

МОДЕРНИЗАЦИЯ МЕТОДА ИДЕАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Терентьев В.Б.* , Терентьева А.В.**

*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),
МАИ, Волоколамское шоссе, 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993, Россия*

** e-mail: tvb-21@yandex.ru*

*** e-mail: tav-21@mail.ru*

Предложен модернизированный вариант метода TOPSIS для оценки эффективности объектов исследования. Представлена функция, определяющая степень достижения реализуемым значением показателя заданного критерия. Расширена область применения метода идеальной точки для случая заданных значений критериев, как позитивного, так и негативного типа, находящихся внутри или вне диапазона варьирования показателей.

Ключевые слова: эффективность объекта, процедура ранжирования, плотность вероятности, критерии, функция достижимости.

Социально-экономические, технические системы описываются большим количеством разнообразных показателей, характеризующих их текущее состояние и динамику [1]. Единицы измерения частных показателей обычно различны, направления воздействия их на оцениваемые объекты могут не совпадать. Количественные значения показателей либо являются статистическими данными, либо их оценивают специалисты-эксперты.

В этой связи при оценке эффективности объекта исследования, используя методы многокритериального принятия решений (Multi Criteria Decision Making, далее — MCDM), необходимо рассматриваемые показатели свернуть в одну обобщенную величину. Подход MCDM является классическим средством для сравнения альтернатив в многокритериальной среде [2].

Многокритериальные задачи характерны для различных сфер исследовательской деятельности. Например, они возникают при обосновании тактико-технического задания на создаваемые образцы авиационной техники (АТ), когда необходимо выбрать приоритетный авиационный комплекс из ряда рассматриваемых [3], а также при оценке результатов коммерческо-хозяйственной деятельности предприятия, когда используется множество критериев, характеризующих различные аспекты этой деятельности [4].

В современной методологии математического моделирования для решения поставленной задачи можно использовать различные методы многокри-

териального выбора (MCDM). При сравнении и ранжировании объектов предпочтительнее применять два метода: метод простого суммарного взвешивания SAW (Simple Additive Weighting Method) и метод «идеальной точки» TOPSIS (Technique for Order Preference by Similarity to the Ideal Solution). Они достаточно просты, объективны и легко программируются. Методы отражают различные подходы к решению проблемы упорядочения объектов путем выбора наилучшего варианта из предварительно отобранных альтернатив [5].

Метод SAW часто используется с целью получения исходных данных для их сравнительной оценки. Он позволяет работать как с показателями позитивного типа, когда максимальная эффективность достигается при наибольшем значении показателя, так и с показателями негативного типа, когда максимальная эффективность достигается при наименьшем значении показателя.

Метод TOPSIS предлагает особый, логичный и структурированный подход к решению поставленной задачи. Преимущество этого метода состоит в том, что наиболее предпочтительная альтернатива должна не только в наибольшей степени приближаться к идеальному решению, но и быть дальше всех остальных альтернатив от неприемлемого решения. К недостатку метода можно отнести работу только с позитивными показателями.

При сравнении эффективности альтернативных объектов исследования возникает необходимость учитывать не только позитивные или негативные

показатели, но и показатели с заданными значениями, т.е. критериями. Следует отметить, что значение критерия может быть в середине диапазона рассматриваемых показателей. В конкретных ситуациях эффективность объекта увеличивается не в приближении к минимуму или максимуму, а поэтому требуется оценивать объекты по степени близости именно к заданному значению. Кроме того, эффективность объекта, как правило, нелинейно зависит от изменения значения показателя. Поскольку существующие алгоритмы методов SAW и TOPSIS не позволяют решать такую задачу, то требуется некоторая модернизация метода TOPSIS, как наиболее совершенного по процедуре ранжирования, что позволит расширить возможности применения метода многокритериального выбора и упорядочения объектов для такого рода сравнения альтернатив.

При применении любых методов вначале строится исходная матрица принятия решения AM со значениями показателей. Каждый элемент матрицы AM представляет собой исходное значение j -го показателя ($j = \overline{1, m}$) для i -го альтернативного варианта ($i = \overline{1, n}$). Рассматриваемые n объектов необходимо ранжировать по степени близости к заданным требованиям. Величина n определяет число строк в матрице (альтернативы), а величина m — число столбцов (используемые показатели).

Для нормализации исходных значений, т.е. для их перевода в разряд относительных (безразмерных) величин в методе TOPSIS обычно используется выражение вида

$$N_{i,j} = \frac{AM_{i,j}}{\sqrt{\sum_{j=1}^m AM_{i,j}^2}}$$

Предполагается применять этот вид нормализации только для позитивных показателей.

В методе SAW используется более универсальная нормализация, учитывающая, что оценки по данному критерию необходимо максимизировать или минимизировать:

$$N_{i,j} = \begin{cases} \frac{AM_{i,j} - AM_{j \min}}{AM_{j \max} - AM_{j \min}}, & \text{если показатель} \\ & \text{позитивного типа;} \\ \frac{AM_{j \max} - AM_{i,j}}{AM_{j \max} - AM_{j \min}}, & \text{если показатель} \\ & \text{негативного типа.} \end{cases}$$

Для случая, когда заданные значения показателей находятся не на минимуме или максимуме, предлагается заменить представленные виды нормализации другим, более общим. Для этого формируется матрица заданных значений показателей AZ (вектор, преобразованный в матрицу для удобства вычислений). Показатели могут быть позитивного или негативного типа и иметь заданные значения как между максимальными и минимальными значениями показателей, представленными в исходной матрице, так и за этими пределами.

В общем случае, когда идет речь о степени приближения показателя к заданному значению, желательно использовать функцию, описывающую вероятность достижения получаемым значением заданного. Данная «функция достижимости» должна изменяться в пределах от нуля до единицы, с плавным протеканием процесса изменения, по возможности отличным от линейного [6]. С этой целью формируется отношение полученного (реализованного) значения показателя A_r к его заданному значению A_z :

$$A = \frac{A_r}{A_z}$$

Это отношение рассматривается как случайная величина (СВ) A , подчиненная нормальному закону распределения с соответствующей плотностью вероятности $f(A)$ и определяемая в соответствии с теорией как предел отношения вероятности попадания СВ на отрезок к длине этого отрезка, когда длина отрезка стремится к нулю [7]:

$$f(A) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{(A-m)^2}{2\sigma^2}\right)},$$

где σ — среднее квадратичное отклонение СВ; m — математическое ожидание СВ.

Если значение показателя не получено (объект не обладает необходимым свойством, которое характеризуется в количественном виде соответствующим показателем), то это означает, что оно равно нулю (как и СВ A). В случае достижения заданного значения отношение $\frac{A_r}{A_z}$ становится равным

единице. Математическое ожидание СВ приравнивается к единице, поскольку реализованное значение должно достигать заданного (считается наиболее вероятным событием по постановке задачи).

Вероятность того, что СВ примет какое-то промежуточное значение, также меняется в этих пределах (от нуля до единицы из условия задачи). Функцией, наиболее хорошо описывающей такое поведение СВ, может являться плотность вероятности, ограниченная указанными пределами. Поскольку максимальная высота функции в этом случае равняется единице, то выражение

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}},$$

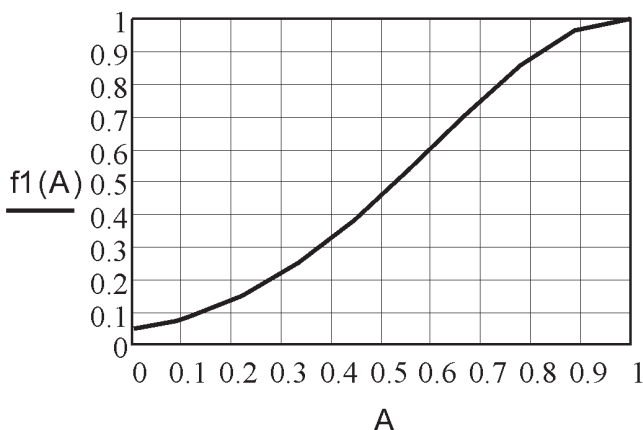
определяющее в функции $f(A)$ ее высоту, приравнивается к единице. Отсюда находится среднее квадратичное отклонение σ :

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

При подстановке этой величины в выражение для плотности вероятности $f(A)$ она приобретает вид

$$f_1(A) = e^{-\pi \left(1 - \left(\frac{A_r}{A_z}\right)^2\right)^2}.$$

Графический вид данной функции представлен на рисунке.



Вид функции достижимости при заданном значении показателя, находящегося на максимуме диапазона изменения

Если значение показателя больше заданного значения, то показатели в данной функции могут меняться местами (если важны минимальные значения):

$$f_2\left(\frac{A_z}{A_r}\right) = e^{-\pi \left(1 - \left(\frac{A_z}{A_r}\right)^2\right)^2}.$$

Определенный интеграл «функции достижимости» (для позитивных или негативных показателей) в бесконечных пределах, как и обычной плотности вероятности, равен единице, а в пределах от минус бесконечности до единицы он равен 0,5.

В необходимых, из постановки задачи, пределах от нуля до единицы присутствует небольшая погрешность (отличие от 0,5):

$$\int_0^1 e^{-\pi(1-A)^2} d(A) = 0,4939.$$

Исходя из физического смысла сравнения показателей, с такой погрешностью можно согласиться.

Полученная «функция достижимости», именуемая в многокритериальном анализе как функция полезности, позволяет осуществить преобразование исходной матрицы принятия решения в нормированную матрицу N с учетом близости к заданным значениям критериев

$$N_{i,j} = \begin{cases} e^{-\pi \left(1 - \left(\frac{AM_{i,j}}{AZ_{i,j}}\right)^2\right)}, & \text{если } AM_{i,j} \leq AZ_{i,j}; \\ e^{-\pi \left(1 - \left(\frac{AZ_{i,j}}{AM_{i,j}}\right)^2\right)}, & \text{если } AM_{i,j} > AZ_{i,j}. \end{cases}$$

Данная операция соответствует по своему смыслу нормированию, выполняемому в методе SAW, определяет степень достижения заданного значения (в методе SAW она определяет степень достижения максимума или минимума) и заменяет нормирование по методу TOPSIS.

Формируется взвешенная нормализованная матрица принятия решений V , как произведение матрицы N на вектор оценок весов выбранных показателей F :

$$V_{i,j} = N_{i,j} F_j.$$

Веса могут определяться различными способами: субъективным, основанным на экспертных оценках, или объективным — через расчет энтропии, либо можно задаться равными весами для всех показателей, что иногда в среднем будет соответствовать меньшей ошибке в итоговом расчете.

Из субъективных методов наиболее надежным и широко применяемым является метод собственных значений Т. Саати.

В теории информации энтропия используется в качестве меры неопределенности изучаемой системы. Степень неопределенности физической системы, в данном случае это рассматриваемые альтернативы и используемые показатели, определяется числом возможных состояний системы и вероятностями этих состояний. Количество информации, приобретаемое при полном вычислении состояния системы, равно энтропии этой системы.

Для каждого j -го показателя энтропия определяется по формуле

$$H_j = - \left(\frac{1}{\ln(n)} \right) \sum_{i=1}^n N_{i,j} \ln(N_{i,j}),$$

где $N_{i,j}$ — нормированные значения j -го показателя для i -й альтернативы.

Рассчитываются значения величин влияния каждого показателя на альтернативу:

$$I_j = 1 - H_j.$$

В итоге определяются относительные веса каждого j -го показателя и осуществляется проверка на полную группу событий (сумма всех весов показателей должна равняться единице)

$$F_j = \frac{I_j}{\sum_{j=1}^m I_j};$$

$$\sum_{j=1}^m F_j = 1.$$

При использовании метода энтропии необходимо иметь в виду следующее: чем шире диапазон изменения значений показателя, тем больше будет его вес в сравнении с показателями, у которых такой диапазон меньше.

Если применяется равномерный закон распределения весов показателей, то формула приобретает вид

$$F_j = \frac{1}{m}.$$

Далее идет обычная процедура расчета идеального решения, соответствующая методу TOPSIS, которая сводит многокритериальную задачу к однокритериальной. В принципе, идеальная точка уже задана вектором (матрицей) заданных значений критериев AZ , но соответствующая процедура необходима для расчета приоритета с учетом веса показателей.

Определяются векторы идеальных позитивных VP и идеальных негативных решений VN :

$$VP = \left\{ \max_j V_{i,j}, j \in J \right\};$$

$$VN = \left\{ \min_j V_{i,j}, j \in J \right\},$$

где J — множество максимизируемых (минимизируемых) показателей.

Для каждой альтернативы рассчитывается расстояние до идеального позитивного решения

$$RP_i = \sqrt{\sum_{j=1}^m (V_{i,j} - VP_j)^2}$$

и идеального негативного решения

$$RN_i = \sqrt{\sum_{j=1}^m (V_{i,j} - VN_j)^2}.$$

Количественной мерой эффективности альтернативы служит отношение

$$R_i = \frac{RN_i}{RN_i + RP_i}.$$

Ранее метод TOPSIS мог применяться, когда по каждому критерию имела место монотонно возрастающая функция полезности. В других случаях, нужно было бы обращаться к более упрощенному методу SAW [8].

Представленный метод дает практически полное совпадение результатов расчета с результатами, полученными указанными методами для позитивных показателей, и незначительное отличие от результатов, полученных методом SAW при использовании позитивных и негативных показателей, когда неизвестная функция взаимосвязи эффективности и показателей является нелинейной (линейное и нелинейное нормирование).

Таким образом, предложенный модернизированный вариант метода TOPSIS позволяет расширить область применения этого метода для случая заданных значений критериев (позитивных и негативных), находящихся внутри или вне диапазона варьирования показателей.

Пример расчета по модернизированному методу TOPSIS выполнен в среде Mathcad-15 по исходным данным, представленным в табл. 1 (матрица AM).

Первые два показателя негативного типа, а остальные — позитивного.

Таблица 1

Исходная матрица принятия решений АМ

Альтернативы	Показатели						
1	500	1	200	10	7	1	3
2	510	0,9	250	11	7	2	5
3	520	0,7	300	12	8	3	10
4	550	0,6	600	10	9	4	15
5	600	0,5	800	13	10	5	17
6	620	0,4	900	14	11	6	21
7	640	0,2	1200	15	12	7	26
8	650	0,1	1500	15	13	9	30

Матрица заданных значений показателей (AZ) представлена в табл. 2.

Преобразование вектора заданных значений в матрицу выполнено только для удобства вычислений в среде Mathcad. При использовании других программных средств достаточно использовать вектор.

Нормированная матрица N определяется с помощью разработанной функции полезности (табл. 3).

Веса показателей, полученные экспертным методом, представлены вектором F в табл. 4.

Проверка суммы весов всех показателей:

$$\sum_{j=1}^m F_j = 1.$$

Взвешенная нормализованная матрица принятия решений V представлена в табл. 5.

Таблица 2

Матрица критериев AZ

Альтернативы	Показатели						
1	500	1	1500	15	13	6	18
2	500	1	1500	15	13	6	18
3	500	1	1500	15	13	6	18
4	500	1	1500	15	13	6	18
5	500	1	1500	15	13	6	18
6	500	1	1500	15	13	6	18
7	500	1	1500	15	13	6	18
8	500	1	1500	15	13	6	18

Таблица 3

Нормированная матрица N

Альтернативы	Показатели						
1	1	1	0,0944	0,7053	0,5121	0,1129	0,1129
2	0,9988	0,9691	0,1129	0,7998	0,5121	0,2475	0,1942
3	0,9954	0,7537	0,1339	0,8819	0,6283	0,4559	0,5376
4	0,9744	0,6049	0,3227	0,7053	7427	0,7053	0,9164
5	0,9164	0,4559	0,5045	0,9457	0,8459	0,9164	0,9904
6	0,889	0,3227	0,6049	0,9861	0,9283	1	0,9379
7	0,8604	0,1339	0,8819	1	0,9816	0,9379	0,7427
8	0,8459	0,0785	1	1	1	0,7053	0,6049

Таблица 4

Веса показателей F

Показатель	1	2	3	4	5	6	7
Вес	0,05	0,05	0,3	0,05	0,1	0,05	0,4

Таблица 5

Взвешенная нормализованная матрица F

Альтернативы	Показатели						
1	0,05	0,05	0,0283	0,0353	0,0512	0,0056	0,0451
2	0,0499	0,0485	0,0339	0,04	0,0512	0,0124	0,0777
3	0,0498	0,0377	0,0402	0,0441	0,0628	0,0228	0,2151
4	0,0487	0,0302	0,0968	0,0353	0,743	0,0353	0,3666
5	0,0458	0,0228	0,1514	0,0373	0,0846	0,0458	0,3961
6	0,0444	0,0161	0,1815	0,0493	0,0928	0,05	0,3752
7	0,043	0,0067	0,2646	0,05	0,0982	0,0469	0,2971
8	0,0423	0,0039	0,3	0,05	0,1	0,0353	0,242

Векторы идеальных позитивных VP и идеальных негативных решений VN представлены в табл. 6.

Расчет расстояния для каждой альтернативы до идеального позитивного RP и идеального негативного решения RN представлен в табл. 7.

Результат расчета эффективности (приоритета) альтернативы представлен в табл. 8. Альтернативы в таблице расположены в порядке возрастания, т.е.

наибольшим приоритетом пользуется последняя альтернатива, имеющая наибольшее значение (0,755). В исходной матрице она занимала седьмое место. Наихудшая альтернатива занимала в исходной матрице первое порядковое место.

Результаты расчета по методу SAW (табл. 9) близки к результатам расчета по модернизированному методу TOPSIS.

Таблица 6

Матрица идеальных решений V

Идеальные решения	Показатели						
Позитивные VP	0,05	0,05	0,3	0,05	0,1	0,05	0,3961
Негативные VN	0,0423	0,0039	0,0283	0,0353	0,0512	0,0056	0,0451

Таблица 7

Матрица расстояний

Расстояния	Альтернативы							
До идеального позитивного решения RP	0,449	0,4197	0,3203	0,2089	0,152	0,1254	0,114	0,1618
До идеального негативного решения RN	0,0467	0,0666	0,1753	0,3319	0,3763	0,3693	0,3513	0,3406

Таблица 8

Матрица приоритета альтернатив по методу TOPSIS

Приоритет	Альтернативы							
Порядковый номер в исходной матрице	1	2	3	4	8	5	6	7
Мера эффективности	0,0942	0,1188	0,3536	0,6137	0,678	0,7122	0,7466	0,755

Таблица 9

Матрица приоритета альтернатив по методу SAW

Приоритет	Альтернативы							
Порядковый номер в исходной матрице	1	2	3	4	8	5	7	6
Мера эффективности	0,2656	0,3135	0,4724	0,6872	0,7735	0,7938	0,8064	0,8094

Расхождение имеется только между первым и вторым местом. Метод SAW поставил наилучшую альтернативу по методу TOPSIS на второе место, а предшествующую ей — на первое. В данном примере сказывается преимущество метода TOPSIS перед SAW в двойном расчете идеального расстояния (позитивного и негативного).

Использование предложенного нелинейного нормирования вместо линейного расширяет возможности метода SAW, как и возможности метода TOPSIS по сравнению показателей, имеющих заданные значения не на максимуме или минимуме. Кроме того, предложенная модернизация метода TOPSIS придает ему новое свойство. Он становится компенсационным методом, т.е. низкие значения оценки объекта исследования по одной части критериев могут быть компенсированы высокими оценками по другой их части.

Выводы

Поскольку многокритериальный анализ применяются при решении и других сложных задач, таких, как сравнительная оценка технологических процессов, стратегического потенциала деятельности предприятий, развития регионов страны, уровней экономического и социального развития отдельных стран и т. д., то использование описанных математических моделей может стать одним из инструментов многокритериальной оценки эффективности объекта исследования.

Библиографический список

1. Давыдов А.Д., Дианова Е.В., Хмелевой В.В. Способ выбора приоритетных направлений фундаментальных и поисковых исследований // Вестник Московского авиационного института. 2016. Т. 23. № 4. С. 195-203.
2. Ярошевич Н.Ю., Орлова Т.С. Методологические подходы к формированию аэропортов-хабов на территории страны // Известия Уральского государственного экономического университета. 2014. № 3(53). С. 18-24.
3. Терентьев В.Б. Сравнительная оценка образца авиационной техники с заданным аналогом по результатам испытаний: Учебное пособие. — М.: Изд-во МАИ, 2014. — 36 с.
4. Терентьев В.Б., Терентьева А.В. Теория испытаний авиационной техники: Учебное пособие. — М.: МАИ-ПРИНТ, 2010. — 92 с.
5. Шибанов Г.П. Современные технологии проведения обликтовых исследований // Автоматизация. Современные технологии. 2015. № 9. С. 26-33.
6. Терентьев В.Б. Оптимизация параметров имитаторов воздушных объектов // Третья международная научно-практическая конференция «Фундаментальные и прикладные исследования: новое слово в науке». М.: Научное обозрение, 2016. С. 103-112.
7. Яглом А.М., Яглом И.Н. Вероятность и информация. — М.: Наука, 1973. — 512 с.
8. Терентьева А.В. Роль технологического фактора в развитии экономики и общества // Современные научные исследования: актуальные вопросы, достижения и инновации: Сборник статей Международной научно-практической конференции. Пенза: Наука и просвещение, 2016. С. 63-68.

IDEAL POINT METHOD MODERNIZATION

Terent'ev V.B. *, Terent'eva A.V. **

Moscow Aviation Institute (National Research University),
MAI, 4, Volokolamskoe shosse, Moscow, A-80, GSP-3, 125993, Russia

* e-mail: tvb-21@yandex.ru

** e-mail: tav-21@mail.ru

Abstract

When solving the problem of objects' multicriterion selection and seriation, modern mathematical modeling

technologies can employ various methods, including simple aggregate weighing (SAW) and "ideal point" (TOPSIS) methods.

When comparing alternative objects of research by their effectiveness, the necessity occurs to account for not only positive or negative indicators, but estimate the objects by the degree of proximity to a specified value, i. e. to the criterion. It should be noted, that the criterion value could lay in the middle of the range of the considered indicators. Besides, the object's effectiveness, as a rule, has non-linear dependency from the change of the indicator value. Inasmuch as the existing algorithms of SAW and TOPSIS methods do not allow perform such task, a certain modernization of the TOPSIS method is required. This method is top-of-the-line with respect to the ranking procedure.

In general, when the case in hand is the indicator's degree of proximity to the specified value, the attainability function is used. In multicriterion analysis, it is called the utility function. It allows realize transformation of the initial "decision matrix" system into normalized matrix, with account for the proximity to the specified values of the criteria. This operation is close in its meaning to linear (nonlinear) normalization. It is performed in the SAW method (determines the degree of the maximum or minimum attaining), and replaces the rationing using the TOPSIS method.

Earlier, the TOPSIS method could be applied, when a monotonic-increasing utility function existed for each criterion. In other cases, one had to apply the more simplified SAW method.

The presented TOPSIS method modernization gives, firstly, practically a comprehensive agreement of the computational results with the above said methods for positive indicators, and, secondly, a slight difference with the SAW method while using positive and negative indicators, when the unknown function of the relationship between efficiency and indicators is non-linear (linear and non-linear normalizing).

Thus, the proposed modernized version of TOPSIS method allows extend the scope of this method in the case of the specified criteria values (positive and negative), located within or outside the range of the indicators' variation.

Keywords: object efficiency, ranking procedure, probability density, criteria, attainability function.

References

1. Davydov A.D., Dianova E.V., Khmelevoi V.V. *Vestnik Moskovskogo aviatsionnogo instituta*, 2016, vol. 23, no. 4, pp. 195-203.
2. Yaroshevich N.Yu., Orlova T.S. *Izvestiya Ural'skogo gosudarstvennogo ekonomicheskogo universiteta*, 2014, no. 3(53), pp. 18-24.
3. Terent'ev V.B. *Sravnitel'naya otsenka obraztza aviatsionnoi tekhniki s zadannym analogom po rezul'tatam ispytaniy* (Comparative assessment of the aviation technology sample with a given analog according to test results), Moscow, MAI, 2014, 36 p.
4. Terent'ev V.B., Terent'eva A.V. *Teoriya ispytaniy aviatsionnoi tekhniki* (Theory of aircraft equipment testing), Moscow, MAI-PRINT, 2010, 92 p.
5. Shibanov G.P. *Avtomatizatsiya. Sovremennye tekhnologii*, 2015, no. 9, pp. 26-33.
6. Terent'ev V.B. *Materialy III Mezhdunarodnoi nauchno-prakticheskoi konferentsii "Fundamental"nye i prikladnye issledovaniya: novoe slovo v nauke"*, Moscow, Nauchnoe obozrenie, 2016, pp. 103-112.
7. Yaglom A.M., Yaglom I.N. *Veroyatnost' i informatsiya* (Probability and information), Moscow, Nauka, 1973, 512 p.
8. Terent'eva A.V. *Mezhdunarodnaya nauchno-prakticheskaya konferentsiya "Sovremennye nauchnye issledovaniya: aktual"nye voprosy, dostizheniya i innovatsii"*. *Sbornik statei*. Penza, Nauka i prosveshchenie, 2016, pp. 63-68.