На правах рукописи

Юй Чжаокай

# КОЛЕБАНИЯ ЖИДКОСТИ В ДВУХСВЯЗНЫХ ПОЛОСТЯХ В УСЛОВИЯХ МИКРОГРАВИТАЦИИ

Специальности 1.1.7. – Теоретическая механика, динамика машин

1.1.9. – Механика жидкости, газа и плазмы

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Москва – 2023 г.

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

| | |
|---|---|
| **Научный руководитель:** | **Темнов Александр Николаевич** кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры «Космические аппараты и ракеты-носители» МГТУ им. Н.Э. Баумана |
| **Научный консультант:** | **Шкапов Павел Михайлович** доктор технических наук, доцент, заведующий кафедрой «Теоретическая механика» имени профессора Н.Е. Жуковского МГТУ им. Н.Э. Баумана |
| **Официальные оппоненты:** | **Шклярчук Фёдор Николаевич** доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник Института прикладной механики Российской академии наук, заслуженный деятель науки РФ |
| | **Досаев Марат Закирджанович** кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, заместитель директора научно-исследовательского института механики МГУ им. М.В. Ломоносова |
| **Ведущая организация:** | Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук (ИПМех РАН) |

Защита состоится «29» сентября 2023 г. в 10:00 на заседании диссертационного совета 24.2.327.08 в ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» по адресу: 125993, г. Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, д. 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВО МАИ (НИУ) и на сайте МАИ по ссылке: https://mai.ru/events/defence/?ELEMENT_ID=172636

Автореферат разослан «    »__________________2023 г.

Отзывы на автореферат в двух экземплярах, заверенные печатью учреждения, просьба направлять по адресу: 125993, г. Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, д. 4, Учёный совет МАИ.

Учёный секретарь
диссертационного совета 24.2.327.08
д.ф.-м.н., с.н.с. В.Ю. Гидаспов

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы исследования** обусловлена необходимостью определения динамических характеристик колебаний жидкого топлива в двухсвязных сосудах в условиях, близких к невесомости, и стандартизацией алгоритма решения задач.

Влияние колебаний жидкого топлива на динамику и устойчивость летательных аппаратов и космических конструкций в условиях действия больших сил тяготения достаточно хорошо изучено в России, США и Китае [Моисеев Н.Н., Румянцев В.В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М.: Наука, 1965; Abramson H.N. The dynamic behavior of liquids in moving containers. NASA SP-106, 1966; Wang Zhaolin, Liu Yanzhu. Liquid-filled system dynamics. Beijing: Science press, 2002] Несмотря на это, с созданием новых орбитальных станций (ОС), разгонных блоков (РБ) и других космических аппаратов (КА) важную роль приобретает проблема плескания жидкости ограниченного объёма в условиях микрогравитации ($g = 10^{-6}–10^{-4}\, g_0$, где $g_0 = 9{,}81$ м/сек$^2$), когда существенно проявляется влияние поверхностного натяжения.

В российских и зарубежных работах основное внимание уделено исследованию поведения капиллярной жидкости в цилиндрических, сферических и эллипсоидальных сосудах, которые часто применяются в ракетно-космической технике (РКТ). Необходимость увеличения массы и объёма полезной нагрузки транспортных систем выведения приводит к увеличению объёма топливных баков верхней ступени ракет-носителей (РН) или РБ, и применению баков в виде двухсвязных полостей, имеющих форму тел вращения. Поведение жидкости в двухсвязных сосудах в условиях микрогравитации исследовано недостаточно полно и является объектом исследования данной работы.

**Цель работы и задачи исследования.**

*Целью работы* является определение динамических характеристик жидкости в двухсвязных полостях в условиях микрогравитации с учётом сил поверхностного натяжения на основе метода конечных элементов.

*Задачи исследования:*

1. Разработка математической модели равновесия гидромеханической системы жидкость–газ–твёрдая стенка сосуда и алгоритмов отыскания форм равновесной свободной поверхности жидкости в двухсвязных полостях;
2. Разработка методики определения собственных частот и форм малых колебаний жидкости в коаксиально-цилиндрическом сосуде;
3. Исследование математической модели малых колебаний капиллярной жидкости ограниченного объёма и разработка алгоритма решения задач в тороидальном сосуде на основе метода конечных элементов;
4. Разработка механического аналога малых колебаний жидкости в условиях микрогравитации и получение выражения жёсткости спиральной пружины, моделирующей действие сил поверхностного натяжения;
5. Обоснование механизмов диссипации энергии малых колебаний жидкости с учётом капиллярного эффекта и оценка коэффициента демпфирования колебаний жидкости вблизи линии трёхфазного контакта (ЛТК) жидкости.

**Методы исследований.** При решении поставленных задач применены различные математические и вычислительные методы: вариационный метод, метод Рунге-Кутты 4-го порядка, метод разделения переменных, метод Ритца и метод конечных элементов. В исследовании равновесия и колебаний жидкости применялись вариационный и энергетический подходы.

**Научная новизна работы** заключается в том, что в ней:

1. дано теоретическое объяснение явления сосредоточения капиллярной жидкости около внешней стенки тороидального сосуда, экспериментально наблюдаемого в башне невесомости [Symons P. Zero-gravity equilibrium configuration of liquid-vapor interface in toroidal tanks. NASA TN D-6076, 1970];
2. оценено влияние разных граничных условий вблизи линии трёхфазного контакта на собственные частоты и формы колебаний жидкости в тороидальном сосуде в условиях, близких к невесомости;
3. исследованы динамические характеристики жидкости в баке в условиях микрогравитации с учётом сил поверхностного натяжения;
4. разработан механический аналог малых колебаний жидкости с учётом капиллярного эффекта;
5. получено новое граничное условие на ЛТК, применение которого позволило количественно оценить коэффициент демпфирования вблизи ЛТК.

**Достоверность и обоснованность** полученных результатов обеспечивается:

– использованием в работе известных вариационных принципов механики и энергетического подхода, как способов решения задач гидромеханики;

– реализацией разработанного алгоритма на программном комплексе MATLAB с проверкой достоверности и сходимости на ряде тестовых задач;

– удовлетворительным согласованием результатов отдельных частей работы с известными данными других авторов, как аналитическими, численными, так и экспериментальными.

**Практическая ценность** результатов работы состоит в том, что:

1. полученные результаты о положениях равновесия и динамических характеристиках жидкого топлива в коаксиально-цилиндрическом и тороидальном сосудах могут быть полезны для дальнейшего проектирования двухсвязных топливных баков верхней ступени РН и разгонных блоков;
2. полученные формы равновесной свободной поверхности могут быть использованы при проектировании заборных устройств топливных баков космических аппаратов, так как для решения подобных задач необходимо учитывать положение равновесия жидкости в космическом пространстве;
3. определённые динамические характеристики колебаний жидкости в слабых гравитационных полях могут быть использованы при анализе динамики и устойчивости движения верхних ступеней РН, РБ и КА.

**Личный вклад соискателя.** Представленные результаты из совместных публикаций получены соискателем и обсуждалися вместе с руководителем и научным консультантом.

**Апробация работы.** Основные результаты работы докладывались на ряде Международных и Российских конференций:

1. VI–VIII Международная научная конференция «Фундаментальные и прикладные задачи механики» (г. Москва, декабрь 2020–2022 гг.);

2. XLV и XLVII Академические чтения по космонавтике «Королёвские чтения» (г. Москва, апрель 2021 г. и январь 2023 г.);
3. XLVII Международная молодёжная научная конференция «Гагаринские чтения» (г. Москва, апрель 2021 г.);
4. 12-ая и 13-ая Международная конференция – школа молодых учёных «Волны и вихри в сложных средах» (г. Москва, декабрь 2021–2022 гг.);
5. XXXI–XXXIII Крымская осенняя математическая школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам (г. Алушта, сентябрь 2020–2022 гг.).

**Публикации.** Основные результаты отражены в 15 научных работах, из них 4 работы в рецензируемых журналах, рекомендуемых ВАК РФ, и 1 работа из Перечня международных научных изданий, включенных в базу данных Web of Science, Scopus. Дополнительно результаты исследований опубликованы в материалах и сборниках тезисов научных конференций.

**Структура и объём работы.** Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав с выводами по каждой главе, заключения, списка литературы из 128 наименований. Объём работы включает 134 страницы, 64 рисунков, 16 таблиц.

## СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Во введении** отмечена актуальность темы диссертации, сформулированы цель и задачи исследования, приведены положения, определяющие научную новизну и практическую ценность полученных результатов, указан личный вклад соискателя и описана структура работы.

**В главе 1** приведен обзор литературы по исследованию поведения жидкости в условиях микрогравитации и введены основные понятия гидромеханики невесомости.

Задача исследования влияния поверхностного натяжения на форму жидкости впервые была поставлена бельгийским физиком Плато, и Юнг приступил к созданию математической теории капиллярности исходя из аналогии между упругой плёнкой и свободной поверхностью капиллярной жидкости. Одновременно Лаплас дал физически естественный подход к теории капиллярности, основанный на учёте взаимодействия близкорасположенных частиц жидкости. Данный подход в дальнейшем был завершен Гауссом на основе принципа возможных перемещений и связанного с ним принципа минимума потенциальной энергии.

В начале 60-х годов прошлого века первые исследования о поведении жидкости в слабых гравитационных полях, стимулированные потребностями космической техники, провели Н.Н. Моисеев, В.В. Румянцев, А.А. Петров, Ф.Л. Черноусько, В.А. Самсонов, Г.Н. Микишев, Чурилов Г.А. и др. В это же время, группа молодых исследователей (Бабский В.Г., Копачевский Н.Д., Слобожанин Л.А., Тюпцов А.Д.) под руководством А.Д. Мышкиса также была привлечена к изучению данных задач гидромеханики в условиях микрогравитации.

Одновременно в Юго-западном исследовательском институте под руководством Абрамсона (Abramson H.N.) занимались подобными задачами гидромеханики. Китайский ученик В.В. Румянцева Wang Zhaolin в университете Tsinghua создал научную школу по динамике и устойчивости космических аппаратов с полостями, частично заполненными жидкостью.

К настоящему времени подробно исследовано поведение капиллярной жидкости в цилиндрических, сферических и эллипсоидальных сосудах, которые часто применяются в ракетно-космической технике. В последнее время стали использоваться топливные баки более сложной формы, в том числе коаксиально-цилиндрические и тороидальные ёмкости, как более удобные для компоновки космического аппарата. Поведение жидкости в этих двухсвязных полостях оказалось мало изученным и требующим создание численных алгоритмов решения этих задач, допускающих стандартизацию, что важно при использовании современной вычислительной техники.

Следует отметить, что во многих работах российских и зарубежных учёных показано, что экспериментальные результаты декремента колебаний жидкости в топливных баках систематически больше теоретических значений на основе учёта только пограничного слоя стенки сосуда. Чтобы избежать рассогласование, Г.Н. Микишеви и Б.И. Рабинович ввели эмпирическую поправку $\sqrt{2}$ в формулу диссипативной силы в погранслое Стокса. В статье Майлса [Miles J.W., 1967] предложены четыре механизма диссипации энергии: в погранслое стенки, в основной массе жидкости, за счёт загрязнения свободной поверхности поверхностно-активным веществами, вблизи ЛТК. Последние два механизма диссипации энергии связаны с капиллярным эффектом жидкости.

**В главе 2** рассмотрена осесимметричная задача о положении равновесия капиллярной жидкости в двухсвязных полостях, которая имеет сложную нелинейную формулировку.

Топливный бак, частично заполненный жидкостью, представляет собой механическую систему жидкость–газ–твёрдая стенка (рис. 1). Потенциальная энергия системы с учётом поверхностного взаимодействия будет:

$$U = \int_{\Omega} \rho g z d\Omega + \sigma|\Gamma| + \sigma_0|\Sigma| + \sigma'|\Sigma'|, \qquad (1)$$

где $\sigma$, $\sigma_0$, $\sigma'$ – коэффициенты поверхностного натяжения разделов жидкости–газа, жидкости–стенки и газа–стенки соответственно, $|\Gamma|$, $|\Sigma|$ и $|\Sigma'|$ означают площади соответствующих поверхностей, $\rho$ – плотность жидкости, $g$ – ускорение.

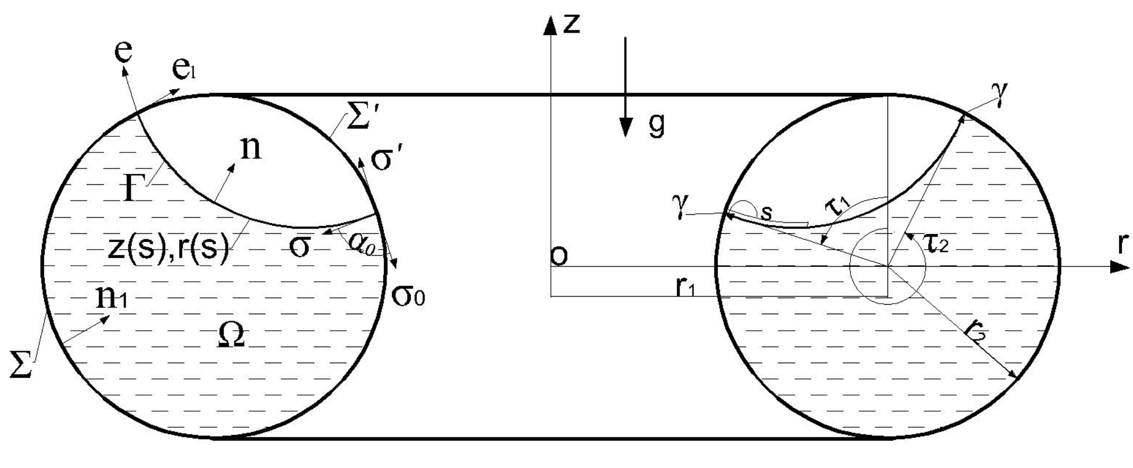



Рис. 1. Основные обозначения системы жидкость–газ–твердая стенка.

Согласно вариационному принципу стационарности потенциальной энергии система находится в состоянии равновесия тогда, когда $\delta U = 0$ для всех допустимых вариаций $\delta \mathbf{x}$ свободной поверхности $\Gamma$.

Введён множитель Лагранжа $c$ для учёта условия несжимаемости жидкости, имеем следующее обращение в нуль $\delta U$:

$$\int_{\Gamma}\left[\rho g z + c - 2\sigma H\right]\mathbf{n}\cdot\delta\mathbf{x}d\Gamma + \int_{\gamma}\left[\sigma\cos\alpha_0 + \left(\sigma_0 - \sigma'\right)\right]\mathbf{e}_1\cdot\delta\mathbf{x}d\gamma = 0. \qquad (2)$$

Из выражения вариации потенциальной энергии следуют уравнения равновесия гидромеханической системы:

$$\rho g z + c - 2\sigma H = 0 \text{ на } \Gamma,\ \sigma\cos\alpha_0 + \left(\sigma_0 - \sigma'\right) = 0 \text{ на } \gamma. \qquad (3)$$

Для осесимметричной задачи получим безразмерную систему уравнений:

$$r_s = u,\ z_s = v,\ u_s = -v\left(B_0 z + C - v/r\right),\ v_s = u\left(B_0 z + C - v/r\right), \qquad (4)$$

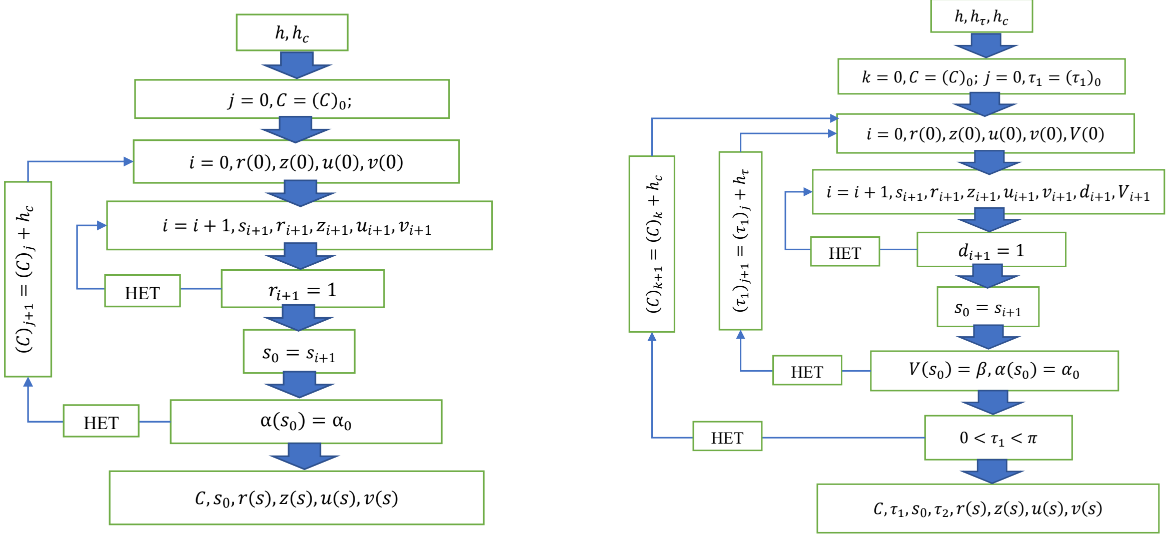
где $B_0 = \rho g l^2/\sigma$ – число Бонда, характеризующее соотношение массовой силы и поверхностного натяжения, $l$ – характерный размер задачи и для тороидального сосуда выбран радиус окружности меридиана тора $r_2$, нижний индекс $s$ означает первую производную функций по длине дуги $s$.

Относительный объём жидкости $\beta$ (соотношение объёма жидкости к объёму полости) оказывает существенное влияние на положение и форму свободной равновесной поверхности жидкости в тороидальных сосудах. Запишем дополнительное условие о сохранении объёма жидкости в торе:

$$\frac{1}{\pi r_1}\left[\int_0^{s_0} zrr'ds + \int_{\tau_1}^{\tau_2}\left(r_1 - \sin\tau\right)\cos^2\tau d\tau\right] = \beta, \qquad (5)$$

где $s$ – длина дуги искомой линии, $\tau$ – полярный угол, отсчет которого ведется от вершины тора против часовой стрелки, $r_1$ – радиус осевой окружности тора, $s_0$ – общая длина дуги, $\tau_1$ и $\tau_2$ указаны на рис. 1.

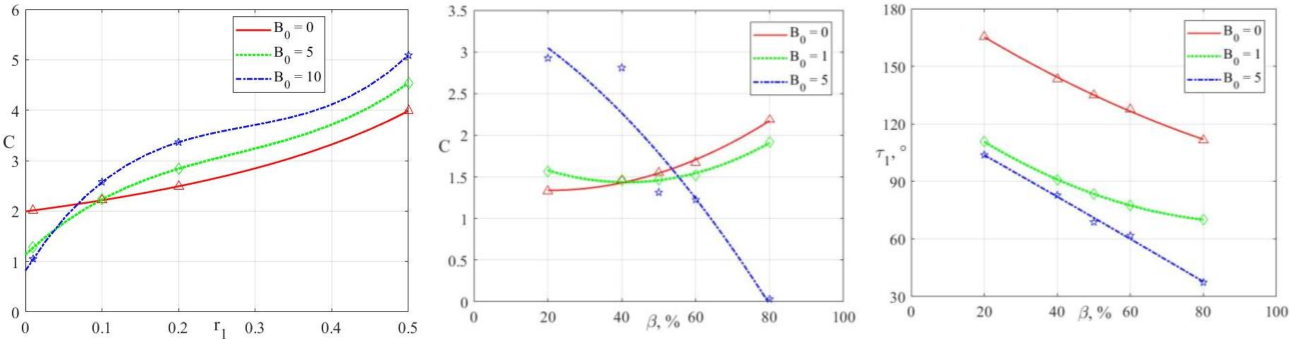
На основе метода Рунге-Кутты 4-го порядка и логической схемы рис. 2 разработана программа отыскания форм равновесной свободной поверхности жидкости в коаксиально-цилиндрических и тороидальных сосудах.




(а) (б)

Рис. 2. Структурная схема алгоритма решения системы дифференциальных уравнений, (а) – коаксиальный цилиндр, (б) – тор.

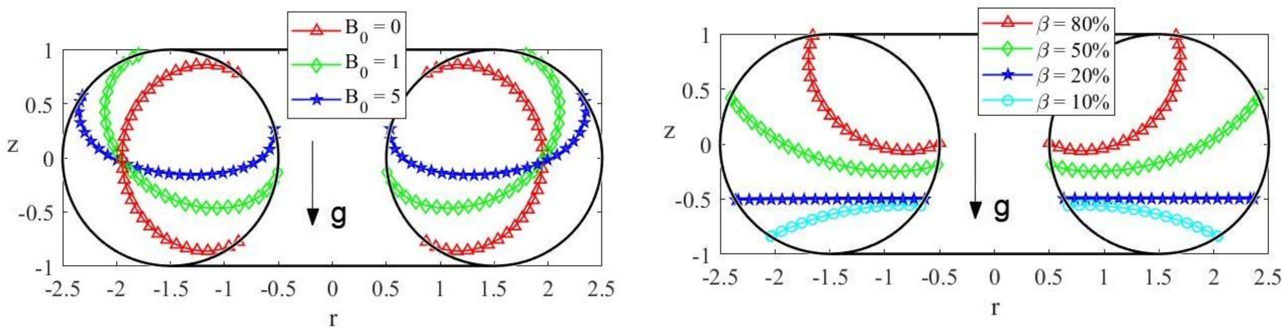
Основные трудности решения задач заключаются в определении константы $C$ и полярного угла $\tau_1$, которые зависят от угла смачивания $\alpha_0$, объёма жидкости β, числа Бонда $B_0$ и геометрии сосуда $r_1$ при заданной системе координат. На рис. 3. показаны характерные значения констант $C$ и положения ЛТК $\tau_1$ в зависимости от приведенных параметров. Из расчётов следует, что с увеличением угла смачивания $\alpha_0$ значение $C$ уменьшается.




(а) ($\alpha_0 = 5°$) (б) ($r_1 = 2$, $\alpha_0 = 5°$) (в) ($r_1 = 2$, $\alpha_0 = 5°$)

Рис. 3. Константа $C$ для коаксиального цилиндра (а) и тороидального сосуда (б), положение ЛТК $\tau_1$ (в) на внутренней стенке тора.

На рис. 4(а) видно, что при уменьшении числа Бонда $B_0$ свободная поверхность более искривлена, и в условиях польной невесомости жидкость сосредоточена около внешней стенки тороидального сосуда. Данное явление можно объяснять теоретически: в условиях, близких к невесомости, жидкость стремится занимать положение минимальной потенциальной энергии, т.е. в сторону меньшего радиуса кривизны. Подобное явление наблюдалось в экспериментах в башне невесомости при объёмах жидкости до 20% [Symons P. Zero-gravity equilibrium configuration of liquid-vapor interface in toroidal tanks. NASA TN D-6076, 1970]. И с увеличением размера сосуда данное явление проявлялось в большем диапазоне объёма жидкости.




(а) ($\beta = 50\%$, $\alpha_0 = 5°$) (б) ($B_0 = 1$, $\alpha_0 = 60°$)

Рис. 4. Положения равновесия жидкости в тороидального сосуде: (а) – в зависимости от числа Бонда $B_0$, (б) – в зависимости от объёма жидкости β.

Эволюция формы равновесной свободной поверхности в тороидальном сосуде при различных значениях β приведена на рис. 4(б). Эта одна из актуальных задач гидромеханики невесомости [Авдуевский В.С., Полежаев В.И. Гидромеханика и тепломассообмен в невесомости. М.: Наука, 1982].

**Глава 3** посвящена исследованиям малых колебаний идеальной несжимаемой жидкости ограниченного объёма в условиях микрогравитации.

В постановке задачи о малых колебаниях жидкости в слабых гравитационных полях капиллярная специфика проявляется в динамическом условии на свободной поверхности и в граничном условии на ЛТК (рис. 5).

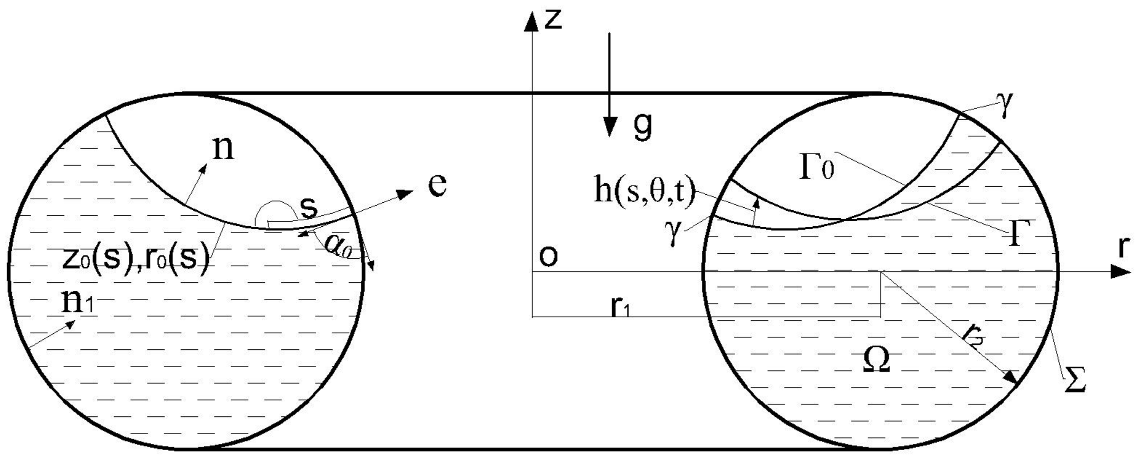



Рис. 5. Основные обозначения параметров движущейся жидкости.

Потенциальная энергия движущейся жидкости отсчитываема от состояния равновесия:

$$\Pi = \Pi_g + \Pi_\sigma + \Pi_\gamma, \text{ где } \Pi_g = \frac{1}{2}\rho g \int_{\Gamma_0} h^2 r_{0s} d\Gamma,$$
$$\Pi_\sigma = \frac{1}{2}\sigma \int_{\Gamma_0} \left[\nabla_\Gamma h \nabla_\Gamma h - \left(k_1^2 + k_2^2\right) h^2\right] d\Gamma,\ \Pi_\gamma = \frac{1}{2}\sigma \int_\gamma \chi h^2 d\gamma, \tag{6}$$

где $\Pi_g$ – потенциальная энергия массовых сил, $\Pi_\sigma$ и $\Pi_\gamma$ – потенциальная энергия сил поверхностного натяжения на свободной поверхности жидкости и на ЛТК соответственно, $r_{0s}$ – направляющий косинус нормали свободной поверхности с осью $z$, $k_1$ и $k_2$ – главные кривизны равновесной свободной поверхности, $\chi = \left(k_1 \cos\alpha_0 - k_1^\Sigma\right) / \sin\alpha_0$ – коэффициент описания формы свободной поверхности и стенки сосуда на ЛТК, $k_1^\Sigma$ – главная кривизна поперечного сечения стенки сосуда на ЛТК.

Используем вариационный принцип Гамильтона – Остроградского:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_{\Gamma_0} \left\{ \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \rho g r_{0s} h - \sigma \left[ \left(k_1^2 + k_2^2\right) h + \Delta_\Gamma h \right] \right\} \delta h d\Gamma + \sigma \int_\gamma \left( \frac{\partial h}{\partial e} + \chi h \right) \delta h d\gamma \right\} dt = 0. \tag{7}$$

Получим динамическое условие на свободной поверхности жидкости и граничное условие на линии контакта:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + g r_{0s} h - \frac{\sigma}{\rho}\left[\left(k_1^2 + k_2^2\right) h + \Delta_\Gamma h\right] = 0 \text{ на } \Gamma_0,\ \frac{\partial h}{\partial e} + \chi h = 0 \text{ на } \gamma. \tag{8}$$

Решения задачи $\varphi$ ($r$, $z$, $\theta$, $t$) и $h$ ($s$, $\theta$, $t$) можно представить в виде:

$$\varphi(r,z,\theta,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(r,z,\theta)\cos\omega_n t,\ h(s,\theta,t) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n(s,\theta)\sin\omega_n t, \tag{9}$$

где $\omega_n = \omega_n^p(\rho r_2^3/\sigma)^{1/2}$, $r_2$ – радиус окружности меридиана тора (рис. 5) и выбран как характерный размер задачи, а $\omega_n$ и $\omega_n^p$ – безразмерная и размерная частота колебаний жидкости.

Исключая переменную времени $t$ и используя вариационный метод Галёркина, получим задачу о нормальных колебаниях капиллярной жидкости:

$$\delta I_1 = 0,\ \text{где } I_1 = \int_{\Gamma_0} \left\{ \left[ B_0 r_{0s} - \left(k_1^2 + k_2^2\right) \right] h_n^2 + \nabla_\Gamma h_n \nabla_\Gamma h_n \right\} d\Gamma_0 + \chi \int_\gamma h_n^2 d\gamma - \int_\Omega \nabla\varphi_n \nabla\varphi_n d\Omega. \tag{10}$$

В выражении функционала $I_1$ есть слагаемое $\nabla_\Gamma h_n$, которое представляет собой вторую производную потенциала скоростей жидкости $\varphi_n$ и вызывает трудность при решении задачи колебаний капиллярной жидкости. Удобно рассматривать поле скоростей жидкости $\partial\varphi_n/\partial n$ на свободной поверхности как расчётную функцию в данной задаче и введена вспомогательная задача Неймана для создания связи между потенциалом скоростей жидкости $\varphi_n$ и $\partial\varphi_n/\partial n$. В дальнейшем увидим, что данный подход позволит использовать линейные треугольные элементы при применении метода конечных элементов.

Преобразуем задачу Неймана в виде вариации функционала:

$$\delta I_2 = 0,\ I_2 = \int_{\Gamma_0} \varphi_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial n} d\Gamma_0 - \frac{1}{2}\int_\Omega \nabla\varphi_n \nabla\varphi_n d\Omega. \tag{11}$$

При ограничении в работе решений, отвечающих функциям $\cos(m\theta)$, процедура решения поставленной задачи будет гораздо упрощается:

$$\varphi_n(r,z,\theta) = \Phi(r,z)\cos(m\theta),\ h_n(s,\theta) = H(s)\cos(m\theta). \tag{12}$$

Полярный угол $\theta$ отсчитывается от оси $Ox$ и в (12) имеются два индекса: номер тона $n$ и число волн в окружном направлении $m$.

Приведенные выше вариационные постановки задачи (10–11) пригодны для применения метода конечных элементов (МКЭ). В данной задаче выбраны линейные треугольные элементы для аппроксимации области, занимаемой жидкостью, и соответствующая схема аппроксимации показана на рис. 6 (а).

Представив расчётные функции в элементе по их узловым значениям, приходим к матричной форме функционалов $I_1$ и $I_2$:

$$\begin{gathered} I_1 = \left(\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial \mathbf{n}}\right)^T \left(B_0\mathbf{B_1} - \mathbf{B_2} + \mathbf{B_3} + \mathbf{B_4}\right)\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial \mathbf{n}} - \omega_n^2 \mathbf{\Phi}^T \mathbf{A}\mathbf{\Phi}, \\ I_2 = \mathbf{\Phi}_1^T \mathbf{B}\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial \mathbf{n}} - \frac{1}{2}\mathbf{\Phi}^T \mathbf{A}\mathbf{\Phi}. \end{gathered} \tag{13}$$

где $\partial\mathbf{\Phi}/\partial\mathbf{n}$ и $\mathbf{\Phi_1}$ – матрицы-столбцы узловых значений скоростей жидкости и потенциала скоростей на свободной поверхности, а $\mathbf{\Phi}^T = (\mathbf{\Phi_1}^T, \mathbf{\Phi_2}^T)$ – матрица-строка узловых значений потенциала скоростей жидкости, индекс «$T$» обозначает операцию транспонирования, квадратные матрицы **A**, **B**, $\mathbf{B_1}$, $\mathbf{B_2}$, $\mathbf{B_3}$ и $\mathbf{B_4}$ сотавлены из следующих матриц элемента:

$$\mathbf{A}_i = \left[A^i_{jk}\right] \text{ и } A^i_{jk} = \int_{\Omega_i}\left[\frac{\partial N_j}{\partial r}\frac{\partial N_k}{\partial r} + \frac{\partial N_j}{\partial z}\frac{\partial N_k}{\partial z} + \frac{m^2 N_j N_k}{r^2}\right] r dr dz,$$

$$\begin{gathered} \mathbf{B}_i = \left[\mathrm{B}^i_{jk}\right] \text{ и } \mathrm{B}^i_{jk} = \int_{\Gamma_{0i}} M_j M_k r ds,\ \mathbf{B_{1}}_i = \left[\mathrm{B}^{1i}_{jk}\right] \text{ и } \mathrm{B}^{1i}_{jk} = \int_{\Gamma_{0i}} r_{0s} M_j M_k r ds, \\ \mathbf{B_{2}}_i = \left[\mathrm{B}^{2i}_{jk}\right] \text{ и } \mathrm{B}^{2i}_{jk} = \int_{\Gamma_{0i}} \left(k_1^2 + k_2^2\right) M_j M_k r ds,\ \mathbf{B_{4}}_i = \left[\mathrm{B}^{4i}_{jk}\right] \text{ и } \mathrm{B}^{4i}_{jk} = \left(\chi r\right)_\gamma \delta_{jk}, \\ \mathbf{B_{3}}_i = \left[\mathrm{B}^{3i}_{jk}\right] \text{ и } \mathrm{B}^{3i}_{jk} = \int_{\Gamma_{0i}}\left[\frac{\partial M_j}{\partial s}\frac{\partial M_k}{\partial s} + \frac{m^2 M_j M_k}{r^2}\right] r ds. \end{gathered} \tag{14}$$

где $M_i$ ($i$ = 1, 2) и $N_i$ ($i$ = 1, 2, 3) означают функции формы $i$-го узла элемента линии и линейного треугольного элемента соответственно.

Обозначим $n_f$ – общее количество узлов на свободной поверхности, а $n_g$ – общее количество узлов в области жидкости, матрица **B** имеет размерность $n_f \times$

$n_f$ и матрица **A** размерности $n_g \times n_g$ может быть записана в виде:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_4 \end{pmatrix}, \tag{15}$$

где $\mathbf{A_1}$ в размерности $n_f \times n_f$, $\mathbf{A_2}$ в размерности $n_f \times (n_g – n_f)$, $\mathbf{A_3}$ в размерности $(n_g – n_f) \times n_f$ и $\mathbf{A_4}$ в размерности $(n_g – n_f) \times (n_g – n_f)$.

Из выражения вариации функционала $\delta I_2 = 0$ получим систему уравнений относительно матриц $\mathbf{\Phi_1}$ и $\mathbf{\Phi_2}$, и определим их выражения через $\partial\mathbf{\Phi}/\partial\mathbf{n}$:

$$\mathbf{A_1\Phi_1} + \mathbf{A_2\Phi_2} = \mathbf{B}\frac{\partial\mathbf{\Phi}}{\partial\mathbf{n}},\ \mathbf{A_3\Phi_1} + \mathbf{A_4\Phi_2} = 0 \Rightarrow \mathbf{\Phi_1} = \mathbf{A_5^{-1}}\frac{\partial\mathbf{\Phi}}{\partial\mathbf{n}},\ \mathbf{\Phi_2} = -\mathbf{A_6}\frac{\partial\mathbf{\Phi}}{\partial\mathbf{n}}, \tag{16}$$

где $\mathbf{A_5} = \mathbf{B}^{-1}\left(\mathbf{A_1} - \mathbf{A_2A_4^{-1}A_3}\right)$, $\mathbf{A_6} = \mathbf{A_4^{-1}A_3A_5^{-1}}$.

Исключив $\mathbf{\Phi_1}$, $\mathbf{\Phi_2}$ в $I_1$ через $\partial\mathbf{\Phi}/\partial\mathbf{n}$, функционал $I_1$ принимает вид:

$$\begin{gathered} I_1 = \left(\frac{\partial\mathbf{\Phi}}{\partial\mathbf{n}}\right)^T \left(\mathbf{K} - \omega_n^2\mathbf{M}\right)\frac{\partial\mathbf{\Phi}}{\partial\mathbf{n}},\ \text{где}\ \mathbf{K} = B_0\mathbf{B_1} - \mathbf{B_2} + \mathbf{B_3} + \mathbf{B_4}, \\ \mathbf{M} = \left(\mathbf{A_5^{-1}}\right)^T \mathbf{A_1A_5^{-1}} - \left(\mathbf{A_5^{-1}}\right)^T \mathbf{A_2A_6} - \mathbf{A_6^{\mathit{T}}A_3A_5^{-1}} + \mathbf{A_6^{\mathit{T}}A_4A_6}. \end{gathered} \tag{17}$$

При составлении матрицы **M** применяется метод статической конденсации [Guyan R.J., 1965], за счёт которого степени свободы задачи (17) совпадают с количеством узлов на свободной поверхности. При больших силах тяготения равновесная свободная поверхность плоская и перпендикулярная к направлению ускорения, элементы матрицы $\mathbf{B_2}$, связанные с кривизной поверхности, близки к нулю и матрицы $\mathbf{B_3}$ и $\mathbf{B_4}$, характеризующие воздействие поверхностного натяжения, пренебрежимо малы по сравнению со слагаемым $B_0\mathbf{B_1}$. В этих условиях разработанный алгоритм в диссертации преобразован в алгоритм решения краевой задачи на собственные значения колебаний жидкости при больших числах Бонда [Бужинский В.А., 2020].

Из вариационной формулировки задачи $\delta I_1 = 0$ получена задача на определение собственных частот и форм колебаний капиллярной жидкости:

$$\left(\mathbf{K} - \omega_n^2\mathbf{M}\right)\frac{\partial\mathbf{\Phi}}{\partial\mathbf{n}} = 0. \tag{18}$$

Из приведённого выше текста вытекает алгоритм решения задачи о малых колебаниях капиллярной жидкости в любом осесимметричном сосуде:

1). определение формы равновесной свободной поверхности капиллярной жидкости $z = z_0(s)$, $r = r_0(s)$ и получение функций $r_{0s}$, $k_1$, $k_2$, $\chi$;

2). создание геометрической модели области жидкости и выполнение её аппроксимации треугольными элементами в программе PARTRAN;

3). обработка информации о координатах узлов треугольных элементов в программе MATLAB;

4). получение матриц **A**, **B**, $\mathbf{B_1}$, $\mathbf{B_2}$, $\mathbf{B_3}$ и $\mathbf{B_4}$ с использованием численного интегрирования функций по формулам Гаусса;

5). решение задачи на определение собственных частот и форм колебаний капиллярной жидкости по приведенным выше формулам.

Иногда наблюдается неподвижная ЛТК в процессе движения капиллярной жидкости, к примеру, жидкость пересекает кольцевые ребра. Рассмотрим собственные колебания капиллярной жидкости при неподвижной ЛТК.

Так как ЛТК неподвижна, исключим строки и столбцы, соответствующие узлам на ЛТК, и получим уравнение:

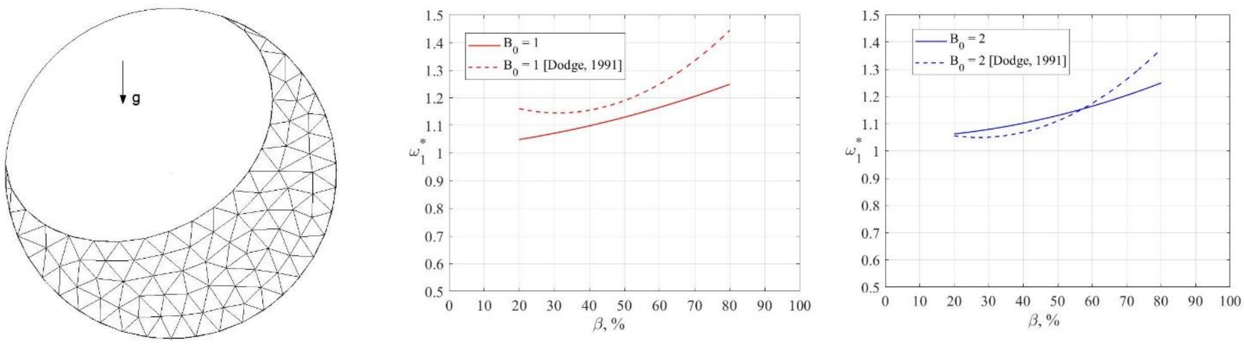
$$\left(\mathbf{K}' - \omega_n^2 \mathbf{M}'\right) \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial \mathbf{n}}' = 0. \tag{19}$$

Так как в литературе отсутствуют данные о колебаниях жидкости в тороидальных сосудах в условиях микрогравитации, проверка достоверности и сходимости разработанного алгоритма проведена в примере сферического сосуда. В таблице 1 и на рис. 6 (б) и (в) приведены численные результаты соискателя и других авторов. При объёме жидкости β=50% и угле смачивания $\alpha_0 = 90^\circ$ численное значение первого тона $\omega_1^*$ хорошо совпадает с полученным результатом в литературе [Chu W.H., 1970].

**Таблица 1.** Проверка достоверности алгоритма в случае сферического сосуда, где $\omega_1^* = \omega_1/\sqrt{B_0}$ и β – объём заполнения сосуда жидкостью,

| | $B_0 = 1, \alpha_0 = 5^\circ$ | | | $B_0 = 2, \alpha_0 = 5^\circ$ | | | $B_0 = 1000, \alpha_0 = 90^\circ$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| β, % | 25 | 50 | 78 | 25 | 50 | 78 | 50 |
| $\omega_1^*$ | 1.06 | 1.13 | 1.24 | 1.07 | 1.13 | 1.24 | 1.56 |
| $\omega_1^*$ в литературе | 1.15 | 1.19 | 1.42 | 1.05 | 1.11 | 1.35 | 1.54 |
| | [Dodge F.T., 1991] | | | | | | [Chu W.H., 1970] |

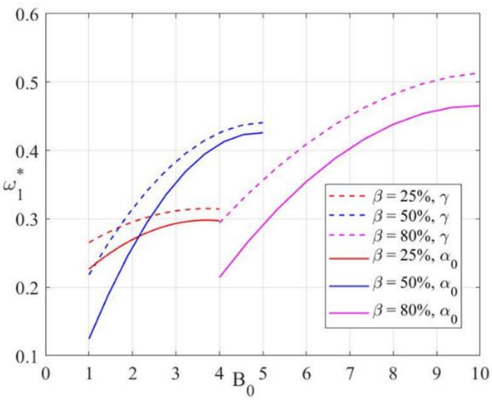
В таблице 1 и на рис. 6 (б) и (в) только при большем диапазоне объёма жидкости имеется хорошее совпадение численных результатов соискателя и в литературе [Dodge F.T., 1991]. Можно делать вывод о том, что разработанный алгоритм в диссертации может быть пригоден для исследований колебаний жидкости в сосудах в условиях микрогравитации.



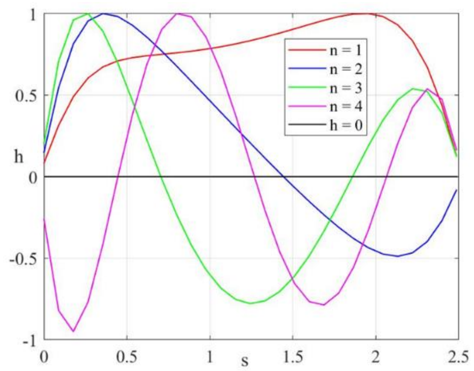

(а) (б) ($\alpha_0 = 5°$) (в) ($\alpha_0 = 5°$)

Рис. 6. Схема аппроксимации области жидкости в правом сечении тора (а), основной тон колебаний жидкости в сфере (б) и (в).

*Асимметричная мода* ($m$ = 1) *колебаний.* На рис. 7(а) приведены собственные частоты 1-го тона колебаний жидкости $\omega_1^*$ при сохранении угла смачивания ($\alpha_0$) и неподвижной ЛТК (γ). Рис. 7(б) показывает собственную форму $h(s)$ первых четырёх тонов ($n$ = 1, 2, 3, 4), линия $h$ = 0 означает положение равновесия жидкости.



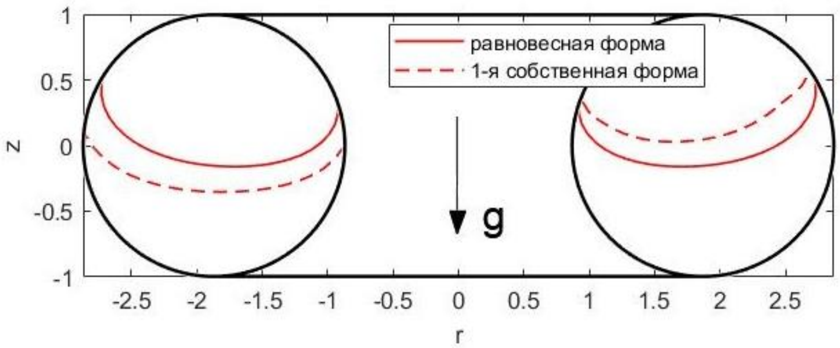
(а) ($r_1$ = 1.87, $\alpha_0$ = 5°)



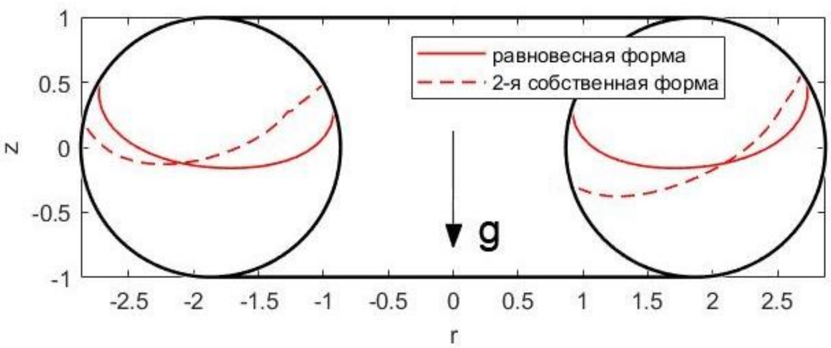
(б) ($B_0$ = 5, $r_1$ = 1.87, $\alpha_0$ = 5°)

Рис. 7. Собственные частоты (а) и формы (б) колебаний жидкости в тороидальных сосудах, где $s$ – длина дуги меридиана свободной поверхности.

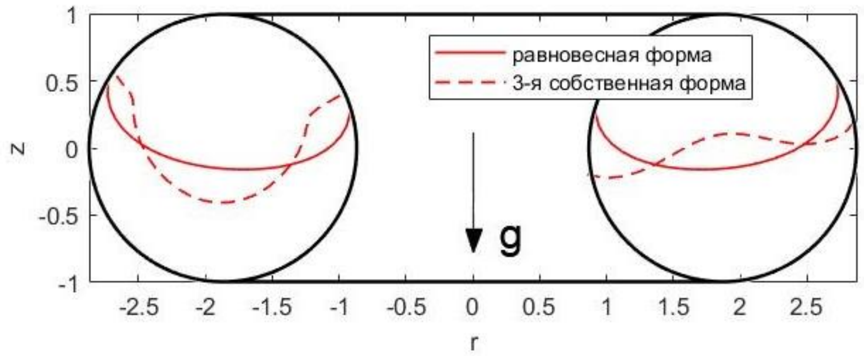
На рис. 8 показаны собственные формы колебаний жидкости относительно равновесной свободной поверхности в условиях микрогравитации для поперечного сечения тора. Сплошная линия показывает равновесное положение свободной поверхности, а пунктир – собственную форму. Количество узлов пересечения равновесной и собственной формы каждого тона колебаний жидкости сходится с экспериментальным результатам колебаний тяжёлой жидкости в наземных условиях [Meserole J.S., 1987].



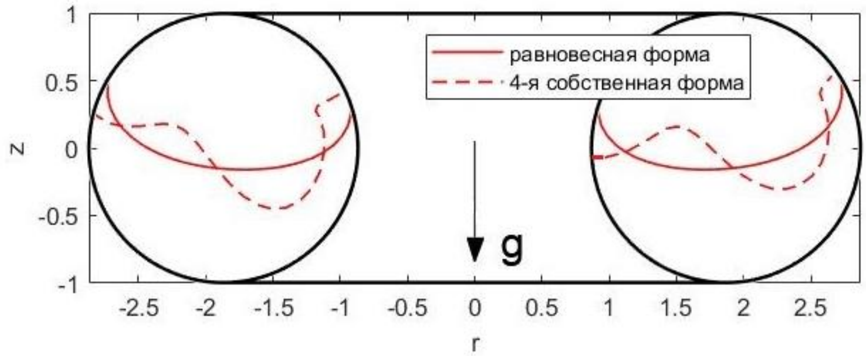

(а)




(б)




(в)

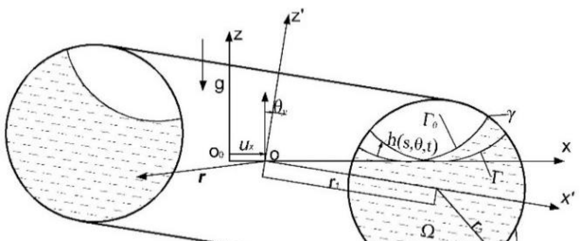



(г)

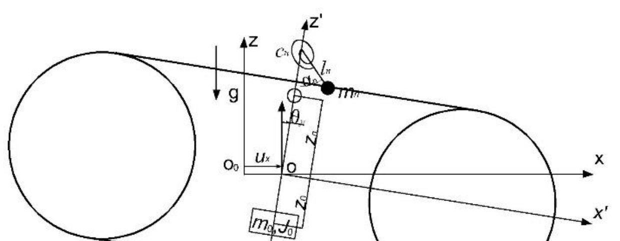
Рис. 8. Собственные формы первых четырёх тонов колебаний жидкости.

**В главе 4** разработан механический аналог малых движений жидкости в условиях микрогравитации и обоснованы механизмы диссипации энергии колебаний маловязкой жидкости с учётом капиллярного эффекта.

В данной работе механическим аналогом колебаний капиллярной жидкости является маятник со спиральной пружиной (рис. 9). Маятник моделирует воздействие массовой силы, а влияние поверхностного натяжения учитывается спиральной пружиной. В данной работе объектом иссследования является жидкость, динамические характеристики которой требуются для разработки математических моделей движения летательных аппаратов с учётом подвижности жидкого топлива в баках.



(а)



(б)

Рис. 9. Обозначения вынужденных колебаний капиллярной жидкости (а) и маятниковой модели со спиральной пружиной (б).

Запишем гидродинамическую силу и её момент, действующие на стенку сосуда от жидкости, от обобщённых координат $u_x(t)$, $\vartheta_y(t)$ и $s_n(t)$ (рис. 9а):

$$F_x = -m\ddot{u}_x - mz_c\ddot{\vartheta}_y - \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\ddot{s}_n,\ M_y = -mz_c\ddot{u}_x - J\ddot{\vartheta}_y + mgz_c\vartheta_y - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_{On}\ddot{s}_n - g\lambda_n s_n\right), \quad (20)$$

и уравнения движения капиллярной жидкости в подвижном баке:

$$\ddot{u}_x + \lambda_{On}/\lambda_n\ddot{\vartheta}_y - g\vartheta_y + \mu_n/\lambda_n\left(\ddot{s}_n + \omega_n^2 s_n\right) = 0,\ n = 1,\ 2,\ \cdots,\ \infty, \quad (21)$$

где $m$ и $z_c$ – суммарная масса и центр массы жидкости, $J$ – присоединённый момент инерции жидкости, $\mu_n$ – присоединённая масса жидкости, $\lambda_n$ и $\lambda_{On}$ – коэффициенты гидродинамической силы и её момента.

Приведенные гидродинамические коэффициенты имеют вид:

$$m = \rho\int_{\Omega} d\Omega,\ J = \rho\int_{\Gamma_0+\Sigma}\psi_y\frac{\partial\psi_y}{\partial n}dS,\ z_c = \rho\int_{\Omega} z d\Omega\Big/m,\ \mu_n = \rho\int_{\Gamma_0}\varphi_n\frac{\partial\varphi_n}{\partial n}d\Gamma_0,$$

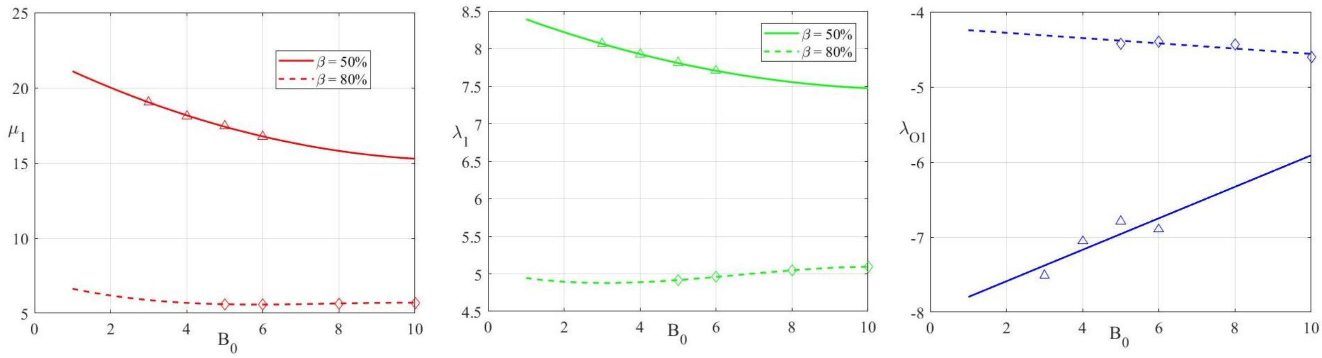
$$\lambda_n = \rho\int_{\Gamma_0}x\frac{\partial\varphi_n}{\partial n}d\Gamma_0,\ \kappa_n = \int_{\Gamma_0}\left[\left(\nabla_\Gamma h_n\right)^2 - \left(k_1^2 + k_2^2\right)h_n^2\right]d\Gamma_0 + \chi\int_{\gamma}h_n^2 d\gamma, \quad (22)$$

$$\eta_n = \rho\int_{\Gamma_0}\left(\frac{\partial\varphi_n}{\partial n}\right)^2 r_{0s}d\Gamma_0,\ \lambda_{On} = \rho\int_{\Gamma_0}\psi_y\frac{\partial\varphi_n}{\partial n}d\Gamma_0,\ \omega_n^2 = \frac{\eta_n}{\mu_n}\left(g + \sigma\frac{\kappa_n}{\eta_n}\right).$$

Введена $\psi_y$ потенциала Стокса–Жуковского и для осесимметричного сосуда $\psi_y = -\cos\theta\psi(r, z)$. Вариационная формулировка задачи об определении $\psi(r, z)$:

$$\delta I_3 = 0,\ I_3 = \frac{1}{2}\int_{\Omega}\nabla\psi\nabla\psi d\Omega - \int_{\Gamma_0+\Sigma}\psi\left(rn_z - zn_r\right)dS. \quad (23)$$

На рис. 10 показаны зависимости основных гидродинамических коэффициентов тороидального сосуда от числа Бонда $B_0$ и объёма жидкости β.




(а) (б) (в)

Рис. 10. Коэффициент присоединённой массы жидкости $\mu_1$ (а), коэффициенты гидродинамической силы $\lambda_1$ (б) и её момента $\lambda_{O1}$ (в).

Запишем силу реакции и её момент, действующие на стенку сосуда от маятниковой модели, от обобщённых координат $u_x(t)$, $\vartheta_y(t)$ и $\alpha_n$(t) (рис. 9б):

$$F_{xм} = -\left(m_0 + \sum_{n=1}^{\infty}m_n\right)\ddot{u}_x - \left(m_0 z_0 + \sum_{n=1}^{\infty}m_n z_n\right)\ddot{\vartheta}_y - \sum_{n=1}^{\infty}m_n l_n\ddot{\alpha}_n,$$

$$M_{yм} = -\left(m_0 z_0 + \sum_{n=1}^{\infty}m_n z_n\right)\ddot{u}_x - \left(m_0 z_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}m_n z_n^2 + J_0\right)\ddot{\vartheta}_y + \quad (24)$$

$$\left(m_0 z_0 + \sum_{n=1}^{\infty}m_n z_n\right)g\vartheta_y - \sum_{n=1}^{\infty}\left(m_n l_n z_n\ddot{\alpha}_n - m_n l_n g\alpha_n\right),$$

и уравнения движения маятниковой модели со спиральной пружиной в подвижном баке:

$$\ddot{u}_x + z_n \ddot{\vartheta}_y - g\vartheta_y + l_n \left( \ddot{\alpha}_n + \omega_{мn}^2 \alpha_n \right) = 0,\ n = 1,\ 2,\ \cdots,\ \infty. \quad (25)$$

где $\omega_{мn}{}^2 = (g + c_n/m_n l_n)/l_n$ – квадрат собственной частоты маятника.

Определим параметры механического аналога из равенства по силе, моменту, собственным частотам жидкости и её аналога:

$$m_n = \lambda_n^2/\mu_n,\ l_n = \mu_n/\eta_n,\ c_n = \sigma m_n l_n \kappa_n/\eta_n,\ z_n = \lambda_{On}/\lambda_n,\ s_n = (\lambda_n/\mu_n) l_n \alpha_n,$$
$$m_0 = m - \sum_{n=1}^{\infty} m_n,\ z_0 = \left( m z_c - \sum_{n=1}^{\infty} m_n z_n \right) \Big/ m_0,\ J_0 = J - m_0 z_0^2 - \sum_{n=1}^{\infty} m_n z_n^2. \quad (26)$$

Для малых колебаний капиллярной жидкости в круговом цилиндре радиусом $r_0$ с углом смачивания $\alpha_0 = 90°$ масса маятника $m_n$, длина стержня $l_n$ и жёсткость спиральной пружины $c_n$, определяемые по формулам (22) и (26), имеют следующие аналитические выражения:

$$m_n = \rho\pi r_0^3 \frac{2\tanh(\xi_n H)}{\xi_n(\xi_n^2 - 1)},\ l_n = \frac{r_0}{\xi_n \tanh(\xi_n H)},\ c_n = \sigma\pi r_0^2 \frac{2}{\xi_n^2 - 1}. \quad (27)$$

Выражения $m_n$ и $l_n$ совпадают с полученными результатами К.С. Колесникова при больших силах тяготения [Колесников К.С. Динамика ракет. М.: Машиностроение, 2003]. Слагаемое $\sigma\pi r_0^2$ жёсткости спиральной пружины $c_n$ означает поверхностную энергию свободной поверхности жидкости.

На рис. 11 приведены параметры механического аналога малых колебаний жидкости в тороидальных сосудах в условиях микрогравитации.

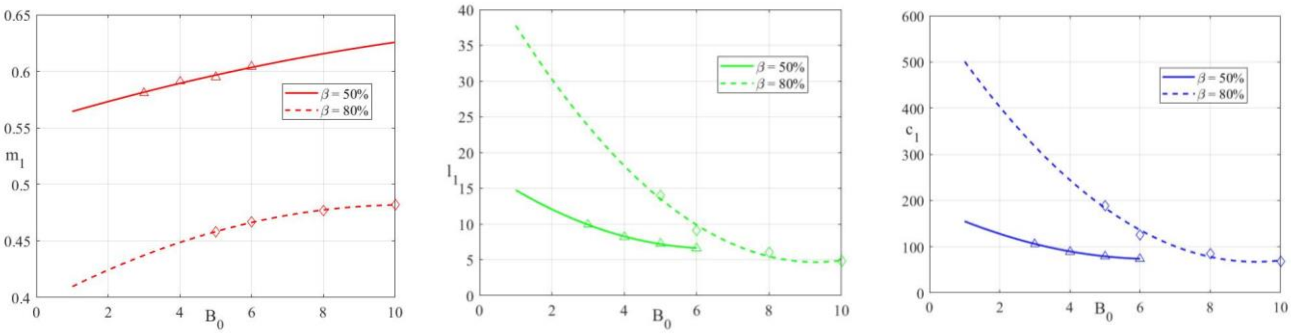



Рис. 11. Масса маятника $m_1$ (а), длина стержня $l_1$ (б) и жёсткость спиральной пружины $c_1$ (в) колебаний жидкости в тороидальных сосудах.

С уменьшением числа Бонда $B_0$ масса колеблющейся жидкости основного тона $m_1$ уменьшается, а длина стержня $l_1$ и жёсткость спиральной пружины $c_1$ увеличиваются. Так как с уменьшением числа Бонда $B_0$ равновесная свободная поверхность жидкости более искривлена и больше жидкости смачиваема на твердой стенке сосуда, меньше жидкости колеблется.

Все компоненты жидкого топлива обладают в той или иной степени вязкостью. Для баков с гладкими стенками коэффициенты демпфирования могут определяться по приближённой методике с использованием решения для потенциального течения идеальной жидкости. В дальнейшем приведена оценка декремента малых колебаний жидкого топлива $\delta_n$:

$$\delta_n = \delta_n^{\Sigma} + \delta_n^{\Omega} + \delta_n^{\Gamma} + \delta_n^{\gamma}, \qquad (28)$$

где $\delta_n^{\Sigma}$, $\delta_n^{\Omega}$, $\delta_n^{\Gamma}$ и $\delta_n^{\gamma}$ – декременты колебаний жидкости вблизи стенки сосуда, в основной массе жидкости, на загрязненной свободной поверхности и на линии трёхфазного контакта соответственно:

$$\delta_n^{\Sigma} = \frac{\pi}{\sqrt{\mathrm{Re}_n}} \frac{\int_{\Sigma} \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial \tau}\right)^2 d\Sigma}{\int_{\Gamma_0} \varphi_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial n} d\Gamma_0} \text{ на } \Sigma, \ \delta_n^{\Omega} = \frac{\pi}{\mathrm{Re}_n} \frac{\int_{\Omega} \kappa(\nabla \varphi_n) d\Omega}{\int_{\Gamma_0} \varphi_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial n} d\Gamma_0} \text{ в } \Omega,$$

$$\delta_n^{\Gamma} = \frac{\pi}{\sqrt{\mathrm{Re}_n}} \frac{\int_{\Gamma_0} (1 - C_{\Gamma})^2 \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial \tau}\right)^2 d\Gamma_0}{\int_{\Gamma_0} \varphi_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial n} d\Gamma_0} \text{ на } \Gamma, \ \delta_n^{\gamma} = \frac{\pi}{\mathrm{Re}_n^* \sin^2 \alpha_0} \frac{\int_{\gamma} \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial \tau}\right)^2 d\gamma}{\int_{\Gamma_0} \varphi_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial n} d\Gamma_0} \text{ на } \gamma$$

где $\mathrm{Re}_n = \omega_n l^2/\nu$ и $\mathrm{Re}_n^* = \rho\omega_n l^2/\mu_\gamma$ – введённые безразмерные параметры, эквивалентные числу Рейнольдса, $C_\Gamma$ – коэффициент пропорциональности скоростей частицы на свободной поверхности [Miles J.W., 1967], $\kappa(\nabla\varphi_n)$ – функция, характеризующая рассеивание энергии на единицу объёма жидкости [Слёзкин Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1955].

В данной работе в основном исследована диссипация энергии вблизи линии трёхфазного контакта. Непосредственные наблюдения показывают, что жидкость в первый период колебаний смочила стенку сосуда и при следующих циклах движится по поверхности, покрытой плёнкой жидкости малой толщины. В плоскости контакта возникают касательные напряжения трения $F_\tau$, пропорциональные касательной составляющей скорости $(\partial h/\partial t)/\sin\alpha_0$ и некоторому коэффициенту трения $\mu_\gamma$.

При плескании жидкости движущаяся сила $\sigma^*$, вызванная отличием $\alpha^*$ динамического угла смачивания от статического (рис. 12), уравновешивается $F_\tau$:

$$F_\tau = -\mu_\gamma \frac{\partial h}{\partial t} \frac{1}{\sin\alpha_0}, \ \sigma^* = \sigma\alpha^* \sin\alpha_0, \ F_\tau + \sigma^* = 0 \ \Rightarrow \ \alpha^* = \frac{\mu_\gamma}{\sigma \sin^2\alpha_0} \frac{\partial h}{\partial t}, \qquad (29)$$

На основе (29) установлено соотношение между изменением угла смачивания и скоростью линии контакта.

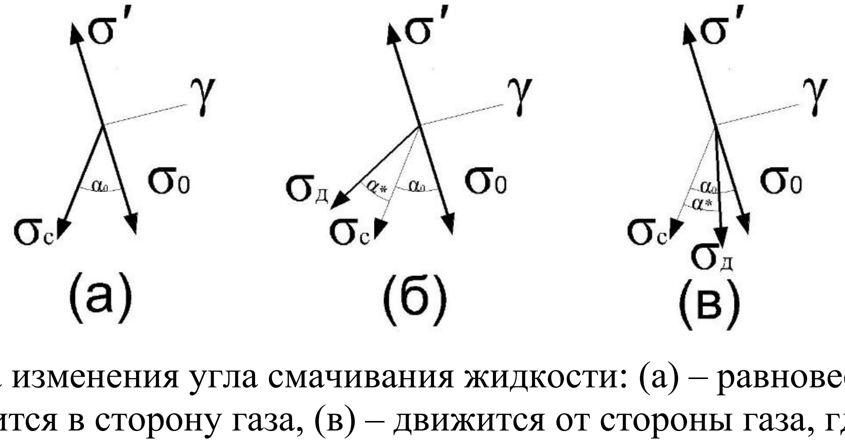



Рис. 12. Схема изменения угла смачивания жидкости: (а) – равновесие, (б) – жидкость движится в сторону газа, (в) – движится от стороны газа, где $\sigma_0$ и $\sigma'$ – поверхностное натяжение разделов жидкости–стенки и газа–стенки, $\sigma_c$ и $\sigma_д$ – статическое и динамическое поверхностное натяжение раздела жидкости–газа.

Используя решения задачи о малых возмущениях свободной поверхности

[Мышкис А.Д., Бабский В.Г., Жуков М.Ю., Копачевский Н.Д., Слобожанин Л.А., Тюпцов А.Д. Методы решения задач гидромеханики для условий невесомости. Киев: Наукова Думка, 1992. С. 102–104], получим граничное условие с учётом изменения угла смачивания в сосудах произвольной формы:

$$\frac{\partial h}{\partial e}+\chi h+\frac{\mu_\gamma}{\sigma\sin^2\alpha_0}\frac{\partial h}{\partial t}=0 \text{ на } \gamma. \tag{30}$$

Параметр $\chi$ задан в главе 3 и описывает форму стенки и свободной поверхности на ЛТК. Из (30) вытекают другие две модели движения ЛТК:

1). $\mu_\gamma = 0$, т.е. имеем условие о сохранении угла смачивания, как было показано в работах Н.Д. Копачевского: $\partial h/\partial e + \chi h = 0$ на $\gamma$;

2). $\mu_\gamma \to \infty$, т.е. имеется модель неподвижной ЛТК: $h = 0$ на $\gamma$.

Решения задачи $\varphi$ $(r, z, \theta, t)$ и $h$ $(s, \theta, t)$ представим в виде:

$$\varphi(r,z,\theta,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(r,z,\theta)e^{\Omega_n t},\; h(s,\theta,t)=\sum_{n=1}^{\infty}h_n(s,\theta)e^{\Omega_n t}, \tag{31}$$

где $\Omega_n = -\varepsilon_n+i\omega_n$ – комплексная частота колебаний жидкости, а $\varepsilon_n$ – коэффициент затухания за счёт диссипации энергии на ЛТК.

Вариационная формулировка задачи с условием (30) принимает вид:

$$\begin{gathered}\delta I_4=0,\; I_4=\int_{\Gamma_0}\left\{\left[B_0 r_{0s}-\left(k_1^2+k_2^2\right)\right]h_n^2+\nabla_\Gamma h_n\nabla_\Gamma h_n\right\}d\Gamma_0+\chi\int_\gamma h_n^2 d\gamma+\\ C_a\Omega_n\int_\gamma h_n^2 d\gamma+\int_\Omega\nabla\varphi_n\nabla\varphi_n d\Omega.\end{gathered} \tag{32}$$

где $C_a$ – число капиллярности, характеризующее соотношение силы вязкости и силы поверхностного натяжения:

$$C_a=\frac{\mu_\gamma}{\sin^2\alpha_0\sqrt{\rho l\sigma}}=\frac{\sqrt{\rho l^3\omega_n^2/\sigma}}{\rho l^2\omega_n\sin^2\alpha_0/\mu_\gamma}=\frac{\omega_n^*}{\mathrm{Re}_n^*\sin^2\alpha_0}. \tag{33}$$

Здесь $\omega_n^*=\omega_n(\rho r_2^3/\sigma)^{1/2}$ и $\mathrm{Re}_n^*=\rho\omega_n r_2^2/\mu_\gamma$ – безразмерная частота и введённый критерий Рейнольдса для капиллярной жидкости.

Из выражения числа капиллярности $C_a$ следует, что данное безразмерное число чувствительно к углу смачивания $\alpha_0$, который зависит от свойств жидкости и стенки сосуда. Реальное ракетное топливо в сосудах имеет маленький угол смачивания, близкий к нулю, так как необходимо учитывать диссипацию энергии вблизи ЛТК хотя имеется большое значение Рейнольдса $\mathrm{Re}_n^*$.

Используя метод конечных элементов, из (32) получим задачу на определение собственных частот и форм колебаний капиллярной жидкости:

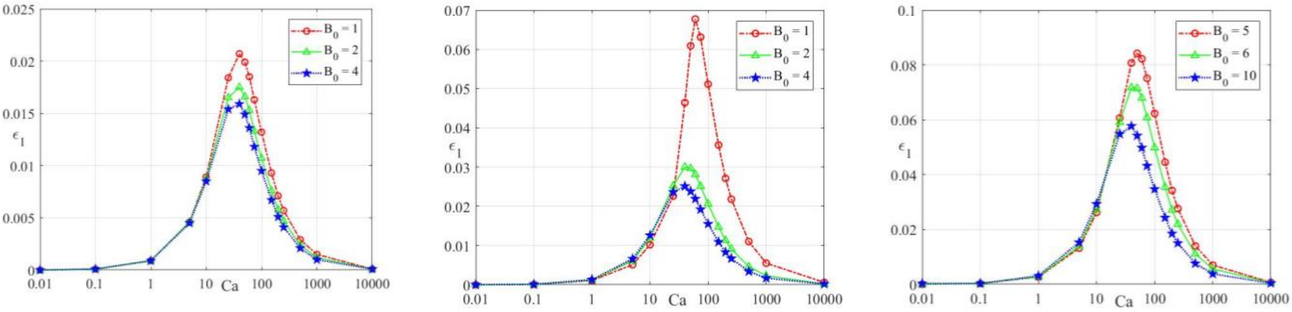
$$\left(\Omega_n^2\mathbf{M}+\Omega_n\mathbf{C}+\mathbf{K}\right)\frac{\partial\mathbf{\Phi}}{\partial\mathbf{n}}=0, \tag{34}$$

где матрицы жёсткости **K** и инерции **M** получены как для задач колебаний идеальной жидкости в главе 3, а матрица вязкости **C** имеет размерность $n_f \times n_f$ и составлена из матриц $\mathbf{C}_i$, $\delta_{jk}$ – символ Кронекера,

$$\mathbf{C}_i=\left[C_{jk}^i\right] \text{ и } C_{jk}^i=\left(C_a r\right)_\gamma\delta_{jk}. \tag{35}$$

В программе MATLAB получены коэффициенты демпфирования $\varepsilon_1$ и частоты колебаний основного тона при различных числах капиллярности $C_a$, числах Бонда $B_0$ и объёмах жидкости $\beta$, показанные на рис. 13–14.

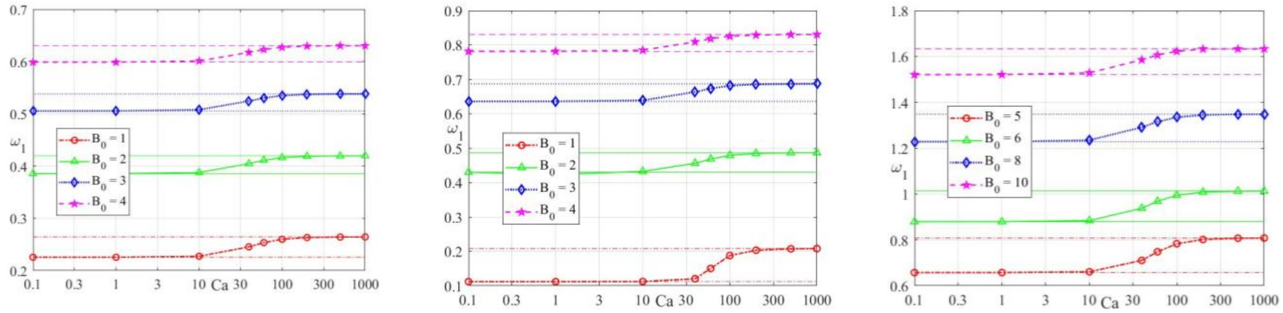
Из рис. 13 следует, что число капиллярности $C_a$ в диапазоне 10–100 приводит к значительной диссипации энергии вблизи линии контакта и коэффициент демпфирования $\varepsilon_1$ имеет один порядок как коэффици затухания вблизи стенки сосуда. А из выражения числа капиллярности $C_a$ видно, что при маленком угле смачивания $\alpha_0$ и большом коэффициенте трения $\mu_\gamma$ число капиллярности $C_a$ реальной жидкости может быть находится в этом диапазоне.




(а) (б) (в)

Рис. 13. Коэффицент затухания основного тона $\varepsilon_1$ в зависимости от числа капиллярности $C_a$ и числа Бонда $B_0$, (а) – $\beta$ = 20%, , (б) – 50% и (в) – 80 %.

На рис. 14 видно, что собственная частота $\omega_1$ при $C_a$ в диапазоне 10–100 монотонно увеличивается с повышением числа капиллярности. При $C_a \to 0$ собственная частота совпадает с численным значением частоты колебаний жидкости с граничным условием о сохранении угла смачивания $\alpha_0$, а при $C_a \to \infty$ частота $\omega_1$ приближается к результатам при неподвижной ЛТК $\gamma$ ($h = 0$ на $\gamma$).




(а) (б) (в)

Рис. 14. Собственная частота основного тона $\omega_1$ в зависимости от числа капиллярности $C_a$ и числа Бонда $B_0$, (а) – $\beta$ = 20%, , (б) – 50% и (в) – 80 %.

## ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ

1. При уменьшении числа Бонда $B_0$ равновесная свободная поверхность более искривлена и в условиях полной невесомости жидкость сосредоточена около внешней стенки тороидального сосуда. Данное явление можно объяснять теоретически: в условиях, близких к невесомости, жидкость стремится занимать положение минимальной потенциальной энергии, т.е. в сторону меньшего радиуса кривизны. Подобное явление экспериментально наблюдалось в башне невесомости;
2. В тороидальных сосудах с повышением числа Бонда $B_0$ значения собственных частот увеличиваются и количество узлов пересечения равновесной поверхности и собственной формы каждого тона колебаний жидкости

сходится с экспериментальным результатам тяжёлой жидкости;

3. Разработан механический аналог малых колебаний жидкости в условиях микрогравитации и получена формула жёсткости спиральной пружины;
4. Дана оценка диссипации энергии вблизи ЛТК. Отличие динамического угла смачивания от статического в процессе движения жидкости приводит к диссипации энергии. Число капиллярности $C_a$ в диапазоне 10–100 приводит к значительной диссипации энергии вблизи ЛТК и коэффициент затухания $\varepsilon_1$ имеет порядок как коэффициент затухания вблизи стенки сосуда;
5. Предложен алгоритм на основе метода конечных элементов для определения динамических характеристик малых колебаний капиллярной жидкости, пригодный для любого осесимметричного сосуда.

## ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ


1. **Юй Чжаокай, Темнов А.Н. Исследование равновесной свободной поверхности капиллярной жидкости в тороидальном сосуде // Инженерный журнал: наука и инновации. 2021. Вып. 3. С. 1–11.**
2. **Юй Чжаокай, Темнов А.Н. Равновесие и колебания свободной поверхности жидкого топлива в коаксиально-цилиндрических сосудах в условиях микрогравитации // Инженерный журнал: наука и инновации. 2021. Вып. 8. С. 1–15.**
3. **Юй Чжаокай. Волновые движения жидкого топлива в тороидальных сосудах с учётом силы поверхностного натяжения // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 78. С. 151–165.**
4. **Юй Чжаокай, Темнов А.Н. Механический аналог малых колебаний жидкости в условиях, близких к невесомости // Труды МАИ. 2022. № 126.**
5. **Темнов А.Н., Шкапов П.М., Юй Чжаокай. Механический аналог колебаний маловязкой жидкости с учётом капиллярного эффекта // Труды МАИ. 2023. № 129.**
6. Юй Чжаокай, Темнов А.Н. Исследование равновесной свободной поверхности капиллярной жидкости в топливных баках // Материалы VI международной научной конференции «Фундаментальные и прикладные задачи механики». Часть 2. Москва. 02–04 декабря 2020 г. С. 88–92.
7. Юй Чжаокай, Темнов А.Н., Шкапов П.М. Оценка коэффициента демпфирования колебаний жидкости вблизи линии трёхфазного контакта // Материалы VIII международной научной конференции «Фундаментальные и прикладные задачи механики». Москва. 06–09 декабря 2022 г.
8. Юй Чжаокай, Темнов А.Н. Равновесие и колебания в условиях микрогравитации свободной поверхности жидкого топлива в коаксиальном цилиндре // Сборник тезисов международной конференции XLV Королёвские чтения-2021. Москва. 30 марта – 02 апреля 2021 г. С. 156–158.
9. Темнов А.Н., Шкапов П.М., Юй Чжаокай. Механический аналог колебаний жидкости в условиях, близких к невесомости // Сборник тезисов международной конференции XLVII Королёвские чтения-2023. Москва. 24 – 27 января 2023 г.
10. Юй Чжаокай. Равновесие в условиях микрогравитации свободной

поверхности жидкого топлива в тороидальных сосудах круглого и эллиптического сечения // Сборник тезисов работ международной молодёжной конференции XLVII Гагаринские чтения-2021. Москва. 20–23 апреля 2021 г. С. 850.
11. Юй Чжаокай. Численное моделирование колебаний жидкости в тороидальных сосудах при условиях микрогравитации // Волны и вихри в сложных средах: 12-ая международная конференция – школа молодых учёных. Москва. 01–03 декабря 2021 г. С. 256–259.
12. Юй Чжаокай. Исследование малых колебаний жидкости в условиях микрогравитации // Волны и вихри в сложных средах: 13-ая международная конференция–школа молодых учёных. Москва. 30 ноября–02 декабря 2022 г. С. 300–304.
13. Юй Чжаокай, Темнов А.Н. Формы равновесия жидкости в тороидальном сосуде в условиях, близких к невесомости // Сборник материалов международной конференции КРОМШ-2020. Алушта. 19–27 сентября 2020 г. С. 271–273.
14. Юй Чжаокай, Темнов А.Н. Равновесие и колебания в условиях микрогравитации жидкого топлива в двухсвязных сосудах // Сборник материалов международной конференции КРОМШ-2021. Алушта. 17–26 сентября 2021 г. С. 108.
15. Юй Чжаокай, Темнов А.Н. Механический аналог малых колебаний жидкости в условиях микрогравитации // Сборник материалов международной конференции КРОМШ-2022. Алушта. 16–25 сентября 2022 г. С. 57.