

*На правах рукописи*



Чжо Йе Ко

**ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ПЛОСКИХ ОРЕБРЕННЫХ  
ПАНЕЛЕЙ НА ОСНОВЕ МОДЕЛЕЙ ПЛАСТИН ПЕРЕМЕННОЙ  
ТОЛЩИНЫ**

Специальность: 1.1.8. Механика деформируемого твердого тела

Автореферат диссертации  
на соискание учёной степени  
кандидата технических наук

Москва, 2023 г.

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)»

**Научный руководитель:** **Рабинский Лев Наумович**, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры «Сопротивление материалов, динамика и прочность машин» Московского авиационного института

**Официальные оппоненты:** **Кондратов Дмитрий Вячеславович**, доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой «Информационная безопасность автоматизированных систем» федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.», г. Саратов

**Королев Вадим Вадимович**, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры «Транспортное строительство» федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования "Российский университет транспорта", г. Москва

**Ведущая организация:** Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт прикладной механики Российской академии наук

Защита диссертации состоится 20 декабря 2023 г. в 15 часов 00 минут на заседании диссертационного совета 24.2.327.07 при федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» по адресу: 125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке МАИ по адресу: 125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4. и на сайте: [https://mai.ru/events/defence/?ELEMENT\\_ID=176825](https://mai.ru/events/defence/?ELEMENT_ID=176825)

Автореферат разослан «\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2023 г.

Учёный секретарь

диссертационного совета 24.2.327.07



Сердюк Дмитрий Олегович

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы диссертации.** Развитие методов топологической оптимизации (ТО) направлено на создание автоматизированных методов проектирования конструкций с повышенной несущей способностью, прочностью, массовой эффективностью и т.д. Результаты топологической оптимизации используются как непосредственно для получения оптимальной геометрии конструкций, так и в качестве инструмента поиска облика и новых геометрических форм конструктивных элементов, которые в упрощенном виде используются далее в составе реальных конструкций.

Стандартной задачей топологической оптимизации являлся поиск наилучшего распределения ограниченного объема материала в заданном объеме конструкции для получения наиболее высокой жесткости. Такая постановка задачи, фактически, определяется требованием минимизации полной энергии деформаций (или работы внешних сил) при заданном ограничении на значение средней плотности. К настоящему времени, методы топологической оптимизации реализованы в самых разнообразных областях физики сплошных сред, включающих задачи механики конструкций, теплофизики, акустики, гидродинамики, электродинамики, в связанных задачах аэроупругости, термомеханики, тепломассобмена и т.д. Целевые функции в задачах ТО в механике материалов могут формулироваться относительно энергии деформаций, объема, занимаемого материалом, собственных частот или коэффициента запаса устойчивости конструкции, перемещений в заданных зонах конструкции, коэффициента демпфирования и т.д. Ограничения ставятся не только на объем материала, но и на максимальные напряжения и соответствующие критерии пластичности/прочности, а также на параметры перечисленные выше в качестве возможных целевых функций (собственные частоты и т.д.). Задачи ТО конструкций могут включать в себя решение уравнений статики линейной и нелинейной упругости, упрягопластичности, задачи динамики и вязкоупругости. Предложены обобщения метода ТО на анизотропные материалы и на много-материальные составные конструкции.

**Объектом исследований** диссертации являются цифровые методы анализа напряженно-деформированного состояния конструктивных элементов и синтеза перспективных конструктивно-силовых схем для металло-композитных авиационных конструкций.

**Предметом и задачей исследования** является разработка и численная реализация метода топологической оптимизации облегченных металлических и металло-композитных элементов авиационных конструкций, работающих в условиях сложно-напряженного состояния.

**Методы исследования** применяются методы топологической оптимизации тонкостенных элементов конструкций, основанные на численном конечно-элементном моделировании и методах оптимизации, в частности, на методе движущихся асимптот. Применяются модели Миндлина-Рейсснера изотропных и анизотропных многослойных панелей. Для уточненного анализа напряженного состояния оптимизированных конструкций проводится трехмерное моделирование. Для вычислений привлекается система COMSOL Multiphysics. Для определения физико-механических характеристик были разработаны экспериментальные методы исследования образцов при испытаниях на трехточечный изгиб, а также при испытаниях 3d-печатных моделей. Экспериментальные исследования проводились с использованием универсальной машины Instron 5969 с программным обеспечением Bluehill 3.

**Научная новизна:**

- Предложена и реализована методика топологической оптимизации подкрепленных плоских панелей, в том числе композитных, работающих в условиях сложно-напряженного состояния. В предложенной методике функция фиктивной плотности используется для задания локальной толщины панели, а локальный угол армирования в слоях композита задается дополнительными узловыми переменными, вводимыми в задачу оптимизации. Методика позволяет получать оптимизированные варианты конструкций с наибольшей жесткостью.
- Получены рекомендации по выбору наилучших настроек задачи оптимизации, связанных с выбором размера сетки, типа конечных элементов, начальных условий для толщины пластины и типа аппроксимирующей функции для дополнительных переменных модели.
- Разработанная численная методика валидирована на основе примера аналитического решения для квадратной пластины, нагруженной сосредоточенной силой, смещенной относительно центра. Показана согласованность геометрии ребер жесткости, возникающих в численном решении, с результатами оптимизации, получаемыми в рамках аналитического подхода. Также показана высокая точность решений, получаемых для пластин переменной толщины, по сравнению с соответствующими моделями с прорисовкой ребер жесткости пластинчатыми элементами.
- Получены новые результаты экспериментальных исследований для образцов оптимизированных подкрепленных панелей из материал PET-G, синтезированных на установке 3d печати, а также результаты механических испытаний на изгиб. Показано преимущество

оптимизированной геометрии оребрения панелей по сравнению со стандартными регулярными вариантами.

**Практическая ценность** работы заключается в разработке прикладной численной методики, позволяющей подобрать оптимальную геометрию силового набора оребренных плоских панелей, обеспечивающих повышение жесткости конструкции в заданных условиях нагружения.

**Достоверность** научных положений, выводов и рекомендаций, сформулированных в диссертационной работе, и **обоснованность** результатов, полученных при разработке аналитических методов расчета, определяется применяемым математическим аппаратом, оптимизирующим компоновку материала, строгой формулировкой моделей в рамках теории упругости, теории пластин, теорией дифференциальных уравнений. Сравнение результатов численного и аналитического моделирования показало надлежащее согласие и валидацию предложенной численной методики. Были проведены экспериментальные исследования, подтверждающие эффективность предложенной методики оптимизации. Численное моделирование проводилось в COMSOL Multiphysics с использованием детальных моделей изделий, сетки высокой плотности. Надежность численных расчетов оценивалась путем изменения размера конечно-элементной сетки, а также путем сравнения полученных решений в рамках упрощенных аналитических моделей.

**Апробация работы.** Основные положения и результаты работы докладывались на следующих конференциях:

1. Чжо Йе Ко., Соляев Ю.О. Применение методов топологической оптимизации для выбора геометрии силового набора подкрепленных панелей. 19-й Международная конференция "Авиация и космонавтика" МАИ. 2020 г.
2. Чжо Йе Ко., Рабинский Л.Н. Оценка корректности решений задач топологической оптимизации подкрепленных панелей, полученных на основе теории пластин Миндлина-Рейсснера. Международная молодежная научная конференция. Секция "Механика и моделирование материалов и технологий". Москва, 2021 г.
3. Чжо Йе Ко., Соляев Ю.О., Рабинский Л.Н. Топологическая оптимизация оребренных панелей, нагруженных сосредоточенными силами. Международная конференция «Космические системы». МАИ. 2021 г.
4. Чжо Йе Ко., Соляев Ю.О., Рабинский Л.Н. Методика топологической оптимизации геометрии подкрепляющих элементов плоских панелей.

Международная конференция «Композитные материалы и конструкции». МАИ. 2021 г.

5. Чжо Йе Ко., Соляев Ю.О., Бабайцев А.В. Топологическая оптимизация ребренных панелей, нагруженных различными силами. XI Международная научно-практическая конференция «Проблемы безопасности на транспорте». Гомель. 2021 г.
6. Чжо Йе Ко., Бабайцев А.В., Чубаров В.С., Исследование остаточных деформаций в зависимости от условий печати. Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред Материалы XXVIII международного симпозиума имени А.Г. Горшкова. 2022 г.
7. Чжо Йе Ко., Рабинский Л.Н. Топологическая оптимизация подкрепленных панелей на основе аналитических решений. Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред Материалы XXIV международного симпозиума имени А.Г. Горшкова. 2023 г.
8. Чжо Йе Ко., Рабинский Л.Н. Соляев Ю.О. Теоретическое и экспериментальное обоснование подхода к оптимизации топологии переменной толщины для ребристо-жестких панелей. Динамические и техно-логические проблемы механики конструкций и сплошных сред Материалы XXIV международного симпозиума имени А.Г. Горшкова. 2023 г.

**Объём и структура диссертации.** Работа содержит 150 страниц основного текста, включая 58 рисунков, состоит из введения, 4 глав, заключения, списка литературы в количестве 125 ссылок.

### **Основное содержание работы**

**Во введении** обоснована актуальность темы диссертации работы, поставлена цель и определены задачи исследования, сформулированы научная новизна и теоретическая и практическая значимость полученных результатов, приводятся основные положения диссертационной работы, выносимые на защиту. Приведены сведения об апробации результатов работы и общая структура, объем диссертационной работы.

**В первой главе** диссертации посвящена обзору существующих методов топологической оптимизации геометрии плоских панелей, подкрепленных ребрами жесткости. Дано общее описание методов топологической оптимизации подкрепленных панелей и их применение. Приведен обзор работ по численному моделированию физических процессов методами ТО для металлических и металлокомпозитных элементов конструкций, работающих в условиях сложного напряженного состояния.

**Во второй главе** представлена формулировка метода топологической оптимизации облегченных металлических и металло-композитных элементов авиационных конструкций, работающих в условиях сложно-напряженного состояния, в том числе, в расширенной постановке, включающей:

- Учет ограничений по жесткости и прочности
- Реализацию метода ТО для моделей, в которых область проведения оптимизации контактирует с окружающими тонкостенными элементами конструкций.
- Учет дополнительных ограничений, связанных с требованиями по устойчивости тонкостенных элементов конструкций, контактирующих с областью построения решения
- Реализацию топологической-параметрической оптимизации металло-композитных конструкций с использованием дополнительных переменных, определяющих параметры армирования композитных материалов, и с учетом ограничений по условиям прочности.
- Реализацию топологической оптимизации металло-композитных конструкций с использованием дополнительных полевых переменных, определяющих распределения плотностей различных материалов, входящих в состав конструкции.

**В третьей главе** приведены результаты решения задач топологической оптимизации для подкрепленных панелей, нагруженных сосредоточенными силами. Проводится поиск наилучшего распределения ограниченного объема материала в заданном объеме конструкции для получения наиболее высокой жесткости.

В разделе 3.1 предложена методика топологической оптимизации геометрии подкрепляющих элементов плоских панелей, нагруженных сосредоточенными силами. Методика основана на численном решении задачи о деформациях панели переменной толщины. Параметром оптимизации является толщина панели, задаваемая через фиктивную функцию плотности. Целевой минимизируемой функцией является полная энергия деформаций панели.

В разделе 3.2 представлен метод оптимизации панелей переменной толщины, который был реализован в Comsol Multiphysics для оптимизации топологии пластин с ребрами жесткости. Задача оптимизации для пластины переменной толщины:

$$\begin{aligned}
\text{minimize: } & \mathcal{J}(\rho) = \int_{\Omega} \hat{f}(x) w(x) d\Omega \\
\text{subject to: } & \text{equilibrium equations,} \\
& \text{boundary conditions,} \\
& h = h_{skin} + \rho^p h_{rib}, \\
& \bar{\rho} = \frac{\int_{\Omega} h d\Omega}{\int_{\Omega} d\Omega} = \bar{\rho}_{max}, \\
& \max_{x \in \Omega} |\nabla h| \leq \frac{2h_{ribs}}{d_{min}}, \\
& 0 \leq \rho \leq 1
\end{aligned} \tag{1}$$

где  $x \in \Omega$  - вектор положения;  $\Omega \in \mathbb{R}^2$  - ограниченная область, связанная с опорной плоскостью пластины, имеющая границу  $\partial\Omega$  и угловые точки  $\partial\partial\Omega$ ;  $\mathcal{J}(\rho)$  - функционал податливости, являющийся целью рассматриваемой задачи оптимизации;

Уравнения равновесия, которым должно удовлетворять решение задачи, имеют стандартную форму для теории пластин:

$$N_{ij,j} = 0, \quad M_{ij,j} - Q_i = 0, \quad V_{i,i} + f = 0 \tag{2}$$

где производные обозначены запятыми, повторные индексы означают суммирование, а определения мембранных сил  $N_{ij}$ , изгибающих моментов  $M_{ij}$  и поперечных сил  $V_i$  даны с учетом несимметричной структуры пластины (с односторонними ребрами) и соответствующей связи между деформациями в плоскости и изгибом.

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \\ M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \end{Bmatrix} &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & 0 & B_{11} & B_{21} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{44} & 0 & 0 & B_{44} \\ B_{11} & B_{21} & 0 & D_{11} & D_{21} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{44} & 0 & 0 & D_{44} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \\ \kappa_{11} \\ \kappa_{22} \\ 2\kappa_{12} \end{Bmatrix} \\
\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} &= \begin{pmatrix} S_{55} & 0 \\ 0 & S_{66} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{23} \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{3}$$



где  $\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i}) / 2$  и  $\kappa_{ij} = (\theta_{i,j} + \theta_{j,i}) / 2$  - компоненты тензоров деформации и кривизны, соответственно;  $A_{ij}(x)$ ,  $B_{ij}(x)$ ,  $D_{ij}(x)$ ,  $S_{ij}(x)$  - коэффициенты жесткости мембраны, связи, изгиба и сдвига плиты, соответственно, которые определяются с учетом переменной толщины плиты:

$$A_{ij}(x) = C_{ij}h(x), B_{ij}(x) = C_{ij} \frac{h^2(x)}{2}, D_{ij}(x) = C_{ij} \frac{h^3(x)}{3} \quad (i, j = 1, 2, 4)$$

$$S_{ij}(x) = C_{ij}h(x) \quad (i, j = 5, 6) \quad (4)$$

где предполагается, что опорная плоскость расположена на внешней поверхности обшивки пластины, а  $C_{ij}$  - компоненты матрицы жесткости изотропного материала, которые могут быть представлены с помощью инженерных констант:

$$C_{11} = C_{22} = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad C_{12} = C_{21} = \frac{\nu E}{1-\nu^2}, \quad C_{44} = C_{55} = C_{66} = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (5)$$

Деформации и кривизны в определяющих уравнениях (3) определяются через перемещения  $u_i$  и вращения  $\theta_i$  в соответствии с теорией Миндлина-Рейсснера:  $u_i = u_i^0 + z\theta_i(x)$  ( $i = 1, 2$ ) и  $u_3 = w(x)$ .

Представлены примеры оптимизации для квадратных пластин, нагруженных системами сосредоточенных сил. (см. рис. 1). Предполагается, что все силы имеют одинаковую величину и действуют на внешнюю поверхность пластины в направлении, противоположном вектору внешней нормали.

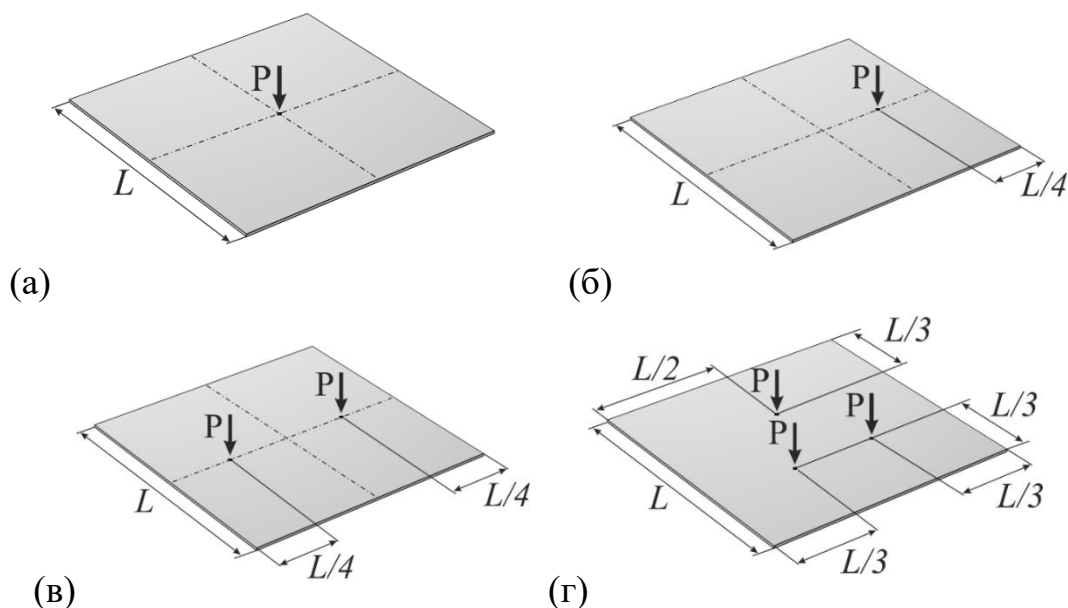


Рис. 1. Варианты нагружения, рассматриваемые в задачах оптимизации, а) центральная сила, б) смещенная сила, в) две силы, г) три силы

Рассмотрены два типа граничных условий: В первых, мы рассмотрим пластины со свободными краями и фиксированными углами, другими словами, мы рассмотрим самоуравновешенную систему поперечных сосредоточенных сил:

$$N_{ij}n_j = 0, \quad M_{ij}n_j = 0 \quad V_i n_i = 0 \quad x \in \partial\Omega \quad w = 0 \quad x \in \partial\partial\Omega \quad (6)$$

Во-вторых, мы будем использовать условия свободного закрепления с ограниченными смещениями в плоскости и поперечными смещениями по всей границе:

$$u_i = 0, \quad M_{ij}n_i n_j = 0 \quad \theta_i s_i = 0 \quad w = 0 \quad x \in \partial\Omega \quad (7)$$

где  $n_i$  и  $s_i$  - внешние нормальный и касательный единичные векторы к границе пластины, соответственно.

График сходимости для объективной функции задачи оптимизации топологии (красный), относительного остаточного объема (синий) и нормированного максимального градиента толщины (зеленый) в рамках подхода переменной толщины представлен на рисунке 2.

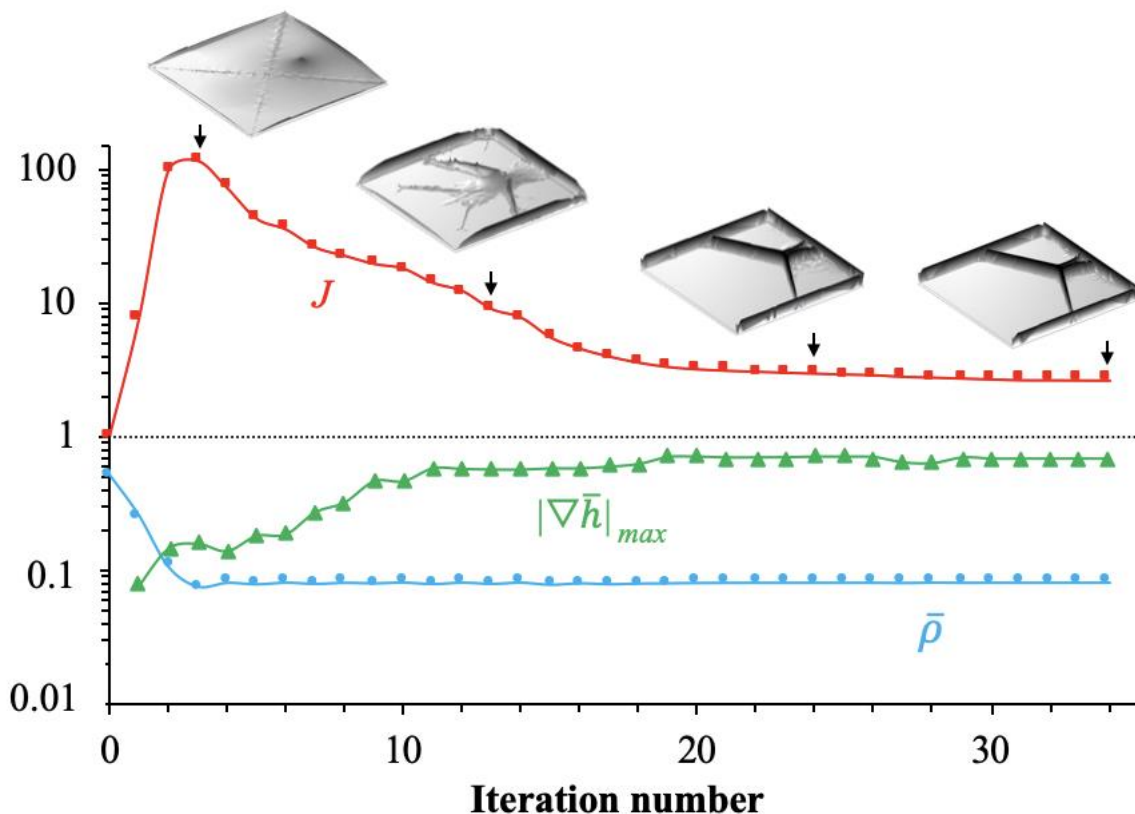


Рис. 2. Типичный график сходимости для объективной функции задачи оптимизации топологии (красный), относительного остаточного объема (синий) и нормированного максимального градиента толщины (зеленый) в рамках подхода переменной толщины

Для оценки оптимальности полученных решений вводится коэффициент полезного действия, определяемый как произведение объективной функции и относительного объема пластины, реализуемого на последней итерации алгоритма:

$$FM = \bar{J} \bar{\rho}$$

где  $\bar{J}$  - функционал цели (1), нормированный относительно его значения для пластины с заданным объемом  $\bar{\rho} = \bar{\rho}_{max}$  и соответствующей равномерной толщиной. Наиболее оптимальные решения должны иметь наименьшие значения  $FM$ . Решения для тестовых задач, полученные с помощью подхода ТО с переменной толщиной представлено на рисунке 3, а соответствующие их прогибы для Shell и solid моделей на рисунках 4 и 5.

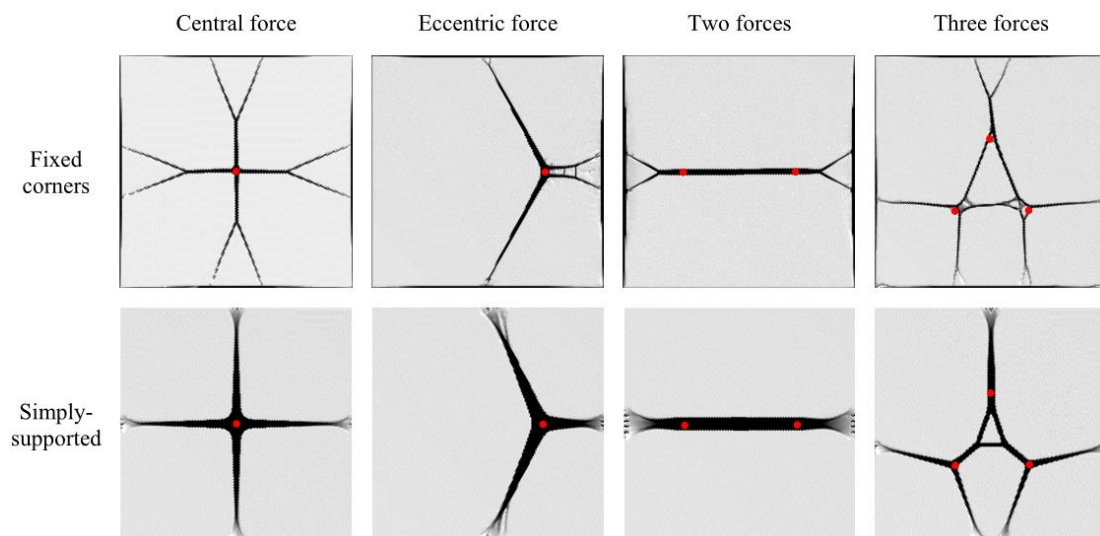


Рис. 3. Решения для тестовых задач, полученные с помощью подхода ТО с переменной толщиной. Вид сверху. Случаи нагружения в соответствии с рис. 1. Точки нагружения отмечены красным цветом. Светло-серый цвет - обшивка, черный цвет - максимальная высота ребер

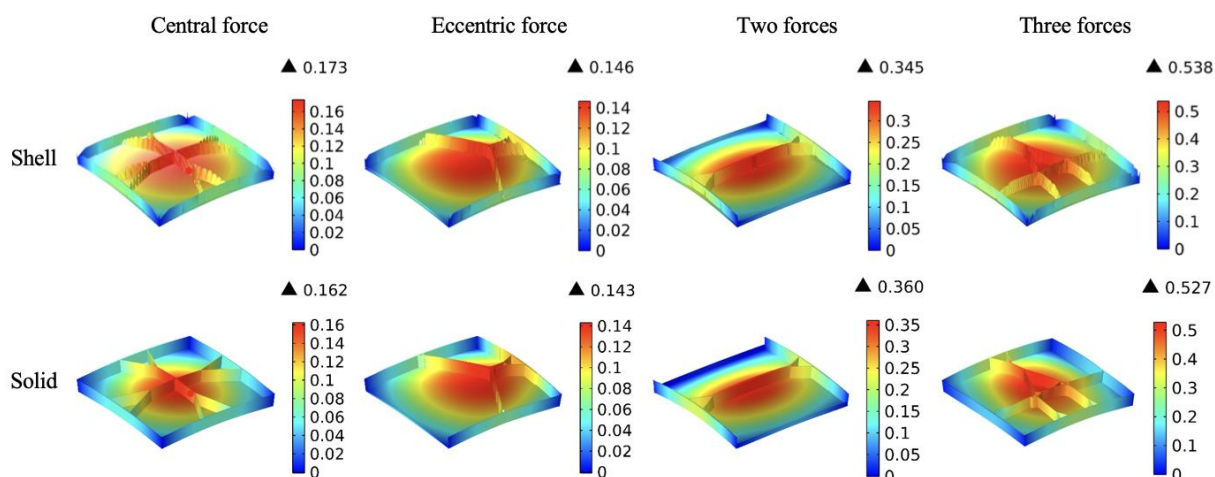


Рис. 4. Сравнение решений для прогибов (мм) оптимизированных пластин в моделях типа оболочек переменной толщины и в соответствующих сглаженных трехмерных твердотельных моделях. Граничные условия с фиксированными углами. Максимальные прогибы отмечены на графиках

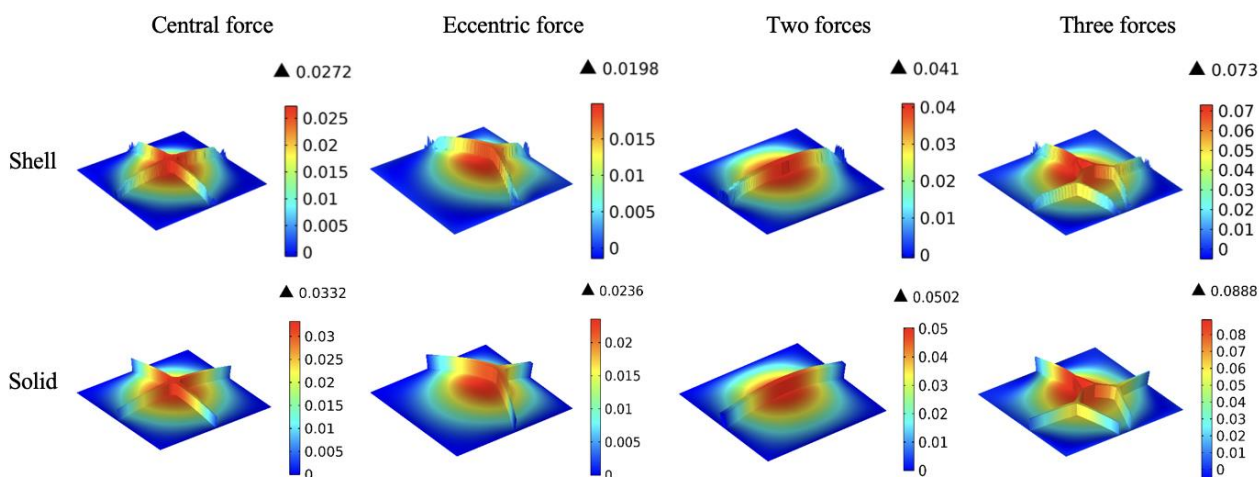


Рис. 5. Сравнение решений для прогибов (мм) оптимизированных пластин в моделях типа оболочек переменной толщины и в соответствующих сглаженных трехмерных твердотельных моделях. Граничные условия просто поддерживаются. Максимальные прогибы отмечены на графиках

В целом, отклонения между решениями в рамках оболочечной и твердой моделей являются следствием приближенного характера теории Миндлина-Рейсснера, особенно для пластин с быстрым изменением толщины. Тем не менее, полученные содержат не очень большие погрешности и позволяют утверждать, что решения для поля перемещений в рамках моделей оболочек переменной толщины достаточно точны. Следовательно, оценки для податливости пластин, основанные на теории Миндлина-Рейсснера переменной толщины, также являются достаточно точными (хотя и приближенными) и могут быть эффективно использованы в рамках рассматриваемой оптимизационной задачи (1).

Для оценки эффективности рассматриваемого метода ТО мы сравнили характеристики оптимизированных пластин с криволинейными ребрами жесткости со стандартной конструкцией пластин с регулярной (решетчатой) жесткостью. Мы предположили, что в стандартных панелях всегда существуют два семейства перпендикулярных ребер с прямоугольными поперечными сечениями.

Постановка рассматриваемой задачи параметрической оптимизации (ПО) может быть дана в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 \text{minimize: } & J(a, b, N, \alpha) = \int_{\Omega} f(x)w(x)d\Omega \\
 \text{subject to: } & \text{equilibrium equations,} \\
 & \text{boundary conditions,} \\
 & h = h_{skin} + \rho^P h_{rib}, \\
 & \bar{\rho} = \frac{L^2 h_{skin} + \sum_{i=1}^{2N} abL_i}{L^2 (h_{skin} + h_{rib})} = \bar{\rho}_{max}, \\
 & a_{min} \leq a \leq a_{max}, \quad 0 \leq b \leq h_{rib}, \\
 & 1 \leq N \leq 20, \quad 0 \leq \alpha \leq \pi / 2
 \end{aligned} \tag{8}$$

где  $a$  - ширина ребер,  $b$  - высота ребер,  $L_i (i = 1 \dots 2N)$  - длина ребер,  $a_{min}$  и  $a_{max}$  - максимально и минимально допустимая толщина ребер, и  $L$  - размер края пластины.  $2N$  - количество ребер и  $\alpha$  - угол их ориентации являются неизвестными параметрами.

Иллюстрация размещения ребер внутри области оптимизации (без границы) в решениях ПО показана на рисунке 6. Полученные соответствующие модели пластин с регулярной жесткостью, оптимизированных с помощью ПО для аналогичных вариантов нагружения даны на рисунке 7.

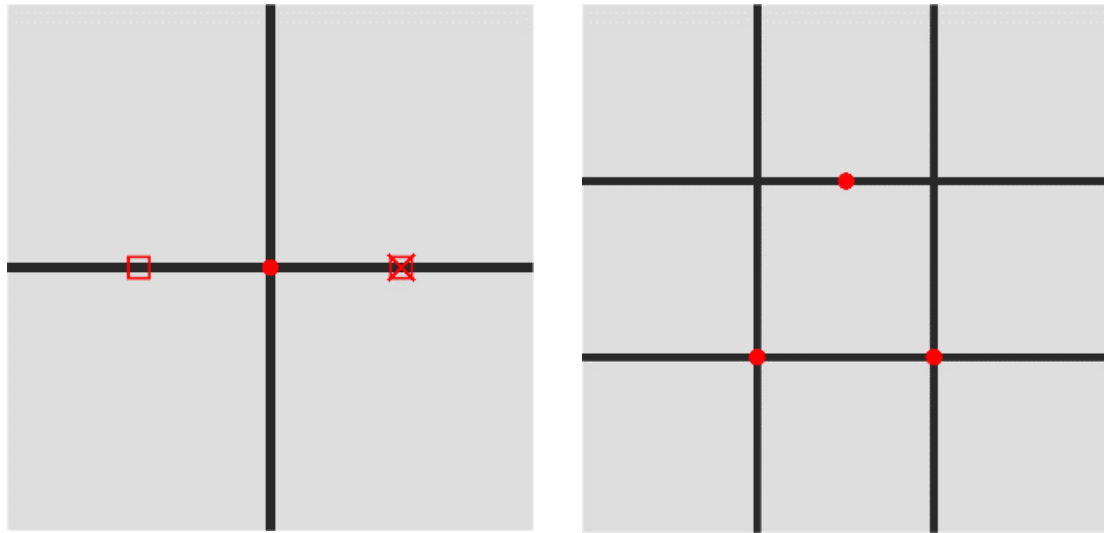


Рис. 6. Иллюстрация размещения ребер внутри области оптимизации (без границы) в решениях ПО. Точки нагружения отмечены красными точками на графиках (а): одна центральная сила (●), эксцентрическая сила (×), две силы (□) и (б): три силы (●). В пластинах с фиксированными углами на границе размещены дополнительные ребра.

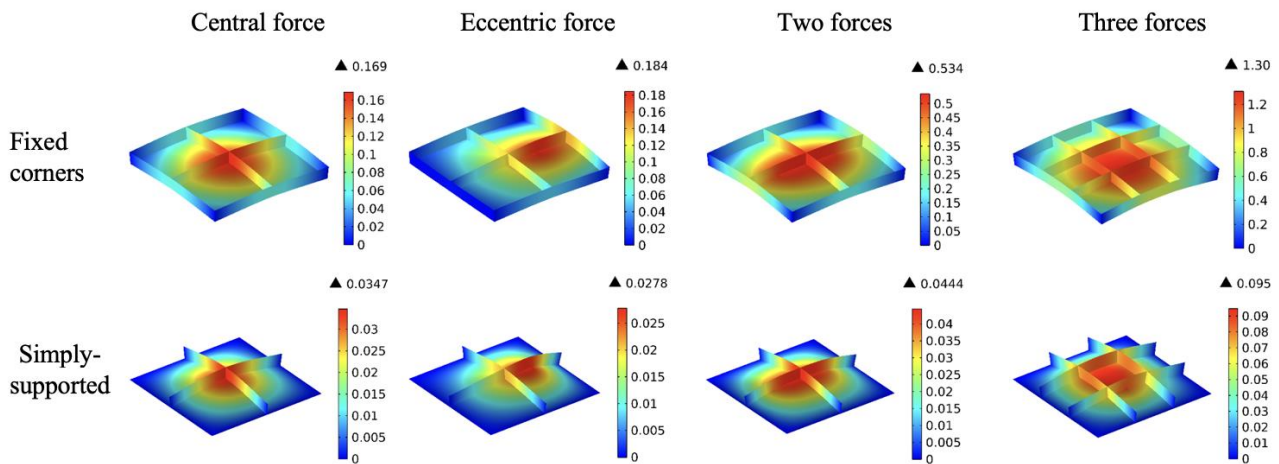


Рис. 7. Прогибы (мм) пластин с регулярной жесткостью, оптимизированных с помощью ПО подхода для различных условий нагружения и опоры.

Максимальные прогибы отмечены на графиках.

Таблица 1. Прогибы (мм) в нагруженных точках оптимизированных пластин, полученные методами топологической оптимизации (ТО) и параметрической оптимизации (ПО)

Loading case	TO (shell)	TO (solid)	ПО
Boundary conditions: fixed corners			
Central force	0.173	0.162	0.169
Eccentric force	0.139	0.142	0.184
Two forces	0.306	0.321	0.51
Three forces	0.47/0.51	0.14/0.47	1.19/1.2
Boundary conditions: simply-supported			

Central force	0.027	0.033	0.034
Eccentric force	0.016	0.02	0.027
Two forces	0.03	0.037	0.38
Three forces	0.055/0.066	0.067/0.082	0.077/0.087

Наиболее значительные улучшения получены для пластин с фиксированными углами и нагруженных двумя или тремя силами. В этих решениях ТО обеспечивает увеличение жесткости пластины в 1,8-2 раза по сравнению с обычной жесткостью (см. табл. 1). Примечательно, что в этих решениях ТО ребра расположены не по всему контуру пластин, что позволяет сохранить некоторый дополнительный объем материала для улучшения и увеличения ребер внутри области оптимизации.

В разделе 3.3 рассмотрена тестовая задача для квадратной свободно опертой пластины, нагруженной смещенной поперечной силой. Решения ТО для такой задачи содержат несколько прямых ребер, ориентация которых зависит от относительного смещения точки нагрузки от центра пластины. Используя соответствующую модель балочного типа (в которой остаются только ребра и пренебрегается влиянием лицевого листа пластины), мы показываем, что подобное уникальное оптимальное решение для ребер может быть получено аналитически, чтобы можно было проверить численные решения ТО.

Реализация рассматриваемой задачи оптимизации (1) и модели пластины (2-5,7) была выполнена в интерфейсе "Shell" в Comsol Multiphysics.

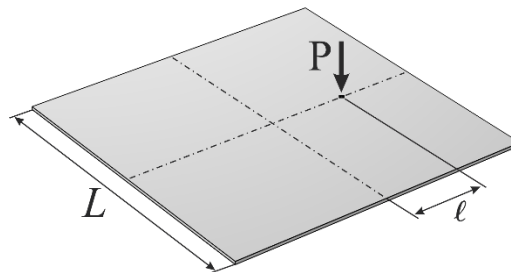


Рис. 8. Контрольная задача для пластины, нагруженной эксцентрической силой

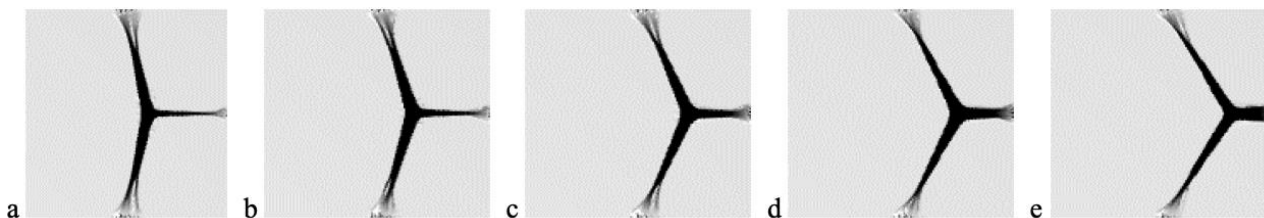


Рис. 9. Решения ТО для контрольной задачи для квадратной пластины, нагруженной эксцентрической силой (ребра пересекаются под точками нагрузки), а:  $\ell / L = 0.1$ , б:  $\ell / L = 0.167$ , в:  $\ell / L = 0.25$ , д:  $\ell / L = 0.3$ , е:  $\ell / L = 0.375$ . Толщины оптимизированных пластин представлена в градации черного и белого цвета.

Плоская рама представлена на рис. 10. Рама нагружена единичной нагрузкой  $P$  в соответствии с исходной задачей для пластины (рис. 8). Рама состоит из трех сегментов в соответствии с решениями ТО для пластин переменной толщины (рис. 9).

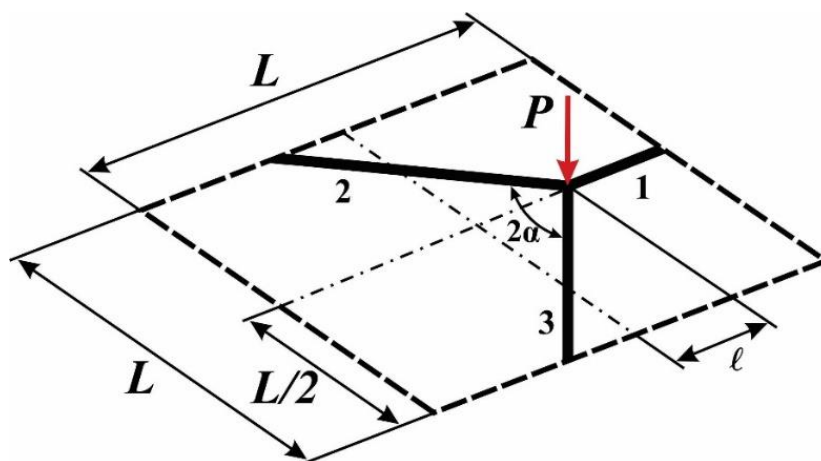


Рис. 10. Задача для плоской рамы, используемая для аналитической проверки решений ТО

Короткий сегмент (позиция 1 на рис. 10) соединяет нагруженную точку с положением ближайшего края пластины. Длина этого сегмент ( $L_1 = L / 2 - \ell$ ) определяется заданным положением нагруженной точки. Два других сегментов (позиции 2, 3 на рис. 10) расположены симметрично относительно первого. Эти сегменты соединяют нагруженную точку с положениями боковых граней пластины. Угол  $2\alpha$  между сегментами 2 и 3 должен быть определен на основе решения задачи по обеспечению минимальных деформаций в нагруженной точке рамы. Мы предполагаем, что сегменты 2 и 3 могут быть прикреплены только к боковым краям пластины, т.е. что угол  $\alpha$  изменяется в диапазоне

$$\arctan(1 + 2\ell / L)^{-1} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} + \arctan(1 - 2\ell / L) \quad (9)$$



Все сегменты имеют прямоугольные сечения  $d_i \times h_{max}$  ( $i = 1...3, d_2 = d_3$ ) и поддерживаются на концах.

Деформации рамы могут быть оценены в соответствии со стандартным подходом для моделей балочного типа. Мы будем рассматривать теорию балок Эйлера-Бернулли. В силу симметрии задачи, в сегменте 1 не будет кручения, и его прогибы из-за изгиба могут быть определены следующим образом:

$$w_1(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + a_3z^3, \quad 0 \leq z \leq L_1 \quad (10)$$

где  $a_i$  - неизвестные коэффициенты; и  $z$  - локальная координата вдоль длины сегмента которая начинается от его поддерживаемого конца.

В силу симметрии, деформированное состояние сегментов 2 и 3 одинаково (вплоть до знака угла закручивания), поэтому можно рассматривать только один из этих сегментов. Поэтому деформации и угол закручивания сегмента 2 определяется следующим образом:

$$w_2(z) = b_0 + b_1z + b_2z^2 + b_3z^3, \quad \phi(z) = c_0 + c_1z, \quad 0 \leq z \leq L_2 \quad (11)$$

где  $z$  - локальная координата, отсчитываемая от точки нагружения;  $L_2 = L / (2\sin\alpha)$  - длина участка 2;  $b_i, c_i$  - неизвестные коэффициенты.

В представленной форме решения (10), (11) мы имеем 10 неизвестных коэффициентов, которые должны быть найдены из граничных условий и условий непрерывности. Граничные условия задачи, следующие:

$$w_1(0) = 0, \quad M_1(0) = 0, \quad w_2(L_2) = 0, \quad M_2(L_2) = 0, \quad \phi(L_2) = 0 \quad (12)$$

где  $M_i(z) = D_i\theta'_i(z)$  - изгибающие моменты;  $\theta_i(z) = -w'_i(z)$  - углы поворота при изгибе;  $D_i = d_i h_{max}^3 / 12$  - изгибные силы сегментов; простым знаком обозначена производная по длине сегментов (по локальной координате  $z$ ).

Условия непрерывности в точке пересечения сегментов 1 и 2 (точка нагружения) задаются с учетом угла наклона  $\alpha$ . Для смещений  $w_i$ , углов поворота  $\theta_i$  и угла закручивания  $\phi$  имеем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} w_1(0) &= w_1(L_1) \\ \theta_2(0)\cos\alpha + \phi(0)\sin\alpha &= \theta_1(L_1) \\ -\theta_2(0)\sin\alpha + \phi(0)\cos\alpha &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

где мы принимаем во внимание отсутствие кручения в сегменте 1.

Также необходимо прописать условие непрерывности для изгибающих и крутящих моментов и условие для поперечной силы. Эти условия могут быть определены следующим образом:

$$M_2(0)\cos\alpha + T(0)\sin\alpha = \frac{1}{2}M_1(L_1) \quad (14)$$

$$Q_2(0) = \frac{1}{2}(Q_1(L_1) - P)$$

где  $T(z) = S\phi'(z)$  - крутящий момент, а  $S$  - жесткость на кручение в сегменте 2; и мы учитываем, что из-за симметрии только половина изгибающего момента и поперечной силы (включая заданную нагрузку  $P$ ) поступает из сегмента 1 в сегмент 2.

Из системы линейных уравнений (12) - (14) мы можем легко найти 10 коэффициентов решения (10), (11) аналитически. Для краткости мы не приводим здесь явные соотношения для этих коэффициентов. Исходя из полученного решения, прогибы в точке нагружения рамы могут быть представлены в следующем виде:

$$w_1(L_1) = w_2(0) = \frac{(L - 2\ell)LP}{12D_2} \bar{w}(\alpha), \quad (15)$$

$$\bar{w}(\alpha) = \frac{(2\bar{d} + \xi(3 + \bar{S}) + \xi(3 - \bar{S})\cos(2\alpha))}{\sin(\alpha)(6\xi^2 + 2\xi^3\bar{S} + \bar{d}(3 + \bar{S}) + 12\xi\bar{d}\cos(\alpha) - (2\xi^3\bar{S} - \bar{d}(3 - \bar{S}))\cos(2\alpha))}$$

где  $\bar{d} = d_1 / d_2$  - отношение между шириной поперечного сечения сегментов 1 и 2;  $\bar{S} = S / D_2 \approx 0.65$  - отношение между крутильной и изгибной жесткостью сегмента 2, для которого мы назначаем квадратное поперечное сечение; и  $\xi = (1 - 2\ell / L)\sin(\alpha)$ .

Таким образом, для заданных размеров рамы ( $L$ ) и заданного положения точки нагружения ( $\ell$ ) можем оценить зависимость деформаций  $w_1(L_1)$  от угла  $\alpha$ . Эта зависимость определяется безразмерной функцией  $\bar{w}(\alpha)$  в соотношении (15). Как видно из рис. 11, эта функция имеет единственный минимум для заданных значений  $\ell / L$  и  $\bar{d}$ . Поэтому мы можем найти значение угла  $\alpha_{opt}$ , которое обеспечивает минимальное значение деления  $w_1(L_1)$ . В рамках модели балочного типа найденный угол  $\alpha_{opt}$  является оптимальным углом, обеспечивающим наибольшую жесткость рамы. Более того, можно показать, что это оптимальное значение всегда принадлежит диапазону, заданному соотношением (9). Сравнение численного (ТО) и аналитического решений представлено на рис. 12. Видно, что получена хорошая согласованность относительного найденного оптимального угла между ребрами жесткости в рассматриваемой тестовой задаче.

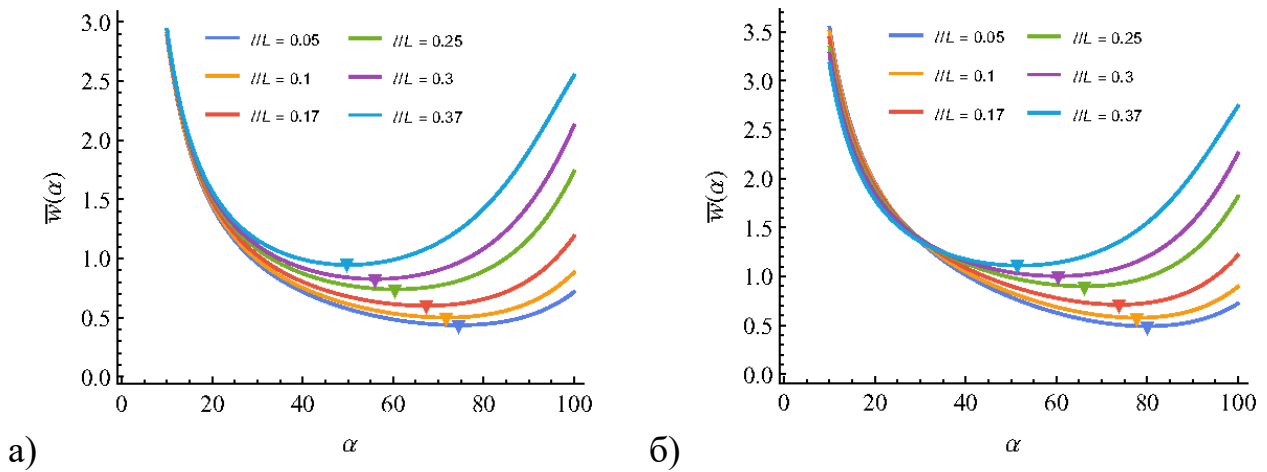


Рис. 11. Зависимость безразмерных деформаций  $\bar{w}$  от угла наклона  $\alpha$  сегментов в модели балочного типа (а:  $\bar{d} = 1$ , б:  $\bar{d} = 0.5$ ). Минимумы функций показаны треугольными точками на графиках.

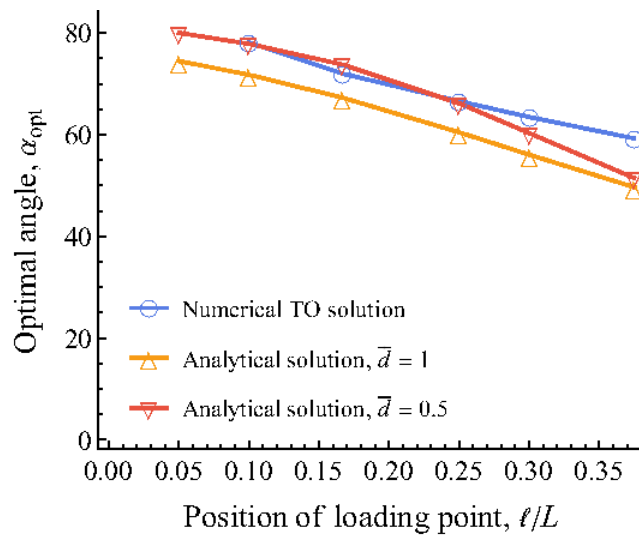


Рис. 12. Сравнение оптимальных углов между ребрами, найденных в численных решениях ТО для пластин переменной толщины и в соответствующем аналитическом решении для плоской рамы

В разделе 3.4 рассмотрены эксперименты на оптимизированных пластинах, разработанных с использованием ТО и ПО для граничных условий (5) (фиксированные углы) и для случаев нагружения одной центральной или эксцентрической силой и двумя симметричными силами (рис. 13 а-д). Оптимизированные пластины были изготовлены с помощью технологии 3d-печати. Мы использовали полимерный материал PETG (FDplast) и FDM 3D принтер Original Prusa i3 MK3S. Мы масштабировали полученную геометрию пластин с коэффициентом 1,66 так, что начальная длина края пластины  $L = 300$  мм уменьшилась до  $L = 180$  мм, а максимальная высота ребер изменилась с  $h_{rib} = 30$  мм до  $h_{rib} = 18$  мм и т.д. Результаты испытаний пластин показаны на рис. 14. Показано, что пластины спроектированы на основе ТО во всех

рассмотренных вариантах испытаний превосходят по жесткости пластин, спроектированные с прямолинейными ребрами жесткости.

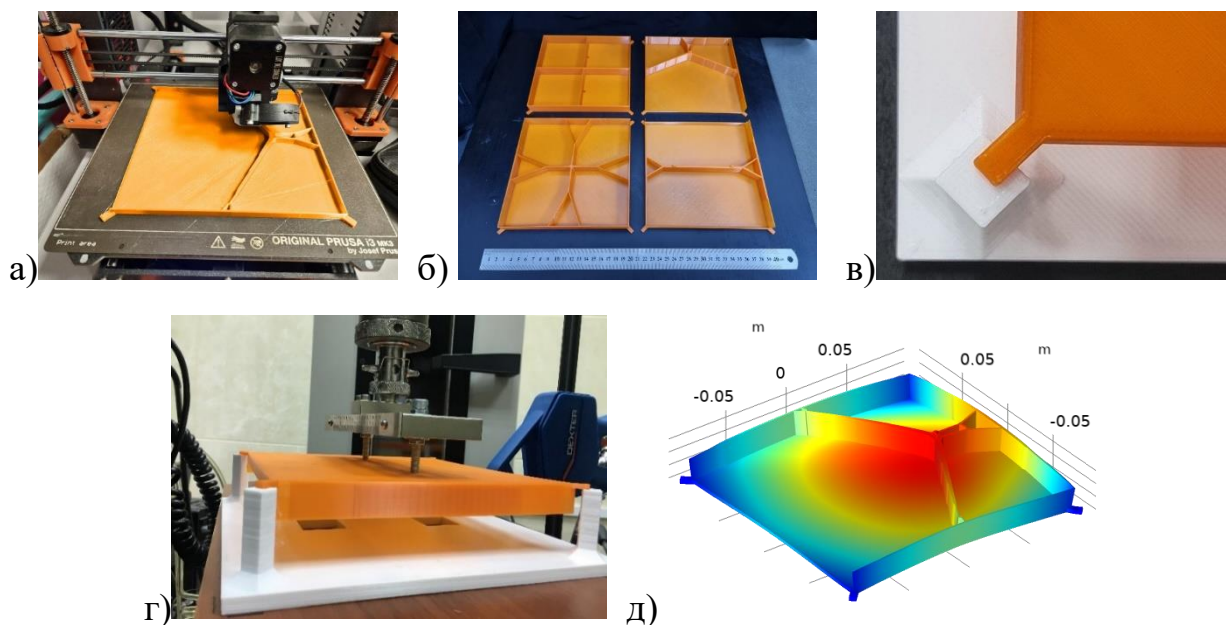


Рис. 13. а) Изготовление оптимизированных ребристо-жестких пластин с помощью 3D-печати, (б): Печатные пластины, оптимизированные с помощью ПО (слева вверху) и ТО (остальные), (в): экспериментальная процедура с оптимизированной пластиной, поддерживаемой по углам и нагружаемой сосредоточенными силами, (г): Контакт с опорой, (д): Пример моделирования для экспериментальных испытаний (поле прогибов в миллиметрах для эксцентрической силы  $P = 21$  Н)

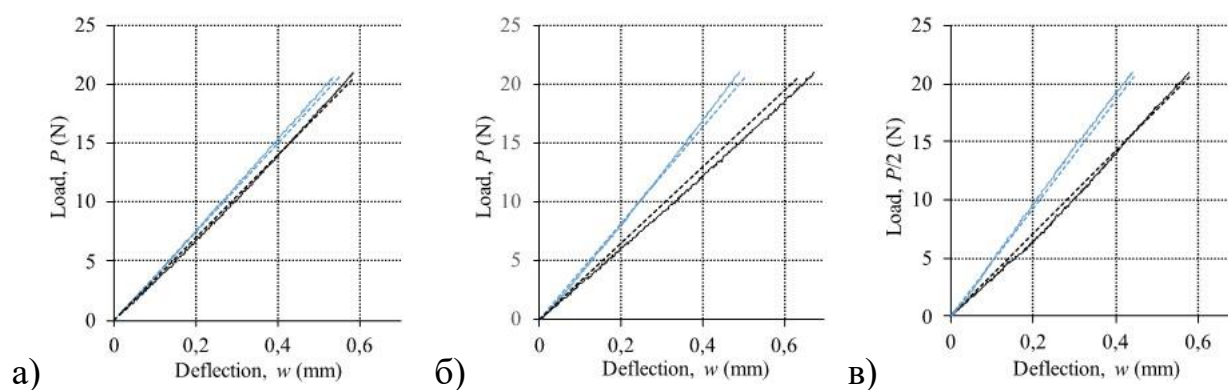


Рис. 14. Кривые нагрузка/прогиб, полученные в экспериментах (сплошные линии) и при моделировании (пунктирные линии) для оптимизированных пластин, полученных с помощью ТО (синие линии) и ПО (черные линии), (а): центральная сила, (б): эксцентрическая сила, (в): две силы

**В четвертой главе** представлены результаты расчетов, реализованных с использованием предложенных методов ТО для составных конструкций. Рассмотрены примеры ТО для плоских металло-композитных панелей, в

которых металлические элементы выполнены из сплава Д16 с характеристиками  $E = 72$  ГПа,  $\nu = 0.33$ ,  $\sigma_{0,2} = 420$  МПа, а композитные элементы – из углепластика с упругими характеристиками однонаправленного слоя  $E_1 = 140$  ГПа,  $E_2 = 11$  ГПа,  $G_{12} = 5.5$  ГПа,  $\nu_{21} = 0.27$  и с прочностными характеристиками:  $X^+ = 2000$  МПа,  $X^- = 1200$  МПа,  $Y^+ = 50$  МПа,  $Y^- = 170$  МПа,  $T = 70$  МПа.

Геометрия металло-композитной плоской панели для проведения ТО дана на рисунке 15.

Оптимизация металлокомпозитной панели дана на рисунке 16.

Результаты ТО для панелей 20x20 см с металлической обшивкой и композитными подкрепляющими элементам, нагруженными давлением и сосредоточенным усилием на площадке 1x1 см по центру представлены на рисунке 17.

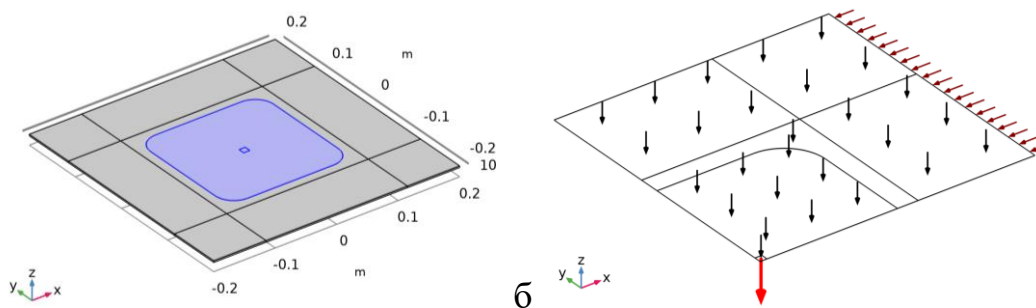


Рис. 15. а: Геометрия металло-композитной плоской панели для проведения ТО, б: задаваемые нагрузки в модели – давление на всей поверхности, сжатие в плоскости и усилие на малой площадке по центру панели (показана 1/4 часть модели с учетом симметрии).

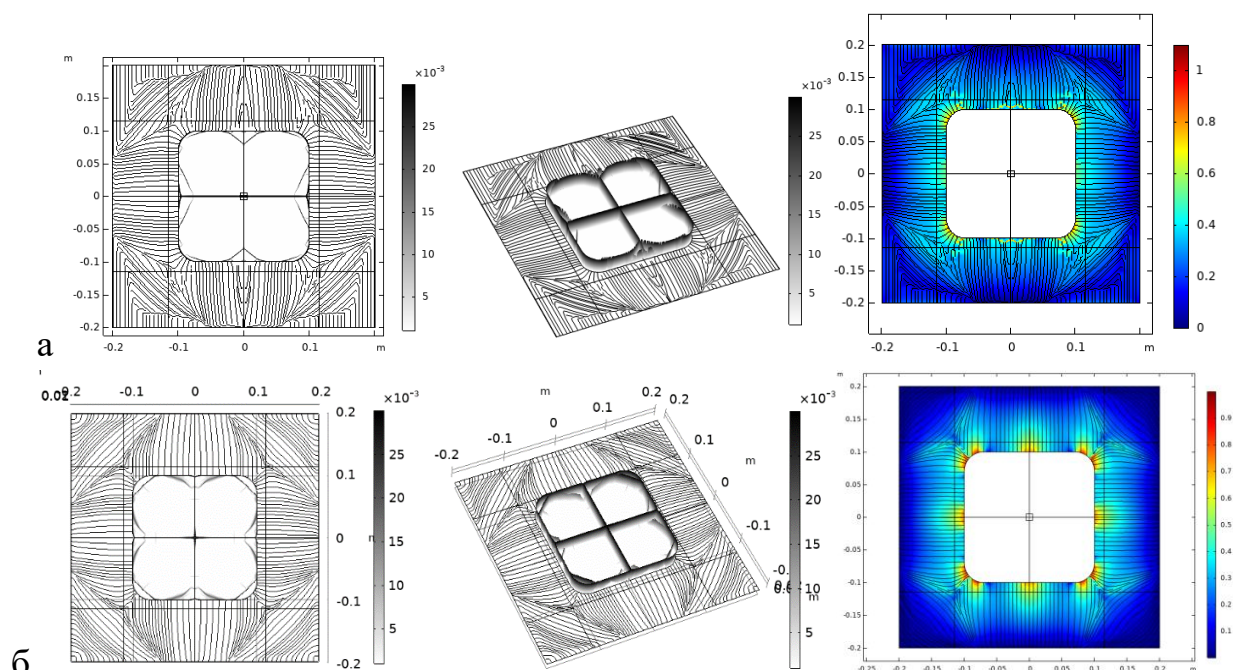


Рис. 16. Оптимизация металлокомпозитной панели. Центральная часть – металлическая, в которой проводится ТО; окружающая зона – композитная, в которой выбирается схема армирования. а: оптимизация без дополнительных ограничений, б: оптимизация с ограничением на прочность композитной части панели. Показана схема армирования (слева), 3д геометрия ребер жесткости (в центре) и распределение значений критерий прочности (справа).

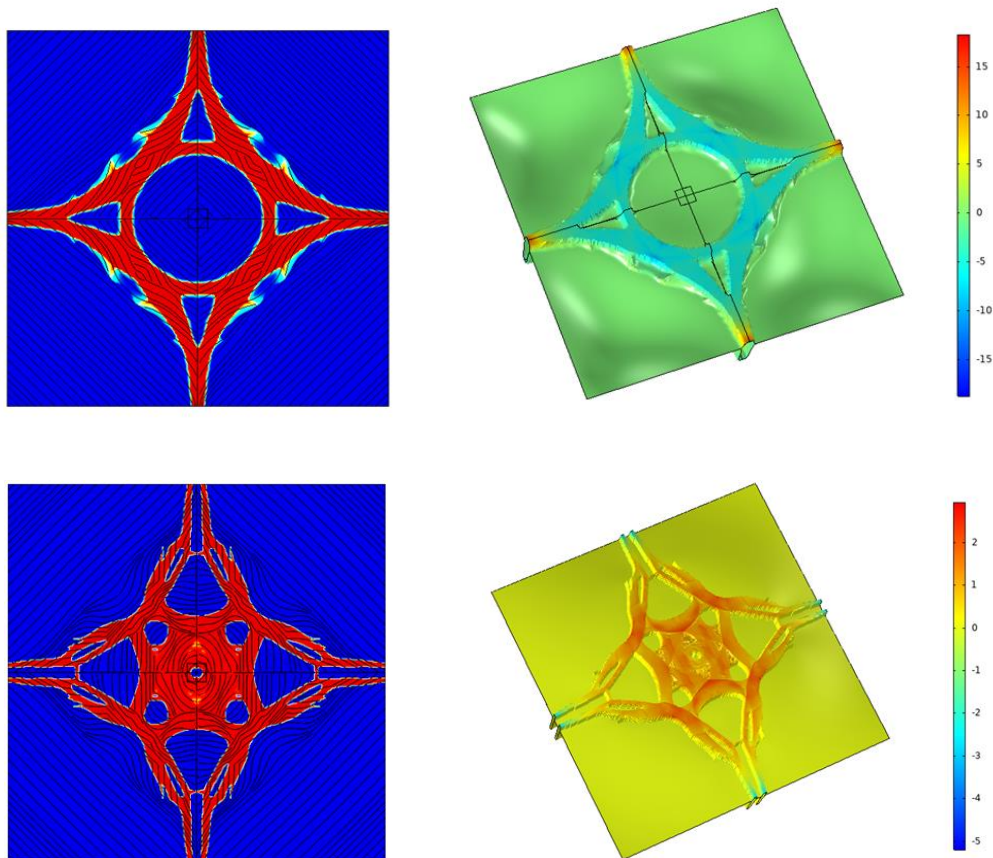


Рис. 17. Результаты ТО для панелей 20x20 см с металлической обшивкой и композитными подкрепляющими элементами, нагруженными давлением (а) и сосредоточенным усилием на площадке 1x1 см по центру (б). На рисунках справа показано распределение максимальных главных напряжений [МПа].

## **Основные результаты диссертационной работы:**

1. Предложен метод топологической оптимизации подкрепленных металлических и металло-композитных конструкций, основанный на введении функции фиктивной плотности для определения локальной толщины тонкостенных элементов конструкций, работающих в условиях сложно-напряженного состояния.

2. Проведено конечно-элементное моделирование с помощью пакета программ COMSOL Multiphysics с целью топологической оптимизации тонкостенных элементов конструкций на основе численного конечно-элементного моделирования и методов оптимизации.

3. Получено аналитическое решение для определения оценки оптимального расположения ребер прочности и жесткости. Предложенное решение использовано для валидации эффективности реализованной численной методики ТО.

4. Проведены механические экспериментальные исследования образцов и оптимизированной панели из полимерного материала PETG (FDplast), синтезированных на установке трехмерной печати, получены механические характеристики по результатам испытаний на трехточечный изгиб и определены НДС панели.

## **СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРАЦИИ**

### **Статьи в журналах из перечня ВАК:**

1. Чжо Йе Ко., Соляев Ю.О. Топологическая оптимизация подкрепленных панелей, нагруженных сосредоточенными силами. Труды МАИ. ISSN: 1727-6942. 2021. № 120, <http://trudymai.ru/published.php?ID=161420>

2. Чжо Йе Ко., Рабинский Л.Н. Оценка эффективности метода топологической оптимизации подкрепленных панелей на основе аналитических решений тестовых задач // Труды МАИ. 2023. № 129. DOI: 10.34759/trd-2023-129-07

### **Статьи в журналах, индексируемых Scopus:**

3. Kyaw Ye Ko., Yury Solyaev., Arseniy Babaytsev., Sergey Lurie., Lev Rabinskiy., Ivan Kondakov. Theoretical and experimental validation of the variable-thickness topology optimization approach for the rib-stiffened panels. Continuum Mech. Thermodyn. <https://doi.org/10.1007/s00161-023-01224-w>

4. Kyaw Ye Ko., Yury Solyaev. Explicit benchmark solution for the topology optimization of the variable-thickness plates. Math. Mech. Complex Syst. 2023. Принято в печать.



### **Прочие публикации по теме диссертации:**

5. Чжо Йе Ко., Соляев Ю.О. Применение методов топологической оптимизации для выбора геометрии силового набора подкрепленных панелей. 19-й Международная конференция "Авиация и космонавтика" МАИ. 2020 г.

6. Чжо Йе Ко., Рабинский Л.Н. Оценка корректности решений задач топологической оптимизации подкрепленных панелей, полученных на основе теории пластин Миндлина-Рейсснера. Международная молодежная научная конференция. Секция "Механика и моделирование материалов и технологий". Москва, 2021 г.

7. Чжо Йе Ко., Соляев Ю.О., Рабинский Л.Н. Топологическая оптимизация оробренных панелей, нагруженных сосредоточенными силами. Международная конференция «Космические системы». МАИ. 2021 г.

8. Чжо Йе Ко., Соляев Ю.О., Рабинский Л.Н. Методика топологической оптимизации геометрии подкрепляющих элементов плоских панелей. Международная конференция «Композитные материалы и конструкции». МАИ. 2021 г.

9. Чжо Йе Ко., Соляев Ю.О., Бабайцев А.В. Топологическая оптимизация оробренных панелей, нагруженных различными силами. XI Международная научно-практическая конференция «Проблемы безопасности на транспорте». Гомель. 2021 г.

10. Чжо Йе Ко., Бабайцев А.В., Чубаров В.С., Исследование остаточных деформаций в зависимости от условий печати. Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред Материалы XXVIII международного симпозиума имени А.Г. Горшкова. 2022 г.

11. Чжо Йе Ко., Рабинский Л.Н. Топологическая оптимизация подкрепленных панелей на основе аналитических решений. Динамические и техно-логические проблемы механики конструкций и сплошных сред Материалы XXIV международного симпозиума имени А.Г.Горшкова. 2023 г.

12. Чжо Йе Ко., Рабинский Л.Н. Соляев Ю.О. Теоретическое и экспериментальное обоснование подхода к оптимизации топологии переменной толщины для ребристо-жестких панелей. Динамические и техно-логические проблемы механики конструкций и сплошных сред Материалы XXIV международного симпозиума имени А.Г.Горшкова. 2023 г.