

ББК 39.52

Принципы и алгоритмы формирования системы математических моделей целевой миссии беспилотного ЛА.

В.Е. Усачов, Р.Ч. Таргамадзе

Аннотация. Рассматриваются принципы, методы и алгоритмы формирования составной динамической системы, моделирующей с заданной точностью целевую миссию беспилотного ЛА. Оценка точности такой модели осуществляется на основе критериев качества выполнения этапов миссии. Учитываются также компьютерные затраты на реализацию формируемых вариантов составных динамических систем. Рассматриваются источники многообразия моделей: формы описания динамики БЛА, внешних возмущений. Предлагается применение пространственного случайного поля для высокоточного моделирования ветровых воздействий на беспилотный ЛА.

Ключевые слова: беспилотный ЛА; целевые миссии; математические модели; компьютерное моделирование; точность моделирования, критерии качества.

Математическое (компьютерное) моделирование управляемого функционирования беспилотного ЛА (БЛА) является важным обоснованием его безопасного полета.

Формирование математической модели или системы моделей полета БЛА как сложной (составной) динамической системы заключается в выборе форм, методов и алгоритмов описания процесса меняющихся состояний БЛА, наилучших с точки зрения принятого критерия качества модели.

Основной характеристикой математической (компьютерной) модели любого физического процесса, в частности управляемого функционирования БЛА является её точность по заданному показателю. Однако немаловажными являются и показатели ресурсных затрат на моделирование, определяющие также и время получения прогноза.

Каждой математической модели (ММ) в пространстве состояний объекта исследований соответствует область (области адекватности модели), в которой точность модельного прогноза функционирования объекта не ниже определенного значения по принятому критерию. При этом всё пространство возможных состояний объекта, в частности БЛА, должно моделироваться множеством моделей, каждая из которых с требуемой точностью описывает функционирование (движение) объекта в соответствующей области [1]

Целевая миссия БЛА состоит из совокупности локальных задач (целей), характеризующихся локальными критериями эффективности. Это также вызывает необходимость построения множества ММ.

Таким образом, процесс формирования ММ миссии БЛА включает следующие стадии:

1. Анализ целевой задачи и формирование критериев эффективности ее выполнения.
2. Анализ физической сущности процессов, определяющих функционирование БЛА в рамках локальных задач, и формирование соответствующих ММ.
3. Анализ качества ММ в соответствии с принятыми локальными критериями и определение областей их наилучшего применения.

Погрешность моделирования, являющаяся противоположным понятием точности, оценивается по степени близости показателя точности модели к реальному его значению или к аналогичному значению эталонной модели. В связи с этим крайне важно корректно задать критерий качества модели, который, очевидно, должен быть связан с целями миссии БЛА.

Цели миссии БЛА и оценки их достижения.

Любая миссия, исходя из конкретных средств достижения цели, может быть представлена в виде последовательно выполняющихся этапов. Наиболее естественным способом описания этапов миссии является её сценарий или циклограмма миссии.

Как правило, каждый этап миссии имеет ярко выраженные целевые особенности, определяемые функциональной необходимостью того или иного этапа. При этом, очевидно, что математические модели должны отображать с заданной точностью именно эту специфику. Для оценивания точности моделирования этапов миссии необходимо определить соответствующие числовые показатели – критерии точности, по которым должна быть сформирована составная динамическая система (ДС), отображающая процесс реализации миссии БЛА.

Очевидно, что различным целям будут соответствовать различные сценарии миссии БЛА. Кроме того, даже при одних и тех же целях возможны различные варианты сценариев и соответственно различные этапы миссии, оцениваемые, в общем случае, различными показателями (критериями) качества выполнения миссии.

Таким образом, для создания объективной, близкой к реальной, математической (компьютерной) модели управляемого функционирования БЛА и формирования соответствующих критериев её качества, необходима разработка сценариев миссии. Ниже приводится пример одного из распространенных сценариев миссии БЛА (сценарий определяется этапами миссии).

Этапы миссии:

1. Набор высоты перелёта. Задача: достижение определенной точки пространства или реализация определенной траектории взлета.
2. Проведение навигационного маневра (например, для определения ветровой обстановки на высоте полета). Задача: реализация определенной траектории.
3. Перелёт к объекту наблюдения. Задача: реализация траектории, оптимальной в смысле

минимума затрат бортовых энергетических ресурсов.

4. Проведение наблюдения. Задача: реализация углового движения и движения центра масс БЛА, определяемых требованиями к качеству видеoinформации.
5. Передача информации по радиоканалу (может не быть).
6. Перелёт к следующему объекту наблюдения. Задача: достижение точки в пространстве по заданному (корректируемому) навигационному плану.
7. Проведение наблюдения. Задача: реализация углового движения и движения центра масс БЛА, определяемых требованиями к качеству видеoinформации.
8. Возвращение в заданную область или точку. Задача: реализация определенной траектории.
9. Посадка. Задача: реализация заданной траектории и/или достижение заданной точки.

Критерии эффективности выполнения этапа миссии определяются локальными целями и задачами. Так, если цель этапа миссии- достижение объекта наблюдения по заданной траектории, то критерием эффективности выполнения этапа может быть точность реализации этой траектории. Критерием же качества ММ, применяемой для моделирования траектории-точность прогноза траектории.

Не вызывает сомнений, что каждый из указанных критериев имеет численную оценку. Однако, имея в виду, что речь идет о «процессах», т.е. каждая операция совершается по времени, то в общем случае эти оценки являются функционалами и зависят от функций управлений и возмущений, действующих на соответствующем этапе миссии.

Опираясь на критерии качества математической (компьютерной) модели функционирования БЛА на некотором этапе своего полета, можно определить численные оценки погрешности (точности) моделирования как одного из функционалов известных видов [2]:

$$\delta_i^{j(\max)} = \max_{t \in [t_0, t_k]} |x_i^{j(R)}(t) - x_i^{j(M)}(t)| \quad (1)$$

$$\delta_i^{j(\text{int})} = \int_{t_0}^{t_k} |x_i^{j(R)}(t) - x_i^{j(M)}(t)|^m dt \quad (2)$$

где $x_i^{j(R)}(t)$ и $x_i^{j(M)}(t)$ i -е составляющие вектора состояния БЛА в момент времени t на j -ом этапе полета; верхние индексы в скобках обозначают принадлежность вектора x к реальному процессу – R и, соответственно, - к математической (компьютерной) модели - M .

Функционал оценки точности может быть связан с любым моментом времени движения $t^j \in [t_0^j, t_k^j]$ (верхние индексы j обозначают принадлежность к j -ому этапу полета). В

частности, в последний момент времени j -ого этапа полета функционал точности может иметь вид:

$$\delta_i^{j(k)} = |x_i^{j(R)}(t_k) - x_i^{j(M)}(t_k)|^m \quad (3)$$

Требования к допустимой погрешности математической (компьютерной) модели на рассматриваемом этапе полета БЛА можно представить в виде

$$\delta_i^j \leq \varepsilon_i^j \quad (4)$$

где δ_i^j - является i -м показателем погрешности динамической системы на j -м этапе полета БЛА, а ε_i^j - предельно допустимая величина этого показателя, характеризующая точность формируемой математической модели.

В общем случае, в силу случайной природы или бесконечной сложности реальных физических процессов функционалы (1) - (3) являются случайными величинами и поэтому не могут служить в качестве показателей погрешности математических моделей в представленном виде. Кроме того, сама формируемая математическая модель может включать стохастические составляющие и тогда обе сравниваемые функции $x_i^{j(R)}(t)$ и $x_i^{j(M)}(t)$ будут случайными. В такой, более сложной трактовке, точность погрешности математического моделирования характеризуется функцией распределения вероятностей одного из перечисленных функционалов. Если функция реального распределения вероятности близка к нормальному закону, то в качестве оценок точности моделирования могут быть использованы моментные характеристики распределения: математическое ожидание и дисперсия [2]. Задавая вероятность, с которой желательно проверить точность моделирования, например, 0.9973, можно записать условие допустимой погрешности моделирования:

$$6 \sqrt{D_i^j} \leq \varepsilon_i^j \quad (4)$$

где D_i^j - дисперсия случайных разбросов i -го критерия погрешности (точности) моделирования на j -ом этапе полета.

Поэтапный анализ точности динамических систем, основанный на сравнении с результатами экспериментального полета ЛА, пока весьма проблематичен. Более рациональный путь, который вполне доступен на современном уровне компьютерной техники - это сравнительный анализ различных по точности математических моделей движения и оценка их относительной погрешности.

Формально относительные показатели погрешности будут иметь вид, аналогичный выражениям (1) - (3), только вместо фазовых координат реального процесса, помеченных индексом "R", необходимо использовать фазовые координаты так называемых эталонных

математических моделей, которые помечаются индексом "Э" и служат для получения сравнительной оценки погрешности формируемой модели.

**Методика формирования математической модели
этапа полета БЛА согласно требованию точности
моделирования.**

Структура и конкретное наполнение математической модели полета ЛА определяется следующими факторами.

1. Выбором системы отсчета, принимаемой в качестве инерциальной.
2. Составом учитываемых сил и моментов сил.
3. Системами координат, выбранными для проецирования векторных уравнений динамической системы.
4. Формами математического описания динамической системы, сил и моментов сил, учитываемых при моделировании.
5. Полнотой учета в модели движения центра масс и вокруг центра масс ЛА.
6. Областью действия математической модели этапа полета ЛА.

С точки зрения значимости факторов для точности описания движения ЛА указанные факторы можно разделить на две группы:

- Факторы, определяющие опорное движение ЛА (базовые факторы, или факторы «ядра» модели);
- Факторы, отклоняющие (возмущающие) опорное движение ЛА.

Поскольку в первую группу попадают факторы, которые определяют основное воздействие на движение ЛА, то вопрос об их учете или не учете не возникает, например для БЛА:

- Топоцентрическая система координат используется в качестве инерциальной системы отсчета.
- Сила притяжения Земли воздействует на БЛА согласно плоскопараллельной модели гравитационного поля, а фигура Земли представляется плоской (в области полета БЛА).
- Основная (номинальная) аэродинамическая сила, определяющаяся стандартными параметрами атмосферы Земли в зоне полета БЛА.

Во вторую группу попадают факторы вызывающие различные отклонения от опорного (номинального) движения, часто называемые возмущающими (отклоняющими).

В общем случае таких факторов бесконечное множество, однако, учитываться должны только те из них, которые оказывают влияние на движение БЛА большее, чем допустимая погрешность.

Алгоритм отбора существенных возмущающих факторов относительно прост и может быть выражен следующей алгоритмической формулой.

$$|\delta_i^j(p_m) - \delta_i^j(p_m = 0)| \leq \varepsilon^j \quad (5)$$

где p_m – m -ый фактор точности моделирования (условное равенство его нулю означает его отсутствие).

Другими словами это означает, что если критериальный показатель точности (погрешности) δ_i^j при наличии m -ого фактора точности не отличается от аналогичной оценки без его учета на предельно допустимую величину погрешности формируемой математической модели, то фактор p_m может не учитываться.

В итоге проведения такого факторного отбора формируется математическая модель движения БЛА, имитирующая с требуемой точностью его полет на определенном этапе.

**Базовая (опорная) математическая модель движения
БЛА на этапе его перелёта к месту выполнения
задания.**

Для формирования базовой математической модели движения БЛА на этапе его перелёта к месту выполнения задания необходимо ввести несколько гипотез, не вызывающих сомнений в смысле понижения точности модели при разумных требованиях к предельной погрешности моделирования:

- В качестве инерциальной системы отсчета определяется система координат связанная с поверхностью Земли в области полетов БЛА.
- На БЛА воздействует плоскопараллельное гравитационное поле (ускорение силы тяжести постоянно и равно $g = 9.81 \frac{M}{c^2}$), а фигура Земли представляется плоской в области полетов БЛА.
- Для проецирования сил и моментов сил, действующих на БЛА, выбирается прямоугольные системы координат: одна, совпадающая с главными осями инерции БЛА, и другая, направленная главной осью по скорости движения БЛА.
- Деформация конструкции БЛА в полете отсутствует.

С учетом указанных предположений опорная математическая модель движения БЛА в проекции на связанную систему координат имеет вид:

$$\begin{aligned}
m\left(\frac{dV_x}{dt} + V_z\omega_y - V_y\omega_z\right) &= F_x \\
m\left(\frac{dV_y}{dt} + V_x\omega_z - V_z\omega_x\right) &= F_y \\
m\left(\frac{dV_z}{dt} + V_y\omega_x - V_x\omega_y\right) &= F_z \\
I_x\frac{d\omega_x}{dt} + (I_z - I_y)\omega_y\omega_z &= M_x \\
I_y\frac{d\omega_y}{dt} + (I_x - I_z)\omega_z\omega_x &= M_y \\
I_z\frac{d\omega_z}{dt} + (I_y - I_x)\omega_x\omega_y &= M_z
\end{aligned} \tag{6}$$

где m – масса БЛА;

I_x, I_y, I_z – главные моменты инерции БЛА;

V_x, V_y, V_z – проекции вектора скорости на оси связанной системы координат;

$\omega_x, \omega_y, \omega_z$ – проекции вектора угловой скорости на оси связанной системы координат;

M_x, M_y, M_z – проекции вектора суммарного момента сил;

F_x, F_y, F_z – проекции равнодействующей сил.

Силы и моменты сил, действие которых определяют движение БЛА и их воздействие гарантировано превосходят предельные погрешности моделирования для выбранного критерия точности, например продолжительности полета БЛА, и на рассматриваемом этапе, включают:

- Силу притяжения Земли, создаваемую плоскопараллельным гравитационным полем с ускорением свободного падения $g = 9.81 \frac{M}{c^2}$ у поверхности Земли, соответственно, все моменты сил, создаваемые этой силой.
- Аэродинамические силы и моменты, вызываемые действием атмосферы Земли в процессе движения БЛА.
- Сила тяги двигателя БЛА или суммарной тяги двигательной установки БЛА, работающей в рамках номинальных условий полета.
- Моменты сил, возникающие от действия номинальных сил тяги.

К числу возмущающих (отклоняющих) сил и моментов сил обычно относят силы и моменты, которые оказывают воздействия, превосходящие предельные погрешности

моделирования для выбранного критерия точности. Такими воздействиями обычно являются отклонения аэродинамических сил, обусловленные факторами нестабильности параметров атмосферы (плотности атмосферы, температуры, давления, скорости звука), а также неспокойностью атмосферы (наличием случайной составляющей пространственного поля ветров).

Строго говоря, при проведении имитационного моделирования с заданной точностью, включение или не включение перечисленных сил и моментов сил в состав учитываемых в модели воздействий нуждается в факторном анализе согласно рассмотренному в данной работе подходу.

Кроме указанных выше факторов, объективно существует множество воздействий на движение БЛА, которые в принципе нуждаются в проверке на учет при имитационном компьютерном моделировании.

Выбор формы математического описания движения БЛА.

Важным вопросом при создании имитационной компьютерной модели полета БЛА является выбор формы её математического описания.

Исходя из случайной природы различных физических воздействий, или из бесконечно сложных причинно-следственных связей, определяющих поведение этих воздействий, наиболее общей формой их математического описания являются **вероятностные** или **стохастические** модели, базирующиеся на статистической информации о внешних проявлениях моделируемых воздействий [2]. Вероятность события, заключающегося в реализации силы величиной $F^{(сл)}$ определяется с помощью функции плотности распределения вероятностей случайного воздействия, определяемой на основе имеющейся статистики, $f(F^{(сл)})$:

$$P(F^{(сл)} \leq F) = \int_{-\infty}^F f(F^{(сл)}) dF^{(сл)}, \quad (7)$$

где P — вероятность события, указанного в скобках; $F^{(сл)}$ — некоторое воздействие, моделируемое как случайная величина; F — некоторое конкретное его значение.

Однако если такая статистика отсутствует, как это часто бывает в реальных исследованиях, то вместо вероятностной модели используется математический аппарат описания ограниченно неопределенных возмущающих воздействий. Такие возмущающие воздействия, как известно [1, 4, 5], определяются своими границами:

$$F^{(\min)} \leq F^{(н)} \leq F^{(\max)}. \quad (8)$$

Здесь $F^{(n)}$ — априори неопределенное воздействие; $F^{(\min)}$, $F^{(\max)}$ — нижняя и верхняя границы области неопределенности воздействия.

Если предположить, что в динамической системе, моделирующей движение БЛА, принята стохастическая модель описания некоторого воздействия, то все координаты движения БЛА, в том числе и его конечное состояние, становятся случайными величинами и функциями. Разбросы i -й координаты конечного состояния БЛА характеризуется соответствующими математическим ожиданием и дисперсией, среднеквадратическим отклонением (СКО):

$$M_{x_i}^{(k)}, D_{x_i}^{(k)}, \sigma_{x_i}^{(k)} .$$

В этом случае процедура выбора формы математического описания силы F (стохастической $F^{(st)}$ или детерминированной $F^{(d)}$) сводится к сравнению квантили случайной величины $x_i^{(k)}$ для заданной меры вероятности [5] с требуемой точностью ε_i .

Определение минимального состава уравнений моделирования движения БЛА, обеспечивающего требования точности.

Процедура статистического моделирования, которую необходимо использовать для проведения факторного анализа, представляет собой весьма трудоемкий процесс, зависящий от сложности анализируемой модели. Поэтому целесообразно стремиться к наиболее простой модели, особенно по ее составу.

Упрощения возможны как по сложности описания движения (движение центра масс и вокруг него), так и по размерности уравнений (пространственное, плоское, одномерное движение).

Для сокращения элементов модели предлагается применить тот же прием, что и для сравнительного анализа состава сил и моментов сил.

$$|\delta_i^j(s_q) - \delta_i^j(s_q = 0)| \leq \varepsilon^j \quad (13)$$

где s_q — фактор, обозначающий наличие q -ого уравнения, определяющего, например, пространственное (плоское) движение или систему, моделирующую движение вокруг центра масс.

Применяя в процессе факторного анализа предлагаемый подход, можно выделить только те факторы, которые вызывают воздействия на движение БЛА, превышающие допустимый предел погрешности модели.

**Анализ влияния перемещения воздуха на точность
моделирования движения БЛА на различных этапах
полета.**

Вектор полной аэродинамической силы обычно определяется в скоростной или полусвязанной системе координат, поскольку аэродинамические коэффициенты определяются экспериментально в аэродинамической трубе.

В скоростной системе координат вектор полной аэродинамической силы записывается в виде:

$$\mathbf{R}' = qS\mathbf{C} = qS \begin{pmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{pmatrix} \quad (14)$$

где $q = \frac{\rho V_\infty^2}{2}$, V_∞ – скорость ЛА относительно воздуха (воздушная скорость), ρ – плотность атмосферы.

На дозвуковых скоростях полета приняты следующие зависимости коэффициентов C_x , C_y и C_z .

$$\begin{aligned} C_x &= C_{x_{\min}} + B(C_y - C_y^*)^2 \\ C_y &= C_{y_0} + C_y^\alpha \alpha + C_y^{\delta_\epsilon} \delta_\epsilon; \\ C_z &= C_z^\beta \beta + C_y^{\delta_H} \delta_H; \end{aligned} \quad (15)$$

где $B = K \frac{1}{\pi \lambda}$, λ – удлинение крыла; K - коэффициент, учитывающий форму крыла, $C_{x_{\min}}$ – минимальное значение коэффициента лобового сопротивления; C_y^* – значение коэффициента подъемной силы, при котором достигается минимум коэффициента лобового сопротивления.

Окончательно вектор полной аэродинамической силы в проекции на оси связанной системы координат будет иметь вид:

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}_{СК \rightarrow СВ} \mathbf{R}' \quad (16)$$

где $\mathbf{A}_{СК \rightarrow СВ}$ – матрица перехода из скоростной системы в связанную систему координат, которая имеет вид:

$$\mathbf{A}_{ck \rightarrow cb} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta & \sin \alpha & -\cos \alpha \sin \beta \\ -\sin \alpha \cos \beta & \cos \alpha & \sin \alpha \sin \beta \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix} \quad (17)$$

Из математической модели аэродинамической силы (14) следует, что возмущающие воздействия на движение БЛА могут возникать из-за вариаций (управляемых и неуправляемых) факторов:

- плотности атмосферы - ρ ;
- скорости БЛА относительно воздуха (воздушной скорости) - V_g ;
- аэродинамических коэффициентов - C_x, C_y, C_z ; M_x, M_y, M_z
- органов управления: рулей высоты - δ_g и направления - δ_n , элеронов δ_y , тяги двигателя.

Учитывая реальную обстановку вокруг движения БЛА и возможные сценарии его движения можно с достаточной для указанного показателя точности моделирования считать, что: аэродинамические коэффициенты конкретного БЛА в течение полета остаются постоянными;

Очевидно, что воздушная скорость БЛА подвержена неконтролируемым вариациям, которые могут повлиять на траекторию БЛА в целом и на затраты энергетике, необходимой для компенсации неблагоприятных для миссии отклонений ключевых параметров движения БЛА. В то же время, имея в виду сложный состав движущихся масс воздуха и различные критерии оценки точности движения БЛА на различных этапах, необходимо проанализировать влияния перемещения воздуха на точность моделирования движения БЛА и дать обоснованные рекомендации по учету различных составляющих движущейся массы воздуха при моделировании.

Воздушная скорость БЛА, ветровые воздействия.

Если считать, что в определенной точке пространства атмосферы в момент времени t вектор воздушной скорости БЛА (скорости набегающего в полете на БЛА потока воздуха) равен \mathbf{V}_g и вектор скорости ветра равен \mathbf{W} , то их сумма определяет вектор \mathbf{V} полной (путевой) скорости БЛА:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_g + \mathbf{W}, \quad (18)$$

Для компьютерного моделирования текущего значения воздушной скорости в процессе полета БЛА необходимо знать составляющие текущего вектора его путевой скорости

$V(t, x)$ и скорости ветра в точке нахождения БПЛА в пространстве атмосферы в текущий момент времени $W(t, x)$.

Что касается $V(t, x)$, то он может быть определен, например, в результате численного моделирования уравнений возмущенного движения БЛА, а скорость ветра $W(t, x)$ может с достаточной степенью точности быть представлена в виде случайного нестационарного пространственно-временного поля согласно имеющимся статистическим данным о ветре в интересующей области атмосферы Земли [3, 4, 5, 6].

Моделирование влияния различных ветровых воздействий на полет БЛА.

К настоящему времени создано множество разнообразных математических моделей ветровых воздействий на ЛА, в том числе пригодных для численного моделирования на ПЭВМ. Однако, в рассматриваемом случае нужна модель, способная с определенной точностью отражать воздействия ветра на БЛА.

Ветром, в широком смысле слова, называется любое движение воздуха относительно земной поверхности. Некоторые составляющие этого движения с точки зрения полета БЛА характеризуются настолько большими масштабами, что их можно рассматривать как движение с постоянной скоростью. Учитывая то, что такое движение воздуха происходит над ограничивающей его земной поверхностью, то можно считать, что среднее направление ветра в вертикальной плоскости практически совпадает в данной точке с горизонтальным направлением [3]. Эти горизонтальные и постоянные скорости движения воздуха оказывают существенное влияние на решение навигационных задач.

Крупномасштабным движениям атмосферы всегда сопутствуют движения воздуха значительно меньшего масштаба, называемые турбулентностью. Под турбулентностью атмосферы с точки зрения практики полетов самолетов принято понимать такое ее состояние, когда в некоторых зонах имеют место порывы ветра, случайные как по величине, так и по направлению, протяженностью от нескольких метров до километров, что весьма существенно сказывается на стабильности полета БЛА. Полет в турбулентной атмосфере приводит к колебаниям центра тяжести ЛА и относительно центра тяжести. При высокой интенсивности турбулентности перегрузки БЛА могут достигать настолько значительной величины, что БЛА может потерять управляемость, а в исключительных случаях — разрушается. Очевидно, что линейные и угловые колебания БЛА, вызываемые

турбулентностью, оказывают существенное влияние на качество работы устанавливаемого на БЛА оборудования: фотоаппаратуры, видеокамер и прецизионных приборов.

Из сказанного видно, что оценка влияния ветровых воздействий на движение БЛА зависит как от характера самого воздействия, так и от критерия оценки этого влияния. Соответственно, учет ветровых воздействий в математической модели полета БЛА зависит от выбора критерия и от допустимой погрешности моделирования.

Полный вектор ветровых воздействий \mathbf{W} может быть условно представлен как сумма постоянной \mathbf{W}_0 и переменной $\mathbf{W}_{\text{тур}}$ составляющих:

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}_0 + \mathbf{W}_{\text{тур}} \quad (19)$$

Согласно введенным ранее сценарию миссии БЛА и соответствующим критериям этапов миссии можно оценить влияние указанных составляющих и принять решение об учете их при компьютерном моделировании всей миссии. С этой целью необходимо разработать математические модели обеих составляющих ветровых воздействий.

М а т е м а т и ч е с к и е м о д е л и п о с т о я н н о й с о с т а в л я ю щ е й в е т р о в ы х в о з д е й с т в и й .

Для моделирования полета БЛА целесообразно рассмотреть имеющиеся данные о скорости ветра в приземном слое атмосферы. Вследствие трения потока воздуха о земную поверхность и местные предметы скорость ветра на малых высотах (начиная с 100-200 м) резко падает при уменьшении высоты. Нужно, однако, иметь в виду, что все профили ветра в очень сильной степени зависят от метеорологических условий в приземном слое. Для решения этой задачи нужны осредненные статистические характеристики ветра на малых высотах, полученные в результате обработки экспериментальных данных.

В ряде работ показано, что вертикальный профиль постоянной составляющей скорости ветра на малых высотах может быть приближенно описан степенным законом:

$$\frac{\mathbf{W}_0}{\mathbf{W}_{01}} = \left(\frac{y_g}{y_{g1}} \right)^n, \quad (20)$$

где \mathbf{W}_0 — математическое ожидание постоянной составляющей ветра;

y_g — высота над земной поверхностью;

n — показатель степени, величина которого зависит от метеоусловий.

Индексом «1» отмечены опорные значения высоты и скорости ветра, на базе которых строится профиль.

Наибольшая высота, для которой можно использовать выражение (20), ограничена значениями $y_g = 300—500$ м.

Величины показателя степени n , заключены в пределах 0,145—0,77, или — в пределах 0,1—0,4 [3]. В результате обработки значительного количества экспериментальных данных установлено, что среднее значение n лежит в пределах 0,15—0,2. Для опорной высоты $y_{g1} = 10$ м рекомендуется принимать значение математического ожидания среднего ветра $W_{01} = 3—4$ м/сек. Профиль среднего ветра на малых высотах, получаемый на основании (20) при $n = 0,2$ и $W_{01} = 4$ м/сек ($W_{01} = 10$ м), показан на рис. 1.

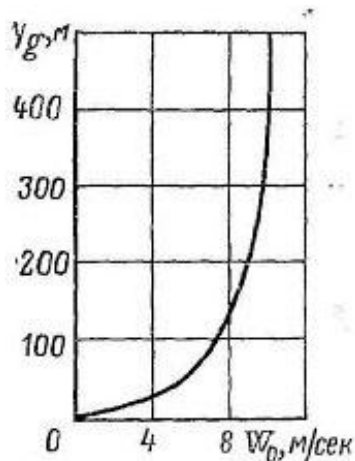


Рис. 1.

Профиль среднего значения ветра на малых высотах

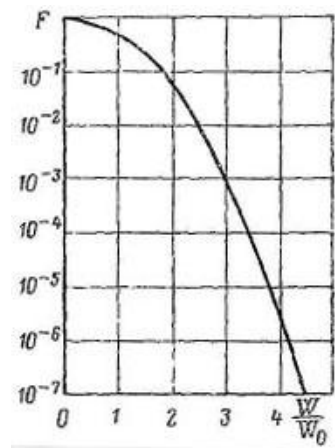


Рис. 2.

Функция распределения вероятности встречи со скоростью, большей некоторого значения V .

Как указывалось выше, постоянная составляющая скорости ветра является случайной величиной. В связи с этим для анализа влияния этой составляющей на полет БЛА необходимо знать вероятность его встречи с ветром той или иной скорости. Экспериментальные данные по распределению вероятности постоянной составляющей модуля скорости ветра для определенной высоты над земной поверхностью достаточно хорошо согласуются с распределением Релея. Плотность распределения Релея для этого случая определяется выражением:

$$f(W) = \frac{\pi}{2} \frac{W}{W_0} e^{-\frac{\pi}{4} \left(\frac{W}{W_0} \right)^2}, \quad (21)$$

где W — значение постоянной составляющей модуля скорости ветра, вероятность встречи которого в полете на высоте y_g определяется; W_0 — среднее значение скорости ветра для полета на высоте y_g , получаемое на основании (20). По плотности распределения (21) может

быть получена функция распределения, показывающая вероятность встречи БПЛА, летящего на высоте y_g , с ветром, постоянная составляющая скорости которого превышает заданный уровень. Эта функция описывается выражением:

$$F(W) = e^{-\frac{\pi}{4} \left(\frac{W}{W_0} \right)^2} \quad (22)$$

На рис. 2. приведен график функции распределения вероятности, построенный на основании (22). Он может применяться для оценки условий большого (в пределе бесконечно большого) числа полетов. Значения $F(W)$ можно интерпретировать так же, как отношение суммарной длительности тех участков полетов, для которых скорость ветра превышает заданный уровень, к общему времени полетов, если это время очень велико.

Использование распределения Релея равносильно допущению о равной вероятности для направления ветра, что не может сильно противоречить действительности, если иметь в виду, что рассматриваются осредненные на большой территории характеристики направления ветра.

М а т е м а т и ч е с к и е м о д е л и т у р б у л е н т н о й с о с т а в л я ю щ е й в е т р о в ы х в о з д е й с т в и й .

Предлагается моделировать скорость турбулентного движения воздуха в любой рассматриваемой точке области, где происходит движение БЛА, как случайную функцию координат этой точки и времени, причем функциями, которые могут быть описаны методами теории случайных функций [2, 7].

Под однородным случайным полем понимается поле, вероятностные характеристики которого одинаковы в любой точке. Под изотропным случайным полем понимается поле, вероятностные характеристики которого не зависят от направления, по которому рассматривается корреляционная связь в двух точках поля. Из общей теории однородной и изотропной турбулентности следует, что для описания поля скоростей в этом случае достаточно знать две корреляционные функции для проекций вектора скорости на оси прямоугольных координат [3].

Пусть математическая модель турбулентной составляющей ветра удовлетворяет следующим требованиям:

- поле скоростей ветра на определенных участках турбулентной атмосферы является однородным и изотропным;
- для летящего БЛА поле скоростей ветра является «замороженным».

При этом пусть в определённый момент времени рассматриваются две точки поля скоростей ветра (тогда ветер будет зависеть только от координат пространства атмосферы). И пусть одна точка поля определяется радиусом-вектором \mathbf{x} , а любая другая — вектором \mathbf{r} , проведенным из конца вектора \mathbf{x} .

Тогда корреляционные функции для проекций вектора скорости $\mathbf{W}_{тур}$ на направление, совпадающее с вектором \mathbf{r} (продольная), будет R_l и - перпендикулярное к $\mathbf{W}_{тур}$ (поперечная), будет R_n . Формально можно записать выражения для продольной и поперечной корреляционных функций:

$$\begin{aligned} R_l(r) &= \overline{w_l(\mathbf{x})w_l(\mathbf{x}+\mathbf{r})} \\ R_n(r) &= \overline{w_n(\mathbf{x})w_n(\mathbf{x}+\mathbf{r})} \end{aligned} \quad (23)$$

Черта над произведением мгновенных значений скоростей в (23) обозначает операцию математического ожидания. Знак вектора в аргументе корреляционных функций опущен, так как в изотропной турбулентности эти функции инвариантны к повороту вектора \mathbf{r} . Функции $R_l(r)$ и $R_n(r)$ не являются независимыми, согласно [8] для изотропной и однородной турбулентности связь между этими функциями определяется соотношением

$$R_n(r) = R_l(r) + \frac{1}{2}r \frac{\partial R_l(r)}{\partial r} \quad (24)$$

На основании общей теории турбулентности все перекрестные корреляционные функции тождественно равны нулю:

$$\begin{aligned} R_m(r) &= \overline{w_l(\mathbf{x})w_n(\mathbf{x}+\mathbf{r})} = 0, \\ R_{nl}(r) &= \overline{w_n(\mathbf{x})w_l(\mathbf{x}+\mathbf{r})} = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Корреляционные функции для проекций вектора ветра \mathbf{W} на оси декартовых координат имеют вид:

$$\begin{aligned} \overline{w_x(x, y, z)w_x(x+\Delta x, y, z)} &= \overline{w_y(x, y, z)w_x(x, y+\Delta y, z)} = \\ \overline{w_x(x, y, z)w_x(x, y, z+\Delta z)} &= R_l(r). \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \overline{w_y(x, y, z)w_y(x+\Delta x, y, z)} &= \overline{w_z(x, y, z)w_z(x+\Delta x, y, z)} = \\ \overline{w_x(x, y, z)w_x(x, y+\Delta y, z)} &= \overline{w_z(x, y, z)w_z(x, y+\Delta y, z)} = \\ \overline{w_x(x, y, z)w_x(x, y, z+\Delta z)} &= \overline{w_y(x, y, z)w_y(x, y, z+\Delta z)} = R_n(r). \end{aligned} \quad (27)$$

При этом под r понимается та координата, по которой рассматривается корреляционная связь.

На основании формул (25) остальные восемнадцать корреляционных функций вида $\overline{w_x w_y}$, $\overline{w_y w_z}$, $\overline{w_z w_x}$ тождественно равны нулю.

Поскольку в каждой из приведенных в (26) и (27) корреляционных функций изменяется только один аргумент, вычисление любой из этих функций производится на основании общей формулы:

$$R(x) = \lim_{X \rightarrow \infty} \frac{1}{2X} \int_{-X}^{+X} f(x) f(x + \Delta x) dx. \quad (28)$$

Корреляционные функции $R_t(r)$ и $R_n(r)$ устанавливаются при помощи экспериментов в аэродинамических трубах, в которых создается практически однородная и изотропная турбулентность. В результате обработки этих экспериментов (для продольной и поперечной корреляционных функций) были получены аппроксимирующие аналитические выражения следующего вида [3]:

$$\begin{aligned} R_t(r) &= \sigma_w^2 e^{-r/L} \\ R_n(r) &= \sigma_w^2 \left(1 - \frac{|r|}{2L}\right) e^{-r/L} \end{aligned} \quad (29)$$

где $\sigma_w^2 = \overline{w_t^2} = \overline{w_n^2}$ — дисперсия любой компоненты скорости турбулентного движения воздуха; L — так называемый масштаб турбулентности.

Если определить масштаб турбулентности как интеграл от нормированной корреляционной функции, то получатся следующие значения масштабов для продольной и поперечной корреляционных функций:

$$L_t = \frac{1}{\sigma_w^2} \int_0^{\infty} R_t(r) dr = \int_0^{\infty} e^{-r/L} dr = L, \quad (30)$$

$$L_n = \frac{1}{\sigma_w^2} \int_0^{\infty} R_n(r) dr = \int_0^{\infty} \left(1 - r/2L\right) e^{-r/L} dr = L/2, \quad (31)$$

При моделировании движения БЛА широко используются частотные методы [4], поэтому возникает необходимость связать корреляционные функции с соответствующими спектральными плотностями.

В общем случае, спектральная плотность случайного стационарного процесса связана с его корреляционной функцией выражением:

$$S(\Omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} R(r) \cos \Omega r dr, \quad (32)$$

где Ω — пространственная угловая частота, если r — пространственная координата:

$$\Omega = 2\pi / \lambda, \quad (33)$$

здесь λ - длина волны спектральных составляющих скорости турбулентного движения.

Подставляя в (32) значения продольной и поперечной корреляционных функций из (29), можно получить выражения для соответствующих спектральных плотностей:

$$S_r(\Omega) = \sigma_w^2 \frac{L}{\pi} \frac{2}{1 + \Omega^2 L^2}, \quad (34)$$

$$S_n(\Omega) = \sigma_w^2 \frac{L}{\pi} \frac{1 + 3\Omega^2 L^2}{(1 + \Omega^2 L^2)^2}, \quad (35)$$

Если в выражениях (34) и (35) для спектральной плотности перейти к безразмерной частоте $\nu = \Omega L$, то они приобретают вид:

$$S_r(\nu) = \frac{\sigma_w^2}{\pi} \frac{2}{1 + \nu^2}, \quad (36)$$

$$S_n(\nu) = \frac{\sigma_w^2}{\pi} \frac{1 + 3\nu^2}{(1 + \nu^2)^2}, \quad (37)$$

Постоянный множитель в (36) и (37) определяется по формуле связи (33) и с учетом тождества:

$$\sigma_w^2 = \int_0^{\infty} S(\Omega) d\Omega = \int_0^{\infty} S(\nu) d\nu, \quad (38)$$

Оценка влияния ветровых воздействий на различных этапах полета БЛА.

Исходя из критериев качества математической модели функционирования БЛА на соответствующих этапах полета, введенных выше, можно определить численные оценки погрешности моделирования при учете или не учете указанных моделей ветра. Например, при оценке влияния постоянной составляющей ветра на дальность этапа полета БЛА к месту выполнения задания необходимо провести сравнение эталонного моделирования, в котором отсутствует ветер, с уточненной моделью, учитывающей постоянную составляющую ветра. В результате, если выполняются условия:

$$\begin{aligned} \text{при } T_i^j(W_0 = 0) &\leq M[T_i^j(W_0)] \\ T_i^j(W_0 = 0) + \varepsilon^j &\geq M[T_i^j(W_0)] + 3\sigma[T_i^j(W_0)] \end{aligned} \quad (49)$$

Либо

$$\begin{aligned} \text{при } T_i^j(W_0 = 0) &\geq M[T_i^j(W_0)] \\ T_i^j(W_0 = 0) - \varepsilon^j &\leq M[T_i^j(W_0)] - 3\sigma[T_i^j(W_0)] \end{aligned} \quad (50)$$

где $M[T_i^j(W_0)]$ — математическое ожидание показателя продолжительности данного этапа при моделируемых разбросах постоянной составляющей ветра; $\sigma[T_i^j(W_0)]$ — СКО показателя продолжительности данного этапа при моделируемых разбросах постоянной

составляющей ветра; $T_i^j(W_0 = 0)$ — показатель продолжительности эталонной модели рассматриваемого этапа $-j$ при нулевой постоянной составляющей ветра ($W_0 = 0$); тогда при моделировании на данном этапе миссии БЛА для заданной допустимой погрешности ε^j постоянная составляющая ветра может не учитываться.

Другим показательным примером оценки влияния ветровых воздействий на точность моделирования полета БЛА является анализ зависимости углового движения БЛА от турбулентности атмосферы в процессе выполнения задания, в частности, проведения съемки поверхностных объектов. Основным критерием качества съёмки считается отсутствие «смаза» на снимках, который происходит в случае превышения продольной или поперечной угловыми скоростями БЛА определенного значения, т.е.

$$\begin{aligned} \dot{\theta}^j &\leq \dot{\theta}_{пред}^j \\ \dot{\gamma}^j &\leq \dot{\gamma}_{пред}^j \end{aligned} \quad (51)$$

где $\dot{\theta}^j$ - угловая скорость БЛА по тангажу, $\dot{\gamma}^j$ - угловая скорость БЛА по крену, $\dot{\theta}_{пред}^j$ $\dot{\gamma}_{пред}^j$ - их соответствующие предельные значения.

Нетрудно предположить, что существенное влияние на указанные угловые скорости будет оказывать турбулентность атмосферы. Однако необходимо строгое обоснование включения модели турбулентность в общую модель движения БЛА.

Имея в виду случайный характер модели турбулентности (см. предыдущий раздел), условие её применения при моделировании полета БЛА на этапе проведения фотосъемки, предлагается сформулировать следующим образом.

В продольном канале для угловой скорости по углу тангажа:

$$\text{при условии, что } \max_{t \in [t_0^j, t_k^j]} \{\dot{\theta}^j(t, W_{myp} = 0)\} \leq \dot{\theta}_{пред}^j \quad (52)$$

$$\max_{t \in [t_0^j, t_k^j]} \{M[\dot{\theta}^j(t, W_{myp})] + 3\sigma[\dot{\theta}^j(t, W_{myp})]\} \leq \dot{\theta}_{пред}^j \quad (53)$$

И в поперечном канале для угловой скорости по углу крена:

$$\text{при условии, что } \max_{t \in [t_0^j, t_k^j]} \{\dot{\gamma}^j(t, W_{myp} = 0)\} \leq \dot{\gamma}_{пред}^j \quad (54)$$

$$\max_{t \in [t_0^j, t_k^j]} \{M[\dot{\gamma}^j(t, W_{myp})] + 3\sigma[\dot{\gamma}^j(t, W_{myp})]\} \leq \dot{\gamma}_{пред}^j \quad (55)$$

Приведенные примеры применения рассматриваемого в работе подхода формирования математической модели движения БЛА заданной точности, в рамках одной миссии показывают, что такая модель должна быть составной динамической системой. Однако при этом, необходимо отслеживать какие погрешности вносят постоянная и турбулентная составляющие ветра в изменение смежных критериев точности. В частности, очевидно, что

турбулентная составляющая ветра будет вносить свои погрешности в продолжительность миссии на этапе перелета, однако их величина будет уступать постоянной составляющей. Тем не менее, эту погрешность необходимо контролировать, она не должна выйти за допустимые пределы.

В ы в о д ы

1. Всякая компьютерная модель должна сопровождаться характеристиками точности (оценками погрешности), в частности модель конкретной миссии БЛА.
2. Большинство миссий БЛА имеют сложные сценарии и состоят из ряда этапов, отличающихся при моделировании. При строгом подходе к математическому моделированию полет БЛА моделируется с помощью составной динамической системы.
3. Согласно целевому назначению, каждая часть составной динамической системы должна соответствовать собственному требованию точности (не нарушать заданных предельных погрешностей моделирования).
4. Все факторы математического моделирования (выбор систем отсчета и систем координат, состав сил и моментов сил, формы математического описания уравнений и др.) должны формироваться исходя из требований точности моделирования.
5. Если оказалось, что в результате создания составной динамической системы она имеет стохастическую форму, то достоверным результатом моделирования может быть только статистическое моделирование [2, 4, 7].

С п и с о к и с п о л ь з о в а н н ы х и с т о ч н и к о в

1. *Брусов В.С., Таргамдзе Р.Ч.* Ситуационная идентификация в динамическом модельном эксперименте. Тематический сборник научных трудов МАИ «Вопросы идентификации характеристик самолета». Москва, 1988 г.
2. *Малышев В.В., Усачов В.Е.* Математическое моделирование управляемого движения космических аппаратов. М.: Изд-во, МАИ, 1994. 84с.
3. *Доброленский Ю.П.*, Динамика полета в неспокойной атмосфере. М.: Машиностроение, 1969.
4. *Красовский А.А.* Справочник по теории управления. - М.: Наука, 1987.
5. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. - 4-е изд. - М.: Наука, 1978.
6. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. - М.: Наука, 1972.
7. *Лебедев А.А., Бобронников В.Т., Красильщиков М.Н., Малышев В.В.* Статистическая динамика и оптимизация управления летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1985.

Усачов Валерий Евгеньевич, профессор Московского авиационного института (национального исследовательского университета), д.т.н., тел.:499-158-41-96, e-mail:usachov @inbox.ru

Таргамдзе Ревиз Чолаевич, начальник центра беспилотной авиационной техники ФГУП НПО им. С.А. Лавочкина, к.т.н., тел.573-94-38, e-mail:revaztargamadze@rambler.ru

Работа выполнена на основе материалов поисковых НИР, проводимых в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009-2013 гг.». Номер П932