УДК: 530.12

Поля мультиполей

Р. И. Храпко

Показано, что полиномы Тейлора и мультиполи образуют взаимно обратные системы функций. Этим устанавливается связь между разложением Тейлора и мультипольным разложением. В качестве примера рассмотрены поля квадруполя.

1. Преобразование Тейлора и мультипольное преобразование

Известная сингулярная дельта-функция Дирака [1] при строгом определении оказывается двухточечной конструкцией, являющейся обобщенной скалярной плотностью веса + 1 в точке x первого аргумента и обобщенной скалярной функцией в точке ξ второго аргумента [2]

$$\delta_{\wedge *}(x,\xi).$$

Мы обозначаем плотности веса ± 1 нижним/верхним индексом $\wedge$, звездочка на уровне индексов разделяет индексы, относящиеся к первому и второму аргументу двухточечной функции. Поэтому в данном случае индекс $\wedge$ расположен слева от звездочки, а справа от нее ничего нет.

Дельта-фунцкия определяется интегрированием по всему пространству по первому или по второму аргументу:

$$\int f(x)\cdot\delta_{\wedge *}(x,\xi)d\Omega^{\wedge}(x)=f(\xi), \tag{1}$$

$$\int \rho_{\wedge}(\xi)\cdot\delta_{\wedge *}(x,\xi)d\Omega^{\wedge}(\xi)=\rho_{\wedge}(x). \tag{2}$$

Здесь $d\Omega^{\wedge}$ – элемент объема пространства интегрирования переменной x или ξ. Этот элемент является скалярной плотностью веса -1. В формуле (1) интегрирование производится x, и используется произвольная функия $f(x)$, в формуле (2) интегрирование производится по ξ, и используется произвольная плотность $\rho_{\wedge}(\xi)$ веса + 1.

Дифференцируя формулу (1) в точке ξ, мы определим теперь производные дельта-функции по второму аргументу в этой точке или *мультиполи порядка n*, сосредоточенные в точке ξ, $\delta_{\wedge *,i_1,\dots,i_n}(x,\xi)$, интегрированием по первому аргументу [3]:

$$\int f(x)\cdot\delta_{\wedge *,i_1,\dots,i_n}(x,\xi)d\Omega^{\wedge}(x)=f_{,i_1,\dots,i_n}(\xi), \tag{3}$$

Будем называть такое преобразование функции $f(x)$ в набор ее производных в некоторой точке ξ, $f_{,i_1,\dots,i_n}(\xi)$, преобразованием Тейлора.

Введем полиномы Тейлора, то есть произведения разностей координат пары точек, $(x-\xi)^i$:

$$(x-\xi)^{i_1}\cdot\ldots\cdot(x-\xi)^{i_n} \tag{4}$$

Используя эти полиномы в качестве функции $f(x)$ в формуле (3), легко найдем, что полиномы Тейлора и мультиполи представляют собой *взаимно обратные системы функций* при произвольном выборе точки ξ [3]:

$$\int(x-\xi)^{j_1}\cdot\ldots\cdot(x-\xi)^{j_m}\cdot\delta_{\wedge *,i_1,\dots,i_n}(x,\xi)d\Omega^{\wedge}(x)/n!=\delta^{j_1,\dots,j_m}_{i_1,\dots,i_n}. \tag{5}$$

Здесь $\delta^{j_1,\dots,j_m}_{i_1,\dots,i_n}$ – символ Кронекера, который равен единице при совпадении значений верхних и нижних индексов попарно и равен нулю в противном случае.

Согласно (5), полиномы Тейлора и мультиполи взаимно обратны при интегрировании по x, однако это означает, что они взаимно обратны и при суммировании по индексам с использованием произвольной точки a:

$$\sum_n \delta_{\wedge *,j_1,\dots,j_n}(x,a)\cdot(\xi-a)^{j_1}\cdot\ldots\cdot(\xi-a)^{j_n}/n!=\delta_{\wedge *}(x,\xi). \tag{6}$$

В формуле (6) подрузамевается суммирование по всем повторяюшимся индексам j и, кроме того, явно указывается суммирование по всем значениям индекса n. Для получения формулы (6) можно умножить обе части (5) на мультиполи и просуммировать:

$$\int\sum_m \delta_{\wedge*,j_1,\ldots,j_m}(z,\xi)\cdot(x-\xi)^{j_1}\cdot\ldots\cdot(x-\xi)^{j_m}\cdot\delta_{\wedge*,i_1,\ldots,i_n}(x,\xi)d\Omega^\wedge(x)/n! = \sum_m \delta_{\wedge*,j_1,\ldots,j_m}(z,\xi)\cdot\delta^{j_1,\ldots,j_m}_{i_1,\ldots,i_n}.$$

Выполнив суммирование в правой части, заменив $z\to x,\ x\to\xi,\ \xi\to a$ и переставив сомножители, получим

$$\int\delta_{\wedge*,i_1,\ldots,i_n}(\xi,a)\sum_m\delta_{\wedge*,j_1,\ldots,j_m}(x,a)\cdot(\xi-a)^{j_1}\ldots\cdot(\xi-a)^{j_m}\,d\Omega^\wedge(\xi)/n! = \delta_{\wedge*,i_1,\ldots,i_n}(x,a).$$

Сравнивая последнее равенство и определение дельта-функции через плотность (2), приходим к выражению (6), что и требовалось.

Подставим выражение (6) в (1),

$$\int f(x)\cdot\sum_n\delta_{\wedge*,j_1,\ldots,j_n}(x,a)\cdot(\xi-a)^{j_1}\cdot\ldots\cdot(\xi-a)^{j_n}\ d\Omega^\wedge(x)/n! = f(\xi),$$

выполним интегрирование с учетом определения (3) и потом заменим $\xi\to x$. Получим *разложение Тейлора функции* $f(x)$ в точке *a* или *разложение по полиномам Тейлора*:

$$f(x)=\sum_n f_{,j_1,\ldots,j_n}(a)\cdot(x-a)^{j_1}\cdot\ldots\cdot(x-a)^{j_n}\ /n!. \tag{7}$$

Подставим выражение (6) в (2)

$$\int\rho_\wedge(\xi)\cdot\sum_j\delta_{\wedge*,j_1,\ldots,j_n}(x,a)\cdot(\xi-a)^{j_1}\cdot\ldots\cdot(\xi-a)^{j_n}\,d\Omega^\wedge(\xi)/n! = \rho_\wedge(x).$$

Выполняя интегрирование, введем *мультипольные моменты плотности* относительно точки *a*:

$$\int\rho_\wedge(\xi)\cdot(\xi-a)^{j_1}\cdot\ldots\cdot(\xi-a)^{j_n}\,d\Omega^\wedge(\xi)=\rho^{j_1,\ldots,j_n}(a). \tag{8}$$

В результате получим *мультипольное разложение плотности* в точке *a* или *разложение по мультиполям*:

$$\rho_\wedge(x)=\sum_n\rho^{j_1,\ldots,j_n}(a)\cdot\delta_{\wedge*,j_1,\ldots,j_n}(x,a)/n!. \tag{9}$$

2. Скалярные мультипольные поля

Плотность электрических зарядов $\rho_\wedge(\xi)$ создает потенциальное поле

$$\varphi(x)=\int\frac{\rho_\wedge(\xi)dV^\wedge(\xi)}{r(x,\xi)}. \tag{10}$$

Здесь $r(x,\xi)$ – модуль вектора, проведенного из точки ξ в точку *x*. Подстановка мультипольного разложения плотности зарядов (9) в точке 0 в формулу (10) дает разложение этого потенциального поля по тензорным мультипольным полям в точке 0:

$$\varphi(x)=\sum_n\rho^{j_1,\ldots,j_n}(0)\cdot\int\frac{\delta_{\wedge*,j_1,\ldots,j_n}(\xi,0)\,dV^\wedge(\xi)}{|\mathbf{r}(x,0)-\mathbf{r}(\xi,0)|\,n!}=\sum_n\rho^{j_1,\ldots,j_n}(0)\cdot\left[\frac{\partial^n}{\partial\xi^{j_n}\ldots\partial\xi^{j_1}}\frac{1}{r(x,\xi)n!}\right]_{\xi=0}.$$

Дифференцирование по ξ здесь можно заменить производными по *x*, добавив множитель $(-1)^n$. В результате мы получаем

$$\varphi(x)=\sum_n\rho^{j_1,\ldots,j_n}(0)\,\partial_{j_n\ldots j_1}\frac{(-1)^n}{r(x,0)n!}=\sum_n\rho^{j_1,\ldots,j_n}\cdot\mu_{j_1\ldots j_n}(x).. \tag{11}$$

Будем говорить, что мультиполь $\delta_{\wedge*,j_1,\ldots,j_n}(x,0)$ порождает тензорное мультипольное поле,

$$\mu_{j_1\ldots j_n}(x)=\partial_{j_n\ldots j_1}\frac{(-1)^n}{r(x,0)n!}, \tag{12}$$

которое, в зависимости от мультипольного момента заряда $\rho^{j_1,\ldots,j_n}$, создает скалярное потенциальное поле этого мультиполя

$$\varphi^{(n)}(x)=\rho^{j_1,\ldots,j_n}\cdot\mu_{j_1\ldots j_n}(x). \tag{13}$$

Отметим, что мультипольное разложение (11) потенциального поля (10) может быть получено не только при подстановке мультипольного разложения плотности зарядов (9) в точке 0 в формулу (10), но и при подстановке в эту формулу разложения Тейлора (7) функции $1/r(x,\xi)$ в точке $\xi=0$, рассматриваемой в качестве функции от ξ,

$$\frac{1}{r(x,\xi)}=\sum_n\left[\frac{\partial^n}{\partial\xi^{j_n}\dots\partial\xi^{j_1}}\frac{1}{r(x,\xi)}\right]_{\xi=0}\cdot(\xi-0)^{j_1}\cdot\ldots\cdot(\xi-0)^{j_n}/n!.$$

Приведем тензорные мультипольные поля (12) первых *порядков*:

$$\mu=\frac{1}{r},\quad \mu_i=\frac{x_i}{r^3},\quad \mu_{ij}=\frac{3x_ix_j}{2r^5}-\frac{\delta_{ij}}{2r^3},\quad \mu_{ijk}=.\frac{5x_ix_jx_k}{2r^7}-\frac{3\delta_{(ij}x_{k)}}{2r^5}$$

Важно, что мультипольные моменты $\rho^{j_1,\dots,j_n}(0)$ определены как тензоры в точке 0 и тензорные мультипольные поля $\mu_{j_1\dots j_n}(x)$ определены как тензоры в произвольной точке *x* лишь в декартовых координатах. Другими словами, тензорность проявляется лишь при вращении декартовой координатной системы. Чтобы обеспечить использование криволинейных координат, формулы преобразования которых зависят от точки в пространстве, частные производные следует заменить ковариантными производными, а простые разности координат пары точек $(\xi-0)^j$ следует заменить векторами пути [2], предполагающими использование двухточечных трансляторов.

Отметим, что свертка мультипольных полей по любой паре индексов равна нулю, поскольку $1/r-$ гармоническая функция. Например, $\delta^{ij}\mu_{ijk}=0.$ Поэтому скалярное потенциальное поле (13) не изменится, если мультипольный момент $\rho^{j_1,\dots,j_n}$ изменить на δ^{ij} - образную конструкцию. Используя это, можно добиться, чтобы момент обращался в ноль при сворачивании по любой паре индексов. Такие моменты называются 2*n*-польными моментами и обозначаются $d^{j_1\dots j_n}$.
Например, квадрупольный момент определяется формулой

$$d^{ij}=\rho^{ij}-\delta^{ij}\rho^{kl}\delta_{kl}/3,\quad d^{ij}\delta_{ij}=0.$$

Если при вычислении скалярного поля (13) используются 2*n*-польные моменты, можно сократить выражение для тензорного мультипольного поля, отбросив δ - образные конструкции. Например,

$$\varphi^{(2)}=\rho^{ij}\mu_{ij}=d^{ij}\mu_{ij}=d^{ij}\frac{3x_ix_j}{2r^5}.$$

3. Явное выражение для скалярного поля квадруполя

Как было отмечено, нельзя использовать сферические координаты мультипольных моментов и тензорных полей. Однако на практике декартовы координаты тензорных полей выражаются через сферические координаты как скалярные функции. Рассмотрим в качестве примера скалярное поле момента второго порядка

$$\varphi^{(2)}=\rho^{ij}\mu_{ij}=\rho^{ij}\left(\frac{3x_ix_j}{2r^5}-\frac{\delta_{ij}}{2r^3}\right)=$$

$$=\frac{1}{2r^3}\left[\rho^{zz}\left(\frac{3z^2}{r^2}-1\right)+\rho^{xx}\left(\frac{3x^2}{r^2}-1\right)+\rho^{yy}\left(\frac{3y^2}{r^2}-1\right)\right]+\frac{1}{r^3}\left[\rho^{zx}\frac{3zx}{r^2}+\rho^{zy}\frac{3zy}{r^2}+\rho^{yx}\frac{3yx}{r^2}\right].$$

Подставим теперь значения декартовых координат через сферические координаты

$$x=r\sin\theta\cos\varphi,\quad y=r\sin\theta\sin\varphi,\quad z=r\cos\theta.$$

$$\varphi^{(2)}=\frac{1}{2r^3}\left[\rho^{zz}\left(3\cos^2\theta-1\right)+\rho^{xx}\left(3\cos^2\theta\sin^2\varphi-1\right)+\rho^{yy}\left(3\cos^2\sin^2-1\right)\right]+$$

$$+\frac{3}{r^3}\left[\rho^{zx}\cos\theta\sin\theta\cos\varphi+\rho^{zy}\cos\theta\sin\theta\sin\varphi+\rho^{yx}\sin^2\theta\cos\varphi\sin\varphi\right].$$

В таком виде скалярное поле квадруполя можно представить как сферическую функцию степени 2 $Y_2(\theta,\varphi)$ [4, 5], то есть как разложение по сферическим гармоникам степени 2, которое в общем виде для степени *n* выглядит

$$Y_n(\theta,\varphi)=\sum_{m=0}^{n}(a_m\cos m\varphi\,P_n^m(\cos\theta)+b_m\sin m\varphi\,P_n^m(\cos\theta)).\qquad(14)$$

Здесь $P_n^m(\cos\theta)-$ полиномы Лежандра (индекс *m* называется *порядком*), в частности,

$$P_2^0(\cos\theta)=P_2(\cos\theta)=\frac{3\cos^2\theta-1}{2},\quad P_2^1(\cos\theta)=\frac{3\sin 2\theta}{2},\quad P_2^2(\cos\theta)=3\sin^2\theta.$$

Возвращаясь к полю квадруполя, получаем

$$\varphi^{(2)} = \frac{1}{r^3}\left[\left(\rho^{zz} - \frac{\rho^{xx}+\rho^{yy}}{2}\right)\frac{3\cos^2\theta - 1}{2} + \right.$$

$$\left. + (\rho^{zx}\cos\varphi + \rho^{zy}\sin\varphi)\frac{3\sin 2\theta}{2} + \left(\frac{\rho^{xx}-\rho^{yy}}{4}\cos 2\varphi + \frac{\rho^{xy}}{2}\sin 2\varphi\right)3\sin^2\theta\right]. \qquad (15)$$

Таким образом, формула (15) содержит коэффициенты разложения (14) по сферическим гармоникам:

$$a_0 = \rho^{zz} - \frac{\rho^{xx}+\rho^{yy}}{2}, \quad a_1 = \rho^{zx}, \quad b_1 = \rho^{zy}, \quad a_2 = \frac{\rho^{xx}-\rho^{yy}}{4}, \quad b_2 = \frac{\rho^{xy}}{2}.$$

Отметим в заключение, что разложение (15) приведено в монографии [4, 5] с ошибкой, которая присутствует как в русском переводе, так и в английском оригинале.

Список литературы

1. Гельфанд М. М. и Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. – М.: ГИФМЛ, 1959.-470 с.
2. Храпко Р. И. Функции пути. //Теоретическая и математическая физика. – 1985, № 3.- с.334-346.
3. Храпко Р. И. Преобразующие системы функций. // Проблемы относительности и гравитации в земных и космических условиях: Отчет о НИР МАИ / ВНТИЦентр; руководитель Р. И. Храпко. – № ГР 02900034242.-М., 1990. – с.6-10.
4. Стрэттон Дж. А. Теория электромагнетизма. – М.: ГИТТЛ, 1948.- 539 с.
5. Stratton J. A. Electromagnetic theory. – N.Y., London, 1941.- 615 p.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Храпко Радий Игоревич, доцент кафедры физики Московского авиационного института (Государственного технического университета), к.ф.-м.н. E-mail: *khrapko_ri@hotmail.com*

121433, Москва, Б. Филевская, 43 – 92, т. 1446312