

На правах рукописи



**Еголева Екатерина Сергеевна**

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ТОНКИХ  
ПЛАСТИН ИЗ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ  
С ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНЫМИ ФАЗОВЫМИ  
ПРЕВРАЩЕНИЯМИ**

Специальность 01.02.04 – «Механика деформируемого твердого  
тела»

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Москва - 2020

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (Национальный исследовательский университет)» (МГТУ им. Н.Э. Баумана)

**Научный руководитель:** доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана  
**Димитриенко Юрий Иванович.**

**Официальные оппоненты:** **Звягин Александр Васильевич**  
доктор физико-математических наук, профессор, профессор Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова», кафедра газовой и волновой динамики;

**Волков-Богородский Дмитрий Борисович,**  
кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Федерального государственного бюджетного учреждения науки «Институт прикладной механики РАН».

**Ведущая организация:** **Акционерное общество «Композит»**

Защита диссертации состоится «25» ноября 2020 года в 16<sup>00</sup> на заседании диссертационного совета Д 212.125.05, созданного на базе Московского авиационного института (национального исследовательского университета), в зале заседаний Ученого совета МАИ по адресу: 125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4.

С диссертацией можно ознакомиться в научно-технической библиотеке ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» и на сайте: [https://mai.ru/events/defence/index.php?ELEMENT\\_ID=111602](https://mai.ru/events/defence/index.php?ELEMENT_ID=111602)

Автореферат разослан «\_\_» \_\_\_\_\_ 2020 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета



Г.В. Федотенков

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

### Актуальность темы.

В современной науке и технике особое внимание уделяется конструкциям и оболочкам из композиционных материалов с высокими показателями механических свойств (упругость, твердость, прочность), сохраняющихся при интенсивных термосиловых нагрузках. Перспективным классом конструкционных материалов для создания теплонагруженных конструкций являются композиционные материалы на основе неорганических связующих (например, фосфатных, алюмо-фосфатных, хромо-фосфатных, магний-фосфатных, алюмо-хромофосфатных). Материалы на основе неорганических связующих применяются в качестве теплоизоляционных и огнестойких конструкций в строительной технике, в металлургии, а также в качестве высокотемпературных электроизоляторов в электротехнике.

Характерной особенностью исследований таких композитов является их комплексность, поскольку при описании процессов деформирования конструкций и оболочек необходимо учитывать многостадийные физико-химические превращения в компонентах композита при нагреве до высоких температур. В связи с этим актуальной проблемой является разработка механико-математических моделей, описывающих изменение микроструктуры композита с многостадийными фазовыми превращениями.

Методы расчета эффективных характеристик композиционных материалов были предложены в работах Н.С. Бахвалова, Б.Е. Победри, Б.Г. Попова, М.Э. Эглит, А.К. Малмейстера, S.W. Tsai, E.W. Wu, В.И. Болотина, Н.А. Алфутова, J.C. Michel и других. Исследованию микроструктуры и свойств высокотемпературных композиционных материалов, в том числе на неорганических матрицах с фазовыми превращениями, посвящены работы Е.Н. Каблова, Д.В. Гращенкова, В.И. Костинова, А.Н. Варенкова, В.Я. Шевченко, С.М. Баринаова, Г.Б. Строганова, А.Г. Ромашина, В.А. Копейкин, Ю.А. Ивахненко, Н.М. Варрика, И.С. Епифановского, Ю.И. Димитриенко и др.

Для описания процессов деформирования высокотемпературных композитов с фазовыми превращениями необходима разработка уточненных методов расчета, обеспечивающих приемлемую точность расчета напряжений межслойного сдвига и поперечных напряжений. Различные варианты теории оболочек, уточняющие классические теории Кирхгофа-Лява и Тимошенко, в том числе, основанные на некоторых допущениях о характере распределения перемещений и напряжений по толщине пластин рассматривались в трудах Э.И. Григолюка, Е.М. Зверяева, С.А. Лурье, В.В. Васильева, R.V Kohn, M.A.Vogelius, T. Lewinski, J.J. Telega, I.V. Andrianov, Ю.И. Дмитриенко и др.

Метод асимптотических разложений по малому геометрическому параметру показал свою достаточную эффективность и универсальность – он позволяет аналитически рассчитывать все 6 компонент напряжений и находить их распределение по толщине пластин с высокой точностью, которая может быть достигнута только при использовании очень мелких конечно-элементных сеток.

Однако классический вариант метода асимптотических разложений, когда учитываются разложения для перемещений только до первого порядка малости, обладает определенными ограничениями – точность расчета перемещений снижается для относительно коротких пластин, по сравнению с результатами расчета на основе теории пластин Тимошенко. Для повышения точности расчета коротких пластин необходима модификация метода асимптотических разложений. Для расчета тонкостенных пластин из высокотемпературных композиционных материалов на неорганических матрицах, необходима разработка теории тонких пластин с учетом многостадийных фазовых превращений, которые меняют упругие свойства материала с течением времени и в зависимости от условий нагрева.

**Цель проведенных исследований** – разработка определяющих соотношений для композиционных материалов с высокотемпературными многостадийными фазовыми превращениями, основанная на микроскопическом анализе напряженно-деформированного состояния, и разработка модифицированной

асимптотической теории расчета тонких пластин из композитов данного класса.

Для достижения поставленной цели потребовалось решение **следующих основных задач:**

1. разработка математической многоуровневой модели для расчета термоупругих характеристик тканевых композиционных материалов с многостадийными фазовыми превращениями в матрице и волокнах, развивающихся в них при высоких температурах;

2. построение определяющих соотношений для ортотропных композиционных материалов с многостадийными фазовыми превращениями, основанных на многоуровневой модели композита;

3. разработка модифицированного варианта асимптотической теории термоупругости для пластин с фазовыми превращениями, учитывающей сдвиговых характеристик композита и проведение численных расчетов изменения напряженно-деформированного состояния, обусловленного кинетикой изменения термоупругих характеристик материалов с многостадийными фазовыми превращениями.

**Методы исследования.** В работе использованы:

- метод асимптотического осреднения;
- метод конечных элементов;
- численные конечно-разностные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений;
- метод сложения слоев в слоистых композитных структурах;
- численные методы интегрирования.

**Достоверность и обоснованность научных результатов** обеспечивается применением традиционных физико-математических методов и законов, корректной постановкой задач, сравнением полученных аналитически соотношений и численных расчетов с результатами, полученными другими методами.

**Научная новизна.** В диссертации получены следующие новые научные результаты, выносимые на защиту:

- разработана новая математическая многоуровневая модель для расчета термоупругих характеристик тканевых композиционных материалов с многостадийными фазовыми превращениями в

матрице и волокнах, развивающихся в них при высоких температурах, и построены определяющие соотношения для ортотропных композитов на основе этой модели;

- разработан модифицированный вариант асимптотической теории расчета тонких упругих пластин для случая высокотемпературных композитов с многостадийными фазовыми превращениями, учитывающей конечные значения сдвиговых характеристик композита.

**Практическая значимость** диссертационной работы состоит в том, что разработанные математические модели и полученные результаты могут быть применены, в частности, при исследовании НДС оболочечных конструкций из композиционных материалов с высокотемпературными фазовыми превращениями в аэрокосмической технике, металлургии, электротехнике, а также в других отраслях промышленности

**Апробация работы.** Основные результаты диссертационной работы неоднократно докладывались на научных конференциях, в том числе на:

- научной конференции «Фундаментальные и прикладные задачи механики», посвященной 135-летию кафедры теоретической механики им. профессора Н.Е. Жуковского, февраль 2013;

- международной научной конференции "Физико-математические проблемы создания новой техники (PhysMathTech - 2014), посвященной 50-летию Научно-учебного комплекса «Фундаментальные науки» МГТУ им. Н.Э. Баумана, ноябрь 2014 года;

- III международной научно-технической конференции «Аэрокосмические технологии», посвященной 100-летию со дня рождения академика В.Н. Челомея, май 2014;

- международном научном форуме «Ключевые тренды в композитах: наука и технологии», 5-8 декабря, 2018 г, МГТУ им. Н.Э. Баумана;

- II международном научном форуме «Ключевые тренды в композитах: наука и технологии», 20-21 декабря, 2019 г, МГТУ им. Н.Э. Баумана;

- международной конференции «Фундаментальные и прикладные проблемы механики» (FAPM-2019), 10-12 декабря, 2019 г,

МГТУ им. Н.Э. Баумана;

- научном семинаре «Актуальные проблемы вычислительной математики и механики» кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (2013-2019 гг).

**Публикации.** Основные положения и научные результаты диссертации отражены в 10 научных работах, в том числе в 5 статьях в журналах, включенных в перечень ВАК РФ.

**Личный вклад соискателя** заключается:

– в непосредственном участии в разработке математической многоуровневой модели для расчета термоупругих характеристик тканевых композиционных материалов с многостадийными фазовыми превращениями и построении определяющих соотношений для данного класса материалов, написании статей и подготовке тезисов докладов;

– в непосредственном участии в разработке модифицированного варианта асимптотической теории термоупругости для пластин с фазовыми превращениями, учитывающей сдвиговых характеристик композита, в подготовке выступлений с докладами;

– в верификации разработанных моделей, путем проведения вычислительных экспериментов и сравнения с результатами, полученными прямым конечно-элементным решением.

**Структура и объем работы.** Диссертация состоит из введения, 3 глав, выводов и заключения и списка литературы. Работа изложена на 118 страницах, содержит 40 иллюстраций и 1 таблицу. Библиография включает 70 наименования.

## СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обоснована актуальность темы, отражены цель и задачи исследования, научная новизна, теоретическая и практическая значимость полученных результатов, их достоверность, перечислены основные положения, выносимые на защиту, представлен обзор литературы по теме работы, описана структура диссертационной работы.

**Первая глава** посвящена моделированию свойств композиционных материалов с многостадийными фазовыми превращения-

ми (ФП). Рассматривается класс тканевых композиционных материалов (ТКМ) с ФП, на рис. 1 приведена многоуровневая модель материала данного класса, состоящая из 4-х структурных уровней.

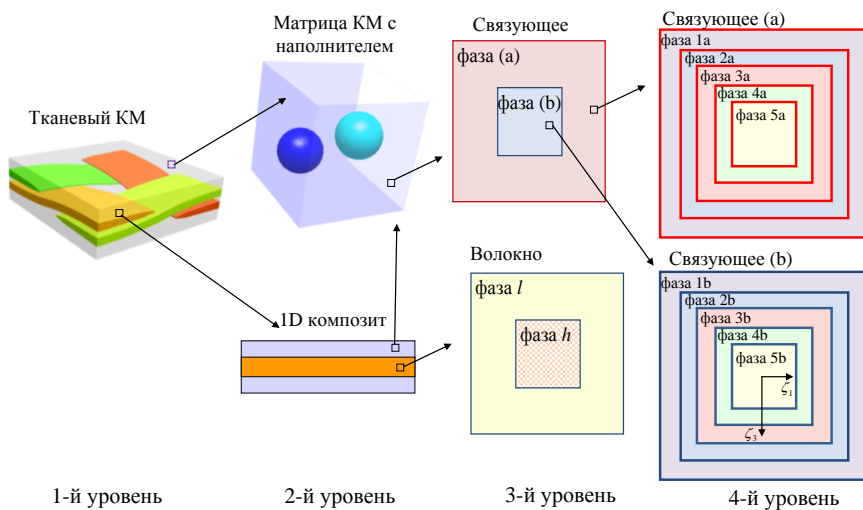


Рис. 1 – Многоуровневая модель тканевого композиционного материала с многостадийными фазовыми превращениями

Каждый структурный уровень состоит из большого числа соответствующих ячеек периодичности (ЯП).

Нити ткани таких композитов состоят из большого числа моноволокон, соединенных матрицей, поэтому выделяем ЯП 2-го структурного уровня, состоящую из одного моноволокна, окруженного матрицей (1D композит). Матрица композиционного материала, также может состоять из нескольких компонент, например, из связующего и погруженных в него дисперсных частиц различной формы, их будем называть наполнителем (рис. 1, 2-й структурный уровень).

При высоких температурах в волокнах происходят ФП и помимо исходной твёрдой фазы, которую будем называть “аморфной”, появляется новая твёрдая фаза – “кристаллическая”. Кавычки означают, что физическая природа фаз может быть отлична от аморфной и кристаллической, и эти термины используются как названия исходного состояния и нового состояния, в которое во-



локна переходят при нагреве. Матрица 2-го уровня при высоких температурах представляет собой также многофазную среду, поэтому выделен 3-й структурный уровень, на котором ЯП состоит из 2-х фаз под условными обозначениями (а) и (б), поскольку мы положили, что ФП в материале идут по двум отдельным цепочкам. Каждую из фаз (а) и (б), в свою очередь, представим в виде 5-фазной системы. В процессе нагрева до высоких температур происходит перераспределение соотношения между этими фазами.

Для описания изменения фазового состава связующего на 4-м уровне при нагреве, основываясь на законах сохранения масс для фаз, запишем систему уравнений для объёмных концентраций фаз:

$$\begin{aligned} \rho_{1w} \frac{\partial \varphi_{1w}}{\partial t} &= -J_{1w}; \quad \rho_{2w} \frac{\partial \varphi_{2w}}{\partial t} = J_{1w}(1 - \Gamma_{1w}) - J_{2w}; \quad \rho_{3w} \frac{\partial \varphi_{3w}}{\partial t} = J_{2w} - J_{3w}; \\ \rho_{4w} \frac{\partial \varphi_{4w}}{\partial t} &= J_{3w}(1 - \Gamma_{4w}); \quad \frac{\partial \rho_{5w} \varphi_{5w}}{\partial t} + \nabla \cdot \varphi_{5w} \rho_{5w} \vec{v}_{5w} = J_{3w} \Gamma_{4w} + J_{1w} \Gamma_{1w}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\rho_{sw}$  – плотности фаз (полагаются постоянными, кроме плотности фаз  $\rho_{5w}$  – считаем их аналогами газовых фаз),  $\varphi_{5w}$  – объёмные концентрации фаз для цепочек (а) и (б) фазовых превращений ( $s = \overline{1,5}$ ).  $\Gamma_{1w}$ ,  $\Gamma_{4w}$  – коэффициенты газификации,  $\vec{v}_{5w}$  – векторы скорости движения газовых фаз,  $J_{iw}$  – массовые скорости ФП, для которых выполняется соотношение Аррениуса:  $J_{iw} = J_{iw}^0 \varphi_{iw} \exp(-E_{Asw}/R\theta)$ ,  $i = 2, 3, 4$ ;  $w = \{a, b\}$ . Здесь  $J_{iw}^0$  – предэкспоненциальный множитель,  $E_{Asw}$  – энергия активации соответствующей фазы,  $\theta$  – температура,  $R$  – газовая постоянная.

Изменение объёмной концентрации “аморфной”  $h$ -фазы волокон описывается уравнением сохранения масс,

$$\rho_h \frac{\partial \varphi_h}{\partial t} = -J_h, \quad (2)$$

где  $\rho_h$  – плотность  $h$ -фазы,  $\varphi_h$  – объёмная концентрация  $h$ -фазы волокна,  $J_h$  – массовая скорость ФП, для которой имеет место соотношение Аррениуса:  $J_h = J_h^0 \varphi_h \exp(-E_{Ah}/R\theta)$ . Здесь  $J_h^0$  – предэкспоненциальный множитель,  $E_{Ah}$  – энергия активации “аморфной” фазы.

Для построения модели изменения упругих свойств связующего для цепочек (а) и (б) на 4-м уровне используется форма ЯП в виде куба, каждая фаза имеет форму пустотелого куба, а газовая фаза – сплошного куба. Для такой ЯП с кубической формой фаз поиск эффективного модуля упругости матрицы осуществляется согласно принципу сложения слоёв.

Аналогичным образом, используя принцип сложения слоев, построены соотношения для эффективных модулей упругости и коэффициентов теплового расширения для ЯП на 3-м уровне.

На 1-м и 2-м уровнях для ЯЧ со стабильной геометрической структурой поиск эффективных характеристик КМ осуществляется методом гомогенизации [1, 2].

После вычисления всех упругих характеристик тканевых КМ с многостадийными ФП, сформулируем 3-х мерные определяющие соотношения для данного класса композитов. Определяющие соотношения будут состоять из 2-х групп уравнений, связывающих компоненты тензоров напряжений и деформаций (обобщенный закон Гука), и вектор теплового потока и градиент температуры (закон Фурье):

$$\sigma_{ij} = A_{ijkl}(\varphi)(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^T), \quad q_i = -\lambda_{ij}(\varphi)(\partial\theta(x_i, \xi)/\partial x_j) \quad (3)$$

где  $\varphi$  – вектор концентраций фаз, выделенных в модели КМ на рис. 1.  $A_{ijkl}(\varphi)$  – компоненты тензора модулей упругости композита, зависящие от концентрации различных фаз матрицы и волокна, и изменяющиеся при нагреве до высоких температур,  $\varepsilon_{kl}^T$  – компоненты тензора тепловой деформации композита, также зависящие от концентрации различных фаз матрицы и волокна, поскольку  $\varepsilon_{kl}^T = \varepsilon_{kl}^T(\alpha_{kl}(\varphi), \theta)$ ,  $\lambda_{ij}(\varphi)$  – компоненты тензора теплопроводности тканевого композита, зависящие от концентрации различных фаз матрицы и волокна.

Для объемных концентраций фаз имеем систему, состоящую из дифференциальных уравнений (1) и (2), которая дополняется начальными условиями  $\varphi_{\gamma w}(0) = \varphi_{\gamma w}^0, \gamma = \overline{1, 5}, \varphi_h(0) = \varphi^0$ , причем:

$\varphi_{1w} + \varphi_{2w} + \varphi_{3w} + \varphi_{4w} + \varphi_{5w} = \varphi_{(w)}$ ,  $\varphi_h + \varphi_l = \varphi_{f2}$ ,  $w = \{a, b\}$ ,  $\varphi_{f2}$  – концентрация волокна в ЯП на 2-м уровне.

**Вторая глава** посвящена разработке теории термоупругости тонких пластин с многостадийными ФП. Пусть тонкая пластина из тканевого композиционного материала с многостадийными высокотемпературными фазовыми превращениями имеет постоянную толщину  $h$  и характерный размер  $L$ , и пусть  $h/L = \chi \ll 1$ . Обозначим глобальные координаты:  $x_k = \hat{x}_k / L$ ,  $k = 1, 2, 3$ , где  $\hat{x}_k$  – обычные прямоугольные декартовы координаты, такие, что ось  $O\hat{x}_3$  сонаправлена с нормалью к верхней и нижней плоскостям пластины, а оси  $O\hat{x}_1$ ,  $O\hat{x}_2$  принадлежат срединной плоскости пластины.

Запишем в безразмерном виде трехмерную задачу линейной теории термоупругости для тонкой пластины с температурно-зависящими свойствами и присоединим систему, описывающую изменение фазового состава (1) и (2):

$$\frac{C(\varphi)}{\chi^2} \frac{\partial \theta(x_i, \xi)}{\partial t} = - \frac{\partial q_i}{\partial x_i}, \quad q_i = -\lambda_{ij}(\varphi) \frac{\partial \theta(x_i, \xi)}{\partial x_j},$$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad \sigma_{ij} = A_{ijkl}(\varphi) (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^T)$$

$$\Sigma_{3\pm} : \sigma_{i3} = -\chi^3 p_{\pm} \delta_{i3},$$

$$q_3 = \pm q_{e\pm},$$

$$\Sigma_T : q_i n_i = 0; \quad u_i = u_{ei} \tag{4}$$

$$\Sigma_S : [\theta] = 0, [q_3] = 0, [u_3] = 0, [\sigma_{i3}] = 0$$

$$\rho_{sw} \frac{\partial \varphi_{sw}}{\partial t} = J_{svw} \varphi_{vw}, \quad w = \{a, b\}, \quad s, v = \overline{1, 4}$$

$$\rho_h \frac{\partial \varphi_h}{\partial t} = J_h, \quad \sum_{\gamma=1}^5 \varphi_{\gamma w} = \varphi_{(w)}, \quad \varphi_h + \varphi_l = \varphi_{f2} \tag{5}$$

$$\varphi_{\gamma w}(0) = \varphi_{\gamma w}^0, \quad \varphi_h(0) = \varphi_{f2}$$

Система (4) включает в себя нестационарное уравнение теплопроводности, закон Фурье, уравнение равновесия, соотношения Коши, определяющие соотношения термоупругости, кинематические уравнения для концентраций фаз, граничные условия на верхней и нижней поверхности  $\Sigma_{\pm}$ , на торцевой поверхности  $\Sigma_T$ , На поверхности раздела  $\Sigma_s$  слоев пластины выполняются условия идеального контакта. Торцы будем считать теплоизолированными. В (7) используются следующие обозначения:  $u_{ei}$  – заданные компоненты вектора перемещений на торцах пластины,  $p_+$  – давление и  $q_{0+}$  – тепловой поток на верхней поверхности пластины,  $p_-$  – давление и  $q_{0-}$  – тепловой поток на нижней поверхности пластины. Обозначив крышечкой сверху размерные величины, введем безразмерные величины:  $t = \hat{t}/t_0$  – время,  $u_j = \hat{u}_j/L$  – компоненты вектора перемещений,  $\rho = \hat{\rho}/\rho_0$  – плотность,  $\sigma_{ij} = \hat{\sigma}_{ij}/\sigma_0$  – компоненты тензора напряжений,  $c = \hat{c}/c_0$  – теплоемкость,  $q_i = \hat{q}_i L/\lambda_0 \theta_0$  – компоненты вектора теплового потока и т.д. В системе (7) также присутствуют:  $\varepsilon_{ij}$  – компоненты тензора малых деформаций,  $\varepsilon_{kl}^T = \alpha_{kl}(\varphi)\Delta\theta$  – компоненты тензора тепловой деформации,  $\Delta\theta = \theta - \theta_0$ , где  $\theta_0$  – исходная температура,  $\alpha_{kl}$  – компоненты тензора теплового расширения.  $C = \rho c / F_0$  – массовая теплоемкость, теплоемкости для каждого слоя многослойной пластины предполагаем различными. Считаем, что нижние прописные латинские индексы принимают значения 1 и 2, а нижние строчные латинские индексы пробегают значения от 1 до 3. Нижним индексом 0 обозначены характерные значения величин. В системе (8) используется матрица, состоящая из правых частей уравнений системы (1).

Для системы (7) принимаются три основных допущения:

- а) Длительность нагрева не слишком велика, полагаем, что число Фурье  $Fo = \lambda_0 t_0 / \rho_0 c_0 L^2$  процесса нагрева имеет один порядок малости с  $\chi^2$ , т.е.  $Fo = \chi^2 Fo_0$ , где  $Fo_0$  число порядка 1:  $Fo_0 = O(1)$ ;
- б) давление на верхней и нижней поверхностях пластины имеет третий порядок малости  $O(\chi^3)$  т.е.  $\sigma_{33} = -\chi^3 p_{\pm}$ ;

в) предполагаем, что на расстояниях порядка  $h$  изменения теплового потока и давления малы.

Для описания изменения свойств пластины по толщине воспользуемся локальной безразмерной координатой, такой что:  $\xi = x_3 / \chi$ . Решение системы (4) будем искать в виде асимптотических разложений по малому параметру  $\chi$ :

$$\begin{aligned} \varphi_\gamma &= \varphi_\gamma^{(0)}(x_I, \xi) + \chi \varphi_\gamma^{(1)}(x_I, \xi) + \chi^2 \varphi_\gamma^{(2)}(x_I, \xi) + \chi^3 \varphi_\gamma^{(3)}(x_I, \xi) + \dots, \gamma = \overline{1, N} \\ \theta &= \theta^{(0)}(x_I, \xi) + \chi \theta^{(1)}(x_I, \xi) + \chi^2 \theta^{(2)}(x_I, \xi) + \chi^3 \theta^{(3)}(x_I, \xi) + \dots \end{aligned} \quad (6)$$

$$u_k = u_k^{(0)}(x_I) + \chi u_k^{(1)}(x_I, \xi) + \chi^2 u_k^{(2)}(x_I, \xi) + \chi^3 u_k^{(3)}(x_I, \xi) + \dots$$

При подстановке разложений (6) в (4) и (5) получим асимптотические разложения для деформаций, напряжений, тепловой деформации, градиентов температуры, теплового потока, компонент тензора модулей упругости, теплового расширения, коэффициента теплоемкости, коэффициента теплопроводности. Таким образом, получим рекуррентную последовательность локальных задач термоупругости для КМ с ФП. Локальная задача в нулевом приближении принимает вид (7)

$$\begin{aligned} \rho_{sw} \frac{\partial \varphi_{sw}^{(0)}}{\partial t} &= J_{sw}^{(0)} \varphi_{vw}^{(0)}, \quad w = \{a, b\}, \quad s, v = \overline{1, 4}, \quad \varphi_{\gamma w}(0) = \varphi_{\gamma w}^0, \quad \varphi_h(0) = \varphi_{f2} \\ \rho_h \frac{\partial \varphi_h^{(0)}}{\partial t} &= J_h^{(0)}, \quad \sum_{\gamma=1}^5 \varphi_{\gamma w}^{(0)} = \varphi_{(w)}, \quad \varphi_h^{(0)} + \varphi_l^{(0)} = \varphi_f \\ \frac{C(\varphi^{(0)}) \partial \theta^{(0)}}{\partial t} + \frac{\partial q_3^{(-1)}}{\partial \xi} &= 0, \quad \lambda_{33} g_3^{(-1)} = -q_3^{(-1)}, \quad g_3^{(-1)} = \frac{\partial \theta^{(0)}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \sigma_{i3}^{(0)}}{\partial \xi} &= 0, \quad \sigma_{i3}^{(0)} = A_{i3KL}(\varphi^{(0)}) \varepsilon_{KL}^{(0)} + A_{i3k3}(\varphi^{(0)}) \varepsilon_{k3}^{(0)}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\varepsilon_{ij}^{(0)} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(0)}}{\partial x_i} \right), \quad \varepsilon_{I3}^{(0)} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3^{(0)}}{\partial x_I} + \frac{\partial u_I^{(1)}}{\partial \xi} \right), \quad \varepsilon_{33}^{(0)} = \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial \xi},$$

$$\Sigma_{3\pm} : q_3^{(-1)} = \pm q_{e\pm}, \quad \sigma_{i3}^{(0)} = 0; \quad \int_{-0.5}^{0.5} u_i^{(1)} d\xi = 0$$

$$\Sigma_5 : [q_i^{(-1)}] = 0, \quad [\theta^{(0)}] = 0, \quad [\sigma_{i3}^{(0)}] = 0, \quad [u_i^{(1)}] = 0;$$

Обозначая усилия, перерезывающие силы и моменты для пласти-

ны:  $N_{ij} = \int_{-0.5}^{0.5} \sigma_{ij}^{(0)} d\xi + \chi \int_{-0.5}^{0.5} \sigma_{ij}^{(1)} d\xi + \dots$ ,  $Q_I = \chi \int_{-0.5}^{0.5} \sigma_{I3}^{(1)} d\xi + \chi^2 \int_{-0.5}^{0.5} \sigma_{I3}^{(2)} d\xi + \dots$

$M_{ij} = \chi \int_{-0.5}^{0.5} \xi \sigma_{ij}^{(0)} d\xi + \chi^2 \int_{-0.5}^{0.5} \xi \sigma_{ij}^{(1)} d\xi + \dots$ , запишем уравнения равновесия:

$$\frac{\partial N_{II}}{\partial x_j} = 0, \quad \frac{\partial Q_j}{\partial x_j} = \Delta \bar{p}, \quad \frac{\partial M_{II}}{\partial x_j} - Q_j = 0, \quad \text{где } \Delta \bar{p} = \chi^2 \Delta p \quad (8)$$

Асимптотические разложения общих трехмерных уравнений теории упругости в рамках учета членов только первого порядка малости приводят к выводу о том, что продольные перемещения для пластин из ТКМ с ФП линейно зависят от толщинной координаты. Для повышения точности теории дополнительно рассматриваются 2-е приближение продольного перемещения и 3-е приближение для поперечного перемещения. В результате получаем осредненные уравнения равновесия пластин (8) типа Тимошенко.

**Третья глава** посвящена расчету пластины из КМ с многостадийными ФП при неравномерном нагреве и изгибе, а также сравнительным расчетам для задачи о прогибе при воздействии постоянного давления, но без воздействия температурного поля.

Тестовые расчеты приведены для задачи о прогибе 3-х слойной ортотропной пластины равномерным давлением в сравнении с трехмерным решением, полученным с помощью программного комплекса конечно-элементного анализа ANSYS. Также, к сравнению добавлено решение, полученное с использованием асимптотической теории пластин 1-го порядка точности по перемещениям. Концы пластины жестко защемлены.

На рисунке 2 приведено изменение прогиба по длине пластины в безразмерном виде.

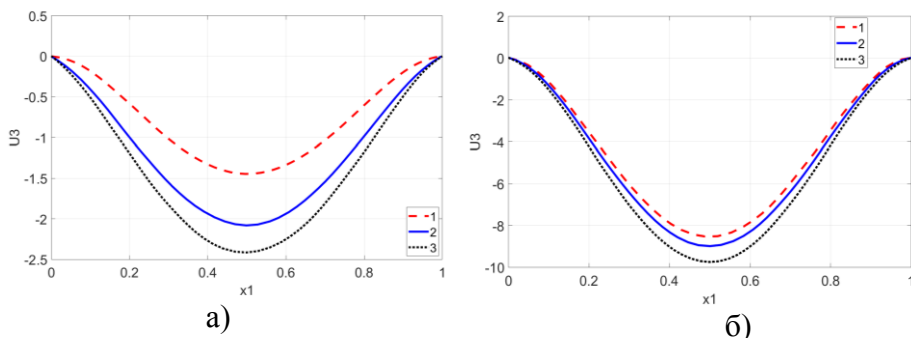


Рис. 2 – Распределение прогиба для пластины толщиной 21 мм  
а)  $\chi = 0,07$ , б)  $\chi = 0,025$ , где 1 – решение по АТ 1-го порядка,  
2 – решение по АТ 2-го порядка, 3 – трехмерное решение

Табл. 1– Отношение максимального прогиба пластины по АТ 1-го и 2-го порядка к максимальному прогибу трехмерного решения

Параметр пластины	по АТ 1-го порядка, %	по АТ 2-го порядка, %
$\chi = 0,025$	87	92
$\chi = 0,07$	59	86

Построено аналитическое решение задачи о прогибе многослойной пластины из КМ по воздействию равномерно распределенного давления и внешнего равномерного температурного поля.

$$\begin{aligned}
 u_3^{(0)} &= \frac{f(\xi)\bar{A}_{1111}}{24B_{1111}}x_1^4 + \frac{\bar{A}_{1111}}{6B_{1111}}C_1x_1^3 + \frac{1}{2}\left(g(\xi) + \frac{\bar{A}_{1111}}{B_{1111}}C_2\right)x_1^2, \\
 u_1^{(0)} &= \frac{f(\xi)}{6}x_1^3 + \frac{C_1}{2}x_1^2 + C_2x_1, \beta_1 = -\frac{\bar{A}_{1111}}{B_{1111}}\left(\frac{f(\xi)}{6}x_1^3 + \frac{C_1}{2}x_1^2 + C_2x_1\right) + \frac{N_{11}^T}{B_{1111}}x_1, \\
 C_2 &= -\frac{f(\xi)}{8} - \frac{3g(\xi)B_{1111}}{2\bar{A}_{1111}} - \frac{h(\xi)}{2}, \quad C_1 = h - C_2, \quad \text{где } f(\xi) = \frac{\Delta p B_{1111}}{B_{1111}^2 - \bar{D}_{1111}\bar{A}_{1111}}, \\
 h(\xi) &= \frac{B_{1111}M_{11}^T - \bar{D}_{1111}N_{11}^T}{B_{1111}^2 - \bar{D}_{1111}\bar{A}_{1111}} - \frac{f(\xi)}{2}, \quad g(\xi) = \frac{2\Delta\bar{p}}{G_{11}} - \frac{2R_{1111}}{G_{11}} \cdot \frac{\Delta\bar{p}B_{1111}}{(B_{1111})^2 - \bar{D}_{1111}\bar{A}_{1111}} - \frac{N_{11}^T}{B_{1111}}
 \end{aligned} \tag{9}$$

На рис. 3 – 10 приведены результаты численного моделирования для задачи о прогибе пластины при воздействии на верхней поверхности ( $\xi = 0,5$ ) равномерно распределенного давления  $p_+ = 0.1$  МПа и равномерного температурного поля. Концы пластины свободно оперты, нижняя поверхность ( $\xi = -0,5$ ) теплоизолирована, толщина пластины 0,025 м, длина 1 м. На рис. 3 приведено изменение температуры от времени на различных расстояниях от поверхности нагрева. На рис. 4 приведено изменение температуры по толщине в относительные моменты времени  $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$ .

На рис. 5 приведено изменение концентраций фаз связующего и волокна по толщине в момент времени  $t_3$  для сечения  $x_l = 0,75$ .

На рис. 6 приведены распределения модуля упругости матрицы и волокна по толщине пластины в моменты времени  $t_1 < t_2 < t_3$  (значение модуля отнесено к характерному значению). На рис. 7 приведено распределение компонент тензора модулей упругости ТКМ в момент времени  $t_2$ .

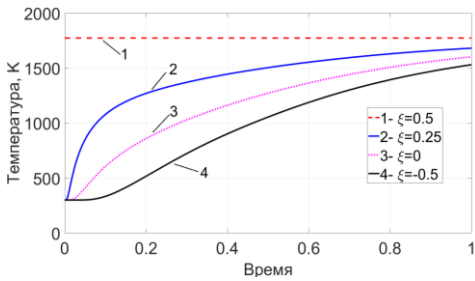


Рис. 3 – Изменение температуры от времени прогрева при  $\xi = 0,5$ ,  $\xi = 0,25$ ,  $\xi = 0$ ,  $\xi = -0,5$

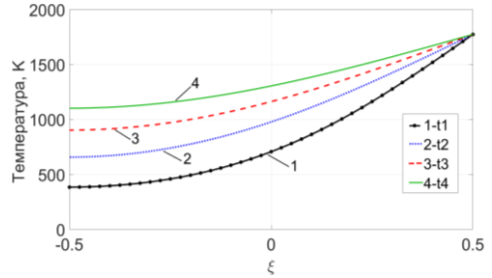
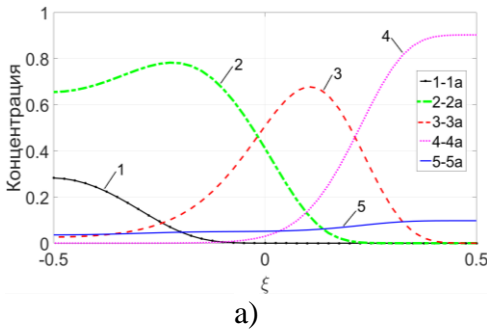
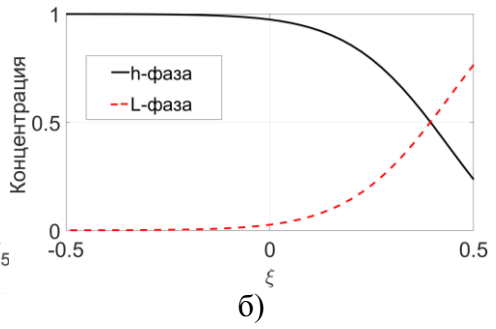


Рис. 4 – Изменение температуры по толщине в моменты времени  $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$



а)



б)

Рис. 5 – Изменение концентраций фаз по толщине в момент времени  $t_3$  а) – связующее, б) – волокно

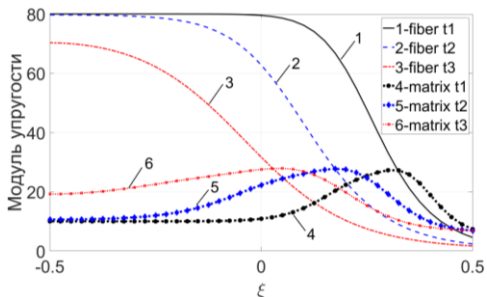


Рис. 6 – Изменение безразмерного модуля упругости матрицы и волокна в три различных момента времени

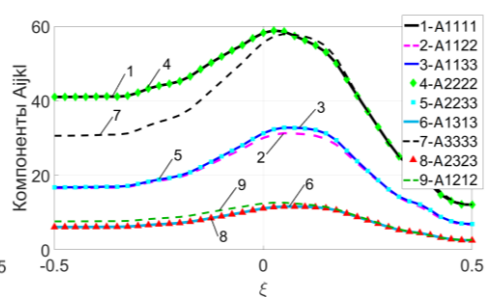


Рис. 7 – Изменение безразмерных компонент тензора модулей упругости  $A_{ijkl}$  ТКМ в момент времени  $t_2$



В момент времени  $t_1$  в точке  $\xi = 0,3$  модуль упругости связующего значительно выше, чем на верхней поверхности пластины, это показывает, что существует соотношение фаз связующего в некотором диапазоне температур, при котором упругие свойства будут больше, чем при максимальном и минимальном значении температуры. Это является особенностью предложенной модели ФП связующего, для которой характерен рост упругих свойств связующего в диапазоне температур 800-1100 К.

На рис. 8 и 9 приведено распределение напряжений  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{33}$  и  $\sigma_{13}$  по толщине пластины в моменты времени  $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$ . На рис. 10 приведено изменение прогиба по длине пластины при  $t_1, t_2, t_3, t_4$ .

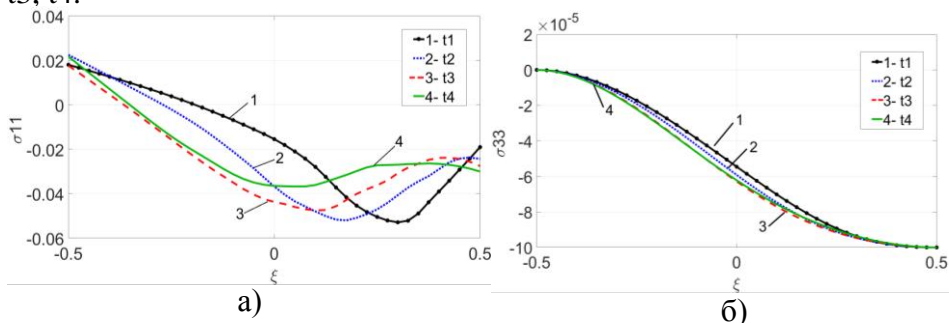


Рис. 8 – Распределение напряжений по толщине в сечении  $x_I=0,75$  в 4 различных момента времени а) –  $\sigma_{11}$ , б) –  $\sigma_{33}$

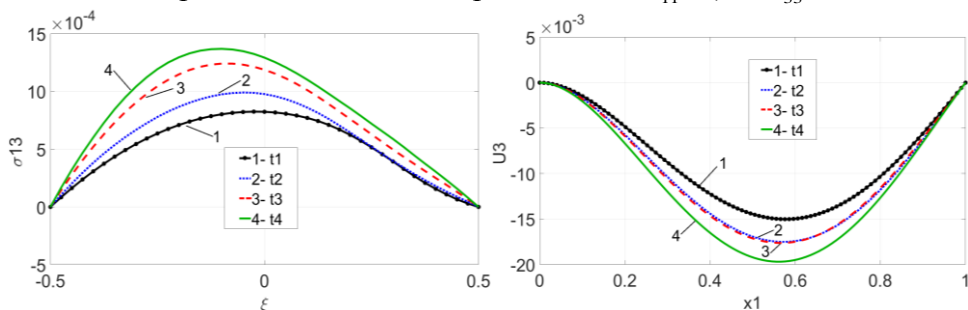


Рис. 9 – Распределение напряжения  $\sigma_{13}$  по толщине в сечении  $x_I=0,75$  в 4 различных момента времени

Рис. 10 – Изменение прогиба по длине пластины в 4 различных момента времени

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

1. Разработана математическая многоуровневая модель для расчета термоупругих характеристик тканевых композиционных материалов с многостадийными фазовыми превращениями в матрице и волокнах при высоких температурах, а также построены определяющие соотношения для данного класса материалов.

2. Разработан модифицированный вариант асимптотической теории расчета тонких упругих многослойных пластин из высокотемпературных композитов с многостадийными фазовыми превращениями, учитывающий конечные значения сдвиговых характеристик композитов.

3. Тестовые расчеты напряженно-деформированного состояния многослойных тонких пластин по модифицированной теории с учетом асимптотических разложений для перемещений 2-го приближения показали, что модифицированная асимптотическая теория обеспечивает более высокую точность расчетов перемещений для относительно коротких пластин, по сравнению с классической асимптотической теорией, использующих только 1-е приближение для перемещений.

4. Проведенные расчеты напряженно-деформированного состояния тонкой пластины из композита с многостадийными фазовыми превращениями позволили установить эффект влияния фазовых превращений на кинетику изменения напряженно-деформированного состояния пластины для различных моментов времени, в частности появление внутренних зон упрочнения материала после предварительного нагрева до начала промежуточных стадий фазовых превращений, и, как следствие повышения в этих зонах уровня изгибных напряжений.

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ ОТРАЖЕНЫ В РАБОТАХ

1. Димитриенко Ю.И., Сборщиков С.В., Еголева Е.С., Матвеева А.А. моделирование термоупругих характеристик композитов на основе алюмо-хромофосфатных связующих // *Наука и образование: научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана*. 2013. № 11. с. 497-518.

2. Димитриенко Ю.И., Сборщиков С.В., Губарева Е.А., Еголева Е.С., Мальцева А.А. Многомасштабное моделирование высоко-температурных упруго-прочностных свойств композиционных материалов на неорганической матрице // *Математическое моделирование*. 2015. Т. 27. № 11. с. 3-20.

3. Димитриенко Ю.И., Сборщиков С.В., Еголева Е.С. Моделирование термо-механических и теплофизических характеристик деструктирующих теплозащитных композитов на основе конечно-элементного микроструктурного анализа // *Тепловые процессы в технике*, 2016, № 12, с. 564-573. [http://www.nait.ru/journals/number.php?p\\_number\\_id=2544](http://www.nait.ru/journals/number.php?p_number_id=2544).

4. Димитриенко Ю.И., Юрин Ю.В., Еголева Е.С. Численное решение обратных трехмерных задач восстановления нагрузок, действующих на композитные элементы конструкций// *Математическое моделирование и численные методы*, 2017, No 4, с. 48–59.

5. Yu I Dimitrienko, S V Sborschikov, E S Egoleva, D O Yakovlev Modeling of thermal stresses in inorganic matrix composite plates based on the asymptotic theory // *Journal of Physics. Conference Series: Material Science and Engeneering*, 2019. volume 683 № 012010 doi:10.1088/1757-899X/683/1/012010 pp.1-6.

6. Димитриенко Ю.И., Сборщиков С.В., Еголева Е.С., Матвеева А.А. Моделирование упруго-прочностных характеристик композитов на основе алюмо-хромофосфатных связующих при высоких температурах // Тезисы докл. Международной научной конференция "Физико-математические проблемы создания новой техники (PhysMathTech - 2014), посвященной 50-летию Научно-учебного

комплекса «Фундаментальные науки» МГТУ им. Н.Э. Баумана 17-19 ноября 2014 года, с.23-24.

7. Димитриенко Ю.И., Сборщиков С.В., Еголева Е.С., Матвеева А.А. Конечно-элементное моделирование микронапряжений и высокотемпературной прочности композитов на основе алюмохромофосфатных связующих // Тезисы докл. научной конференции «Фундаментальные и прикладные задачи механики», посвященной 135-летию кафедры теоретической механики им. профессора Н.Е. Жуковского, 2013 г, с 55.

8. Димитриенко Ю.И., Сборщиков С.В., Еголева Е.С., Яковлев Д.О. Моделирование термонапряжений в композитных пластинах на неорганической матрице // Ключевые тренды в композитах: наука и технологии: сборник материалов международной научно-практической конференции. Москва, 5-8 декабря 2018, с. 211-220.

9. Свид. 2013615353 Российская Федерация. Свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ. Программа gcdfes\_MHSSstrength для численного моделирования эффективных пределов прочности композиционных материалов / Димитриенко Ю.И., Соколов А.П., Сборщиков С.В., Еголева Е.С.; заявитель и правообладатель: МГТУ им. Н.Э. Баумана (RU). – №2013615353; заявл. 28.02.13; опубл. 05.06.13, Реестр программ для ЭВМ. – 1 с.

10. Свид. 2013615352 Российская Федерация. Свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ. Программа gcdfes\_MHSSurface для численного моделирования поверхности первоначальной пластичности композиционных материалов на основе конечно-элементных расчетов микронапряжений в ячейках периодичности / Димитриенко Ю.И., Соколов А.П., Юрин Ю.В., Еголева Е.С., Матвеева А.А.; заявитель и правообладатель: МГТУ им. Н.Э. Баумана (RU). – №2013615352; заявл. 28.02.13; опубл. 05.06.13, Реестр программ для ЭВМ. – 1 с.