k \in \{0, \dots, N_{min} - 2\}$ верны соотношения

$$\begin{aligned} (\psi(k), x) &= \int_{S^1} \mathcal{A}_{k\theta} x_0(t) x(t) dt, \\ u^*(k) &= -\frac{1}{N_{min}} \mathcal{A}_{(k+1)\theta} x_0, \\ x^*(k) &= \frac{N_{min} - k}{N_{min}} \mathcal{A}_{k\theta} x_0. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Тогда в силу теоремы 1.2

$$(\psi(k+1), x) = ((\mathcal{A}_\theta^{-1})^* \psi(k), x) = \int_{S^1} (\mathcal{A}_\theta \circ \mathcal{A}_{k\theta}) x_0(t) x(t) dt = \int_{S^1} \mathcal{A}_{(k+1)\theta} x_0(t) x(t) dt.$$

$$u^*(k+1) = \arg \max_{u \in \mathcal{U}} ((\mathcal{A}_\theta^{-1})^* \psi(k+1), u) = \arg \max_{u \in \mathcal{U}} \int_{S^1} \mathcal{A}_{(k+2)\theta} x_0(t) (-u(t)) dt.$$

$$u^*(k+1) = -\frac{1}{N_{min}} \mathcal{A}_{(k+2)\theta} x_0.$$

$$x^*(k+1) = \mathcal{A}_\theta x^*(k) + u^*(k) = \frac{N_{min} - k - 1}{N_{min}} \mathcal{A}_{(k+1)\theta} x_0.$$

Согласно методу математической индукции для каждого $k = \overline{0, N_{min} - 1}$ верны соотношения (1.16). Причем $x^*(N_{min}) = 0$, т.е. задача быстродействия решена.

Продемонстрируем графически результаты для следующего начального условия:

$$x_0(t) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sin t,$$

Значение параметра θ примем равным $\frac{\pi}{8}$. Тогда $\|x_0\| = N_{min} = 4$.

Оптимальная траектория системы, вычисленная согласно (1.16), имеет следующий вид:

$$x^*(k)(t) = \frac{4 - k}{\sqrt{\pi}} \sin(t + k\theta), \quad k = \overline{0, 4}.$$

На рисунке 1.1 графически изображена оптимальная траектория системы.

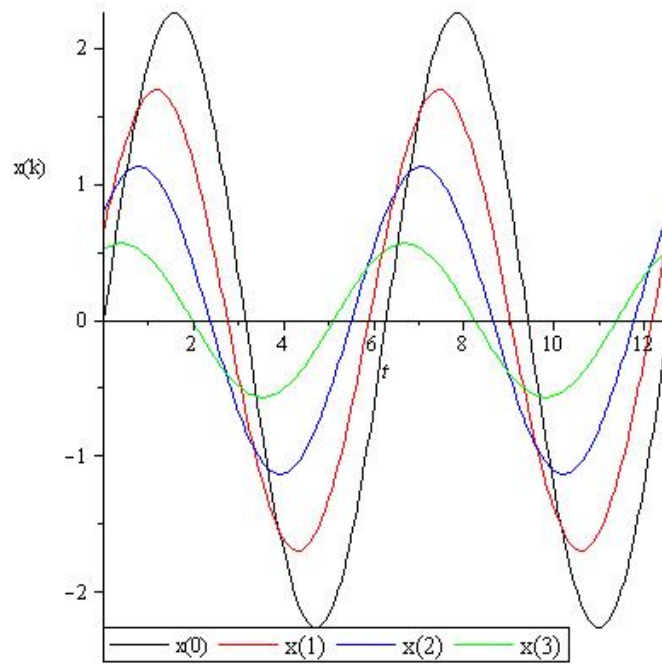


Рисунок 1.1. Оптимальная траектория (1.16) системы $(\mathcal{A}_\theta, \mathcal{U})$

1.6. Выводы по главе 1

1. Построено в явном виде описание множества θ -управляемости за произвольное число шагов для линейной автономной дискретной системы с ограниченным управлением.

2. Сформулированы и доказаны свойства класса строго выпуклых множеств, для каждой граничной точки которых нормальный конус представляет собой одномерное множество, такие как замкнутость относительно невырожденных линейных преобразований, суммы двух множеств по Минковскому, а также преобразование нормальных конусов граничных точек в результате действия вышеприведенных операций. Доказана единственность разложения граничной точки суммы двух множеств из рассматриваемого класса.

3. Сформулирован и доказан в виде принципа максимума критерий оптимальности управления в задаче быстродействия для случая, когда начальное состояние является граничной точкой множества θ -управляемости, построены уравнения сопряженной системы.

4. Продемонстрирован вырожденный характер принципа максимума для случая, когда начальное состояние является внутренней точкой для множества 0-управляемости.

5. Для случая, когда начальное состояние является внутренней точкой для множества 0-управляемости, разработан метод сведения задачи быстрогодействия к разрешенному случаю граничной точки.

6. Доказана неединственность оптимального управления в задаче быстрогодействия для случая, когда начальное состояние является внутренней точкой для множества 0-управляемости.

Основные результаты главы опубликованы в [25, 31, 34]

Глава 2. Математическое моделирование и оптимизация по быстродействию линейных неавтономных конечномерных дискретных систем

Целью данной главы является обобщение для систем с конечномерным вектором состояния результатов, представленных в главе 1 на случай, когда матрица системы и множество допустимых значений управлений зависят от времени. Также целью является расширение класса \mathcal{U}_1 , из которого выбиралось множество допустимых значений управлений, до более широкого класса \mathcal{U}_2 .

В разделе 2.1. приведена постановка задачи. В разделе 2.2. произведены дополнительные построения и исследованы свойства класса \mathcal{U}_2 , необходимые для разработки критерия оптимальности. В разделе 2.3. сформулирован критерий оптимальности траектории и управления в задаче быстродействия для линейной дискретной нестационарной системы. В разделе 2.4. разработан метод построения оптимального управления для случая, когда множества допустимых значений управлений являются эллипсоидами. В разделе 2.5. построена дискретная линейная детерминированная модель движения спутника по околокруговой орбите, решена задача оптимальной по быстродействию коррекции движения спутника. В разделе 2.6. сформулированы выводы по главе .

2.1. Постановка задачи

Рассматривается нестационарная линейная система управления с дискретным временем $(\mathcal{A}, \mathcal{U})$

$$\begin{aligned}x(k+1) &= A(k)x(k) + u(k), \\x(0) &= x_0, \quad u(k) \in \mathcal{U}(k), \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\},\end{aligned}\tag{2.1}$$

где $x(k) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния системы, $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}(k)\}_{k=0}^{\infty}$ – последовательность множеств допустимых значений управлений, $\mathcal{A} = \{A(k)\}_{k=0}^{\infty}$ – последовательность матриц системы. Предполагается, что для каждого $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ матрица $A(k) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ является невырожденной, $0 \in \text{int } \mathcal{U}(k)$, $\mathcal{U}(k)$ – строго выпуклое

компактное множество. Пространство \mathbb{R}^n предполагается евклидовым со скалярным произведением, определяемым соотношением

$$(x, y) = x_1y_1 + \dots + x_ny_n.$$

Допустимым процессом $\{u(k), x(k)\}_{k=0}^N$ системы $(\mathcal{A}, \mathcal{U})$ для $N \in \mathbb{N}$ называется процесс, полученный согласно рекуррентным соотношениям (2.1) и удовлетворяющий условию $x(N) = 0$. Для системы (2.1) решается задача быстрогодействия: для некоторого заданного $x(0) = x_0$ требуется построить допустимый процесс, для которого величина $N_{min} \in \mathbb{N}$, соответствующая условию $x(N_{min}) = 0$, минимальна среди всех допустимых процессов. Т.е. необходимо построить набор допустимых значений управления $u^*(0) \in \mathcal{U}(0), \dots, u^*(N_{min}-1) \in \mathcal{U}(N_{min}-1)$, переводящих систему из начального состояния в начало координат за минимальное число шагов N_{min} . Такой набор управлений будем называть оптимальным в задаче быстрогодействия, а полученную совокупность состояний $\{x^*(k)\}_{k=1}^{N_{min}}$ системы $(\mathcal{A}, \mathcal{U})$ на основе выбора на каждом шаге $k = \overline{0, N_{min}}$ в качестве управляющего воздействия оптимального управления – оптимальной траекторией.

Определим семейство множеств 0-управляемости $\{\mathcal{X}(N, k)\}_{N, k=0}^{\infty}$, где $\mathcal{X}(N, k)$ представляет собой множество состояний системы (2.1), для которых существует набор допустимых значений управления, переводящих систему, начиная с шага $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, в начало координат за N шагов:

$$\mathcal{X}(N, k) = \begin{cases} \{x(k) \in \mathbb{R}^n : \exists u(k) \in \mathcal{U}(k), \dots, \\ u(N+k-1) \in \mathcal{U}(N+k-1) : x(N+k) = 0\}, N \in \mathbb{N}, \\ \{0\}, N = 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Тогда условие $N_{min} < \infty$ можно представить в виде

$$x_0 \in \bigcup_{N=0}^{\infty} \mathcal{X}(N, 0),$$

а минимальное число шагов для достижения начала координат определить согласно соотношению

$$N_{min} = \min\{N \in \mathbb{N} : x_0 \in \mathcal{X}(N, 0)\}.$$

При этом условие оптимальности траектории $\{x^*(k)\}_{k=0}^{N_{min}}$ эквивалентно

$$x^*(k) \in \mathcal{X}(N_{min} - k, k), \quad k = \overline{0, N_{min}}.$$

ЛЕММА 2.1. Пусть система множеств $\{\mathcal{X}(N, k)\}_{N, k=0}^{\infty}$ удовлетворяет условию (2.2). Тогда для любых $N \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ справедливо представление

$$\mathcal{X}(N, k) = \sum_{i=0}^{N-1} (-A^{-1}(k) \cdot \dots \cdot A^{-1}(i+k)) \mathcal{U}(k+i).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2.1. Пусть $x(t) \in \mathcal{X}(N, k)$. По определению это эквивалентно тому, что найдется набор управлений $u(k) \in \mathcal{U}(k), \dots, u(N+k-1) \in \mathcal{U}(N+k-1)$ таких, что

$$\begin{aligned} 0 &= x(N+k) = A(N+k-1)x(N+k-1) + u(N+k-1) = \dots = \\ &= A(N+k-1) \cdot \dots \cdot A(k)x(k) + A(N+k-1) \cdot \dots \cdot A(k+1)u(k) + \dots + \\ &\quad + A(N+k-1)u(N+k-2) + u(N+k-1), \\ x(k) &= (A(N+k-1) \cdot \dots \cdot A(k))^{-1} \cdot (A(N+k-1) \cdot \dots \cdot A(k+1)u(k) + \dots + \\ &\quad + A(N+k-1)u(N+k-2) + u(N+k-1)) = \\ &= -A(k)^{-1}u(k) - A(k)^{-1} \cdot A(k+1)^{-1}u(k+1) - \dots - A(k)^{-1} \cdot \dots \cdot A(N+k-1)^{-1}u(N+k-1). \end{aligned}$$

Тогда по определению алгебраической суммы Минковского верно условие леммы.

□

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Пусть семейство множеств $\{\mathcal{X}(N, k)\}_{N, k=0}^{\infty}$ определяется соотношениями (2.2). Тогда справедливо рекуррентное соотношение

$$A(k)\mathcal{X}(N+1, k) = \mathcal{X}(N, k+1) + (-\mathcal{U}(k)).$$

2.2. Дополнительные построения

Для решения задачи быстрогодействия для системы (2.1) докажем ряд вспомогательных утверждений. Обозначим через \mathbb{U}_2 класс всех строго выпуклых компактных множеств:

$$\mathbb{U}_2 = \{\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n : \forall x^1, x^2 \in \mathcal{X}, \lambda \in (0; 1) \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 \in \text{int } \mathcal{X}, \mathcal{X} \text{ — компакт}\},$$

ЛЕММА 2.2. Пусть $\mathcal{X} \in \mathbb{U}_2$, $p \in \mathbb{R}^n$. Тогда существует единственный $x' \in \mathcal{X}$, удовлетворяющий условию

$$(p, x') = s(p, \mathcal{X}).$$

Причем $x' \in \partial\mathcal{X}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2.2. В силу теоремы Вейерштрасса непрерывная по x функция (p, x) достигает своего максимального значения на компактном множестве \mathcal{X} . То есть существует точка $x' \in \operatorname{Arg} \max_{x \in \mathcal{X}} (p, x)$.

Предположим, что найдется $x'' \in \mathcal{X}$ такой, что $x'' \neq x'$ и $(p, x'') = s(p, \mathcal{X})$. Тогда $\frac{1}{2}x'' + \frac{1}{2}x' \in \operatorname{int} \mathcal{X}$. Следовательно найдется $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\frac{1}{2}x'' + \frac{1}{2}x' + \varepsilon p \in \operatorname{int} \mathcal{X},$$

$$(p, \frac{1}{2}x'' + \frac{1}{2}x' + \varepsilon p) = \frac{1}{2}(p, x'') + \frac{1}{2}(p, x') + \varepsilon(p, p) = s(p, \mathcal{X}) + \varepsilon(p, p) > s(p, \mathcal{X}).$$

Получаем противоречие. Существует единственный $x' = \operatorname{arg} \max_{x \in \mathcal{X}} (p, x)$.

Поскольку выпуклая по x функция (p, x) на выпуклом компактном множестве \mathcal{X} достигает своего максимума на границе [58], то $x' \in \partial\mathcal{X}$.

□

В силу леммы 2.2 существует отображение

$$\rho_{\mathcal{X}}: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \partial\mathcal{X},$$

определяемое соотношением

$$\rho_{\mathcal{X}}(p) = \operatorname{arg} \max_{x \in \mathcal{X}} (p, x).$$

Лемма 2.2 позволяет сформулировать в виде следствия важное свойство множеств из класса \mathbb{U}_2 .

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Пусть $\mathcal{X} \in \mathbb{U}_2$. Тогда для любых двух различных $x^1, x^2 \in \partial\mathcal{X}$ верно

$$\mathcal{N}(x^1, \mathcal{X}) \cap \mathcal{N}(x^2, \mathcal{X}) = \emptyset.$$

Сформулируем свойства класса \mathbb{U}_2 в виде следующих лемм.

ЛЕММА 2.3. Пусть $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – невырожденная матрица, $\mathcal{X} \in \mathbb{U}_2$. Тогда

- i) $A\partial\mathcal{X} = \partial(A\mathcal{X})$;
- ii) $\mathcal{N}(Ax, A\mathcal{X}) = (A^{-1})^T \mathcal{N}(x, \mathcal{X})$;
- iii) $A\mathcal{X} \in \mathbb{U}_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2.3. Пусть точка $x \in \partial\mathcal{X}$, а вектор p – опорный вектор ко множеству \mathcal{X} в точке x .

i – ii) Покажем, что вектор $(A^{-1})^T p$ является опорным вектором ко множеству $A\mathcal{X}$ в точке Ax . Тем самым мы покажем, что точка Ax является граничной точкой множества $A\mathcal{X}$. Для этого предположим, что найдется точка $x' \in A\mathcal{X}$ отличная от Ax такая, что

$$((A^{-1})^T p, Ax) < ((A^{-1})^T p, x').$$

Тогда точка $A^{-1}x' \in \mathcal{X}$. При этом верны следующие соотношения

$$(p, x) = (p, A^{-1}Ax) = ((A^{-1})^T p, Ax) < ((A^{-1})^T p, x') = (p, A^{-1}x').$$

Что противоречит определению опорного вектора. Точка Ax – граничная точка множества $A\mathcal{X}$.

iii) В силу биективности невырожденного линейного преобразования будет верно и обратное: если $x' \in \partial(A\mathcal{X})$, то $A^{-1}x' \in \partial\mathcal{X}$. Причем внутренние точки множества \mathcal{X} переводятся посредством невырожденного линейного преобразования во внутренние точки множества $A\mathcal{X}$.

Пусть $x', x'' \in A\mathcal{X}$, $\lambda \in (0; 1)$, тогда, учитывая, что \mathcal{X} – строго выпуклое,

$$A^{-1}(\lambda x' + (1 - \lambda)x'') = \lambda A^{-1}x' + (1 - \lambda)A^{-1}x'' \in \text{int } \mathcal{X}.$$

Следовательно,

$$(\lambda x' + (1 - \lambda)x'') \in \text{int } (A\mathcal{X}),$$

т.е. множество $A\mathcal{X}$ является также строго выпуклым.

□

ЛЕММА 2.4. Пусть $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2 \in \mathbb{U}_2$, $\mathcal{Y} = \mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2$. Тогда $\mathcal{Y} \in \mathbb{U}_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2.4. Компактность \mathcal{Y} следует из того факта, что алгебраическая сумма Минковского двух компактных множеств, как показано в [58], также является компактом.

Пусть $x^1 \in \text{int } \mathcal{X}_1$, $x^2 \in \text{int } \mathcal{X}_2$. Тогда существуют открытый шар с центром в точке x^1 и радиуса $\varepsilon_1 > 0$ и открытый шар с центром в точке x^2 и радиуса $\varepsilon_2 > 0$ такие, что

$$O_{\varepsilon_1}(x^1) \subset \text{int } \mathcal{X}_1,$$

$$O_{\varepsilon_2}(x^2) \subset \text{int } \mathcal{X}_2,$$

где через $O_r(x^0) = \{x \in \mathbb{L} : \|x^0 - x\| < r\}$ обозначим открытый шар радиуса r с центром в точке x^0 .

Тогда

$$O_{\min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}}(x^1 + x^2) \subset O_{\varepsilon_1}(x^1) + O_{\varepsilon_2}(x^2) \subset \mathcal{Y}.$$

Т.е. $x^1 + x^2 \in \text{int } \mathcal{Y}$.

Пусть $y^1, y^2 \in \mathcal{Y}$, $\lambda \in (0; 1)$. Тогда по определению алгебраической суммы Минковского, существуют $x^{11}, x^{12} \in \mathcal{X}_1$ и $x^{21}, x^{22} \in \mathcal{X}_2$ такие, что

$$y^1 = x^{11} + x^{21}, \quad y^2 = x^{12} + x^{22}.$$

Поскольку $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2 \in \mathbb{U}_2$, то

$$\lambda x^{11} + (1 - \lambda)x^{12} \in \text{int } \mathcal{X}_1, \quad \lambda x^{21} + (1 - \lambda)x^{22} \in \text{int } \mathcal{X}_2.$$

Следовательно,

$$\lambda y^1 + (1 - \lambda)y^2 = \lambda(x^{11} + x^{21}) + (1 - \lambda)(x^{12} + x^{22}) \in \text{int } \mathcal{Y},$$

т.е. \mathcal{Y} является строго выпуклым.

Получаем, $\mathcal{Y} \in \mathbb{U}_2$.

□

ЛЕММА 2.5. Пусть $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2 \in \mathbb{U}_2$, $\mathcal{Y} = \mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2$, $y^* \in \partial \mathcal{Y}$. Тогда

- i) Представление вида $y^* = x^{1*} + x^{2*}$, где $x^{1*} \in \mathcal{X}_1$, $x^{2*} \in \mathcal{X}_2$, единственное;
- ii) $x^{1*} \in \partial \mathcal{X}_1$, $x^{2*} \in \partial \mathcal{X}_2$;
- iii) $\mathcal{N}(y^*, \mathcal{Y}) = \mathcal{N}(x^{1*}, \mathcal{X}_1) \cap \mathcal{N}(x^{2*}, \mathcal{X}_2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2.5. *i – ii*) Пусть $p \in \mathcal{N}(y^*, \mathcal{Y})$. Введем следующие обозначения:

$$x^{1*} = \rho_{\mathcal{X}_1}(p), \quad x^{2*} = \rho_{\mathcal{X}_2}(p).$$

Тогда в силу леммы 2.2 верно $x^{1*} \in \partial\mathcal{X}_1$, $x^{2*} \in \partial\mathcal{X}_2$.

$$\begin{aligned} (p, x^{1*} + x^{2*}) &= (p, x^{1*}) + (p, x^{2*}) = \max_{x^1 \in \mathcal{X}_1} (p, x^1) + \max_{x^2 \in \mathcal{X}_2} (p, x^2) = \\ &= \max_{\substack{x^1 \in \mathcal{X}_1 \\ x^2 \in \mathcal{X}_2}} (p, x^1 + x^2) = \max_{y \in \mathcal{Y}} (p, y). \end{aligned}$$

По определению опорного вектора $\rho_{\mathcal{Y}}(p) = x^{1*} + x^{2*}$. Тогда в силу леммы 2.2 $y^* = x^{1*} + x^{2*}$.

Продемонстрируем, что данное представление единственное. Предположим, что существуют $x^{1'} \in \partial\mathcal{X}_1$, $x^{2'} \in \mathcal{X}_2$ такие, что $x^{1'} \neq x^{1*}$ и $x^{1'} + x^{2'} = y^*$. Тогда в силу следствия 2.2 $p \notin \mathcal{N}(x^{1'}, \mathcal{X}_1)$, т.е.

$$(p, x^{1'}) < (p, x^{1*}).$$

$$(p, y^*) = (p, x^{1'} + x^{2'}) < (p, x^{1*}) + \max_{x^2 \in \mathcal{X}_2} (p, x^2) = (p, x^{1*}) + (p, x^{2*}) = (p, y^*).$$

Получаем противоречие. Представление $y^* = x^{1*} + x^{2*}$ единственное.

iii) Как показано в доказательстве пунктов *i – ii*), верно включение

$$\mathcal{N}(y^*, \mathcal{Y}) \subset \mathcal{N}(x^{1*}, \mathcal{X}_1) \cap \mathcal{N}(x^{2*}, \mathcal{X}_2).$$

Пусть $p' \in \mathcal{N}(x^{1*}, \mathcal{X}_1) \cap \mathcal{N}(x^{2*}, \mathcal{X}_2)$. Тогда по определению опорного вектора справедлива цепочка равенств

$$\begin{aligned} (p', y^*) &= (p', x^{1*}) + (p', x^{2*}) = \max_{x^1 \in \mathcal{X}_1} (p', x^1) + \max_{x^2 \in \mathcal{X}_2} (p', x^2) = \\ &= \max_{\substack{x^1 \in \mathcal{X}_1 \\ x^2 \in \mathcal{X}_2}} (p', x^1 + x^2) = \max_{y \in \mathcal{Y}} (p', y), \end{aligned}$$

то есть $p' \in \mathcal{N}(y^*, \mathcal{Y})$. Верно включение

$$\mathcal{N}(x^{1*}, \mathcal{X}_1) \cap \mathcal{N}(x^{2*}, \mathcal{X}_2) \subset \mathcal{N}(y^*, \mathcal{Y}).$$

Окончательно,

$$\mathcal{N}(y^*, \mathcal{Y}) = \mathcal{N}(x^{1*}, \mathcal{X}_1) \cap \mathcal{N}(x^{2*}, \mathcal{X}_2).$$

□

2.3. Критерий оптимальности в задаче быстрогодействия

Рассмотрим критерий оптимальности управления и свойства оптимальных траекторий, сформулированные в виде принципа максимума, для случая, когда выполнено условие $x_0 \in \partial\mathcal{X}(N_{min}, 0)$.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $x_0 \in \partial\mathcal{X}(N_{min}, 0)$, траектория $\{x^*(k)\}_{k=0}^{N_{min}}$ оптимальна в задаче быстрогодействия для системы $(\mathcal{A}, \mathcal{U})$. Тогда

- i) $x^*(k) \in \partial\mathcal{X}(N_{min} - k, k)$, $k = \overline{0, N_{min}}$;
- ii) $\mathcal{N}(x^*(k), \mathcal{X}(N_{min} - k, k)) \subset A^T(k)\mathcal{N}(x^*(k+1), \mathcal{X}(N_{min} - k - 1, k + 1))$, $k = \overline{0, N_{min} - 2}$;
- iii) оптимальная траектория единственна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.1. Включение $x^*(0) \in \partial\mathcal{X}(N_{min}, 0)$ верно в силу условия теоремы. Предположим, что для некоторого $k = \overline{1, N_{min} - 2}$ выполнено

$$x^*(k) \in \partial\mathcal{X}(N_{min} - k, k).$$

Тогда в силу следствия 2.1

$$A(k)\mathcal{X}(N_{min} - k, k) = \mathcal{X}(N_{min} - k - 1, k + 1) + (-\mathcal{U}(k)).$$

Так как в силу i) леммы 2.3 $A(k)x^*(k) \in \partial(A(k)\mathcal{X}(N_{min} - k, k))$, то согласно лемме 2.5 существует пара $x^*(k+1) \in \mathcal{X}(N_{min} - k - 1, k + 1)$ и $u^* \in (-\mathcal{U}(k))$ такие, что

$$A(k)x^*(k) = x^*(k+1) + u^*.$$

Обозначив через $u^*(k) = -u^*$, получим, что $u^*(k) \in \mathcal{U}(k)$,

$$x^*(k+1) = A(k)x^*(k) + u^*(k). \quad (2.3)$$

i) Причем в силу пункта ii) леммы 2.5 $x^*(k+1) \in \partial\mathcal{X}(N_{min} - k - 1, k + 1)$.

ii) В силу пункта iii) леммы 2.5

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(A(k)x^*(k), A(k)\mathcal{X}(N_{min} - k, k)) &= \\ &= \mathcal{N}(x^*(k+1), \mathcal{X}(N_{min} - k - 1, k + 1)) \cap \mathcal{N}(u^*, -\mathcal{U}(k)). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Откуда согласно пункту ii) леммы 2.3

$$(A^{-1}(k))^T\mathcal{N}(x^*(k), \mathcal{X}(N_{min} - k, k)) \subset \mathcal{N}(x^*(k+1), \mathcal{X}(N_{min} - k - 1, k + 1)).$$

iii) В силу пункта i) леммы 2.5 представление (2.3) единственно.

Теорема доказана согласно методу математической индукции.

□

Будем называть семейство векторов $\{\psi(0)\}_{k=0}^{N_{min}-1}$ сопряженными векторами системы (2.1), если для каждого $k = \overline{0, N_{min} - 1}$ выполнено условие

$$-\psi(k) \in \mathcal{N}(x^*(k), \mathcal{X}(N_{min} - k, k)).$$

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть $x_0 \in \partial\mathcal{X}(N_{min}, 0)$. Тогда семейство сопряженных векторов удовлетворяет рекуррентным соотношениям

$$\begin{aligned} \psi(k+1) &= (A^{-1}(k))^T \psi(k), \quad k = \overline{0, N_{min} - 2}. \\ -\psi(0) &\in \mathcal{N}(x_0, \mathcal{X}(N_{min}, 0)). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.2. Согласно пункту ii) теоремы 2.1 для каждого $k = \overline{0, N_{min} - 2}$

$$\begin{aligned} -\psi(k+1) &= -(A^{-1}(k))^T \psi(k) \in (A^{-1}(k))^T \mathcal{N}(x^*(k), \mathcal{X}(N_{min} - k, k)) \subset \\ &\subset \mathcal{N}(x^*(k+1), \mathcal{X}(N_{min} - k - 1, k + 1)). \end{aligned}$$

□

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть набор управлений $\{u^*(k)\}_{k=0}^{N_{min}-1}$ оптимален в задаче быстрого действия для системы (2.1), $x_0 \in \partial\mathcal{X}(N_{min}, 0)$. Тогда

$$\begin{aligned} i) \quad u^*(k) &= \arg \max_{u \in \mathcal{U}(k)} ((A^{-1}(k))^T \psi(k), u), \quad k = \overline{0, N_{min} - 1}, \\ ii) \quad &\text{оптимальное управление единственно.} \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.3. i) Согласно пункту ii) леммы 2.3 для каждого $k = \overline{0, N_{min} - 1}$ верно

$$-(A^{-1}(k))^T \psi(k) \in (A^{-1}(k))^T \mathcal{N}(x^*(k), \mathcal{X}(N_{min} - k, k)) = \mathcal{N}(A(k)x^*(k), A(k)\mathcal{X}(N_{min} - k, k)).$$

Тогда, учитывая (2.4),

$$-(A^{-1}(k))^T \psi(k) \in \mathcal{N}(u^*, -\mathcal{U}(k)),$$

или же

$$(A^{-1}(k))^T \psi(k) \in \mathcal{N}(u^*(k), \mathcal{U}(k)).$$

Тогда в силу леммы 2.2

$$\begin{aligned} u^*(k) &= \rho_{\mathcal{U}(k)}((A^{-1}(k))^T \psi(k)) = \\ &= \arg \max_{u \in \mathcal{U}(k)} ((A^{-1}(k))^T, u), \quad k = \overline{0, N_{min} - 1}. \end{aligned}$$

ii) Согласно пункту i) леммы 2.5 разложение (2.3) единственно. Тогда существует единственное оптимальное управление $u^*(k) = -u^*$ на каждом шаге.

□

Теперь рассмотрим случай

$$x_0 \in \text{int } \mathcal{X}(N_{min}, 0) \setminus \mathcal{X}(N_{min} - 1, 0). \quad (2.5)$$

Условие (2.5) приводит к ситуации, когда применение леммы 2.5, которая лежит в основе теорем 2.1-2.3, оказывается невозможным. При попытке формально использовать предложенный принцип максимума к случаю (2.5) не удастся определить начальное значение вектора сопряженной системы ψ_0 аналогично условию, предложенному в теореме 2.2. Это обусловлено тем, что невозможно построить нормальный конус $\mathcal{N}(x_0, \mathcal{X}(N_{min}, 0))$ для рассматриваемого случая.

Тем не менее существует способ обобщить принцип максимума для произвольного начального состояния системы. Однако это не дает новой информации, и для внутренних точек он приобретает вырожденный характер.

ЛЕММА 2.6. Пусть верно (2.5), набор управлений $\{u^*(k)\}_{k=0}^{N_{min}-1}$ оптимален в задаче быстрогодействия для системы (2.1) и удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned} u^*(k) &= \arg \max_{u \in \mathcal{U}(k)} ((A^{-1}(k))^T \psi(k), u), \quad k = \overline{0, N_{min} - 1}, \\ \psi(k+1) &= (A^{-1}(k))^T \psi(k), \quad k = \overline{0, N_{min} - 2}, \\ \psi(0) &= \psi_0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Тогда $\psi_0 = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2.6. Предположим, что существует $\psi_0 \neq 0$ такой, что выполнено условие леммы. Тогда согласно теоремам 2.2 и 2.3 набор управлений $\{u^*(k)\}_{k=0}^{N_{min}-1}$ оптимален в задаче быстрогодействия и для начального

состояния $\rho_{\mathcal{X}(N_{min},0)}(-\psi_0)$. Т.е.

$$\begin{cases} A(N_{min} - 1) \cdot \dots \cdot A(0)x_0 + A(N_{min} - 1) \cdot \dots \cdot A(1)u(0) + \dots + \\ + A(N_{min} - 1)u(N_{min} - 2) + u(N_{min} - 1) = 0, \\ A(N_{min} - 1) \cdot \dots \cdot A(0)\rho_{\mathcal{X}(N_{min},0)}(-\psi_0) + A(N_{min} - 1) \cdot \dots \cdot A(1)u(0) + \dots + \\ + A(N_{min} - 1)u(N_{min} - 2) + u(N_{min} - 1) = 0. \end{cases}$$

Откуда в силу невырожденности матриц последовательности \mathcal{A}

$$x_0 = \rho_{\mathcal{X}(N_{min},0)}(-\psi_0) \in \partial\mathcal{X}(N_{min}, 0).$$

Получили противоречие. Таким образом $\psi_0 = 0$.

□

Хотя лемма 2.6 позволяет обобщить принцип максимума на случай произвольного начального состояния $x_0 \in \mathcal{X}(N_{min}, 0)$, если выполнено (2.5), то рекуррентные соотношения (2.6) не позволяют вычислить оптимальное управление. Условие $\psi_0 = 0$ приводит к тому, что для каждого $k = \overline{0, N_{min} - 1}$ $\psi(k) = 0$, и как следствие

$$\text{Arg max}_{u \in \mathcal{U}(k)} ((A^{-1}(k))^T \psi(k), u) = \mathcal{U}(k).$$

Тем не менее возможно построить оптимальное управление, сведя рассматриваемый случай (2.5) к теореме 2.3. Обозначим через

$$\alpha = \mu(x_0, \mathcal{X}(N_{min}, 0)).$$

Рассмотрим вспомогательную систему управления $(\mathcal{A}, \mathcal{U}_\alpha)$

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(k)x(k) + u(k), \\ x(0) &= x_0, \quad u(k) \in \alpha\mathcal{U}(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \tag{2.7}$$

где $\mathcal{U}_\alpha = \{\alpha\mathcal{U}(k)\}_{k=0}^\infty$.

Для системы (2.7) аналогично определим семейство множеств 0-управляемости $\{\mathcal{X}_\alpha(N, k)\}_{N, k=0}^\infty$. Поскольку верно (2.5), то в силу определения функционала Минковского $\alpha < 1$.

ЛЕММА 2.7. Для системы управления (A, \mathcal{U}_α) для любых $N, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ выполнены соотношения

- i) $\mathcal{X}_\alpha(N, k) = \alpha \mathcal{X}(N, k)$,
- ii) $\mathcal{X}_\alpha(N, k) \subset \mathcal{X}(N, k)$,
- iii) $x_0 \in \partial \mathcal{X}_\alpha(N_{min}, 0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2.7. i) Согласно лемме 2.1 верно представление

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_\alpha(N, k) &= \sum_{i=0}^{N-1} (-A^{-1}(k) \cdot \dots \cdot A^{-1}(i+k)) \alpha \mathcal{U}(k+i) = \\ &= \alpha \sum_{i=0}^{N-1} (-A^{-1}(k) \cdot \dots \cdot A^{-1}(i+k)) \mathcal{U}(k+i) = \alpha \mathcal{X}(N, t). \end{aligned}$$

ii) Поскольку $0 \in \mathcal{X}(N, t)$, множество $\mathcal{X}(N, t)$ выпукло, $\alpha < 1$, то верно включение

$$\mathcal{X}_\alpha(N, t) = \alpha \mathcal{X}(N, t) \subset \mathcal{X}(N, t).$$

iii) По определению функционала Минковского $x_0 \in \alpha \mathcal{X}(N_{min}, 0) = \mathcal{X}_\alpha(N_{min}, 0)$. Но при этом для любого $\alpha' \in (0; \alpha)$ аналогичное включение неверно. Обозначим через $\varepsilon = \frac{1}{\alpha'} - \frac{1}{\alpha} > 0$, тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} x_0 + \varepsilon x_0 &= \frac{1}{\alpha'} x_0 \notin \mathcal{X}(N_{min}, 0), \\ x_0 + \varepsilon \alpha x_0 &\notin \mathcal{X}_\alpha(N_{min}, 0). \end{aligned}$$

Т.е. не существует ни одной окрестности точки x_0 , которая лежала бы полностью внутри $\mathcal{X}_\alpha(N_{min}, 0)$. По определению граничной точки $x_0 \in \partial \mathcal{X}(N_{min}, 0)$.

□

ТЕОРЕМА 2.4. Пусть траектория $\{x'(k)\}_{k=0}^{N_{min}}$ системы (A, \mathcal{U}_α) определяется по соотношениям

- i) $x'(0) = x_0$,
- ii) $u'(k) = \alpha \arg \max_{u \in \mathcal{U}(k)} ((A^{-1}(k))^T \psi(k), u)$,
- iii) $-\psi(k) \in \mathcal{N}(x'(k), \mathcal{X}_\alpha(N_{min} - k, k))$,
- iv) $x'(k+1) = A(k)x'(k) + u'(k)$, $k = \overline{0, N_{min} - 1}$.

Тогда траектория $\{x'(k)\}_{k=0}^{N_{min}}$ и управление $\{u'(k)\}_{k=0}^{N_{min}-1}$ оптимальны в задаче быстрогодействия для системы (2.1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.4. Утверждение вытекает непосредственно из того факта, что система управления $(\mathcal{A}, \mathcal{U}_\alpha)$ в силу леммы 2.7 удовлетворяет условиям принципа максимума для граничных точек, доказанного в теореме 2.3.

□

2.4. Случай множества допустимых значений управлений в форме эллипсоида

Рассмотрим частный случай системы (2.1), когда для всех $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ верно $\mathcal{U}(k) = \{u \in \mathbb{R}^n : (u, H(k)u) \leq 1\}$, где $H(k) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – положительно определенная матрица. Поскольку отображение (u, Hu) строго выпукло по $u \in \mathbb{R}^n$ для любой положительно определенной матрицы $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$, то каждое $\mathcal{U}(k) \in \mathcal{U}_2$.

Как показано в [103] для любого $k \in \mathbb{N}$ множество $\mathcal{E}_k = A^{-1}(0) \cdot \dots \cdot A^{-1}(k-1)\mathcal{U}(k)$ – эллипсоид, порождаемый матрицей

$$\tilde{H}(k) = (A(k-1) \cdot \dots \cdot A(0))^T H(k) (A(k-1) \cdot \dots \cdot A(0)).$$

В силу леммы 2.1 любое множество $\mathcal{X}(N, 0)$ можно представить в виде алгебраической суммы эллипсоидов:

$$\mathcal{X}(N, 0) = \sum_{k=1}^N \mathcal{E}_k.$$

ЛЕММА 2.8. Пусть для всех $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ выполнено: $\mathcal{U}(k) = \{u \in \mathbb{R}^n : (u, H(k)u) \leq 1\}$, $H(k) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – положительно определенная матрица, $x_0 \in \partial\mathcal{X}(N_{min}, 0)$. Тогда начальное условие сопряженной системы ψ_0 может быть найдено из условия

$$-x_0 = \sum_{k=1}^{N_{min}} \frac{\tilde{H}^{-1}(k)\psi_0}{\sqrt{(\psi_0, \tilde{H}^{-1}(k)\psi_0)}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2.8. Согласно пунктам $i - ii)$ леммы 2.5 для $x_0 \in \partial\mathcal{X}(N_{min}, 0)$ существует единственное разложение

$$x_0 = \sum_{k=1}^{N_{min}} x^k, \quad x^k \in \partial\mathcal{E}_k. \quad (2.8)$$

В силу пункта *iii*) леммы 2.5

$$-\psi_0 \in \mathcal{N}(x_0, \mathcal{X}(N_{min}, 0)) = \bigcap_{k=1}^{N_{min}} \mathcal{N}(x^k, \mathcal{E}_k). \quad (2.9)$$

Поскольку эллипсоиды имеют гладкую границу, то каждый нормальный конус представляет собой луч

$$\mathcal{N}(x^k, \mathcal{E}_k) = \text{cone}\{\nabla_x(x, \tilde{H}(k)x)|_{x=x^k}\} \setminus \{0\}, \quad k = \overline{1, N_{min}}.$$

Тогда условие (2.9) может быть представлено в виде

$$-\psi_0 \in \mathcal{N}(x_0, \mathcal{X}(N_{min}, 0)) = \mathcal{N}(x^k, \mathcal{E}_k), \quad k = \overline{1, N_{min}}.$$

В силу леммы 2.2 сопряженный вектор ψ_0 может быть найден из условий

$$x^k = \rho_{\mathcal{E}_k}(-\psi_0) = \arg \max_{(x, \tilde{H}(k)x) \leq 1} (-\psi_0, x), \quad k = \overline{1, N_{min}}. \quad (2.10)$$

Каждый x^k представляет собой точку максимума линейной функции с квадратичным ограничением, которая может быть найдена аналитически при помощи метода множителей Лагранжа и будет иметь следующий вид:

$$x^k = \frac{-\tilde{H}^{-1}(k)\psi_0}{\sqrt{(\psi_0, \tilde{H}^{-1}(k)\psi_0)}}, \quad k = \overline{1, N_{min}}.$$

Подставив полученное выражение в (2.8), получаем утверждение леммы.

□

Система уравнений, предложенная в лемме 2.8, для нахождения вектора ψ_0 не является линейной и имеет неединственное решение, так как правая часть инвариантна к домножению вектора ψ_0 на произвольное положительное число.

Если дополнить систему уравнений условием

$$(\psi_0, \psi_0) = 1,$$

то итоговая система уравнений

$$\begin{cases} -x_0 = \sum_{k=1}^{N_{min}} \frac{\tilde{H}^{-1}(k)\psi_0}{\sqrt{(\psi_0, \tilde{H}^{-1}(k)\psi_0)}}, \\ (\psi_0, \psi_0) = 1, \end{cases} \quad (2.11)$$

будет иметь единственное решение, что позволяет использовать численные методы для его вычисления.

ЛЕММА 2.9. Пусть для всех $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ выполнено: $\mathcal{U}(k) = \{u \in \mathbb{R}^n : (u, H(k)u) \leq 1\}$, $H(k) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – положительно определенная матрица, $x_0 \in \partial\mathcal{X}(N_{min}, 0)$, ψ_0 удовлетворяет (2.11), набор управлений $\{u^*(k)\}_{k=0}^{N_{min}-1}$ – оптимален в задаче быстрогодействия системой (2.1). Тогда

$$u^*(k) = \frac{A(k) \cdot \dots \cdot A(0) \tilde{H}^{-1}(k+1) \psi_0}{\sqrt{(\psi_0, \tilde{H}^{-1}(k+1) \psi_0)}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2.9. Согласно теоремам 2.2 и 2.3 оптимальное управление может быть вычислено, исходя из соотношений (2.6). В этом случае аналогично решению оптимизационной задачи (2.10) получим

$$\begin{aligned} u^*(k) &= \frac{H^{-1}(k)(A^{-1}(k))^T \psi(k)}{\sqrt{((A^{-1}(k))^T \psi(k), H^{-1}(k)(A^{-1}(k))^T \psi(k))}} = \\ &= \frac{H^{-1}(k)(A^{-1}(k))^T \cdot \dots \cdot (A^{-1}(0))^T \psi_0}{\sqrt{((A^{-1}(k))^T \cdot \dots \cdot (A^{-1}(0))^T \psi_0, H^{-1}(k)(A^{-1}(k))^T \cdot \dots \cdot (A^{-1}(0))^T \psi_0)}} = \\ &= \frac{A(k) \cdot \dots \cdot A(0) \tilde{H}^{-1}(k+1) \psi_0}{\sqrt{(\psi_0, \tilde{H}^{-1}(k+1) \psi_0)}}, \quad 0, N_{min} - 1. \end{aligned}$$

□

2.5. Задача оптимальной по быстрдействию коррекции орбиты спутника

Задача коррекции орбиты спутника известна достаточно давно и рассматривалась в различных монографиях [6, 7, 44, 46, 47, 66]. Необходимость управления движением спутниковой системы может быть обусловлена различными факторами, которые можно разделить на две группы. Первая группа факторов связана с невозможностью точно вывести спутник на расчетную орбиту из-за ограниченных технических возможностей. Вторая группа факторов связана с внешними возмущениями, оказывающими негативное влияние на эволюцию траектории спутника. В результате действия данных факторов спутник оказывается в некоторой малой окрестности расчетной траектории, в связи с

чем возникает задача коррекции фактической орбиты и удержания спутника в орбитальной структуре.

Коррекция движения спутника осуществляется посредством включения двигателей малой тяги. Существуют различные подходы к построению математической модели движения спутника на круговой орбите, которые в конечном счете определяют оптимизационную задачу. В [44, 46, 47] изложен стохастический подход, при котором все возмущающие факторы рассматриваются в виде случайных процессов. Известны результаты для вероятностного критерия [2]. В [46] предложено решение задачи коррекции с критерием в форме квантили. В работах [6, 7] рассматривается детерминированный подход и задача определения оптимальных моментов времени для проведения коррекции. Но при этом во всех описанных работах число корректирующих импульсов является фиксированным.

В данном разделе решается задача быстродействия для системы управления положением спутника на околокруговой орбите. Предполагается, что коррекция движения спутника осуществляется посредством двигателей импульсной тяги. Корректирующие импульсы исполняются без ошибок через равные промежутки времени. Требуется за минимальное число корректирующих импульсов вернуть спутник на исходную круговую траекторию, с которой по каким-либо причинам он сошел.

Как показано в [7, 47] движение спутника на круговой орбите описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{r} &= v_R, \\ \dot{\theta} &= \frac{v_T}{r}, \\ \dot{v}_R &= \frac{v_R^2}{r} - \frac{1}{r^2}, \\ \dot{v}_T &= -\frac{v_R v_T}{r}, \end{aligned}$$

где r – расстояние от начала координат до спутника, θ – угол поворота, v_R и v_T – радиальная и трансверсальная составляющие скорости спутника соответственно.

Круговая орбита, на которой должен находиться спутник описывается значениями переменных r_0 , v_{R0} и v_{T0} . Значение θ в рассматриваемой задаче не представляет интереса. Обозначим отклонения реальных значений вектора состояния от желаемых следующим образом:

$$\begin{aligned}\Delta r &= r - r_0, \\ \Delta v_R &= v_R - v_{R0}, \\ \Delta v_T &= v_T - v_{T0}.\end{aligned}$$

Предполагая, что отклонения невелики, перейдем к линеаризованной системе

$$\begin{aligned}\Delta \dot{r} &= \Delta v_R, \\ \Delta \dot{v}_R &= \Delta r + 2\Delta v_T, \\ \Delta \dot{v}_T &= -\Delta v_R.\end{aligned}$$

Введя обозначение $z(t) = (\Delta r, \Delta v_R, \Delta v_T)^T$, запишем задачу Коши в векторно-матричном виде:

$$z(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} z(t), z(0) = z_0.$$

Данная система дифференциальных уравнений имеет решение

$$z(t) = \begin{pmatrix} -\cos t + 2 & \sin t & -2\cos t + 2 \\ \sin t & \cos t & 2\sin t \\ \cos t - 1 & -\sin t & 2\cos t - 1 \end{pmatrix} z_0.$$

Поскольку управление подается импульсно через равные промежутки времени Δt , то можно рассматривать в качестве наблюдаемых параметров системы вектор состояния в моменты времени $k\Delta t$, т.е. непосредственно перед выполнением $k + 1$ -го корректирующего импульса, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Пусть $w_1(k)$, $w_2(k) \in [-\alpha_{max}; \alpha_{max}]$ – корректирующие импульсы, направленные вдоль радиальной и тангенциальной направляющих скоростей соответственно и исполняемые в момент времени $k\Delta t$, $y(k) = z(k\Delta t)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Тогда

вектор $y(k+1)$ может быть найден как значение в момент времени Δt решения следующей задачи Коши:

$$z(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} z(t),$$

$$z(0) = y(k) + (0, w_1(k), w_2(k))^T.$$

В результате получим конечно-разностные рекуррентные соотношения:

$$y(k+1) = \tilde{A}y(k) + \tilde{B}w(k),$$

$$y(0) = z_0, \quad w(k) \in [-\alpha_{max}; \alpha_{max}] \times [-\alpha_{max}; \alpha_{max}], \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -\cos \Delta t + 2 & \sin \Delta t & -2 \cos \Delta t + 2 \\ \sin \Delta t & \cos \Delta t & 2 \sin \Delta t \\ \cos \Delta t - 1 & -\sin \Delta t & 2 \cos \Delta t - 1 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} \sin \Delta t & -2 \cos \Delta t + 2 \\ \cos \Delta t & 2 \sin \Delta t \\ -\sin \Delta t & 2 \cos \Delta t - 1 \end{pmatrix}, \quad w(k) = \begin{pmatrix} w_1(k) \\ w_2(k) \end{pmatrix}.$$

В полученной системе управления, в отличие от (2.1), вектор состояния и управления имеют различную размерность, что делает неприменимым принцип максимума сформулированный в теоремах 2.1-2.3. Сведем задачу к рассматриваемому случаю, произведя замену.

$$\tilde{u}(2k) = \begin{pmatrix} w_1(3k) \\ w_2(3k) \\ w_1(3k+1) \end{pmatrix}, \quad \tilde{u}(2k+1) = \begin{pmatrix} w_2(3k+1) \\ w_1(3k+2) \\ w_2(3k+2) \end{pmatrix},$$

$$x(2k) = y(3k), \quad x(2k+1) = \tilde{A}y(3k+1) + \tilde{B} \begin{pmatrix} w_1(3k+1) \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$A(k) = \begin{cases} \tilde{A}^2, & k = 0, 2, 4, \dots, \\ \tilde{A}, & k = 1, 3, 5, \dots, \end{cases}$$

$$B(k) = \begin{cases} \left(\tilde{A} \begin{pmatrix} \sin \Delta t \\ \cos \Delta t \\ -\sin \Delta t \end{pmatrix} \middle| \tilde{A} \begin{pmatrix} -2 \cos \Delta t + 2 \\ 2 \sin \Delta t \\ 2 \cos \Delta t - 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} \sin \Delta t \\ \cos \Delta t \\ -\sin \Delta t \end{pmatrix} \right), & k = 0, 2, 4, \dots, \\ \left(\tilde{A} \begin{pmatrix} -2 \cos \Delta t + 2 \\ 2 \sin \Delta t \\ 2 \cos \Delta t - 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} \sin \Delta t \\ \cos \Delta t \\ -\sin \Delta t \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -2 \cos \Delta t + 2 \\ 2 \sin \Delta t \\ 2 \cos \Delta t - 1 \end{pmatrix} \right), & k = 1, 3, 5, \dots \end{cases}$$

Аппроксимируем множество допустимых значений управлений, которое не является строго выпуклым, шаром радиуса α_{max} с центром в начале координат. В итоге получим линейную нестационарную дискретную систему управления следующего вида:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(k)x(k) + B(k)\tilde{u}(k), \\ x(0) &= z_0, \quad \tilde{u}(k) \in \{u \in \mathbb{R}^3 : (u, u) \leq \alpha_{max}^2\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Или же эквивалентную ей систему

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(k)x(k) + u(k), \\ x(0) &= z_0, \quad u(k) \in \mathcal{U}(k), \\ \mathcal{U}(k) &= \{u \in \mathbb{R}^3 : (u, (B^{-1}(k))^T B^{-1}(k)u) \leq \alpha_{max}^2\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \tag{2.12}$$

Каждое множество $\mathcal{U}(k)$ является эллипсоидом в \mathbb{R}^3 , т.е. принадлежит классу \mathbb{U}_2 . Тогда система (2.12) удовлетворяет условиям теорем 2.1-2.4 и лемм 2.8 и 2.9.

Проведем численные расчеты для следующих значений параметров:

$$\begin{aligned} \Delta t &= 0.25, \\ \alpha_{max} &= 0.0035, \\ z_0 &= 10^{-2} \cdot (-0.37787, -0.39109, 1.41512)^T. \end{aligned}$$

Наименьшее число шагов для системы (2.7) составит $N_{min} = 4$. Значение α из теоремы 2.4 составляет

$$\alpha = \mu(z_0, \mathcal{X}(4, 0)) = 0.9286.$$

Верно включение $z_0 \in \partial \mathcal{X}_{0.9286}(4, 0)$.

Из системы уравнений (2.11) вычислим ψ_0 , оптимальное управление определим согласно лемме 2.9. Представим полученные результаты в виде таблиц 2.1 и 2.2

Таблица 2.1. Оптимальная траектория системы (2.12)

k	$x_1^*(k)$	$x_2^*(k)$	$x_3^*(k)$	$\psi_1(k)$	$\psi_2(k)$	$\psi_3(k)$
0	$-0.37787 \cdot 10^{-2}$	$-0.39109 \cdot 10^{-2}$	$1.41512 \cdot 10^{-2}$	0.1294	0.2360	-0.9631
1	$-0.30870 \cdot 10^{-2}$	$0.58472 \cdot 10^{-2}$	$1.03056 \cdot 10^{-2}$	0.1500	-0.3167	-0.9219
2	$-0.19824 \cdot 10^{-2}$	$0.59918 \cdot 10^{-2}$	$0.47280 \cdot 10^{-2}$	0.2617	-0.5720	-0.6986
3	$0.00698 \cdot 10^{-2}$	$0.35937 \cdot 10^{-2}$	$0.07851 \cdot 10^{-2}$	0.6534	-0.9623	0.0850
4	0	0	0			

Таблица 2.2. Оптимальное управление системы (2.12)

k	$u_1^*(k)$	$u_2^*(k)$	$u_3^*(k)$
0	$-0.04354 \cdot 10^{-2}$	$-0.24779 \cdot 10^{-2}$	$-0.27185 \cdot 10^{-2}$
1	$-0.08869 \cdot 10^{-2}$	$-0.40092 \cdot 10^{-2}$	$-0.35862 \cdot 10^{-2}$
2	$-0.17352 \cdot 10^{-2}$	$-0.52475 \cdot 10^{-2}$	$-0.01554 \cdot 10^{-2}$
3	$-0.10099 \cdot 10^{-2}$	$-0.38877 \cdot 10^{-2}$	$0.01550 \cdot 10^{-2}$

2.6. Выводы по главе 2

1. Построено в явном виде множество 0-управляемости за произвольное число шагов для линейной нестационарной дискретной системы с конечномерным вектором состояния и ограниченным управлением.

2. Сформулированы и доказаны свойства класса строго выпуклых множеств, в том числе единственность разложения граничной точки суммы двух множеств из рассматриваемого класса.

3. Сформулирован и доказан в виде принципа максимума критерий оптимальности управления в задаче быстрогодействия для случая, когда начальное состояние является граничной точкой множества 0-управляемости, построены уравнения сопряженной системы.

4. Продемонстрирован вырожденный характер принципа максимума для случая, когда начальное состояние является внутренней точкой для множества 0-управляемости.

5. Для случая, когда начальное состояние является внутренней точкой для множества 0-управляемости, разработан метод сведения задачи быстродействия к случаю граничной точки.

6. Построено решение задачи быстродействия в явном виде для случая, когда множество допустимых значений управлений представляет собой эллипсоид.

7. Построена дискретная математическая модель движения спутника по околокруговой орбите. Решена задача коррекции орбиты спутника за минимальное число управляющих импульсных воздействий.

Основные результаты главы опубликованы в [28]

Глава 3. Алгоритм решения задачи быстродействия для линейной дискретной системы с линейными ограничениями

Целью данной главы является разработка эффективного численного алгоритма, позволяющего решить задачу быстродействия для линейной автономной дискретной системы с линейными ограничениями на управление. Существенной особенностью является тот факт, что в данном случае при построении алгоритма удастся ограничиться исключительно средствами линейного программирования. Это позволяет легко реализовать алгоритм на практике. Также целью является разработка метода, основанного на полиэдральной аппроксимации множества допустимых значений управлений, который позволил бы свести общую постановку задачи быстродействия к рассмотренному случаю линейных ограничений.

В разделе 3.1. производятся теоретические выкладки, являющиеся обоснованием алгоритма решения задачи быстродействия. В разделе 3.2. представлен алгоритм решения задачи быстродействия. В разделе 3.3. предложена модификация алгоритма из раздела 3.2. для случая скалярного управления. В разделе 3.4. разработан метод сведения общей задачи быстродействия к рассмотренному случаю линейных ограничений. В разделе 3.5. разработана дискретная математическая модель системы гашения сейсмических колебаний для высотного сооружения и решена задача оптимального по быстродействию демпфирования здания, расположенного в зоне сейсмической активности. В разделе 3.6. сформулированы выводы по главе 3.

3.1. Обоснование алгоритма

В данной главе рассматривается система (1.1) в случае, когда пространство вектора состояния является конечномерным: $\mathbb{L} = \mathbb{R}^n$. Пространство \mathbb{R}^n предполагается евклидовым со скалярным произведением, определяемым соот-

ношением

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i,$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Рассматриваемый класс систем управления, удовлетворяющих соотношениям вида (1.1) в конечномерном случае, эквивалентен классу систем, описываемых классическими соотношениями следующего вида:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bv(k), \\ x(0) &= x_0, \quad v(k) \in \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^m, \quad x(k) \in \mathbb{R}^n, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ A &\in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad B \in \mathbb{R}^{n \times m}. \end{aligned}$$

Данное соответствие может быть установлено в результате переобозначения $Bv(k) = u(k)$, $B\mathcal{V} = \mathcal{U}$.

Для построения численного алгоритма решения задачи быстрогодействия сузим класс, из которого выбирается множество допустимых значений управлений системы (A, \mathcal{U}) , до класса выпуклых многогранников или же ограниченных полиэдров, что в конечномерном евклидовом пространстве эквивалентно. То есть далее будем предполагать, что существуют $p^1, \dots, p^L \in \mathbb{R}^n$ и $a_1, \dots, a_L \in \mathbb{R}$ такие, что

$$\mathcal{U} = \bigcap_{l=1}^L \{u \in \mathbb{R}^n : (u, p^l) \leq a_l\}. \quad (3.1)$$

Приведем некоторые свойства выпуклых многогранников в конечномерном пространстве \mathbb{R}^n . Под многогранником будем понимать выпуклую оболочку любого конечного множества точек

$$\mathcal{X} = \text{conv}\{x^1, \dots, x^M\}.$$

Множество вершин или, что то же самое, множество крайних точек \mathcal{X} обозначим следующим образом:

$$\text{Ext } \mathcal{X} = \{x \in \mathcal{X} : \nexists x', x'' \in \mathcal{X}, \lambda \in (0, 1), x_1 \neq x_2 : x = \lambda x' + (1 - \lambda)x''\}.$$

Хотя выполнено равенство

$$\mathcal{X} = \text{conv Ext } \mathcal{X} = \text{conv}\{x^1, \dots, x^M\},$$

множества $\text{Ext } \mathcal{X}$ и $\{v^1, \dots, v^M\}$ не всегда совпадают. В общем случае верно только

$$\text{Ext } \mathcal{X} \subset \{x^1, \dots, x^M\}.$$

Приведем ряд вспомогательных утверждений, необходимых для решения поставленной задачи.

ЛЕММА 3.1 (СЛЕДСТВИЕ 19.3.2 [69]). *Пусть $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^n$ – многогранники,*

$$\mathcal{X} = \text{conv}\{x^1, \dots, x^M\}, \quad \mathcal{Y} = \text{conv}\{y^1, \dots, y^L\}.$$

Тогда алгебраическая сумма Минковского $\mathcal{X} + \mathcal{Y}$ также является многогранником, причем

$$\mathcal{X} + \mathcal{Y} = \text{conv}\{x^i + y^j, \quad i = \overline{1, M}, \quad j = \overline{1, L}\}.$$

Лемма 3.1 гарантирует, что класс многогранников в \mathbb{R}^n замкнут относительно операции сложения, и позволяет достаточно просто построить верхнюю оценку множества крайних точек алгебраической суммы двух многогранников. Сформулируем этот факт в виде следующего следствия.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. *Пусть $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^n$ – многогранники,*

$$\mathcal{X} = \text{conv}\{x^1, \dots, x^M\}, \quad \mathcal{Y} = \text{conv}\{y^1, \dots, y^L\}.$$

Тогда

$$\text{Ext}(\mathcal{X} + \mathcal{Y}) \subset \{x^i + y^j, \quad i = \overline{1, M}, \quad j = \overline{1, L}\}.$$

ЛЕММА 3.2 (СЛЕДСТВИЕ 19.5.1 [69]). *Пусть $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ – многогранник, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – невырожденная матрица.*

Тогда

$$\text{Ext}(A\mathcal{X}) = A(\text{Ext } \mathcal{X}).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Хотя класс всех выпуклых многогранников в \mathbb{R}^n замкнут относительно сложения и линейного невырожденного преобразования, он не является линейным пространством.

Лемма 3.1 позволяет построить верхнюю оценку множества всех вершин алгебраической суммы двух многогранников. Но многие точки в построенной

оценке могут не являться вершинами, причем их количество будет накапливаться с экспоненциальной скоростью. Для определения множества крайних точек может быть использован алгоритм быстрой оболочки [80].

Сформулируем критерий принадлежности произвольной точки выпуклому многограннику при помощи функционала Минковского:

$$\mu(x, \mathcal{X}) = \inf\{\alpha > 0: x \in \alpha\mathcal{X}\}.$$

Если множество $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ допускает представление

$$\mathcal{X} = \text{conv}\{x^1, \dots, x^M\},$$

то из определения следует, что значение функционала Минковского может быть вычислено как решение задачи линейного программирования

$$\begin{aligned} \alpha &\rightarrow \min_{\alpha, \lambda_1, \dots, \lambda_M \in \mathbb{R}}, \\ x &= \sum_{i=1}^M \lambda_i x^i, \\ \sum_{i=1}^M \lambda_i &= \alpha, \\ 0 &\leq \lambda_i, \quad i = \overline{1, M}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

ЛЕММА 3.3. Пусть $\mathcal{X} = \text{conv}\{x^1, \dots, x^M\} \subset \mathbb{R}^n$, $0 \in \mathcal{X}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Тогда $x \in \mathcal{X}$ в том и только в том случае, когда $\mu(x, \mathcal{X}) \leq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.3. Пусть $x \in \mathcal{X}$. Тогда существуют $\lambda_1, \dots, \lambda_M \in [0; 1]$ такие, что

$$x = \sum_{i=1}^M \lambda_i x^i, \quad \sum_{i=1}^M \lambda_i = 1.$$

То есть существует точка $(1, \lambda_1, \dots, \lambda_M)$, удовлетворяющая ограничениям задачи (3.2). Тогда

$$\mu(x, \mathcal{X}) = \alpha^* \leq 1.$$

Пусть $\mu(x, \mathcal{X}) \leq 1$. Тогда существует точка $(\alpha^*, \lambda_1^*, \dots, \lambda_M^*)$ – решение задачи (3.2), удовлетворяющее условию $\alpha^* \leq 1$. То есть существуют $\lambda_1^*, \dots, \lambda_M^* \in$

$[0; 1]$ такие, что

$$x = \sum_{i=1}^M \lambda_i^* x^i, \quad \sum_{i=1}^M \lambda_i^* = \alpha^*.$$

Обозначим $\lambda_{M+1}^* = 1 - \alpha^*$. Тогда

$$x = \sum_{i=1}^M \lambda_i^* x^i + \lambda_{M+1}^* \cdot 0, \quad \sum_{i=1}^{M+1} \lambda_i^* = 1.$$

Поскольку $0 \in \mathcal{X}$, верно включение $x \in \mathcal{X}$.

□

На основе лемм 3.1 и 3.2 сформулируем еще одно свойство класса множеств 0-управляемости.

ЛЕММА 3.4. *Пусть семейство множеств $\{\mathcal{X}(N)\}_{N=0}^{\infty}$ определяется соотношениями (1.2), множество допустимых значений управлений удовлетворяет (3.1).*

Тогда для каждого $N \in \mathbb{N}$ множество $\mathcal{X}(N)$ – многогранник.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.4. Согласно лемме 3.2 множества $A^{-1}\mathcal{U}, \dots, A^{-N}\mathcal{U}$ – многогранники. Откуда в силу леммы 3.1 следует, что алгебраическая сумма

$$A^{-1}\mathcal{U} + \dots + A^{-N}\mathcal{U}$$

также является многогранником. Тогда согласно лемме 1.1 $\mathcal{X}(N)$ – многогранник.

□

Используя алгоритм быстрой оболочки, следствие 1.1 и леммы 3.1, 3.2, для произвольного числа $N \in \mathbb{N}$ возможно построить точное описание $\text{Ext } \mathcal{X}(N)$. Тогда на основании критерия оптимальности управления, базирующегося на понятии класса множеств 0-управляемости, и лемм 3.3 и 3.4 удастся сформулировать критерий оптимальности управления в рассматриваемой задаче быстрого действия для системы (A, \mathcal{U}) .

Для этого определим отображение

$$S_N(x) = \arg \min_{u \in \mathcal{U}} \mu(x + u, \mathcal{X}(N)).$$

С учетом (3.2) и (3.1) вычисление значения $S_N(x)$ в любой точке $x \in \mathbb{R}^n$ сводится к решению ЗЛП

$$\begin{aligned} \alpha &\rightarrow \min_{\alpha, \lambda_1, \lambda_M, u}, \\ x + u &= \sum_{i=1}^M \lambda_i x^i, \\ \sum_{i=1}^M \lambda_i &\leq \alpha, \\ 0 &\leq \lambda_i, \quad i = \overline{1, M}, \\ (u, p^l) &\leq a_l, \quad l = \overline{1, L}, \end{aligned}$$

где $\text{Ext } \mathcal{X}(N) = \{x^1, \dots, x^M\}$.

Теперь сформулируем теорему, предлагающую вид оптимального управления в задаче быстрогодействия для системы (1.1) в случае (3.1).

ТЕОРЕМА 3.1. *Пусть траектория системы (1.1) $\{x^*(k)\}_{k=0}^{N_{min}}$ определяется соотношениями*

$$\begin{aligned} x^*(k+1) &= Ax^*(k) + S_{N_{min}-k-1}(Ax^*(k)), \quad k = \overline{0, N_{min}-1}, \\ x^*(0) &= x_0. \end{aligned}$$

Тогда

- i) $x^*(N_{min}) = 0$,
- ii) оптимальное управление на k -м шаге имеет вид

$$u^*(k) = S_{N_{min}-k-1}(Ax^*(k)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.1. Так как $x^*(0) \in \mathcal{X}(N_{min})$, то существует вектор $\tilde{u} \in \mathcal{U}$ такой, что

$$Ax^*(0) + \tilde{u} \in \mathcal{X}(N_{min} - 1).$$

Тогда в силу леммы 1.1

$$\mu(Ax^*(0) + \tilde{u}, \mathcal{X}(N_{min} - 1)) \leq 1,$$

Откуда согласно определению функционала $S_N(x)$

$$\mu(Ax^*(0) + S_{N_{min}-1}(Ax(0)), \mathcal{X}(N_{min} - 1)) \leq \mu(Ax^*(0) + \tilde{u}, \mathcal{X}(N_{min} - 1)) \leq 1.$$

$$x^*(1) = Ax^*(0) + S_{N_{min}-1}(Ax^*(0)) \in \mathcal{X}(N_{min} - 1).$$

Продолжая рассуждения по индукции, получим

$$x^*(N_{min}) \in \mathcal{X}(0) = \{0\}.$$

$$x^*(N_{min}) = 0.$$

□

3.2. Алгоритм решения задачи быстродействия в случае линейных ограничений

Построим алгоритм решения поставленной задачи быстродействия для линейной дискретной конечномерной автономной системы на основе лемм 3.1, 3.2 и теоремы 3.1. Алгоритм состоит из трех этапов, начиная с нулевого. На нулевом этапе проверяется равенство $x_0 = 0$ с целью исключить тривиальные случаи. На первом этапе посредством последовательного построения множеств 0-управляемости определяется оптимальное значение критерия N_{min} . На втором этапе, исходя из известного значения N_{min} , последовательно на каждом шаге определяется оптимальное управление согласно теореме 3.1.

АЛГОРИТМ 3.1.

Этап 0.

0.1. Проверить равенство $x_0 = 0$. Если оно выполнено, то завершить алгоритм. Иначе перейти к этапу 1.

Этап 1.

1.1. Положить N равным 1.

1.2. Построить верхнюю оценку множества крайних точек $\mathcal{X}(N)$ согласно леммам 3.1 и 3.2.

1.3. Исключить из полученной в шаге 1.2 оценки некрайние точки согласно алгоритму быстрой оболочки [80].

1.4. Согласно лемме 3.3 проверить выполнение условия $x_0 \in \mathcal{X}(N)$, решив ЗЛП (3.2).

1.5. Если включение выполнено, то положить значение N_{min} равным N и перейти к этапу 2. Иначе увеличить значение N на единицу и перейти к шагу 1.2.

Этап 2.

2.1. Положить k равным 0.

2.2. Вычислить значение оптимального управления на k -м шаге $u^*(k)$ согласно теореме 3.1.

2.3. Вычислить значение вектора состояния на последующем шаге $x^*(k+1)$ согласно рекуррентным соотношениям (1.1).

2.4. Увеличить значение k на 1.

2.5. Если выполнено равенство $k = N_{min}$, то завершить алгоритм. Иначе перейти к шагу 2.2.

Разработанный алгоритм 3.1 позволяет решить задачу быстродействия для случая линейных ограничений. При этом для его реализации достаточно исключительно средств линейного программирования.

3.3. Модификация алгоритма для случая скалярного управления

В данном разделе рассмотрим случай одномерного множества допустимых значений управлений, симметричного относительно начала координат:

$$\mathcal{U} = \text{conv}\{-b; b\}. \quad (3.3)$$

Существенным отличием (3.3) от (3.1) является тот факт, что оптимальное управление может быть представлено в явном виде, что позволит избежать решения ЗЛП на шаге 2.2 алгоритма 3.1. Данный факт является следствием того, что фактически в случае (3.3) управление скалярно, а систему (1.1) можно представить в эквивалентном виде

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + bv(k), \\ x(0) &= x_0, \quad v(k) \in [-1; 1], \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \end{aligned}$$

Для решения поставленной задачи быстродействия проведем вспомогательные построения.

ЛЕММА 3.5. Пусть семейство множеств $\{\mathcal{X}(N)\}_{N=0}^{\infty}$ определяется соотношениями (1.2), множество допустимых значений управлений удовлетворяет условию (3.3).

Тогда для каждого $N \in \mathbb{N}$ существуют $q^1, \dots, q^{L(N)} \in \mathbb{R}^n$ такие, что

$$\mathcal{X}(N) = \bigcap_{l=1}^{L(N)} \{x \in \mathbb{R}^n : |(q^l, x)| \leq \sum_{k=1}^N |(q^l, A^{-k}b)|\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.5. Пусть $x \in \mathcal{X}(N)$. Тогда по определению множества 0-управляемости существуют $v(0), \dots, v(N-1) \in [-1; 1]$ такие, что

$$A^N x + A^{N-1} b v(0) + \dots + b v(N-1) = 0,$$

$$A^N(-x) + A^{N-1} b(-v(0)) + \dots + b(-v(N-1)) = 0.$$

Откуда следует, что $-x \in \mathcal{X}$. То есть множество \mathcal{X} симметрично относительно начала координат. С учетом леммы 3.4 множество $\mathcal{X}(N)$ представляет собой симметричный относительно начала координат полиэдр, то есть существуют $q^1, \dots, q^{L(N)} \in \mathbb{R}^n$ и $c_1, \dots, c_{L(N)} \in [0; +\infty)$ такие, что

$$\mathcal{X}(N) = \bigcap_{l=1}^{L(N)} \{x \in \mathbb{R}^n : |(q^l, x)| \leq c_l\}.$$

Определим числа c_l , $l = \overline{1, L(N)}$. Для этого вычислим максимальное значение величины (q^l, x) . Согласно лемме 1.1 и условию 3.3 для каждого $x \in \mathcal{X}(N)$ существуют $v_1, \dots, v_N \in [-1; 1]$ такие, что

$$x = \sum_{k=1}^N A^{-k} b v_k.$$

Тогда

$$\max_{x \in \mathcal{X}(N)} (q^l, x) = \max_{v_1, \dots, v_N \in [-1; 1]} (q^l, \sum_{k=1}^N A^{-k} b v_k) = \sum_{k=1}^N \max_{v_k \in [-1; 1]} (q^l, A^{-k} b v_k) = \sum_{k=1}^N |(q^l, A^{-k} b)|.$$

Таким образом

$$c_l \leq \sum_{k=1}^N |(q^l, A^{-k} b)|.$$

В силу леммы 1.1

$$\tilde{x} = \sum_{k=1}^N A^{-k} b \operatorname{sign}(q^l, A^{-k} b) \in \mathcal{X}(N).$$

Причем

$$(q^l, \tilde{x}) = \sum_{k=1}^N |(q^l, A^{-k} b)|,$$

то есть

$$c_l \geq \sum_{k=1}^N |(q^l, A^{-k} b)|.$$

Окончательно,

$$c_l = \sum_{k=1}^N |(q^l, A^{-k}b)|, \quad l = \overline{1, L(N)}.$$

□

Для построения оптимального управления определим следующий функционал:

$$P_N(x) = \frac{1}{2} \left(\min_{l=\overline{1, L(N)}: (q^l, b) \neq 0} \left[\frac{1}{|(q^l, b)|} \left[\sum_{k=1}^N |(q^l, A^{-k}b)| - \text{sign}((q^l, b))(q^l, x) \right] \right] + \right. \\ \left. + \max_{l=\overline{1, L(N)}: (q^l, b) \neq 0} \left[\frac{-1}{|(q^l, b)|} \left[\sum_{k=1}^N |(q^l, A^{-k}b)| + \text{sign}((q^l, b))(q^l, x) \right] \right] \right).$$

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть траектория системы (1.1) $\{x^*(k)\}_{k=0}^{N_{min}}$ определяется соотношениями

$$x^*(k+1) = Ax^*(k) + P_{N_{min}-k-1}(Ax^*(k)), \quad k = \overline{0, N_{min}-1}, \\ x^*(0) = x_0.$$

Тогда

- i) $x^*(N_{min}) = 0$,
- ii) оптимальное управление на k -м шаге имеет вид

$$u^*(k) = P_{N_{min}-k-1}(Ax^*(k)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.2. Так как $x^*(0) \in \mathcal{X}(N_{min})$, то существует $v^* \in [-1; 1]$ такой, что

$$Ax^*(0) + bv^* \in \mathcal{X}(N_{min}-1).$$

Согласно лемме 3.5 верно представление

$$\mathcal{X}(N_{min}-1) = \bigcap_{l=1}^{L(N_{min}-1)} \{x: (q^l, x) \leq \sum_{k=1}^{N_{min}-1} |(q^l, A^{-k}b)|\}.$$

Тогда для всех $l = \overline{1, L(N_{min}-1)}$

$$|(q^l, Ax^*(0) + bv^*)| \leq \sum_{k=1}^{N_{min}-1} |(q^l, A^{-k}b)|, \\ - \sum_{k=1}^{N_{min}-1} |(q^l, A^{-k}b)| \leq (q^l, Ax^*(0)) + v^*(q^l, b) \leq \sum_{k=1}^{N_{min}-1} |(q^l, A^{-k}b)|,$$

$$\begin{aligned}
 - \sum_{k=1}^{N_{min}-1} |(q^l, A^{-k}b)| - (q^l, Ax^*(0)) &\leq v^*(q^l, b) \leq \sum_{k=1}^{N_{min}-1} |(q^l, A^{-k}b)| - (q^l, Ax(0)), \\
 v^* &\leq \begin{cases} \frac{1}{(q^l, b)} \left[\sum_{k=1}^{N_{min}-1} |(q^l, A^{-k}b)| - (q^l, Ax^*(0)) \right], & (q^l, b) > 0, \\ \frac{-1}{(q^l, b)} \left[\sum_{k=1}^{N_{min}-1} |(q^l, A^{-k}b)| + (q^l, Ax^*(0)) \right], & (q^l, b) < 0, \end{cases} \\
 v^* &\geq \begin{cases} \frac{1}{(q^l, b)} \left[\sum_{k=1}^{N_{min}-1} |(q^l, A^{-k}b)| - (q^l, Ax^*(0)) \right], & (q^l, b) < 0, \\ \frac{-1}{(q^l, b)} \left[\sum_{k=1}^{N_{min}-1} |(q^l, A^{-k}b)| + (q^l, Ax^*(0)) \right], & (q^l, b) > 0, \end{cases} \\
 &\begin{cases} v^* \leq \frac{1}{|(q^l, b)|} \left[\sum_{k=1}^{N_{min}-1} |(q^l, A^{-k}b)| - \text{sign}((q^l, b))(q^l, Ax^*(0)) \right], \\ v^* \geq \frac{-1}{|(q^l, b)|} \left[\sum_{k=1}^{N_{min}-1} |(q^l, A^{-k}b)| + \text{sign}((q^l, b))(q^l, Ax^*(0)) \right]. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned}
 v_1 &= \max_{l=1, L(N_{min}-1): (q^l, b) \neq 0} \frac{-1}{|(q^l, b)|} \left[\sum_{k=1}^{N_{min}-1} |(q^l, A^{-k}b)| + \text{sign}((q^l, b))(q^l, Ax^*(0)) \right], \\
 v_2 &= \min_{l=1, L(N_{min}-1): (q^l, b) \neq 0} \frac{1}{|(q^l, b)|} \left[\sum_{k=1}^{N_{min}-1} |(q^l, A^{-k}b)| - \text{sign}((q^l, b))(q^l, Ax^*(0)) \right].
 \end{aligned}$$

Тогда управление $v^*(0)$ будет оптимальным в том и только в том случае, когда $v^*(0) \in [v_1; v_2]$. По определению функционала $P_N(x)$

$$P_{N_{min}-1}(x) = \frac{v_1 + v_2}{2} \in [v_1; v_2],$$

Тогда

$$x^*(1) = Ax^*(0) + P_{N_{min}-1}(Ax^*(0)) \in \mathcal{X}(N_{min} - 1).$$

Продолжая рассуждения по индукции, получим, что $x^*(N_{min}) \in \mathcal{X}(0) = \{0\}$.

□

При использовании теоремы 3.2 вместо теоремы 3.1 на шаге 2.2 алгоритма 3.1 удается избежать решения ЗЛП, что увеличивает скорость работы алгоритма.

3.4. Метод сведения решения задачи быстродействия для системы с выпуклым множеством допустимых значений управлений к случаю линейных ограничений

Метод сведения базируется на идее проведения полиэдральной аппроксимации выпуклого компактного множества допустимых значений управлений \mathcal{U} системы (1.1). Т.е. строится последовательность многогранников $\{\hat{\mathcal{U}}_N\}_{N \in \mathbb{N}}$, сходящаяся к \mathcal{U} . Каждый элемент последовательности является множеством вложенным в \mathcal{U} , то есть состоит только из допустимых значений управлений. А следовательно, для каждого номера $N \in \mathbb{N}$ управление, которое является оптимальным по быстродействию для системы

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + u(k), \\ x(0) &= x_0, \quad u(k) \in \hat{\mathcal{U}}_N, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \end{aligned}$$

также является допустимым для системы (1.1), переводящим её в начало координат.

Для исследования вопросов сходимости будем считать рассматриваемые множества точками метрического пространства (\mathbb{K}_n, ρ_H) , где

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_n &= \{X \subset \mathbb{R}^n : X \text{ - компакт}\}, \\ \rho_H(X, Y) &= \max\{\sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} \|x - y\|; \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} \|x - y\|\}. \end{aligned}$$

Метрическое пространство (\mathbb{K}_n, ρ_H) , как показано в [41], является полным.

Существует большое число различных методов полиэдральной аппроксимации выпуклых компактных множеств, представленных, например, в работах [13, 92, 95–98, 113, 114, 118]. Данные методы базируются на различных подходах и обладают отличными друг от друга сферами применения. Сравнительный анализ методов полиэдральной аппроксимации, их эффективности и свойств представлен в [37]. Для приближенного решения задачи быстродействия на основе полиэдральной аппроксимации множества \mathcal{U} был выбран метод, рассмотренный в работах [16, 70]. Он обладает сравнительной простотой реализации, достаточной эффективностью и свойством сходимости в метрике Хаусдорфа.

Идея метода основывается на построении равномерной сетки на n -мерном кубе и продолжении её на выпуклое множество.

Обозначим через $\mathcal{K} = [-1; 1]^n \subset \mathbb{R}^n$ n -мерный куб с центром в начале координат и длиной ребра равной 2:

$$\mathcal{K} = \{x \in \mathbb{R}^n : \max_{i=\overline{1, n}} |x_i| \leq 1\}.$$

Построим на $\partial\mathcal{K}$ равномерную сетку:

$$\mathcal{K}_N = \{x \in \partial\mathcal{K} : x_i = \frac{j}{N}, j = \overline{-N, N}, i = \overline{1, n}\}. \quad (3.4)$$

ЛЕММА 3.6. Пусть \mathcal{K}_N определено соотношением (3.4). Тогда

$$\text{card } \mathcal{K}_N = \sum_{i=1}^n C_n^i (2N - 1)^{n-i} 2^i.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.6. Разобьем \mathcal{K}_N на объединение непересекающихся множеств \mathcal{K}_N^i , где \mathcal{K}_N^i – множество тех точек из \mathcal{K}_N , у которых ровно i координат равны по модулю 1. Тогда мощность множества \mathcal{K}_N^i определяется через число сочетаний C_n^k следующим образом:

$$\text{card } \mathcal{K}_N^i = C_n^i (2N - 1)^{n-i} 2^i.$$

Учитывая, что

$$\mathcal{K}_N = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{K}_N^i, \quad \mathcal{K}_N^i \cap \mathcal{K}_N^j = \emptyset, \quad i \neq j,$$

получим

$$\text{card } \mathcal{K}_N = \sum_{i=1}^n \text{card } \mathcal{K}_N^i = \sum_{i=1}^n C_n^i (2N - 1)^{n-i} 2^i.$$

□

Исследуем асимптотические свойства сетки \mathcal{K}_N .

ЛЕММА 3.7. Пусть семейство сеток $\{\mathcal{K}_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ рассматривается как последовательность метрического пространства (\mathbb{K}_n, ρ_H) . Тогда

$$\mathcal{K}_N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \partial\mathcal{K}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.7. Рассмотрим величину $\rho_H(\mathcal{K}_N, \partial\mathcal{K})$. Поскольку $\mathcal{K}_N \subset \partial\mathcal{K}$ по построению, то

$$\rho_H(\mathcal{K}_N, \partial\mathcal{K}) = \max\left\{\sup_{x \in \mathcal{K}_N} \inf_{y \in \partial\mathcal{K}} \|x - y\|; \sup_{y \in \partial\mathcal{K}} \inf_{x \in \mathcal{K}_N} \|x - y\|\right\} = \sup_{y \in \partial\mathcal{K}} \inf_{x \in \mathcal{K}_N} \|x - y\|.$$

В силу того, что множество рациональных чисел является плотным в \mathbb{R} , для любого $y \in \partial\mathcal{K}$ найдутся $N \in \mathbb{N}$ и $N_1, \dots, N_n = \overline{-N, N}$ такие, что

$$\max_{i=1, n} \left|y_k - \frac{N_i}{N}\right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}.$$

Обозначим через

$$\hat{y} = \left(\frac{N_1}{N}, \dots, \frac{N_n}{N}\right)^T \in \mathcal{K}_N.$$

Тогда

$$\|y - \hat{y}\| = \left(\sum_{i=1}^n \left|y_k - \frac{N_i}{N}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \left(\sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}} = \varepsilon.$$

Тогда для любого $y \in \partial\mathcal{K}$

$$\inf_{x \in \mathcal{K}_N} \|y - x\| \leq \|y - \hat{y}\| < \varepsilon.$$

Поскольку это справедливо для любой точки из границы куба, то аналогичное соотношение справедливо и для точной верхней границы

$$\sup_{y \in \partial\mathcal{K}} \inf_{x \in \mathcal{K}_N} \|y - x\| \leq \|y - \hat{y}\| \leq \varepsilon.$$

Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall \tilde{N} > N \quad \rho_H(\mathcal{K}_{\tilde{N}}, \partial\mathcal{K}) < \varepsilon,$$

то есть

$$\mathcal{K}_N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \partial\mathcal{K}.$$

□

Теперь продолжим сетку \mathcal{K}_N на выпуклый компакт \mathcal{X} . Для этого построим непрерывное в метрическом пространстве (\mathbb{K}_n, ρ_H) преобразование, которое переводит куб \mathcal{K} в выпуклое множество \mathcal{X} . Для этого докажем ряд вспомогательных утверждений.

ЛЕММА 3.8. Пусть отображение $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — непрерывно во всем \mathbb{R}^n . Тогда отображение $T: \mathbb{K}_n \rightarrow \mathbb{K}_n$ также является непрерывным во всем \mathbb{K}_n , где

$$T(\mathcal{X}) = \{y \in \mathbb{R}^n: \exists x \in \mathcal{X}, y = T(x)\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.8. Так как $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ непрерывно, то

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0: \|x - y\| < \delta \Rightarrow \|T(x) - T(y)\| < \varepsilon.$$

Предположим, что $\rho_H(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) < \delta$, где $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in \mathbb{K}_n$. Тогда

$$\max\{\sup_{x \in \mathcal{X}} \inf_{y \in \mathcal{Y}} \|x - y\|; \sup_{y \in \mathcal{Y}} \inf_{x \in \mathcal{X}} \|x - y\|\} < \delta.$$

Обозначим через

$$x^*(y) = \arg \min_{x \in \mathcal{X}} \|x - y\|,$$

$$y^*(x) = \arg \min_{y \in \mathcal{Y}} \|x - y\|.$$

Тогда для любых $\tilde{x} \in \mathcal{X}, \tilde{y} \in \mathcal{Y}$

$$\|y^*(\tilde{x}) - \tilde{x}\| = \inf_{y \in \mathcal{Y}} \|\tilde{x} - y\| < \delta,$$

$$\|x^*(\tilde{y}) - \tilde{y}\| = \inf_{x \in \mathcal{X}} \|\tilde{y} - x\| < \delta.$$

Тогда

$$\|T(y^*(\tilde{x})) - T(\tilde{x})\| < \varepsilon, \quad \|T(x^*(\tilde{y})) - T(\tilde{y})\| < \varepsilon,$$

Откуда следует

$$\inf_{y \in \mathcal{Y}} \|T(y) - T(\tilde{x})\| < \|T(y^*(\tilde{x})) - T(\tilde{x})\| < \varepsilon,$$

$$\inf_{x \in \mathcal{X}} \|T(x) - T(\tilde{y})\| < \|T(x^*(\tilde{y})) - T(\tilde{y})\| < \varepsilon.$$

Поскольку эти соотношения верны для любых точек $\tilde{x} \in \mathcal{X}, \tilde{y} \in \mathcal{Y}$, аналогичные соотношения будут верны и для тех точек, на которых достигается максимум этих выражений, то есть

$$\sup_{x \in \mathcal{X}} \inf_{y \in \mathcal{Y}} \|T(x) - T(y)\| < \varepsilon,$$

$$\sup_{y \in \mathcal{Y}} \inf_{x \in \mathcal{X}} \|T(x) - T(y)\| < \varepsilon.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \varepsilon &> \max\left\{\sup_{x \in \mathcal{X}} \inf_{y \in \mathcal{Y}} \|T(x) - T(y)\|; \sup_{y \in \mathcal{Y}} \inf_{x \in \mathcal{X}} \|T(x) - T(y)\|\right\} = \\ &= \max\left\{\sup_{x \in T(\mathcal{X})} \inf_{y \in T(\mathcal{Y})} \|x - y\|; \sup_{y \in T(\mathcal{Y})} \inf_{x \in T(\mathcal{X})} \|x - y\|\right\} = \rho_H(\mathcal{X}, \mathcal{Y}). \end{aligned}$$

□

Определим вспомогательную функцию

$$\alpha(x, \mathcal{X}) = \max\{\alpha > 0: \alpha x \in \mathcal{X}\},$$

где $\mathcal{X} \in \mathbb{K}_n$ – некоторый выпуклый компакт такой, что $0 \in \text{int } \mathcal{X}$. Построим отображение $T_{\mathcal{X}}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ следующим образом

$$T_{\mathcal{X}}(x) = \begin{cases} \frac{\alpha(x, \mathcal{X})}{\alpha(x, \mathcal{K})} \cdot x, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Сформулируем свойства отображения $T_{\mathcal{X}}$ в виде следующей леммы

ЛЕММА 3.9. Пусть $\mathcal{X} \in \mathbb{K}_n$ – выпуклое множество, $0 \in \text{int } \mathcal{X}$. Тогда справедливы утверждения:

- i) отображение $T_{\mathcal{X}}$ – биекция;
- ii) $x \in \partial \mathcal{K}$ тогда и только тогда, когда $T_{\mathcal{X}}(x) \in \partial \mathcal{X}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.9. Выберем произвольное положительное число $\gamma > 0$.

$$\alpha(\gamma x, \mathcal{X}) = \max_{\substack{\alpha \gamma x \in \mathcal{X} \\ \alpha > 0}} \alpha = \frac{1}{\gamma} \max_{\substack{(\alpha \gamma)x \in \mathcal{X} \\ (\alpha \gamma) > 0}} \alpha \gamma = \frac{1}{\gamma} \alpha(x, \mathcal{X}).$$

Для проверки биективности построим отображение обратное к $T_{\mathcal{X}}$:

$$T_{\mathcal{X}}(y)^{-1} = \begin{cases} \frac{\alpha(y, \mathcal{K})}{\alpha(y, \mathcal{X})} \cdot y, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0. \end{cases}$$

Для точки 0 свойство биективности выполнено. Рассмотрим произвольную точку $y \neq 0$.

$$T_{\mathcal{X}}(T_{\mathcal{X}}^{-1}(y)) = \frac{\alpha\left(\frac{\alpha(y, \mathcal{K})}{\alpha(y, \mathcal{X})} \cdot y, \mathcal{X}\right)}{\alpha\left(\frac{\alpha(y, \mathcal{K})}{\alpha(y, \mathcal{X})} \cdot y, \mathcal{K}\right)} \cdot \frac{\alpha(y, \mathcal{K})}{\alpha(y, \mathcal{X})} \cdot y = \frac{\frac{\alpha(y, \mathcal{X})}{\alpha(y, \mathcal{K})} \cdot \alpha(y, \mathcal{X})}{\frac{\alpha(y, \mathcal{X})}{\alpha(y, \mathcal{K})} \cdot \alpha(y, \mathcal{K})} \cdot \frac{\alpha(y, \mathcal{K})}{\alpha(y, \mathcal{X})} \cdot y = y.$$

Рассмотрим произвольную точку $x \neq 0$.

$$T_x^{-1}(T_x(x)) = \frac{\alpha\left(\frac{\alpha(x, \mathcal{X})}{\alpha(x, \mathcal{K})} \cdot x, \mathcal{K}\right)}{\alpha\left(\frac{\alpha(x, \mathcal{X})}{\alpha(x, \mathcal{K})} \cdot x, \mathcal{X}\right)} \cdot \frac{\alpha(x, \mathcal{X})}{\alpha(x, \mathcal{K})} \cdot x = \frac{\frac{\alpha(x, \mathcal{K})}{\alpha(x, \mathcal{X})} \cdot \alpha(x, \mathcal{K})}{\frac{\alpha(x, \mathcal{K})}{\alpha(x, \mathcal{X})} \cdot \alpha(x, \mathcal{X})} \cdot \frac{\alpha(x, \mathcal{X})}{\alpha(x, \mathcal{K})} \cdot x = x.$$

Отображение T_x обратимо, то есть является биективным.

По построению верно, что $\alpha(x, \mathcal{X}) = 1$ тогда и только тогда, когда $x \in \partial\mathcal{X}$.

Выберем произвольную точку $x \in \partial\mathcal{K}$. Тогда

$$T_x(x) = \alpha(x, \mathcal{X}) \cdot x,$$

$$\alpha(T_x(x), \mathcal{X}) = \alpha(\alpha(x, \mathcal{X}) \cdot x, \mathcal{X}) = \frac{\alpha(x, \mathcal{X})}{\alpha(x, \mathcal{X})} = 1.$$

Откуда следует, что

$$T_x(x) \in \partial\mathcal{X}.$$

Выберем произвольную точку $y \in \partial\mathcal{X}$. Тогда

$$T_x^{-1}(y) = \alpha(y, \mathcal{K}) \cdot y,$$

$$\alpha(T_x^{-1}(y), \mathcal{K}) = \alpha(\alpha(y, \mathcal{K}) \cdot y, \mathcal{K}) = \frac{\alpha(y, \mathcal{K})}{\alpha(y, \mathcal{K})} = 1.$$

Откуда следует, что

$$T_x^{-1}(x) \in \partial\mathcal{K}.$$

□

ЛЕММА 3.10. Пусть $\mathcal{X} \in \mathbb{K}_n$ – выпуклое множество, $0 \in \text{int } \mathcal{X}$. Тогда отображение $T_x: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ непрерывно в каждой точке \mathbb{R}^n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.10. Сначала докажем, что отображение T_x непрерывно в точке 0. Выберем произвольную последовательность $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ такую, что

$$\|x_k\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Тогда в силу того, что $0 \in \text{int } \mathcal{X}$, $0 \in \text{int } \mathcal{K}$,

$$\exists N: \forall k \geq N \quad x_k \in \text{int } \mathcal{X} \cap \text{int } \mathcal{K}.$$

Обозначим через

$$y_{1k} = \alpha(x_k, \mathcal{X})x_k,$$

$$y_{2k} = \alpha(x_k, \mathcal{K})x_k.$$

Из определения функции $\alpha(x, \mathcal{X})$ следует, что $y_{1k} \in \partial\mathcal{X}$, $y_{2k} \in \partial\mathcal{K}$. Тогда справедливо представление

$$\alpha(x_k, \mathcal{X}) = \frac{\|y_{1k}\|}{\|x_k\|}, \quad \alpha(x_k, \mathcal{K}) = \frac{\|y_{2k}\|}{\|x_k\|}.$$

Так как

$$\|y_{1k}\| \leq \text{diam } \mathcal{X} < \infty, \quad \|y_{2k}\| \geq 1.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|T_{\mathcal{X}}(x_k)\| &= \left\| \frac{\alpha(x_k, \mathcal{X})}{\alpha(x_k, \mathcal{K})} \cdot x_k \right\| = \frac{\|y_{1k}\|}{\|x_k\|} \cdot \frac{\|x_k\|}{\|y_{2k}\|} \cdot \|x_k\| = \frac{\|y_{1k}\|}{\|y_{2k}\|} \cdot \|x_k\| \leq \\ &\leq \frac{\text{diam } \mathcal{X}}{1} \cdot \|x_k\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 = \|T_{\mathcal{X}}(0)\|. \end{aligned}$$

Теперь покажем, что $T_{\mathcal{X}}$ непрерывна в любой точке $x \neq 0$. Пусть $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$, $x_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x$. Обозначим через

$$y_k = \alpha(x_k, \mathcal{X})x_k \in \partial\mathcal{X},$$

$$y = \alpha(x, \mathcal{X})x \in \partial\mathcal{X}.$$

Так как \mathcal{X} – выпуклый компакт, справедливо соотношение

$$y_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} y.$$

В силу того, что $\|x\| \neq 0$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha(x_k, \mathcal{X}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|y_k\|}{\|x_k\|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|y\|}{\|x\|} = \alpha(x, \mathcal{X}).$$

То есть функция $\alpha(x, \mathcal{X})$ непрерывна по первому аргументу во всех точках $x \neq 0$.

Тогда отображение $T_{\mathcal{X}}$ является произведением трех непрерывных функций, то есть также является непрерывным в любой точке $x \neq 0$.

Окончательно получаем, что $T_{\mathcal{X}} \in C(\mathbb{R}^n)$.

□

ЛЕММА 3.11. Пусть отображение $\text{conv}: \mathbb{K}_n \rightarrow \mathbb{K}_n$ определяется следующим образом:

$$\text{conv } \mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists N \in \mathbb{N}, x_1, \dots, x_N \in \mathcal{X}, \lambda_1, \dots, \lambda_N \in [0; 1], \\ \sum_{i=1}^N \lambda_i = 1 : \sum_{i=1}^N \lambda_i x_i = x\}.$$

Тогда отображение conv непрерывно в (\mathbb{K}_n, ρ_H) .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.11. По теореме Каратеодори о выпуклой оболочке

$$\text{conv } \mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists x_1, \dots, x_{n+1} \in \mathcal{X}, \lambda_1, \dots, \lambda_{n+1} \in [0; 1], \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1 : \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i = x\}.$$

Выберем два множества $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in \mathbb{K}_n$ так, чтобы $\rho_H(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) < \delta$, то есть

$$\max\{\sup_{x \in \mathcal{X}} \inf_{y \in \mathcal{Y}} \|x - y\|; \sup_{y \in \mathcal{Y}} \inf_{x \in \mathcal{X}} \|x - y\|\} < \delta,$$

$$\forall x \in \mathcal{X} \quad \inf_{y \in \mathcal{Y}} \|x - y\| < \delta, \quad \forall y \in \mathcal{Y} \quad \inf_{x \in \mathcal{X}} \|x - y\| < \delta,$$

$$\forall x \in \mathcal{X} \quad \exists y \in \mathcal{Y} : \|x - y\| < \delta, \quad \forall y \in \mathcal{Y} \quad \exists x \in \mathcal{X} : \|x - y\| < \delta.$$

Выберем две точки $x \in \text{conv } \mathcal{X}, y \in \text{conv } \mathcal{Y}$. Тогда по теореме Каратеодори

$$\exists x_1, \dots, x_{n+1} \in \mathcal{X}, \lambda_1, \dots, \lambda_{n+1} \in [0; 1], \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1 : x = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i, \\ \exists y_1, \dots, y_{n+1} \in \mathcal{Y}, \mu_1, \dots, \mu_{n+1} \in [0; 1], \sum_{i=1}^{n+1} \mu_i = 1 : y = \sum_{i=1}^{n+1} \mu_i y_i.$$

Тогда для любого $i = \overline{1, n+1}$ найдутся точки $\tilde{x}_i \in \mathcal{X}, \tilde{y}_i \in \mathcal{Y}$ такие, что $\|x_i - \tilde{y}_i\| < \delta, \|y_i - \tilde{x}_i\| < \delta$. Верно включение

$$\sum_{i=1}^{n+1} \mu_i \tilde{x}_i \in \text{conv } \mathcal{X}, \quad \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \tilde{y}_i \in \text{conv } \mathcal{Y}.$$

$$\left\| \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i - \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \tilde{y}_i \right\| \leq \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \|x_i - \tilde{y}_i\| < \delta, \\ \left\| \sum_{i=1}^{n+1} \mu_i y_i - \sum_{i=1}^{n+1} \mu_i \tilde{x}_i \right\| \leq \sum_{i=1}^{n+1} \mu_i \|y_i - \tilde{x}_i\| < \delta.$$

То есть

$$\forall x \in \text{conv } \mathcal{X} \exists \tilde{y} \in \mathcal{Y}: \|x - \tilde{y}\| < \delta, \quad \forall y \in \text{conv } \mathcal{Y} \exists \tilde{x} \in \mathcal{X}: \|y - \tilde{x}\| < \delta,$$

$$\inf_{y \in \text{conv } \mathcal{Y}} \|x - y\| < \delta, \quad \inf_{x \in \text{conv } \mathcal{X}} \|x - y\| < \delta.$$

Поскольку это справедливо для любых точек $x \in \text{conv } \mathcal{X}$, $y \in \mathcal{Y}$, то аналогичные соотношения будут справедливы и для точной верхней грани

$$\sup_{x \in \text{conv } \mathcal{X}} \inf_{y \in \text{conv } \mathcal{Y}} \|x - y\| \leq \delta,$$

$$\sup_{y \in \text{conv } \mathcal{Y}} \inf_{x \in \text{conv } \mathcal{X}} \|x - y\| \leq \delta.$$

$$\rho_H(\text{conv } \mathcal{X}, \text{conv } \mathcal{Y}) = \max\left\{ \sup_{x \in \text{conv } \mathcal{X}} \inf_{y \in \text{conv } \mathcal{Y}} \|x - y\|; \sup_{y \in \text{conv } \mathcal{Y}} \inf_{x \in \text{conv } \mathcal{X}} \|x - y\| \right\} \leq \delta.$$

□

Теперь на основе доказанных лемм сформулируем и докажем основную теорему.

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть $\mathcal{X} \in \mathbb{K}_n$ — выпуклый компакт, $0 \in \text{int } \mathcal{X}$. Тогда

$$T_{\mathcal{X}}(\mathcal{K}_N) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \partial \mathcal{X},$$

$$\text{conv } T_{\mathcal{X}}(\mathcal{K}_N) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \mathcal{X}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.3. Согласно лемме 3.7 последовательность $\{\mathcal{K}_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ сходится в метрическом пространстве (\mathbb{K}_n, ρ_H) к границе куба $\partial \mathcal{K}$. Отображение $T_{\mathcal{X}}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ согласно лемме 3.10 непрерывно, тогда по лемме 3.8 соответствующее ему отображение $T_{\mathcal{X}}: \mathbb{K}_n \rightarrow \mathbb{K}_n$ также непрерывно в метрике Хаусдорфа.

Тогда

$$T_{\mathcal{X}}(\mathcal{K}_N) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} T_{\mathcal{X}}(\mathcal{K}) = \partial \mathcal{X},$$

где последнее равенство справедливо в силу леммы 3.9.

Поскольку в силу леммы 3.11 процедура построения выпуклой оболочки является непрерывным отображением в (\mathbb{K}_n, ρ_H) , то

$$\text{conv } T_{\mathcal{X}}(\mathcal{K}_N) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \text{conv}(\partial \mathcal{X}) = \mathcal{X}.$$

□

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. Множество $\text{conv } T_x(\mathcal{K}_N)$ является многогранником, причем, очевидно включение

$$\text{Ext conv } T_x(\mathcal{K}_N) \subset T_x(\mathcal{K}_N).$$

Фактически теорема 3.3 гарантирует, что, выбирая номер N , можно с любой степенью точности (в смысле расстояния Хаусдорфа) аппроксимировать произвольный выпуклый компакт вложенным в него многогранником, число вершин которого оценивается с помощью леммы 3.6.

3.5. Оптимальное по быстрдействию демпфирование высотного сооружения

Продемонстрируем эффективность разработанных методов на примере решения задачи демпфирования. Сейсмические возмущения вызывают колебания сооружения, приводящие к потере его устойчивости и, в конечном счете, к его разрушению. В этой связи возникает задача гашения колебаний сооружения посредством дополнительно прикладываемых сил, рассчитанных на основе текущих изменений, т.е. задача управления сооружением по принципу обратной связи. На сегодняшний день наиболее активно применяется способ организации такого управления на основе динамического гашения колебаний с использованием дополнительных материальных тел. Один из возможных вариантов технической реализации динамического гашения колебаний заключается в создании специального этажа с размещением на нем некоторой достаточно малой массы (по сравнению с общей массой сооружения), перемещаемой в соответствии с законом управления в форме обратной связи по текущим показаниям датчиков, что позволяет оказывать управляющее воздействие на данный этаж.

Математическая модель, описывающая здание находящееся в зоне сейсмической активности представлена в [5]. В качестве механической системы, моделирующей колебания высотного сооружения, рассматривается одномерная цепочка упругосвязанных материальных точек (этажей или секций сооружения), одна из которых (основание) совершает поступательное движение, порождаемое сейсмическим воздействием. Предполагается, что масса основания намного превышает массы остальных материальных точек и поэтому влиянием движения секций сооружения на движение основания можно пренебречь. В

дальнейшем будем считать, что массы всех материальных точек одинаковы, а упругие и демпфирующие связи моделируются линейными элементами с одинаковыми коэффициентами упругости и демпфирования.

Уравнения движения рассматриваемой системы имеют вид

$$\begin{cases} m\ddot{\xi}_1(t) = -2b\dot{\xi}_1(t) - 2c\xi_1(t) + b\dot{\xi}_2(t) + c\xi_2(t) + U_1(t), \\ \vdots \\ m\ddot{\xi}_i(t) = -2b\dot{\xi}_i(t) - 2c\xi_i(t) + b\dot{\xi}_{i-1}(t) + c\xi_{i-1}(t) + b\dot{\xi}_{i+1}(t) + c\xi_{i+1}(t) + U_i(t), \\ \vdots \\ m\ddot{\xi}_n(t) = -2b\dot{\xi}_n(t) - 2c\xi_n(t) + b\dot{\xi}_{n-1}(t) + c\xi_{n-1}(t) + U_n(t), \end{cases}$$

где ξ_i – координата i -й материальной точки относительно основания, U_i – управляющая сила, приложенная к i -й материальной точке; m – масса материальной точки, b и c – коэффициенты демпфирования и упругости межсекционных связей.

Введем обозначения

$$y(t) = \begin{pmatrix} \xi_1(t) \\ \vdots \\ \xi_n(t) \\ \dot{\xi}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{\xi}_n(t) \end{pmatrix}, \quad v(t) = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ U_1(t) \\ \vdots \\ U_n(t) \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\beta = \frac{b}{m}, \quad \omega^2 = \frac{c}{m}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -\omega^2 K & -\beta K \end{pmatrix}.$$

Тогда уравнения движения можно привести к каноническому виду

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + v(t), \quad (3.5)$$

Вычисления выполним для следующих значений параметров: $n = 6$, $\beta = 1$, $\omega^2 = 100$. Полагая, что управление $v(t)$ является кусочно-постоянной

функцией, меняющей свои значения через промежутки времени Δt , можно перейти к дискретному аналогу системы (3.5), обозначив

$$x(k) = y(k\Delta t).$$

Обозначим через $\Phi(t)$ – фундаментальную матрицу решений (3.5). Тогда, полагая значение $v(t)$ на участке $[k\Delta t; (k+1)\Delta t)$ равным величине v_k , получим следующие рекуррентные соотношения:

$$x(k+1) = \Phi(\Delta t)\Phi^{-1}(0)x(k) + (\Phi(\Delta t)\Phi^{-1}(0)A^{-1} - A^{-1})v_k.$$

Введя следующие обозначения

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= \Phi(\Delta t)\Phi^{-1}(0), \\ B &= \Phi(\Delta t)\Phi^{-1}(0)A^{-1} - A^{-1}, \\ u(k) &= v_k, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\},\end{aligned}$$

получим систему

$$\begin{aligned}x(k+1) &= \tilde{A}x(k) + Bu(k), \\ x(0) &= y_0, \quad u(k) \in \mathcal{U}.\end{aligned}\tag{3.6}$$

Здесь матрицы $\tilde{A}, B \in \mathbb{R}^{12 \times 12}$ – матрицы дискретной системы, \mathcal{U} – множество допустимых значений управлений непрерывной системы (3.5), $x(k)$ – состояние системы на k -м шаге.

Будем полагать, что демпфирующие устройства установлены между 1-м и 2-м, 3-м и 4-м, 5-м и 6-м этажами. Тогда $u_2(k) = u_4(k) = u_6(k) = 0$ для всех $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, а множество допустимых значений управлений фактически является трёхмерным шаром.

В данном случае для использования алгоритма 3.1 необходимо провести предварительную полиэдральную аппроксимацию \mathcal{U} согласно методу, изложенному в разделе 3.4. Результаты аппроксимации изображены на рисинках 3.1 и 3.2.

Для построения гарантирующего решения задачи быстродействия после аппроксимации \mathcal{U} можно использовать алгоритм 3.1.

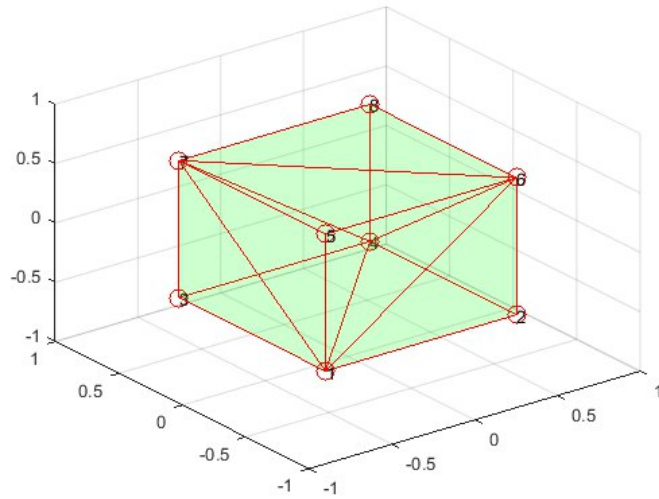


Рисунок 3.1. Аппроксимация \mathcal{U} для 8 точек

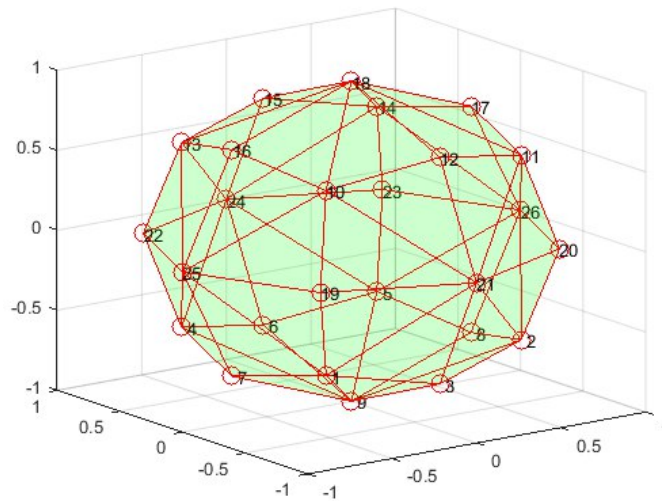


Рисунок 3.2. Аппроксимация \mathcal{U} для 26 точек

Для начального состояния $y(0) = (0, -1, 0.5, 2.5, 1, 2, 3, 4, 3, 5, 6, 6.5)^T$ оптимальное значение критерия для вспомогательной системы составляет $N_{min} = 4$.

Гарантирующие управления и траектория системы приведены в таблицах 2.1 и 2.2.

Таблица 3.1. Гарантирующее управление системы (3.6)

k	0	1	2	3
$u_1^*(k)$	-0.0250	-0.0038	0.0436	-0.0011e-03
$u_2^*(k)$	-0.0440	-0.0016	0.1213	0.0147e-03
$u_3^*(k)$	-0.0650	0.0016	0.2151	0.0312e-03
$u_4^*(k)$	-0.0770	-0.0005	0.2347	0.0397e-03
$u_5^*(k)$	-0.0900	0.0069	0.3381	0.0489e-03
$u_6^*(k)$	-0.0920	0.0080	0.3521	0.0525e-03
$u_7^*(k)$	0.0420	-0.0057	-0.1801	-0.0217e-03
$u_8^*(k)$	0.0580	0.0004	-0.1755	-0.0635e-03
$u_9^*(k)$	0.0290	0.0404	0.2582	-0.0774e-03
$u_{10}^*(k)$	-0.5410	0.3670	0.8355	0.1180e-03
$u_{11}^*(k)$	0.0850	0.0721	0.3589	-0.0515e-03
$u_{12}^*(k)$	-0.1260	-0.0631	-0.1537	0.0345e-03

Таблица 3.2. Гарантирующая траектория системы (3.6)

k	0	1	2	3	4
$x_1^*(k)$	0	-0.0250	-0.0288	0.0148	0
$x_2^*(k)$	-1	0.0804	0.0788	0.0107	0
$x_3^*(k)$	0.5	-0.1489	-0.0471	0.0233	0
$x_4^*(k)$	2.5	0.1990	0.0313	0.0244	0
$x_5^*(k)$	1	-0.1683	0.0386	0.0155	0
$x_6^*(k)$	2	0.0708	0.0043	0.0277	0
$x_7^*(k)$	3	1.2298	1.2241	0.5678	0
$x_8^*(k)$	4	-1.8200	-2.391	-0.6328	0
$x_9^*(k)$	3	3.0290	3.8135	0.3671	0
$x_{10}^*(k)$	5	-5.3192	-4.9522	-0.1167	0
$x_{11}^*(k)$	6	6.0850	4.4845	0.3275	0
$x_{12}^*(k)$	6.5	0.6272	-0.2892	-0.2044	0

3.6. Выводы по главе 3

1. Разработан метод построения множества 0-управляемости за произвольное число шагов для линейной автономной дискретной системы с линейными ограничениями.

2. Разработан алгоритм решения задачи быстродействия для линейной автономной дискретной системы с линейными ограничениями. Для случая скалярного управления предложена модификация алгоритма.

3. Разработан метод, позволяющий свести задачу быстродействия для линейной автономной дискретной системы с выпуклым множеством допустимых значений управлений к рассмотренному случаю линейных ограничений.

4. Построена дискретная математическая модель, описывающая движение высотного сооружения в зоне сейсмических возмущений. Решена задача демпфирования здания за минимальное время.

Основные результаты главы опубликованы в [24, 26, 29, 30, 32, 33]

Глава 4. Комплекс программ для решения задачи быстрогодействия

Целью данной главы является описание комплекса программ, реализующего алгоритм, разработанный в разделе 3.2. Также решена прикладная оптимизационная задача.

В разделе 4.1. представлено описание комплекса программ, разработанного в ходе диссертационного исследования. В разделе 4.2. решена задача наискорейшей ликвидации углового отклонения за счет использования вентиляторных двигателей тела, подвешенного на струне и способного совершать вращательные движения. В разделе 4.3. сформулированы выводы по главе 4.

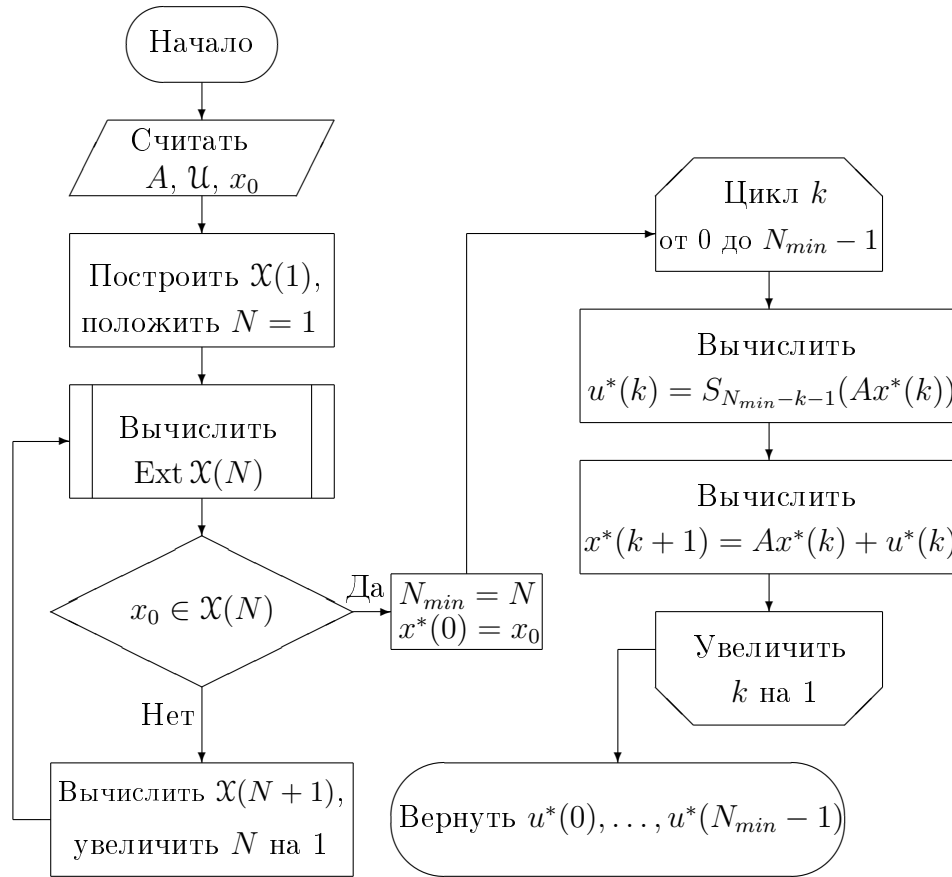
4.1. Описание комплекса программ

Для решения задачи быстрогодействия для системы (1.1) в случае (3.1) разработан комплекс программ. Возможность создания такого комплекса для произвольной системы управления базируется на том факте, что оптимальное управление, сконструированное в теореме 3.1, может быть вычислено в результате решения задачи линейного программирования. Также процедура построения множеств 0-управляемости в силу следствия 1.1 является рекуррентным процессом, основанным на леммах 3.1, 3.2 и алгоритме быстрой оболочки [80].

Для реализации программного комплекса был выбран язык C++. Этот выбор обусловлен тем, что язык C++, обладая большим числом библиотек, поддерживающих те или иные алгоритмы, также способен обеспечить мультиплатформенность программного обеспечения. Широкое распространение языка C++ гарантирует легкость коррекции исходного кода с целью модификации его под нужды пользователя.

Программа реализует процедуру вычисления оптимального управления согласно алгоритму 3.1. В качестве входных данных программа получает матрицу системы A , множество допустимых значений управлений \mathcal{U} , заданное в виде

Рисунок 4.1. Алгоритм вычисления оптимального управления



множества своих вершин, и начальное состояние x_0 . Сначала программа строит последовательность множеств 0-управляемости $\{\mathcal{X}(N)\}_{N=0}^{\infty}$ до тех пор, пока не будет выполнено включение $x_0 \in \mathcal{X}(N_{min})$. При этом посредством алгоритма быстрой оболочки на каждом шаге $N = \overline{1, N_{min}}$ определяется точное множество вершин $\mathcal{X}(N)$. Затем согласно теореме 3.1 на каждом шаге $k = \overline{0, N_{min} - 1}$ рассчитывается оптимальное управление. Набор оптимальных управлений является результатом работы программы. На рисунке 4.1 изображена блок-схема основной программы.

Для решения задач линейного программирования используется симплекс-метод из программного пакета GNU Linear Programming Kit. Для построения множества вершин $\mathcal{X}(N)$ используется алгоритм Qhull (быст-

рой оболочки), который используется для решения аналогичных задач в таких средах, как GNU Octave и MATLAB.

4.2. Задача наискорейшей ликвидации углового отклонения тела, подвешенного на струне

Рассмотрим задачу построения оптимального по быстродействию допустимого управления движением дискретной линейной системы, описывающей соответствующую модель – твердое тело (гондола), подвешенная на струне и способная совершать вращательные движения. Предполагается, что тело подвержено вязкому трению воздуха, моменту, связанному с упругостью струны. Управление осуществляется при помощи двух противоположно направленных вентиляторных двигателей ограниченной мощности. Фактически задача состоит в наискорейшей ликвидации углового отклонения гондолы.

Уравнения, описывающие движение модели в пространстве, представляют собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \omega, \\ J\dot{\omega} + \delta\omega + \sigma\alpha &= \pm \frac{1}{2}RS\rho(V_e^2 - V^2), \end{aligned} \tag{4.1}$$

где α и ω – угловое отклонение и угловая скорость исследуемого объекта соответственно, S – площадь диска вентилятора, ρ – плотность воздуха, R – расстояние от оси вращения до вентилятора, V_{max} – скорость воздуха после выхода из вентилятора в случае работы вентилятора, J – момент инерции тела относительно оси вращения, σ – коэффициент упругости струны, δ – коэффициент вязкого трения о воздух. Знак «+» или «-» выбирается в зависимости от того, положительный или отрицательный момент создается двигателем. Управление на практике осуществляется за счёт изменения скорости вращения лопастей вентиляторных двигателей.

В результате замены дифференциальных уравнений (4.1) конечно-

разностным аналогом была получена следующая система управления:

$$x(k+1) = \begin{pmatrix} \alpha(k+1) \\ \omega(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0,1 \\ 1 & 1,9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha(k) \\ \omega(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0,24 \end{pmatrix} v(k), \quad (4.2)$$

$$x(0) = x_0, \quad v(k) \in [-1; 1], \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Параметры системы получены приближенно на основании модели, описанной в [36].

Система (4.2) представляет собой линейную дискретную систему управления, удовлетворяющую условию (3.3). Построим численное решение исходной задачи наискорейшей ликвидации углового отклонения гондолы. В качестве начального состояния $x(0)$ выберем точку $x(0) = (0, 1; 0)^T$.

Наименьшее число шагов, необходимое для перевода системы в 0, составляет $N_{min} = 6$. Построим последовательность оптимальных управлений согласно теореме 3.2 и состояний системы, получаемых согласно соотношениям (4.2).

Результаты численных расчетов представлены в таблице 4.1 и проиллюстрированы графически на рисунках 4.2 и 4.3.

4.3. Выводы по главе 4

1. Разработан программный комплекс, реализующий решение задачи быстрого действия для линейной дискретной автономной системы с линейными ограничениями на управление.

2. Эффективность программного комплекса опробована при решении задачи наискорейшей ликвидации углового отклонения.

Основные результаты главы опубликованы в [24, 26, 35]

Таблица 4.1. Оптимальное управление и траектория системы (4.2) в задаче быстродействия

k	0	1	2	3	4	5	6
$\alpha(k)$	0.1	0.1	0.09	0.06	0.03	0.01	0
$\omega(k)$	0	-0.11	-0,29	-0.27	-0.21	-0.12	0
$u^*(k)$	-0.89	-0.76	0.81	1.0	0.99	0.9	

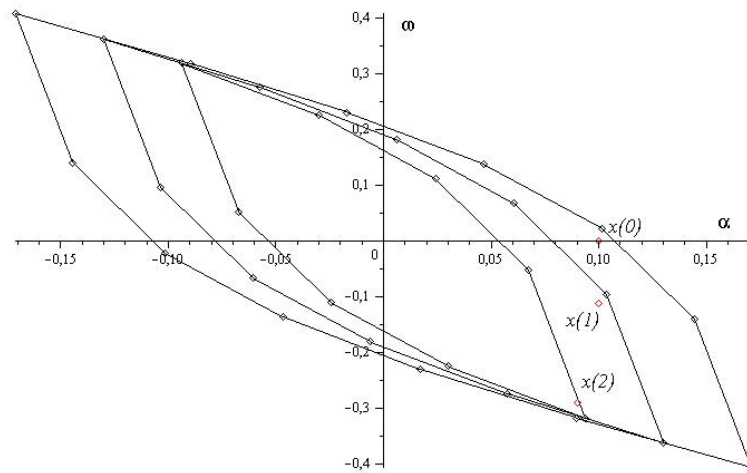


Рисунок 4.2. Множества 0-управляемости для $N = \overline{4, 6}$ и оптимальная траектория системы (4.2) для $k = \overline{0, 2}$

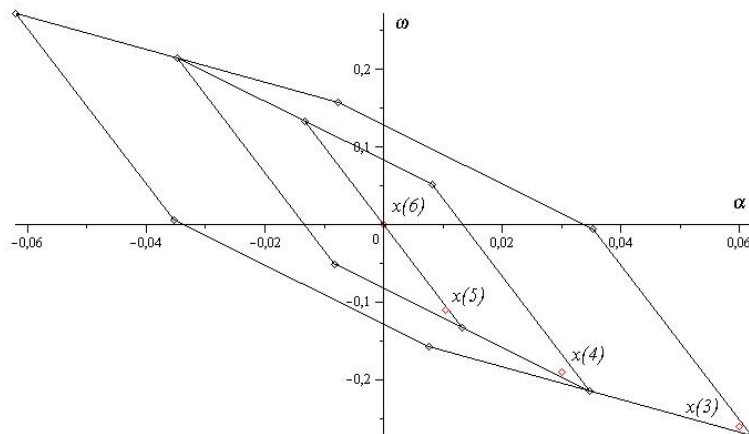


Рисунок 4.3. Множества 0-управляемости для $N = \overline{0, 3}$ и оптимальная траектория системы (4.2) для $k = \overline{3, 6}$

Заключение

В диссертационной работе предложены и обоснованы методы решения задач быстродействия для различных классов линейных дискретных систем с ограничениями на управление, что выразилось в следующих результатах

1. Исследован класс математических моделей линейных дискретных неавтономных систем с конечномерным вектором состояния и строго выпуклым множеством допустимых значений управлений.

2. Формализован и исследован новый класс математических моделей линейных дискретных автономных систем с бесконечномерным вектором состояния и строго выпуклым множеством допустимых значений управлений, в каждой граничной точке которого нормальный конус представляет собой одномерное множество.

3. Сформулированы и доказаны в виде принципа максимума достаточные условия оптимальности управления в задаче быстродействия для линейных дискретных автономных систем с бесконечномерным вектором состояния и строго выпуклым множеством допустимых значений управлений, в каждой граничной точке которого нормальный конус представляет собой одномерное множество.

4. Сформулированы и доказаны в виде принципа максимума достаточные условия оптимальности управления в задаче быстродействия для линейных дискретных неавтономных систем с конечномерным вектором состояния и строго выпуклым множеством допустимых значений управлений.

5. Разработан численный метод решения задачи быстродействия для линейных дискретных автономных систем с конечномерным вектором состояния и линейными ограничениями на управление, предложена модификация метода для случая выпуклых ограничений на управление.

6. Разработан комплекс программ, реализующих эти численные методы.

7. Решены задачи оптимальной по быстродействию коррекции орбиты

спутника, наискорейшей ликвидации углового отклонения, тела подвешенного на струне, демпфирования высотного сооружения, расположенного в зоне сейсмической активности.

Среди направлений для дальнейших исследований стоит выделить обобщение полученных результатов на случай, когда линейный оператор системы управления не является обратимым. Данный результат позволит существенно расширить количество прикладных задач, которые могут быть решены разработанными методами. Кроме того, одним из перспективных направлений исследований является разработка комбинированных методов для случая, когда множество θ -управляемости не является ни многогранником, ни строго выпуклым множеством.

Список литературы

1. *Аграчев А.А., Сачков Ю.Л.* Геометрическая теория управления. М.:Наука, 2005.
2. *Азанов В.М., Кан Ю.С.* Оптимизация коррекции околокруговой орбиты искусственного спутника Земли по вероятностному критерию // Тр. ИСА РАН. 2015. №2. С. 18-26.
3. *Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление. М.:Наука, 1979.
4. *Аноров В.П.* Принцип максимума для процессов с ограничениями общего вида // Автоматика и телемеханика. №3. 1967. С.5-15.
5. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. М.:Физматлит, 2007.
6. *Бахшиян Б.Ц.* Оценивание и коррекция параметров движущихся систем. М.:ИКИ, 2012.
7. *Бахшиян Б.Ц., Назиров Р.Р., Эльясберг П.Е.* Определение и коррекция движения. М.:Наука, 1980.
8. *Беллман Р.* Динамическое программирование. М.:ИИЛ, 1960.
9. *Берже М.* Геометрия. Том 2. М.:МИР, 1984.
10. *Благодатских В.И.* Введение в оптимальное управление. М.:Высш. шк., 2001.
11. *Болтянский В.Г.* Математические методы оптимального управления. М.:Наука, 1969.

12. *Болтянский В.Г.* Оптимальное управление дискретными системами. М.:Наука, 1973.
13. *Бронштейн Е.М., Иванов Л.Д.* О приближении выпуклых множеств многогранниками // Сибирский матем. ж. 1975. Т.26. №5. С.1110-1112.
14. *Бережинский Т.А., Волин Ю.М., Островский Г.М.* Условия оптимальности для сложных процессов // Автоматика и телемеханика. 1968. №3. С.43-56.
15. *Брайсон А., Денхем В.* Применение наискорейшего спуска к задачам оптимального управления // Ракетная техника и космонавтика №2. 1964.
16. *Васильев И. С.* О неулучшаемых оценках аппроксимации сильно выпуклых тел // Вопр. кибернетики. 1988. Т.136. С.49-56.
17. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* К вопросу о распространении принципа максимума Л.С. Понтрягина на дискретные системы // Автоматика и телемеханика. №11. 1966. С.1232-1245.
18. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Принцип максимума в теории оптимального управления. Минск: Наука и техника. 1974.
19. *Гноевский Л.С., Мовшович С.М.* О применении методов математического программирования к задаче оптимального регулирования // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1964. №5. С.73-81.
20. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Т. 2. Спектральная теория. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве. М.:Мир, 1966.
21. *Евтушенко Ю.Г.* Методы решения экстремальных задач и их приложения в системах оптимизации. М.:Наука, 1982.
22. *Ермольев Ю.М., Гуленко В.П.* О численных методах решения задач оптимального управления // Кибернетика. 1966. №1. С.72-78.

23. *Ермольев Ю.М., Гуленко В.П.* Конечноразностный метод в задачах оптимального управления // Кибернетика, 1967, №3.
24. *Ибрагимов Д.Н., Сиротин А.Н.* О задаче оптимального быстрогодействия для линейной дискретной системы с ограниченным скалярным управлением на основе множеств 0-управляемости // Автоматика и Телемеханика. 2015. №9. С.3-30.
25. *Ибрагимов Д.Н., Сиротин А.Н.* О задаче быстрогодействия для класса линейных автономных бесконечномерных систем с дискретным временем и ограниченным управлением // Автоматика и Телемеханика. 2017. №10. С.3-32.
26. *Ибрагимов Д.Н.* Оптимальное по быстроддействию управление движением аэростата // Труды МАИ. 2015. №83.
27. *Ибрагимов Д.Н.* Аппроксимация множества допустимых управлений в задаче быстрогодействия линейной дискретной системой // Труды МАИ. 2016, №87.
28. *Ибрагимов Д.Н.* Оптимальная по быстроддействию коррекция орбиты спутника // Труды МАИ. 2017. №94.
29. *Ибрагимов Д.Н.* Оптимальное по быстроддействию ограниченное управление угловым движением аэростата на основе множеств 0-управляемости // Сборник тезисов докладов московской молодежной научно-практической конференции «Инновации в авиации и космонавтике» 16-18 апреля 2013 г., Москва. – М.:МАИ, 2013. С.281-282.
30. *Ибрагимов Д.Н.* Явный вид оптимального позиционного управления в задаче быстрогодействия для линейной системы с ограниченным скалярным управлением на основе множеств 0-управляемости // Сборник тезисов докладов 13-й международной конференции «Авиация и космонавтика», 17-21 ноября 2014 г., Москва. – М.:МАИ, 2014. С.620-622.

31. *Ибрагимов Д.Н.* Принцип максимума в задаче быстродействия линейной дискретной системой с ограниченным управлением на основе множеств 0-управляемости // Сборник тезисов докладов 14-й международной конференции «Авиация и космонавтика», 16-20 ноября 2015 г., Москва. – М.:МАИ, 2015. – С.410-411.
32. *Ибрагимов Д.Н.* Оптимальное по быстродействию позиционное управление линейной дискретной системой с ограниченным множеством допустимых управлений // Сборник тезисов докладов международной конференции по математической теории управления и механике, 3-7 июля 2015 г., Суздаль. – М.:МИАН, 2015. С.63-65.
33. *Ибрагимов Д.Н.* Явный вид оптимального управления в задаче быстродействия линейной дискретной системой с ограниченным множеством допустимых управлений // Сборник тезисов докладов XX международной научной конференции «Системный анализ, управление и навигация», 28 июня-5 июля 2015 г., Евпатория. – М.:МАИ, 2015. С.148-151.
34. *Ибрагимов Д.Н., Сиротин А.Н.* О решении задачи быстродействия линейной бесконечномерной дискретной системой с ограниченным управлением // Сборник тезисов докладов международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам, 8-12 июля 2016 г., Суздаль. – М.:МИАН, 2016. С.75-76.
35. *Ибрагимов Д.Н.* Программа вычисления оптимального по быстродействию управления для линейной дискретной системы с ограниченным управлением // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2017660770 от 26 сентября 2017 г.
36. *Иванов Д.С., Овчинников М.Ю., Ткачев С.С.* Управление ориентацией твердого тела, подвешенного на струне с использованием вентиляторных двигателей // Известия РАН. Теория и системы управления. 2011. №1. С.107-119.

37. *Каменев Г.К.* Численное исследование эффективности методов полиэдральной аппроксимации выпуклых тел. М.:Вычислительный центр РАН, 2010.
38. *Квакернаак Х., Сиван Р.* Линейные оптимальные системы управления. М.:Мир, 1977.
39. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.:ФИЗМАТЛИТ, 2012.
40. *Костоусова Е.К.* О внешнем полиэдральном оценивании множеств достижимости в «расширенном» пространстве для линейных многошаговых систем с интегральными ограничениями на управление // Вычислительные технологии. 2004. Т.9. №4. С.54-72.
41. *Кроновер Р.М.* Фракталы и хаос в динамических системах. М.:Постмаркет, 2000.
42. *Крылов И.А., Черноусько Ф.Л.* О методе последовательных приближений для решения задач оптимального управления // ЖВМ и МФ. 2. №6. 1962. С.1132-1138.
43. *Крылов И.А., Черноусько Ф.Л.* Решение задач оптимального управления методом локальных вариаций // ЖВМ и МФ 6. 2. 1966. С.46-49.
44. *Лебедев А.А., Красильщиков М.Н., Мальшев В.В.* Оптимальное управление движением космических летательных аппаратов. М.Машиностроение, 1974.
45. *Ли Э.Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. М.:Наука, 1972.
46. *Мальшев В.В., Кибзун А.И.* Анализ и синтез высокоточного управления летательными аппаратами. М.:Машиностроение, 1987.

47. *Малышев В.В., Красильщиков М.Н., Бобронников В.Т. и др.* Спутниковые системы мониторинга. М.:МАИ, 2000.
48. *Мельц И.О.* Применение методов нелинейного программирования для оптимизации нелинейных систем в функциональном пространстве // Автоматика и телемеханика. №1. 1968.
49. *Мельц И.О.* Учет ограничений в задаче оптимизации динамических систем в функциональном пространстве на основе методов нелинейного программирования // Автоматика и телемеханика. №3. 1968.
50. *Мину М.* Математическое программирование. М.:Наука, 1996.
51. *Моисеев Н.Н.* Численные методы в теории оптимальных систем. М.:Наука, 1971.
52. *Моисеев Н.Н.* Элементы теории оптимальных систем. М.:Наука, 1975.
53. *Мороз А.И.* Синтез оптимального по быстродействию управления для линейных дискретных систем // Автоматика и телемеханика. №2. 1965. С.193-207.
54. *Овсеевич А.И., Черноусько Ф.Л.* Свойства оптимальных эллипсоидов, приближающих области достижимости системы с неопределённостями // Известия РАН. Теория и системы управления. 2004, №4. С.8-18.
55. *Островский Г.М.* Об одном методе расчета оптимальных систем // Автоматика и телемеханика. №3. 1965. С.435-442.
56. *Охоцимский Д.Е., Энеев Т.М.* Некоторые вариационные задачи, связанные с запуском искусственного спутника Земли // УФН. 1957. 63. №1а, С.36-51.
57. *Первозванский А.А.* О связи основных теорем математического программирования и принципа максимума // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. №4. 1967.

58. *Половинкин Е.С., Балашов М.В.* Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. М.:ФИЗМАТЛИТ, 2004.
59. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Б.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.:Наука, 1969.
60. *Пропой А.И.* Об одной задаче оптимального дискретного управления // ДАН СССР 159. 6. 1964. С.1022-1024.
61. *Пропой А.И.* О принципе максимума для дискретных систем управления // Автоматика и телемеханика. №7. 1965. С.915-936
62. *Пропой А.И.* Методы возможных направлений в задачах дискретного управления // Автоматика и телемеханика. №2. 1967. С.3-18
63. *Пропой А.И.* Элементы теории оптимальных дискретных процессов. М.:Наука, 1973.
64. *Пшеничный Б.Н.* Об одном алгоритме решения нелинейной задачи оптимального управления // ЖВМ и МФ. 5. №2. 1965.
65. *Пшеничный Б.Н.* Синтез линейных импульсных систем // Автоматика и телемеханика. №5. 1966. С.24-39.
66. *Решетнев М.Ф., Лебедев А.А., Бартенев В.А. и др.* Управление и навигация искусственных спутников Земли на околокруговых орбитах. М.:Машинстроение, 1988.
67. *Розоноэр Л.И.* Принцип максимума Л.С. Понтрягина в теории оптимальных систем // Автоматика и телемеханика. №10 – С.1320-1334; №11 – С.1441-1458; №12 – С.1561-1578.
68. *Розоноэр Л.И.* О достаточности условий оптимальности // ДАН СССР 127. 3. 1959. С.21-23.
69. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.:МИР, 1973.

70. *Самсонов С. Л.* Восстановление выпуклого множества по его опорной функции с заданной точностью // Вестн. МГУ. Сер. 15. Вычисл. матем. и кибернетика. 1983. №1. С.68-71.
71. *Схрейвер А.* Теория линейного и целочисленного программирования. Т. 1, 2. М.: Мир, 1991.
72. *Табак Д., Куо Б.* Оптимальное управление и математическое программирование. М.:Наука, 1975.
73. *Харатлишвили Г.Л.* Принцип максимума в теории оптимальных процессов с запаздыванием. - ДАН СССР. 136. 1. 1961. С.39-42.
74. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М.:МИР, 1989.
75. *Цыпкин Я.З.* Об оптимальных процессах в импульсных автоматических системах // ДАН СССР, 134. 2. 1966. С.308-310.
76. *Шатровский Л.И.* Об одном численном методе решения задачи оптимального управления // ЖВМ и МФ 2. №3. 1962. С.488-491.
77. *Энеев Т.М.* О применении градиентного метода в задачах теории оптимального управления // Космические исследования. 4. №5. 1966. С.651-669.
78. *Яковлев В.М.* О дискретном принципе максимума // Проблемы кибернетики, вып. 34. 1978.
79. *Ait Rami M., Chen X., Zhou X. Y.* Discrete-time indefinite LQ-control with state and control dependent noises // J. Global Optimiz. 23. 3. 2002. P.245-265.
80. *Barber C.B., Dobkin D. P., Huhdanpaa H.* The quickhull algorithm for convex hulls // ACM Transactions on Mathematical Software. №22(4). 1996. P.469-483.
81. *Benvenuti L., Farina L.* The geometry of the reachability set for linear Discrete-time systems with positive controls // SIAM J. Matrix Anal. Appl. 2006. V.28. №2. P.306–325.

82. *Berkovitz L.D.* Variational methods in problems of controls and programming // J.Math Anal. Appl. 3. 1961. P.145-169.
83. *Berkovitz L.D.* Necessary conditions for optimal strategies in a class of differential games and control // J. SIAM Control 5. 1. 1967. P.1-24.
84. *Chang S.S.L.* Digitized maximum principle // Proc. IRE 48. December. 1960. P.2030-2031.
85. *Chang S.S.L.* Optimization of nonlinear control systems by means of digitized maximum principle // IRE Int. Convention Record. part 4. 1961. P.48-55.
86. *Charnes A., Kortanek K.A.* A note on the discrete maximum principle and distribution problem // J. Math. and Phys. 45. 1. 1966. P.121-126.
87. *Combastel C., Raka S.A.* On Computing Envelopes for Discrete-time Linear Systems with Affine Parametric Uncertainties and Bounded Inputs // Preprints 18 IFAC World Congr. Milano (Italy) August 28 - September 2, 2011. P. 4525-4533.
88. *Desoer C.A., Wing J.* The minimal time regulator problem for linear sampled-data systems: general theory // J. Franklin Inst. 1961. 272. 3. P.208-228.
89. *Desoer C.A., Wing J.* An optimal strategy for a saturating sampled-data systems // IRE Trans. AC-6, 1961. P.5-15.
90. *Desoer C.A., Wing J.* A minimal time discrete system // IRE Trans. AC-6. 1961. P.111-125.
91. *Ding M.-F., Liu Y., Gear J. A.* A Modified Centered Climbing Algorithm for Linear Programming // Appl. Math. 2012. V.3. P.1423-1429.
92. *Dudley R.* Metric entropy of some classes of sets with differentiable boundaries // J. Approximat. Theory. 1974. V.10. P.227-236.
93. *Eldem V., Selbuz H.* On the general solution of the state deadbeat control problem // IEEE Transaction Automat. Control. 1994. V.39. №5. P.1002-1006.

94. *Fisher M.E., Gayek J.E.* Estimating Reachable Sets for Two-Dimensional Linear Discrete Systems // J. Optim. Theory Appl. 1988. V.56. №1. P.67-88.
95. *Gordon Y., Meyer M., Reisner Sh.* Volume approximation of convex bodies by polytopes – a constructive method // Studia Mathematica. 1994. III. №1. P.81-95.
96. *Gruber P. M.* Volume approximation of convex bodies by inscribed polytopes // Math. Ann. 1988. Bd.281. №2. P.229-245.
97. *Gruber P.M.* Asymptotic estimates for best and stepwise approximation of convex bodies I // Forum Math. 1993. №5. P.281-297.
98. *Gruber P.M.* Asymptotic estimates for best and stepwise approximation of convex bodies II // Forum Math. 1993. №5. P.521-538.
99. *Halkin H.* A maximum principle of the Pontryagin type for systems described by nonlinear difference equations // SIAM J.Control. 4. №1. 1966. P.90-111
100. *Holtzman J.M.* Convexity and the maximum principle for discrete systems // IEEE Automatic Control AC-11. 1. 1966. P.30-35
101. *Holtzman J.M.* On the maximum principle for nonlinear discrete systems // IEEE Automatic Control AC-11. 2. 1966. P.273-274.
102. *Holtzman J.M., Halkin H.* Directional convexity and the maximum principle for discrete systems // J. SIAM Control 4. 2. 1966. P.263-275
103. *Horn F., Jackson R.* On discrete analogues of Pontryagin's maximum principle // Int. J. Control 1. 4. 1965. P.389-395.
104. *Hwang C.L., Fan L.T.* A discrete version of Potryagin's maximum principle // Operation Research 15. 1. 1967. P.139-146.
105. *Katz S.* A discrete version of Pontryagin's maximu, principle // J. Electr. and Control 13. 2. 1962.

106. *Katz S.* A general minimum principle for end-point control problems // J. Electr. and Control 16. 2. 1964.
107. *Keerthi S.S., Gilbert E.G.* Computatuon of minimum-time feedback control laws for discrete-time systems with state-control // IEEE Transaction Automat. Control. 1987. V.32. №5. P.432-434.
108. *Kostousova E. K.* External Polyhedral Estimates For Reachable Sets Of Linear Discrete-Time Systems with Integral Bounds On Controls // Int. J. Pure Appl. Math. 2009. V.50. №2. P.187-194.
109. *Kurzhanskiy A.F., Varaiya P.* Theory and computational techniques for analysis of discrete-time control systems with disturbancens // Optim. Method Software, 2011, V.26. №4-5. P.719-746.
110. *de Leon-Canion P., Lunze J.* Dependable control of uncertain linear systems based on set-theoretic methods// Int. J. Control. 2010. V.83. №6. P.1248-1264.
111. *Lin W.-S.* Time-optimal control strategy for saturating linear discrete systems // Int. J. Control. 1986. V.43. №5. P.1343-1351.
112. *Lin X. Zhang W.* A maximum principle for optimal control of discrete-time stochastic Systems with multiplicative noise // IEEE Trans. Automatic Control 60. 4. April. 2015. P.1121-1126.
113. *McClure D. E., Vitale R. A.* Polygonal approximation of plane convex bodies // J. Math. Analys. and Appl. 1975. V.51. №2. P.326-358.
114. *Muller J.S.* Step by step approximation of plane convex bodies // Arch. Math. 1992. V.58. P.606-610.
115. *Pearson J.D., Sridhar R.* A discrete optimal control problem // IEEE Trans. AC-11. 2. 1966. P.171-174.
116. *Pearson J.D.* The discrete maximum principle // Int. J. Control 2. 2. 1965. P.117-124.

117. *Peng S.* A general stochastic maximum principle for optimal control problems.
// SIAM J. Control and Optimiz. 10. 1972. P.1261-1279.
118. *Schneider R.* Polyhedral approximation of smooth convex bodies // J.Math.
Analys. and Appl. 1987. V.128. №2. P.470-474.
119. *Telgen J.* Minimal representation of convex polyhedral sets // J. Optim. Theory
Appl. 1982. V.38. №1. P.1-24.
120. *Wang G., Yu Z.* A Pontryagin's maximum principle for non-zero sum
differential games of BSDEs with applications // IEEE Trans. Autom. Control.
55. 7. July. 2010. P.1742-1754
121. *Wu Z.* A general maximum principle for optimal control of forward-backward
stochastic systems // Automatica. 49. 5. 2013. P.1473-1480.