

На правах рукописи



ЗОАН КУИ ХИЕУ

**НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ПЛАСТИН
ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ НА ОСНОВЕ УТОЧНЕННОЙ ТЕОРИИ**

Специальность 01.02.06 – Динамика, прочность машин, приборов и аппаратуры

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Москва – 2020

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)».

Научный руководитель: Доктор технических наук, профессор
Фирсанов Валерий Васильевич

Официальные оппоненты: **Дмитриенко Юрий Иванович**
доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой «Вычислительная математика
и математическая физика» ФГБОУ ВО «Московский
государственный технический университет имени
Н.Э. Баумана (национальный исследовательский
университет)», г. Москва;

Хроматов Василий Ефимович
кандидат технических наук, профессор ФГБОУ ВО
Национальный исследовательский университет
"Московский Энергетический институт", профессор
кафедры "Робототехника, мехатроника, динамика и
прочность машин", г. Москва.

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное
учреждение науки Институт прикладной
механики Российской академии наук, г. Москва.

Защита диссертации состоится «02» декабря 2020 г. в 15⁰⁰ часов на заседании диссертационного совета Д 212.125.05 в ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», по адресу: 125993, г. Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, дом 4.

С диссертацией можно ознакомиться в научно-технической библиотеке ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», и на сайте: https://mai.ru/events/defence/index.php?ELEMENT_ID=117763

Автореферат разослан «__» _____ 2020 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета

Федотенков Григорий Валерьевич

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования.

Одним из актуальных путей развития современной авиационной техники является все более широкое применение легких и экономичных тонкостенных конструкций, моделируемых пластинами и оболочками. Современная техника выдвинула в теории пластин и оболочек более сложные проблемы, чем те, которые исследуются классической теорией типа Кирхгофа-Лява, Тимошенко-Рейсснера. Один из аспектов этих проблем заключается в том, что при проектировании различных переходных зон и соединений применяются пластины и оболочки переменной толщины. Поэтому актуальной представляется задача повышения достоверности методов расчета пластин и оболочек переменной толщины за счет учета трехмерности напряженно-деформированного состояния (НДС) в зонах его искажения (зоны крепления, локального нагружения, быстро изменяющихся нагрузок и др.), где имеют место дополнительные по отношению к классической теории НДС типа “погранслои”.

Учет трехмерности НДС в указанных зонах в сочетании с методами механики разрушения позволит оценить трещиностойкость в наиболее нагруженных зонах конструкции и обосновать тип конструкционного материала для его рационального распределения вблизи концентраторов напряжений. В ряде случаев это приводит к повышению уровня НДС в краевых зонах, которые часто оформляются в виде пластин и оболочек переменной толщины.

Здесь возникает также важная задача о расчете НДС пластины при совместном действии механических нагрузок и повышенных температур, так как единственным следствием нагрева будет возникновение дополнительных деформаций, обусловленных всесторонним тепловым расширением.

Поэтому разработка методов прогнозирования НДС пластин переменной толщины при термомеханическом нагружении, уточняющих результаты классической теории и применяемых на этапах проектирования перспективной техники, представляет собой актуальную проблему.

Целью диссертационной работы является построение математических моделей НДС прямоугольных и круглых пластин переменной толщины с типовыми краевыми условиями при действии локальных и распределенных нагрузок различной изменчивости; исследование НДС круглой пластины переменной толщины на основе уточненной теории при термомеханическом воздействии.

Задачи работы, решаемые для достижения поставленной цели:

1. Построение системы дифференциальных уравнений в частных производных, описывающей равновесие прямоугольных и круглых пластин переменной толщины, на основе трехмерных уравнений теории упругости. Приведение краевой задачи к системе обыкновенных дифференциальных уравнений в перемещениях с соответствующими краевыми условиями. Алгоритм расчета НДС пластины.

2. Параметрические исследования НДС вблизи жестко заземленного края изотропных прямоугольных и круглых пластин переменной толщины по уточненной теории в зависимости от изменчивости толщины и характера нагружения. Сравнение результатов расчета НДС, полученных в диссертационной работе, с данными классической и других вариантов уточненных теорий.

3. Расчет НДС круглых изотропных пластин переменной толщины под действием распределенной механической нагрузки и повышенной температуры. Результаты расчета НДС пластины в упругой области по уточненной теории в зависимости от величины температуры.

Методы исследования. Применение трехмерных уравнений теории упругости в декартовой и цилиндрической системах координат; аппроксимация перемещений пластин полиномами по нормальной к срединной поверхности координате на две степени выше относительно классической теории типа Кирхгофа-Лява; вариационный принцип Лагранжа; приведение краевой задачи к обыкновенным дифференциальным уравнением; осуществляется разложением нагрузки и искомых перемещений в тригонометрические ряды; метод конечных разностей; метод матричной прогонки.

Достоверность и обоснованность результатов обеспечивается: корректным использованием законов и уравнений механики деформируемого твердого тела; применением для решения краевых задач строгих математических методов: сравнением результатов расчета с данными классической и других вариантов уточненной теории, подтверждающими их хорошее согласование для ряда конкретных задач.

Научная новизна диссертационной работы заключается в следующем:

1. Впервые построены двумерные линейные уравнения и граничные условия для определения НДС изотропных прямоугольных и круглых пластин переменной толщины с использованием представления компонентов НДС в виде полиномов по нормальной координате более высокой степени по отношению к классической теории. С помощью вариационного принципа Лагранжа трехмерная проблема приведена к двумерной с согласованным количеством дифференциальных уравнений и краевых условий.

2. Для прямоугольных и круглых пластин впервые получены системы обыкновенных дифференциальных уравнений в перемещениях с переменными коэффициентами и сформулированы граничные условия для основных типов крепления пластин.

3. Доказано, что по отношению к классической теории пластин, уточненная теория дает возможность получить дополнительные напряжения, соответствующие быстро затухающим от линии искажения самоуравновешенным напряженным состояниям типа “погранслои”.

4. Показано, что для прямоугольных и круглых пластин вблизи зон искажения НДС компоненты напряженного состояния, полученные по уточненной теории, существенно отличаются от соответствующих значений, определенных по

классической теории не только в части поперечных нормальных и касательных, но и в части тангенциальных напряжений.

5. На основе уточненной теории построены уравнения и граничные условия для определения НДС изотропных круглых пластин при совместном действии распределенной нагрузки и температуры; дан анализ НДС пластины по уточненной теории для нескольких вариантов температуры.

Практическая значимость диссертационной работы составляют:

1. Предлагаемые математические модели, методы и алгоритмы расчета, позволяющие существенно уточнить НДС прямоугольных и круглых пластин переменной толщины в зонах искажения напряженного состояния.

2. Качественный и количественный анализ влияния вида нагружения, геометрических параметров прямоугольных и круглых пластин на их НДС.

3. В доказательстве наличия НДС типа «погранслои» вблизи жестко заземленных краев и локальной нагрузки.

4. Разработка алгоритма расчета НДС прямоугольных и круглых пластин, выполняемого с использованием программы для ЭВМ.

5. Результаты, полученные на основе теоретических и численных исследований, могут быть использованы на этапе проектирования перспективной техники при оценке прочности и долговечности конструкций расчетными и экспериментальными методами.

На защиту выносятся следующие основные результаты и положения:

1. Математические модели определения НДС прямоугольных и круглых пластин переменной толщины, позволяющие существенно уточнить НДС в зонах искажения напряженного состояния.

2. Расчеты НДС прямоугольных и круглых пластин под действием локальных и распределенных нагрузок, основанные на методах конечных разностей и матричной прогонки для решения систем дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами и алгебраических уравнений.

3. Доказательство существования дополнительного быстро затухающего при удалении от жестко заземленного края пластин напряженного состояния типа «погранслои», компоненты которого по величине одного порядка с напряжениями основного (внутреннего) состояния, определяемого по классической теории.

4. Результаты анализа характера распределения НДС прямоугольных и круглых пластин переменной толщины в зависимости от изменяемости толщины и влияния нагрузок.

5. Математические модели определения НДС круглых пластин переменной толщины при совместном действии распределенной механической нагрузки и повышенной температуры, позволяющие существенно уточнить НДС в зоне жестко заземленного края.

Апробация основных результатов работы. Результаты диссертационной работы докладывались на

- XXIII-м, XXIV-м, XXV-м международных симпозиумах «Динамические и

технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Московская обл., 2017, 2018, 2019 г.г.

- VI-м, VII-м международных научных семинарах «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы». Москва, 2017, 2018 г.г.

- 18-й Международной конференции «Авиация и космонавтика», МАИ. Москва, 2019 г.г.

- Научном семинаре института № 9 «Общеинженерной подготовки», Московского авиационного института, 2020 г.г.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 13 научных работ, в том числе 6 работ в изданиях из Перечня ВАК РФ, 1 работа в издании из МБД Scopus.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, 4 глав, заключения, списка сокращений и условных обозначений, списка литературы. Работа содержит 155 страниц, 78 рисунков, 5 таблиц. Список литературы содержит 136 наименований.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обосновывается актуальность научных исследований, изложенных в диссертации, а также сформулированы цель и задачи, определена научная новизна, практическая значимость диссертационной работы.

В первой главе рассмотрены общие положения о состоянии проблемы пластин и оболочек переменной толщины; приведен обзор литературных источников, посвященных изучению пластин и оболочек в различных аспектах.

В параграфе 1.1 представлен обзор литературы по основным направлениям развития теории пластин и оболочек, показана актуальность темы диссертации и намечены основные задачи исследования НДС пластин переменной толщины.

В параграфе 1.2 представлены проблемы исследования НДС пластин по уточненной теории и основные задачи развития исследований НДС пластин и оболочек.

Во второй главе разработана уточненная математическая модель НДС прямоугольных пластин переменной толщины, построена система дифференциальных уравнений и соответствующие граничные условия. Сформулирована краевая задача, которая с помощью тригонометрических рядов, методов конечных разностей и матричной прогонки сведена к численному интегрированию системы 11-и уравнений с граничными условиями. Построены решения однородных систем алгебраических уравнений для общего случая деформации прямоугольных пластин переменной толщины.

В параграфе 2.1 приведены основные уравнения уточненной теории прямоугольных пластин переменной толщины.

Для описания НДС прямоугольной пластины используются уравнения трехмерной задачи теории упругости в триортогональной системе координат.

Представим перемещения в виде следующих полиномов:

$$\begin{aligned}
 U_1(x, y, z) &= u_0(x, y) + u_1(x, y)z + u_2(x, y)\frac{z^2}{2!} + u_3(x, y)\frac{z^3}{3!}, \\
 U_2(x, y, z) &= v_0(x, y) + v_1(x, y)z + v_2(x, y)\frac{z^2}{2!} + v_3(x, y)\frac{z^3}{3!}, \\
 U_3(x, y, z) &= w_0(x, y) + w_1(x, y)z + w_2(x, y)\frac{z^2}{2!},
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Геометрические уравнения трехмерной теории упругости принимаются в виде

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \partial U_1 / \partial x, \quad \varepsilon_y = \partial U_2 / \partial y, \quad \gamma_{xy} = \partial U_1 / \partial y + \partial U_2 / \partial x, \\
 \gamma_{xz} &= \partial U_1 / \partial z + \partial U_3 / \partial x, \quad \gamma_{yz} = \partial U_2 / \partial z + \partial U_3 / \partial y, \quad \varepsilon_z = \partial U_3 / \partial z.
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Физические уравнения трехмерной теории упругости для пластины записываются в виде

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= (2G_0 + \lambda)\varepsilon_x + \lambda\varepsilon_y + \lambda\varepsilon_z, \quad \sigma_y = \lambda\varepsilon_x + (2G_0 + \lambda)\varepsilon_y + \lambda\varepsilon_z, \\
 \sigma_z &= \lambda\varepsilon_x + \lambda\varepsilon_y + (2G_0 + \lambda)\varepsilon_z, \quad \tau_{xy} = G_0\gamma_{xy}, \quad \tau_{xz} = G_0\gamma_{xz}, \quad \tau_{yz} = G_0\gamma_{yz},
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

где коэффициенты G_0 , λ представляют собой упругие постоянные изотропного материала пластины.

Сформулируем вариационную постановку задачи. Запишем условие минимума энергетического функционала Лагранжа

$$\delta U - \delta A = 0, \tag{2.4}$$

где вариация потенциальной энергии деформации δU находится как

$$\delta U = \iiint (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) dx dy dz$$

и δA - вариация работы внешней нагрузки, определяемая по формуле

$$\delta A = \iint q(x, y) \delta \left[w_0(x, y) + w_1(x, y)h + w_2(x, y)\frac{h^2}{2} \right] dx dy.$$

Подставляя в равенство (2.4) уравнения для деформаций и напряжений (2.2), (2.3) с учетом аппроксимацией (2.1) и вводя в рассмотрение обобщенные внутренние силовые факторы, получим уравнения равновесия прямоугольных пластин

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0, \quad \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{xy}}{\partial y} = p_z^0, \\
 \frac{\partial M_x^i}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}^i}{\partial y} - H_{xz}^i &= 0, \quad \frac{\partial M_y^i}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}^i}{\partial x} - H_{yz}^i = 0, \quad i = 1, 2, 3, \\
 \frac{\partial M_{xz}^1}{\partial x} + \frac{\partial M_{yz}^1}{\partial y} - H_z^1 &= p_z^1, \quad \frac{\partial M_{xz}^2}{\partial x} + \frac{\partial M_{yz}^2}{\partial y} - H_z^2 = p_z^2.
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$(N_x, N_y, N_{xy}, Q_{xz}, Q_{yz}) = \int_{-h}^{+h} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}) dz; (M_x^i, M_y^i, M_{xy}^i, M_{xz}^i, M_{yz}^i) =$$

$$= \int_{-h}^{+h} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}) \frac{z^i}{i!} dz; (H_{xz}^i, H_{yz}^i, Q_z^i) = \int_{-h}^{+h} (\tau_{xz}, \tau_{yz}, \sigma_z) \frac{z^{i-1}}{(i-1)!} dz; p_z^i = qh^i / i!, i=1..3,$$

где $N_x, N_y, N_{xy}, Q_{xz}, Q_{yz}, M_x^i, M_y^i, M_{xy}^i, M_{xz}^i, M_{yz}^i, H_{xz}^i, H_{yz}^i, Q_z^i$ - обобщенные внутренние силовые факторы. Соответствующие граничные условия представляются в следующем виде:

$$\text{на краях } x=0, x=a: N_x = \bar{N}_x \vee u_0 = \bar{u}_0, N_{xy} = \bar{N}_{xy} \vee v_0 = \bar{v}_0, Q_{xz} = \bar{Q}_{xz} \vee w_0 = \bar{w}_0,$$

$$M_x^i = \bar{M}_x^i \vee u_i = \bar{u}_i, M_{xy}^i = \bar{M}_{xy}^i \vee v_i = \bar{v}_i, i=1,2,3, M_{xz}^i = \bar{M}_{xz}^i \vee w_i = \bar{w}_i, i=1,2,$$

$$\text{на краях } y=0, y=b: N_{xy} = \bar{N}_{xy} \vee u_0 = \bar{u}_0, N_y = \bar{N}_y \vee v_0 = \bar{v}_0, Q_{yz} = \bar{Q}_{yz} \vee w_0 = \bar{w}_0,$$

$$M_{xy}^i = \bar{M}_{xy}^i \vee u_i = \bar{u}_i, M_y^i = \bar{M}_y^i \vee v_i = \bar{v}_i, i=1,2,3, M_{yz}^i = \bar{M}_{yz}^i \vee w_i = \bar{w}_i, i=1,2,$$

где верхней чертой обозначены значения внешних силовых факторов, действующих по боковым граням пластины.

В параграфе 2.2 представлен метод приведения краевой задачи к системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

Полагаем, что пластина имеет шарнирные опоры на краях $y=0, y=b$. Тогда представим внешнюю нагрузку и перемещения в виде рядов по тригонометрическим функциям следующего вида:

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} Q_m(x) \sin(\psi_m y), u_i(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} U_{im}(x) \sin(\psi_m y), \quad (2.6)$$

$$v_i(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} V_{im}(x) \cos(\psi_m y), w_j(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} W_{jm}(x) \sin(\psi_m y), i = \overline{0,3}, j = \overline{0,2},$$

где $\psi_m = m\pi / b$.

Подставляя (2.6) в (2.5), получим обыкновенные дифференциальные уравнения в перемещениях с переменными коэффициентами для m -х членов разложений (2.6)

$$\sum_{s=0}^3 \left(K_l^{us0} + K_l^{us11} \frac{d^2}{dx^2} - \psi_m K_l^{us22} \right) U_{sm}(x) - \sum_{s=0}^3 \psi_m K_l^{vs12} \frac{d}{dx} V_{sm}(x) +$$

$$+ K_l^{w01} \frac{d}{dx} W_{0m}(x) + K_l^{w11} \frac{d}{dx} W_{1m}(x) + K_l^{w21} \frac{d}{dx} W_{2m}(x) = 0, l = 1, 2, 3, 4,$$

$$\sum_{s=0}^3 \psi_m K_p^{us12} \frac{d}{dx} U_{sm}(x) + \sum_{s=0}^3 \left(K_p^{vs0} + K_p^{vs11} \frac{d^2}{dx^2} - \psi_m^2 K_p^{vs22} \right) V_{sm}(x) -$$

$$+ K_p^{w02} \psi_m W_{0m}(x) + K_p^{w12} \psi_m W_{1m}(x) + K_p^{w22} \psi_m W_{2m}(x) = 0, p = 5, 6, 7, 8, \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{s=0}^3 K_j^{us1} \frac{d}{dx} U_{sm}(x) - \sum_{s=0}^3 \psi_m K_j^{vs2} V_{sm}(x) + \left(K_j^{w00} + K_j^{w011} \frac{d^2}{dx^2} - \right. \\ & \left. - \psi_m^2 K_j^{w022} \right) W_{0m}(x) + \left(K_j^{w10} + K_j^{w111} \frac{d^2}{dx^2} - \psi_m^2 K_j^{w122} \right) W_{1m}(x) + \\ & + \left(K_j^{w20} + K_j^{w211} \frac{d^2}{dx^2} - \psi_m^2 K_j^{w222} \right) W_{2m}(x) = K_j^{q33} Q_m, \quad j = 9, 10, 11. \end{aligned}$$

В параграфе 2.3 дан алгоритм решения сформулированной краевой задачи. Применяя метод конечных разностей, дифференциальные уравнения (2.7) приводятся к алгебраическим уравнениям следующего вида:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^3 \frac{K_l^{un11}}{s^2} u_n^{i-1} + \sum_{n=0}^3 \frac{\psi K_l^{vn12}}{2s} v_n^{i-1} - \frac{K_l^{w01}}{2s} w_0^{i-1} - \frac{K_l^{w11}}{2s} w_1^{i-1} - \frac{K_l^{w21}}{2s} w_2^{i-1} + \\ & \sum_{n=0}^3 \left(K_l^{un0} - \frac{2K_l^{un11}}{s^2} - \psi_m^2 K_l^{un22} \right) u_n^i + \sum_{n=0}^3 \frac{K_l^{un11}}{s^2} u_n^{i+1} - \sum_{s=0}^3 \frac{\psi K_l^{vn12}}{2s} v_n^{i+1} + \\ & + \frac{K_l^{w01}}{2s} w_0^{i+1} + \frac{K_l^{w11}}{2s} w_1^{i+1} + \frac{K_l^{w21}}{2s} w_2^{i+1} = 0, \quad l = 1, 2, 3, 4, \\ & \sum_{n=0}^3 \frac{-\psi_m K_p^{un12}}{2s} u_n^{i-1} + \sum_{n=0}^3 \frac{K_p^{vn11}}{s^2} v_n^{i-1} + \sum_{n=0}^3 \left(K_p^{vn0} - \frac{2K_p^{vn11}}{s^2} - \psi_m^2 K_p^{vn22} \right) v_n^i + K_p^{w02} \psi_m w_0^i + \\ & + K_p^{w12} \psi_m w_1^i + K_p^{w22} \psi_m w_2^i + \sum_{n=0}^3 \frac{\psi_m K_p^{un12}}{2s} u_n^{i+1} + \sum_{n=0}^3 \frac{K_p^{vn11}}{s^2} v_n^{i+1} = 0, \quad p = 5, 6, 7, 8, \\ & \sum_{n=0}^3 \frac{-K_j^{un1}}{2s} u_n^{i-1} + \frac{K_j^{w011}}{s^2} w_0^{i-1} + \frac{K_j^{w111}}{s^2} w_1^{i-1} + \frac{K_j^{w211}}{s^2} w_2^{i-1} + \sum_{n=0}^3 \psi_m K_j^{vs2} v_n^i - \sum_{n=0}^3 \psi_m K_j^{vs2} v_n^i + \\ & + \left(K_j^{w00} - \frac{2K_j^{w011}}{s^2} - \psi_m^2 K_j^{w022} \right) w_0^i + \left(K_j^{w10} - \frac{2K_j^{w111}}{s^2} - \psi_m^2 K_j^{w122} \right) w_1^i + \\ & + \left(K_j^{w20} - \frac{2K_j^{w211}}{s^2} - \psi_m^2 K_j^{w222} \right) w_2^i + \sum_{n=0}^3 \frac{K_j^{un1}}{2s} u_n^{i+1} + \frac{K_j^{w011}}{s^2} w_0^{i+1} + \\ & + \frac{K_j^{w111}}{s^2} w_1^{i+1} + \frac{K_j^{w211}}{s^2} w_2^{i+1} = K_j^{q33} Q_m, \quad j = \overline{9, 11}, \quad i = \overline{1, (N_0 - 1)}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

где $(N_0 + 1)$, s - соответственно число узлов и шаг конечно-разностной схемы.

Система (2.8) решена методом матричной прогонки. Подстановкой перемещений (2.1) в формулы (2.3) находятся деформации пластины. С помощью соотношений (2.4) получим выражения для тангенциальных напряжений пластины. Интегрированием трехмерных уравнений равновесия теории упругости по толщине пластины в интервале от $-h$ до z , находим выражения поперечных

напряжений

$$\tau_{xz} = -\int_{-h}^z \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) dz, \tau_{yz} = -\int_{-h}^z \left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \right) dz, \sigma_z = -\int_{-h}^z \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \right) dz.$$

В параграфе 2.4 приведены результаты расчетов и параметрического анализа НДС прямоугольных пластин переменной толщины с помощью программного пакета для ЭВМ.

Рассматривается квадратная изотропная пластина со следующими параметрами: $a = b = 1$ (м), $h_0 = 0,005$ (м), $h_m = 0,05$ (м). Коэффициент Пуассона $\mu = 0,3$, модуль упругости $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па. Пластина имеет жестко заземленные опоры на двух краях $x = 0$, $x = a$ и шарнирные опоры на краях $y = 0$, $y = b$. В диссертации представлены результаты расчета в виде графиков НДС прямоугольных пластин при различных вариантах толщин и нагружений.

1. Расчет НДС “погранслои” в зоне жестко заземленного края. Сравнение с данными классической теории. Толщина пластины определяется соотношением

$$h(x) = h_m - \operatorname{tg}(\alpha) \cdot x, \quad (2.9)$$

где $\operatorname{tg}(\alpha) = (h_m - h_0) / a$, 2α – угол наклона пластины.

Представлены результаты расчета НДС прямоугольных пластин переменной толщины, находящихся под действием следующих нагрузок: распределенной нагрузки, изменяющейся по закону $q(x, y) = Q_0 \sin(\pi y)$, где $Q_0 = \text{const}$; для случая распределенной нагрузки типовой график для прогиба по длине пластины представлен на рис. 2.1. Отсюда следует, что максимальные величины перемещений уточняются незначительно (на 7%). Отметим, что на этом и последующих рисунках аббревиатура “Уточ.” соответствует варианту уточненной теории и аббревиатура “Клас.” – расчету по классической теории.

Результаты расчета нормальных и касательных напряжений по длине и толщине на краю $x = 0$ пластины по уточненной теории представлены на рис. 2.2-2.4. Анализ полученных результатов показывает, что вне краевой зоны напряжения, соответствующие уточненной и классической теориям, практически совпадают (рис. 2.2, 2.3), что подтверждает достоверность полученных результатов.

Расчет напряжений на краю пластины $x = 0$ (рис. 2.4) по уточненной теории показывает, что их величины значительно уточняются за счет дополнительных напряжений “погранслои”, а именно: тангенциальные нормальные напряжения σ_x – на 26,3%, поперечные нормальные напряжения σ_z – на 30%, поперечные касательные напряжения τ_{xz} – на 16% от максимальных изгибных напряжений, соответствующих классической теории.

Графики нормальных напряжений пластины, соответствующих уточненной теории, для различных величин углов α , при $h_m = 0,005$ м; 0,02 м; 0,03 м

представлены на рис 2.5-2.7.

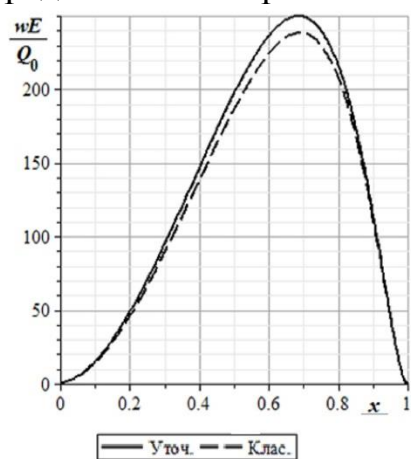


Рис. 2.1

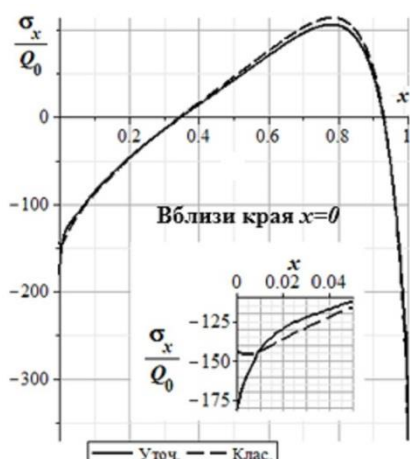


Рис. 2.2

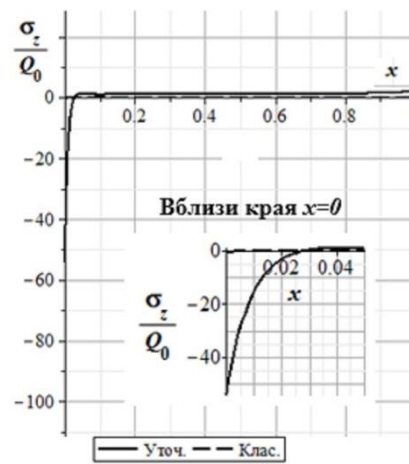


Рис. 2.3

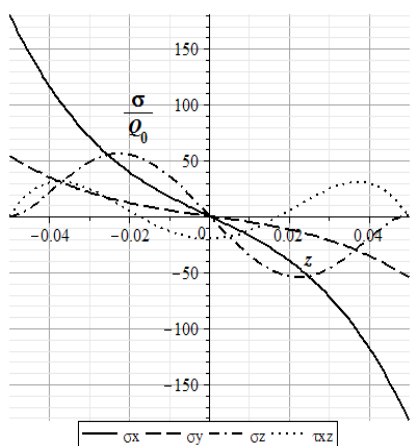


Рис. 2.4

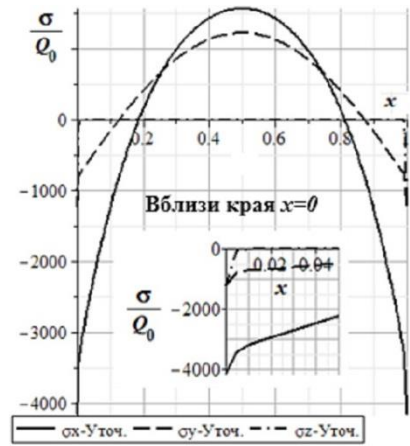


Рис. 2.5

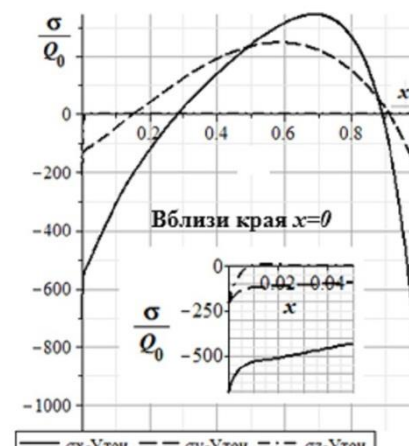


Рис. 2.6

2. Влияние изменяемости толщины

Рассматривается квадратная изотропная пластина, находящаяся под действием распределенной нагрузки $q(x, y) = Q_0 \sin(\pi y)$, где $Q_0 = const$, с аналогичными параграфу 2.4 параметрами, толщина которой определяется квадратичной функцией $h(x) = 0.028x^2 - 0.072x + 0.05$. Результаты вычисления нормальных напряжений пластины, по уточненной теории представлены на рис 2.8-2.10.

Анализ результатов расчета показывает, что напряжения, соответствующие уточненной и классической теориям, практически совпадают по всей длине пластины за исключением зоны вблизи жестко заземленного края, где дополнительные напряжения “погранслои” становятся одного порядка с величинами основного (внутреннего) напряженного состояния, например нормальные поперечные напряжения σ_z составляют около 35% от наибольших напряжений σ_x , соответствующих классической теории.

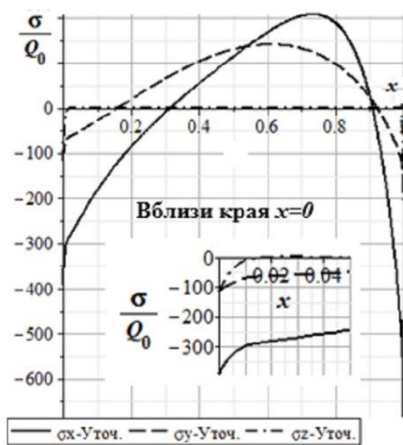


Рис. 2.7

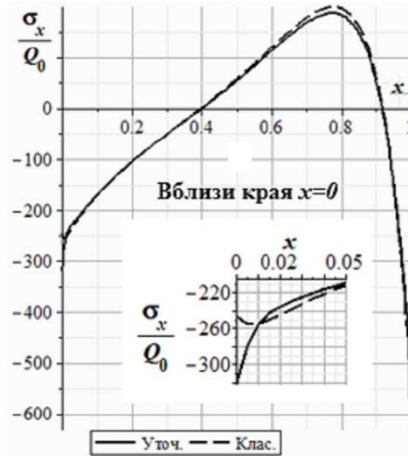


Рис. 2.8

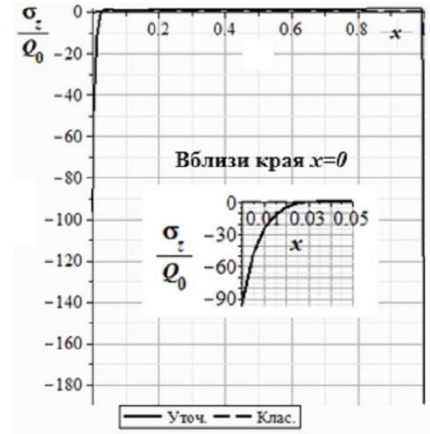


Рис. 2.9

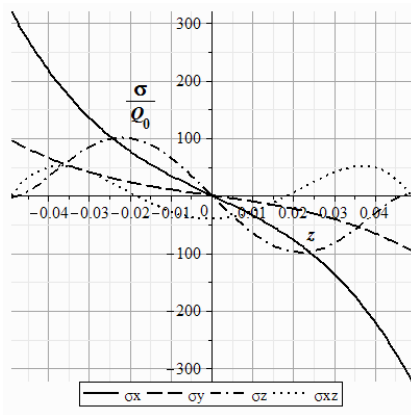


Рис. 2.10

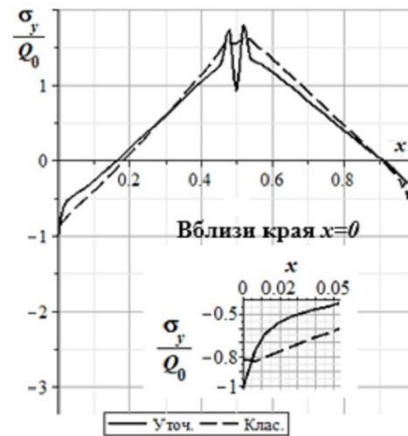


Рис. 2.11

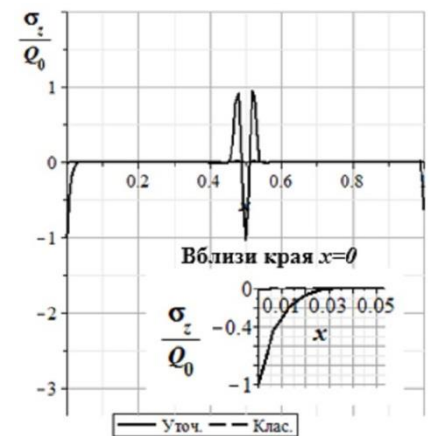


Рис. 2.12

3. Влияние характера внешней нагрузки

Рассматривается пластина, переменная толщина которой определяется соотношением (2.9), находящаяся под действием локальной нагрузки, изменяющейся по синусоидальному закону, при $x_1 = 7a/15$; $x_2 = 8a/15$

$$q(x, y) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < x_1 \\ Q_0 \sin\left(\frac{k\pi(x-x_1)}{x_2-x_1}\right) \sin(\pi y), & x_1 \leq x \leq x_2, \quad \text{где } k = 1, 2, 3, \dots \\ 0, & x_2 < x \leq a \end{cases}$$

Результаты вычисления нормальных напряжений пластины по уточненной теории при $k = 3$ представлены на рис. 2.11-2.13. Приведены результаты расчета нормальных напряжений пластины, жестко заземленной на двух краях, для различного числа полуволн $k = 1, 3, 5$ соответственно. Очевидно, что в зоне нагрузки напряжения, определяемые по уточненной и классической теориям, отличаются по величине. Скачки напряжений на графиках происходят из-за влияния локальной нагрузки. Анализ полученных результатов показывает, что число полуволн k существенно влияет на НДС пластины. Следовательно, можно утверждать, что в

зоне локальной нагрузки возникают дополнительные напряжения “погранслои”.



Рис. 2.13

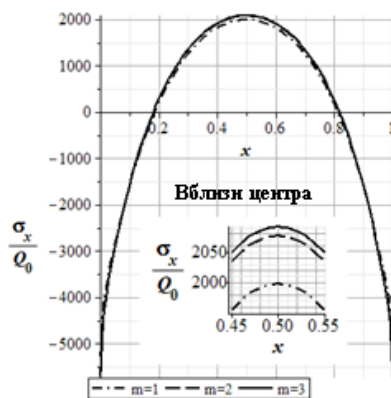


Рис. 2.14

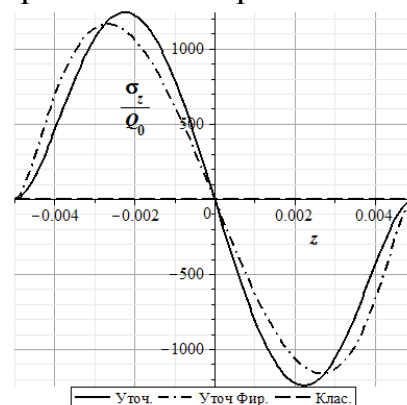


Рис. 2.15

В параграфе 2.5 рассматривается разложение нагрузки в ряды Фурье. Доказана сходимость расчета НДС пластины (рис. 2.14).

В параграфе 2.6 дано сравнение результатов расчета НДС с данными классической и других вариантов уточненных теорий. Рассматривается прямоугольная пластина постоянной толщины, т.е. при угле $\alpha=0$. В этом случае, система дифференциальных уравнений (2.18) имеет постоянные коэффициенты и её можно решить с помощью преобразования Лапласа. В результате сравнения решений методами конечных разностей и преобразования Лапласа напряжения практически совпадают. Кроме того, на рис. 2.15 показаны результаты сравнения напряжений σ_z , полученных в работе Вал.В. Фирсанова по уточненной теории с применением вариационно-асимптотического метода и по разработанной в диссертации теории. Графики напряжений σ_z по обоим вариантам уточненной теории практически совпадают, а горизонтальная пунктирная линия показывает отсутствие указанных напряжений в классической теории, что подтверждает достоверность представленной математической модели НДС.

В параграфе 2.7 рассматривается расчет прочности сварного соединения прямоугольных пластин на основе уточненной теории.

В третьей главе разработана уточненная математическая модель НДС круглых пластин переменной толщины, построена система дифференциальных уравнений и соответствующие граничные условия. В безразмерной цилиндрической системе координат сформулирована краевая задача, которая по аналогии со второй главой, решается с помощью тригонометрических рядов, методов конечных разностей и матричной прогонки.

В параграфе 3.1 приведены основные уравнения теории круглых пластин переменной толщины. Для описания НДС круглых пластин используются уравнения трехмерной задачи теории упругости в безразмерной цилиндрической системе координат (r, φ, z) . Представим перемещения в виде следующих полиномов:

$$\begin{aligned}
U_1(r, \varphi, z) &= u_0(r, \varphi) + u_1(r, \varphi)z + u_2(r, \varphi)\frac{z^2}{2!} + u_3(r, \varphi)\frac{z^3}{3!}, \\
U_2(r, \varphi, z) &= v_0(r, \varphi) + v_1(r, \varphi)z + v_2(r, \varphi)\frac{z^2}{2!} + v_3(r, \varphi)\frac{z^3}{3!},
\end{aligned} \tag{3.1}$$

$$U_3(r, \varphi, z) = w_0(r, \varphi) + w_1(r, \varphi)z + w_2(r, \varphi)\frac{z^2}{2!}.$$

Геометрические уравнения трехмерной теории упругости имеют вид

$$\begin{aligned}
\varepsilon_r &= \frac{\partial U_1}{\partial r}, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{1}{r}(\frac{\partial U_2}{\partial \varphi} + U_1), \quad \varepsilon_z = \frac{\partial U_3}{\partial z}, \\
\gamma_{r\varphi} &= r \frac{\partial}{\partial r}(\frac{U_2}{r}) + \frac{1}{r} \frac{\partial U_1}{\partial \varphi}, \quad \gamma_{rz} = \frac{\partial U_3}{\partial r} + \frac{\partial U_1}{\partial z}, \quad \gamma_{\varphi z} = \frac{1}{r} \frac{\partial U_3}{\partial \varphi} + \frac{\partial U_2}{\partial z}.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Физические уравнения трехмерной теории упругости для пластины записываются в виде

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= (2G_0 + \lambda)\varepsilon_r + \lambda\varepsilon_\varphi + \lambda\varepsilon_z, \quad \sigma_\varphi = \lambda\varepsilon_r + (2G_0 + \lambda)\varepsilon_\varphi + \lambda\varepsilon_z, \\
\sigma_z &= \lambda\varepsilon_r + \lambda\varepsilon_\varphi + (2G_0 + \lambda)\varepsilon_z, \quad \tau_{r\varphi} = G_0\gamma_{r\varphi}, \quad \tau_{rz} = G_0\gamma_{rz}, \quad \tau_{\varphi z} = G_0\gamma_{\varphi z},
\end{aligned} \tag{3.3}$$

где коэффициенты G_0 , λ представляют собой упругие постоянные изотропного материала пластины.

По аналогии со второй главой сформулируем вариационную постановку задачи. Запишем условие минимума энергетического функционала Лагранжа

$$\delta U - \delta A = 0, \tag{3.4}$$

где вариация потенциальной энергии деформации δU находится как

$$\delta U = \iiint (\sigma_r \delta \varepsilon_r + \sigma_\varphi \delta \varepsilon_\varphi + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{r\varphi} \delta \gamma_{r\varphi} + \tau_{rz} \delta \gamma_{rz} + \tau_{\varphi z} \delta \gamma_{\varphi z}) dr d\varphi dz,$$

и δA - вариация работы внешней нагрузки, определяемая по формуле

$$\delta A = \iint q(r, \varphi) \delta \left[w_0(r, \varphi) + w_1(r, \varphi)h + w_2(r, \varphi)\frac{h^2}{2} \right] dr d\varphi.$$

Подставляя геометрические и физические уравнения (3.2), (3.3) в равенство (3.4) и вводя в рассмотрение обобщенные внутренние силовые факторы, получены уравнения равновесия круглых пластин переменной толщины

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial N_{r\varphi}}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} N_\varphi = 0, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial N_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial N_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} N_{r\varphi} = 0, \quad \frac{\partial Q_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial Q_{\varphi z}}{\partial \varphi} = p_z^0, \\
\frac{\partial M_r^i}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{r\varphi}^i}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} M_\varphi^i - H_{rz}^i = 0, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial M_\varphi^i}{\partial \varphi} + \frac{\partial M_{r\varphi}^i}{\partial r} + \frac{1}{r} M_{r\varphi}^i - H_{\varphi z}^i = 0, \quad i=1,2,3,
\end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial M_{rz}^1}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{\varphi z}^1}{\partial \varphi} - H_z^1 = p_z^1, \quad \frac{\partial M_{rz}^2}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{\varphi z}^2}{\partial \varphi} - H_z^2 = p_z^2.$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$(N_r, N_\varphi, N_{r\varphi}, Q_{rz}, Q_{\varphi z}) = \int_{-h}^{+h} (\sigma_r, \sigma_\varphi, \tau_{r\varphi}, \tau_{rz}, \tau_{\varphi z}) dz; \quad (M_r^i, M_\varphi^i, M_{r\varphi}^i, M_{rz}^i, M_{\varphi z}^i) = \\ = \int_{-h}^{+h} (\sigma_r, \sigma_\varphi, \tau_{r\varphi}, \tau_{rz}, \tau_{\varphi z}) \frac{z^i}{i!} dz; \quad (H_{rz}^i, H_{\varphi z}^i, H_z^i) = \int_{-h}^{+h} (\tau_{rz}, \tau_{\varphi z}, \sigma_z) \frac{z^{i-1}}{(i-1)!} dz; \quad p_z^i = qh^i / i!,$$

где $N_r, N_\varphi, N_{r\varphi}, Q_{rz}, Q_{\varphi z}, M_r^i, M_\varphi^i, M_{r\varphi}^i, M_{rz}^i, M_{\varphi z}^i, H_{rz}^i, H_{\varphi z}^i, H_z^i$ -обобщенные внутренние силовые факторы. Соответствующие граничные условия на краях $r=b, r=a$ представляются в следующем виде:

$$N_r = \bar{N}_r \vee u_0 = \bar{u}_0, \quad N_{r\varphi} = \bar{N}_{r\varphi} \vee v_0 = \bar{v}_0, \quad Q_{rz} = \bar{Q}_{rz} \vee w_0 = \bar{w}_0,$$

$$M_r^i = \bar{M}_r^i \vee u_i = \bar{u}_i, \quad M_{r\varphi}^i = \bar{M}_{r\varphi}^i \vee v_i = \bar{v}_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad M_{rz}^i = \bar{M}_{rz}^i \vee w_i = \bar{w}_i, \quad i = 1, 2,$$

где верхней чертой обозначены значения внешних силовых факторов, действующих по боковым граням пластины.

В параграфе 3.2 представлен метод приведения краевой задачи к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. С помощью тригонометрических рядов получим систему 11-и уравнений равновесия теории круглых пластин в перемещениях:

$$\left(K_1^{u00} + K_1^{u01} \frac{d}{dr} + K_1^{u011} \frac{d^2}{dr^2} - K_1^{u022} \cdot m^2 \right) U_{0m}(r) + \left(K_1^{u20} + K_1^{u21} \frac{d}{dr} + K_1^{u211} \frac{d^2}{dr^2} - K_1^{u222} \cdot m^2 \right) U_{2m}(r) - \\ - m(K_1^{v02} + K_1^{v012} \frac{d}{dr}) V_{0m}(r) - m(K_1^{v22} + K_1^{v212} \frac{d}{dr}) V_{2m}(r) + (K_1^{w10} + K_1^{w11} \frac{d}{dr}) W_{1m}(r) = 0, \\ \left(K_2^{u10} + K_2^{u11} \frac{d}{dr} + K_2^{u111} \frac{d^2}{dr^2} - K_2^{u122} \cdot m^2 \right) U_{1m}(r) + \left(K_2^{u30} + K_2^{u31} \frac{d}{dr} + K_2^{u311} \frac{d^2}{dr^2} - K_2^{u322} \cdot m^2 \right) U_{3m}(r) - \\ - m(K_2^{v12} + K_2^{v112} \frac{d}{dr}) V_{1m}(r) - m(K_2^{v32} + K_2^{v312} \frac{d}{dr}) V_{3m}(r) + (K_2^{w20} + K_2^{w21} \frac{d}{dr}) W_{2m}(r) + K_2^{w01} \frac{d}{dr} W_{0m}(r) = 0, \\ \left(K_3^{u00} + K_3^{u01} \frac{d}{dr} + K_3^{u011} \frac{d^2}{dr^2} - K_3^{u022} \cdot m^2 \right) U_{0m}(r) + \left(K_3^{u20} + K_3^{u21} \frac{d}{dr} + K_3^{u211} \frac{d^2}{dr^2} - K_3^{u222} \cdot m^2 \right) U_{2m}(r) - \\ - m(K_3^{v02} + K_3^{v012} \frac{d}{dr}) V_{0m}(r) - m(K_3^{v22} + K_3^{v212} \frac{d}{dr}) V_{2m}(r) + (K_3^{w10} + K_3^{w11} \frac{d}{dr}) W_{1m}(r) = 0, \\ \left(K_4^{u10} + K_4^{u11} \frac{d}{dr} + K_4^{u111} \frac{d^2}{dr^2} - K_4^{u122} \cdot m^2 \right) U_{1m}(r) + \left(K_4^{u30} + K_4^{u31} \frac{d}{dr} + K_4^{u311} \frac{d^2}{dr^2} - K_4^{u322} \cdot m^2 \right) U_{3m}(r) - \\ - m(K_4^{v12} + K_4^{v112} \frac{d}{dr}) V_{1m}(r) - m(K_4^{v32} + K_4^{v312} \frac{d}{dr}) V_{3m}(r) + (K_4^{w20} + K_4^{w21} \frac{d}{dr}) W_{2m}(r) + K_4^{w01} \frac{d}{dr} W_{0m}(r) = 0, \\ m \left(K_5^{u02} + K_5^{u012} \frac{d}{dr} \right) U_{0m}(r) + m \left(K_5^{u22} + K_5^{u212} \frac{d}{dr} \right) U_{2m}(r) + (K_5^{v011} \frac{d^2}{dr^2} - m^2 K_5^{v022}) V_{0m}(r) + \\ + (K_5^{v211} \frac{d^2}{dr^2} - m^2 K_5^{v222}) V_{2m}(r) + m \cdot K_5^{w12} W_{1m}(r) = 0, \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned}
& m \left(K_6^{u12} + K_6^{u112} \frac{d}{dr} \right) U_{1m}(r) + m \left(K_6^{u32} + K_6^{u312} \frac{d}{dr} \right) U_{3m}(r) + (K_6^{v111} \frac{d^2}{dr^2} - m^2 K_6^{v122} + K_6^{v10}) V_{1m}(r) + \\
& \quad + (K_6^{v311} \frac{d^2}{dr^2} - m^2 K_6^{v322} + K_6^{v30}) V_{3m}(r) + m \cdot K_6^{w02} W_{0m}(r) + m \cdot K_6^{w22} W_{2m}(r) = 0, \\
& m \left(K_7^{u02} + K_7^{u012} \frac{d}{dr} \right) U_{0m}(r) + m \left(K_7^{u22} + K_7^{u212} \frac{d}{dr} \right) U_{2m}(r) + (K_7^{v011} \frac{d^2}{dr^2} - m^2 K_7^{v022}) V_{0m}(r) \\
& \quad + (K_7^{v211} \frac{d^2}{dr^2} - m^2 K_7^{v222} + K_7^{v20}) V_{2m}(r) + m \cdot K_7^{w12} W_{1m}(r) = 0, \\
& m \left(K_8^{u12} + K_8^{u112} \frac{d}{dr} \right) U_{1m}(r) + m \left(K_8^{u32} + K_8^{u312} \frac{d}{dr} \right) U_{3m}(r) + (K_8^{v111} \frac{d^2}{dr^2} - m^2 K_8^{v122} + K_8^{v10}) V_{1m}(r) + \\
& \quad + (K_8^{v311} \frac{d^2}{dr^2} - m^2 K_8^{v322} + K_8^{v30}) V_{3m}(r) + m \cdot K_8^{w02} W_{0m}(r) + m \cdot K_8^{w22} W_{2m}(r) = 0, \\
& K_9^{u11} \frac{d}{dr} U_{1m}(r) + K_9^{u31} \frac{d}{dr} U_{3m}(r) - m \cdot K_9^{v12} V_{1m}(r) - m \cdot K_9^{v32} V_{3m}(r) + (K_9^{w011} \frac{d^2}{dr^2} - m^2 K_9^{w022}) W_{0m}(r) + \\
& \quad + (K_9^{w211} \frac{d^2}{dr^2} - m^2 K_9^{w222}) W_{2m}(r) + K_9^{Q330} Q_{33m}(r) = 0, \\
& (K_{10}^{u01} \frac{d}{dr} + K_{10}^{u00}) U_{0m}(r) + (K_{10}^{u21} \frac{d}{dr} + K_{10}^{u20}) U_{2m}(r) - m \cdot K_{10}^{v02} V_{0m}(r) - \\
& \quad - m \cdot K_{10}^{v22} V_{2m}(r) + (K_{10}^{w111} \frac{d^2}{dr^2} - m^2 K_{10}^{w122} + K_{10}^{w10}) W_{1m}(r) = 0, \\
& (K_{11}^{u11} \frac{d}{dr} + K_{11}^{u10}) U_{1m}(r) + (K_{11}^{u31} \frac{d}{dr} + K_{11}^{u30}) U_{3m}(r) - m \cdot K_{11}^{v12} V_{1m}(r) - m \cdot K_{11}^{v32} V_{3m}(r) + \\
& (K_{11}^{w011} \frac{d^2}{dr^2} - m^2 K_{11}^{w022}) W_{0m}(r) + (K_{11}^{w211} \frac{d^2}{dr^2} - m^2 K_{11}^{w222} + K_{11}^{w20}) W_{2m}(r) + K_{11}^{Q330} Q_{33m}(r) = 0.
\end{aligned}$$

Здесь коэффициенты K с индексами представляют собой постоянные величины, зависящие от геометрических и физических параметров пластин.

В параграфе 3.3 дан алгоритм решения сформулированной краевой задачи; приведено решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений (3.6) методом конечных разностей и матричной прогонки.

В параграфе 3.4 приведены результаты параметрических исследований НДС кольцевых пластин по уточненной математической модели в зависимости от изменяемости толщины и характера нагружения. В качестве примера рассматривается круглая изотропная пластина со следующими параметрами: $a = 1(м)$, $b = 0,5(м)$, $h_m = 0,025(м)$, $h_0 = 0,01(м)$. Коэффициент Пуассона $\mu = 0,3$, модуль упругости $E = 2 \cdot 10^{11} Па$. Пластина жестко закреплена на внутреннем и внешнем краях $r = a$, $r = b$.

1. Расчет НДС "погранслои" в зоне жестко закрепленного края. Сравнение с данными классической теории.

Толщина пластины $2h(r)$ определяется соотношением

$$h(r) = h_m - tg(\alpha) \cdot (a - r), \quad (3.7)$$

где $tg(\alpha) = (h_m - h_0) / (a - b)$, 2α – угол наклона пластины.

Представлены результаты расчета НДС круглых пластин переменной толщины, находящихся под действием следующих нагрузок:

- распределенной нагрузки, изменяющейся по закону $q(r, \varphi) = Q_0 \sin(\varphi)$, где $Q_0 = const$.

- локальной нагрузки, изменяющейся по закону

$$q(r, \varphi) = \begin{cases} 0, & b \leq x < x_1 \\ Q_0 \sin(\varphi), & x_1 \leq x \leq x_2, \quad \text{где } Q_0 = const, x_1 = \frac{19a + 21b}{20}; x_2 = \frac{21a + 19b}{20}, \\ 0, & x_2 < x \leq a \end{cases}$$

Для случая распределенной нагрузки типовые графики перемещений по радиусу пластины на примере прогиба представлены на рис 3.1, что позволяет заключить о незначительной величине перемещений (9%) по сравнению с классической теорией. Результаты вычисления максимальных нормальных напряжений по радиусу и толщине пластины на краю $r = b$ представлены на рис 3.2-3.5.

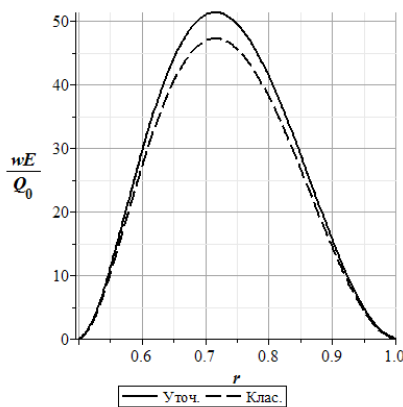


Рис. 3.1

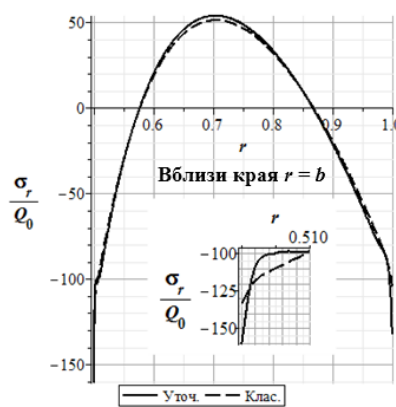


Рис. 3.2



Рис. 3.3

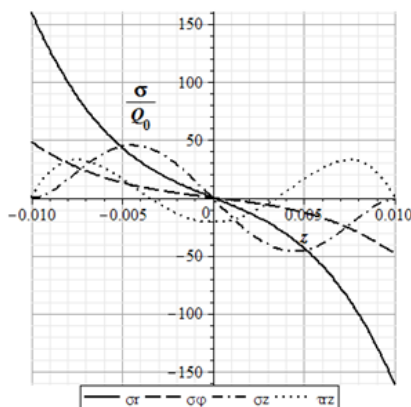


Рис. 3.4

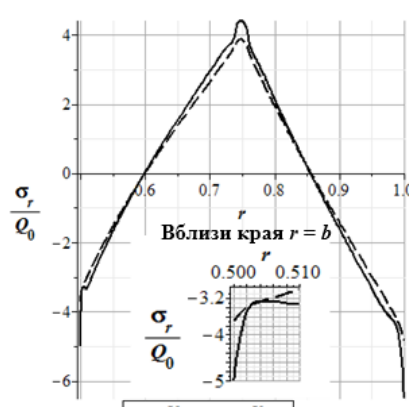


Рис. 3.5

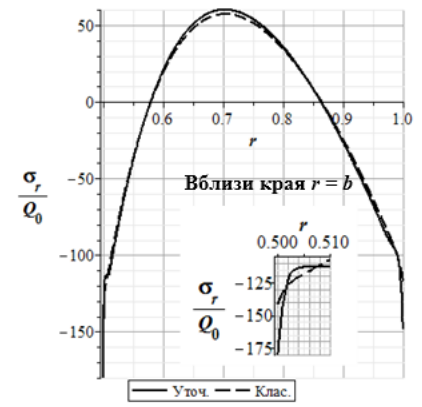


Рис. 3.6

Из анализа графиков на рисунках 3.2-3.5 можно установить, что напряжения вне краевой зоны практически совпадают, а на краю $r = b$ существенно уточняются:

нормальные тангенциальные напряжения σ_r - на 26,6% (рис. 3.2) и σ_φ - на 20,3% (рис. 3.3). Нормальные поперечные напряжения σ_z (рис. 3.4), нулевые в классической теории, по уточненной теории составляют 30% от максимальных напряжений σ_r .

В случае локальной нагрузки, нормальные тангенциальные напряжения σ_r (рис. 3.5) существенно уточняются, но и быстрее затухают при удалении от зоны локального нагружения.

2. Влияние изменчивости толщины

Рассматривается кольцевая изотропная пластина, находящаяся под действием распределенной нагрузки $q(r, \varphi) = Q_0 \sin(\varphi)$, где $Q_0 = const$, с аналогичными параграфу 3.4 параметрами, толщина которой определяется квадратичной функцией $h(r) = 0.025r^2 - 0.0075r + 0.0075$. Результаты вычисления максимальных нормальных напряжений пластины представлены на рис 3.6, 3.7.



Рис. 3.7

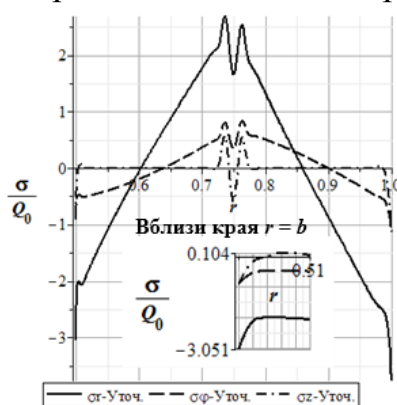


Рис. 3.8

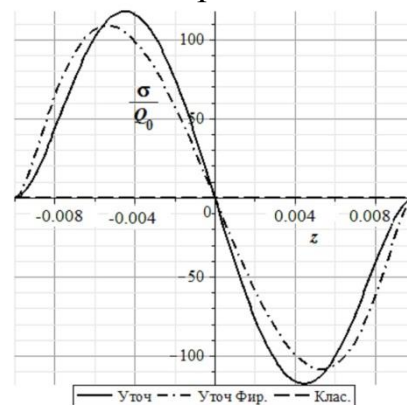


Рис. 3.9

3. Влияние характера внешней нагрузки

Рассматривается пластина, переменная толщина которой определяется соотношением (3.7), находящаяся под действием локальной нагрузки, изменяющейся по синусоидальному закону, при $x_1 = 7a/15$; $x_2 = 8a/15$

$$q(r, \varphi) = \begin{cases} 0, & b \leq r < r_1 \\ Q_0 \sin\left(\frac{k\pi(r-r_1)}{r_2-r_1}\right) \sin(\varphi), & r_1 \leq r \leq r_2, \text{ где } k = 1, 2, 3, \dots \\ 0, & r_2 < r \leq a \end{cases}$$

Результаты вычисления нормальных напряжений пластины по уточненной теории при $k=3$ представлены на рис. 3.8. Анализ полученных результатов показывает, что число полуволн k существенно влияет на НДС пластины. В зоне нагрузки напряжения, определяемые по уточненной и классической теориям, отличаются по величине. Следовательно, можно утверждать, что в зоне локальной

нагрузки возникают дополнительные напряжения “погранслои”.

В параграфе 3.5 Дано сравнение результатов расчета НДС с данными классической и другого варианта уточненной теории.

Рассматривается круглая пластина постоянной толщины, т.е. при угле $\alpha=0$. На графиках 3.9 для сравнения показаны напряжения σ_z , полученные в работе Вал.В. Фирсанова по уточненной теории с помощью вариационно-асимптотического метода. Графики напряжений по обоим вариантам уточненной теории практически совпадают и подтверждают достоверность представленной математической модели НДС.

В четвертой главе проведено исследование НДС круглых пластин переменной толщины при термомеханическом нагружении.

В параграфе 4.1 разработана уточненная математическая модель НДС круглых пластин переменной толщины, построена система дифференциальных уравнений и соответствующие граничные условия. Задача решается в упругой постановке.

Рассматривается круглая изотропная пластина с симметричной относительно срединной плоскости толщиной, нагруженная поперечной распределенной нагрузкой $q(r, \varphi)$ при наличии перепада температур по поверхностям пластины $T(r, \varphi)$, отнесенной к безразмерной цилиндрической системе координат (r, φ, z) . Полагаем, что перемещения U_1, U_2, U_3 пластины аппроксимируются полиномами по нормальной координате, аналогичными принятым в третьей главе.

Полные деформации от суммы нагрузок и температурных воздействий представляются в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \varepsilon_r(q) + \varepsilon_r(T), \quad \varepsilon_\varphi = \varepsilon_\varphi(q) + \varepsilon_\varphi(T), \quad \varepsilon_z = \varepsilon_z(q) + \varepsilon_z(T), \\ \gamma_{r\varphi} &= \gamma_{r\varphi}(q) + \gamma_{r\varphi}(T), \quad \gamma_{\varphi z} = \gamma_{\varphi z}(q) + \gamma_{\varphi z}(T), \quad \gamma_{zr} = \gamma_{zr}(q) + \gamma_{zr}(T), \end{aligned} \quad (4.1)$$

где $\varepsilon_r(q), \varepsilon_\varphi(q), \varepsilon_z(q), \gamma_{r\varphi}(q), \gamma_{\varphi z}(q), \gamma_{zr}(q)$ - деформации от механической нагрузки и $\varepsilon_r(T), \varepsilon_\varphi(T), \varepsilon_z(T), \gamma_{r\varphi}(T), \gamma_{\varphi z}(T), \gamma_{zr}(T)$ - деформации от температурных воздействий. При перепаде $T(r, \varphi)$ температур тела деформации определяются следующими выражениями:

$$\varepsilon_r(T) = \varepsilon_\varphi(T) = \varepsilon_z(T) = \alpha_T T, \quad \gamma_{r\varphi}(T) = \gamma_{\varphi z}(T) = \gamma_{zr}(T) = 0,$$

где α_T - коэффициент температурного расширения материала.

По аналогии с третьей главой, подставляя соотношения (4.1) в физические уравнения (3.3), с помощью вариационного принципа Лагранжа к уточненному выражению полной энергии пластины (3.4), получим систему головных уравнений уточненной теории рассматриваемых пластин.

В параграфе 4.2 представлен метод приведения краевой задачи к системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

В параграфе 4.3 приведен алгоритм решения сформулированной краевой задачи; приведено решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

В параграфе 4.4 приведены результаты параметрических исследований НДС круглых пластин по уточненной математической модели при термомеханическом нагружении.

Рассмотрим стальную кольцевую пластину, жестко заземленную по двум краям $r = a, r = b$, находящуюся под действием распределенной нагрузки и температуры. Коэффициент Пуассона $\mu = 0,3$, модуль упругости $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па. Размеры пластины: внешний и внутренний радиусы $a = 0,5$ (м), $b = 0,15$ (м), $h_m = 0,05$ (м), $h_0 = 0,015$ (м); линейно изменяющаяся толщина определяется соотношением $h(r) = h_m - tg(\alpha) \cdot (a - r)$, где $tg(\alpha) = (h_m - h_0) / (a - b)$. Пластина находится под действием распределенной нагрузки $q(r, \varphi) = Q_0 \sin(\varphi)$, $Q_0 = const$.

На нижней и верхней поверхностях пластины поддерживаются температуры T_1 и T_0 соответственно. Разность температуры между верхней и нижней поверхностями задается функцией $T = f(r) = 30 \cdot (r + a - 2b) / (a - b)$ [°C].

Результаты вычислений нормальных напряжений пластины по уточненной теории в зависимости от перепада температуры представлены на рис. 4.1-4.3.

При $T = f(r)$ [°C], максимумы напряжений $\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_z$ находятся в краевой зоне (рис. 4.1-4.3). При перепаде температуры от 0°C до $f(r)$ [°C], напряжение σ_r повышается на 19,2 % и 45% на внутреннем и внешнем краях соответственно. Поперечные нормальные напряжения σ_z получаются одного порядка (40-50%) с максимальными значениями основного изгибного напряжения σ_r , определяемого по классической теории.

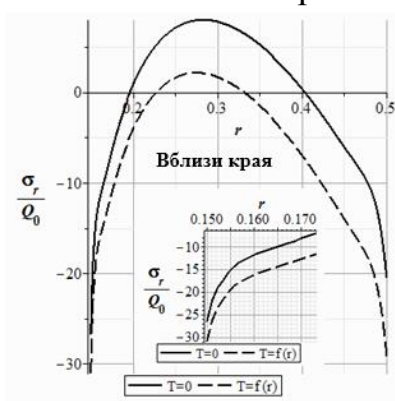


Рис. 4.1



Рис. 4.2

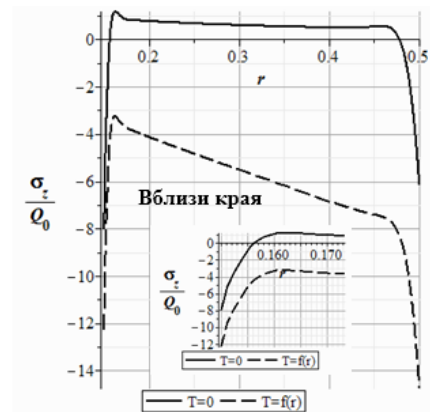


Рис. 4.3

Построены графики изменения этих же напряжений на краю $r = b$ по толщине. Для рассматриваемых случаев учет влияния температуры приводит к существенным изменениям НДС в краевой зоне круглой пластины по радиусу и

толщине. Анализ полученных результатов показывает, что максимальные напряжения имеют место на краях пластины, и быстро затухают при удалении от края, что подтверждает достоверность результатов определения НДС пластины по уточненной теории.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе для прямоугольных и круглых пластин переменной толщины при термомеханическом нагружении построены математические модели уточненной теории, основанной на трехмерных уравнениях теории упругости.

Для описания НДС пластин в декартовой и цилиндрической системах координат искомые перемещения аппроксимируются полиномами по нормальной координате на две степени выше относительно классической теории типа Кирхгофа-Лява. Применением к уточненному выражению полной потенциальной энергии пластины вариационного принципа Лагранжа получена система дифференциальных уравнений в перемещениях и сформулированы граничные условия.

Для прямоугольных и круглых пластин приведение уравнений равновесия в частных производных и граничных условий к обыкновенным дифференциальным уравнениям осуществляется с помощью тригонометрических рядов по продольной и окружной координатам.

Применяя метод конечных разностей и матричной прогонки, получены численные решения сформулированных краевых задач для различных вариантов нагружения и граничных условий.

На основе решения краевой задачи для прямоугольных и круглых пластин переменной толщины построено первое приближение напряженного состояния краевой плоской деформации типа «погранслоя», которое необходимо учитывать при оценке прочности и трещиностойкости в зонах соединений, стыков и быстро изменяющихся нагрузок.

Разработан алгоритм решения сформулированной задачи в программном пакете для ЭВМ, что позволяет исследовать НДС пластин переменной толщины при различных видах нагружения, геометрических параметров.

Проведено параметрическое исследование НДС пластин переменной толщины при термомеханическом нагружении, которое позволило установить следующее:

1. При расчете НДС пластин переменной толщины по уточненной теории имеют место быстро затухающие самоуравновешенные дополнительные краевые напряженные состояния типа «погранслоя», которые вносят значительный вклад в общее напряженное состояние пластин. Например, при распределенной нагрузке, максимальные изгибные напряжения уточняются на 20-30%, поперечные касательные напряжения составляют 20-30% от максимальных изгибных напряжений и поперечные нормальные напряжения составляют 30-35% от

максимальных изгибных напряжений.

2. Вблизи зон искажения напряженного состояния (на защемленном краю и вблизи локальной нагрузки) поперечные напряжения, которые в классической теории принимаются равными нулю, получаются одного порядка с максимальными значениями основного изгибного напряжения (30-35%).

3. При изменении толщины круглой и прямоугольной пластин по разным функциям, НДС существенно изменяются. При одинаковой толщине по краю пластина с линейным изменением толщины будет прочнее, чем пластина, толщина которой изменяется по квадратичному закону.

4. Разработан метод расчета НДС пластин переменной толщины при термомеханическом нагружении. Проведено сравнение результатов расчета НДС пластины при использовании уточненной теории для нескольких вариантов температуры.

СПИСОК РАБОТ, ОПУБЛИКОВАННЫХ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Публикации в изданиях, входящих в Перечень ВАК РФ:

1. Фирсанов Вал.В., Зоан К.Х. Напряженное состояние “пограничный слой” в прямоугольной пластине переменной толщины // Известия ТулГУ. Технические науки. 2018. Выпуск 6. С.443-451.

2. Фирсанов В.В., Зоан К.Х. Исследование напряженно-деформированного состояния симметричных прямоугольных пластин произвольной геометрии на основе уточненной теории // Труды МАИ. 2018. № 103.

URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=100589>.

3. Фирсанов В.В., Зоан К.Х. Напряженно-деформированное состояние симметричных прямоугольных пластин переменной толщины при температурном воздействии. Тепловые процессы в технике. 2019. Т.11. №. 8. С.365-373.

4. Фирсанов В.В., Зоан К.Х. Краевое напряженное состояние круглой пластины переменной толщины при термомеханическом нагружении на основе уточненной теории. Тепловые процессы в технике. 2020. Т.12. №. 1. С.39-48. DOI: 10.34759/tpt-2020-12-1-39-48.

5. Зоан К.Х., Фирсанов В.В. Краевое напряженно-деформированное состояние прямоугольной пластины переменной толщины под действием локальной нагрузки // Труды МАИ. 2020. № 110. DOI: 10.34759/trd-2020-110-10., URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=112851>.

6. Фирсанов Вал.В., Зоан К.Х., Чан Н.Д. Краевое напряженно-деформированное состояние круглой пластины переменной толщины на основе неклассической теории. Проблемы прочности и пластичности. 2020. Том 82. №1. С.32-42. DOI: 10.32326/1814-9146-2020-82-1-32-42.

Публикации в изданиях, входящих в МБД Scopus:

7. Firsanov V.V., Quy Hieu Doan, Trong Chuc Nguyen. Stress and deformation state for the edge of a rectangular plate based on nonclassical theory. Structural integrity and life. 2020. Vol.20. No.1.

Публикации в других изданиях:

8. Фирсанов В.В., Зоан Куи Хиеу, Во Ань Хиеу. Внутреннее напряженно-деформированное состояние круглой пластины переменной толщины на основе неклассической теории // Материалы XXIII международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Москва, МАИ, 2017г. Сборник тезисов докладов. 2017. С. 86 – 88.

9. Фирсанов В.В., Зоан Куи Хиеу, Во Ань Хиеу. Исследование напряженно-деформированного состояния прямоугольной пластины переменной толщины на основе неклассической теории // Тезисы докладов VI международного научного семинара «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы». 2017. С. 117-118.

10. Фирсанов В.В., Зоан Куи Хиеу. Напряженно-деформированное состояние “пограничный слой” типа “краевой плоской деформации” в прямоугольной пластине переменной толщины // Материалы XXIV международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Москва, МАИ. Сборник тезисов докладов. 2018. С. 218 – 220.

11. Фирсанов В.В., Зоан Куи Хиеу. Краевое напряженно-деформированное состояние круглой пластины переменной толщины на основе неклассической теории // Сборник докладов VII международного научного семинара «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы». Москва, МАИ, 12 – 13 ноября 2018г. Сборник тезисов докладов. С. 124 – 125.

12. Фирсанов В.В., Зоан Куи Хиеу. Краевое напряженно-деформированное состояние симметричных прямоугольных пластин переменной толщины на основе неклассической теории // Материалы XXV международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Москва, МАИ, 2019г. Сборник тезисов докладов. С. 206 – 207.

13. Фирсанов В.В., Зоан Куи Хиеу. Напряженное состояние “пограничный слой” в круглой пластине переменной толщины по уточненной теории// Международная конференция Авиация и космонавтика, МАИ, 2019г. Сборник тезисов докладов. С. 18.