

На правах рукописи



Волков Евгений Валерьевич

**Исследование устойчивости стационарных и  
периодических движений в плоской круговой  
ограниченной задаче четырёх тел**

1.1.7. – Теоретическая механика, динамика машин

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Москва – 2024

Работа выполнена на кафедре «Мехатроника и теоретическая механика» федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (МАИ).

**Научный руководитель:** **Бардин Борис Сабирович**  
доктор физико-математических наук, доцент, профессор РАН, заведующий кафедрой «Мехатроника и теоретическая механика» МАИ

**Официальные оппоненты:** **Гутник Сергей Александрович**  
доктор физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математики, экономики и информационных технологий МГИМО МИД России

**Баркин Михаил Юрьевич**  
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры ФН-3 «Теоретическая механика» МГТУ им. Н.Э. Баумана

**Ведущая организация:** Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)».

Защита состоится «27» декабря 2024 г. в 14:00 на заседании диссертационного совета 24.2.327.08, созданного на базе МАИ, по адресу: 125993, г. Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, д. 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке МАИ и на сайте МАИ по ссылке: [https://mai.ru/events/defence/?ELEMENT\\_ID=182931](https://mai.ru/events/defence/?ELEMENT_ID=182931)

Автореферат разослан «\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2024 г.

Ученый секретарь диссертационного совета 24.2.327.08,  
доктор физико-математических наук,  
старший научный сотрудник



*Гидаснов В.Ю.*

## Общая характеристика работы

**Актуальность темы.** Задачу о движении тела малой массы в гравитационном поле трёх взаимодействующих по закону всемирного тяготения массивных тел называют ограниченной задачей четырёх тел. В такой постановке предполагают, что тело малой массы не влияет на движение трёх притягивающих тел, орбиты которых считают известными. Данная задача неоднократно рассматривалась во многих научных работах. Несмотря на это, она продолжает представлять значительный интерес как с теоретической, так и с прикладной точек зрения. В частности, особый интерес представляет изучение положений относительного равновесия, их устойчивости, а также исследование вопроса о существовании и орбитальной устойчивости периодических движений в окрестности этих положений относительного равновесия. Интерес к исследованиям по данной проблеме в последнее время усилился. Это обусловлено тем, что в эксплуатацию вводятся новые космические телескопы, которые позволяют осуществлять прямое наблюдение за экзопланетными системами и создают потенциал для открытия новых конфигураций, образованных небесными телами, которые ранее рассматривались только в теории. Также эти исследования представляют интерес при планировании космических миссий в окрестности астероидов, расположенных вблизи точек либрации.

**Цель работы.** Целью данной диссертационной работы является исследование характера бифуркации и получение строгих выводов об устойчивости по Ляпунову положений относительного равновесия тела малой массы в плоской круговой ограниченной задаче четырёх тел, а также решение вопроса об орбитальной устойчивости периодических движений в окрестности устойчивого положения относительного равновесия.

**Методы исследования.** К основным методам исследования в диссертационной работе относятся методы общей теории устойчивости А.М. Ляпунова, методы теории нормальных форм и теории КАМ, метод малого параметра, метод симплектических отображений. В работе также применяются методы численного интегрирования систем дифференциальных уравнений и используются компьютерные алгоритмы численно-аналитических вычислений, которые были реализованы в системе компьютерной математики Maple 2017.

**Достоверность результатов.** Достоверность полученных в диссертации результатов обеспечивается применением строгих математических методов исследования, высокой точностью проведенных численных расчётов, а также тем, что выводы, полученные аналитически, полностью согласуются с результатами, полученными численно. Также достоверность подтверждается совпадением результатов, полученных в данной диссертационной работе, с результатами более ранних исследований, полученных для некоторых частных

случаев.

**Научная новизна.** В диссертации получены следующие новые научные результаты:

1. Аналитически построены границы областей существования положений относительного равновесия в плоской круговой ограниченной задаче четырёх тел в предположении, что одно из основных тел имеет малую массу.
2. В плоской круговой ограниченной задаче четырёх тел получены выводы об устойчивости по Ляпунову положений относительного равновесия тела малой массы во всех случаях, когда вопрос об устойчивости решается на основании членов разложения функции Гамильтона до четвёртого порядка включительно.
3. Построены области существования коротко- и долгопериодических движений в окрестности устойчивого положения относительного равновесия плоской круговой ограниченной задаче четырёх тел в случае равных масс двух притягивающих тел.
4. Был разработан алгоритм исследования орбитальной устойчивости короткопериодических движений в окрестности положений относительного равновесия плоской круговой ограниченной задаче четырёх тел.
5. Получены строгие выводы об орбитальной устойчивости короткопериодических движений, рождающихся из устойчивого положения относительного равновесия в случае, когда два притягивающих тела обладают равными массами.

**Положения и результаты, выносимые на защиту.**

1. Дано полное качественное описание характера бифуркации центральных конфигураций в плоской круговой ограниченной задаче четырёх тел.
2. В случае, когда масса одного из притягивающих тел мала, были получены аналитические выражения границ областей существования положений относительного равновесия тела малой массы в плоской круговой ограниченной задаче четырёх тел.
3. Получены строгие выводы об устойчивости по Ляпунову положений относительного равновесия тела малой массы как в нерезонансном, так и в случаях резонансов до четвёртого порядка включительно.

4. Исследованы периодические движения в окрестности устойчивого положения относительного равновесия плоской круговой ограниченной задачи четырёх тел в случае равных масс двух притягивающих тел и численно построены области существования таких движений.
5. Разработан алгоритм численно-аналитического исследования орбитальной устойчивости короткопериодических движений в окрестности положений относительного равновесия плоской круговой ограниченной задачи четырёх тел.
6. Решена задача о существовании и орбитальной устойчивости короткопериодических движений, рождающихся из устойчивого положения относительного равновесия, когда два притягивающих тела обладают одинаковыми массами.

**Теоретическая и практическая значимость.** Результаты исследования, проведённого в данной диссертационной работе, представляют интерес для задач небесной механики и астродинамики. Эти результаты также могут найти применение при разработке методик астрономических наблюдений и при планировании космических миссий в окрестности малых небесных тел (астероидов, расположенных вблизи точек либрации).

#### **Апробация результатов.**

- на 19-й, 20-й, 21-й, 22-й международных конференциях "Авиация и космонавтика" (МАИ, Москва);
- на 46-й, 47-й международных молодёжных научных конференциях "Гагаринские чтения" (МАИ, Москва);
- на 13-й международной конференции по прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли (Алушта, 2020);
- на международных конференциях по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль, 2022, 2024);
- на международной научной конференции по механике "IX Поляховские чтения" (СПбГУ, Санкт-Петербург, 2021);
- на XIII всероссийском съезде по теоретической и прикладной механике (Санкт-Петербург, 2023).
- на семинаре «Динамические системы и механика» (Москва, МАИ, 16 мая 2024 г.).
- на научном семинаре кафедры теоретической механики МФТИ. (Долгопрудный, МФТИ, 02 октября 2024 г.).

**Публикации.** Основные результаты диссертационного исследования опубликованы в 6 статьях [1-6] в журналах, входящих в перечень ВАК РФ, либо индексируемых в Web Of Science и Scopus, а также в сборниках и материалах конференций [7-20].

**Личный вклад автора.** Содержание диссертационной работы и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы и получены лично автором. Постановки задач, исследованных в рамках подготовки диссертационной работы, задавались научным руководителем. Соискателем проведены численные расчёты коэффициентов нормальных форм функции Гамильтона, а также получены их аналитические выражения в случаях, близких к предельным. Разработан алгоритм исследования орбитальной устойчивости короткопериодических движений в окрестности положений относительного равновесия плоской круговой ограниченной задачи четырёх тел. На основании метода симплектического отображения получены строгие выводы об орбитальной устойчивости короткопериодических движений. Построены диаграммы устойчивости положений относительного равновесия тела малой массы и диаграммы орбитальной устойчивости короткопериодических движений, рождающихся из устойчивого положения относительного равновесия.

**Структура и объем работы.** Диссертационная работа состоит из введения, трёх глав, заключения, приложения и списка литературы, включающего 90 наименований. Общий объем диссертации составляет 122 страницы и содержит 27 рисунков.

## Содержание работы

**Во введении** обосновывается актуальность диссертационного исследования, дан обзор исследований, выполненных ранее по тематике диссертационной работы, кратко сформулирована цель работы, сформулирована научная новизна и практическая значимость, а также дано описание содержания работы по главам.

**Первая глава** посвящена изучению характера бифуркаций центральных конфигураций в плоской круговой ограниченной задаче четырёх тел.

Данная задача в диссертационной работе рассматривается в следующей постановке. Тело малой массы  $P$  движется под действием сил гравитационного притяжения трёх массивных притягивающих тел  $P_1$ ,  $P_2$  и  $P_3$ , которые взаимодействуют друг с другом по закону всемирного тяготения. Предполагается, что масса  $m$  тела  $P$  пренебрежимо мала по сравнению с массами  $m_1$ ,  $m_2$  и  $m_3$  тел  $P_1$ ,  $P_2$  и  $P_3$ . Поэтому влияние тела  $P$  на движение тел  $P_1$ ,  $P_2$  и  $P_3$  не учитывается. Притягивающие тела находятся в лагранжевых точках либрации плоской круговой ограниченной задачи трёх тел, т.е. движутся по круговым орбитам, располагаясь в вершинах равностороннего треугольника.

Движение всех четырёх тел происходит в одной плоскости.

Для описания движения тела  $P$  введём подвижную систему координат  $Oxyz$  (см. рис. 1) с началом в середине отрезка соединяющего тела  $P_2$  и  $P_3$ . Ось  $Ox$  направлена вдоль прямой  $P_2P_3$  с положительным направлением в сторону тела  $P_3$ . Ось  $Oy$  перпендикулярна оси  $Ox$  и проходит через тело  $P_1$ , а ось  $Oz$  дополняет систему координат  $Oxyz$  до правой ортогональной тройки. Далее будем рассматривать случай плоского движения, когда тело  $P$  находится в плоскости  $Oxy$ , где его положение задается координатами  $x, y$ .

Введём безразмерные координаты Нехвила по формулам:  $x = r\xi, y = r\eta$ , где  $r$  — расстояние между телами  $P_1, P_2$  и  $P_3$ . Рассматривается случай, когда массивные тела  $P_1, P_2$  и  $P_3$  движутся по круговым орбитам. В случае круговой задачи трёх тел  $\dot{\nu} = \omega = const$ , где  $\nu$  — истинная аномалия, а  $\omega$  — угловая скорость вращения подвижной системы координат  $Oxyz$ , определяемая равенством

$$\omega^2 = \frac{f(m_1 + m_2 + m_3)}{r^3}, \quad (1)$$

где  $f$  — универсальная гравитационная постоянная.

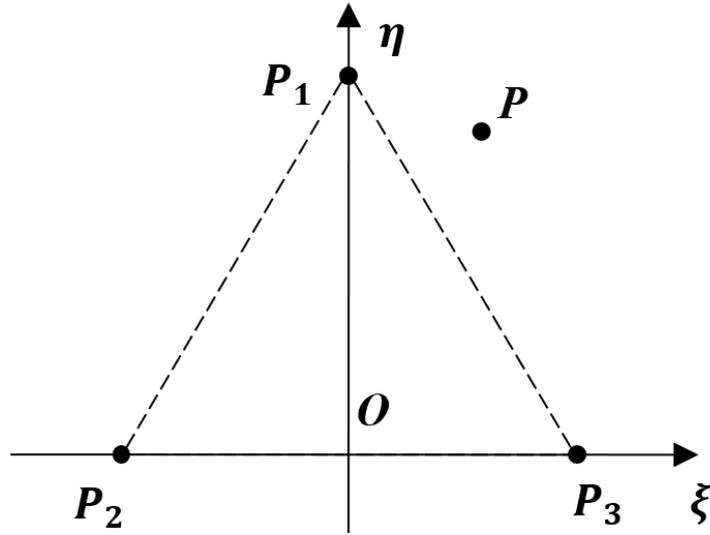


Рис. 1: Система координат  $O\xi\eta\zeta$

Уравнения движения тела  $P$  можно записать в гамильтоновой форме

$$\frac{d\xi}{d\nu} = \frac{\partial H}{\partial p_\xi}, \quad \frac{d\eta}{d\nu} = \frac{\partial H}{\partial p_\eta}, \quad \frac{dp_\xi}{d\nu} = -\frac{\partial H}{\partial \xi}, \quad \frac{dp_\eta}{d\nu} = -\frac{\partial H}{\partial \eta}. \quad (2)$$

Функция Гамильтона имеет вид

$$H = \frac{1}{2} (p_\xi^2 + p_\eta^2) + p_\xi\eta - p_\eta\xi - \frac{\sqrt{3}(1 - \mu_2 - \mu_3)}{2} p_\xi - \frac{\mu_2 - \mu_3}{2} p_\eta - \frac{1 - \mu_2 - \mu_3}{\rho_1} - \frac{\mu_2}{\rho_2} - \frac{\mu_3}{\rho_3}. \quad (3)$$

В выражении (3)  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  и  $\rho_3$  – расстояние от тела  $P$  до тел  $P_1$ ,  $P_2$  и  $P_3$  определяются следующими соотношениями

$$\begin{aligned}\rho_1 &= \sqrt{\xi^2 + \left(\eta - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}, & \rho_2 &= \sqrt{\left(\xi + \frac{1}{2}\right)^2 + \eta^2}, \\ \rho_3 &= \sqrt{\left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 + \eta^2},\end{aligned}\tag{4}$$

а  $\mu_2$  и  $\mu_3$  являются безразмерными параметрами задачи, которые вводятся по формулам

$$\mu_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2 + m_3}, \quad \mu_3 = \frac{m_3}{m_1 + m_2 + m_3}.\tag{5}$$

Предполагается, что точки либрации, в которых расположены притягивающие тела, устойчивы в линейном приближении. Это означает, что значения параметров  $\mu_2$  и  $\mu_3$  удовлетворяют известному неравенству Рауса

$$1 + 27(\mu_2^2 + \mu_2\mu_3 + \mu_3^2 - \mu_2 - \mu_3) > 0.\tag{6}$$

Уравнения движения (2) тела  $P$  допускают стационарные решения

$$\begin{aligned}\xi &= \xi_*, & \eta &= \eta_*, \\ p_\xi = p_{\xi_*} &= -\eta_* + \frac{\sqrt{3}}{2}(1 - \mu_2 - \mu_3), & p_\eta = p_{\eta_*} &= \xi_* + \frac{1}{2}(\mu_2 - \mu_3),\end{aligned}\tag{7}$$

где  $\xi_*$ ,  $\eta_*$  определяются в результате решения следующей системы алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}\xi + \frac{\mu_2 - \mu_3}{2} - \frac{1 - \mu_2 - \mu_3}{\rho_1^3}\xi - \frac{\mu_2}{\rho_2^3}\left(\xi + \frac{1}{2}\right) - \frac{\mu_3}{\rho_3^3}\left(\xi - \frac{1}{2}\right) &= 0, \\ \eta - \frac{\sqrt{3}(1 - \mu_2 - \mu_3)}{2} - \frac{1 - \mu_2 - \mu_3}{\rho_1^3}\left(\eta - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{\mu_2}{\rho_2^3}\eta - \frac{\mu_3}{\rho_3^3}\eta &= 0.\end{aligned}\tag{8}$$

Стационарные движения, отвечающие решению (7), представляют собой положения относительного равновесия тела  $P$  во вращающейся вместе с притягивающими телами системе координат  $O\xi\eta\zeta$ . В абсолютной системе координат этим частным решениям соответствуют центральные конфигурации, когда все четыре тела образуют четырехугольник неизменной формы и размеров. Для того, чтобы различать данные положения относительного равновесия тела  $P$ , были введены следующие обозначения. Через  $L_{ij}$  будем обозначать положение относительного равновесия тела  $P$ , которое при  $\mu_2 = 0$

переходит в точку либрации  $L_i^{(2)}$ , а при  $\mu_3 = 0$  в точку либрации  $L_j^{(3)}$ . При выполнении неравенства (6) существуют следующие восемь возможных положений относительного равновесия  $L_{15}$ ,  $L_{25}$ ,  $L_{33}$ ,  $L_{45}$ ,  $L_{51}$ ,  $L_{52}$ ,  $L_{54}$  и  $L_{55}$ . При выполнении условия Рауса области возможных положений относительного равновесия очень узкие, поэтому они были схематично изображены на Рис. 2. Серым цветом обозначены области возможных положений относительного равновесия, в которых может располагаться тело малой массы  $P$ .

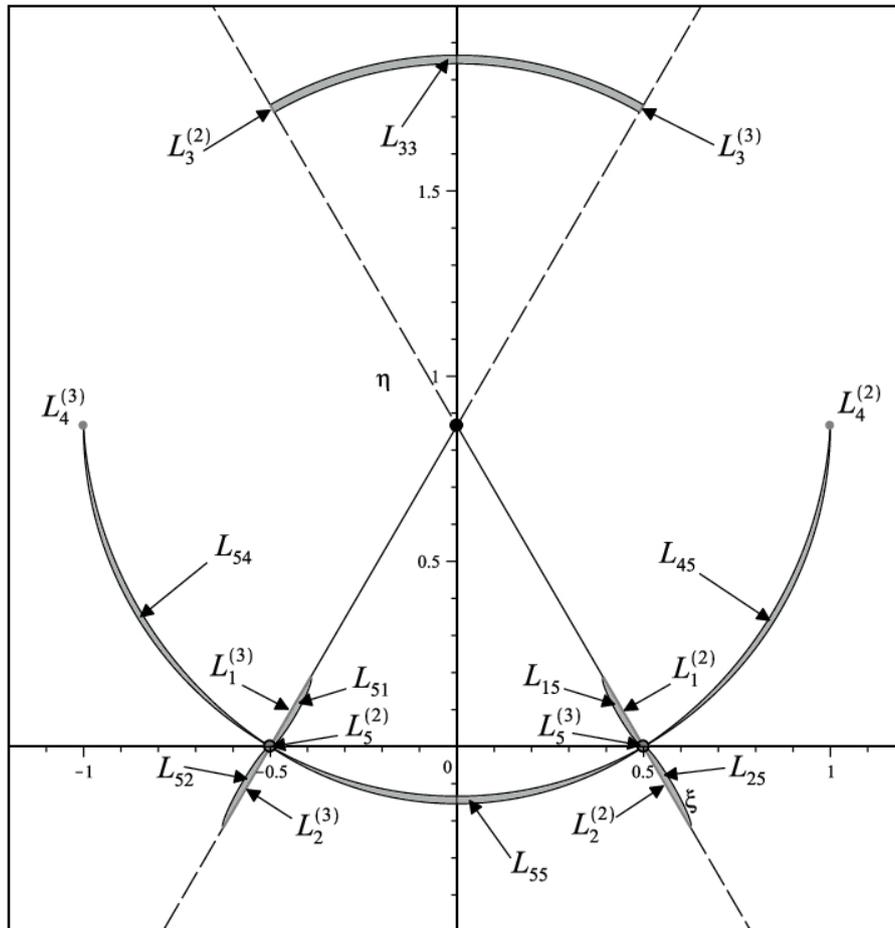
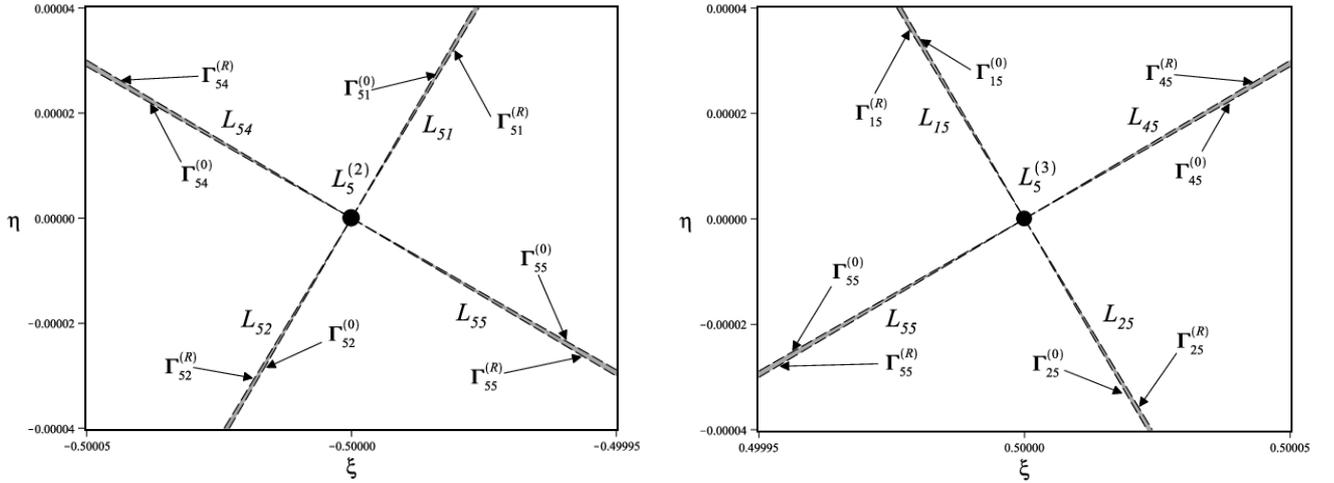


Рис. 2: Области возможных положений относительного равновесия

В первой главе диссертационной работы показано, что бифуркация положений относительного равновесия происходит в предельных случаях, когда одна из масс притягивающих тел стремится к нулю. В этом случае четыре положения относительного равновесия  $L_{51}$ ,  $L_{52}$ ,  $L_{54}$  и  $L_{55}$  приближаются к основному телу  $P_2$ , когда значение параметра  $\mu_2$  приближается к нулю ( $\mu_2 \rightarrow 0$ ), и в точности совпадают с точкой либрации задачи трёх тел  $L_5^{(2)}$ , когда  $\mu_2 = 0$ . В этом предельном случае тело малой массы  $P$  занимает положение основного тела  $P_2$  и образует конфигурацию Лагранжа с телами  $P_1$  и  $P_3$ . Аналогично показано, что четыре положения относительного равновесия  $L_{15}$ ,  $L_{25}$ ,  $L_{45}$  и  $L_{55}$  приближаются к основному телу  $P_3$ , когда значение параметра  $\mu_3$  приближается к нулю ( $\mu_3 \rightarrow 0$ ), и в точности совпадают с точкой

либрации  $L_5^{(3)}$ , когда  $\mu_3 = 0$ . В этом предельном случае тело малой массы  $P$  занимает положение основного тела  $P_3$  и образует конфигурацию Лагранжа с телами  $P_1$  и  $P_2$ .



(а) Области существования положений относительного равновесия  $L_{5j}$  ( $j = 1, 2, 4, 5$ ) в окрестности точки либрации  $L_5^{(2)}$

(б) Области существования положений относительного равновесия  $L_{i5}$  ( $i = 1, 2, 4, 5$ ) в окрестности точки либрации  $L_5^{(3)}$

Рис. 3: Области существования положений относительного равновесия в окрестности точек либрации  $L_5^{(2)}$  и  $L_5^{(3)}$

При малых значениях параметра  $\mu_2$  положения относительного равновесия  $L_{5j}$  ( $j = 1, 2, 4, 5$ ) располагаются в узких областях, исходящих из точки либрации  $L_5^{(2)}$ . Эти области изображены серым цветом на Рис. 3а. При  $\mu_2 \ll 1$  границы указанных областей были получены аналитически в виде сходящегося ряда по малому параметру  $\mu_2^{1/3}$ . Аналитические выражения для границ областей существования положений относительного равновесия  $L_{5j}$  ( $j = 1, 2, 4, 5$ ) приведены в Таблице 1. На Рис. 3а при  $\mu_2 \ll 1$  границы областей существования положений относительного равновесия  $L_{5j}$  ( $j = 1, 2, 4, 5$ ) выделены пунктиром и обозначены через  $\Gamma_{5j}^{(0)}$  и  $\Gamma_{5j}^{(R)}$ . На границах  $\Gamma_{51}^{(0)}$  и  $\Gamma_{52}^{(0)}$  областей существования положений относительного равновесия  $L_{51}$  и  $L_{52}$ , соответственно, параметр  $\mu_3$  обращается в ноль. Здесь задача вырождается в ограниченную задачу трёх тел. На границах  $\Gamma_{54}^{(0)}$  и  $\Gamma_{55}^{(0)}$  областей существования положений относительного равновесия  $L_{54}$  и  $L_{55}$  оба параметра обращаются в ноль ( $\mu_2 = 0$  и  $\mu_3 = 0$ ). В этом случае рассматриваемая задача вырождается в ограниченную задачу двух тел. Границы  $\Gamma_{51}^{(R)}$ ,  $\Gamma_{52}^{(R)}$ ,  $\Gamma_{54}^{(R)}$  и  $\Gamma_{55}^{(R)}$  областей существования положений относительного равновесия  $L_{51}$ ,  $L_{52}$ ,  $L_{54}$  и  $L_{55}$  задаются условием Рауса (6).

Аналогично было показано, что при малых значениях параметра  $\mu_3$  положения относительного равновесия  $L_{i5}$  ( $i = 1, 2, 4, 5$ ) располагаются в узких областях, исходящих из точки либрации  $L_5^{(3)}$ . Данные области показаны серым цветом на Рис. 3б. При  $\mu_3 \ll 1$  границы указанных областей получены

Таблица 1: Уравнения границ областей существования положений относительного равновесия  $L_{5j}$ .

	$\mu_3 \rightarrow 0$	$\mu_3 \rightarrow \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{69}}{18} + O(\mu_2)$
$L_{51}$	$\xi + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}\eta = 0$	$\xi + \frac{1}{2} - 0.60119039\eta + O(\mu_2^{1/3}) = 0$
$L_{52}$	$\xi + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}\eta = 0$	$\xi + \frac{1}{2} - 0.60119039\eta + O(\mu_2^{1/3}) = 0$
$L_{54}$	$\xi + \frac{1}{2} + \sqrt{3}\eta + O(\mu_2^{1/3}) = 0$	$\xi + \frac{1}{2} + 1.66336660\eta + O(\mu_2^{1/3}) = 0$
$L_{55}$	$\xi + \frac{1}{2} + \sqrt{3}\eta + O(\mu_2^{1/3}) = 0$	$\xi + \frac{1}{2} + 1.66336660\eta + O(\mu_2^{1/3}) = 0$

аналитически в виде сходящегося ряда по малому параметру  $\mu_3^{1/3}$ . Границы областей существования положений относительного равновесия  $L_{i5}$  приведены в таблице 2. На Рис. 3б при  $\mu_3 \ll 1$  границы областей существования положений относительного равновесия  $L_{i5}$  ( $i = 1, 2, 4, 5$ ) выделены пунктиром и обозначены через  $\Gamma_{i5}^{(0)}$  и  $\Gamma_{i5}^{(R)}$ . На границах  $\Gamma_{15}^{(0)}$  и  $\Gamma_{25}^{(0)}$  областей существования положений относительного равновесия  $L_{15}$  и  $L_{25}$ , соответственно, параметр  $\mu_2$  обращается в ноль. Здесь задача вырождается в ограниченную задачу трёх тел. На границах  $\Gamma_{45}^{(0)}$  и  $\Gamma_{55}^{(0)}$  областей существования положений относительного равновесия  $L_{45}$  и  $L_{55}$  оба параметра обращаются в ноль ( $\mu_2 = 0$  и  $\mu_3 = 0$ ). В этом случае рассматриваемая задача вырождается в ограниченную задачу двух тел. Границы  $\Gamma_{15}^{(R)}$ ,  $\Gamma_{25}^{(R)}$ ,  $\Gamma_{45}^{(R)}$  и  $\Gamma_{55}^{(R)}$  областей существования положений относительного равновесия  $L_{15}$ ,  $L_{25}$ ,  $L_{45}$  и  $L_{55}$  задаются условием Рауса (6).

Таблица 2: Уравнения границ областей существования положений относительного равновесия  $L_{i5}$ .

	$\mu_2 \rightarrow 0$	$\mu_2 \rightarrow \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{69}}{18} + O(\mu_3)$
$L_{15}$	$\xi - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}\eta = 0$	$\xi - \frac{1}{2} + 0.60119039\eta + O(\mu_3^{1/3}) = 0$
$L_{25}$	$\xi - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}\eta = 0$	$\xi - \frac{1}{2} + 0.60119039\eta + O(\mu_3^{1/3}) = 0$
$L_{45}$	$\xi - \frac{1}{2} - \sqrt{3}\eta + O(\mu_3^{1/3}) = 0$	$\xi - \frac{1}{2} - 1.66336660\eta + O(\mu_3^{1/3}) = 0$
$L_{55}$	$\xi - \frac{1}{2} - \sqrt{3}\eta + O(\mu_3^{1/3}) = 0$	$\xi - \frac{1}{2} - 1.66336660\eta + O(\mu_3^{1/3}) = 0$

**Во второй главе** выполнен строгий нелинейный анализ устойчивости по Ляпунову положений относительного равновесия тела малой массы во вращающейся вместе с притягивающими телами системе координат.

Для исследования устойчивости положений относительного равновесия

введём в их окрестности локальные канонические переменные  $q_1, q_2, p_1, p_2$  по формулам

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_* + q_1, & \eta &= \eta_* + q_2, \\ p_\xi &= -\eta_* + \frac{\sqrt{3}}{2}(1 - \mu_2 - \mu_3) + p_1, & p_\eta &= \xi_* + \frac{1}{2}(\mu_2 - \mu_3) + p_2, \end{aligned} \quad (9)$$

и разложим функцию Гамильтона (3) в ряд по новым каноническим переменным  $q_i, p_i$

$$H = H_2 + H_3 + H_4 + H^{(5)}, \quad (10)$$

где  $H_k$  — форма степени  $k$ , а через  $H^{(5)}$  обозначен сходящийся ряд, который начинается с членов не ниже пятой степени.

Рассмотрим линеаризованную в окрестности положения относительно равновесия систему, которая является канонической системой линейных дифференциальных уравнений, с функцией Гамильтона  $H_2$

$$H_2 = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2}(aq_1^2 + bq_2^2) + cq_1q_2 + p_1q_2 - p_2q_1, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} a &= -\frac{1 - \mu_2 - \mu_3}{\rho_1^5} (3\xi_*^2 - \rho_1^2) + \frac{\mu_2}{\rho_2^5} \left( \rho_2^2 - 3 \left( \xi_* + \frac{1}{2} \right)^2 \right) + \\ &+ \frac{\mu_3}{\rho_3^5} \left( \rho_3^2 - 3 \left( \xi_* - \frac{1}{2} \right)^2 \right), \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} b &= -\frac{1 - \mu_2 - \mu_3}{\rho_1^5} \left( 3 \left( \eta_* - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 - \rho_1^2 \right) + \frac{\mu_2}{\rho_2^5} (\rho_2^2 - 3\eta_*^2) + \\ &+ \frac{\mu_3}{\rho_3^5} (\rho_3^2 - 3\eta_*^2), \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} c &= -\frac{3(1 - \mu_2 - \mu_3)}{\rho_1^5} \xi_* \left( \eta_* - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \frac{3\mu_2}{\rho_2^5} \left( \xi_* + \frac{1}{2} \right) \eta_* - \\ &- \frac{3\mu_3}{\rho_3^5} \left( \xi_* - \frac{1}{2} \right) \eta_*. \end{aligned} \quad (14)$$

Характеристическое уравнение линейной системы имеет вид

$$\lambda^4 + (a + b + 2)\lambda^2 + ab - c^2 - a - b + 1 = 0. \quad (15)$$

На основании теоремы Ляпунова об устойчивости в линейном приближении, для устойчивости линейной системы необходимо, чтобы корни её характери-

стического уравнения имели нулевые вещественные части. Данное условие будет выполнено, если значения параметров  $\mu_2$  и  $\mu_3$  удовлетворяют следующим неравенствам

$$\begin{aligned} a + b + 2 &> 0, \\ ab - c^2 - a - b + 1 &> 0, \\ a^2 + b^2 + 4c^2 - 2ab + 8(a + b) &> 0. \end{aligned} \tag{16}$$

Если хотя бы одно из условий (16) не выполнено, то характеристическое уравнение имеет корень с положительной вещественной частью. В этом случае на основании теоремы Ляпунова о неустойчивости по первому приближению положение относительного равновесия неустойчиво как в линейном приближении, так и в полной нелинейной системе с гамильтонианом (10), т.е. имеет место неустойчивость по Ляпунову соответствующего положения относительного равновесия.

В диссертационной работе для всех возможных значений параметров задачи неравенства (16) проверялись численно. Было установлено, что положение относительного равновесия  $L_{15}$ ,  $L_{25}$ ,  $L_{33}$ ,  $L_{51}$ ,  $L_{52}$  неустойчивы по Ляпунову. Положения относительного равновесия  $L_{45}$ ,  $L_{54}$  и  $L_{55}$  в зависимости от параметров задачи могут быть как устойчивыми в линейном приближении, так и неустойчивыми. Устойчивые в линейном приближении положения относительного равновесия могут быть как устойчивыми, так и неустойчивыми по Ляпунову. Для получения строгих выводов об устойчивости положений относительного равновесия по Ляпунову, был проведён нелинейный анализ.

Нелинейный анализ устойчивости проведён на основании хорошо разработанной к настоящему времени методики исследования устойчивости автономных гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Суть этой методики состоит в построении канонической замены переменных, приводящей функцию Гамильтона задачи к наиболее простой (нормальной) форме. Задача об устойчивости по Ляпунову исходной гамильтоновой системы сводится к задаче об устойчивости по Ляпунову нормализованной системы. Для решения последней задачи можно применить известные достаточные условия устойчивости и неустойчивости гамильтоновых систем, полученные на основании теории КАМ и общей теории устойчивости А.М. Ляпунова.

Далее будем предполагать, что значения параметров задачи принадлежат одной из областей устойчивости в линейном приближении. В этом случае корни характеристического уравнения (15) имеют вид  $\lambda_{1,2,3,4} = \pm i\omega_{1,2}$ , где

$$\omega_i^2 = \frac{1}{2} \left( a + b + 2 + (-1)^{i+1} \sqrt{(a - b)^2 + 4c^2 + 8(a + b)} \right), \quad (i = 1, 2). \tag{17}$$

В случае, когда в системе нет резонансов до четвертого порядка включительно, при помощи упомянутой выше канонической замены переменных

$Q_i, P_i \rightarrow u_i, v_i$  функция Гамильтона приводится к следующей нормальной форме

$$H = \omega_1 r_1 - \omega_2 r_2 + c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2 + O\left((r_1 + r_2)^{5/2}\right), \quad (18)$$

где  $\varphi_i, r_i$  — канонические переменные, введенные по формулам  $u_i = \sqrt{2r_i} \sin \varphi_i$ ,  $v_i = \sqrt{2r_i} \cos \varphi_i$ .

Согласно теореме Арнольда-Мозера, при выполнении неравенства

$$\Delta \equiv c_{02} \omega_1^2 + c_{11} \omega_1 \omega_2 + c_{20} \omega_2^2 \neq 0 \quad (19)$$

положение равновесия системы с гамильтонианом (18) устойчиво по Ляпунову. Если же неравенство (19) не выполняется, то для решения вопроса об устойчивости необходимо проводить анализ с учетом членов выше четвертой степени в разложении гамильтониана (10).

При резонансе третьего порядка ( $\omega_1 = 2\omega_2$ ) функция Гамильтона приводится к нормальной форме

$$H = 2\omega_2 r_1 - \omega_2 r_2 - A r_2 \sqrt{r_1} \sin(\varphi_1 + 2\varphi_2) + O\left((r_1 + r_2)^2\right). \quad (20)$$

В этом случае при выполнении неравенства

$$A \neq 0, \quad (21)$$

положение равновесия системы с гамильтонианом (20) неустойчиво.

При резонансе четвертого порядка ( $\omega_1 = 3\omega_2$ ) функция Гамильтона приводится к нормальной форме

$$H = 3\omega_2 r_1 - \omega_2 r_2 + c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2 + B r_2 \sqrt{r_1 r_2} \sin(\varphi_1 + 3\varphi_2) + O\left((r_1 + r_2)^{5/2}\right). \quad (22)$$

Согласно теореме А.П. Маркеева, для устойчивости положения равновесия системы с гамильтонианом (22) необходимо потребовать выполнения неравенства

$$\left|3\sqrt{3}B\right| < |C|, \quad (23)$$

где  $C = c_{20} + 3c_{11} + 9c_{02}$ . Если же неравенство (23) выполняется с противоположным знаком, то имеет место неустойчивость положения равновесия. В предельном случае, когда выполняется равенство  $|3\sqrt{3}B| = |C|$ , исследование устойчивости необходимо проводить с учетом членов не ниже шестой степени в разложении гамильтониана задачи.

При резонансе второго порядка ( $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ ) функция Гамильтона

приводится к нормальной форме

$$H = \frac{1}{2} (v_1^2 + v_2^2) + \omega (u_1 v_2 - u_2 v_1) + (u_1^2 + u_2^2) \left( A (u_1^2 + u_2^2) + B (u_1 v_2 - u_2 v_1) + C (v_1^2 + v_2^2) \right) + H^{(6)}. \quad (24)$$

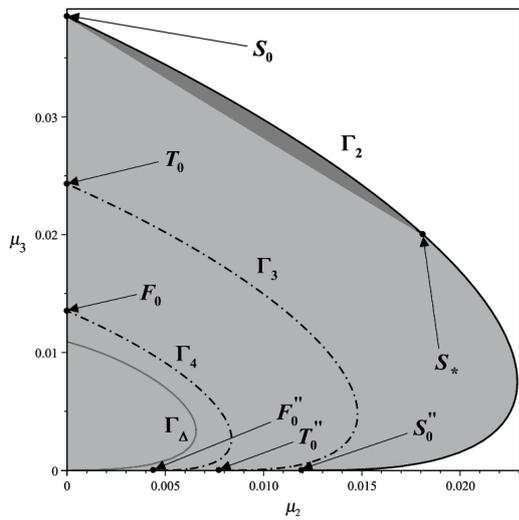
Согласно теореме А.Г. Сокольского, при выполнении неравенства

$$A > 0, \quad (25)$$

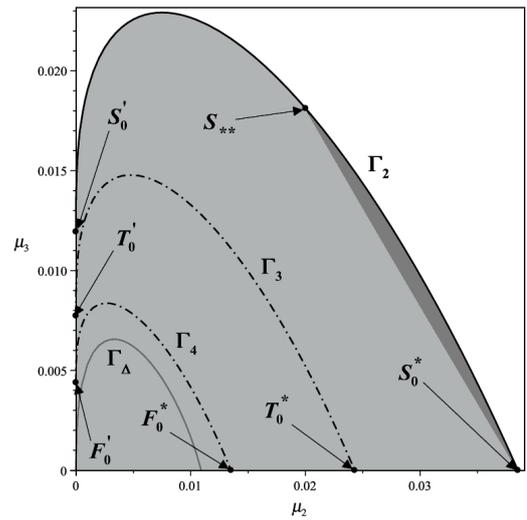
положение равновесия системы с гамильтонианом (24) устойчиво по Ляпунову, а при выполнении этого неравенства с противоположным знаком имеет место неустойчивость положения равновесия. В предельном случае  $A = 0$  требуется проводить анализ устойчивости с учетом членов не ниже шестой степени в разложении гамильтониана задачи.

В диссертационной работе для всех возможных значений параметров задачи проводился численный анализ коэффициентов нормальной формы функции Гамильтона. Вычисления коэффициентов выполнялись по явным аналитическим формулам, полученным на основании метода нормализации гамильтоновых систем Депри-Хори. После вычисления коэффициентов нормальной формы проверялись приведённые выше достаточные условия устойчивости и неустойчивости гамильтоновых систем как в нерезонансном случае, так и в случаях резонансов. Результаты проведённого таким образом нелинейного анализа устойчивости положений относительного равновесий  $L_{45}$ ,  $L_{54}$  и  $L_{55}$  представлены на диаграммах устойчивости по Ляпунову, изображенных на Рис. 4а, Рис. 4б и Рис. 4с соответственно. Область неустойчивости положений относительного равновесия тела малой массы  $P$  закрашена белым цветом, а область устойчивости светло-серым цветом. Темно-серым цветом изображена область, где положение относительного равновесия тела  $P$  устойчиво в линейном приближении, но имеет место неустойчивость лагранжевых точек либрации, в которых находятся притягивающие тела, что приводит к неустойчивости и соответствующей центральной конфигурации из четырех тел. Через  $\Gamma_2$ ,  $\Gamma_3$  и  $\Gamma_4$  обозначены кривые, на которых реализуются резонансы второго, третьего и четвертого порядка соответственно. Численные расчеты показали, что условия теоремы Арнольда-Мозера (19) не выполняются только на кривой  $\Gamma_\Delta$ , которая на Рис. 4а, Рис. 4б и Рис. 4с изображена сплошной серой линией. Таким образом при отсутствии резонансов до четвертого порядка включительно, а также вне кривой  $\Gamma_\Delta$  положения относительного равновесия  $L_{45}$ ,  $L_{54}$  и  $L_{55}$  устойчивы по Ляпунову.

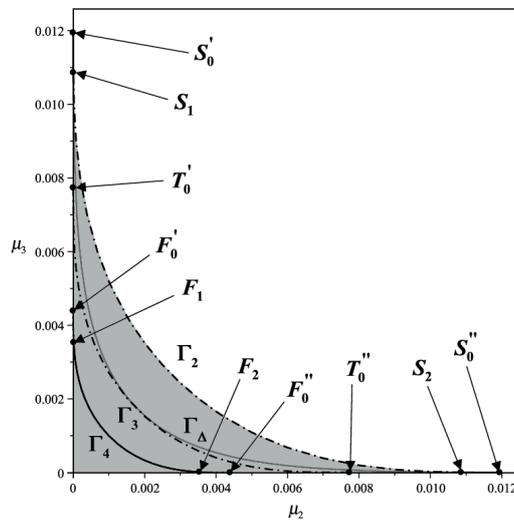
Численно установлено, что положения относительного равновесия  $L_{45}$ ,  $L_{54}$  и  $L_{55}$  при всех значениях параметров ( $\mu_2$  и  $\mu_3$ ), отвечающих резонансу третьего порядка, коэффициент  $A$  нормальной формы (20) отличен от нуля. Поэтому на резонансных кривых  $\Gamma_3$ , изображенных на Рис. 4а, Рис. 4б



(a) Диаграмма устойчивости по Ляпунову положения относительного равновесия  $L_{45}$



(b) Диаграмма устойчивости по Ляпунову положения относительного равновесия  $L_{54}$



(c) Диаграмма устойчивости по Ляпунову положения относительного равновесия  $L_{55}$

Рис. 4: Диаграмма устойчивости по Ляпунову положения относительного равновесия тела  $P$

и Рис. 4с положения относительного равновесия  $L_{45}$ ,  $L_{54}$  и  $L_{55}$  неустойчивы. Для всех значений параметров задачи, отвечающих резонансной кривой  $\Gamma_4$ , также численно были найдены значения коэффициентов  $B$  и  $C$  нормальной формы (22). Оказалось, что для положений относительного равновесия  $L_{45}$  и  $L_{54}$  неравенство (23) не выполнено. Поэтому это положение относительного равновесия на всей резонансной кривой  $\Gamma_4$  неустойчиво. Для положения относительного равновесия  $L_{55}$  было установлено, что на участке резонансной кривой  $\Gamma_4$ , ограниченной точками  $F_1$  и  $F_2$ , неравенство (23) выполнено, а вне указанного участка не выполнено. Таким образом положение относительного равновесия  $L_{55}$  на участке  $F_1F_2$  устойчиво по Ляпунову, а на участках  $F_0'F_1$  и  $F_2F_0''$  неустойчиво.

Аналогичный численный анализ коэффициентов нормальной формы (24) показал, что для всех значений параметров задачи на кривой  $\Gamma_2$  (Рис. 4а и

Рис. 4b) условие (25) для положений относительного равновесия  $L_{45}$  и  $L_{54}$  выполнено. Поэтому данные положения относительного равновесия устойчивы по Ляпунову. Резонансная кривая  $\Gamma_2$ , соответствующая положению относительного равновесия  $L_{55}$  (Рис. 4с), разделяется точками  $S_1$  и  $S_2$  на три участка. На участке  $S_1S_2$  положение относительного равновесия  $L_{55}$  неустойчиво по Ляпунову, а на участках  $S'_0S_1$  и  $S_2S''_0$  устойчиво.

На Рис. 4а, Рис. 4b и Рис. 4с сплошной черной линией обозначены участки кривых, на которых положение относительного равновесия тела  $P$  устойчиво по Ляпунову. Штрихпунктирной черной линией обозначены участки кривых, где положения относительного равновесия неустойчивы. Темно-серым цветом на Рис. 4а и Рис. 4b изображена область, где не выполняется условие Рауса (6). Поэтому здесь положения относительного равновесия  $L_{45}$  и  $L_{54}$  устойчивы по Ляпунову, как это было установлено выше, однако соответствующие центральные конфигурации из четырёх тел будут неустойчивыми.

При значениях параметра  $\mu_3$ , близких к нулю, точность численного определения коэффициентов нормальной формы разложения гамильтониана в окрестности положений относительного равновесия  $L_{45}$  и  $L_{55}$  падает. Аналогично, потеря точности имеет место и при численном вычислении коэффициентов нормальной формы разложения гамильтониана в окрестности положений относительного равновесия  $L_{54}$  и  $L_{55}$  при  $\mu_2 \rightarrow 0$ . В этих близких к предельным случаях один из параметров можно считать достаточно малой величиной. Это обстоятельство позволяет применить метод малого параметра и выполнить анализ устойчивости аналитически, не прибегая к численному вычислению коэффициентов нормальной формы функции Гамильтона. Действительно, малость параметра  $\mu_3$  означает, что масса притягивающего тела  $P_3$  много меньше масс тел  $P_1$  и  $P_2$ . В этом случае положения относительного равновесия  $L_{45}$  и  $L_{55}$  тела малой массы  $P$  располагаются вблизи притягивающего тела  $P_3$ , а уравнения движения тела  $P$  можно записать в гамильтоновой форме, с функцией Гамильтона

$$\begin{aligned} \tilde{H} = & \frac{1}{2} (\tilde{y}_1^2 + \tilde{y}_2^2) + \tilde{x}_2\tilde{y}_1 - \tilde{x}_1\tilde{y}_2 + \frac{1}{8} (1 - 9\mu_2) \tilde{x}_1^2 - \\ & - \frac{1}{8} (5 - 9\mu_2) \tilde{x}_2^2 + \frac{3\sqrt{3}}{4} (1 - \mu_2) \tilde{x}_1\tilde{x}_2 - \frac{1}{\sqrt{\tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2}} + O(\mu_3^{1/3}). \end{aligned} \quad (26)$$

В диссертации при достаточно малых значениях параметров задачи были получены явные асимптотические выражения для коэффициентов нормальной формы разложения гамильтониана (26) в ряд в окрестности рассматриваемых положений относительного равновесия. Используя эти выражения, были проверены достаточные условия устойчивости и сделаны строгие выводы об устойчивости положений относительного равновесия. В частности, при резонансе третьего порядка ( $\omega_1 = 2\omega_2$ ), коэффициент  $A$  нормальной формы (20) разложения гамильтониана в окрестности положения относительного

равновесия  $L_{45}$  имеет следующее асимптотическое выражение в виде ряда по дробным степеням малого параметра  $\mu_3$

$$A = 0.28034424 + 1.06529423\mu_3^{1/3} - 3.66436895\mu_3^{2/3} + O(\mu_3), \quad (27)$$

а для соответствующего коэффициента нормализованного разложения гамильтониана в окрестности положения относительного равновесия  $L_{55}$  это асимптотическое выражение имеет вид

$$A = 0.28034424 - 1.06529423\mu_3^{1/3} - 3.66436895\mu_3^{2/3} + O(\mu_3). \quad (28)$$

Таким образом, при малых значениях параметра  $\mu_3$  коэффициент  $A$  нормализованной в окрестности положений относительного равновесия функции Гамильтона отличен от нуля. Поэтому на основании теоремы А.П. Маркеева можно сделать вывод, что в этом случае положения относительного равновесия  $L_{45}$  и  $L_{55}$  неустойчивы при достаточно малых значениях параметра  $\mu_3$ .

Аналогично, в случае резонанса четвертого порядка ( $\omega_1 = 3\omega_2$ ), коэффициенты  $B$  и  $C$  нормальной формы (22) разложения гамильтониана в окрестности положения относительного равновесия  $L_{45}$  имеют следующие асимптотические выражения в виде рядов по дробным степеням малого параметра  $\mu_3$

$$\begin{aligned} B &= 0.15930850 + 0.98922509\mu_3^{1/3} - 1.22686493\mu_3^{2/3} + O(\mu_3), \\ C &= -0.62741180 + 2.31780686\mu_3^{1/3} - 14.52680613\mu_3^{2/3} + O(\mu_3), \end{aligned} \quad (29)$$

а для разложения гамильтониана в окрестности положения относительного равновесия  $L_{55}$  имеем следующие асимптотические выражения коэффициентов  $B$  и  $C$

$$\begin{aligned} B &= 0.15930850 - 0.98922509\mu_3^{1/3} - 1.22686493\mu_3^{2/3} + O(\mu_3), \\ C &= -0.62741180 - 2.31780686\mu_3^{1/3} - 14.52680613\mu_3^{2/3} + O(\mu_3). \end{aligned} \quad (30)$$

На основании выражений (29) и (30) нетрудно показать, что выполняется неравенство

$$\left| 3\sqrt{3}B \right| > |C|. \quad (31)$$

Поэтому на основании теоремы А.П. Маркеева, можно сделать вывод о неустойчивости положений относительного равновесия  $L_{45}$  и  $L_{55}$  при достаточно малых значениях параметра  $\mu_3$ .

В случае резонанса второго порядка ( $\omega_1 = \omega_2$ ), коэффициент  $A$  нормальной формы (24) разложения гамильтониана в окрестности положения относительного равновесия  $L_{45}$  имеет следующее асимптотическое выражение в

виде ряда по дробным степеням малого параметра  $\mu_3$

$$A = 0.00072440 + 0.04422790\mu_3^{1/3} - 0.09953904\mu_3^{2/3} + O(\mu_3), \quad (32)$$

а для разложения гамильтониана в окрестности положения относительного равновесия  $L_{55}$  имеем следующее асимптотическое выражение коэффициента  $A$

$$A = 0.00072440 - 0.04422790\mu_3^{1/3} - 0.09953904\mu_3^{2/3} + O(\mu_3). \quad (33)$$

Из (32) и (33) следует, что при достаточно малых значениях параметра  $\mu_3$  коэффициент  $A$  нормализованной в окрестности положений относительного равновесия функции Гамильтона больше нуля. Поэтому для положений относительного равновесия  $L_{45}$  и  $L_{55}$  на основании теоремы А.Г. Сокольского имеет место устойчивость.

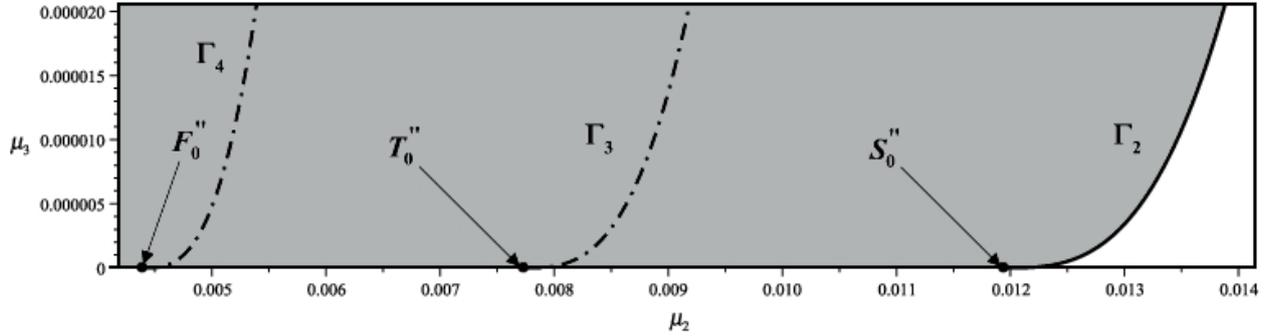


Рис. 5: Диаграмма устойчивости положения относительного равновесия  $L_{45}$  при  $\mu_3 \ll 1$

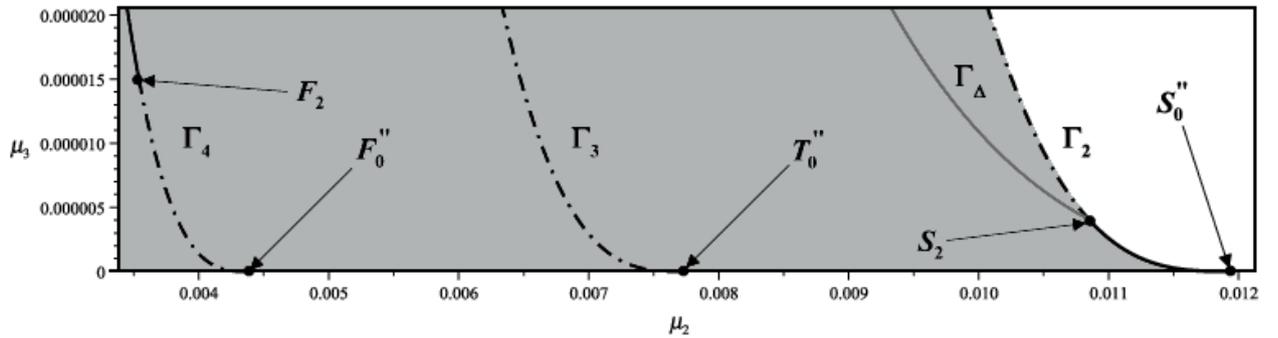


Рис. 6: Диаграмма устойчивости положения относительного равновесия  $L_{55}$  при  $\mu_3 \ll 1$

На Рис. 5 и Рис. 6 представлены результаты аналитического исследования устойчивости по Ляпунову положений относительного равновесия  $L_{45}$  и  $L_{55}$  при достаточно малых значениях параметра  $\mu_3$ . Аналогичные результаты были получены в диссертации для положений относительного равновесия  $L_{54}$  и  $L_{55}$  при малых значениях параметра  $\mu_2$ .

Результаты численного и аналитического исследования хорошо согласуются и дополняют друг друга.

**В третьей главе** исследуется вопрос об орбитальной устойчивости короткопериодических движений, рождающихся из устойчивого положения относительного равновесия.

В данной главе рассматривается частный случай плоской круговой ограниченной задачи четырёх тел, когда два притягивающих тела  $P_2$  и  $P_3$  обладают равными массами ( $m_2 = m_3 = m$ ). В этом случае в задаче имеется только один параметр  $\mu = \mu_2 = \mu_3$  ( $\mu = \frac{m}{m_1+2m}$ ), а гамильтониан задачи (3) принимает следующий вид

$$H = \frac{1}{2} (p_\xi^2 + p_\eta^2) + p_\xi \left( \eta - \frac{\sqrt{3}}{2} (1 - 2\mu) \right) - p_\eta \xi - \frac{1 - 2\mu}{\rho_1} - \frac{\mu}{\rho_2} - \frac{\mu}{\rho_3}, \quad (34)$$

где

$$\rho_1 = \left( \xi^2 + \left( \eta - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \right)^{1/2}, \quad \rho_2 = \left( \left( \xi + \frac{1}{2} \right)^2 + \eta^2 \right)^{1/2},$$

$$\rho_3 = \left( \left( \xi - \frac{1}{2} \right)^2 + \eta^2 \right)^{1/2}.$$

Будем как и прежде предполагать, что выполнено условие Рауса (6), которое в рассматриваемом случае принимает следующий вид:

$$0 < \mu < \frac{1}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{9}. \quad (35)$$

Согласно теореме о голоморфном интеграле в малой окрестности устойчивого положения равновесия канонической системы с гамильтонианом (34) существуют периодические решения, образующие так называемые естественные семейства, зависящие от одного параметра. В качестве такого параметра можно выбрать постоянную интеграла энергии  $h$ . Данные периодические решения известны как решения Ляпунова. В общем случае они разделяются на два класса и описывают так называемые коротко- и долгопериодические движения. Движения с наименьшим периодом  $T_S$  называются короткопериодическими и существуют как для устойчивого, так и для неустойчивого положения равновесия. В зависимости от значений параметров задачи также могут существовать одно или несколько семейств так называемых долгопериодических движений с периодом  $T_L$  ( $T_L > T_S$ ). В нерезонансном случае существует ровно одно семейство долгопериодических движений в окрестности устойчивого положения равновесия.

В малой окрестности положения относительного равновесия  $L_{55}$  периодические движения Ляпунова можно получить аналитически в виде сходящихся рядов по степеням малого параметра. В качестве малого параметра

можно выбрать амплитуду  $c = c(h)$ , которая зависит от постоянной интеграла энергии  $h$ . Для получения аналитических выражений, описывающих периодические движения Ляпунова в малой окрестности исследуемого положения относительного равновесия  $L_{55}$ , приведём функцию Гамильтона задачи (34) к нормальной форме. С этой целью введём локальные канонические переменные  $q_1, q_2, p_1, p_2$  по формулам

$$\xi = q_1, \quad \eta = \eta_* + q_2, \quad p_\xi = -\eta_* + \frac{\sqrt{3}}{2}(1 - 2\mu) + p_1, \quad p_\eta = p_2. \quad (36)$$

В переменных  $q_i, p_i$  короткопериодическое решение имеет вид

$$\begin{cases} q_1 = n_{11}c \sin(\Omega_1\nu) + O(c^3) \\ q_2 = m_{21}c \cos(\Omega_1\nu) + O(c^3) \\ p_1 = m_{31}c \cos(\Omega_1\nu) + O(c^3) \\ p_2 = n_{41}c \sin(\Omega_1\nu) + O(c^3) \end{cases}. \quad (37)$$

Данное решение описывает семейства короткопериодических движений в окрестности положения относительного равновесия  $L_{55}$  с периодом  $T_S = 2\pi/\Omega_1$  и амплитудой  $c$ . Частота колебаний  $\Omega_1$  является аналитической функцией амплитуды  $c$  и представима в виде сходящегося ряда

$$\Omega_1 = \omega_1 + c_{02}c^2 + O(c^4).$$

Если выполнено соотношение

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbb{Z},$$

то на основании теоремы Ляпунова о голоморфном интеграле также существуют семейства долгопериодических решений, которые в переменных  $q_i, p_i$  имеют следующий вид

$$\begin{cases} q_1 = -n_{12}c \sin(\Omega_2\nu) + O(c^3) \\ q_2 = m_{22}c \cos(\Omega_2\nu) + O(c^3) \\ p_1 = m_{32}c \cos(\Omega_2\nu) + O(c^3) \\ p_2 = -n_{42}c \sin(\Omega_2\nu) + O(c^3) \end{cases}. \quad (38)$$

где

$$\Omega_2 = \omega_2 - c_{20}c^2 + O(c^4).$$

Долгопериодические движения имеют период  $T_L = 2\pi/\Omega_2$ .

Коротко- и долгопериодические движения (37) и (38), полученные аналитически для малых значений амплитуды  $c$ , могут быть численно продолжены в область произвольных значений амплитуды. В диссертационной работе чис-

ленное продолжение решений было выполнено на основании метода, разработанного А.Г. Сокольским и С.Р. Каримовым. Также на основе этого метода были получены выводы об орбитальной устойчивости короткопериодических движений, рождающихся из устойчивого положения относительного равновесия, в линейном приближении.

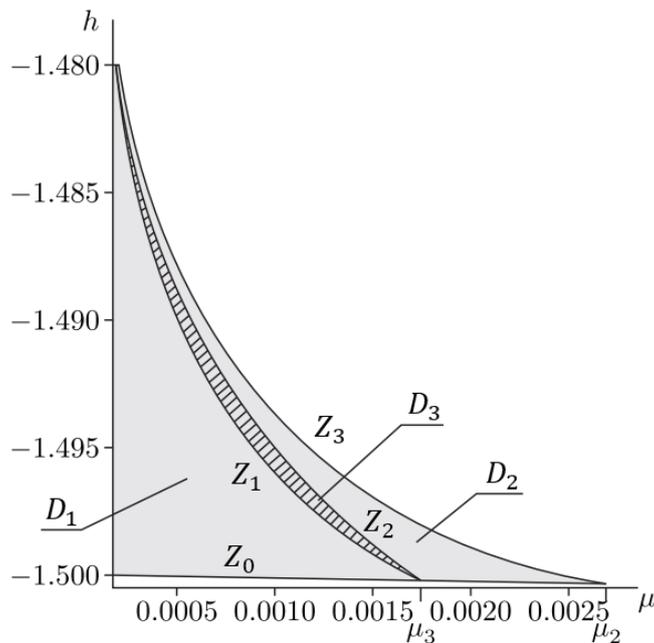
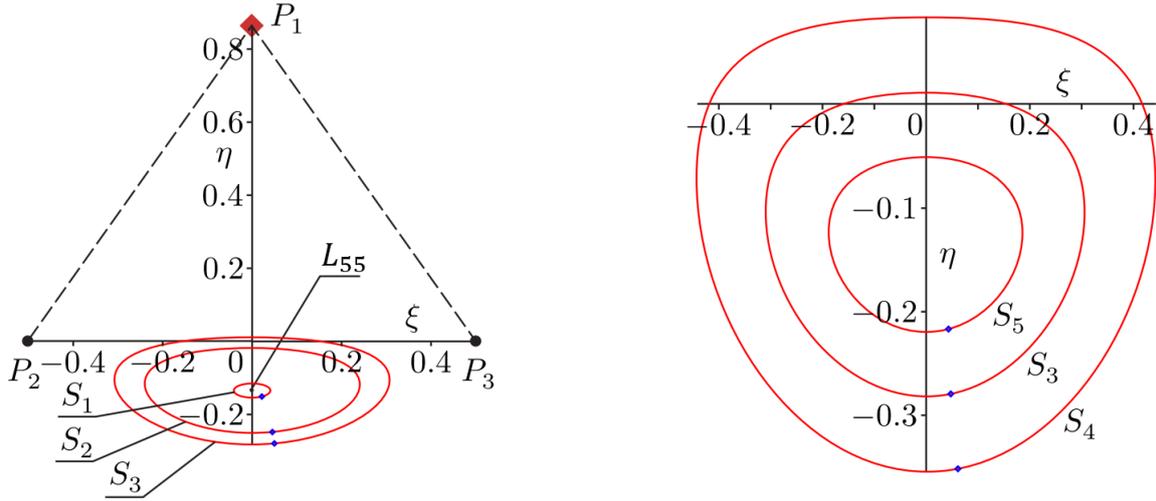


Рис. 7: Диаграмма орбитальной устойчивости в линейном приближении семейства короткопериодических движений, рождающихся из положения относительного равновесия  $L_{55}$

На основе метода численного продолжения по параметрам были получены области существования и орбитальной устойчивости в линейном приближении семейства короткопериодических движений, рождающихся из устойчивого положения относительного равновесия  $L_{55}$ . Данные области показаны на Рис. 7. Область существования периодического движения снизу ограничена кривой  $Z_0$ , соответствующей положению относительного равновесия  $L_{55}$ , а сверху ограничена кривой  $Z_3$ , где заканчивается семейство короткопериодических движений. Левая граница данной области задается условием  $\mu = 0$ , которое соответствует ограниченной задаче двух тел. Короткопериодические движения орбитально устойчивы в линейном приближении в областях  $D_1$  и  $D_2$  и орбитально неустойчивы в области параметрического резонанса  $D_3$ , ограниченной кривыми  $Z_1$  и  $Z_2$ .

На Рис. 8а для фиксированного значения параметра  $\mu$  ( $\mu = 0.001$ ) и трех значений постоянной энергии  $h$  изображены орбиты семейства  $F_S$  короткопериодических движений, рождающихся из устойчивого положения относительного равновесия  $L_{55}$ . Орбита  $S_1$  соответствует небольшому отклонению постоянной энергии  $\Delta h$  ( $\Delta h \approx 0.0001$ ) от ее значения, соответствующего положению относительного равновесия  $L_{55}$ . Орбита  $S_2$  лежит внутри области



(a) Орбиты короткопериодических движений, рождающихся из положения относительного равновесия  $L_{55}$ , при  $\mu = 0.001$

(b) Орбиты короткопериодических движений, расположенные в окрестности верхней границы  $Z_3$  области существования

Рис. 8: Орбиты короткопериодических движений

орбитальной неустойчивости  $D_3$ , а орбита  $S_3$  находится на верхней границе  $Z_3$  области существования при  $\Delta h \approx 0.006$ . На Рис. 8b показаны три орбиты на верхней границе  $Z_3$  области существования для значений  $\mu = 0.0002$  (орбита  $S_4$ ),  $\mu = 0.001$  (орбита  $S_3$ ) и  $\mu = 0.002$  (орбита  $S_5$ ). Стоит отметить, что все орбиты семейства  $F_S$  короткопериодического движения имеют общую форму, показанную на Рис. 8.

Долгопериодические движения также рассматривались, но рассчитывались только в относительно небольшой окрестности рассматриваемого положения относительного равновесия  $L_{55}$ . Вычисления показали, что подобласти  $D_1$  и  $D_2$ , изображенные на Рис. 7, содержат два различных семейства  $F_{L1}$  и  $F_{L2}$  долгопериодических движений соответственно. Семейство  $F_{L1}$  заканчивается на границе  $Z_2$ , а семейство  $F_{L2}$  заканчивается на границе  $Z_1$ . Подобласть  $D_3$  содержит оба этих семейства.

Чтобы проверить результаты, были построены сечения Пуанкаре для конкретных значений параметров задачи. На Рис. 9 изображено сечение Пуанкаре, построенное для значений параметров  $\mu = 0.001$ ,  $h = -1.497$ , где  $P_S$  — периодическое движение, соответствующее орбитально устойчивой орбите короткопериодического движения семейства  $F_S$ .

Для получения строгих выводов об орбитальной устойчивости периодических движений линейного анализа недостаточно. В диссертационной работе был выполнен нелинейный анализ орбитальной устойчивости. С этой целью применялась методика, предложенная Б.С. Бардиным и А.П. Маркевым. Суть данной методики состоит в том, что в окрестности устойчивой в линейном приближении периодической орбиты необходимо ввести локальные переменные, выполнить изоэнергетическую редукцию и свести задачу об

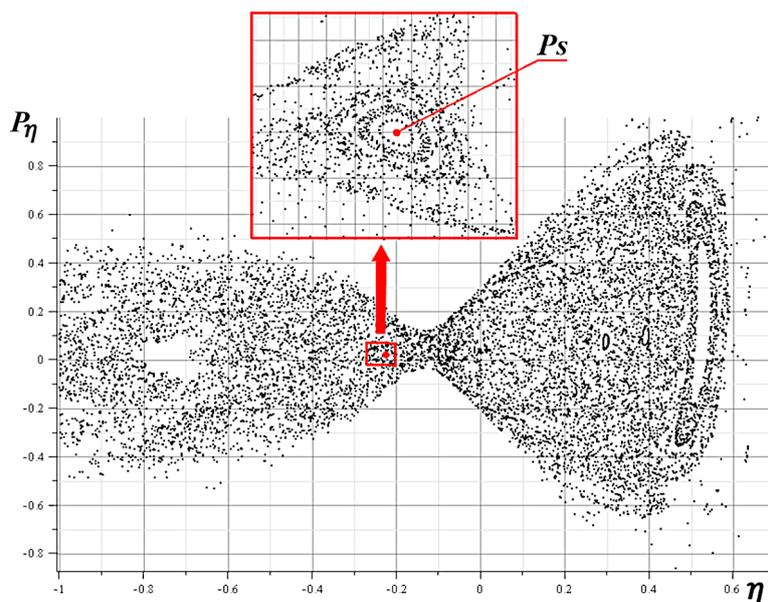


Рис. 9: Сечение Пуанкаре при  $\mu = 0.001$  и  $h = -1.497$ , иллюстрирующие движение системы в окрестности орбитально устойчивого короткопериодического движения  $P_S$  семейства  $F_S$

орбитальной устойчивости к задаче об устойчивости положения равновесия редуцированной системы. Последняя задача может быть эффективно решена на основании методики, разработанной А.П. Маркеевым. Суть данного метода заключается в том, что исследование устойчивости полной нелинейной системы сводится к исследованию устойчивости неподвижной точки симплектического отображения, генерируемого фазовым потоком канонической системы.

На основании упомянутых выше методик в диссертации был разработан алгоритм строгого нелинейного анализа орбитальной устойчивости короткопериодических движений, рождающихся из устойчивого положения относительного равновесия  $L_{55}$ . Для реализации данного алгоритма был разработан пакет программ в системе компьютерной математики Maple 2017.

В результате применения этого алгоритма был проведён нелинейный анализ орбитальной устойчивости короткопериодических движений, рождающихся из устойчивого положения относительного равновесия  $L_{55}$ . Исследование было выполнено для всех значений параметров задачи ( $\mu$  и  $h$ ), отвечающих устойчивым в линейном приближении короткопериодическим орбитам. Данные результаты представлены на Рис. 10. Резонансные кривые третьего порядка изображены штрихпунктирной линией. Было установлено, что в случае резонанса третьего порядка периодические орбиты орбитально неустойчивы при всех возможных значениях параметра  $\mu$ . Резонансные кривые четвертого порядка изображены пунктирной линией и точками. Оказалось, что в случае резонанса четвёртого порядка существуют как орбитально устойчивые, так и орбитально неустойчивые периодические орбиты. Пунктирной ли-

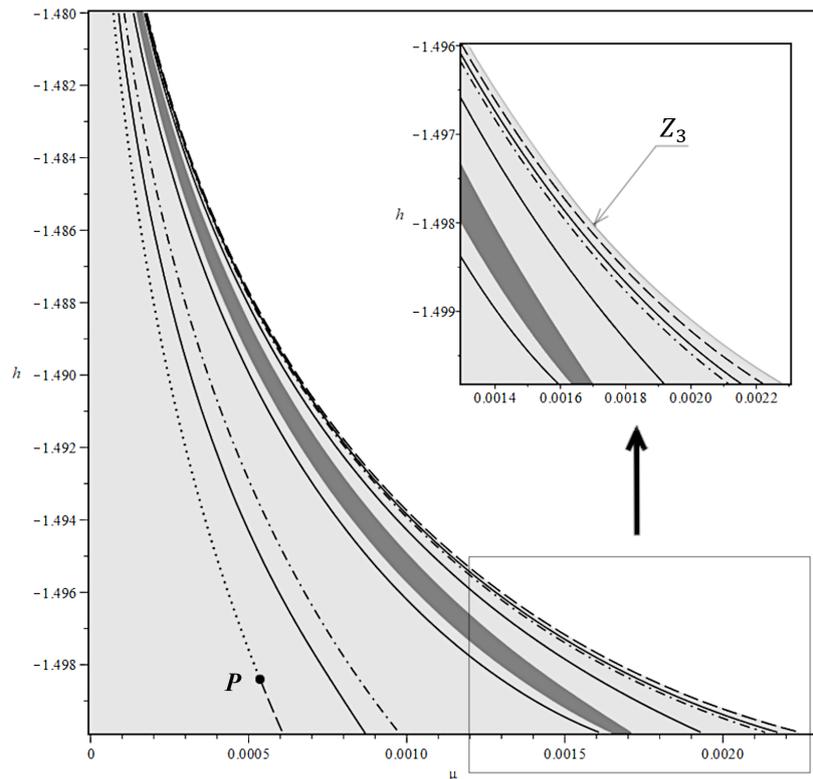


Рис. 10: Диаграмма орбитальной устойчивости семейства короткопериодических движений, рождающихся из устойчивого положения относительного равновесия  $L_{55}$

нией изображена область орбитальной устойчивости, а точками изображена область, где периодические орбиты орбитально неустойчивы. Смена устойчивости на неустойчивость происходит в точке  $P$  с координатами  $\mu = 0.000536$ ,  $h = -1.498403$ , в которой исследование не проводилось. Для решения вопроса в указанной точке необходимо проводить анализ с учётом членов до шестой степени включительно в разложении гамильтониана задачи. Сплошными линиями изображены кривые вырождения, где для ответа на вопрос об устойчивости в случаях вырождения требуется проводить анализ с учётом членов до шестой степени включительно в разложении гамильтониана задачи.

**В заключении** приведены основные результаты выполненного в диссертационной работе исследования существования, устойчивости и бифуркации стационарных и периодических движений в плоской круговой ограниченной задаче четырёх тел.

## Публикации в журналах из перечня ВАК и международных систем цитирования

1. *Bardin B. S., Volkov E. V.* Stability study of a relative equilibrium in the planar circular restricted four-body problem // *IOP Conference Series: Materials*

*Science and Engineering*. 2020. Vol. 927. (Scopus).

2. *Bardin B. S., Volkov E. V.* On bifurcations and stability of central configurations in the planar circular restricted four-body problem // *Journal of Physics: Conference Series*. 2021. Vol. 1959. (Scopus).

3. *Sukhov E. A., Volkov E. V.* Numerical orbital stability analysis of nonresonant periodic motions in the planar restricted four-body problem // *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*. 2022. Vol. 18. No. 4. p. 563–576. (Scopus).

4. *Bardin B. S., Sukhov E. A., Volkov E. V.* Nonlinear orbital stability of periodic motions in the planar restricted four-body problem // *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*. 2023. Vol. 19. No. 4. p. 545–557. (Scopus).

5. *Bardin B. S., Volkov E. V.* The Lyapunov stability of central configurations of the planar circular restricted four-body problem // *Cosmic Research*. 2024. Vol. 62. No. 5. p. 388–400. (Web of Science, Scopus).

6. *Волков Е. В.* Линейный анализ орбитальной устойчивости периодических движений в плоской круговой ограниченной задаче четырёх тел // *Труды МАИ*. 2024. № 138. (Перечень ВАК РФ).

## **Публикации по теме диссертации в материалах конференций**

7. *Волков Е. В.* Исследование устойчивости центральных конфигураций в ограниченной задаче четырех тел // «Гагаринские чтения – 2020»: Сборник тезисов докладов. – М.: МАИ. 2020. с. 910–911.

8. *Бардин Б. С., Волков Е. В.* Исследование устойчивости центральной конфигурации в плоской ограниченной задаче четырех тел // Материалы XIII Международной конференции по прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли (АММАГ'2020), 6-13 сентября 2020 г., Алушта. – М.: Изд-во МАИ. 2020. с. 367–368.

9. *Бардин Б. С., Волков Е. В.* Линейный анализ устойчивости центральной конфигурации в ограниченной круговой задаче четырех тел // 19-я Международная конференция «Авиация и космонавтика». 23-27 ноября 2020 года. Москва. Тезисы. – М.: Издательство «Перо». 2020. с. 539–540.

10. *Бардин Б. С., Волков Е. В.* О бифуркации и устойчивости в линейном приближении центральных конфигураций в ограниченной круговой задаче четырех тел // Международная научная конференция «Фундаментальные и прикладные задачи механики», Москва, 2–4 декабря 2020 г. : Материалы конференции, Инженерный журнал: Наука и Инновации. 2021. вып. 3, с. 180–182.

11. *Бардин Б. С., Волков Е. В.* Анализ устойчивости и бифуркаций центральных конфигураций в ограниченной плоской круговой задаче четырех тел // IX Поляховские чтения: Материалы международной научной конференции по механике, 9-12 марта 2021 г., Санкт-Петербург, Россия. – СПб.: Издательство ВВМ. 2021. с. 143–145.

12. *Волков Е. В.* Аналитическое и численное исследование устойчивости и бифуркации центральных конфигураций в плоской круговой ограниченной задаче четырех тел // «Гагаринские чтения – 2021»: Сборник тезисов докладов. – М.: МАИ. 2021. с. 837–838.
13. *Бардин Б. С., Волков Е. В.* Нелинейный анализ устойчивости центральной конфигурации в плоской круговой задаче четырех тел // 20-я Международная конференция «Авиация и космонавтика». 22-26 ноября 2021 года. Москва. Тезисы. – М.: Издательство «Перо». 2021. с. 413–414.
14. *Bardin B. S., Volkov E. V.* Analysis of linear stability and bifurcations of central configurations in the planar restricted circular four-body problem // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2021. Vol. 1191.
15. *Бардин Б. С., Волков Е. В., Сухов Е. А.* Построение и анализ орбитальной устойчивости периодических движений в плоской круговой ограниченной задаче четырех тел // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Тезисы докладов. Суздаль, 30 июня – 5 июля 2022. – Владимир: ООО «Аркаим». 2022. с. 88–89.
16. *Бардин Б. С., Волков Е. В.* Нелинейный анализ устойчивости центральной конфигурации в плоской круговой ограниченной задаче четырех тел при резонансах второго и третьего порядка // 21-я Международная конференция «Авиация и космонавтика». 21-25 ноября 2022 года. Москва. Тезисы. – М.: Издательство «Перо». 2022. с. 381–382.
17. *Волков Е. В., Сухов Е. А.* Анализ орбитальной устойчивости семейств периодических движений в плоской круговой ограниченной задаче четырех тел // 21-я Международная конференция «Авиация и космонавтика». 21-25 ноября 2022 года. Москва. Тезисы. – М.: Издательство «Перо». 2022. с. 429–430.
18. *Волков Е. В.* Нелинейный анализ устойчивости центральной конфигурации в плоской круговой ограниченной задаче четырех тел в резонансных случаях // XIII Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике. 21-25 августа 2023 года. Санкт-Петербург. 2023. с. 80–82.
19. *Бардин Б. С., Волков Е. В., Сухов Е. А.* Нелинейный анализ орбитальной устойчивости периодических движений в окрестности положения относительного равновесия плоской круговой ограниченной задачи четырех тел // 22-я Международная конференция «Авиация и космонавтика». 20-24 ноября 2023 года. Москва. Тезисы. – М.: Издательство «Перо». 2023. с. 254–255.
20. *Бардин Б. С., Волков Е. В.* Нелинейный анализ устойчивости центральных конфигураций в плоской круговой ограниченной задаче четырех тел при малой массе одного из притягивающих тел // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Тезисы докладов. Суздаль, 28 июня – 4 июля 2024. – Владимир: ООО «Аркаим». 2024. с. 104–105.