

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

На правах рукописи

УДК 593.3



ФАМ ДЫК ТХОНГ

**НЕСТАЦИОНАРНАЯ ДИНАМИКА ЭЛЕКТРОМАГНИТОУПРУГИХ
ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК**

01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

ДИССЕРТАЦИЯ

На соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

д. ф.-м. н., профессор

Тарлаковский Дмитрий Валентинович

Москва – 2020

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
ГЛАВА 1. НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТОУПРУГИХ ОБОЛОЧЕК	8
1.1. Современное состояние исследований	8
1.2. Уравнения движения упругой оболочки при известных внешних нагрузках	19
1.3. Система уравнений для электромагнитоупругих процессов в \mathbb{R}^3	21
1.4. Замкнутая система уравнений для анизотропных электромагнитоупругих оболочек	22
1.5. Уравнений для оболочек из изотропных проводников.....	30
ГЛАВА 2. НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТОУПРУГИХ ПЛАСТИН В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ДЕКАРТОВОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ	33
2.1. Замкнутая система уравнений движения электромагнитоупругой пластины	33
2.2. Уравнения движения изотропной электромагнитоупругой пластины в прямоугольной декартовой системе координат.....	35
2.3. Замкнутая система уравнений движения одномерной электромагнитоупругой пластины (стержня)	40
2.4. Уравнения для электромагнитоупругого стержня в изображениях по Лапласу.....	42
ГЛАВА 3. НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ПРОДОЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТОУПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ	48
3.1. Продольные колебания бесконечного электромагнитоупругого стержня... 48	
3.2. Продольные колебания бесконечного электромагнитоупругого стержня без учета обжатия	54
3.3. Примеры расчетов продольных колебаний бесконечного электромагнитоупругого стержня	57

3.4. Продольные колебания конечного электромагнитоупругого стержня	62
3.5. Примеры расчетов продольных колебаний конечного электромагнитоупругого стержня	65
ГЛАВА 4. НЕСТАЦИОНАРНЫЙ ИЗГИБ ЭЛЕКТРОМАГНИТОУПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ	69
4.1. Изгиб бесконечного электромагнитоупругого стержня	69
4.2. Нестационарный изгиб бесконечного электромагнитоупругого стержня Бернулли-Эйлера	71
4.3. Примеры расчетов изгиба бесконечного электромагнитоупругого стержня	75
4.4. Изгиб конечного электромагнитоупругого стержня	88
4.5. Примеры расчетов изгиба конечного электромагнитоупругого стержня....	91
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	99
ПРИЛОЖЕНИЕ	100
П.1. Оригиналы функций $F_{ap0}^{FL}(q, s)$ и $F_{ap1}^{FL}(q, s)$ в параграфе 4.2	100
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	107

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. В настоящее время наиболее исследованными являются задачи о распространении нестационарных возмущений в классических упругих средах без учета их взаимодействия с полями другой физической природы, в том числе с рассматриваемыми в работе электромагнитными полями. В большинстве известных публикаций это взаимодействие учитывается на уровне несвязанных задач. При этом практически отсутствуют публикации по проблеме распространения нестационарных волн в тонких электромагнитоупругих оболочках.

В тоже время в различных областях новой техники, в том числе в авиации и космонавтике, имеется насущная потребность в использовании моделей нестационарной связанной электромагнитоупругости для тонкостенных элементов конструкций, которые с необходимой степенью точности описывают процессы деформирования. Поэтому тема диссертационной работы представляет собой актуальную проблему.

Цель диссертационной работы заключается в развитии направления механики нестационарного взаимодействия механических и электромагнитоупругих полей, включающего постановки и исследование новых задач для тонких оболочек.

Методы исследования. При построении модели использовались линейные уравнения движения оболочек, уравнения Максвелла, а также линеаризованный обобщенный закон Ома и выражение для силы Лоренца. Для решения задач применялись метод малого параметра, функции Грина, преобразования Лапласа и Фурье и тригонометрические ряды Фурье. Для проведения расчётов разработаны специальные процедуры программ для обработки результатов. Построение графиков проводилось в среде Maple 18.

Достоверность и обоснованность результатов подтверждается тем, что все результаты получены на базе модификации известных моделей механики деформируемого твёрдого тела и электромагнитодинамики. В совокупности с

известным математическим аппаратом тензорного анализа и численными методами интегрирования это подтверждает достоверность результатов и полученных аналитических решений.

Научная новизна диссертационной работы заключается в следующем.

1. Впервые построена связанная нестационарная модель, описывающая нестационарные процессы в тонких электромагнитных оболочках, пластинах и стержнях.

2. Дано решение новых задач о нестационарных продольных колебаниях бесконечного и конечного электромагнитоупругого стержней.

3. Проведено подробное исследование новых задач о нестационарном изгибе бесконечного и конечного электромагнитоупругого стержней.

Практическая значимость состоит в возможности использовать результаты работы для уточнения функционирования различных электронных устройств, использующих в своей работе проводящие элементы, которые подвергаются экстремальным воздействиям полей различной природы.

Кроме того, полученные точные результаты могут служить эталонными и тестовыми решениями для дальнейших перспективных разработок в области нестационарной электромагнитоупругости.

Апробация основных результатов работы. Основные положения диссертационной работы обсуждались и докладывались на следующих научных конференциях и симпозиумах:

- Международный симпозиум «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова (Московская область, Кременки, 2017-2020 гг.);

- Международная научная конференция «Проблемы прочности, динамики и ресурса», посвященная памяти и 80-летию со дня рождения Ю.Г. Коротких (Нижний Новгород, 2017 г.);

- Международный. научный. семинар «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при взаимодействии полей различной физической природы» (Москва, 2017-2018 гг.);

- Научная конференция «Ломоносовские чтения» (Москва, 2018-2020 гг.)

Публикации. По теме диссертации было опубликовано 10 работ, из них в журналах, рекомендованных ВАК, 3 статьи и 7 тезисов докладов.

Структура и объем диссертации. Работа состоит из введения, четырёх глав, заключения, приложение и списка литературы. Объем работы 117 страниц, работа содержит 48 рисунков, библиографический список содержит 144 наименования.

Во введении обоснована актуальность темы диссертации, сформулированы цели работы, приведены основные результаты и положения, выносимые на защиту, изложено краткое содержание диссертации по главам.

В первой главе приведен аналитический обзор публикаций, посвящённых задачам электромагнитоупругости. Из него следует, что несмотря на большое разнообразие существующих в настоящее время моделей электромагнитоупругости в основном, рассматривались несвязанные задачи, либо связанные задачи, которые решались в статической или в стационарной постановке. При этом во многих публикациях использовались численные методы исследования.

Здесь же построена математическая модель связанных нестационарных начально-краевых задач для электромагнитоупругих тонких оболочек. Построена линеаризованная система уравнений механической и электромагнитной частей оболочки, которая замыкается физическими соотношениями. Дан переход от общей анизотропной электромагнитоупругой модели к рассматриваемым в работе изотропным проводникам.

Во второй главе, как частный случай, приводится математическая формулировка нестационарных начально-краевых задач для электромагнитоупругих пластин в прямоугольной декартовой системе координат.

В третьей главе рассматриваются задачи о нестационарных продольных колебаниях электромагнитоупругих стержней. Исследуются два варианта стержней: бесконечный при условии ограниченности искомых функций и конечный с закрепленными и изолированными концевыми поперечными сечениями.

В четвертой главе рассмотрена задача о нестационарном изгибе

электромагнитоупругих стержней. Аналогично главе 3 рассматривается два варианта стержней: бесконечный и конечный.

В приложении строятся оригиналы функций в главе 4.

В заключении приводятся основные результаты, полученные в диссертации.

ГЛАВА 1. НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТО-УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК

1.1. Современное состояние исследований

Электромагнитоупругость - научное направление, объединяющее электродинамику, теорию магнетизма и механику сплошной среды. Во многих случаях элементы конструкций в процессе изготовления и эксплуатации подвергаются силовым, электромагнитным и динамическим воздействиям. Для анализа напряженно-деформированного состояния этих элементов с целью обеспечения их работоспособности и надежности необходимо располагать моделью связанной электромагнитоупругости, содержащей определяющие уравнения и дополнительные условия, а также иметь математические методы решения соответствующих задач.

Исследования в области электромагнитоупругости имеют довольно длинную историю. Источники [108, 109] указывают на то, что пьезоэлектричеством занимались братья Кюри Дж. и Кюри П. еще в 1880 году. Они обнаружили, что некоторые кристаллические материалы генерируют электрический заряд, пропорциональный механическому напряжению. С тех пор много других связанных электромагнитоупругих явлений было обнаружено, исследовано и применено в науке и технике.

Основные уравнения электромагнитоупругих взаимодействий, включая уравнения динамики, определяющие соотношения, граничные и начальные условия приведены в таких фундаментальных трудах и статьях как, например, [2, 12, 13, 17, 45, 71, 73, 74, 88, 92, 117, 128, 138]. Уравнения динамики (уравнения Ньютона и Максвелла) были построены в интегральной (глобальной) форме на основе известных аксиом электромагнетизма и механики, а затем сформулированы в дифференциальной форме при определенных условиях регулярности дифференцируемости поля. основополагающие соотношения, которые представляют особенности материалов в зависимости от диапазона эффектов, всегда

указывались в дифференциальной форме при определенных требованиях механики сплошных сред, за исключением нелокального случая, когда природа межмолекулярных сил имеет особое значение. Начальные и граничные условия всегда указывались в дифференциальной форме, и они давались так, чтобы обеспечить внутреннюю согласованность фундаментальных уравнений [133, 134].

Вопросы, связанные с существованием и единственностью решения задач нестационарной связанной электромагнитоупругости доказаны в работах Мельника В.Н. [66, 67]. Схожие идеи для прямоугольной области рассмотрены в статье Власенко В.Д. [36]. В [100, 114, 125] доказаны общие теоремы о свойствах решений термоэлектромагнитоупругости. В [135] доказано существование и единственность решений для модели, описывающей взаимодействия электромагнитных и упругих волн. Исследуемая модель состоит из двух связанных дифференциальных уравнений, одно из которых является гиперболическим уравнением (аналог системы Ламе), а другое - параболическим уравнением (аналог диффузионной системы Максвелла). В статье Ватульяна А.О. [28] на основе обобщённого преобразования Фурье строятся фундаментальные решения электроупругости.

Большое значение в электромагнитоупругости имеют вариационные принципы. Они рассмотрены в [32, 112, 119] применительно к пьезоэлектричеству, в [95, 112] для термо- и гидротермо-пьезоэлектричества, в [96, 97] для пьезоэлектромагнетизма, а в [118, 123, 144] для электромагнитоупругости. Некоторые вариационные принципы типа Гамильтона представлены в электромагнитоупругости в [123]. Не J. в [118] получил вариационный принцип для описания статического поведения электромагнитоупругой среды. В [98] основные уравнения для функционально-градиентной оболочки формулируются как уравнения Эйлера – Лагранжа единого вариационного принципа. Также приводится теорема, устанавливающая достаточные условия единственности решения уравнений оболочки.

Во многих работах рассмотрены статические задачи для конкретных структурных элементов. Например, в [122] получено аналитическое решение для электромагнитоупругих балок с различными граничными условиями, в [130, 131] построено точное трехмерное решение, в [143] вводится вектор состояний. В [120,121] получено решение для дискретного слоя, а в [115] для многослойных электромагнитоупругих пластин применяется частично смешанная послойная модель конечных элементов. В [84] рассмотрены возможности применения пьезоэлектрических преобразователей для измерения статических усилий, а также изложены теоретические основы работы пьезоэлектрических преобразователей в режиме измерения статических нагрузок. В монографии [74] исследованы задачи о гармонических колебаниях массивных пьезоэлектриков канонической формы и тонких пьезоэлектрических оболочек, а также решены некоторые статические задачи для пьезоэлектриков с электродами на поверхностях.

Вопросы, связанные с изучением особенностей электроупругих полей вблизи трещин при статическом нагружении пьезосреды, обсуждались в работах [63, 64, 77] и других. Работа [62] посвящена исследованию особенностей статических электроупругих полей, возникающие у краев пары бесконечно тонких электродов конечной длины, расположенных на свободной поверхности. В [48] решена статическая задача для сферического ферромагнитоупругого тела. В [129] дано аналитическое решение для электростатического поля внутри геликоидальной структуры с закруткой, малой по сравнению с характерным размером поперечного сечения.

Достаточно обширная библиография посвящена стационарным задачам электромагнитоупругости. В работах [20-24] рассмотрены основные задачи стационарной электроупругости и приведены аналитические решения задач о вынужденных колебаниях пьезокерамических цилиндров в одномерной постановке. Теоремы существования и единственности одной краевой задачи для системы уравнений Максвелла в неоднородных средах со слабо проводящими и

непроводящими включениями доказаны в статье Калинина А.В. и Морозова С.Ф. [52].

В работе Амбарцумяна С.А. и соавторов [2] достаточно подробно изучены задачи о стационарных колебаниях и устойчивости оболочек и пластин при наличии магнитного поля. Развивая эти идеи, Амбарцумян С.А., Саркисян С.В. в статье [3] исследовали колебания ортотропной цилиндрической оболочки в продольном магнитном поле. Задача решена в стационарной постановке для случая осесимметрических колебаний. С помощью преобразования Лапласа и Ханкеля Абрамян Б.Л. в [1] получил замкнутое решение задачи о колебаниях полупространства, вызванных динамической нагрузкой на поверхности полупространства.

Работа [76] посвящена построению и анализу расчётных деформируемых электропроводных моделей, находящихся в стационарном электромагнитном поле, также определению температурных полей и напряжений в однослойных и биметаллических пластинах, в круговых сплошных и полых цилиндрах и тонкостенных оболочках. В продолжении работы в [74] в монографии Смородинского Я.Г. [81] детально рассмотрены процессы отражения и преломления в магнитнополяризованных средах. Сформулированы методы решения задач теории упругости для пространственно неоднородного анизотропного слоя.

Обратная задача для стационарного электромагнитного поля рассмотрена Эппом В.Я., Копытовым Г.Ф. и Митрофановой Т.Г. [94]. Здесь электромагнитное поле и его первые производные по координатам для ограниченной системы зарядов и токов заданы в некоторой точке вдали от этой системы.

Более сложными являются динамические (нестационарные) задачи. В работе [37] приведены постановки задач электроупругости для однородных и составных тел с усложненными свойствами. Обширные исследования динамических задач электромагнитоупругости для разных структурных элементов, например, пластин приведены в работах [123, 124, 132, 136], а также для

цилиндрических и сферических оболочек - в работах [99, 103, 104, 110]. Pan E. и Heyliger P.R. [132] решили проблему вибрации ламинированной прямоугольной пластины с простой опорой. В работе Daga A., Ganesan N. и др. [110] провели сравнительное исследование переходного отклика электромагнитоупругой конечной цилиндрической оболочки при постоянном внутреннем давлении.

Динамические задачи электромагнитоупругости для керамических тел исследовал Шляхин Д.А. в [91]. В этой работе рассматривалась задача о круглой радиально поляризованной керамической пластине. Сторожев В.А. и Бай А.В. в [16] предложили численно-аналитический подход к решению задач электромагнитоупругости для пьезокерамической пластины. Он позволяет получить решение дисперсионного уравнения для любой пластины. В [116] Green A.E., Naghdi P.M. исследовали электромагнитные эффекты в теории оболочек и пластин.

В серии работ [51, 53-57] Калинин В.В. и др. рассмотрели ряд задач на основе линеаризации нелинейных уравнений механики электромагнитной сплошной среды, построенных в [71]. В монографии [54] представлена линеаризованная теория контактного взаимодействия полуограниченных предварительно напряженных пьезоактивных тел и построены решения задач о колебаниях пьезоактивной среды с прямолинейными границами. В статье [55] как частный случай построены определяющие соотношения динамики электроупругой среды при отсутствии внешних электростатических полей, а в [51] - при наличии этих полей. Отметим, что в [51, 55] не учитываются магнитные свойства среды. В статье [57] рассмотрен противоположный случай, а именно, построены определяющие соотношения движения предварительно напряженной магнитоупругой среды без учета электрических свойств среды. В [53] приведены определяющие соотношения движения предварительно напряженной электромагнитоупругой, находящейся под действием начальных механических напряжений. В работе [56] исследовано влияние начальных напряжений на динамику слабо неоднородной магнитоупругой среды.

Более широкий подход к изучению поверхностных волн в электромагнитоупругом полупространстве осуществляются в работах [11, 46, 47, 65, 75]. В статье Данояна З.Н. [46] построено дисперсионное уравнение для поверхностной волны Лява и проведен его анализ в зависимости от физико-механических свойств слоистой системы. Он же и Симонян А.М. в [47] исследовали поверхностные волны Релея при наличии поперечного магнитного поля и доказали, что возможна единственная скорость распространения магнитоупругих волн Релея для произвольной упругой среды. Ранее в работе Багдасаряна Г.Е. [11] показано, что при распространении волны Релея возбуждается поверхностная волна сдвига при условии существования наклонного к поверхности распространения волн магнитного поля в ферромагнитном полупространстве. Позднее Мартиросян Э.В. в [65] рассмотрел задачу для полупространства из идеального проводника. Показано, что в случае, когда внешнее магнитное поле перпендикулярно границе полупространства, поверхностные сдвиговые волны возникают в результате взаимодействия возмущенного электромагнитного поля и поля упругих перемещений полупространства. В статье Петросяна М.Р. [75] рассмотрена задача об отражении магнитоупругой волны от границы полупространства, на которой выполнены условия Навье. Показано, что квазипродольная и квазипоперечная волны трансформируются в силу их связанности только при достаточно сильном магнитном поле.

Как правило, динамические задачи электроупругости рассматриваются при некоторых специальных ограничениях на геометрические, кинематические и электромагнитные свойства тел. Известны публикации, посвященные тонкостенным пьезоэлектрическим элементам, в некоторых работах используется трехмерная теория. Нахождение точного решения в последнем варианте связано с большими математическими трудностями. Даже в линейной постановке без учета магнитных и температурных эффектов, точные решения найдены только в простейших случаях, например, для слоя, сферы, бесконечного цилиндра [23-25]. Поэтому используются различные методы, позволяющие свести трехмерную задачу к

одномерной для электроупругого стержня или двухмерной для электроупругой пластины или оболочки. Например, в работах Белокопя А.В. [18, 19], Устинова Ю.А., Гетмана И.П. [39], Рогачевой Н.Н. [79,80] используется малость толщины тонкостенного элемента. При этом применяются асимптотические методы, которые были детально разработаны и обобщены на электроупругость, и в частности для упругих пластин и оболочек в работах Воровича И.И. [15] и Гольденвейзера А.Л. [40].

Карлаш В.Л. [59, 60] исследовал задачи о несимметричных радиальных колебаниях тонкого пьезокерамического кругового кольца. Общее решение найдены для случая разделенных электродов на основании решения Лява для упругих элементов. В продолжение этой идеи в работах [58,61] получены результаты, описывающие планарные колебания прямоугольных неоднородных пластин с поперечно-продольной поляризацией и сплошным электродным покрытием на основных поверхностях. Та же идея использована в работе Дидковского В.С. и соавторов [49], где исследованы радиальные колебания незакрепленной тонкостенной цилиндрической оболочки конечной высоты без учета электрической индукции в окружной плоскостях.

Напряжённно-деформированное состояние и напряженность электрического поля тонкой прямоугольной пластины при условиях закрепления по контуру рассмотрены в статье Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульги Н.А. [44]. Здесь исследованы планарные колебания в результате действия на поверхностях равномерно распределенной гармонической нагрузки. Аналогичные осесимметричные задачи для тонкой пластины изучали Вовкодав Т.Н., Улитко А.Ф. [38].

Нестационарные задачи для тонкостенных цилиндрических пьезопреобразователей изучены в работах Бабаева А.Э. и соавторов [5,6]. Используются модель Кирхгофа-Лява и преобразования Лапласа по времени с удовлетворением граничным условиям. Решение найдены в виде степенного ряда. Majhi M.C. в [127] рассмотрел задачу для полубесконечного тонкого пьезоэлектрического стержня.

Аналитическое решение находится с помощью преобразования Лапласа. В [10] Гринченко В.Т. и др. представили теорию деформирования тонкостенных элементов из пьезоматериалов различной поляризации. Показано влияние эффекта связанности полей на процессы статического и динамического деформирования электроупругих сред.

Схожей проблеме посвящена работа Степанова Г.В. и соавторов [83], где проведено экспериментальное и численное исследование задачи о нестационарном напряжённом состоянии предварительно растянутого тонкого сплошного проводящего стержня под воздействием импульса электрического тока высокой плотности. В [126] Lukianov A. и Molokov S. рассмотрели задачу об изгибных магнитоупругих колебаниях тонких металлических проводов под действием переменного тока. Решение построено численно.

Шульга Н.А. и Григорьева Л.О. в работе [93] получили аналитическое решение задачи о толщинных колебаниях пьезоэлектрического поляризованного по толщине слоя при нагрузке нестационарным электрическим потенциалом. Здесь исследованы особенности возникновения и распространения колебаний в случае электрической нагрузки; проанализированы динамическое электромеханическое состояние слоя и также построены зависимости электрических и механических характеристик от времени.

Изучению нестационарного движения толстостенного неоднородного пьезокерамического цилиндра с различными направлениями поляризации посвящены работы Шляхина Д.А. [89-91]. Решение этих задач находится с помощью преобразования Фурье по осевой координате и разложения по собственным функциям в форме структурного алгоритма конечных интегральных преобразований по радиусу. Борисейко В.А., Улитко А.Ф. [27] рассмотрели задачу об установившихся радиальных колебаниях толстостенной пьезокерамической сферы, а в работе [26] исследованы установившиеся колебания толстостенной пьезокерамической сферы, погруженной в сжимаемую жидкость.

В дальнейшем нестационарные задачи для толстостенных пьезопреобразователей цилиндрической и сферической формы с акустическими средами рассмотрели также в работах Бабаева А.Э. и соавторов [4, 7-10]. В [139] рассматривается осесимметричная задача для толстостенной цилиндрической оболочки конечных размеров. Решения задачи получены с использованием методом разложения по базисным функциям.

Работы Вестяка В.А. и Тарлаковского Д.В. [34, 35, 142] посвящены изучению нестационарных волн в толстостенной электромагнитоупругой сфере под действием нестационарных поверхностных возмущений. Решение строится в виде суперпозиции сферических волн с помощью преобразования Лапласа по времени и разложения искомым функций в ряды по сферическим функциям и по малому параметру, который характеризует связь напряженно-деформированного состояния и электромагнитного поля.

Динамические задачи электроупругости в общем случае не поддаются решению чисто аналитическими методами и требуют применения других подходов. Наиболее распространенным является применение численных методов. Так в работах [105-107] для решения плоских и осесимметричных динамических задач электроупругости на основе энергетических вариационных подходов построены разностные схемы, дан их анализ с установлением порядка точности. В монографии Н.А. Шульги и А.М. Болкисева [92] подробно описан вариационно-разностный метод для решения задач электроупругости в случае установившихся колебаний и приведены результаты расчетов. Статья Шульги Н.А., Григорьевой Л.О. [140] посвящена решению задачи нестационарных колебаний призматического пьезокерамического тела под действием механических нагрузок. Решение строится с помощью численной дискретизации уравнений по переменным и времени. Так же метод Рунге-Кутты и неявные схемы использованы для решения начально-краевой задачи о возбуждении колебаний в поляризованном по толщине полем пьезокерамическом цилиндре, находящимся под механическим воздействием, в работе Л. О. Григорьева [43].

В более сложных моделях электромагнитоупругости применяется метод конечных элементов. Первое его использование приведено в 1956 году в работе [141], и на сегодняшний день этот метод начинает набирать популярность. Например, таким образом исследованы задачи с классическими краевыми условиями в рамках линейной теории пьезоэлектричества в квазистатическом приближении в статье Наседкина А.В. [72]. Используя метод конечных элементов, Annigeri A.R., Ganesan N. и др. [99] изучали свободные колебания слоистых и многофазных электромагнитоупругих оболочек, а Buchanan G.R. [104] определил и сравнил собственные частоты слоистых и различных многофазных моделей пластин.

Одним из численных методов решения нестационарных задач является метод граничных элементов. Работа А.Г. Угодчикова, Н.М. Хуторянского [86] была первой, содержащей результаты расчетов трехмерных нестационарных динамических задач изотропной теории упругости. При решении методом граничных элементов динамических задач сформировалось два подхода к учету переменной времени: применение интегрального преобразования Лапласа или Фурье с решением задачи в изображениях и численным обращением интегрального преобразования, а также в явном учете времени с использованием шаговых процедур. Развитию метода граничных элементов в электроупругости посвящены работы Ватульяна А.О., Кубликова В.Л., Соловьева А.Н. [30].

Метод граничных элементов признанно эффективен для анализа изотропных упругих конструкций. Однако при работе с анизотропными материалами возникают известные трудности при выводе и реализации фундаментальных решений. Фундаментальные решения для анизотропной электроупругости в виде однократных интегралов в комплексной плоскости получено в [29], а для плоской задачи электроупругости в виде однократных интегралов по конечному отрезку в [31]. Получению фундаментальных решений в замкнутой форме для трёх случаев поведения бесконечной трансверсально-изотропной пьезоэлектрической среды, находящейся под действием электрических и механических нагрузок посвящена работа [111].

В статье Турилова В.В. [85] данный метод применен к трёхмерным нестационарным задачам магнитотермоупругости в квазистатической постановке, а для исследования волновой динамики в полубесконечной области этот метод был использован в статье [139]. В работе Arai M. и соавторов [101] использован гранично-элементный подход применительно к задачам для тонкостенных конструкций. Показано, что точность решения зависит от характера численной реализации обращения преобразования Лапласа и от численных ошибок вычисления сингулярных интегралов. В монографии Баженова В.Г., Игумнова Л.А. [14] представлен модифицированный метод граничных интегральных уравнений и приведены примеры применения данного метода для отыскания функции Грина в некоторых трёхмерных задачах электроупругости.

Несмотря на большое количество работ, посвященных проблеме электромагнитоупругости, в настоящее время практически отсутствуют точные решения динамических задач электромагнитоупругости для тонкостенных элементов конструкций. Кроме того, большинство задач электромагнитоупругости решено с помощью приближенных вариационных и численных методов, а для того чтобы дать количественную оценку связанности электромагнитных и механических полей, необходимо иметь результаты, обладающие высокой степенью точностью. Удовлетворяющие этому требованию аналитические методы и рассматриваются в данной работе.

1.2. Уравнения движения упругой оболочки при известных внешних нагрузках

Уравнения движения относительно невозмущенного начального состояния имеют вид [68, 69]:

$$\begin{aligned} \rho h \ddot{u}^i &= \nabla_j T^{ji} - b_j^i Q^j + q^i, \quad \rho h \ddot{w} = \nabla_i Q^i + b_{ij} T^{ij} + q, \\ \rho I \ddot{\psi}^i &= \nabla_j M^{ij} - Q^i + m^i, \quad \rho I \ddot{\psi}_3 = \nabla_i \mu^i - N + m. \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

Здесь и далее, если не оговорено противное, индексы принимают значения 1, 2.

Физические соотношения:

$$Q^i = \hat{Q}^i + b_j^i \mu^j, \quad T^{ij} = \hat{T}^{ij} + b_k^i M^{kj}, \quad N = \hat{N} - b_{ij} M^{ij}; \quad (1.2.2)$$

$$\begin{aligned} \hat{T}^{ij} &= h(C^{ijkl} \varepsilon_{kl} + C^{ij33} \psi_3), \quad M^{ij} = IC^{ijkl} \kappa_{kl}, \quad \hat{Q}^i = hC^{i3k3} \theta_k, \\ \mu^i &= IC^{i3k3} (b_k^i \theta_l + \nabla_k \psi_3), \quad \hat{N} = h(C^{33kl} \varepsilon_{kl} + C^{3333} \psi_3). \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

Кинематические соотношения:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\alpha_{ij} + \alpha_{ji}), \quad \kappa_{ij} = \frac{1}{2}(\beta_{ij} + \beta_{ji}), \quad (1.2.4)$$

$$\alpha_{ij} = \nabla_i u_j - b_{ij} w, \quad \beta_{ij} = \nabla_i \psi_j - b_{ij} \psi_3 + b_i^k \alpha_{kj}, \quad -\vartheta_i = \nabla_i w + b_i^k u_k, \quad \theta_k = \psi_k - \vartheta_k.$$

Внешние нагрузки:

$$\mathbf{q} = q^i \mathfrak{e}_i, \quad \mathbf{m} = m^i \mathfrak{e}_i, \quad (1.2.5)$$

$$q^i = q_F^i + q_+^i + q_-^i, \quad m^i = m_F^i + m_+^i + m_-^i, \quad q = q_F + q_+ + q_-, \quad m = m_F + m_+ + m_-.$$

$$q_F^i = \rho \int_{-h/2}^{h/2} \hat{F}^i dz, \quad q_F = \rho \int_{-h/2}^{h/2} \hat{F}_3 dz, \quad m_F^i = \rho \int_{-h/2}^{h/2} z \hat{F}^i dz, \quad m_F = \rho \int_{-h/2}^{h/2} z \hat{F}_3 dz. \quad (1.2.6)$$

$$q_{\pm}^i = \hat{P}^i \Big|_{z=\pm h/2}, \quad q_{\pm} = \hat{P}^3 \Big|_{z=\pm h/2}, \quad m_{\pm}^i = \pm \frac{h}{2} q_{\pm}^i, \quad m_{\pm} = \pm \frac{h}{2} q_{\pm}. \quad (1.2.7)$$

Внутренние усилия и моменты

$$\hat{T}^{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \hat{\sigma}^{ij} dz, \quad M^{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} z \hat{\sigma}^{ij} dz, \quad \hat{Q}^i = \int_{-h/2}^{h/2} \hat{\sigma}^{i3} dz, \quad \mu^i = \int_{-h/2}^{h/2} z \hat{\sigma}^{i3} dz, \quad \hat{N} = \int_{-h/2}^{h/2} \hat{\sigma}^{33} dz. \quad (1.2.8)$$

Соотношения (1.2.3) получены из (1.2.8) и физического закона для напряжений

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}^{ij} &= C^{ijkl}\hat{\varepsilon}_{kl} + C^{ij33}\Psi_3, \hat{\sigma}^{i3} = C^{i3k3}\hat{\varepsilon}_{k3}, \hat{\sigma}^{33} = C^{33kl}\hat{\varepsilon}_{kl} + C^{3333}\varepsilon_{33}, \\ \hat{\varepsilon}_{kl} &= \varepsilon_{kl} + z\kappa_{kl}, \hat{\varepsilon}_{k3} = \frac{1}{2}\left[\theta_k + z(b_k^n\theta_n + \nabla_k\Psi_3)\right], \varepsilon_{33} = \Psi_3.\end{aligned}\quad (1.2.9)$$

При этом используется предположение о том, что материал оболочки является упругим анизотропным и обладает симметрией относительно срединной поверхности, что эквивалентно следующим равенствам для компонентов тензора упругих постоянных (указывающий на их соответствие базису $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \mathbf{n}$ здесь и далее опущен):

$$C^{ijk3} = C^{i3kl} = C^{i333} = C^{33k3} = 0. \quad (1.2.10)$$

При построении такой модели используется следующее приближение для перемещений:

$$\begin{aligned}\hat{u}_i(\xi^1, \xi^2, z) &= u_i(\xi^1, \xi^2) + \psi_i(\xi^1, \xi^2)z, \\ u_3(\xi^1, \xi^2, z) &= w(\xi^1, \xi^2) + \Psi_3(\xi^1, \xi^2)z.\end{aligned}\quad (1.2.11)$$

Если материал оболочки изотропный, то равенства (1.2.3) имеют вид:

$$\begin{aligned}\hat{T}^{ij} &= h\left[\lambda(\varepsilon + \Psi_3)g^{ij} + 2\mu\varepsilon^{ij}\right], M^{ij} = I(\lambda g^{ij}\kappa + 2\mu\kappa^{ij}), \\ \hat{Q}^i &= \mu h\theta^i, \mu^i = \mu I(b^i\theta_i + g^{ik}\nabla_k\Psi_3), \hat{N} = h\left[\lambda\varepsilon + (\lambda + 2\mu)\Psi_3\right],\end{aligned}\quad (1.2.12)$$

где

$$\varepsilon = \varepsilon_1^1 + \varepsilon_2^2, \kappa = \kappa_1^1 + \kappa_2^2. \quad (1.2.13)$$

«Естественные» граничные условия имеют вид:

$$u_i|_{\Gamma_u} = u_{(0)i}, w|_{\Gamma_u} = w_{(0)}, \psi_i|_{\Gamma_u} = \psi_{(0)i}, \Psi_3|_{\Gamma_u} = \psi_{(0)3}; \quad (1.2.14)$$

$$T^{ji}\nu_j|_{\Gamma_\sigma} = T_{(0)}^i, M^{ij}\nu_j|_{\Gamma_\sigma} = M_{(0)}^i, Q^i\nu_i|_{\Gamma_\sigma} = Q_{(0)}, \mu^i\nu_i|_{\Gamma_\sigma} = \mu_{(0)}. \quad (1.2.15)$$

Здесь $\partial\Pi = \Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_\sigma$, где Π - срединная поверхность оболочки. При этом кривые Γ_u и Γ_σ могут пересекаться только по множеству меры нуль

Используются также условия шарнирного опирания:

$$T^{ji}\nu_j|_{\Gamma_\sigma} = 0, M^{ij}\nu_j|_{\Gamma_\sigma} = 0, w|_{\Gamma_u} = 0, \mu^i\nu_i|_{\Gamma_\sigma} = 0. \quad (1.2.16)$$

Если в граничных условиях полагается

$$\psi_i|_{\Gamma_u} = 0, \psi_3|_{\Gamma_u} = 0, \quad (1.2.17)$$

то говорят о наличии жесткой диафрагмы.

1.3. Система уравнений для электромагнитоупругих процессов в \mathbb{R}^3

Механическая часть модели включает в себя уравнения движения сплошной среды, соотношения Коши и физические соотношения [33].

Электромагнитная часть модели.

Уравнения Максвелла (\mathbf{E} и \mathbf{H} - векторы напряженностей электрического и магнитного полей; \mathbf{D} и \mathbf{B} - векторы электрической и магнитной индукций; \mathbf{j} - плотность тока; c - скорость света; ρ_e - плотность зарядов):

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \text{div } \mathbf{D} = 4\pi \rho_e. \quad (1.3.1)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \tilde{E}^i \mathbf{e}_i + E_3 \mathbf{n} = \hat{\mathbf{E}} + E_3 \mathbf{n}, \mathbf{H} = \tilde{H}^i \mathbf{e}_i + H_3 \mathbf{n} = \hat{\mathbf{H}} + H_3 \mathbf{n}, \\ \mathbf{D} &= \tilde{D}^i \mathbf{e}_i + D_3 \mathbf{n} = \hat{\mathbf{D}} + D_3 \mathbf{n}, \mathbf{B} = \tilde{B}^i \mathbf{e}_i + B_3 \mathbf{n} = \hat{\mathbf{B}} + B_3 \mathbf{n}, \\ \mathbf{j} &= \tilde{j}^i \mathbf{e}_i + j_3 \mathbf{n} = \hat{\mathbf{j}} + j_3 \mathbf{n}, \\ \hat{\mathbf{E}} &= \hat{E}^i \mathbf{e}_i, \hat{\mathbf{H}} = \hat{H}^i \mathbf{e}_i, \hat{\mathbf{D}} = \hat{D}^i \mathbf{e}_i, \hat{\mathbf{B}} = \hat{B}^i \mathbf{e}_i, \hat{\mathbf{j}} = \hat{j}^i \mathbf{e}_i. \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

Линеаризованный обобщенный закон Ома (σ - коэффициент электропроводности):

$$\mathbf{j} = \sigma \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{B}_0] \right) + \rho_{e0} \mathbf{v}. \quad (1.3.3)$$

Полагается, что в начальном состоянии электромагнитные параметры таковы ($i = 1, 2, 3$):

$$\begin{aligned} (\mathbf{E})_0 &= \mathbf{E}_0 = E_0^i \mathbf{e}_i, (\mathbf{B})_0 = \mathbf{B}_0 = B_0^i \mathbf{e}_i, (\mathbf{H})_0 = \mathbf{H}_0 = H_0^i \mathbf{e}_i, (\rho_e)_0 = \rho_{e0}, \\ (\mathbf{D})_0 &= \mathbf{D}_0 = D_0^i \mathbf{e}_i, (\mathbf{j})_0 = \mathbf{j}_0 = j_0^i \mathbf{e}_i, \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right)_0 = 0, \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right)_0 = 4\pi \mathbf{j}_{s0}, \\ \text{rot } \mathbf{E}_0 &= \mathbf{0}, \text{rot } \mathbf{H}_0 = \frac{4\pi}{c} (\mathbf{j}_0 + \mathbf{j}_{s0}), \text{div } \mathbf{D}_0 = 4\pi \rho_{e0}, \mathbf{j}_0 = \sigma \mathbf{E}_0, \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

где \mathbf{j}_{s0} - ток смещения в начальном состоянии.

Связь механических, термодинамических и электромагнитных полей

задается

- линейризованной зависимостью составляющей объемной силы от электромагнитного поля в уравнениях движения (силы Лоренца)

$$\mathbf{F}_e = \rho_{e0} \mathbf{E} + \rho_e \mathbf{E}_0 + \frac{1}{c} ([\mathbf{j}_0, \mathbf{B}] + [\mathbf{j}, \mathbf{B}_0]); \quad (1.3.5)$$

- физическими соотношениями

$$\begin{aligned} \hat{D}^i &= e^{ij} \hat{E}_j + e^{i3} E_3 + \kappa^{ijk} \hat{\epsilon}_{jk} + 2\kappa^{ij3} \hat{\epsilon}_{j3} + \kappa^{i33} \epsilon_{33}, \\ D_3 &= e^{3j} \hat{E}_j + e^{33} E_3 + \kappa^{3jk} \hat{\epsilon}_{jk} + 2\kappa^{3j3} \hat{\epsilon}_{j3} + \kappa^{333} \epsilon_{33}, \\ \hat{B}^i &= \mu^{ij} \hat{H}_j + \mu^{i3} H_3 + \gamma^{ijk} \hat{\epsilon}_{jk} + 2\gamma^{ij3} \hat{\epsilon}_{j3} + \gamma^{i33} \epsilon_{33}, \\ B_3 &= \mu^{3j} \hat{H}_j + \mu^{33} H_3 + \gamma^{3jk} \hat{\epsilon}_{jk} + 2\gamma^{3j3} \hat{\epsilon}_{j3} + \gamma^{333} \epsilon_{33}; \end{aligned} \quad (1.3.6)$$

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^{ij} &= C^{ijkl} \hat{\epsilon}_{kl} + C^{ij33} \epsilon_{33} - \frac{1}{4\pi} (\kappa^{ijk} \hat{E}_k + \kappa^{ij3} E_3 + \gamma^{ijk} \hat{H}_k + \gamma^{ij3} H_3), \\ \hat{\sigma}^{i3} &= 2C^{i3k3} \hat{\epsilon}_{k3} - \frac{1}{4\pi} (\kappa^{i3k} \hat{E}_k + \kappa^{i33} E_3 + \gamma^{i3k} \hat{H}_k + \gamma^{i33} H_3), \\ \hat{\sigma}^{33} &= C^{33kl} \hat{\epsilon}_{kl} + C^{3333} \epsilon_{33} - \frac{1}{4\pi} (\kappa^{33k} \hat{E}_k + \kappa^{333} E_3 + \gamma^{33k} \hat{H}_k + \gamma^{333} H_3), \end{aligned} \quad (1.3.7)$$

где e^{ij} и μ^{ij} - тензоры диэлектрической и магнитной проницаемости; κ^{ijk} и γ^{ijk} - тензоры пьезоэлектрических и пьезомагнитных постоянных.

Основной вид граничных условий, следующий:

$$\mathbf{E}|_{\Pi_E} = \mathbf{e}, \quad \mathbf{H}|_{\Pi_H} = \mathbf{h}, \quad (1.3.8)$$

где $\partial G = \Pi_E \cup \Pi_H$, G - занимаемая средой геометрическая область. При этом поверхности Π_E и Π_H могут пересекаться только по множеству меры нуль.

1.4. Замкнутая система уравнений для анизотропных электромагнитоупругих оболочек

Выразим сначала векторные произведения в (1.3.3) и (1.3.5) через аналогичные величины на срединной поверхности оболочки Π :

$$\begin{aligned}
[\mathbf{j}, \mathbf{B}] &= \frac{1}{\sqrt{g}} \left[(\hat{j}_2 B_3 - j_3 \hat{B}_2) \mathfrak{e}_1 + (j_3 \hat{B}_1 - \hat{j}_1 B_3) \mathfrak{e}_2 + (\hat{j}_1 \hat{B}_2 - \hat{j}_2 \hat{B}_1) \mathbf{n} \right] = \\
&= \varepsilon^{231} (\hat{j}_2 B_3 - j_3 \hat{B}_2) \mathfrak{e}_1 + \varepsilon^{312} (j_3 \hat{B}_1 - \hat{j}_1 B_3) \mathfrak{e}_2 + \varepsilon^{123} (\hat{j}_1 \hat{B}_2 - \hat{j}_2 \hat{B}_1) \mathbf{n} = \\
&= \chi^{12} \left[(\hat{j}_2 B_3 - j_3 \hat{B}_2) \mathfrak{e}_1 + (j_3 \hat{B}_1 - \hat{j}_1 B_3) \mathfrak{e}_2 + (\hat{j}_1 \hat{B}_2 - \hat{j}_2 \hat{B}_1) \mathbf{n} \right] = \\
&= \frac{1}{\sqrt{g}} \left[(\hat{j}_2 B_3 - j_3 \hat{B}_2) \mathfrak{e}_1 + (j_3 \hat{B}_1 - \hat{j}_1 B_3) \mathfrak{e}_2 \right] + [\hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{B}}],
\end{aligned} \tag{1.4.1}$$

где ε^{ijk} ($i, j, k = 1, 2, 3$) и χ^{ij} - компоненты дискриминантных псевдотензоров в \mathbb{R}^3 и на Π .

Тогда координатная форма соотношений (1.3.3) и (1.3.5) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}
\hat{j}^1 &= \sigma \hat{E}^1 + \frac{\sigma}{c\sqrt{g}} (\dot{u}_2 B_{03} - \dot{u}_3 \hat{B}_{02}) + \rho_{e0} \dot{u}^1, \\
\hat{j}^2 &= \sigma \hat{E}^2 + \frac{\sigma}{c\sqrt{g}} (\dot{u}_3 \hat{B}_{01} - \dot{u}_1 B_{03}) + \rho_{e0} \dot{u}^2, \\
j_3 &= \sigma E_3 + \frac{\sigma}{c\sqrt{g}} (\dot{u}_1 \hat{B}_{02} - \dot{u}_2 \hat{B}_{01}) + \rho_{e0} \dot{u}_3;
\end{aligned} \tag{1.4.2}$$

$$\begin{aligned}
\hat{F}_e^1 &= \rho_{e0} \hat{E}^1 + \rho_e \hat{E}_0^1 + \frac{1}{c\sqrt{g}} (\hat{j}_{02} B_3 - j_{03} \hat{B}_2 + \hat{j}_2 B_{03} - j_3 \hat{B}_{02}), \\
\hat{F}_e^2 &= \rho_{e0} \hat{E}^2 + \rho_e \hat{E}_0^2 + \frac{1}{c\sqrt{g}} (j_{03} \hat{B}_1 - \hat{j}_{01} B_3 + j_3 \hat{B}_{01} - \hat{j}_1 B_{03}), \\
F_{e3} &= \rho_{e0} E_3 + \rho_e E_{03} + \frac{1}{c\sqrt{g}} (\hat{j}_{01} \hat{B}_2 - \hat{j}_{02} \hat{B}_1 + \hat{j}_1 \hat{B}_{02} - \hat{j}_2 \hat{B}_{01}).
\end{aligned} \tag{1.4.3}$$

Полагаем, что начальные электромагнитные характеристики не зависят от координаты z , и подобно теории упругих оболочек ограничиваемся линейным приближением для компонент электромагнитного поля (здесь $i = 1, 2, 3$):

$$\begin{aligned}
\hat{E}_i(\xi^1, \xi^2, z) &= e_i(\xi^1, \xi^2) + \chi_i(\xi^1, \xi^2) z, \quad \hat{H}_i(\xi^1, \xi^2, z) = h_i(\xi^1, \xi^2) + \varphi_i(\xi^1, \xi^2) z, \\
\hat{D}_i(\xi^1, \xi^2, z) &= d_i(\xi^1, \xi^2) + \delta_i(\xi^1, \xi^2) z, \quad \hat{B}_i(\xi^1, \xi^2, z) = b_i(\xi^1, \xi^2) + \beta_i(\xi^1, \xi^2) z, \\
\hat{j}_i(\xi^1, \xi^2, z) &= y_i(\xi^1, \xi^2) + \nu_i(\xi^1, \xi^2) z, \quad \rho_e(\xi^1, \xi^2, z) = r_e(\xi^1, \xi^2) + \lambda_e(\xi^1, \xi^2) z.
\end{aligned} \tag{1.4.4}$$

Тогда линеаризованные варианты равенств (1.4.2) и (1.4.3) с учетом (1.3.1)

записывается так:

$$\begin{aligned}
 y^1 &= \sigma e^1 + \frac{\sigma}{c\sqrt{g}} (\dot{u}_2 B_{03} - \dot{w} \hat{B}_{02}) + \rho_{e0} \dot{u}^1, \quad v^1 = \sigma \chi^1 + \frac{\sigma}{c\sqrt{g}} (\dot{\psi}_2 B_{03} - \dot{\psi}_3 \hat{B}_{02}) + \rho_{e0} \dot{\psi}^1, \\
 y^2 &= \sigma e^2 + \frac{\sigma}{c\sqrt{g}} (\dot{w} \hat{B}_{01} - \dot{u}_1 B_{03}) + \rho_{e0} \dot{u}^2, \quad v^2 = \sigma \chi^2 + \frac{\sigma}{c\sqrt{g}} (\dot{\psi}_3 \hat{B}_{01} - \dot{\psi}_1 B_{03}) + \rho_{e0} \dot{\psi}^2, \\
 y^3 &= \sigma e^3 + \frac{\sigma}{c\sqrt{g}} (\dot{u}_1 \hat{B}_{02} - \dot{u}_2 \hat{B}_{01}) + \rho_{e0} \dot{w}, \quad v^3 = \sigma \chi^3 + \frac{\sigma}{c\sqrt{g}} (\dot{\psi}_1 \hat{B}_{02} - \dot{\psi}_2 \hat{B}_{01}) + \rho_{e0} \dot{\psi}^3;
 \end{aligned} \tag{1.4.5}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{F}_e^1 &= \rho_{e0} e^1 + r_e E_0^1 + \frac{1}{c\sqrt{g}} (\hat{j}_{02} b_3 - j_{03} b_2 + y_2 B_{03} - y_3 \hat{B}_{02}) + \\
 &+ z \left[\rho_{e0} \chi^1 + \lambda_e E_0^1 + \frac{1}{c\sqrt{g}} (\hat{j}_{02} \beta_3 - j_{03} \beta_2 + v_2 B_{03} - v_3 \hat{B}_{02}) \right], \\
 \hat{F}_e^2 &= \rho_{e0} e^2 + r_e E_0^2 + \frac{1}{c\sqrt{g}} (j_{03} b_1 - \hat{j}_{01} b_3 + y_3 \hat{B}_{01} - y_1 B_{03}) + \\
 &+ z \left[\rho_{e0} \chi^2 + \lambda_e E_0^2 + \frac{1}{c\sqrt{g}} (j_{03} \beta_1 - \hat{j}_{01} \beta_3 + v_3 \hat{B}_{01} - v_1 B_{03}) \right], \\
 F_{e3} &= \rho_{e0} e^3 + r_e E_{03} + \frac{1}{c\sqrt{g}} (\hat{j}_{01} b_2 - \hat{j}_{02} b_1 + y_1 \hat{B}_{02} - y_2 \hat{B}_{01}) + \\
 &+ z \left[\rho_{e0} \chi^3 + \lambda_e E_{03} + \frac{1}{c\sqrt{g}} (\hat{j}_{01} \beta_2 - \hat{j}_{02} \beta_1 + v_1 \hat{B}_{02} - v_2 \hat{B}_{01}) \right].
 \end{aligned} \tag{1.4.6}$$

Далее в соответствии с (1.2.5), (1.2.6) под нагрузкой в уравнениях (1.2.1) понимаем следующие величины:

$$\begin{aligned}
 q^i &= q_*^i + q_e^i, \quad m^i = m_*^i + m_e^i, \quad q = q_* + q_e, \quad m = m_* + m_e, \\
 q_*^i &= q_F^i + q_+^i + q_-^i, \quad m_*^i = m_F^i + m_+^i + m_-^i, \quad q_* = q_F + q_+ + q_-, \quad m_* = m_F + m_+ + m_-,
 \end{aligned} \tag{1.4.7}$$

где

$$\begin{aligned}
q_e^1 &= h \left[\rho_{e0} e^1 + r_e \hat{E}_0^1 + \frac{1}{c\sqrt{g}} \left(\hat{j}_{02} b_3 - j_{03} b_2 + y_2 B_{03} - y_3 \hat{B}_{02} \right) \right], \\
q_e^2 &= h \left[\rho_{e0} e^2 + r_e \hat{E}_0^2 + \frac{1}{c\sqrt{g}} \left(j_{03} b_1 - \hat{j}_{01} b_3 + y_3 \hat{B}_{01} - y_1 B_{03} \right) \right], \\
q_e &= h \left[\rho_{e0} e_3 + r_e E_{03} + \frac{1}{c\sqrt{g}} \left(\hat{j}_{01} b_2 - \hat{j}_{02} b_1 + y_1 \hat{B}_{02} - y_2 \hat{B}_{01} \right) \right], \\
m_e^1 &= I \left[\rho_{e0} \chi^1 + \lambda_e \hat{E}_0^1 + \frac{1}{c\sqrt{g}} \left(\hat{j}_{02} \beta_3 - j_{03} \beta_2 + \nu_2 B_{03} - \nu_3 \hat{B}_{02} \right) \right], \\
m_e^2 &= I \left[\rho_{e0} \chi^2 + \lambda_e \hat{E}_0^2 + \frac{1}{c\sqrt{g}} \left(j_{03} \beta_1 - \hat{j}_{01} \beta_3 + \nu_3 \hat{B}_{01} - \nu_1 B_{03} \right) \right], \\
m_e &= I \left[\rho_{e0} \chi_3 + \lambda_e E_{03} + \frac{1}{c\sqrt{g}} \left(\hat{j}_{01} \beta_2 - \hat{j}_{02} \beta_1 + \nu_1 \hat{B}_{02} - \nu_2 \hat{B}_{01} \right) \right].
\end{aligned} \tag{1.4.8}$$

Аналогично с использованием (1.2.9) линеаризуем физический закон для заполняющей оболочку сплошной среды (1.3.7):

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}^{ij} &= C^{ijkl} (\varepsilon_{kl} + z\kappa_{kl}) + C^{ij33} \psi_3 - \\
&- \frac{1}{4\pi} (\kappa^{ijk} e_k + \kappa^{ij3} e_3 + \gamma^{ijk} h_k + \gamma^{ij3} h_3) - \frac{z}{4\pi} (\kappa^{ijk} \chi_k + \kappa^{ij3} \chi_3 + \gamma^{ijk} \varphi_k + \gamma^{ij3} \varphi_3), \\
\hat{\sigma}^{i3} &= C^{i3k3} [\theta_k + z(b_k^n \theta_n + \nabla_k \psi_3)] - \\
&- \frac{1}{4\pi} (\kappa^{i3k} e_k + \kappa^{i33} e_3 + \gamma^{i3k} h_k + \gamma^{i33} h_3) - \frac{z}{4\pi} (\kappa^{i3k} \chi_k + \kappa^{i33} \chi_3 + \gamma^{i3k} \varphi_k + \gamma^{i33} \varphi_3), \\
\hat{\sigma}^{33} &= C^{33kl} (\varepsilon_{kl} + z\kappa_{kl}) + C^{3333} \psi_3 - \\
&- \frac{1}{4\pi} (\kappa^{33k} e_k + \kappa^{333} e_3 + \gamma^{33k} h_k + \gamma^{333} h_3) - \frac{z}{4\pi} (\kappa^{33k} \chi_k + \kappa^{333} \chi_3 + \gamma^{33k} \varphi_k + \gamma^{333} \varphi_3).
\end{aligned} \tag{1.4.9}$$

Отсюда с помощью (1.2.8) получаем модификации формул (1.2.3) для физического закона для оболочки:

$$\begin{aligned}
\hat{T}^{ij} &= h \left[\left(C^{ijkl} \varepsilon_{kl} + C^{ij33} \Psi_3 \right) - \frac{1}{4\pi} \left(\kappa^{ijk} e_k + \kappa^{ij3} e_3 + \gamma^{ijk} h_k + \gamma^{ij3} h_3 \right) \right] \\
M^{ij} &= I \left[C^{ijkl} \kappa_{kl} - \frac{1}{4\pi} \left(\kappa^{ijk} \chi_k + \kappa^{ij3} \chi_3 + \gamma^{ijk} \varphi_k + \gamma^{ij3} \varphi_3 \right) \right], \\
\hat{Q}^i &= h \left[C^{i3k3} \theta_k - \frac{1}{4\pi} \left(\kappa^{i3k} e_k + \kappa^{i33} e_3 + \gamma^{i3k} h_k + \gamma^{i33} h_3 \right) \right], \\
\mu^i &= I \left[C^{i3k3} \left(b_k^l \theta_l + \nabla_k \Psi_3 \right) - \frac{1}{4\pi} \left(\kappa^{i3k} \chi_k + \kappa^{i33} \chi_3 + \gamma^{i3k} \varphi_k + \gamma^{i33} \varphi_3 \right) \right], \\
\hat{N} &= h \left[C^{33kl} \varepsilon_{kl} + C^{3333} \Psi_3 - \frac{1}{4\pi} \left(\kappa^{33k} e_k + \kappa^{333} e_3 + \gamma^{33k} h_k + \gamma^{333} h_3 \right) \right].
\end{aligned} \tag{1.4.10}$$

Для построения координатной формы уравнений (1.3.1) сначала аналогично (1.4.1) представляем соответствующие операторы [42]:

$$\begin{aligned}
\text{rot } \mathbf{E} &= \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\left(\tilde{\nabla}_2 \tilde{E}_3 - \tilde{\nabla}_3 \tilde{E}_2 \right) \mathfrak{e}_1 + \left(\tilde{\nabla}_3 \tilde{E}_1 - \tilde{\nabla}_1 \tilde{E}_3 \right) \mathfrak{e}_2 + \left(\tilde{\nabla}_1 \tilde{E}_2 - \tilde{\nabla}_2 \tilde{E}_1 \right) \mathbf{n} \right] = \\
&= \varepsilon^{231} \left(\tilde{\nabla}_2 \tilde{E}_3 - \tilde{\nabla}_3 \tilde{E}_2 \right) \mathfrak{e}_1 + \varepsilon^{312} \left(\tilde{\nabla}_3 \tilde{E}_1 - \tilde{\nabla}_1 \tilde{E}_3 \right) \mathfrak{e}_2 + \varepsilon^{123} \left(\tilde{\nabla}_1 \tilde{E}_2 - \tilde{\nabla}_2 \tilde{E}_1 \right) \mathbf{n} = \\
&= \chi^{12} \left[\left(\tilde{\nabla}_2 \tilde{E}_3 - \tilde{\nabla}_3 \tilde{E}_2 \right) \mathfrak{e}_1 + \left(\tilde{\nabla}_3 \tilde{E}_1 - \tilde{\nabla}_1 \tilde{E}_3 \right) \mathfrak{e}_2 + \left(\tilde{\nabla}_1 \tilde{E}_2 - \tilde{\nabla}_2 \tilde{E}_1 \right) \mathbf{n} \right],
\end{aligned} \tag{1.4.11}$$

$$\text{div } \mathbf{D} = \tilde{\nabla}_i \tilde{D}^i + \tilde{\nabla}_3 \tilde{D}_3. \tag{1.4.12}$$

С использованием этих равенств получаем следующую форму уравнений (1.3.1):

$$\begin{aligned}
\left(\tilde{\nabla}_2 \tilde{E}_3 - \tilde{\nabla}_3 \tilde{E}_2 \right) &= -\frac{\sqrt{g}}{c} \dot{B}^1, \quad \left(\tilde{\nabla}_3 \tilde{E}_1 - \tilde{\nabla}_1 \tilde{E}_3 \right) = -\frac{\sqrt{g}}{c} \dot{B}^2, \\
\left(\tilde{\nabla}_1 \tilde{E}_2 - \tilde{\nabla}_2 \tilde{E}_1 \right) &= -\frac{\sqrt{g}}{c} \dot{B}_3;
\end{aligned} \tag{1.4.13}$$

$$\tilde{\nabla}_2 \tilde{H}_3 - \tilde{\nabla}_3 \tilde{H}_2 = \frac{\sqrt{g}}{c} \left(4\pi \hat{j}^1 + \dot{D}^1 \right), \quad \tilde{\nabla}_3 \tilde{H}_1 - \tilde{\nabla}_1 \tilde{H}_3 = \frac{\sqrt{g}}{c} \left(4\pi \hat{j}^2 + \dot{D}^2 \right), \tag{1.4.14}$$

$$\tilde{\nabla}_1 \tilde{H}_2 - \tilde{\nabla}_2 \tilde{H}_1 = \frac{\sqrt{g}}{c} \left(4\pi \hat{j}_3 + \dot{D}_3 \right);$$

$$\tilde{\nabla}_i \tilde{D}^i + \tilde{\nabla}_3 \tilde{D}_3 = 4\pi \rho_e. \tag{1.4.15}$$

Для линеаризации этих формул сначала используем линейный вариант равенств для ковариантных производных вектора $\hat{u}_i \mathfrak{e}^i + u_3 \mathbf{n}$ [69]:

$$\begin{aligned} \tilde{d}_{ij} &= \tilde{\nabla}_i \tilde{u}_j = \nabla_i \hat{u}_j - b_{ij} u_3 + z(c_{ij} u_3 - b_j^k \nabla_i \hat{u}_k), \\ \tilde{d}_{i3} &= \tilde{\nabla}_i \tilde{u}_3 = \frac{\partial u_3}{\partial \xi^i} + b_i^k \hat{u}_k, \quad \tilde{d}_{3i} = \tilde{\nabla}_3 \tilde{u}_i = \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial z} - z b_i^k \frac{\partial \hat{u}_k}{\partial z}, \quad \tilde{d}_{33} = \tilde{\nabla}_3 \tilde{u}_3 = \frac{\partial u_3}{\partial z}; \end{aligned} \quad (1.4.16)$$

$$\begin{aligned} \hat{\nabla}_i \hat{u}_j &= \nabla_i \hat{u}_j - b_{ij} u_3 + z(b_i^k \nabla_k \hat{u}_j - c_{ij} u_3), \\ \hat{\nabla}_i u_3 &= \frac{\partial u_3}{\partial \xi^i} + b_i^k \hat{u}_k + z\left(b_i^k \frac{\partial u_3}{\partial \xi^k} + c_i^l \hat{u}_l\right), \quad \hat{\nabla}_3 \hat{u}_i = \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial z}, \quad \hat{\nabla}_3 u_3 = \frac{\partial u_3}{\partial z}. \end{aligned} \quad (1.4.17)$$

Кроме того, из (1.4.16) вытекает такое соотношение:

$$\begin{aligned} \tilde{d}_i^i &= \tilde{\nabla}_i \tilde{u}^i = \tilde{g}^{im} \tilde{d}_{im} = (g^{im} + 2zb^{im}) \left[\nabla_i \hat{u}_m - b_{im} u_3 + z(c_{im} u_3 - b_m^k \nabla_i \hat{u}_k) \right] = \\ &= g^{im} \left[\nabla_i \hat{u}_m - b_{im} u_3 + z(c_{im} u_3 - b_m^k \nabla_i \hat{u}_k) \right] + 2zb^{im} (\nabla_i \hat{u}_m - b_{im} u_3) = \\ &= \nabla_i \hat{u}^i - 2Hu_3 + z \left[c_i^i u_3 - b^{ik} \nabla_i \hat{u}_k \right] + 2z(b^{im} \nabla_i \hat{u}_m - c_i^i u_3) = \\ &= \nabla_i \hat{u}^i - 2Hu_3 + z \left[b^{ik} \nabla_i \hat{u}_k - 2(2H^2 - K)u_3 \right]. \end{aligned} \quad (1.4.18)$$

Здесь учтено, что

$$\tilde{g}^{ij} = g^{ij} + 2zb^{ij}; \quad (1.4.19)$$

$$g^{ij} b_{ij} = b_i^i = b_1^1 + b_2^2 = 2H, \quad g^{ij} c_{ij} = b^{ij} b_{ij} = c_i^i = c_1^1 + c_2^2 = 2C, \quad C = 2H^2 - K, \quad (1.4.20)$$

где H и K - средняя и гауссова кривизны поверхности Π .

В результате получаем

$$\begin{aligned} \sqrt{g} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= \left[\frac{\partial E_3}{\partial \xi^2} + b_2^k \hat{E}_k + z \left(b_2^k \frac{\partial E_3}{\partial \xi^k} + c_2^k \hat{E}_k \right) - \frac{\partial \hat{E}_2}{\partial z} \right] \mathfrak{e}_1 + \\ &+ \left[\frac{\partial \hat{E}_1}{\partial z} - \frac{\partial E_3}{\partial \xi^1} - b_1^k \hat{E}_k - z \left(b_1^k \frac{\partial E_3}{\partial \xi^k} + c_1^k \hat{E}_k \right) \right] \mathfrak{e}_2 + \\ &+ \left[\nabla_1 \hat{E}_2 - \nabla_2 \hat{E}_1 + z \left(b_1^k \nabla_k \hat{E}_2 - b_2^k \nabla_k \hat{E}_1 \right) \right] \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (1.4.21)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \nabla_i \hat{D}^i - 2HD_3 + z \left[b^{ik} \nabla_i \hat{D}_k - 2(2H^2 - K)D_3 \right] + \frac{\partial D_3}{\partial z}. \quad (1.4.22)$$

Тогда равенства (1.4.13) - (1.4.15) переходят в такие уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_3}{\partial \xi^2} + b_2^k \hat{E}_k + z \left(b_2^k \frac{\partial E_3}{\partial \xi^k} + c_2^k \hat{E}_k \right) - \frac{\partial \hat{E}_2}{\partial z} &= -\frac{\sqrt{g}}{c} \dot{B}^1, \\ \frac{\partial \hat{E}_1}{\partial z} - \frac{\partial E_3}{\partial \xi^1} - b_1^k \hat{E}_k - z \left(b_1^k \frac{\partial E_3}{\partial \xi^k} + c_1^k \hat{E}_k \right) &= -\frac{\sqrt{g}}{c} \dot{B}^2, \end{aligned} \quad (1.4.23)$$

$$\nabla_1 \hat{E}_2 - \nabla_2 \hat{E}_1 + z \left(b_1^k \nabla_k \hat{E}_2 - b_2^k \nabla_k \hat{E}_1 \right) = -\frac{\sqrt{g}}{c} \dot{B}_3;$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_3}{\partial \xi^2} + b_2^k \hat{H}_k + z \left(b_2^k \frac{\partial H_3}{\partial \xi^k} + c_2^k \hat{H}_k \right) - \frac{\partial \hat{H}_2}{\partial z} &= \frac{\sqrt{g}}{c} \left(4\pi j^1 + \dot{D}^1 \right), \\ \frac{\partial \hat{H}_1}{\partial z} - \frac{\partial H_3}{\partial \xi^1} - b_1^k \hat{H}_k - z \left(b_1^k \frac{\partial H_3}{\partial \xi^k} + c_1^k \hat{H}_k \right) &= \frac{\sqrt{g}}{c} \left(4\pi j^2 + \dot{D}^2 \right), \end{aligned} \quad (1.4.24)$$

$$\nabla_1 \hat{H}_2 - \nabla_2 \hat{H}_1 + z \left(b_1^k \nabla_k \hat{H}_2 - b_2^k \nabla_k \hat{H}_1 \right) = \frac{\sqrt{g}}{c} \left(4\pi j_3 + \dot{D}_3 \right).$$

$$\nabla_i \hat{D}^i - 2HD_3 + z \left[b^{ik} \nabla_i \hat{D}_k - 2(2H^2 - K)D_3 \right] + \frac{\partial D_3}{\partial z} = 4\pi \rho_e. \quad (1.4.25)$$

Окончательную линеаризацию проводим, подставляя (1.4.4) в (1.4.23) - (1.4.25), отбрасывая нелинейные по z слагаемые и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях координаты z . В результате получаем

- при z^0

$$\frac{\partial e_3}{\partial \xi^2} + b_2^k e_k - \chi_2 = -\frac{\sqrt{g}}{c} \dot{b}^1, \quad \chi_1 - \frac{\partial e_3}{\partial \xi^1} - b_1^k e_k = -\frac{\sqrt{g}}{c} \dot{b}^2, \quad \nabla_1 e_2 - \nabla_2 e_1 = -\frac{\sqrt{g}}{c} \dot{b}_3; \quad (1.4.26)$$

$$\frac{\partial h_3}{\partial \xi^2} + b_2^k h_k - \varphi_2 = \frac{\sqrt{g}}{c} \left(4\pi y^1 + \dot{d}^1 \right), \quad \varphi_1 - \frac{\partial h_3}{\partial \xi^1} - b_1^k h_k = \frac{\sqrt{g}}{c} \left(4\pi y^2 + \dot{d}^2 \right), \quad (1.4.27)$$

$$\nabla_1 h_2 - \nabla_2 h_1 = \frac{\sqrt{g}}{c} \left(4\pi y_3 + \dot{d}_3 \right);$$

$$\nabla_i d^i - 2Hd_3 + \delta_3 = 4\pi r_e; \quad (1.4.28)$$

- при z^1

$$\frac{\partial \chi_3}{\partial \xi^2} + b_2^k \chi_k + b_2^k \frac{\partial e_3}{\partial \xi^k} + c_2^k e_k = -\frac{\sqrt{g}}{c} \dot{\beta}^1, \quad \frac{\partial \chi_3}{\partial \xi^1} + b_1^k \chi_k + b_1^k \frac{\partial e_3}{\partial \xi^k} + c_1^k e_k = \frac{\sqrt{g}}{c} \dot{\beta}^2, \quad (1.4.29)$$

$$\nabla_1 \chi_2 - \nabla_2 \chi_1 + b_1^k \nabla_k e_2 - b_2^k \nabla_k e_1 = -\frac{\sqrt{g}}{c} \dot{\beta}_3;$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_3}{\partial \xi^2} + b_2^k \varphi_k + b_2^k \frac{\partial h_3}{\partial \xi^k} + c_2^k h_k &= \frac{\sqrt{g}}{c} (4\pi v^1 + \dot{\delta}^1), \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial \xi^1} + b_1^k \varphi_k + b_1^k \frac{\partial h_3}{\partial \xi^k} + c_1^k h_k &= -\frac{\sqrt{g}}{c} (4\pi v^2 + \dot{\delta}^2), \end{aligned} \quad (1.4.30)$$

$$\begin{aligned} \nabla_1 \varphi_2 - \nabla_2 \varphi_1 + b_1^k \nabla_k h_2 - b_2^k \nabla_k h_1 &= \frac{\sqrt{g}}{c} (4\pi v_3 + \dot{\delta}_3); \\ \nabla_i \delta^i - 2H \delta_3 + b^{ik} \nabla_i d_k - 2(2H^2 - K) d_3 &= 4\pi \lambda_e. \end{aligned} \quad (1.4.31)$$

К полученным выше равенствам необходимо добавить полученные с помощью (1.2.9) и (1.4.4) соотношения:

$$\begin{aligned} d^i &= e^{ij} e_j + e^{i3} e_3 + \kappa^{ijk} \varepsilon_{jk} + \kappa^{ij3} \theta_j + \kappa^{i33} \psi_3, \\ d_3 &= e^{3j} e_j + e^{33} e_3 + \kappa^{3jk} \varepsilon_{jk} + \kappa^{3j3} \theta_j + \kappa^{333} \psi_3, \\ b^i &= \mu^{ij} h_j + \mu^{i3} h_3 + \gamma^{ijk} \varepsilon_{jk} + \gamma^{ij3} \theta_j + \gamma^{i33} \psi_3, \\ b_3 &= \mu^{3j} h_j + \mu^{33} h_3 + \gamma^{3jk} \varepsilon_{jk} + \gamma^{3j3} \theta_j + \gamma^{333} \psi_3; \\ \delta^i &= e^{ij} \chi_j + e^{i3} \chi_3 + \kappa^{ijk} \kappa_{jk} + \kappa^{ij3} (b_j^n \theta_n + \nabla_j \psi_3), \\ \delta_3 &= e^{3j} \chi_j + e^{33} \chi_3 + \kappa^{3jk} \kappa_{jk} + \kappa^{3j3} (b_j^n \theta_n + \nabla_j \psi_3), \\ \beta^i &= \mu^{ij} \varphi_j + \mu^{i3} \varphi_3 + \gamma^{ijk} \kappa_{jk} + \gamma^{ij3} (b_j^n \theta_n + \nabla_j \psi_3), \\ \beta_3 &= \mu^{3j} \varphi_j + \mu^{33} \varphi_3 + \gamma^{3jk} \kappa_{jk} + \gamma^{3j3} (b_j^n \theta_n + \nabla_j \psi_3); \end{aligned} \quad (1.4.32)$$

Таким образом, замкнутая система уравнений для анизотропной электромагнитоупругой оболочки включает в себя уравнения движения

$$\begin{aligned} \rho h \ddot{u}^i &= \nabla_j T^{ji} - b_j^i Q^j + q_*^i + q_e^i, \quad \rho h \ddot{w} = \nabla_i Q^i + b_{ij} T^{ij} + q_* + q_e, \\ \rho I \ddot{\psi}^i &= \nabla_j M^{ij} - Q^i + m_*^i + m_e^i, \quad \rho I \ddot{\psi}_3 = \nabla_i \mu^i - N + m_* + m_e, \end{aligned} \quad (1.4.33)$$

равенства (1.4.10), (1.2.2), (1.2.4) и (1.4.8), а также соотношения линеаризованной электромагнитодинамики (1.4.5) и (1.4.26) - (1.4.32).

Основные граничные условия включают в себя (1.2.14), (1.2.15) и вытекающие из (1.3.2), (1.3.8) и (1.4.4) равенства:

$$\begin{aligned} e_i|_{\Pi_E} &= e_{i0}, \quad e_3|_{\Pi_E} = e_{30}, \quad h_i|_{\Pi_E} = h_{i0}, \quad h_3|_{\Pi_E} = h_{30}, \\ \chi_i|_{\Pi_E} &= \chi_{i0}, \quad \chi_3|_{\Pi_E} = \chi_{30}, \quad \varphi_i|_{\Pi_E} = \varphi_{i0}, \quad \varphi_3|_{\Pi_E} = \varphi_{30}. \end{aligned} \quad (1.4.34)$$

Далее везде будем считать, что характеристики начального электромагнитного

поля не зависят от пространственных координат.

1.5. Уравнений для оболочек из изотропных проводников

Остановимся только на электромагнитной составляющей этой системы. Под изотропными проводниками [33] понимается изотропная среда, обладающая следующими физическими характеристиками (здесь $i, j, k, l = 1, 2, 3$):

$$\kappa^{ijk} = 0, \gamma^{ijk} = 0, e^{ij} = \varepsilon_e \hat{g}^{ij}, \mu^{ij} = \mu_e \hat{g}^{ij}, \quad (1.5.1)$$

где ε_e и μ_e - коэффициенты диэлектрической и магнитной проницаемости.

При этом физические соотношения (1.3.6) для электромагнитного поля упрощаются и принимают вид:

$$\hat{D}^i = \varepsilon_e \hat{E}^i, D_3 = \varepsilon_e E_3, \hat{B}^i = \mu_e \hat{H}^i, B_3 = \mu_e H_3. \quad (1.5.2)$$

Для оболочки физический закон (1.4.10) совпадает с соответствующими равенствами в (1.2.12) для изотропной упругой оболочки. В остальных соотношениях согласно (1.5.2) уменьшается число неизвестных функций. А именно, (1.4.5) и (1.4.8) записываются так:

$$\begin{aligned} y^1 &= \sigma e^1 + \frac{\sigma \mu_e}{c \sqrt{g}} (\dot{u}_2 H_{03} - \dot{w} \hat{H}_{02}) + \rho_{e0} \dot{u}^1, \\ y^2 &= \sigma e^2 + \frac{\sigma \mu_e}{c \sqrt{g}} (\dot{w} \hat{H}_{01} - \dot{u}_1 H_{03}) + \rho_{e0} \dot{u}^2, \\ y_3 &= \sigma e_3 + \frac{\sigma \mu_e}{c \sqrt{g}} (\dot{u}_1 \hat{H}_{02} - \dot{u}_2 \hat{H}_{01}) + \rho_{e0} \dot{w}, \\ v^1 &= \sigma \chi^1 + \frac{\sigma \mu_e}{c \sqrt{g}} (\dot{\psi}_2 H_{03} - \dot{\psi}_3 \hat{H}_{02}) + \rho_{e0} \dot{\psi}^1, \\ v^2 &= \sigma \chi^2 + \frac{\sigma \mu_e}{c \sqrt{g}} (\dot{\psi}_3 \hat{H}_{01} - \dot{\psi}_1 H_{03}) + \rho_{e0} \dot{\psi}^2, \\ v_3 &= \sigma \chi_3 + \frac{\sigma \mu_e}{c \sqrt{g}} (\dot{\psi}_1 \hat{H}_{02} - \dot{\psi}_2 \hat{H}_{01}) + \rho_{e0} \dot{\psi}_3; \end{aligned} \quad (1.5.3)$$

$$\begin{aligned}
q_e^1 &= h \left[\rho_{e0} e^1 + r_e \hat{E}_0^1 + \frac{\mu_e}{c\sqrt{g}} \left(\hat{j}_{02} h_3 - j_{03} h_2 + y_2 H_{03} - y_3 \hat{H}_{02} \right) \right], \\
q_e^2 &= h \left[\rho_{e0} e^2 + r_e \hat{E}_0^2 + \frac{\mu_e}{c\sqrt{g}} \left(j_{03} h_1 - \hat{j}_{01} h_3 + y_3 \hat{H}_{01} - y_1 H_{03} \right) \right], \\
q_e &= h \left[\rho_{e0} e_3 + r_e E_{03} + \frac{\mu_e}{c\sqrt{g}} \left(\hat{j}_{01} h_2 - \hat{j}_{02} h_1 + y_1 \hat{H}_{02} - y_2 \hat{H}_{01} \right) \right], \\
m_e^1 &= I \left[\rho_{e0} \chi^1 + \lambda_e \hat{E}_0^1 + \frac{\mu_e}{c\sqrt{g}} \left(\hat{j}_{02} \Phi_3 - j_{03} \Phi_2 + \nu_2 H_{03} - \nu_3 \hat{H}_{02} \right) \right], \\
m_e^2 &= I \left[\rho_{e0} \chi^2 + \lambda_e \hat{E}_0^2 + \frac{\mu_e}{c\sqrt{g}} \left(j_{03} \Phi_1 - \hat{j}_{01} \Phi_3 + \nu_3 \hat{H}_{01} - \nu_1 H_{03} \right) \right], \\
m_e &= I \left[\rho_{e0} \chi_3 + \lambda_e E_{03} + \frac{\mu_e}{c\sqrt{g}} \left(\hat{j}_{01} \Phi_2 - \hat{j}_{02} \Phi_1 + \nu_1 \hat{H}_{02} - \nu_2 \hat{H}_{01} \right) \right].
\end{aligned} \tag{1.5.4}$$

Равенства (1.4.32) превращаются в тождества, а уравнения (1.4.26) – (1.4.31) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial e_3}{\partial \xi^2} + b_2^k e_k - \chi_2 &= -\frac{\mu_e \sqrt{g}}{c} \dot{h}^1, \quad \chi_1 - \frac{\partial e_3}{\partial \xi^1} - b_1^k e_k = -\frac{\mu_e \sqrt{g}}{c} \dot{h}^2, \\
\nabla_1 e_2 - \nabla_2 e_1 &= -\frac{\mu_e \sqrt{g}}{c} \dot{h}_3;
\end{aligned} \tag{1.5.5}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h_3}{\partial \xi^2} + b_2^k h_k - \Phi_2 &= \frac{\sqrt{g}}{c} (4\pi y^1 + \varepsilon_e \dot{e}^1), \quad \Phi_1 - \frac{\partial h_3}{\partial \xi^1} - b_1^k h_k = \frac{\sqrt{g}}{c} (4\pi y^2 + \varepsilon_e \dot{e}^2), \\
\nabla_1 h_2 - \nabla_2 h_1 &= \frac{\sqrt{g}}{c} (4\pi y_3 + \varepsilon_e \dot{e}_3);
\end{aligned} \tag{1.5.6}$$

$$\nabla_i e^i - 2H e_3 + \chi_3 = \frac{4\pi}{\varepsilon_e} r_e; \tag{1.5.7}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \chi_3}{\partial \xi^2} + b_2^k \chi_k + b_2^k \frac{\partial e_3}{\partial \xi^k} + c_2^k e_k &= -\frac{\mu_e \sqrt{g}}{c} \dot{\Phi}^1, \\
\frac{\partial \chi_3}{\partial \xi^1} + b_1^k \chi_k + b_1^k \frac{\partial e_3}{\partial \xi^k} + c_1^k e_k &= \frac{\mu_e \sqrt{g}}{c} \dot{\Phi}^2,
\end{aligned} \tag{1.5.8}$$

$$\nabla_1 \chi_2 - \nabla_2 \chi_1 + b_1^k \nabla_k e_2 - b_2^k \nabla_k e_1 = -\frac{\mu_e \sqrt{g}}{c} \dot{\Phi}_3;$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_3}{\partial \xi^2} + b_2^k \varphi_k + b_2^k \frac{\partial h_3}{\partial \xi^k} + c_2^k h_k &= \frac{\sqrt{g}}{c} (4\pi v^1 + \varepsilon_e \dot{\chi}^1), \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial \xi^1} + b_1^k \varphi_k + b_1^k \frac{\partial h_3}{\partial \xi^k} + c_1^k h_k &= -\frac{\sqrt{g}}{c} (4\pi v^2 + \varepsilon_e \dot{\chi}^2), \end{aligned} \quad (1.5.9)$$

$$\nabla_1 \varphi_2 - \nabla_2 \varphi_1 + b_1^k \nabla_k h_2 - b_2^k \nabla_k h_1 = \frac{\sqrt{g}}{c} (4\pi v_3 + \varepsilon_e \dot{\chi}_3);$$

$$\nabla_i \chi^i - 2H \chi_3 + b^{ik} \nabla_i e_k - 2(2H^2 - K) e_3 = \frac{4\pi}{\varepsilon_e} \lambda_e. \quad (1.5.10)$$

ГЛАВА 2. НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТО- УПРУГИХ ПЛАСТИН В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ДЕКАРТОВОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

2.1. Замкнутая система уравнений движения электромагнитоупругой пластины

Пластина определяется как оболочка со срединной поверхностью в виде плоскости, что соответствует нулевому тензору кривизны [69]:

$$\mathbf{b} = b_{ij}\mathfrak{e}^i\mathfrak{e}^j = \mathbf{0}. \quad (2.1.1)$$

При этом из параграфы 1.1 (см. также [70]) с учетом (1.4.33) вытекает система уравнений движения анизотропной пластины:

$$\rho h \ddot{u}^i = \nabla_j T^{ji} + q_*^i + q_e^i, \quad \rho I \ddot{\psi}_3 = \nabla_i \mu^i - N + m_* + m_e; \quad (2.1.2)$$

$$\rho h \ddot{w} = \nabla_i Q^i + q_* + q_e, \quad \rho I \ddot{\psi}^i = \nabla_j M^{ij} - Q^i + m_*^i + m_e^i; \quad (2.1.3)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\alpha_{ij} + \alpha_{ji}), \quad \alpha_{ij} = \nabla_i u_j; \quad (2.1.4)$$

$$\kappa_{ij} = \frac{1}{2}(\beta_{ij} + \beta_{ji}), \quad \beta_{ij} = \nabla_i \psi_j, \quad -\vartheta_i = \nabla_i w, \quad \theta_k = \psi_k - \vartheta_k; \quad (2.1.5)$$

$$T^{ij} = h(C^{ijkl}\varepsilon_{kl} + C^{ij33}\psi_3), \quad \mu^i = IC^{i3k3}\nabla_k \psi_3, \quad N = h(C^{33kl}\varepsilon_{kl} + C^{3333}\psi_3); \quad (2.1.6)$$

$$M^{ij} = IC^{ijkl}\kappa_{kl}, \quad Q^i = hC^{i3k3}\theta_k. \quad (2.1.7)$$

Если пластина изотропная, то в соответствии с (1.3.2) последние два соотношения приобретают вид:

$$\begin{aligned} T^{ij} &= h[\lambda(\varepsilon + \psi_3)g^{ij} + 2\mu\varepsilon^{ij}], \quad M^{ij} = I(\lambda g^{ij}\kappa + 2\mu\kappa^{ij}), \\ Q^i &= \mu h\theta^i, \quad \mu^i = \mu I g^{ik}\nabla_k \psi_3, \quad N = h[\lambda\varepsilon + (\lambda + 2\mu)\psi_3]. \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

Система уравнений (2.1.2) - (2.1.5), (2.1.8) может быть записана в перемещениях:

$$\begin{aligned} \rho \ddot{u}^i &= (\lambda + \mu)g^{ij}\nabla_j \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu g^{jk}\nabla_j \nabla_k u^i + \lambda g^{ij}\nabla_j \psi_3 + (q_*^i + q_e^i)/h, \\ \rho \ddot{\psi}_3 &= \mu \Delta \psi_3 + \{m_* + m_e - h[\lambda \operatorname{div} \mathbf{u} + (\lambda + 2\mu)\psi_3]\}/I; \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

$$\begin{aligned} \rho \ddot{w} &= \mu(\operatorname{div} \Psi + \Delta w) + (q_* + q_e)/h, \\ \rho \ddot{\psi}^i &= (\lambda + \mu) g^{ij} \nabla_j \operatorname{div} \Psi + \mu \Delta \psi^i + [m_*^i + m_e^i - \mu h g^{ik} (\psi_k + \nabla_k w)]/I. \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

Далее ограничиваемся материалом в виде изотропного диэлектрика (1.5.2). При этом соотношения (1.5.3) и (1.5.4) остаются в силе, а уравнения (1.5.5) - (1.5.10) упрощаются:

$$\frac{\partial e_3}{\partial \xi^2} - \chi_2 = -\frac{\mu_e \sqrt{g}}{c} \dot{h}^1, \quad \chi_1 - \frac{\partial e_3}{\partial \xi^1} = -\frac{\mu_e \sqrt{g}}{c} \dot{h}^2, \quad \nabla_1 e_2 - \nabla_2 e_1 = -\frac{\mu_e \sqrt{g}}{c} \dot{h}_3; \quad (2.1.11)$$

$$\frac{\partial h_3}{\partial \xi^2} - \varphi_2 = \frac{\sqrt{g}}{c} (4\pi y^1 + \varepsilon_e \dot{e}^1), \quad \varphi_1 - \frac{\partial h_3}{\partial \xi^1} = \frac{\sqrt{g}}{c} (4\pi y^2 + \varepsilon_e \dot{e}^2), \quad (2.1.12)$$

$$\nabla_1 h_2 - \nabla_2 h_1 = \frac{\sqrt{g}}{c} (4\pi y_3 + \varepsilon_e \dot{e}_3);$$

$$\nabla_i e^i + \chi_3 = \frac{4\pi}{\varepsilon_e} r_e; \quad (2.1.13)$$

$$\frac{\partial \chi_3}{\partial \xi^2} = -\frac{\mu_e \sqrt{g}}{c} \dot{\varphi}^1, \quad \frac{\partial \chi_3}{\partial \xi^1} = \frac{\mu_e \sqrt{g}}{c} \dot{\varphi}^2, \quad \nabla_1 \chi_2 - \nabla_2 \chi_1 = -\frac{\mu_e \sqrt{g}}{c} \dot{\varphi}_3; \quad (2.1.14)$$

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial \xi^2} = \frac{\sqrt{g}}{c} (4\pi v^1 + \varepsilon_e \dot{\chi}^1), \quad \frac{\partial \varphi_3}{\partial \xi^1} = -\frac{\sqrt{g}}{c} (4\pi v^2 + \varepsilon_e \dot{\chi}^2), \quad (2.1.15)$$

$$\nabla_1 \varphi_2 - \nabla_2 \varphi_1 = \frac{\sqrt{g}}{c} (4\pi v_3 + \varepsilon_e \dot{\chi}_3);$$

$$\nabla_i \chi^i = \frac{4\pi}{\varepsilon_e} \lambda_e. \quad (2.1.16)$$

Таким образом, замкнутая система уравнений для изотропной пластины включает в себя соотношения (2.1.9), (2.1.10) и (1.5.4), а также (1.5.3) и (2.1.11) - (2.1.16).

Основные граничные условия сохраняют свой вид (1.2.14), (1.2.15) и (1.3.8).

Далее полагаем, что начальное электромагнитное поле распределено по толщине пластины равномерно:

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_0(\xi^1, \xi^2), \quad \mathbf{H}_0 = \mathbf{H}_0(\xi^1, \xi^2), \quad \mathbf{D}_0 = \mathbf{D}_0(\xi^1, \xi^2). \quad (2.1.17)$$

Тогда, как следует из (1.3.4), (1.4.21), (1.4.22), (1.5.2) и (2.1.1), компоненты начального поля связаны между собой так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{30}}{\partial \xi^1} = \frac{\partial E_{30}}{\partial \xi^2} = 0, \quad \nabla_1 \hat{E}_{20} - \nabla_2 \hat{E}_{10} = 0, \\ \frac{\partial H_{30}}{\partial \xi^2} = \frac{4\pi\sqrt{g}}{c} (\hat{j}_{01} + \hat{j}_{s01}), \quad \frac{\partial H_{30}}{\partial \xi^1} = -\frac{4\pi\sqrt{g}}{c} (\hat{j}_{02} + \hat{j}_{s02}), \\ \nabla_1 \hat{H}_{20} - \nabla_2 \hat{H}_{10} = \frac{4\pi\sqrt{g}}{c} (j_{03} + j_{s03}), \quad \varepsilon_e \nabla_i \hat{E}_0^i = 4\pi\rho_{e0}. \end{aligned} \quad (2.1.18)$$

Отсюда вытекает, что

$$E_{30} = \text{const}. \quad (2.1.19)$$

2.2. Уравнения движения изотропной электромагнитоупругой пластины в прямоугольной декартовой системе координат

Для таких координат принимаем обозначения:

$$\xi^1 = x_1, \quad \xi^2 = x_2. \quad (2.2.1)$$

В этой системе координат компоненты векторов и тензоров совпадают с их физическими аналогами (их обозначаем нижними индексами), операторы ковариантного дифференцирования переходят в частные производные, для метрического тензора имеют место равенства [42, 68, 70]

$$g_{11} = g_{22} = 1, \quad g_{12} = 0, \quad g = 1, \quad (2.2.2)$$

а операторы дивергенции и Лапласа имеют вид:

$$\text{div} \mathbf{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}. \quad (2.2.3)$$

При этом соотношения (2.1.4), (2.1.5), (2.1.8) - (2.1.10), (1.5.3), (1.5.4), (2.1.11) - (2.1.16) принимают такой вид (δ_{ij} - символ Кронекера):

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right), \quad \kappa_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j} \right), \quad -\vartheta_i = \frac{\partial w}{\partial x_i}, \quad \theta_k = \psi_k - \vartheta_k; \quad (2.2.4)$$

$$\begin{aligned} T_{ij} = h \left[\lambda (\varepsilon + \psi_3) \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \right], \quad M_{ij} = I \left(\lambda \delta_{ij} \kappa + 2\mu \kappa_{ij} \right), \quad Q_i = \mu h \theta_i, \\ \mu_i = \mu I \frac{\partial \psi_3}{\partial x_i}, \quad N = h \left[\lambda \varepsilon + (\lambda + 2\mu) \psi_3 \right], \quad \varepsilon = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}, \quad \kappa = \kappa_{11} + \kappa_{22}; \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

$$\rho \ddot{u}_i = (\lambda + \mu) \frac{\partial \operatorname{div} \mathbf{u}}{\partial x_i} + \mu \Delta u_i + \lambda \frac{\partial \psi_3}{\partial x_i} + (q_{*i} + q_{ei})/h, \quad (2.2.6)$$

$$\rho \ddot{\psi}_3 = \mu \Delta \psi_3 + \left\{ m_* + m_e - h \left[\lambda \operatorname{div} \mathbf{u} + (\lambda + 2\mu) \psi_3 \right] \right\} / I;$$

$$\rho \ddot{w} = \mu (\operatorname{div} \boldsymbol{\psi} + \Delta w) + (q_* + q_e)/h,$$

$$\rho \ddot{\psi}_i = (\lambda + \mu) \frac{\partial \operatorname{div} \boldsymbol{\psi}}{\partial x_i} + \mu \Delta \psi_i + \left[m_{*i} + m_{ei} - \mu h \delta_{ij} \left(\psi_j + \frac{\partial w}{\partial x_j} \right) \right] / I; \quad (2.2.7)$$

$$q_{e1} = h \left[\rho_{e0} e_1 + r_e \hat{E}_{01} + \frac{\mu_e}{c} \left(\hat{j}_{02} h_3 - j_{03} h_2 + y_2 H_{03} - y_3 \hat{H}_{02} \right) \right],$$

$$q_{e2} = h \left[\rho_{e0} e_2 + r_e \hat{E}_{02} + \frac{\mu_e}{c} \left(j_{03} h_1 - \hat{j}_{01} h_3 + y_3 \hat{H}_{01} - y_1 H_{03} \right) \right],$$

$$q_e = h \left[\rho_{e0} e_3 + r_e E_{03} + \frac{\mu_e}{c} \left(\hat{j}_{01} h_2 - \hat{j}_{02} h_1 + y_1 \hat{H}_{02} - y_2 \hat{H}_{01} \right) \right], \quad (2.2.8)$$

$$m_{e1} = I \left[\rho_{e0} \chi_1 + \lambda_e \hat{E}_{01} + \frac{\mu_e}{c} \left(\hat{j}_{02} \Phi_3 - j_{03} \Phi_2 + \nu_2 H_{03} - \nu_3 \hat{H}_{02} \right) \right],$$

$$m_{e2} = I \left[\rho_{e0} \chi_2 + \lambda_e \hat{E}_{02} + \frac{\mu_e}{c} \left(j_{03} \Phi_1 - \hat{j}_{01} \Phi_3 + \nu_3 \hat{H}_{01} - \nu_1 H_{03} \right) \right],$$

$$m_e = I \left[\rho_{e0} \chi_3 + \lambda_e E_{03} + \frac{\mu_e}{c} \left(\hat{j}_{01} \Phi_2 - \hat{j}_{02} \Phi_1 + \nu_1 \hat{H}_{02} - \nu_2 \hat{H}_{01} \right) \right].$$

$$y_1 = \sigma e_1 + \sigma \mu_e c^{-1} \left(\dot{u}_2 H_{03} - \dot{w} \hat{H}_{02} \right) + \rho_{e0} \dot{u}_1,$$

$$y_2 = \sigma e_2 + \sigma \mu_e c^{-1} \left(\dot{w} \hat{H}_{01} - \dot{u}_1 H_{03} \right) + \rho_{e0} \dot{u}_2,$$

$$y_3 = \sigma e_3 + \sigma \mu_e c^{-1} \left(\dot{u}_1 \hat{H}_{02} - \dot{u}_2 \hat{H}_{01} \right) + \rho_{e0} \dot{w}, \quad (2.2.9)$$

$$\nu_1 = \sigma \chi_1 + \sigma \mu_e c^{-1} \left(\dot{\psi}_2 H_{03} - \dot{\psi}_3 \hat{H}_{02} \right) + \rho_{e0} \dot{\psi}_1,$$

$$\nu_2 = \sigma \chi_2 + \sigma \mu_e c^{-1} \left(\dot{\psi}_3 \hat{H}_{01} - \dot{\psi}_1 H_{03} \right) + \rho_{e0} \dot{\psi}_2,$$

$$\nu_3 = \sigma \chi_3 + \sigma \mu_e c^{-1} \left(\dot{\psi}_1 \hat{H}_{02} - \dot{\psi}_2 \hat{H}_{01} \right) + \rho_{e0} \dot{\psi}_3;$$

$$\frac{\partial e_3}{\partial x_2} - \chi_2 = -\frac{\mu_e}{c} \dot{h}_1, \quad \chi_1 - \frac{\partial e_3}{\partial x_1} = -\frac{\mu_e}{c} \dot{h}_2, \quad \frac{\partial e_2}{\partial x_1} - \frac{\partial e_1}{\partial x_2} = -\frac{\mu_e}{c} \dot{h}_3; \quad (2.2.10)$$

$$\frac{\partial h_3}{\partial x_2} - \varphi_2 = \frac{1}{c}(4\pi y_1 + \varepsilon_e \dot{e}_1), \quad \varphi_1 - \frac{\partial h_3}{\partial x_1} = \frac{1}{c}(4\pi y_2 + \varepsilon_e \dot{e}_2),$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial x_1} - \frac{\partial h_1}{\partial x_2} = \frac{1}{c}(4\pi y_3 + \varepsilon_e \dot{e}_3);$$
(2.2.11)

$$\mathbf{div} \boldsymbol{\chi}_3 = \frac{4\pi}{\varepsilon_e} r_e;$$
(2.2.12)

$$\frac{\partial \chi_3}{\partial x_2} = -\frac{\mu_e}{c} \dot{\varphi}_1, \quad \frac{\partial \chi_3}{\partial x_1} = \frac{\mu_e}{c} \dot{\varphi}_2, \quad \frac{\partial \chi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \chi_1}{\partial x_2} = -\frac{\mu_e}{c} \dot{\varphi}_3;$$
(2.2.13)

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial x_2} = \frac{1}{c}(4\pi v_1 + \varepsilon_e \dot{\chi}_1), \quad \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_1} = -\frac{1}{c}(4\pi v_2 + \varepsilon_e \dot{\chi}_2),$$
(2.2.14)

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} = \frac{1}{c}(4\pi v_3 + \varepsilon_e \dot{\chi}_3);$$

$$\mathbf{div} \boldsymbol{\chi} = \frac{4\pi}{\varepsilon_e} \lambda_e;$$
(2.2.15)

Соотношения (2.2.6) - (2.2.15) образуют замкнутую систему уравнений. Однако в качестве таковой можно рассматривать уравнения (2.2.6), (2.2.7) и восемь соотношений из группы (2.2.10) - (2.2.15).

Основные граничные условия по-прежнему сохраняют свой вид (1.2.14), (1.2.15) и (1.4.34).

В этом варианте с учетом (2.1.2) условия (2.1.18), (2.1.19) на начальное поле трансформируются так:

$$E_{30} = \text{const}, \quad \frac{\partial \hat{E}_{20}}{\partial x_1} = \frac{\partial \hat{E}_{10}}{\partial x_2},$$

$$\frac{\partial H_{30}}{\partial x_2} = \frac{4\pi}{c}(\hat{j}_{01} + \hat{j}_{s01}), \quad \frac{\partial H_{30}}{\partial x_1} = -\frac{4\pi}{c}(\hat{j}_{02} + \hat{j}_{s02}),$$
(2.2.16)

$$\frac{\partial \hat{H}_{20}}{\partial x_1} - \frac{\partial \hat{H}_{10}}{\partial x_2} = \frac{4\pi}{c}(j_{03} + j_{s03}), \quad \varepsilon_e \left(\frac{\partial \hat{E}_{10}}{\partial x_1} - \frac{\partial \hat{E}_{20}}{\partial x_2} \right) = 4\pi \rho_{e0}.$$

Далее везде будем использовать следующие безразмерные параметры (при одинаковом начертании величин они обозначены штрихом, который в последующем изложении опускается):

$$\begin{aligned}
x'_i &= \frac{x_i}{L}, z' = \frac{z}{L}, \tau = \frac{c_1 t}{L}, u'_i = \frac{u_i}{L}, w' = \frac{w}{L}, \kappa'_{ij} = L \kappa_{ij} \quad (i, j = 1, 2), \\
T'_{ij} &= \frac{T_{ij}}{h(\lambda + 2\mu)}, M'_{ij} = \frac{M_{ij}}{I(\lambda + 2\mu)}, Q'_i = \frac{Q_i}{\mu h}, \mu'_i = \frac{\mu_i L}{\mu I}, N' = \frac{N}{h(\lambda + 2\mu)}, \\
q'_{*i} &= \frac{q_{*i} L}{(\lambda + 2\mu) h}, q'_{ei} = \frac{q_{ei} L}{(\lambda + 2\mu) h}, m'_* = \frac{m_* L^2}{(\lambda + 2\mu) I}, m'_e = \frac{m_e L^2}{(\lambda + 2\mu) I}, \\
\sigma'_{ij} &= \frac{\sigma_{ij}}{\lambda + 2\mu}, r^2 = \frac{I}{L^2 h}, \eta = \frac{c_1}{c_2}, \zeta = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} = 1 - \frac{2}{\eta^2}, c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, c_2^2 = \frac{\mu}{\rho}, \\
e'_i &= \frac{e_i}{E_*}, \hat{E}'_{0i} = \frac{\hat{E}_{0i}}{E_*}, E'_{03} = \frac{E_{03}}{E_*}, \chi'_i = \frac{\chi_i L}{E_*}, h'_i = \frac{h_i \mu_e c_1}{c E_*}, \hat{H}'_{0i} = \frac{\hat{H}_{0i} \mu_e c_1}{c E_*}, \\
H'_{03} &= \frac{H_{03} \mu_e c_1}{c E_*}, \varphi'_i = \frac{\varphi_i \mu_e c_1 L}{c E_*}, d'_i = \frac{d_i}{\varepsilon_e E_*}, \delta'_i = \frac{\delta_i L}{\varepsilon_e E_*}, b'_i = \frac{b_i c_1}{c E_*}, \beta'_i = \frac{\beta_i c_1 L}{c E_*}, \\
y'_i &= \frac{y_i}{\sigma E_*}, \hat{j}'_{0i} = \frac{\hat{j}_{0i}}{\sigma E_*}, j'_{03} = \frac{j_{03}}{\sigma E_*}, v'_i = \frac{L v_i}{\sigma E_*}, r'_e = \frac{4\pi r_e L}{\varepsilon_e E_*}, \rho'_{e0} = \frac{4\pi \rho_{e0} L}{\varepsilon_e E_*}, \\
\lambda'_e &= \frac{4\pi \lambda_e L^2}{\varepsilon_e E_*}, \eta_e = \frac{c_1}{c_e}, \alpha = \frac{\varepsilon_e E_*^2}{4\pi(\lambda + 2\mu)}, \gamma = \frac{\gamma_e L}{c_1} = \frac{4\pi \sigma L}{\varepsilon_e c_1}, c_e^2 = \frac{c^2}{\mu_e \varepsilon_e}, \quad (2.2.17)
\end{aligned}$$

где L и E_* - некоторые характерные линейный размер и напряженность электрического поля.

Тогда соотношение (2.2.3) принимает вид:

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}. \quad (2.2.18)$$

Равенства (2.2.4) сохраняются, а соотношения (2.2.5) - (2.2.15) записываются так:

$$\begin{aligned}
T_{ij} &= \zeta(\varepsilon + \psi_3) \delta_{ij} + 2\eta^{-2} \varepsilon_{ij}, M_{ij} = \zeta \delta_{ij} \kappa + 2\eta^{-2} \kappa_{ij}, \\
Q_i &= \theta_i, \mu_i = \frac{\partial \psi_3}{\partial x_i}, N = \zeta \varepsilon + \psi_3, \varepsilon = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}, \kappa = \kappa_{11} + \kappa_{22}; \quad (2.2.19)
\end{aligned}$$

$$\ddot{u}_i = (1 - \eta^{-2}) \frac{\partial \operatorname{div} \mathbf{u}}{\partial x_i} + \eta^{-2} \Delta u_i + \zeta \frac{\partial \psi_3}{\partial x_i} + q_{*i} + q_{ei}, \quad (2.2.20)$$

$$\ddot{\psi}_3 = \eta^{-2} \Delta \psi_3 - r^{-2} (\zeta \operatorname{div} \mathbf{u} + \psi_3) + m_* + m_e;$$

$$\ddot{w} = \eta^{-2} (\operatorname{div} \boldsymbol{\psi} + \Delta w) + q_* + q_e,$$

$$\ddot{\psi}_i = (1 - \eta^{-2}) \frac{\partial \operatorname{div} \boldsymbol{\psi}}{\partial x_i} + \eta^{-2} \Delta \psi_i + m_{*i} + m_{ei} - \eta^{-2} r^{-2} \delta_{ij} \left(\psi_j + \frac{\partial w}{\partial x_j} \right). \quad (2.2.21)$$

$$\begin{aligned}
q_{e1} &= \alpha \left[\rho_{e0} e_1 + r_e \hat{E}_{01} + \gamma \left(\hat{j}_{02} h_3 - j_{03} h_2 + y_2 H_{03} - y_3 \hat{H}_{02} \right) \right], \\
q_{e2} &= \alpha \left[\rho_{e0} e_2 + r_e \hat{E}_{02} + \gamma \left(j_{03} h_1 - \hat{j}_{01} h_3 + y_3 \hat{H}_{01} - y_1 H_{03} \right) \right], \\
q_e &= \alpha \left[\rho_{e0} e_3 + r_e E_{03} + \gamma \left(\hat{j}_{01} h_2 - \hat{j}_{02} h_1 + y_1 \hat{H}_{02} - y_2 \hat{H}_{01} \right) \right], \\
m_{e1} &= \alpha \left[\rho_{e0} \chi_1 + \lambda_e \hat{E}_{01} + \gamma \left(\hat{j}_{02} \Phi_3 - j_{03} \Phi_2 + \nu_2 H_{03} - \nu_3 \hat{H}_{02} \right) \right], \\
m_{e2} &= \alpha \left[\rho_{e0} \chi_2 + \lambda_e \hat{E}_{02} + \gamma \left(j_{03} \Phi_1 - \hat{j}_{01} \Phi_3 + \nu_3 \hat{H}_{01} - \nu_1 H_{03} \right) \right], \\
m_e &= \alpha \left[\rho_{e0} \chi_3 + \lambda_e E_{03} + \gamma \left(\hat{j}_{01} \Phi_2 - \hat{j}_{02} \Phi_1 + \nu_1 \hat{H}_{02} - \nu_2 \hat{H}_{01} \right) \right].
\end{aligned} \tag{2.2.22}$$

$$\begin{aligned}
y_1 &= e_1 + \dot{u}_2 H_{03} - \dot{w} \hat{H}_{02} + \gamma^{-1} \rho_{e0} \dot{u}_1, \\
y_2 &= e_2 + \dot{w} \hat{H}_{01} - \dot{u}_1 H_{03} + \gamma^{-1} \rho_{e0} \dot{u}_2, \\
y_3 &= e_3 + \dot{u}_1 \hat{H}_{02} - \dot{u}_2 \hat{H}_{01} + \gamma^{-1} \rho_{e0} \dot{w}, \\
\nu_1 &= \chi_1 + \dot{\psi}_2 H_{03} - \dot{\psi}_3 \hat{H}_{02} + \gamma^{-1} \rho_{e0} \dot{\psi}_1, \\
\nu_2 &= \chi_2 + \dot{\psi}_3 \hat{H}_{01} - \dot{\psi}_1 H_{03} + \gamma^{-1} \rho_{e0} \dot{\psi}_2, \\
\nu_3 &= \chi_3 + \dot{\psi}_1 \hat{H}_{02} - \dot{\psi}_2 \hat{H}_{01} + \gamma^{-1} \rho_{e0} \dot{\psi}_3;
\end{aligned} \tag{2.2.23}$$

$$\frac{\partial e_3}{\partial x_2} - \chi_2 = -\dot{h}_1, \quad \chi_1 - \frac{\partial e_3}{\partial x_1} = -\dot{h}_2, \quad \frac{\partial e_2}{\partial x_1} - \frac{\partial e_1}{\partial x_2} = -\dot{h}_3 \tag{2.2.24}$$

$$\frac{\partial h_3}{\partial x_2} - \Phi_2 = \eta_e^2 (\gamma y_1 + \dot{e}_1), \quad \Phi_1 - \frac{\partial h_3}{\partial x_1} = \eta_e^2 (\gamma y_2 + \dot{e}_2), \quad \frac{\partial h_2}{\partial x_1} - \frac{\partial h_1}{\partial x_2} = \eta_e^2 (\gamma y_3 + \dot{e}_3); \tag{2.2.25}$$

$$\text{div} \mathbf{e} + \chi_3 = r_e; \tag{2.2.26}$$

$$\frac{\partial \chi_3}{\partial x_2} = -\dot{\Phi}_1, \quad \frac{\partial \chi_3}{\partial x_1} = \dot{\Phi}_2, \quad \frac{\partial \chi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \chi_1}{\partial x_2} = -\dot{\Phi}_3; \tag{2.2.27}$$

$$\frac{\partial \Phi_3}{\partial x_2} = \eta_e^2 (\gamma \nu_1 + \dot{\chi}_1), \quad \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_1} = -\eta_e^2 (\gamma \nu_2 + \dot{\chi}_2), \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2} = \eta_e^2 (\gamma \nu_3 + \dot{\chi}_3); \tag{2.2.28}$$

$$\text{div} \mathbf{\chi} = \lambda_e. \tag{2.2.29}$$

Далее полагаем, что в начальный момент времени пластина находится в покое, что соответствует нулевым начальным условиям:

$$\begin{aligned}
u_i|_{\tau=0} &= \dot{u}_i|_{\tau=0} = \psi_3|_{\tau=0} = \dot{\psi}_3|_{\tau=0} = w|_{\tau=0} = \dot{w}|_{\tau=0} = \psi_i|_{\tau=0} = \dot{\psi}_i|_{\tau=0} = 0, \\
e_i|_{\tau=0} &= e_3|_{\tau=0} = \chi_i|_{\tau=0} = \chi_3|_{\tau=0} = h_i|_{\tau=0} = h_3|_{\tau=0} = \Phi_i|_{\tau=0} = \Phi_3|_{\tau=0} = \\
&= y_i|_{\tau=0} = y_3|_{\tau=0} = \nu_i|_{\tau=0} = \nu_3|_{\tau=0} = 0.
\end{aligned} \tag{2.2.30}$$

Условия (2.2.16) на начальное поле в безразмерной форме имеют вид:

$$E_{30} = \text{const}, \quad \frac{\partial \hat{E}_{20}}{\partial x_1} = \frac{\partial \hat{E}_{10}}{\partial x_2},$$

$$\frac{\partial H_{30}}{\partial x_2} = \gamma \eta_e^2 (\hat{j}_{01} + \hat{j}_{s01}), \quad \frac{\partial H_{30}}{\partial x_1} = -\gamma \eta_e^2 (\hat{j}_{02} + \hat{j}_{s02}), \quad (2.2.31)$$

$$\frac{\partial \hat{H}_{20}}{\partial x_1} - \frac{\partial \hat{H}_{10}}{\partial x_2} = \gamma \eta_e^2 (j_{03} + j_{s03}), \quad \frac{\partial \hat{E}_{10}}{\partial x_1} - \frac{\partial \hat{E}_{20}}{\partial x_2} = \rho_{e0}.$$

2.3. Замкнутая система уравнений движения одномерной электромагнитоупругой пластины (стержня)

Полагаем, что все искомые функции не зависят от координаты x_2 и имеют место равенства

$$u_2 = 0, \quad \psi_2 = 0. \quad (2.3.1)$$

Далее используем обозначения

$$x_1 = x, \quad u_1 = u, \quad \psi_1 = \psi. \quad (2.3.2)$$

Тогда соотношения (2.2.4), (2.2.19) - (2.2.21) с учетом (2.2.3) и (2.2.17) принимают следующий вид (штрих обозначает производную по координате x):

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon = u', \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_{12} = 0, \quad \kappa_{11} = \kappa = \psi', \quad \kappa_{22} = \kappa_{12} = 0, \quad (2.3.3)$$

$$\vartheta_1 = \vartheta = -w', \quad \vartheta_2 = 0, \quad \theta_1 = \theta = \psi - \vartheta, \quad \theta_2 = 0;$$

$$T_{11} = u' + \zeta \psi_3, \quad T_{22} = \zeta (u' + \psi_3), \quad T_{12} = 0, \quad M_{11} = \psi', \quad M_{22} = \zeta \psi', \quad M_{12} = 0, \quad (2.3.4)$$

$$Q_1 = \theta, \quad Q_2 = 0, \quad \mu_1 = \psi_3', \quad \mu_2 = 0, \quad N = \zeta u' + \psi_3;$$

$$\ddot{u} = u'' + \zeta \psi_3' + q_{*1} + q_{e1}, \quad \ddot{\psi}_3 = \eta^{-2} \psi_3'' - r^{-2} (\zeta u' + \psi_3) + m_* + m_e, \quad q_{*2} + q_{e2} = 0; \quad (2.3.5)$$

$$\ddot{w} = \eta^{-2} (\psi' + w'') + q_* + q_e, \quad \ddot{\psi} = \psi'' - \eta^{-2} r^{-2} (\psi + w') + m_{*1} + m_{e1}, \quad (2.3.6)$$

$$m_{*2} + m_{e2} = 0.$$

Для выполнения последних равенств в (2.3.5) и (2.3.6) необходимо потребовать, чтобы внешняя неэлектромагнитная нагрузка и параметры электромагнитного поля, как следует из (2.2.22), удовлетворяли следующим условиям:

$$q_{*2} = 0, \quad m_{*2} = 0, \quad (2.3.7)$$

$$e_2 = \chi_2 = 0, \quad \hat{E}_{02} = j_{03} = \hat{j}_{01} = \hat{H}_{01} = H_{03} = 0. \quad (2.3.8)$$

Тогда нетривиальные равенства в (2.2.22) при дополнительном учете

(2.3.1) приобретают такой вид:

$$\begin{aligned}
 q_{e1} &= \alpha \left[\rho_{e0} e_1 + r_e \hat{E}_{01} + \gamma (j_0 h_3 - y_3 H_0) \right], \quad j_0 = \hat{j}_{02}, \quad H_0 = \hat{H}_{02}, \\
 q_e &= \alpha \left[\rho_{e0} e_3 + r_e E_{03} - \gamma (j_0 h_1 - y_1 H_0) \right], \\
 m_{e1} &= \alpha \left[\rho_{e0} \chi_1 + \lambda_e \hat{E}_{01} + \gamma (j_0 \Phi_3 - \nu_3 H_0) \right], \\
 m_e &= \alpha \left[\rho_{e0} \chi_3 + \lambda_e E_{03} - \gamma (j_0 \Phi_1 - \nu_1 H_0) \right].
 \end{aligned} \tag{2.3.9}$$

Из (2.2.23) и (2.2.24) получаем

$$\begin{aligned}
 y_1 &= e_1 - \dot{w} H_0 + \gamma^{-1} \rho_{e0} \dot{u}, \quad y_3 = e_3 + \dot{u} H_0 + \gamma^{-1} \rho_{e0} \dot{w}, \quad y_2 = 0, \\
 \nu_1 &= \chi_1 - \dot{\psi}_3 H_0 + \gamma^{-1} \rho_{e0} \dot{\psi}, \quad \nu_3 = \chi_3 + \dot{\psi} H_0 + \gamma^{-1} \rho_{e0} \dot{\psi}_3, \quad \nu_2 = 0,
 \end{aligned} \tag{2.3.10}$$

и

$$\chi_1 - e'_3 = -\dot{h}_2, \quad \dot{h}_1 = \dot{h}_3 = 0.$$

Последние соотношения с учетом нулевых начальных условий приводят к следующим равенствам:

$$\chi_1 - e'_3 = -\dot{h}, \quad h = h_2, \quad h_1 = h_3 = 0. \tag{2.3.11}$$

Тогда формулы (2.2.25) - (2.2.27) записываются так:

$$-\Phi_2 = \eta_e^2 (\gamma y_1 + \dot{e}_1), \quad h' = \eta_e^2 (\gamma y_3 + \dot{e}_3), \quad \Phi_1 = 0; \tag{2.3.12}$$

$$e'_1 + \chi_3 = r_e \tag{2.3.13}$$

и $\chi'_3 = \dot{\phi}_2, \dot{\phi}_3 = 0$. Последние равенства аналогично (2.3.11) дают следующие соотношения:

$$\chi'_3 = \dot{\phi}, \quad \phi = \phi_2, \quad \phi_3 = 0; \tag{2.3.14}$$

При этом формулы (2.2.28) и (2.2.29) принимают вид

$$\gamma \nu_1 + \dot{\chi}_1 = 0, \quad \phi' = \eta_e^2 (\gamma \nu_3 + \dot{\chi}_3); \tag{2.3.15}$$

$$\chi'_1 = \lambda_e. \tag{2.3.16}$$

Таким образом, замкнутая система уравнений для стержня включает 16 уравнений

$$\begin{aligned}
 \ddot{u} &= u'' + \zeta \psi'_3 + q_{*1} + q_{e1}, \quad \ddot{\psi}_3 = \eta^{-2} \psi''_3 - r^{-2} (\zeta u' + \psi_3) + m_* + m_e, \\
 q_{e1} &= \alpha (\rho_{e0} e_1 + r_e \hat{E}_{01} - \gamma y_3 H_0), \quad m_e = \alpha (\rho_{e0} \chi_3 + \lambda_e E_{03} + \gamma \nu_1 H_0);
 \end{aligned} \tag{2.3.17}$$

$$\ddot{w} = \eta^{-2}(\psi' + w'') + q_* + q_e, \quad \ddot{\psi} = \psi'' - \eta^{-2}r^{-2}(\psi + w') + m_{*1} + m_{e1}, \quad (2.3.18)$$

$$q_e = \alpha(\rho_{e0}e_3 + r_e E_{03} + \gamma y_1 H_0), \quad m_{e1} = \alpha(\rho_{e0}\chi_1 + \lambda_e \hat{E}_{01} - \gamma \upsilon_3 H_0);$$

$$y_1 = e_1 + l(\dot{u}, -\dot{w}), \quad y_3 = e_3 + l(\dot{w}, \dot{u}), \quad l(u, w) = \gamma^{-1}\rho_{e0}u + H_0 w, \quad (2.3.19)$$

$$\upsilon_1 = \chi_1 + l(\dot{\psi}, -\dot{\psi}_3), \quad \upsilon_3 = \chi_3 + l(\dot{\psi}_3, \dot{\psi});$$

$$\chi_1 - e'_3 = -\dot{h}; \quad (2.3.20)$$

$$-\varphi = \eta_e^2(\gamma y_1 + \dot{e}_1), \quad h' = \eta_e^2(\gamma y_3 + \dot{e}_3); \quad (2.3.21)$$

$$e'_1 + \chi_3 = r_e; \quad (2.3.22)$$

$$\chi'_3 = \dot{\varphi}; \quad (2.3.23)$$

$$\gamma \upsilon_1 + \dot{\chi}_1 = 0, \quad \varphi' = \eta_e^2(\gamma \upsilon_3 + \dot{\chi}_3); \quad (2.3.24)$$

$$\chi'_1 = \lambda_e. \quad (2.3.25)$$

относительно 16 неизвестных $u, \psi_3, w, \psi, e_1, e_3, r_e, h, y_1, y_3, \chi_1, \chi_3, \varphi, \upsilon_1, \upsilon_3, \lambda_e$.

Если стержень имеет один или два конца, то граничные условия на них строятся с помощью (1.2.14), (1.2.15) и (1.4.34). Если он не ограниченный или полуограниченный, то ставится требование ограниченности искомых функций.

Соответствующие (2.2.30) начальные условия в этом случае имеют вид:

$$u|_{\tau=0} = \dot{u}|_{\tau=0} = \psi_3|_{\tau=0} = \dot{\psi}_3|_{\tau=0} = w|_{\tau=0} = \dot{w}|_{\tau=0} = \psi|_{\tau=0} = \dot{\psi}|_{\tau=0} = 0, \quad (2.3.26)$$

$$e_1|_{\tau=0} = e_3|_{\tau=0} = \chi_1|_{\tau=0} = \chi_3|_{\tau=0} = h|_{\tau=0} = \varphi|_{\tau=0} =$$

$$= y_1|_{\tau=0} = y_3|_{\tau=0} = \upsilon_1|_{\tau=0} = \upsilon_3|_{\tau=0} = 0.$$

Условия (2.2.31) на начальное поле в безразмерной форме с учетом (2.3.8) имеют вид:

$$\hat{E}_{10} = \hat{E}_{10}(x), \quad E_{30} = \text{const}, \quad H_0 = \text{const}, \quad \hat{E}'_{10} = \rho_{e0}, \quad \hat{j}_{s01} = j_{s03} = 0, \quad j_0 = -\hat{j}_{s02}. \quad (2.3.27)$$

2.4. Уравнения для электромагнитоупругого стержня в изображениях по Лапласу

При заданных u, ψ_3, w, ψ равенства (2.3.19) – (2.3.25) есть система из 12 уравнений относительно 12 неизвестных $\chi_1, \chi_3, e_1, e_3, h, \varphi, y_1, y_3, r_e, \upsilon_1, \upsilon_3, \lambda_e$.

Исключаем из нее $y_1, y_3, v_1, v_3, r_e, \lambda_e$. Для этого равенства (2.3.19) подставляем в (2.3.21) и (2.3.24):

$$-\varphi = \eta_e^2 [\dot{e}_1 + \gamma e_1 + \gamma l(\dot{u}, -\dot{w})], \quad h' = \eta_e^2 [\dot{e}_3 + \gamma e_3 + \gamma l(\dot{w}, \dot{u})]; \quad (2.4.1)$$

$$\dot{\chi}_1 + \gamma \chi_1 + \gamma l(\dot{\psi}, -\dot{\psi}_3) = 0, \quad \varphi' = \eta_e^2 [\dot{\chi}_3 + \gamma \chi_3 + \gamma l(\dot{\psi}_3, \dot{\psi})]; \quad (2.4.2)$$

Тогда эти соотношения вместе с (2.3.20) и (2.3.23) образуют систему из шести уравнений в частных производных относительно шести функций $e_1, e_3, h, \chi_1, \chi_3, \varphi$. При этом равенства (2.3.19), (2.3.22) и (2.3.25) служат для определения $y_1, y_3, v_1, v_3, r_e, \lambda_e$.

Для построения общего решения системы (2.3.20), (2.3.23), (2.4.1), (2.4.2) применяем к ней преобразование Лапласа по времени с учетом начальных условий (2.3.26) [41] (верхний индекс « L » указывает на изображение; s - соответствующий параметр):

$$-\varphi^L = \eta_e^2 [(s + \gamma)e_1^L + \gamma sl(u^L, -w^L)], \quad \frac{\partial h^L}{\partial x} = \eta_e^2 [(s + \gamma)e_3^L + \gamma sl(w^L, u^L)]; \quad (2.4.3)$$

$$(s + \gamma)\chi_1^L + \gamma sl(\psi^L, -\psi_3^L) = 0, \quad \frac{\partial \varphi^L}{\partial x} = \eta_e^2 [(s + \gamma)\chi_3^L + \gamma sl(\psi_3^L, \psi^L)]; \quad (2.4.4)$$

$$\frac{\partial e_3^L}{\partial x} = \chi_1^L + sh^L, \quad \frac{\partial \chi_3^L}{\partial x} = s\varphi^L. \quad (2.4.5)$$

Отсюда получаем равенства для e_1^L и χ_1^L :

$$e_1^L = -\frac{1}{s + \gamma} [\eta_e^{-2} \varphi^L + \gamma sl(u^L, -w^L)], \quad (2.4.6)$$

$$\chi_1^L = -\frac{\gamma s}{s + \gamma} l(\psi^L, -\psi_3^L) \quad (2.4.7)$$

и две независимые системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial h^L}{\partial x} = \eta_e^2 [(s + \gamma)e_3^L + \gamma sl(w^L, u^L)], \quad \frac{\partial e_3^L}{\partial x} = sh^L - \frac{\gamma s}{s + \gamma} l(\psi^L, -\psi_3^L); \quad (2.4.8)$$

$$\frac{\partial \varphi^L}{\partial x} = \eta_e^2 [(s + \gamma)\chi_3^L + \gamma sl(\psi_3^L, \psi^L)], \quad \frac{\partial \chi_3^L}{\partial x} = s\varphi^L. \quad (2.4.9)$$

Далее из всех составляющих электромагнитного поля за основные неизвестные принимаем h, φ, e_3 и χ_3 . При этом функции e_1 и χ_1 определяются формулами (2.4.6) и (2.4.7), а остальные находятся при дополнительном учете равенств (2.3.19), (2.3.22) и (2.3.25):

$$\begin{aligned}
y_1^L &= -\frac{1}{s+\gamma} \left[\eta_e^{-2} \varphi^L - s^2 l(u^L, -w^L) \right], \quad y_3^L = e_3^L + sl(w^L, u^L), \\
v_1^L &= \frac{s^2}{s+\gamma} l(\psi^L, -\psi_3^L), \quad v_3^L = \chi_3^L + sl(\psi_3^L, \psi^L), \\
r_e^L &= -\frac{1}{s+\gamma} \left[\eta_e^{-2} \frac{\partial \varphi^L}{\partial x} + \gamma s \frac{\partial}{\partial x} l(u^L, -w^L) \right] = \\
&= -\frac{\gamma s}{s+\gamma} \left[l(\psi_3^L, \psi^L) + \frac{\partial}{\partial x} l(u^L, -w^L) \right], \quad \lambda_e^L = -\frac{\gamma s}{s+\gamma} \frac{\partial}{\partial x} l(\psi^L, -\psi_3^L).
\end{aligned} \tag{2.4.10}$$

Используя теперь эти равенства, а также (2.4.6) и (2.4.7), выражаем через e_3, χ_3, φ, h и кинематические параметры оболочки изображения функций q_{e1}, m_e, q_e и m_{e1} в (2.3.17) и (2.3.18):

$$\begin{aligned}
q_{e1}^L &= \alpha \left[L_{11}(u^L) + L_{12}(\psi_3^L) + L_{13}(w^L) + L_{14}(\psi^L) + L_{15}(e_3^L) + L_{17}(\varphi^L) \right], \\
m_e^L &= \alpha \left[L_{22}(\psi_3^L) + L_{24}(\psi^L) + L_{26}(\chi_3^L) \right], \\
q_e^L &= \alpha \left[L_{31}(u^L) + L_{32}(\psi_3^L) + L_{33}(w^L) + L_{34}(\psi^L) + L_{35}(e_3^L) + L_{37}(\varphi^L) \right], \\
m_{e1}^L &= \alpha \left[L_{42}(\psi_3^L) + L_{44}(\psi^L) + L_{46}(\chi_3^L) \right],
\end{aligned} \tag{2.4.11}$$

где

$$\begin{aligned}
L_{11}(u^L) &= -\frac{s}{s+\gamma} \left[(\rho_{e0} \hat{E}_{01} u^L)' + H_0^2 \gamma (s+\gamma) u^L \right], \\
L_{12}(\psi_3^L) &= -\frac{s}{s+\gamma} \hat{E}_{01} \rho_{e0} \psi_3^L, \quad L_{14}(\psi^L) = -\hat{E}_{01} H_0 \frac{\gamma s}{s+\gamma} \psi^L, \\
L_{13}(w^L) &= -H_0 \frac{s}{s+\gamma} \left(\rho_{e0} s w^L - \hat{E}_{01} \gamma \frac{\partial w^L}{\partial x} \right), \\
L_{15}(e_3^L) &= -\gamma H_0 e_3^L, \quad L_{17}(\varphi^L) = -\frac{\rho_{e0} \eta_e^{-2}}{s+\gamma} \varphi^L,
\end{aligned} \tag{2.4.12}$$

$$\begin{aligned}
L_{22}(\psi_3^L) &= \frac{\gamma s H_0}{s+\gamma} \left(E_{03} \frac{\partial \psi_3^L}{\partial x} - H_0 s \psi_3^L \right), \quad L_{26}(\chi_3^L) = \rho_{e0} \chi_3^L, \\
L_{24}(\psi^L) &= -\frac{s}{s+\gamma} \left[E_{03} \frac{\partial (\rho_{e0} \psi^L)}{\partial x} - H_0 \rho_{e0} s \psi^L \right];
\end{aligned}$$

$$L_{31}(u^L) = \frac{s}{s+\gamma} \left[s \rho_{e0} H_0 u^L - E_{03} (\rho_{e0} u^L)' \right],$$

$$L_{32}(\psi_3^L) = -\frac{s E_{30} \rho_{e0}}{s+\gamma} \psi_3^L, \quad L_{33}(w^L) = \frac{\gamma s H_0}{s+\gamma} \left(E_{30} \frac{\partial w^L}{\partial x} - s H_0 w^L \right),$$

$$L_{34}(\psi^L) = -\frac{\gamma s E_{30} H_0}{s+\gamma} \psi^L, \quad L_{35}(e_3^L) = \rho_{e0} e_3^L, \quad L_{37}(\varphi^L) = -\frac{\gamma H_0}{s+\gamma} \eta_e^{-2} \varphi^L, \tag{2.4.13}$$

$$L_{42}(\psi_3^L) = H_0 \frac{s}{s+\gamma} \left(\gamma \hat{E}_{01} \frac{\partial \psi_3^L}{\partial x} - s \rho_{e0} \psi_3^L \right),$$

$$L_{44}(\psi^L) = -\frac{s}{s+\gamma} (\hat{E}_{01} \rho_{e0} \psi^L)' - \gamma H_0^2 s \psi^L, \quad L_{46}(\chi_3^L) = -\gamma H_0 \chi_3^L.$$

Если \hat{E}_{10} зависит от x , то уравнения (2.3.5) и (2.3.6) имеют переменные коэффициенты. Поэтому далее положим $\hat{E}_{10} = \text{const}$, что в силу (2.3.27) приводит к равенству $\rho_{e0} \equiv 0$. При этом операторы (2.4.12) и (2.4.13) упрощаются:

$$L_{11}(u^L) = -H_0^2 s \gamma u^L, \quad L_{12}(\psi_3^L) = 0, \quad L_{13}(w^L) = \frac{\hat{E}_{01} H_0 \gamma s}{s + \gamma} \frac{\partial w^L}{\partial x},$$

$$L_{14}(\psi^L) = -\frac{\hat{E}_{01} H_0 \gamma s}{s + \gamma} \psi^L, \quad L_{15}(e_3^L) = -\gamma H_0 e_3^L, \quad L_{17}(\varphi^L) = 0, \quad (2.4.14)$$

$$L_{22}(\psi_3^L) = \frac{\gamma s H_0}{s + \gamma} \left(E_{03} \frac{\partial \psi_3^L}{\partial x} - H_0 s \psi_3^L \right), \quad L_{24}(\psi^L) = 0, \quad L_{26}(\chi_3^L) = 0;$$

$$L_{31}(u^L) = 0, \quad L_{32}(\psi_3^L) = 0, \quad L_{33}(w^L) = \frac{\gamma s H_0}{s + \gamma} \left(E_{30} \frac{\partial w^L}{\partial x} - s H_0 w^L \right),$$

$$L_{34}(\psi^L) = -\frac{\gamma s E_{30} H_0}{s + \gamma} \psi^L, \quad L_{35}(e_3^L) = 0, \quad L_{37}(\varphi^L) = -\frac{H_0 \gamma \eta_e^{-2}}{s + \gamma} \varphi^L, \quad (2.4.15)$$

$$L_{42}(\psi_3^L) = \frac{H_0 \hat{E}_{01} \gamma s}{s + \gamma} \frac{\partial \psi_3^L}{\partial x}, \quad L_{44}(\psi^L) = -\gamma H_0^2 s \psi^L, \quad L_{46}(\chi_3^L) = -\gamma H_0 \chi_3^L.$$

Однако и в таком варианте начального поля за счет операторов L_{13} , L_{14} и L_{42} продольные и поперечные движения стержня будут связаны между собой. Поэтому далее ограничимся рассмотрением такого случая:

$$\hat{E}_{10} \equiv 0. \quad (2.4.16)$$

Тогда из (2.3.17) и (2.3.18) получаем, что продольные и поперечные движения стержня описываются следующими независимыми системами уравнений:

$$s^2 u^L = \frac{\partial^2 u^L}{\partial x^2} + \zeta \frac{\partial \psi_3^L}{\partial x} + \alpha [L_{11}(u^L) + L_{15}(e_3^L)] + q_{*1}^L, \quad (2.4.17)$$

$$s^2 \psi_3^L = \eta^{-2} \frac{\partial^2 \psi_3^L}{\partial x^2} - r^{-2} \left(\zeta \frac{\partial u^L}{\partial x} + \psi_3^L \right) + \alpha L_{22}(\psi_3^L) + m_*^L;$$

$$s^2 w^L = \eta^{-2} \left(\frac{\partial \psi^L}{\partial x} + \frac{\partial^2 w^L}{\partial x^2} \right) + \alpha [L_{33}(w^L) + L_{34}(\psi^L) + L_{37}(\varphi^L)] + q_*^L, \quad (2.4.18)$$

$$s^2 \psi^L = \frac{\partial^2 \psi^L}{\partial x^2} - \eta^{-2} r^{-2} \left(\psi^L + \frac{\partial w^L}{\partial x} \right) + \alpha [L_{44}(\psi^L) + L_{46}(\chi_3^L)] + m_{*1}^L.$$

Замыкают первую из этих систем полученные из (2.4.8) уравнения:

$$\frac{\partial h^L}{\partial x} = \eta_e^2 [(s + \gamma) e_3^L + \gamma s H_0 u^L], \quad \frac{\partial e_3^L}{\partial x} = s h^L + \frac{\gamma s}{s + \gamma} H_0 \psi_3^L, \quad (2.4.19)$$

а вторую – следующие из (2.4.9) равенства

$$\frac{\partial \varphi^L}{\partial x} = \eta_e^2 [(s + \gamma)\chi_3^L + \gamma s H_0 \psi^L], \quad \frac{\partial \chi_3^L}{\partial x} = s\varphi^L. \quad (2.4.20)$$

ГЛАВА 3. НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ПРОДОЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТОУПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ

3.1. Продольные колебания бесконечного электромагнитоупругого стержня

Этот процесс описывается системой уравнений (2.4.17) и (2.4.19), где операторы L_{11} , L_{15} и L_{22} определяются равенствами в (2.4.14). В силу линейности задачи можно положить, что продольные колебания отсутствуют:

$$q_* = m_{*1} = 0, w = \psi = 0, \varphi = \chi_3 = 0. \quad (3.1.1)$$

При этом уравнения (2.4.18) и (2.4.20) удовлетворяются тождественно, а для функций в (2.4.6), (2.4.7) и (2.4.10) имеют место равенства

$$e_1^L = y_1^L = v_3^L = r_e^L = 0, \quad \chi_1^L = \frac{\gamma s}{s + \gamma} H_0 \Psi_3^L, y_3^L = e_3^L + s H_0 u^L, v_1^L = -\frac{s^2}{s + \gamma} H_0 \Psi_3^L, \lambda_e^L = H_0 \frac{\gamma s}{s + \gamma} \frac{\partial \Psi_3^L}{\partial x}. \quad (3.1.2)$$

Для решения применяем к системе уравнений (2.4.17) и (2.4.19) преобразование Фурье по координате x (дополнительный верхний индекс « F » указывает на изображение; q - соответствующий параметр) [41]:

$$\begin{aligned} (k_1^2 + \alpha \gamma H_0^2 s) u^{FL} + i q \zeta \Psi_3^{FL} + \alpha \gamma H_0 e_3^{FL} &= q_*^{FL}, \\ \left[(k_2^2 + \eta^2 r^{-2})(s + \gamma) + \alpha \eta^2 H_0 \gamma s (i q E_{03} + H_0 s) \right] \Psi_3^{FL} - i q \zeta \eta^2 r^{-2} (s + \gamma) u^{FL} &= \\ &= \eta^2 (s + \gamma) m_*^L, \\ k_1(q^2, s^2) = \sqrt{q^2 + s^2}, k_2 = k_1(q^2, \eta^2 s^2) = \sqrt{q^2 + \eta^2 s^2}, s_e = \sqrt{s(s + \gamma)}, \operatorname{Re} \sqrt{\cdot} > 0; \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

$$\begin{aligned} \eta_e^2 \gamma s H_0 u^{FL} + \eta_e^2 (s + \gamma) e_3^{FL} + i q h^{FL} &= 0, \\ \gamma s H_0 \Psi_3^{FL} + i q (s + \gamma) e_3^{FL} + s_e^2 h^{FL} &= 0. \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

Из этой системы уравнений исключаем e_3^{FL} и h^{FL} :

$$\begin{aligned} e_3^{FL} = -\gamma s H_0 \frac{\eta_e^2 s_e^2 u^{FL} - i q \Psi_3^{FL}}{(s + \gamma) k_e^2}, h^{FL} = -\eta_e^2 \gamma s H_0 \frac{\Psi_3^{FL} - i q u^{FL}}{k_e^2}, \quad ; \quad (3.1.5) \\ k_e(q^2, s) = k_1(q^2, \eta_e^2 s_e^2) = \sqrt{q^2 + \eta_e^2 s_e^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{11}(q, s)u^{FL} + a_{12}(q, s)\psi_3^{FL} &= (s + \gamma)k_e^2 q_{*1}^{FL}, \\ a_{21}(q, s)u^{FL} + a_{22}(q, s)\psi_3^{FL} &= \eta^2 (s + \gamma)m_*^{FL}, \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

где

$$\begin{aligned} a_{11}(q, s) &= (s + \gamma) \left[k_1^2 k_e^2 + \alpha \gamma s H_0^2 (q^2 + \eta^2 s^2) \right], \\ a_{12}(q, s) &= iq \left[\zeta (s + \gamma) k_e^2 + \alpha \gamma^2 H_0^2 s \right], \quad a_{21}(q, s) = -ir^{-2} \zeta \eta^2 (s + \gamma) q, \\ a_{22}(q, s) &= (s + \gamma) (k_2^2 + \eta^2 r^{-2}) + \alpha \eta^2 H_0 \gamma s (iqE_{03} + H_0 s). \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

Решение системы (3.1.6) записывается так:

$$\begin{aligned} u^{FL} &= G_{uq}^{FL}(q, s)q_{*1}^{FL} + G_{um}^{FL}(q, s)m_*^{FL}, \\ \psi_3^{FL} &= G_{\psi_3q}^{FL}(q, s)q_{*1}^{FL} + G_{\psi_3m}^{FL}(q, s)m_*^{FL}; \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

где

$$\begin{aligned} G_{uq}^{FL}(q, s) &= \frac{(s + \gamma)k_e^2 a_{22}(q, s)}{D(q, s)}, \quad G_{um}^{FL}(q, s) = -\frac{\eta^2 (s + \gamma)a_{12}(q, s)}{D(q, s)}, \\ G_{\psi_3q}^{FL}(q, s) &= -\frac{(s + \gamma)k_e^2 a_{21}(q, s)}{D(q, s)}, \quad G_{\psi_3m}^{FL}(q, s) = \frac{\eta^2 (s + \gamma)a_{11}(q, s)}{D(q, s)}, \\ D(q, s) &= a_{11}(q, s)a_{22}(q, s) - a_{12}(q, s)a_{21}(q, s). \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

Поставляя u^{FL} и ψ_3^{FL} из (3.1.8) в (3.1.5), находим e_3^{FL} и h^{FL} :

$$\begin{aligned} e_3^{FL} &= G_{e_3q}^{FL}(q, s)q_{*1}^{FL} + G_{e_3m}^{FL}(q, s)m_*^{FL}, \\ h^{FL} &= G_{hq}^{FL}(q, s)q_{*1}^{FL} + G_{hm}^{FL}(q, s)m_*^{FL}, \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

где

$$\begin{aligned} G_{e_3q}^{FL}(q, s) &= -\frac{\gamma s H_0}{D(q, s)} \left[\eta_e^2 s_e^2 a_{22}(q, s) + iq a_{21}(q, s) \right], \\ G_{e_3m}^{FL}(q, s) &= \frac{\eta_e^2 \gamma s_e^2 H_0}{D(q, s)} \left[a_{21}(q, s) + iq a_{22}(q, s) \right]; \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

$$\begin{aligned} G_{hq}^{FL}(q, s) &= \frac{\eta^2 \gamma s H_0}{k_e^2 D(q, s)} \left[\eta_e^2 s_e^2 a_{12}(q, s) + iq a_{11}(q, s) \right], \\ G_{hm}^{FL}(q, s) &= -\frac{\eta^2 \eta_e^2 \gamma s_e^2 H_0}{k_e^2 D(q, s)} \left[a_{11}(q, s) + iq a_{12}(q, s) \right]. \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

Теперь из (3.1.2) с использованием (3.1.8) - (3.1.12) находим χ_1^{FL} , y_3^{FL} , ν_1^{FL} и

λ_e^{FL} :

$$\begin{aligned} \chi_1^{FL} &= G_{\chi_1 q}^{FL}(q, s)q_{*1}^{FL} + G_{\chi_1 m}^{FL}(q, s)m_{*1}^{FL}, \quad y_3^{FL} = G_{y_3 q}^{FL}(q, s)q_{*1}^{FL} + G_{y_3 m}^{FL}(q, s)m_{*1}^{FL}, \\ \upsilon_1^{FL} &= G_{\upsilon_1 q}^{FL}(q, s)q_{*1}^{FL} + G_{\upsilon_1 m}^{FL}(q, s)m_{*1}^{FL}, \quad \lambda_e^{FL} = G_{\lambda_e q}^{FL}(q, s)q_{*1}^{FL} + G_{\lambda_e m}^{FL}(q, s)m_{*1}^{FL}, \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

где

$$\begin{aligned} G_{\chi_1 q}^{FL}(q, s) &= -\frac{\gamma H_0 s k_e^2 a_{21}(q, s)}{D(q, s)}, \quad G_{\chi_1 m}^{FL}(q, s) = \frac{\eta^2 \gamma s H_0 a_{11}(q, s)}{D(q, s)}, \\ G_{\upsilon_1 q}^{FL}(q, s) &= \frac{H_0 s^2 k_e^2 a_{21}(q, s)}{D(q, s)}, \quad G_{\upsilon_1 m}^{FL}(q, s) = -H_0 \frac{\eta^2 s^2 a_{11}(q, s)}{D(q, s)}, \\ G_{\lambda_e q}^{FL}(q, s) &= \frac{i H_0 q \gamma s k_e^2 a_{21}(q, s)}{D(q, s)}, \quad G_{\lambda_e m}^{FL}(q, s) = -\frac{i H_0 q \gamma s \eta^2 a_{11}(q, s)}{D(q, s)}, \end{aligned} \quad (3.1.14)$$

$$\begin{aligned} G_{y_3 q}^{FL}(q, s) &= \frac{s H_0}{D(q, s)} \left[(s + \gamma)(q^2 + s^2 \eta_e^2) a_{22}(q, s) - \gamma i q a_{21}(q, s) \right], \\ G_{y_3 m}^{FL}(q, s) &= \frac{s H_0 \eta^2}{k_e^2 D(q, s)} \left[\gamma i q a_{11}(q, s) - (s + \gamma)(q^2 + s^2 \eta_e^2) a_{12}(q, s) \right]. \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

Попытка последовательного обращения преобразований не дает удовлетворительных результатов. Поэтому далее учитываем, что, как следует из (2.3.5), (2.3.6) и (2.3.9), при $\alpha = 0$ перемещения не зависят от электромагнитного поля, и применяем метод малого параметра, в качестве которого используем α . С этой целью формулы (3.1.7) и функцию $D(q, s)$ записываем так:

$$\begin{aligned} a_{ij}(q, s) &= a_{ij0}(q, s) + \alpha a_{ij1}(q, s), \\ D(q, s) &= D_0(q, s) + \alpha D_1(q, s) + \alpha^2 D_2(q, s) \end{aligned} \quad (3.1.16)$$

где

$$\begin{aligned} a_{110}(q, s) &= (s + \gamma) k_1^2 k_e^2, \quad a_{111}(q, s) = (s + \gamma) \gamma s H_0^2 (q^2 + \eta_e^2 s^2), \\ a_{120}(q, s) &= i q \zeta (s + \gamma) k_e^2, \quad a_{121}(q, s) = i q s \gamma^2 H_0^2, \\ a_{210}(q, s) &= -i r^{-2} \zeta \eta^2 (s + \gamma) q, \quad a_{211}(q, s) = 0, \\ a_{220}(q, s) &= (s + \gamma) (k_2^2 + \eta^2 r^{-2}), \quad a_{221}(q, s) = \eta^2 H_0 \gamma s (i q E_{03} + H_0 s); \end{aligned} \quad (3.1.17)$$

$$\begin{aligned}
D_0(q, s) &= a_{110}(q, s)a_{220}(q, s) - a_{120}(q, s)a_{210}(q, s), \\
D_1(q, s) &= a_{110}(q, s)a_{221}(q, s) + a_{111}(q, s)a_{220}(q, s) - a_{121}(q, s)a_{210}(q, s), \\
D_2(q, s) &= a_{111}(q, s)a_{221}(q, s).
\end{aligned} \tag{3.1.18}$$

Далее строим разложение входящей в изображения всех функций влияния функции:

$$D^{-1}(q, s) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(q, s)\alpha^n. \tag{3.1.19}$$

Отсюда с учетом (3.1.16) следует равенство

$$1 = D_0 d_0 + (D_0 d_1 + D_1 d_0)\alpha + \sum_{n=2}^{\infty} (D_0 d_n + D_1 d_{n-1} + D_2 d_{n-2})\alpha^n. \tag{3.1.20}$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях, получаем

$$d_0(q, s) = \frac{1}{D_0(q, s)}, \quad d_1(q, s) = -\frac{D_1(q, s)}{D_0(q, s)}d_0(q, s) = -\frac{D_1(q, s)}{D_0^2(q, s)}; \tag{3.1.21}$$

$$d_n(q, s) = -\frac{D_1(q, s)}{D_0(q, s)}d_{n-1}(q, s) - \frac{D_2(q, s)}{D_0(q, s)}d_{n-2}(q, s) \quad (n \geq 2). \tag{3.1.22}$$

Рекуррентная последовательность (3.1.22) с начальными условиями (3.1.21) позволяет найти все коэффициенты ряда (3.1.19).

Далее сначала ограничимся только линейным приближением, которое для $D^{-1}(q, s)$ с учетом (3.1.21), (3.1.17) и (3.1.18) имеет вид:

$$D^{-1}(q, s) = d_0(q, s) + d_1(q, s)\alpha = \frac{1}{D_0(q, s)} - \frac{D_1(q, s)}{D_0^2(q, s)}\alpha, \tag{3.1.23}$$

где

$$\begin{aligned}
D_0(q, s) &= (s + \gamma)^2 k_e^2(q, s)Q(q^2, s^2), \quad D_1 = (s + \gamma)H_0^2 \gamma s P(q, s), \\
Q(q^2, s^2) &= k_1^2(k_2^2 + \eta^2 r^{-2}) - q^2 \eta^2 \zeta^2 r^{-2} = \eta^2 s^4 + b_1(q^2)s^2 + b_2(q^2), \\
b_1(q^2) &= (\eta^2 + 1)q^2 + \eta^2 r^{-2}, \quad b_2(q^2) = q^2 [q^2 + \eta^2 r^{-2}(1 - \zeta^2)], \\
P(q, s) &= k_1^2 k_e^2 \eta^2 (iqE_{03} + H_0 s) + (q^2 + \eta_e^2 s^2)(s + \gamma)(k_2^2 + \eta^2 r^{-2}) - \gamma r^{-2} \zeta \eta^2 q^2.
\end{aligned}$$

Соответственно записываем изображения всех функций влияния:

$$G_{ab}^{FL}(q, s) = G_{ab0}^{FL}(q, s) + G_{ab1}^{FL}(q, s)\alpha. \tag{3.1.24}$$

Возможность аналитического определения оригиналов коэффициентов в этом равенстве апробируем на функции G_{uq}^{FL} , для которой согласно (3.1.9), (3.1.16), (3.1.17) и (3.1.23) имеют место равенства:

$$\begin{aligned}
G_{uq0}^{FL}(q, s) &= \frac{(s + \gamma)k_e^2 a_{220}(q, s)}{D_0(q, s)} = \frac{k_2^2 + \eta^2 r^{-2}}{Q(q^2, s^2)}, \\
G_{uq1}^{FL}(q, s) &= (s + \gamma)k_e^2 (a_{220}d_1 + a_{221}d_0) = \frac{H_0^2 \gamma s P_{uq1}(q, s)}{(s + \gamma)k_e^2 Q^2(q^2, s^2)}, \\
P_{uq1}(q, s) &= \eta^2 (iqE_{03} + H_0 s)k_e^2 Q(q^2, s^2) - (k_2^2 + \eta^2 r^{-2})P(q, s) = \quad (3.1.25) \\
&= \left[\gamma(k_2^2 + \eta^2 r^{-2}) - \eta^2 (iqE_{03} + H_0 s)k_e^2 \zeta \right] \zeta \eta^2 q^2 r^{-2} - \\
&\quad - (q^2 + \eta_e^2 s^2)(s + \gamma)(k_2^2 + \eta^2 r^{-2})^2.
\end{aligned}$$

Для коэффициентов многочлена $Q(q^2, s^2)$ как функции аргумента s^2 и его дискриминанта имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
b_1(q^2) &> 0, \quad b_2(q^2) > 0, \quad \Delta(q^2) = b_1^2(q^2) - 4\eta^2 b_2(q^2) = \\
&= (\eta^2 - 1)^2 q^4 + 2\eta^2 r^{-2} (1 - \eta^2 + 2\eta^2 \zeta^2) q^2 + \eta^4 r^{-4} > 0. \\
Q(q^2, s^2) &= k_1^2 (k_2^2 + \eta^2 r^{-2}) - q^2 \eta^2 \zeta^2 r^{-2} = \eta^2 s^4 + b_1(q^2) s^2 + b_2(q^2), \\
b_1(q^2) &= (\eta^2 + 1)q^2 + \eta^2 r^{-2}, \quad b_2(q^2) = q^2 \left[q^2 + \eta^2 r^{-2} (1 - \zeta^2) \right].
\end{aligned} \quad (3.1.26)$$

Последнее неравенство вытекает из того, что дискриминант многочлена $\Delta(q^2)$ равен $-4\eta^6 \zeta^3 r^{-4}$, и, следовательно, он отрицательный.

Таким образом, нули многочлена определяются следующим образом:

$$s_{1,2}^2 = -\alpha_{1,2}^2(q^2), \quad \alpha_1^2 = \frac{b_1(q^2) + \sqrt{\Delta(q^2)}}{2\eta^2} > \alpha_2^2 = \frac{b_1(q^2) - \sqrt{\Delta(q^2)}}{2\eta^2} > 0. \quad (3.1.27)$$

Записывая теперь изображение $G_{uq0}^{FL}(q, s)$ в виде

$$G_{uq0}^{FL}(q, s) = \frac{\eta^2 s^2 + q^2 + \eta^2 r^{-2}}{\eta^2 (s^2 + \alpha_1^2)(s^2 + \alpha_2^2)},$$

обращаем преобразование Лапласа [78]:

$$G_{uq0}^F(q, \tau) = \frac{1}{\sqrt{\Delta(q^2)}} \sum_{k=1}^2 (-1)^{k-1} \frac{\eta^2 \alpha_k^2(q^2) - q^2 - \eta^2 r^{-2}}{\alpha_k(q^2)} \sin \alpha_k(q^2) \tau, \quad (3.1.28)$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{1}{\eta\sqrt{2}} \sqrt{b_1(q^2) \pm \sqrt{\Delta(q^2)}}.$$

Оригинал преобразования Фурье записываем в виде интеграла:

$$G_{uq0}(x, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{uq0}^F(q, \tau) e^{-iqx} dq = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} G_{uq0}^F(q, \tau) \cos qx dq. \quad (3.1.29)$$

Попытки его вычисления не дают удовлетворительного результата из-за наличия быстро осциллирующих функций.

Поэтому далее рассматриваем упрощенные модели стержня.

Первая из них является квазистатическим приближением для возмущенного электромагнитного поля [33], при котором полагается

$$\eta_e^2 = 0. \quad (3.1.30)$$

Это согласно (3.1.5), (3.1.7), (3.1.9), (3.1.17), (3.1.23) и (3.1.25) приводит к следующим упрощениям:

$$k_e^2 = q^2, \quad a_{11}(q, s) = (s + \gamma)q^2(k_1^2 + \alpha\gamma s H_0^2),$$

$$a_{12}(q, s) = iq[\zeta(s + \gamma)q^2 + \alpha\gamma^2 H_0^2 s],$$

$$D(q, s) = q^2(s + \gamma)D_c(q, s), \quad (3.1.31)$$

$$D_c(q, s) = (k_1^2 + \alpha\gamma s H_0^2) \left[(s + \gamma)(k_2^2 + \eta^2 r^{-2}) + \alpha\eta^2 H_0 \gamma s (iqE_{03} + H_0 s) \right] -$$

$$-r^{-2} \zeta \eta^2 [\zeta(s + \gamma)q^2 + \alpha\gamma^2 H_0^2 s].$$

$$G_{uq}^{FL}(q, s) = \frac{a_{22}(q, s)}{D_c(q, s)}, \quad G_{um}^{FL}(q, s) = -\frac{i\eta^2 [\zeta(s + \gamma)q^2 + \alpha\gamma^2 H_0^2 s]}{qD_c(q, s)}, \quad (3.1.32)$$

$$G_{\Psi_3 q}^{FL}(q, s) = -\frac{a_{21}(q, s)}{D_c(q, s)}, \quad G_{\Psi_3 m}^{FL}(q, s) = \frac{\eta^2 (s + \gamma)(k_1^2 + \alpha\gamma s H_0^2)}{D_c(q, s)}.$$

$$a_{110}(q, s) = (s + \gamma)q^2 k_1^2, \quad a_{111}(q, s) = (s + \gamma)q^2 \gamma s H_0^2, \quad a_{120}(q, s) = iq\zeta(s + \gamma)q^2. \quad (3.1.33)$$

$$D_0(q, s) = (s + \gamma)^2 q^2 Q(q^2, s^2), D_1 = (s + \gamma) H_0^2 \gamma s q^2 P_c(q, s),$$

$$P(q, s) = q^2 P_c(q, s), \quad (3.1.34)$$

$$P_c(q, s) = k_1^2 \eta^2 (iqE_{03} + H_0 s) + (s + \gamma)(k_2^2 + \eta^2 r^{-2}) - \gamma r^{-2} \zeta \eta^2$$

$$G_{uq1}^{FL}(q, s) = \frac{H_0^2 \gamma s P_{uqc}(q, s)}{(s + \gamma) Q^2(q^2, s^2)}, P_{uq1}(q, s) = q^2 P_{uqc}(q, s),$$

$$P_{uqc}(q, s) = \left[\gamma (k_2^2 + \eta^2 r^{-2}) - \eta^2 (iqE_{03} + H_0 s) q^2 \zeta \right] \zeta \eta^2 r^{-2} - \quad (3.1.35)$$

$$-(s + \gamma)(k_2^2 + \eta^2 r^{-2})^2.$$

Сравнение равенств (3.1.31) - (3.1.35) с их предыдущими аналогами показывает, что все отмеченные выше трудности обращения преобразований остаются в силе.

3.2. Продольные колебания бесконечного электромагнитоупругого стержня без учета обжатия

Второй упрощенной моделью является пренебрежение обжатием, что соответствует равенству

$$\psi_3 = 0. \quad (3.2.1)$$

При этом в системах (2.3.17), (2.4.17) и (3.1.3) остается только по одному уравнению. Однако чтобы не повторять все выкладки, используем (3.2.1) в равенствах (3.1.8):

$$m_*^{FL} = -\frac{G_{\psi_3 q}^{FL}(q, s)}{G_{\psi_3 m}^{FL}(q, s)} q_{*1}^{FL} = \frac{k_e^2 a_{21}(q, s)}{\eta^2 a_{11}(q, s)} q_{*1}^{FL}, \quad (3.2.2)$$

$$u^{FL} = \Gamma_{uq}^{FL}(q, s) q_{*1}^{FL}, \Gamma_{uq}^{FL}(q, s) = G_{uq}^{FL}(q, s) + \frac{k_e^2 a_{21}(q, s)}{\eta^2 a_{11}(q, s)} G_{um}^{FL}(q, s).$$

Отсюда с учетом (3.1.7) и (3.1.9) получаем следующее равенство для $\Gamma_{uq}^{FL}(q, s)$:

$$\Gamma_{uq}^{FL}(q, s) = k_e^2 Z^{FL}(q, s), Z^{FL}(q, s) = \frac{1}{k_1^2 k_e^2 + \alpha \gamma s H_0^2 (q^2 + \eta^2 s^2)}. \quad (3.2.3)$$

Далее аналогично находим функции $e_3^{FL}, h^{FL}, \chi_1^{FL}, y_3^{FL}, v_1^{FL}, \lambda_e^{FL}$ в (3.1.10) и (3.1.13)

$$\begin{aligned}
e_3^{FL} &= \Gamma_{e_3q}^{FL}(q, s) q_{*1}^{FL}, \Gamma_{e_3q}^{FL}(q, s) = -\eta_e^2 \gamma H_0 s^2 Z^{FL}(q, s), \\
h^{FL} &= \Gamma_{hq}^{FL}(q, s) q_{*1}^{FL}, \Gamma_{hq}^{FL}(q, s) = \eta_e^2 \gamma H_0 i q s Z^{FL}(q, s), \chi_1^{FL} = \upsilon_1^{FL} = \lambda_e^{FL} = 0, \\
y_3^{FL} &= \Gamma_{y_3q}^{FL}(q, s) q_{*1}^{FL}, \Gamma_{y_3q}^{FL}(q, s) = s H_0 (q^2 + \eta_e^2 s^2) Z^{FL}(q, s).
\end{aligned} \tag{3.2.4}$$

Для определения оригиналов используем метод малого параметра:

$$Z^{FL}(q, s) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \gamma^n H_0^{2n} Z_n^{FL}(q, s) \alpha^n, Z_n^{FL}(q, s) = \frac{s^n (q^2 + \eta_e^2 s^2)^n}{k_1^{2(n+1)} k_e^{2(n+1)}}. \tag{3.2.5}$$

Далее ограничимся линейным приближением, что соответствует следующим равенствам для изображений функций влияния в (3.2.2) и (3.2.4):

$$\Gamma_{aq}^{FL}(q, s) = \Gamma_{aq0}^{FL}(q, s) + \alpha \Gamma_{aq1}^{FL}(q, s) \quad (a = u, e_3, h, y_3), \tag{3.2.6}$$

где

$$\begin{aligned}
\Gamma_{uqn}^{FL}(q, s) &= (-1)^n \gamma^n H_0^{2n} Y_{un}^{FL}(q, s), Y_{un}^{FL}(q, s) = k_e^2 Z_n^{FL}(q, s), \\
\Gamma_{e_3qn}^{FL}(q, s) &= (-1)^{n+1} \gamma^{n+1} H_0^{2n+1} \eta_e^2 Y_{e_3n}^{FL}(q, s), Y_{e_3n}^{FL}(q, s) = s^2 Z_n^{FL}(q, s), \\
\Gamma_{hqn}^{FL}(q, s) &= (-1)^n \gamma^{n+1} H_0^{2n+1} \eta_e^2 Y_{hn}^{FL}(q, s), Y_{hn}^{FL}(q, s) = i q s Z_n^{FL}(q, s), \\
\Gamma_{y_3qn}^{FL}(q, s) &= (-1)^n \gamma^n H_0^{2n+1} Y_{y_3n}^{FL}(q, s), Y_{y_3n}^{FL}(q, s) = s (q^2 + \eta_e^2 s^2) Z_n^{FL}(q, s).
\end{aligned} \tag{3.2.7}$$

Функции влияния согласно (3.2.6) и (3.2.7) вычисляются так:

$$\Gamma_{aq}(x, \tau) = \Gamma_{aq0}(x, \tau) + \alpha \Gamma_{aq1}(x, \tau) \quad (a = u, e_3, h, y_3), \tag{3.2.8}$$

где

$$\begin{aligned}
\Gamma_{uqn}(x, \tau) &= (-1)^n \gamma^n H_0^{2n} Y_{un}(x, \tau), \Gamma_{y_3qn}(x, \tau) = (-1)^n \gamma^n H_0^{2n+1} Y_{y_3n}(x, \tau), \\
\Gamma_{e_3qn}(x, \tau) &= (-1)^{n+1} \gamma^{n+1} H_0^{2n+1} \eta_e^2 Y_{e_3n}(x, \tau), \\
\Gamma_{hqn}(x, \tau) &= (-1)^n \gamma^{n+1} H_0^{2n+1} \eta_e^2 Y_{hn}(x, \tau).
\end{aligned} \tag{3.2.9}$$

С использованием этих функций перемещение и нетривиальные компоненты электромагнитного поля определяются с помощью оригиналов формул (3.2.2) и (3.2.4):

$$\begin{aligned}
u(x, \tau) &= \sum_{n=0}^1 (-1)^n \gamma^n H_0^{2n} \alpha^n Y_{un}(x, \tau) ** q_{*1}(x, \tau), \\
e_3(x, \tau) &= -\eta_e^2 \gamma H_0 \sum_{n=0}^1 (-1)^n \gamma^n H_0^{2n} \alpha^n Y_{e_3n}(x, \tau) ** q_{*1}(x, \tau), \\
h(x, \tau) &= \gamma H \sum_{n=0}^1 (-1)^n \gamma^n H_0^{2n} \eta_e^2 \alpha^n Y_{hn}(x, \tau) ** q_{*1}(x, \tau), \\
y_3(x, \tau) &= \sum_{n=0}^1 (-1)^n \gamma^n H_0^{2n+1} \alpha^n Y_{y_3n} ** q_{*1}(x, \tau).
\end{aligned} \tag{3.2.10}$$

Оригиналы ядер этих сверток можно найти аналитически. Однако наличие в получаемых выражениях малой величины η_e^2 приводит к большим вычислительным сложностям при абсолютно незначительных поправках решений. Поэтому далее дополнительно принимаем гипотезу (3.1.30). При этом функции влияния в (3.2.3) и (3.2.4) существенно упрощаются:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{uq}^{FL}(q, s) &= \frac{1}{k_1^2 + \beta_0 s}, \quad \beta_0 = \alpha \gamma H_0^2, \\
\Gamma_{y_3q}^{FL}(q, s) &= s H_0 \Gamma_{uq}^{FL}(q, s), \quad \Gamma_{e_3q}^{FL}(q, s) = \Gamma_{hq}^{FL}(q, s) = 0.
\end{aligned} \tag{3.2.11}$$

Оригиналы этих функций можно найти без использования малого параметра. Для второй функции, очевидно, имеет место равенство:

$$\Gamma_{y_3q}(x, \tau) = H_0 \dot{\Gamma}_{uq}(x, \tau). \tag{3.2.12}$$

Оригинал первой из них находим последовательным обращением преобразований Фурье и Лапласа [41, 50]:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{uq}^L(x, s) &= \frac{1}{2\sqrt{s^2 + \beta_0 s}} e^{-|x|\sqrt{s^2 + \beta_0 s}}, \\
\Gamma_{uq}(x, \tau) &= \frac{1}{2} e^{-\beta_0 \tau/2} I_0 \left[\frac{\beta_0}{2} \sqrt{\tau^2 - x^2} \right] H(\tau - |x|).
\end{aligned} \tag{3.2.13}$$

Далее используем формулу (3.2.12):

$$\begin{aligned}
\Gamma_{y_3q}(x, \tau) &= \Gamma_{y_3qr}(x, \tau) + \frac{H_0}{2} e^{-\beta_0 |x|/2} \delta(\tau - |x|), \\
\Gamma_{y_3qr}(x, \tau) &= \frac{\beta_0 H_0}{4} e^{-\beta_0 \tau/2} \left[\frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 - x^2}} I_1 \left(\frac{\beta_0}{2} \sqrt{\tau^2 - x^2} \right) - I_0 \left(\frac{\beta_0}{2} \sqrt{\tau^2 - x^2} \right) \right].
\end{aligned} \tag{3.2.14}$$

При этом согласно (3.2.3) и (3.2.4) нетривиальные искомые функции определяются так:

$$u(x, \tau) = \Gamma_{uq}(x, \tau) ** q_{*1}(x, \tau), \quad y_3(x, \tau) = \Gamma_{y_3q}(x, \tau) ** q_{*1}(x, \tau). \quad (3.2.15)$$

3.3. Примеры расчетов продольных колебаний бесконечного электромагнитоупругого стержня

В качестве примера рассмотрим алюминиевый стержень, материал которого при $E_* = 100$ в/м характеризуется следующими величинами [33]:

$$\eta = 2,04; \quad \zeta = 0,519, \quad \eta_e = 0,111 \cdot 10^{-4}; \quad \gamma = 5,06; \quad \alpha = 0,0806. \quad (3.3.1)$$

При этом становится очевидным введение упрощения (3.1.30).

Полагаем, что стержень квадратного поперечного сечения имеет следующие геометрические параметры:

$$L = 1 \text{ м}; \quad h = 0,05 \text{ м}; \quad r^2 = \frac{h^2}{12L^2} = 0,208 \cdot 10^{-3}. \quad (3.3.2)$$

Полагаем также, что напряженность начального магнитного поля равна единице:

$$H_0 = 1. \quad (3.3.3)$$

На рис. 3.3.1 – 3.3.4 приведены полученные с помощью (3.2.13) и (3.2.14) зависимости функции $\Gamma_{uq}(x, \tau)$ и $\Gamma_{y_3qr}(x, \tau)$ от координаты и времени соответственно при различных значениях τ и x .

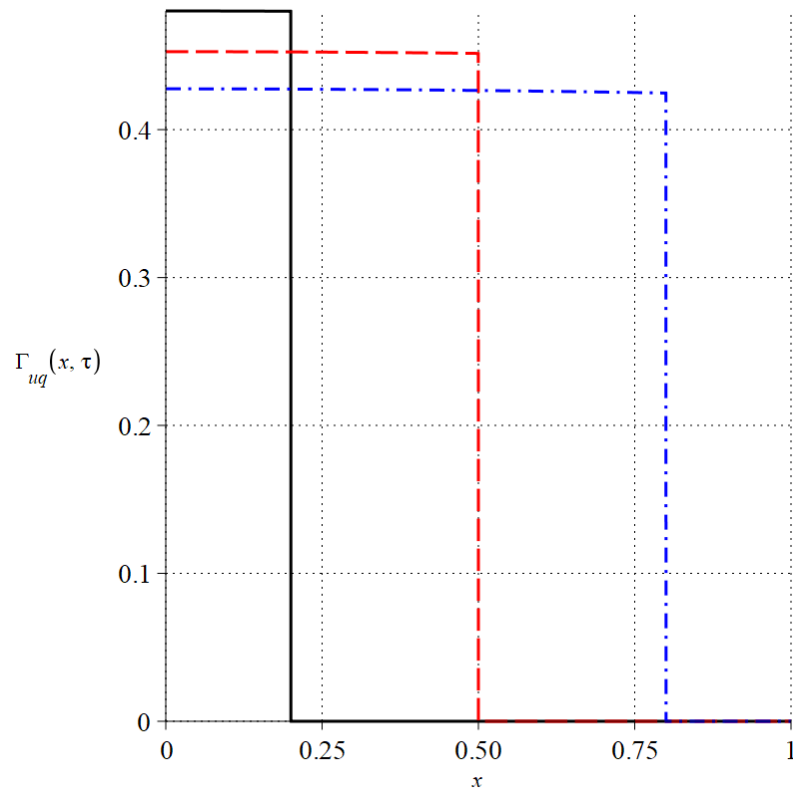


Рис. 3.3.1. Зависимости $\Gamma_{uq}(x, \tau)$ от x . Сплошная линия $\tau = 0.2$, пунктирная $\tau = 0.5$, штрихпунктирная $\tau = 0.8$.

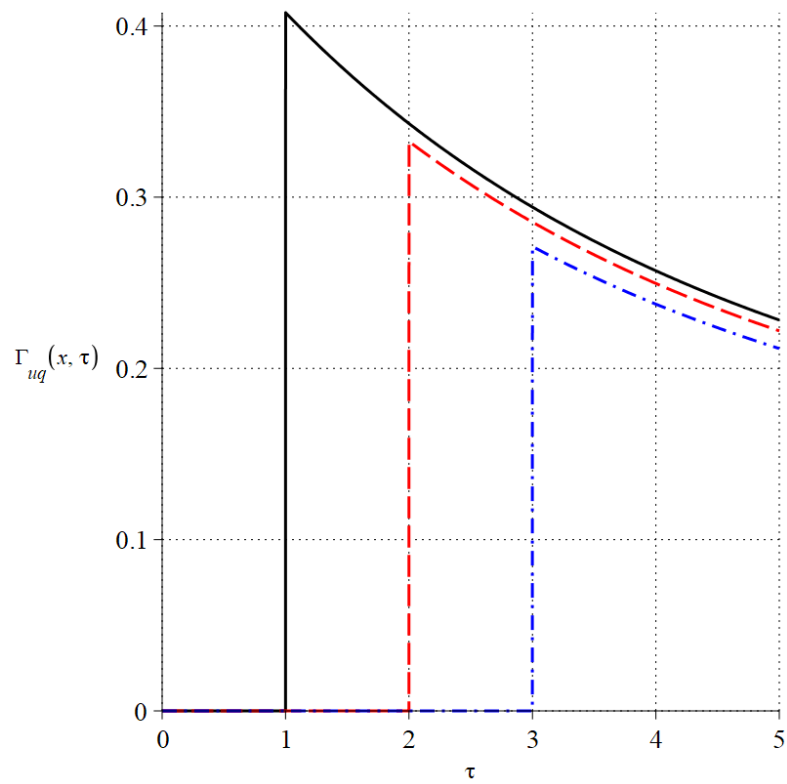


Рис. 3.3.2. Зависимости $\Gamma_{uq}(x, \tau)$ от τ . Сплошная линия $x = 1$, пунктирная $x = 2$, штрихпунктирная $x = 3$.

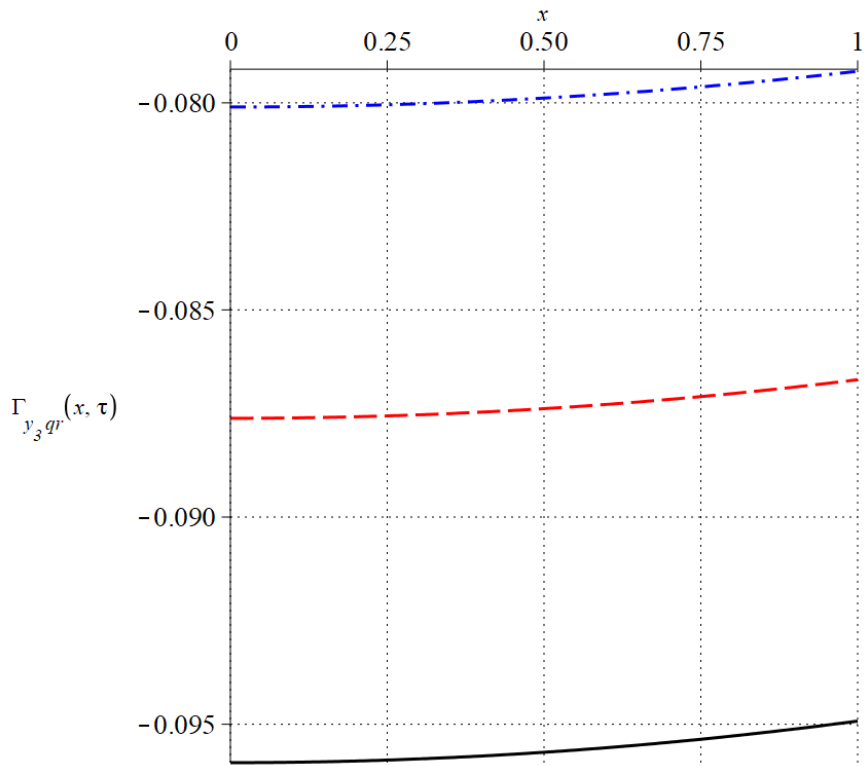


Рис. 3.3.3. Зависимости $\Gamma_{y_3qr}(x, \tau)$ от x . Сплошная линия $\tau = 0.2$, пунктирная $\tau = 0.5$, штрихпунктирная $\tau = 0.8$.

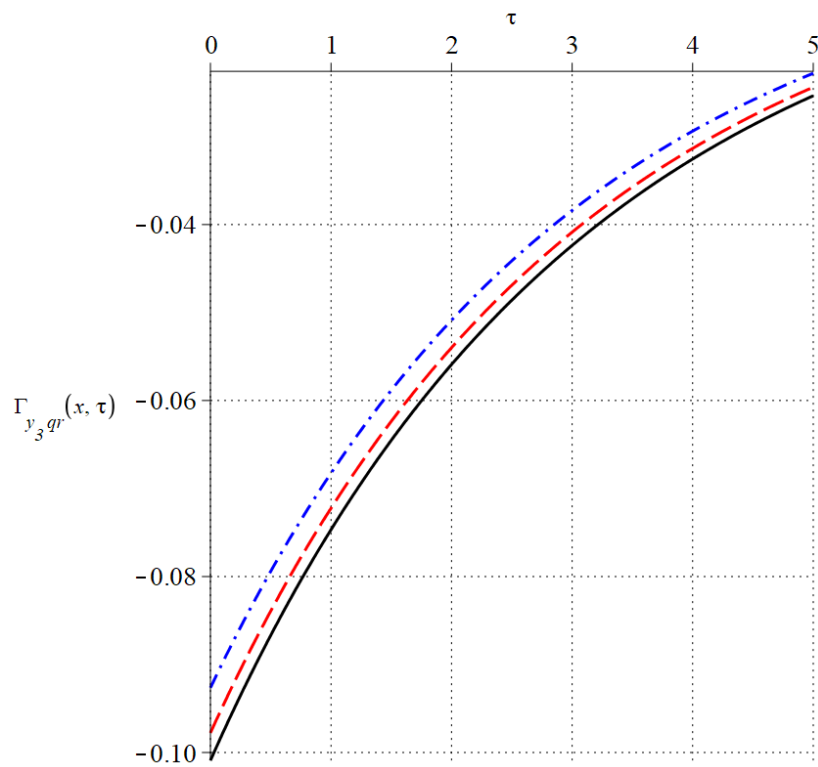


Рис. 3.3.4. Зависимости $\Gamma_{y_3qr}(x, \tau)$ от τ . Сплошная линия $x = 1$, пунктирная $x = 2$, штрихпунктирная $x = 3$.

В качестве примера действия нагрузки рассмотрим вариант сосредоточенной поперечной силы:

$$q_{*1}(x, \tau) = H(\tau)\delta(x). \quad (3.3.4)$$

При этом равенства (3.2.11) принимают следующий вид:

$$u(x, \tau) = \Gamma_{uq}(x, \tau) * H(\tau), \quad y_3(x, \tau) = \Gamma_{y_3q}(x, \tau) * H(\tau). \quad (3.3.5)$$

Второе равенство с помощью (3.2.12) и свойств свертки записывается так:

$$y_3(x, \tau) = H_0 \dot{\Gamma}_{uq}(x, \tau) * H(\tau) = H_0 \Gamma_{uq}(x, \tau) * \delta(\tau) = H_0 \Gamma_{uq}(x, \tau). \quad (3.3.6)$$

Первая свертка в (3.3.5) с учетом (3.2.13) представляется интегралом

$$u(x, \tau) = \int_0^\tau \Gamma_{uq}(x, t) dt = \frac{1}{2} H(\tau - |x|) \int_{|x|}^\tau e^{-\beta_0 t/2} I_0\left(\frac{\beta_0}{2} \sqrt{t^2 - x^2}\right) dt, \quad (3.3.7)$$

для которого используем численное интегрирование.

Результаты расчетов приведены на рис. 3.3.5. – 3.3.8:

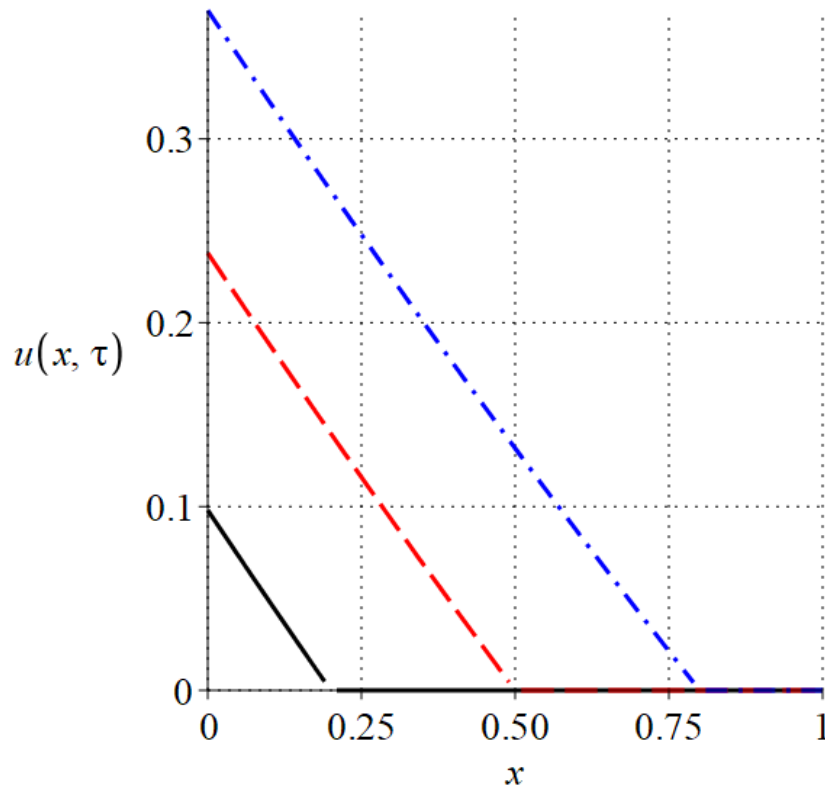


Рис. 3.3.5. Зависимости $u(x, \tau)$ от x . Сплошная линия $\tau = 0.2$, пунктирная $\tau = 0.5$ штрихпунктирная $\tau = 0.8$.

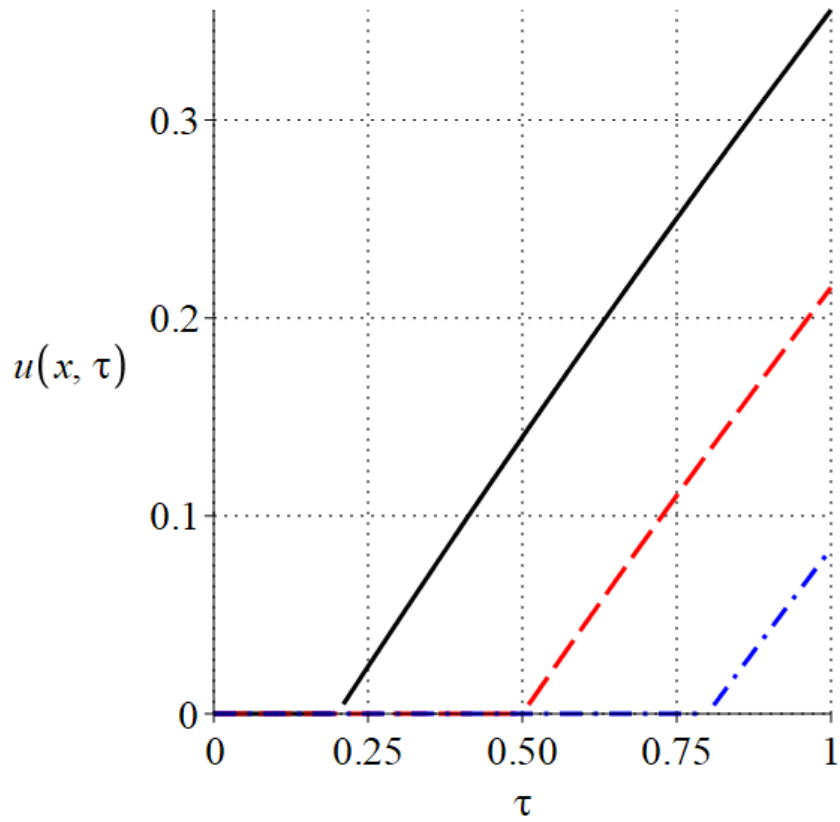


Рис. 3.3.6. Зависимости $u(x, \tau)$ от τ . Сплошная линия $x=0.2$, пунктирная $x=0.5$ штрихпунктирная $x=0.8$.

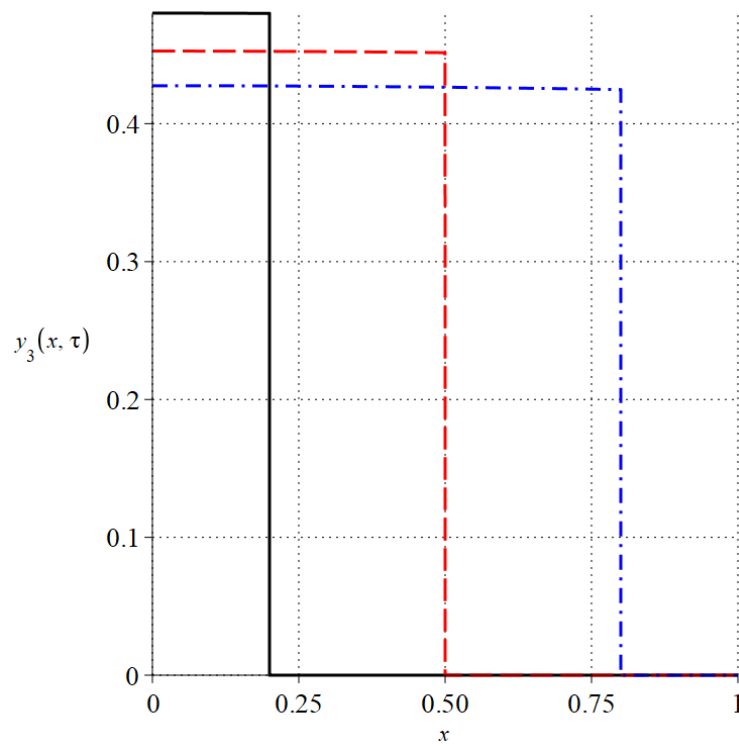


Рис. 3.3.7. Зависимости $y_3(x, \tau)$ от x . Сплошная линия $\tau=0.2$, пунктирная $\tau=0.5$ штрихпунктирная $\tau=0.8$.

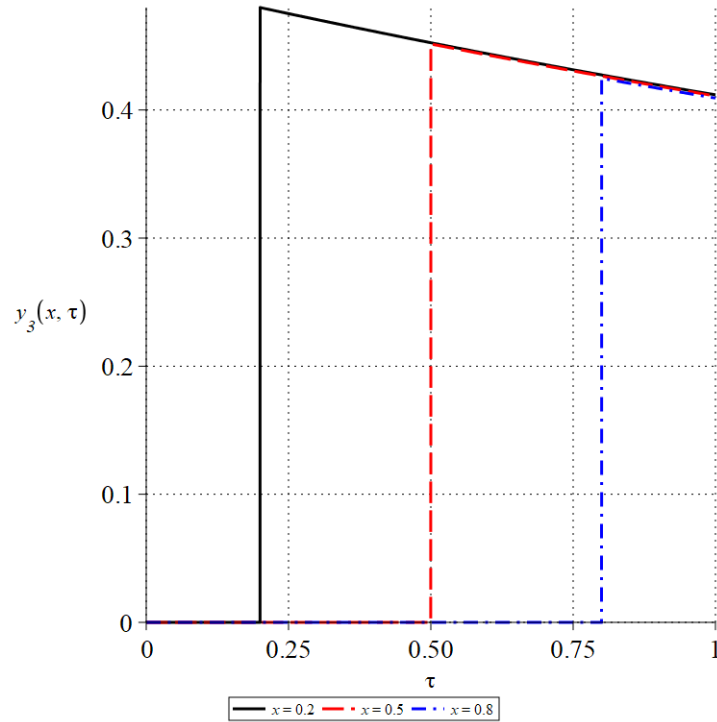


Рис. 3.3.8. Зависимости $y_3(x, \tau)$ от τ . Сплошная линия $x=0.2$, пунктирная $x=0.5$ штрихпунктирная $x=0.8$.

3.4. Продольные колебания конечного электромагнитоупругого стержня

Рассматриваем стержень единичной длины, закрепленный в сечениях с координатами $x=0$ и $x=1$:

$$u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0. \quad (3.4.1)$$

Учитывая указанные в параграфе 3.1 сложности решения задачи для бесконечного стержня при учете обжатия, в отличие от параграфа 3.2 здесь сразу примем, что выполняется равенство (3.2.1). Тогда процесс описывается вытекающими из (2.4.17) и (2.4.19) уравнениями

$$s^2 u^L = \frac{\partial^2 u^L}{\partial x^2} + \alpha \left[L_{11}(u^L) + L_{15}(e_3^L) \right] + q_{*1}^L, \quad (3.4.2)$$

$$\frac{\partial h^L}{\partial x} = \eta_e^2 \left[(s + \gamma) e_3^L + \gamma s H_0 u^L \right], \quad \frac{\partial e_3^L}{\partial x} = s h^L, \quad (3.4.3)$$

Операторы в первом уравнении в соответствии с (2.4.14) записываются так:

$$L_{11}(u^L) = -H_0^2 \gamma s u^L, L_{15}(e_3^L) = -\gamma H_0 e_3^L. \quad (3.4.4)$$

А в соответствии с (3.1.2) или (3.2.4) нетривиальным кроме величин h и e_3 остается только еще один параметр электромагнитного поля, изображение которого имеет вид:

$$y_3^L = e_3^L + sH_0 u^L. \quad (3.4.5)$$

Если применить к системе (3.4.2), (3.4.3) преобразование Фурье, то придем к формуле для изображения перемещений в (3.2.2), что подтверждает правомерность обоих подходов к построению упрощенной модели.

Для замыкания краевой задачи положим, что для величины e_3 выполняются следующие условия:

$$e_3|_{x=0} = 0, e_3|_{x=1} = 0. \quad (3.4.6)$$

Для решения этой задачи раскладываем искомые функции и внешнюю нагрузку в тригонометрические ряды Фурье:

$$u(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(\tau) \sin \lambda_n x, e_3(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} e_{3n}(\tau) \sin \lambda_n x, h(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n(\tau) \cos \lambda_n x, \quad (3.4.7)$$

$$y_3(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(\tau) \sin \lambda_n x, q_{*1}(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(\tau) \sin \lambda_n x, \lambda_n = \pi n.$$

При этом граничные условия (3.4.1) и (3.4.6) выполняются.

Подставляя ряды (3.4.7) в (3.4.2), (3.4.3) и (3.4.5), приходим к следующим равенствам:

$$k_{1n}^2 u_n^L + \alpha \gamma H_0 (sH_0 u_n^L + e_{3n}^L) = q_n^L, k_{1n}^2 = k_1^2 (\lambda_n^2, s^2); \quad (3.4.8)$$

$$-\lambda_n h_n^L = \eta_e^2 [(s + \gamma) e_{3n}^L + \gamma s H_0 u_n^L], \lambda_n e_{3n}^L = s h_n^L; \quad (3.4.9)$$

$$y_n^L = e_{3n}^L + sH_0 u_n^L. \quad (3.4.10)$$

Соотношения (3.4.8), (3.4.9) есть система линейных алгебраических уравнений. Ее решение записываем так:

$$\begin{aligned}
u_n^L &= \Lambda_{un}^L(s) q_n^L, e_{3n}^L = \Lambda_{en}^L(s) q_n^L, h_n^L = \Lambda_{hn}^L(s) q_n^L, \\
\Lambda_{un}^L(s) &= k_{en}^2 X_n^L(s), \Lambda_{en}^L(s) = -\gamma H_0 \eta_e^2 s^2 X_n^L(s), \Lambda_{hn}^L(s) = -\lambda_n \gamma H_0 \eta_e^2 s X_n^L(s), \quad (3.4.11) \\
X_n^L(s) &= Z^{FL}(\lambda_n, s) = \frac{1}{k_{1n}^2 k_{en}^2 + \alpha \gamma H_0^2 s (\lambda_n^2 + \eta_e^2 s^2)}, k_{en}^2 = k_e^2(\lambda_n^2, s).
\end{aligned}$$

Функция $Z^{FL}(q, s)$ определена в (3.2.3).

Отсюда с помощью (3.4.10) получаем

$$y_n^L = \Lambda_{yn}^L(s) q_n^L, \Lambda_{yn}^L(s) = \Lambda_{en}^L(s) + s H_0 \Lambda_{un}^L(s). \quad (3.4.12)$$

В этом варианте нахождение суммы ряда с предварительным определением оригиналов преобразования Лапласа аналогично вычислению интеграла обращения преобразования Фурье. При этом следует ожидать, что будут иметь место отмеченные в параграфе 3.1 сложности. Поэтому подобно параграфу 3.2 используем метод малого параметра в линейном приближении.

$$\Lambda_{an}^L(s) = \Lambda_{an0}^L(s) + \alpha \Lambda_{an1}^L(s) \quad (a = u, e_3, h, y_3), \quad (3.4.13)$$

где

$$\begin{aligned}
\Lambda_{un0}^L(s) &= \frac{1}{k_{1n}^2}, \Lambda_{un1}^L(s) = -\gamma H_0^2 \frac{s(\lambda_n^2 + \eta_e^2 s^2)}{k_{1n}^4 k_{en}^2}, \\
\Lambda_{en0}^L(s) &= -\gamma H_0 \eta_e^2 \frac{s^2}{k_{1n}^2 k_{en}^2}, \Lambda_{en1}^L(s) = \eta_e^2 \gamma^2 H_0^3 \frac{s^3(\lambda_n^2 + \eta_e^2 s^2)}{k_{1n}^4 k_{en}^4}, \\
\Lambda_{hn0}^L(s) &= -\lambda_n \gamma H_0 \eta_e^2 \frac{s}{k_{1n}^2 k_{en}^2}, \Lambda_{hn1}^L(s) = \lambda_n \eta_e^2 \gamma^2 H_0^3 \frac{s^2(\lambda_n^2 + \eta_e^2 s^2)}{k_{1n}^4 k_{en}^4}, \\
\Lambda_{ynj}^L(s) &= \Lambda_{enj}^L(s) + s H_0 \Lambda_{unj}^L(s) \quad (j = 0, 1).
\end{aligned} \quad (3.4.14)$$

Коэффициенты рядов (3.4.7) в соответствии с (3.4.11) и (3.4.12) определяются так:

$$\begin{aligned}
u_n(\tau) &= \Lambda_{un}(\tau) * q_n(\tau), e_{3n}(\tau) = \Lambda_{en}(\tau) * q_n(\tau), \\
h_n(\tau) &= \Lambda_{hn}(\tau) * q_n(\tau), y_{3n}(\tau) = \Lambda_{yn}(\tau) * q_n(\tau).
\end{aligned} \quad (3.4.15)$$

Далее аналогично параграфу 3.2 по тем же соображениям принимаем дополнительную гипотезу (3.1.30). Тогда изображения функций влияния в (3.4.11) и (3.4.12) существенно упрощаются:

$$\Lambda_{un}^L(s) = \frac{1}{k_{1n}^2 + \beta_0 s}, \Lambda_{en}^L(s) = 0, \Lambda_{hn}^L(s) = 0, \Lambda_{yn}^L(s) = sH_0\Lambda_{un}^L(s). \quad (3.4.16)$$

Их оригиналы находятся достаточно просто [41, 50]:

$$\Lambda_{un}(\tau) = \frac{\sin \mu_n \tau}{\mu_n} e^{-\beta_0 \tau/2} H(\tau), \mu_n = \sqrt{\lambda_n^2 - \beta_0^2/4}, \quad (3.4.17)$$

$$\Lambda_{yn}(\tau) = H_0 \dot{\Lambda}_{un}(\tau) = H_0 \left(\cos \mu_n \tau - \beta_0 \frac{\sin \mu_n \tau}{2\mu_n} \right) e^{-\beta_0 \tau/2} H(\tau).$$

Здесь учтено, что для реальных материалов для любых $n \geq 1$ выполняется неравенство

$$\lambda_n > \beta_0. \quad (3.4.18)$$

Подставляя эти равенства в (3.4.7), для нетривиальных искомым функций получаем

$$u(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_{un}(\tau) * q_n(\tau) \sin \lambda_n x, \quad y_3(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_{yn}(\tau) * q_n(\tau) \sin \lambda_n x. \quad (3.4.19)$$

3.5. Примеры расчетов продольных колебаний конечного электромагнитоупругого стержня

Принимаем безразмерные параметры такими же как и в параграфе 3.3:

$$\eta = 2,04; \zeta = 0,519; \gamma = 5,06; \alpha = 0,0806; H_0 = 1. \quad (3.5.1)$$

Рассмотрим сосредоточенную нагрузку:

$$q_{*1}(x, \tau) = f(\tau) \delta(x - x_0), \quad 0 < x_0 < 1. \quad (3.5.2)$$

Отсюда получаем

$$q_n(\tau) = 2f(\tau) \int_0^1 \delta(x - x_0) \sin \lambda_n x dx = 2f(\tau) \sin \lambda_n x_0. \quad (3.5.3)$$

Подставляя эти равенства в (3.4.19), получаем

$$u(x, \tau) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_{un}(\tau) * f(\tau) \sin \lambda_n x_0 \sin \lambda_n x, \quad (3.5.4)$$

$$y_3(x, \tau) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_{yn}(\tau) * f(\tau) \sin \lambda_n x_0 \sin \lambda_n x.$$

Для примера положим, что нагрузка изменяется по закону $f(\tau) = H(\tau)$.

При этом аналогично (3.3.6) с использованием (3.4.17) получаем

$$\Lambda_{yn}(\tau) * f(\tau) = H_0 \dot{\Lambda}_{un}(\tau) * H(\tau) = H_0 \Lambda_{un}(\tau),$$

$$\Lambda_{un}(\tau) * H(\tau) = \int_0^{\tau} \Lambda_{un}(t) dt = \frac{1}{\lambda_n^2} \left[1 - \left(\frac{\beta_0}{2\mu_n} \sin \mu_n \tau + \cos \mu_n \tau \right) e^{-\beta_0 \tau / 2} \right] H(\tau). \quad (3.5.5)$$

На рис. 3.5.1 – 3.5.4 изображены графики зависимости функции $u(x, \tau)$ и $y_3(x, \tau)$ от координаты и времени соответственно при различных значениях τ и x сосредоточенной в центре стержня нагрузки ($x_0 = 1/2$).

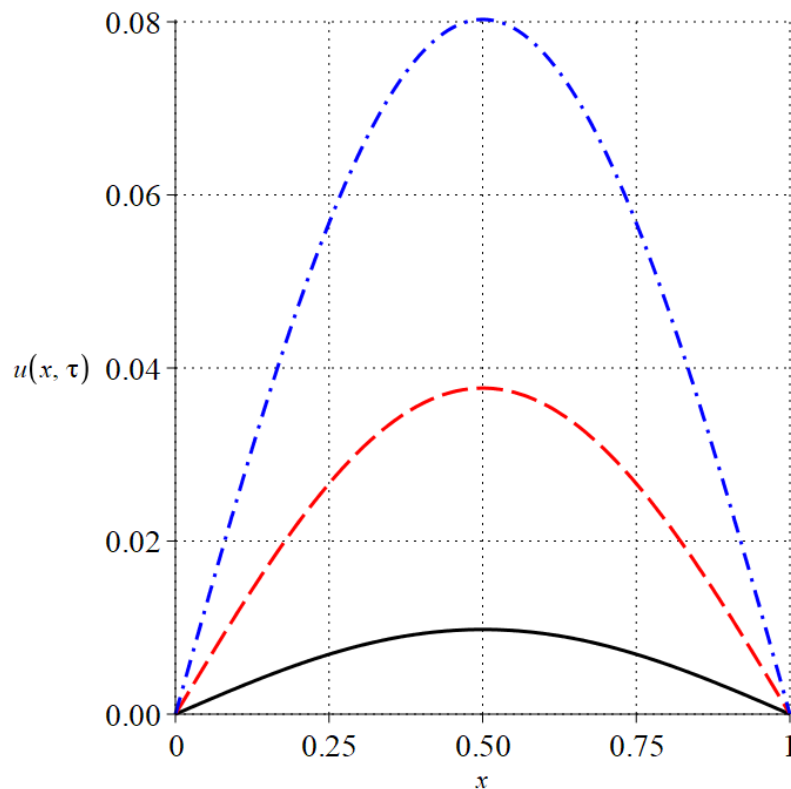


Рис. 3.5.1. Зависимости $u(x, \tau)$ от x . Сплошная линия $\tau = 0.1$, пунктирная $\tau = 0.2$ штрихпунктирная $\tau = 0.3$.

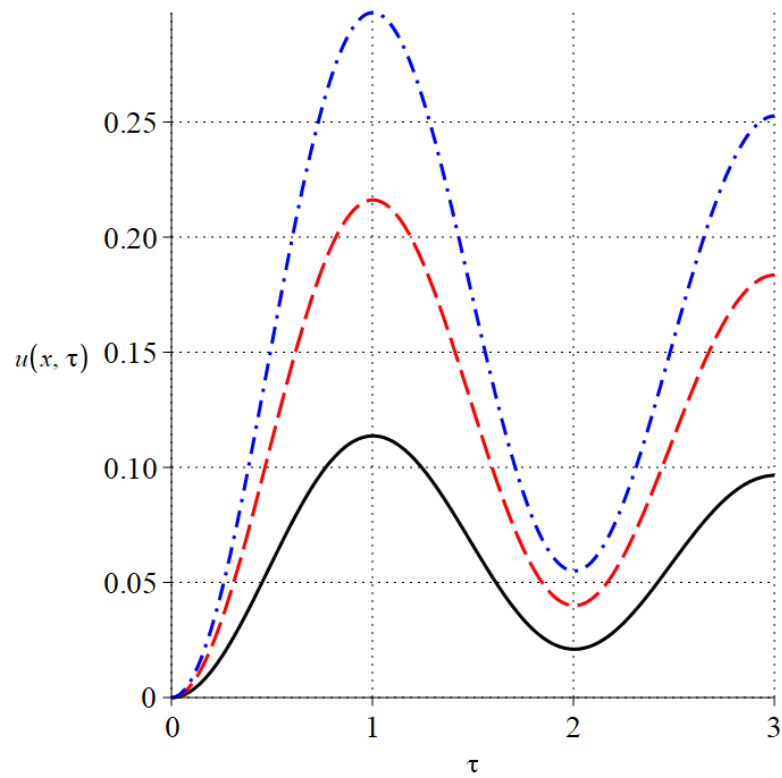


Рис. 3.5.2. Зависимости $u(x, \tau)$ от τ . Сплошная линия $x=0.1$, пунктирная $x=0.2$ штрихпунктирная $x=0.3$.

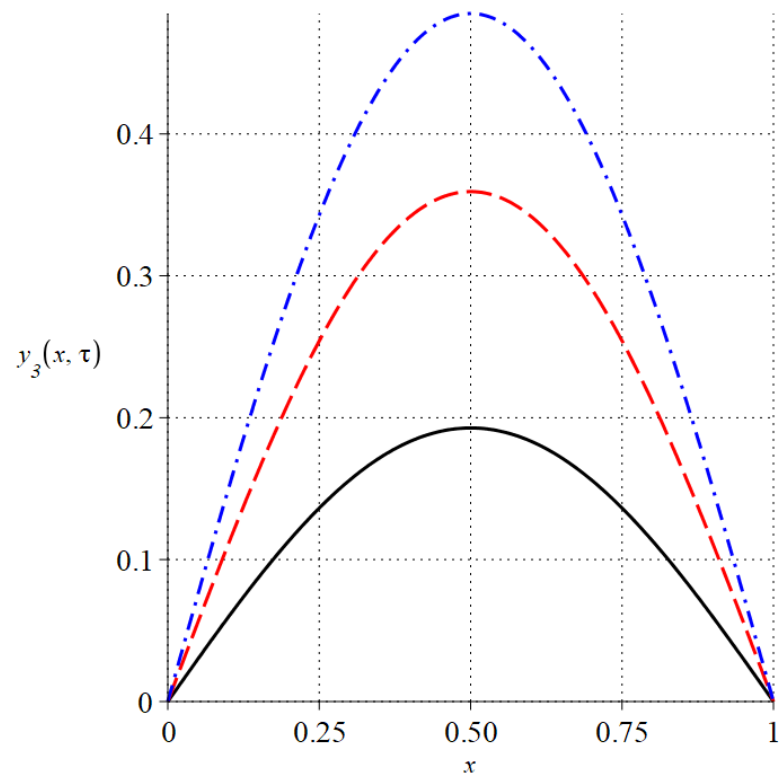


Рис. 3.5.3. Зависимости $y_3(x, \tau)$ от x . Сплошная линия $\tau=0.1$, пунктирная $\tau=0.2$ штрихпунктирная $\tau=0.3$.

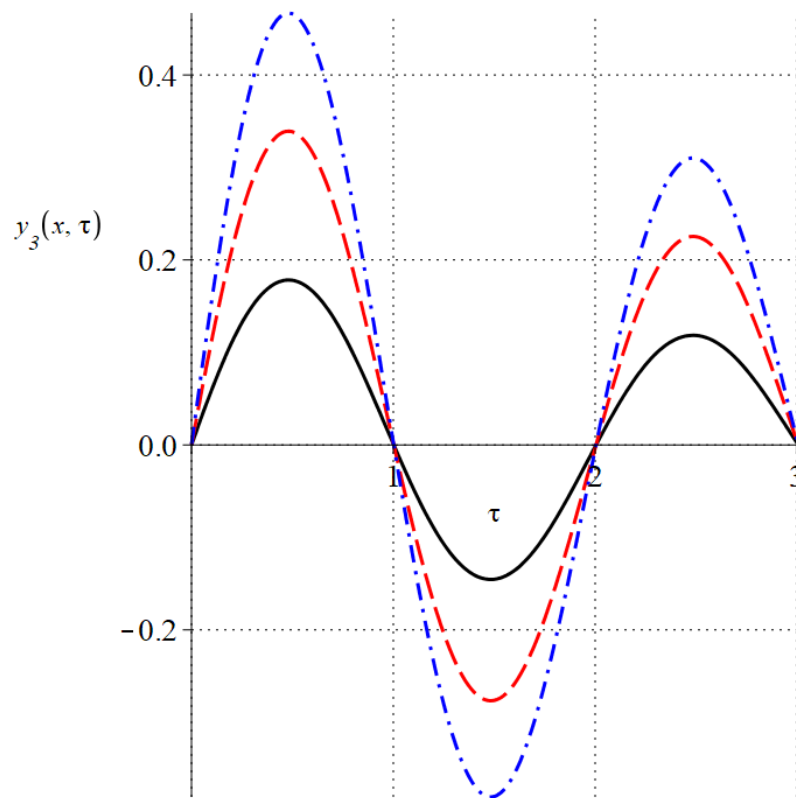


Рис. 3.5.4. Зависимости $y_3(x, \tau)$ от τ . Сплошная линия $x=0.1$, пунктирная $x=0.2$ штрихпунктирная $x=0.3$.

ГЛАВА 4. НЕСТАЦИОНАРНЫЙ ИЗГИБ ЭЛЕКТРОМАГНИТОУПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ

4.1. Изгиб бесконечного электромагнитоупругого стержня

Этот процесс описывается системой уравнений (2.4.18) и (2.4.20), где операторы L_{33} , L_{34} , L_{44} и L_{46} определяются равенствами в (2.4.15). При этом в силу линейности задачи полагаем, что продольные колебания отсутствуют:

$$q_{*1} = m_* = 0, u = \psi_3 = 0, h = e_3 = 0. \quad (4.1.1)$$

При этом уравнения (2.4.17) и (2.4.19) удовлетворяются тождественно, а для функций в (2.4.6), (2.4.7) и (2.4.10) имеют место равенства

$$\begin{aligned} \chi_1^L &= y_3^L = v_1^L = \lambda_e^L = 0, \\ e_1^L &= -\frac{\eta_e^{-2}\varphi^L - \gamma s H_0 w^L}{s + \gamma}, y_1^L = -\frac{\eta_e^{-2}\varphi^L + s^2 H_0 w^L}{s + \gamma}, \\ v_3^L &= \chi_3^L + s H_0 \psi^L, r_e^L = -\frac{H_0 \gamma s}{s + \gamma} (\psi^L - w'^L). \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

Для решения аналогично параграфу 3.1 применяем к системе уравнений (2.4.18) и (2.4.20) преобразование Фурье по координате x :

$$\begin{aligned} \left[(s + \gamma)k_2^2 + \alpha H_0 \eta^2 \gamma s (iqE_{30} + H_0 s) \right] w^{FL} + \left[iq(s + \gamma) + \alpha E_{30} H_0 \eta^2 \gamma s \right] \psi^{FL} + \\ + \alpha H_0 \gamma \eta^2 \eta_e^{-2} \varphi^{FL} = \eta^2 (s + \gamma) q_*^{FL}, \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

$$\left(\eta^2 k_1^2 + \alpha \eta^2 \gamma H_0^2 s + r^{-2} \right) \psi^{FL} - r^{-2} iq w^{FL} + \alpha \gamma H_0 \eta^2 \chi_3^{FL} = \eta^2 m_{*1}^{FL};$$

$$iq \varphi^{FL} + \eta_e^2 \left[(s + \gamma) \chi_3^{FL} + \gamma s H_0 \psi^{FL} \right] = 0, s \varphi^{FL} + iq \chi_3^{FL} = 0. \quad (4.1.4)$$

Из (4.1.4) системы уравнений находим χ_3^{FL} и φ^{FL} :

$$\varphi^{FL} = \gamma H_0 \eta_e^2 i q s k_e^{-2} \psi^{FL}, \chi_3^{FL} = -\gamma H_0 \eta_e^2 s^2 k_e^{-2} \psi^{FL} \quad (4.1.5)$$

Подставляя теперь (4.1.5) в (4.1.3), получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} b_{11}(q, s) w^{FL} + b_{12}(q, s) \psi^{FL} &= \eta^2 k_e^2 (s + \gamma) q_*^{FL}, \\ b_{21}(q, s) w^{FL} + b_{22}(q, s) \psi^{FL} &= \eta^2 k_e^2 m_{*1}^{FL}, \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

где

$$\begin{aligned}
b_{11}(q, s) &= k_e^2 \left[(s + \gamma)k_2^2 + \alpha H_0 \eta^2 \gamma s (iqE_{30} + H_0 s) \right], \\
b_{12}(q, s) &= i q k_e^2 (s + \gamma) + \alpha H_0 \eta^2 \gamma s (E_{30} k_e^2 + \gamma H_0 i q), \\
b_{21}(q, s) &= -r^{-2} i q k_e^2, \quad b_{22}(q, s) = k_e^2 (\eta^2 k_1^2 + r^{-2}) + \alpha \gamma H_0^2 \eta^2 s (q^2 + \eta_e^2 s^2).
\end{aligned} \tag{4.1.7}$$

Решение системы (4.1.6) записывается так:

$$\begin{aligned}
w^{FL} &= G_{wq}^{FL}(q, s) q_*^{FL} + G_{wm}^{FL}(q, s) m_{*1}^{FL}, \\
\psi^{FL} &= G_{\psi q}^{FL}(q, s) q_*^{FL} + G_{\psi m}^{FL}(q, s) m_{*1}^{FL}.
\end{aligned} \tag{4.1.8}$$

где

$$\begin{aligned}
G_{wq}^{FL}(q, s) &= \frac{\eta^2 (s + \gamma) k_e^2 b_{22}(q, s)}{J(q, s)}, \quad G_{wm}^{FL}(q, s) = -\frac{\eta^2 k_e^2 b_{12}(q, s)}{J(q, s)}, \\
G_{\psi q}^{FL}(q, s) &= -\frac{\eta^2 (s + \gamma) k_e^2 b_{21}(q, s)}{J(q, s)}, \quad G_{\psi m}^{FL}(q, s) = \frac{\eta^2 k_e^2 b_{11}(q, s)}{J(q, s)}, \\
J(q, s) &= b_{11}(q, s) b_{22}(q, s) - b_{12}(q, s) b_{21}(q, s).
\end{aligned} \tag{4.1.9}$$

Очевидно, функции $G_{wq}^{FL}(q, s)$, $G_{wm}^{FL}(q, s)$, $G_{\psi q}^{FL}(q, s)$ и $G_{\psi m}^{FL}(q, s)$ не что иное, как изображение функций влияния.

Отсюда получим φ^{FL} и χ_3^{FL}

$$\begin{aligned}
\varphi^{FL} &= G_{\varphi q}^{FL}(q, s) q_*^{FL} + G_{\varphi m}^{FL}(q, s) m_{*1}^{FL}, \\
\chi_3^{FL} &= G_{\chi_3 q}^{FL}(q, s) q_*^{FL} + G_{\chi_3 m}^{FL}(q, s) m_{*1}^{FL}.
\end{aligned} \tag{4.1.10}$$

где

$$\begin{aligned}
G_{\varphi q}^{FL}(q, s) &= -\gamma H_0 \eta^2 \eta_e^2 \frac{i q s_e^2 b_{21}(q, s)}{J(q, s)}, \quad G_{\varphi m}^{FL}(q, s) = \gamma H_0 \eta^2 \eta_e^2 \frac{i q s b_{11}(q, s)}{J(q, s)}, \\
G_{\chi_3 q}^{FL}(q, s) &= \gamma H_0 \eta^2 \eta_e^2 \frac{s s_e^2 b_{21}(q, s)}{J(q, s)}, \quad G_{\chi_3 m}^{FL}(q, s) = -\gamma H_0 \eta^2 \eta_e^2 \frac{s^2 b_{11}(q, s)}{J(q, s)}.
\end{aligned} \tag{4.1.11}$$

Далее из (4.1.2) с помощью (4.1.8) - (4.1.11) получаем e_1 , y_1 , v_3 , r_e

$$\begin{aligned}
e_1^{FL} &= G_{e_1 q}^{FL}(q, s) q_*^{FL} + G_{e_1 m}^{FL}(q, s) m_{*1}^{FL}, \\
y_1^{FL} &= G_{y_1 q}^{FL}(q, s) q_*^{FL} + G_{y_1 m}^{FL}(q, s) m_{*1}^{FL}, \\
v_3^{FL} &= G_{v_3 q}^{FL}(q, s) q_*^{FL} + G_{v_3 m}^{FL}(q, s) m_{*1}^{FL}, \\
r_e^{FL} &= G_{r_e q}^{FL}(q, s) q_*^{FL} + G_{r_e m}^{FL}(q, s) m_{*1}^{FL},
\end{aligned} \tag{4.1.12}$$

где

$$\begin{aligned}
G_{e_1q}^{FL}(q, s) &= \gamma H_0 \eta^2 s \frac{iqb_{21}(q, s) + k_e^2 b_{22}(q, s)}{J(q, s)}, \\
G_{e_1m}^{FL}(q, s) &= -\gamma H_0 \eta^2 s \frac{iqb_{11}(q, s) + k_e^2 b_{12}(q, s)}{(s + \gamma) J(q, s)}, \\
G_{y_1q}^{FL}(q, s) &= H_0 \eta^2 s \frac{\gamma iqb_{21}(q, s) - sk_e^2 b_{22}(q, s)}{J(q, s)}, \\
G_{y_1m}^{FL}(q, s) &= -H_0 \eta^2 s \frac{\gamma iqb_{11}(q, s) - sk_e^2 b_{12}(q, s)}{(s + \gamma) J(q, s)}, \\
G_{v_3q}^{FL}(q, s) &= -H_0 \eta^2 s_e^2 \frac{q^2 + \eta_e^2 s^2}{J(q, s)} b_{21}(q, s), \\
G_{v_3m}^{FL}(q, s) &= H_0 \eta^2 s \frac{q^2 + \eta_e^2 s^2}{J(q, s)} b_{11}(q, s), \\
G_{r_eq}^{FL}(q, s) &= H_0 \gamma \eta^2 sk_e^2 \frac{b_{21}(q, s) - iqb_{22}(q, s)}{J(q, s)}, \\
G_{r_em}^{FL}(q, s) &= -H_0 \eta^2 \gamma sk_e^2 \frac{b_{11}(q, s) - iqb_{12}(q, s)}{(s + \gamma) J(q, s)}.
\end{aligned} \tag{4.1.13}$$

Все сложности обращения преобразований связаны с функцией $J(q, s)$ в (4.1.9) и (4.1.13). Как следует из (4.1.7) и (4.1.9), она имеет вид:

$$\begin{aligned}
J(q, s) &= J_0(q, s) + \alpha J_1(q, s) + \alpha^2 J_2(q, s), \\
J_0(q, s) &= \eta^2 k_e^4 (s + \gamma) (k_1^2 k_2^2 + r^{-2} s^2),
\end{aligned} \tag{4.1.14}$$

который аналогичен структуре функции $D(q, s)$ в параграфе 3.1, что приводит к указанным там сложностям при обращении преобразований. Поэтому и здесь будем использовать упрощенную модель изгиба стержня.

4.2. Нестационарный изгиб бесконечного электромагнитоупругого стержня Бернулли-Эйлера

Наиболее естественной упрощенной моделью является стержень Бернулли-Эйлера, для перехода к которой следует положить [69, 70].

$$\dot{\psi} = 0, \quad \psi = -w'. \tag{4.2.1}$$

Как отмечено в [70], использовать непосредственно в полученных выше соотношениях эти предположения нельзя. Поэтому с учетом уравнений (2.3.18), (4.1.3) и свойств преобразования Фурье замечаем, что эти равенства

эквивалентны следующим соотношениям:

$$k_1^2 = q^2, \psi^{FL} = iqw^{FL}. \quad (4.2.2)$$

И следуя указанной работе, с учетом (4.1.5) и первого равенства в (4.2.2) преобразовываем уравнения (4.1.3) так:

$$\begin{aligned} (s + \gamma)k_e^2 (q^2 w^{FL} + iq\psi^{FL}) + \eta^2 c_{11}(q, s)w^{FL} + \eta^2 c_{12}(q, s)\psi^{FL} &= \eta^2 k_e^2 (s + \gamma)q_*^{FL}, \\ k_e^2 r^{-2} (\psi^{FL} - iqw^{FL}) + \eta^2 c_{22}(q, s)\psi^{FL} &= \eta^2 k_e^2 m_{*1}^{FL}, \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

где

$$\begin{aligned} c_{11}(q, s) &= k_e^2 s [s_e^2 + \alpha H_0 \gamma (iqE_{30} + H_0 s)], \quad c_{12}(q, s) = \alpha H_0 \gamma s (E_{30} k_e^2 + \gamma H_0 iq), \\ c_{22}(q, s) &= k_e^2 q^2 + \alpha \gamma H_0^2 s (q^2 + \eta_e^2 s^2). \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

Теперь исключаем из (4.2.3) комбинацию $\psi^{FL} - iqw^{FL}$:

$$c_{11}(q, s)w^{FL} + [c_{12}(q, s) - iqr^2 (s + \gamma)c_{22}(q, s)]\psi^{FL} = k_e^2 (s + \gamma)p^{FL}, \quad (4.2.5)$$

где

$$p = q_* + r^2 m_{*1}'. \quad (4.2.6)$$

Далее учитываем второе равенство в (4.2.2). В результате получаем

$$w^{FL} = \Gamma_{wp}^{FL}(q, s)p^{FL}, \quad (4.2.7)$$

где

$$\begin{aligned} \Gamma_{wp}^{FL}(q, s) &= \frac{k_e^2 (s + \gamma)}{K(q, s)}, \quad K(q, s) = K_0(q, s) + \alpha K_1(q, s), \\ K_0(q, s) &= k_e^2 s s_e^2 + q^2 r^2 (s + \gamma) k_e^2 q^2 = k_e^2 (s + \gamma) (s^2 + r^2 q^4), \\ K_1(q, s) &= H_0 \gamma s \left\{ (2iqE_{30} + H_0 s) k_e^2 + H_0 q^2 [r^2 (s + \gamma) (q^2 + \eta_e^2 s^2) - \gamma] \right\}. \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

Изображения угла поворота и нетривиальных компонент электромагнитного поля находим с помощью (4.1.2), (4.1.5), (4.2.2), (4.2.7):

$$a^{FL} = \Gamma_{ap}^{FL}(q, s)p^{FL} \quad (a = \psi, \varphi, \chi_3, e_1, y_1, v_3, r_e), \quad (4.2.9)$$

где

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\psi p}^{FL}(q, s) &= iq\Gamma_{wp}^{FL}(q, s), \\
\Gamma_{\phi p}^{FL}(q, s) &= -\gamma H_0 \eta_e^2 q^2 s k_e^{-2} \Gamma_{wp}^{FL}(q, s), \quad \Gamma_{\chi_3 p}^{FL}(q, s) = -iq\gamma H_0 \eta_e^2 s^2 k_e^{-2} \Gamma_{wp}^{FL}(q, s), \\
\Gamma_{e_1 p}^{FL}(q, s) &= \frac{\gamma H_0 s (q^2 + k_e^2)}{k_e^2 (s + \gamma)} \Gamma_{wp}^{FL}(q, s), \quad \Gamma_{y_1 p}^{FL}(q, s) = \frac{H_0 s (\gamma q^2 - k_e^2 s)}{k_e^2 (s + \gamma)} \Gamma_{wp}^{FL}(q, s), \\
\Gamma_{\nu_3 p}^{FL}(q, s) &= iq s k_e^{-2} H_0 (q^2 + \eta_e^2 s^2) \Gamma_{wp}^{FL}(q, s), \quad \Gamma_{r_e p}^{FL}(q, s) = \frac{2H_0 \gamma i q s}{s + \gamma} \Gamma_{wp}^{FL}(q, s).
\end{aligned} \tag{4.2.10}$$

В пространстве оригиналов равенства (4.2.7) и (4.2.9) принимают следующий вид:

$$a(x, \tau) = \Gamma_{aq}(x, \tau) ** p(x, \tau) \quad (a = w, \psi, \phi, \chi_3, e_1, y_1, \nu_3, r_e). \tag{4.2.11}$$

Несмотря на относительную простоту изображений функций влияния, обращение сначала преобразования Лапласа, а затем Фурье приводит к тем же сложностям, что отмечены в параграфе 3.1. Изменение последовательности применения обратных преобразований также не дает явной формулы для оригиналов.

Поэтому аналогично параграфу 3.2 используем метод малого параметра, ограничиваясь линейным приближением:

$$\Gamma_{ap}^{FL}(q, s) = \Gamma_{ap0}^{FL}(q, s) + \alpha \Gamma_{ap1}^{FL}(q, s). \tag{4.2.12}$$

Сначала найдем оригинал функции $\Gamma_{wp}^{FL}(q, s)$. Для нее коэффициенты представления (4.2.12) в соответствии с (4.2.8) имеют вид:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{wpn}^{FL}(q, s) &= (-1)^n \gamma^n H_0^n F_{wpn}^{FL}(q, s), \quad F_{wp0}^{FL}(q, s) = \frac{1}{s^2 + r^2 q^4}, \\
F_{wp1}^{FL}(q, s) &= s \frac{(2iqE_{30} + H_0 s) k_e^2 + H_0 q^2 [r^2 (s + \gamma) (q^2 + \eta_e^2 s^2) - \gamma]}{k_e^2 (s + \gamma) (s^2 + r^2 q^4)^2}.
\end{aligned} \tag{4.2.13}$$

Отметим, что $F_{wp0}^{FL}(q, s)$ соответствует чисто упругому решению, полученному в [41] с той разницей, что согласно выбранным там безразмерным параметрам $r = 1$.

Попытка аналитического построения оригиналов функции $F_{wp1}^{FL}(q, s)$ приводит к громоздким и малоинформативным результатам. Поэтому далее

аналогично параграфам 3.2 и 3.4 строим квазистатическое решение, соответствующее гипотезе (3.1.30). При этом функции в (4.2.8) и (4.2.10) существенно упрощаются:

$$\Gamma_{wp}^{FL}(q, s) = \frac{s + \gamma}{K_c(q, s)}, \quad K_c(q, s) = K_{0c}(q, s) + \alpha K_{1c}(q, s),$$

$$K_{0c}(q, s) = (s + \gamma)(s^2 + r^2 q^4) \quad (4.2.14)$$

$$K_{1c}(q, s) = H_0 \gamma s \left\{ 2iqE_{30} + H_0 s + H_0 [r^2 (s + \gamma) q^2 - \gamma] \right\}.$$

$$\Gamma_{\psi p}^{FL}(q, s) = iq \Gamma_{wp}^{FL}(q, s), \quad \Gamma_{\phi p}^{FL}(q, s) = 0, \quad \Gamma_{\chi_{3p}}^{FL}(q, s) = 0,$$

$$\Gamma_{e_1 p}^{FL}(q, s) = \frac{2\gamma H_0 s}{s + \gamma} \Gamma_{wp}^{FL}(q, s), \quad \Gamma_{y_1 p}^{FL}(q, s) = -\frac{H_0 s (s - \gamma)}{s + \gamma} \Gamma_{wp}^{FL}(q, s), \quad (4.2.15)$$

$$\Gamma_{\upsilon_{3p}}^{FL}(q, s) = iqs H_0 \Gamma_{wp}^{FL}(q, s), \quad \Gamma_{r_e p}^{FL}(q, s) = \frac{2H_0 \gamma iqs}{s + \gamma} \Gamma_{wp}^{FL}(q, s).$$

К сожалению, даже для такой упрощенной модели не удастся аналогично параграфу 3.2 обойтись без разложения по малому параметру. При этом функция $F_{wp1}^{FL}(q, s)$ в (4.2.13) принимает следующий вид:

$$F_{wp1}^{FL}(q, s) = s \frac{2(iqE_{30} - \gamma H_0) + H_0 (s + \gamma)(1 + r^2 q^2)}{(s + \gamma)(s^2 + r^2 q^4)^2}. \quad (4.2.16)$$

Оригиналы $F_{wp0}^{FL}(q, s)$ и $F_{wp1}^{FL}(q, s)$ получены в параграфе П.1.

Аналогичным образом записываем функции из (4.2.10):

$$\Gamma_{apn}^{FL}(q, s) = (-1)^n \gamma^n H_0^{2n} F_{apn}^{FL}(q, s) \quad (a = \psi, e_1, y_1, \upsilon_3, r_e), \quad (4.2.17)$$

где

$$F_{\psi pn}^{FL}(q, s) = iq F_{wpn}^{FL}(q, s),$$

$$F_{e_1 pn}^{FL}(q, s) = \frac{2\gamma H_0 s}{s + \gamma} F_{wpn}^{FL}(q, s), \quad F_{y_1 pn}^{FL}(q, s) = -\frac{H_0 s (s - \gamma)}{s + \gamma} F_{wpn}^{FL}(q, s), \quad (4.2.18)$$

$$F_{\upsilon_{3pn}}^{FL}(q, s) = qs H_0 F_{wpn}^{FL}(q, s), \quad F_{r_e pn}^{FL}(q, s) = \frac{2H_0 \gamma iqs}{s + \gamma} F_{wpn}^{FL}(q, s).$$

Оригиналы последних изображений также получены в параграфе П.1.

Оригиналы функций влияния согласно (4.2.12) и (4.2.17) имеют вид:

$$\Gamma_{ap}(x, \tau) = \sum_{n=0}^1 \alpha^n (-1)^n \gamma^n H_0^{2n} F_{ap}(x, \tau) \quad (a = w, \psi, e_1, y_1, v_3, r_e), \quad (4.2.19)$$

где функции $F_{ap}(x, \tau)$ определяются равенствами (П.1.12) и (П.1.27) - (П.1.30).

4.3. Примеры расчетов изгиба бесконечного электромагнитоупругого стержня

Значения безразмерных параметров принимает аналогично (3.3.1) и (3.3.2) следующими:

$$\eta = 2,04; \gamma = 5,06; \alpha = 0,0806, r^2 = 0,208 \cdot 10^{-3}. \quad (4.3.1)$$

Полагаем, что в начальном поле отлична от нуля только напряженность магнитного поля:

$$E_{03} = 0, H_0 = 1. \quad (4.3.2)$$

При этом формулы в (П.1.12) и (П.1.28) - (П.1.30) упрощаются:

$$\begin{aligned} F_{wp1}(x, \tau) = & H(\tau) \left\langle \frac{\tau}{2} [Y(x, \tau; -1) + rY(x, \tau; 0)] + \right. \\ & + \gamma \left\{ 2\gamma X(x; 2) * [e^{-\gamma\tau} - Z(x, \tau)] + \tau Z(x, \tau) * X(x; 1) + \right. \\ & \left. \left. + [2\gamma^2 X(x; 2) - (\tau\gamma + 1) X(x; 1)] * Y(x, \tau; -1) \right\} \right\rangle; \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

$$F_{wp0}(x, \tau) = Y'(x, \tau; -1) H(\tau),$$

$$\begin{aligned} F'_{wp1}(x, \tau) = & H(\tau) \left\langle \frac{\tau}{2} [Y'(x, \tau; -1) + rY(x, \tau; 0)] + \right. \\ & + \gamma \left\{ 2\gamma X'(x; 2) * [e^{-\gamma\tau} - Z(x, \tau)] + \tau Z(x, \tau) * X'(x; 1) + \right. \\ & \left. \left. + [2\gamma^2 X'(x; 2) - (\tau\gamma + 1) X'(x; 1)] * Y(x, \tau; -1) \right\} \right\rangle; \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

$$F_{wp0}(x, \tau) = \dot{Y}(x, \tau; -1) H(\tau),$$

$$\begin{aligned} \dot{F}'_{wp1}(x, \tau) = & H(\tau) \left\langle \frac{\tau}{2} [\dot{Y}(x, \tau; -1) + r\dot{Y}(x, \tau; 0)] + \right. \\ & + \gamma \left\{ (Z(x, \tau) + \tau\dot{Z}(x, \tau)) * X(x; 1) - 2\gamma X(x; 2) * [\gamma e^{-\gamma\tau} + \dot{Z}(x, \tau)] - \right. \\ & \left. \left. - \gamma X(x; 1) * Y(x, \tau; -1) + [2\gamma^2 X(x; 2) - (\tau\gamma + 1) X(x; 1)] * \dot{Y}(x, \tau; -1) \right\} \right\rangle; \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

$$\begin{aligned}
\dot{F}'_{wp0}(x, \tau) &= \dot{Y}'(x, \tau; -1)H(\tau) \\
\dot{F}'_{wp1}(x, \tau) &= H(\tau) \left\langle \frac{\tau}{2} [\dot{Y}'(x, \tau; -1) + r\dot{Y}'(x, \tau; 0)] + \right. \\
&+ \gamma \left\{ (Z(x, \tau) + \tau\dot{Z}(x, \tau)) * X'(x; 1) - 2\gamma X'(x; 2) * [\gamma e^{-\gamma\tau} + \dot{Z}(x, \tau)] - \right. \\
&\left. \left. - \gamma X'(x; 1) * Y(x, \tau; -1) + [2\gamma^2 X'(x; 2) - (\tau\gamma + 1) X'(x; 1)] * \dot{Y}(x, \tau; -1) \right\} \right\rangle.
\end{aligned} \tag{4.3.6}$$

А равенства (П.1.27) записываются так:

$$\begin{aligned}
F_{\psi pn}(x, \tau) &= -F'_{wpn}(x, \tau), \quad F_{e_1 pn}(x, \tau) = 2\gamma [F_{wpn}(x, \tau) - F_{0en}(x, \tau)], \\
F_{y_1 pn}(x, \tau) &= 2\gamma F_{wpn}(x, \tau) - \dot{F}'_{wpn}(x, \tau) - 2\gamma F_{0en}(x, \tau), \\
F_{\upsilon_3 pn}(x, \tau) &= -\dot{F}'_{wpn}(x, \tau), \quad F_{r_e pn}(x, \tau) = -2\gamma [F'_{wpn}(x, \tau) - F_{1en}(x, \tau)], \\
F_{0en}(x, \tau) &= \gamma e^{-\gamma\tau} * F_{wpn}(x, \tau), \quad F_{1en}(x, \tau) = \gamma e^{-\gamma\tau} * F'_{wpn}(x, \tau).
\end{aligned} \tag{4.3.7}$$

На рис. 4.3.1 – 4.3.12 изображены зависимости функций влияния $\Gamma_{ap}(x, \tau)$ от координаты x и времени τ . При этом из-за сложностей анализа поведения этих функций в окрестности точки $\tau=0$ графики за исключением функции $\Gamma_{wp}(x, \tau)$ построены на интервале $\tau \geq 0.0001$.

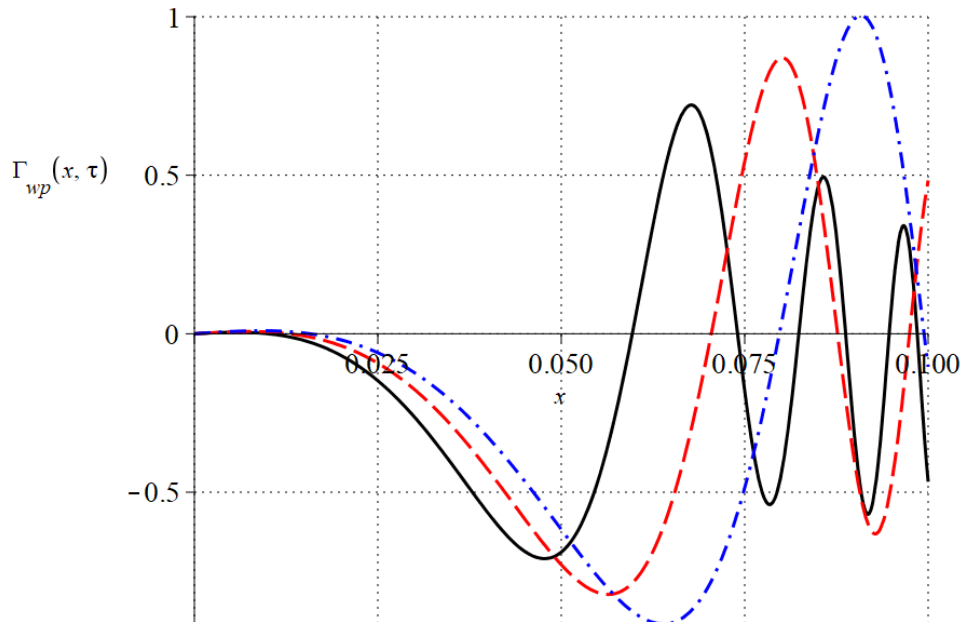


Рис. 4.3.1. Зависимости $\Gamma_{wp}(x, \tau)$ от x . Сплошная линия $\tau = 0.05$, пунктирная $\tau = 0.07$, штрихпунктирная $\tau = 0.09$.

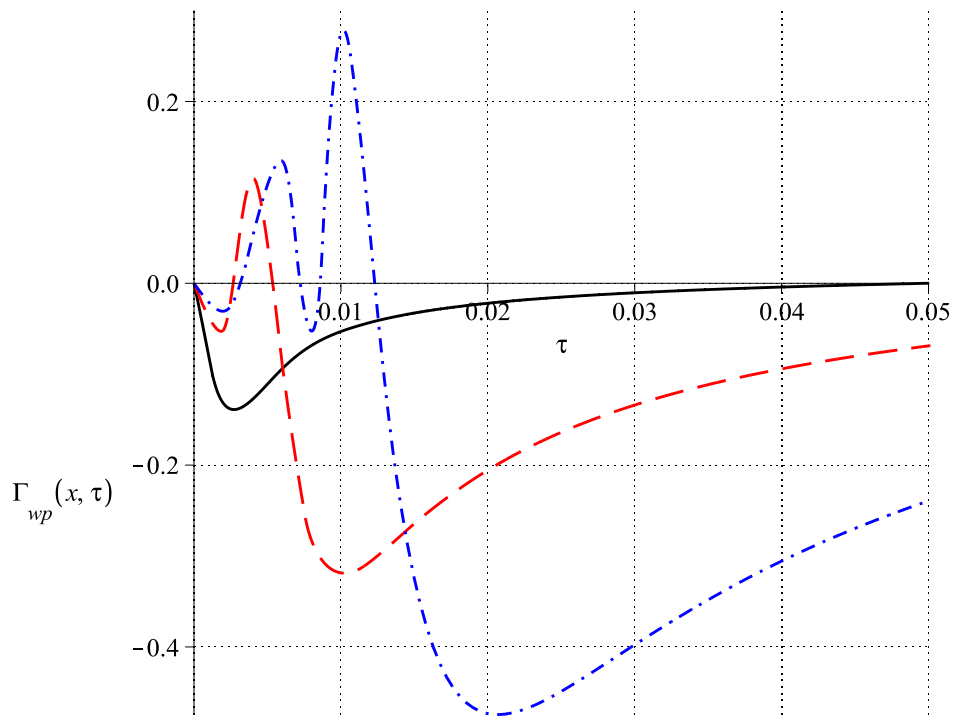


Рис. 4.3.2. Зависимости $\Gamma_{wp}(x, \tau)$ от τ . Сплошная линия $x = 0.01$, пунктирная $x = 0.02$, штрихпунктирная $x = 0.03$.

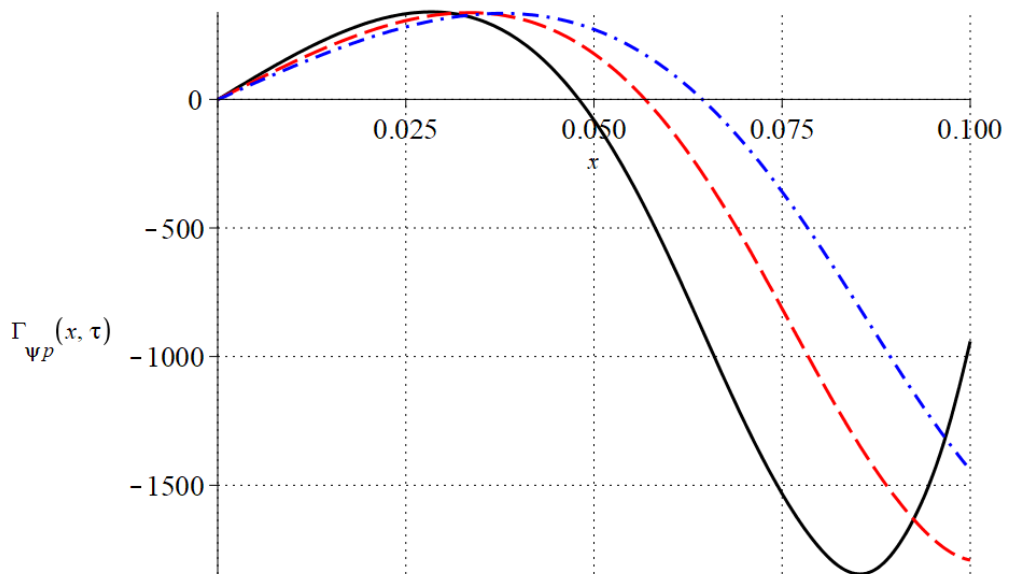


Рис. 4.3.3. Зависимости $\Gamma_{wp}(x, \tau)$ от x . Сплошная линия $\tau = 0.05$, пунктирная $\tau = 0.07$, штрихпунктирная $\tau = 0.09$.

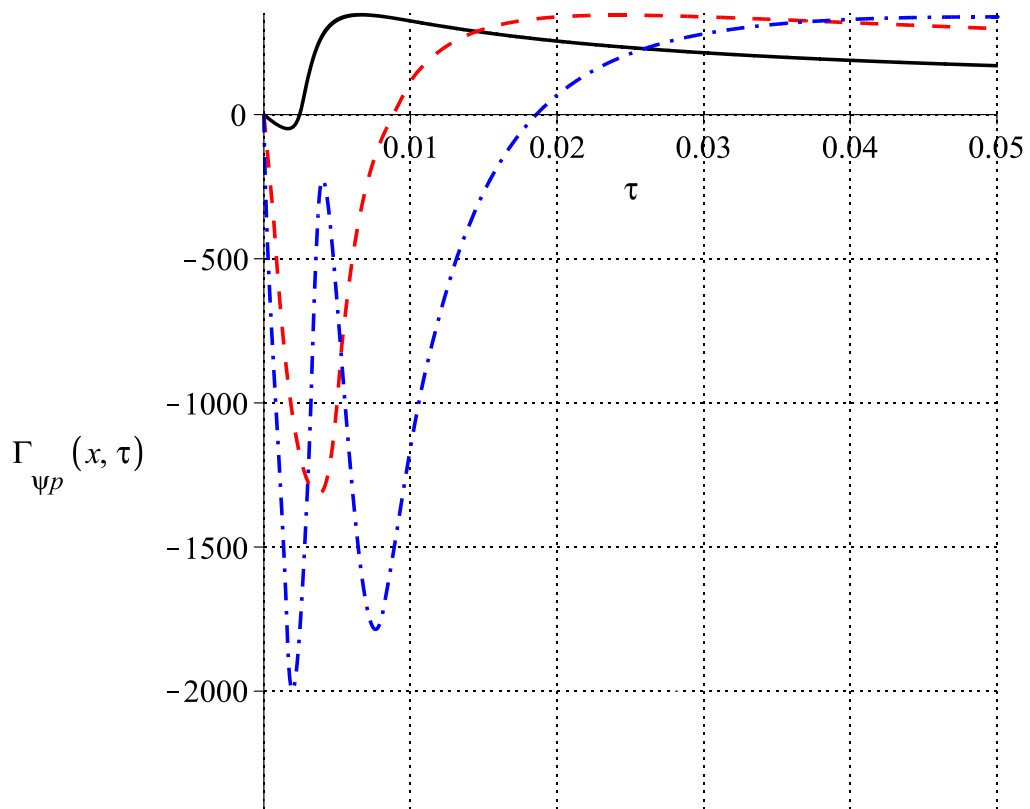


Рис. 4.3.4. Зависимости $\Gamma_{\psi p}(x, \tau)$ от τ . Сплошная линия $x = 0.01$, пунктирная $x = 0.02$, штрихпунктирная $x = 0.03$.

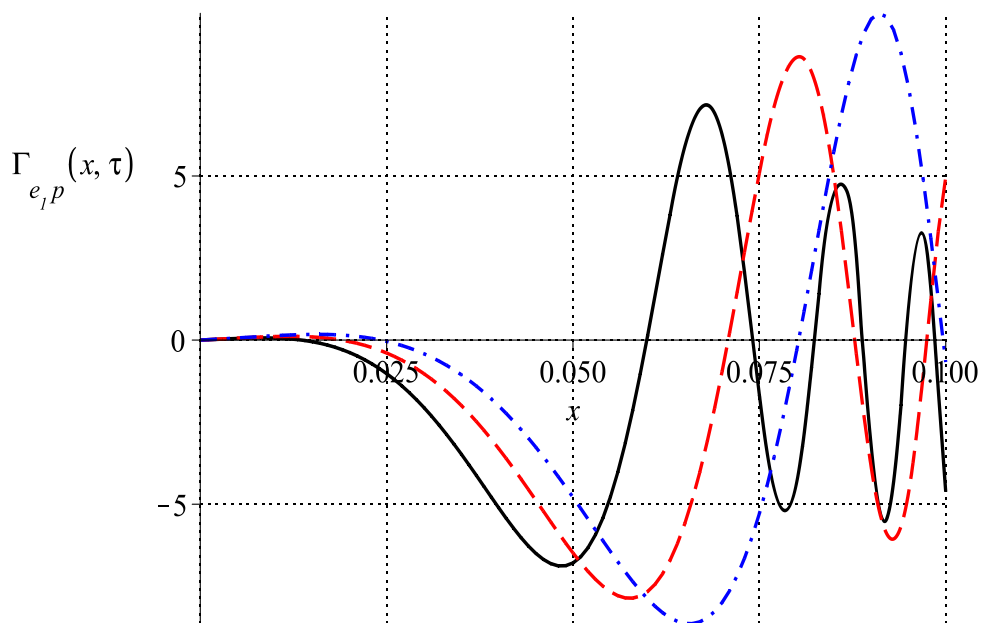


Рис. 4.3.5. Зависимости $\Gamma_{e_1 p}(x, \tau)$ от x . Сплошная линия $\tau = 0.05$, пунктирная $\tau = 0.07$, штрихпунктирная $\tau = 0.09$.

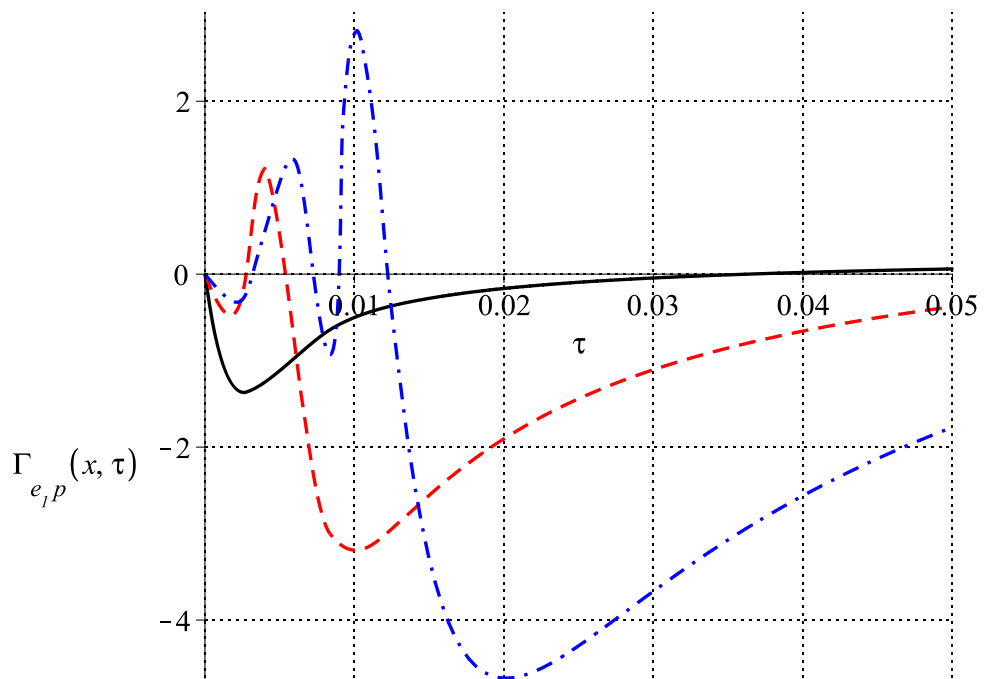


Рис. 4.3.6. Зависимости $\Gamma_{e,p}(x, \tau)$ от τ . Сплошная линия $x = 0.01$, пунктирная $x = 0.02$, штрихпунктирная $x = 0.03$.

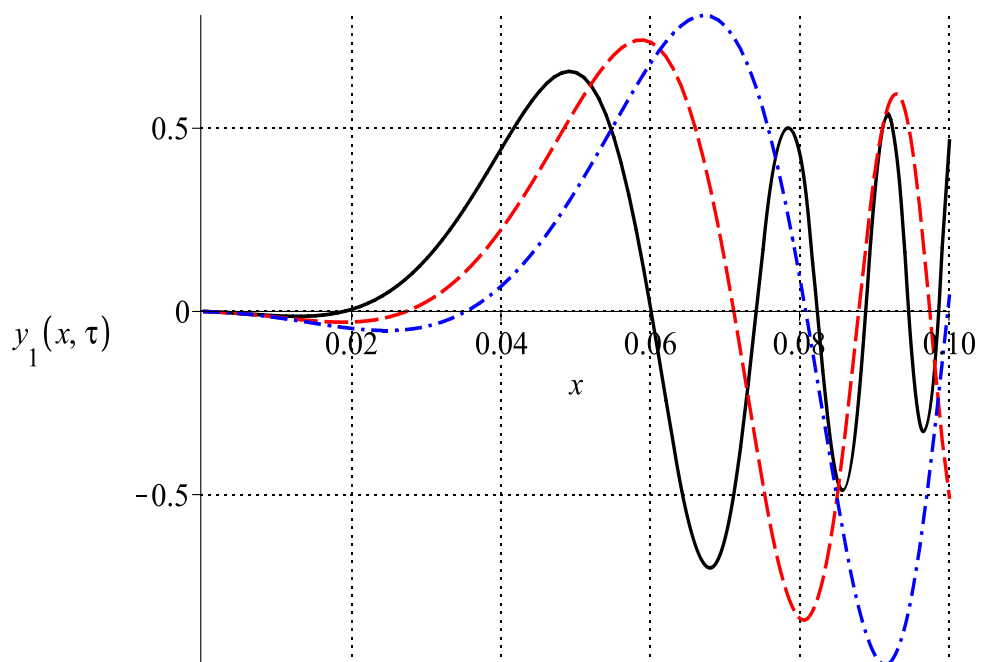


Рис. 4.3.7. Зависимости $\Gamma_{y,p}(x, \tau)$ от x . Сплошная линия $\tau = 0.05$, пунктирная $\tau = 0.07$, штрихпунктирная $\tau = 0.09$.

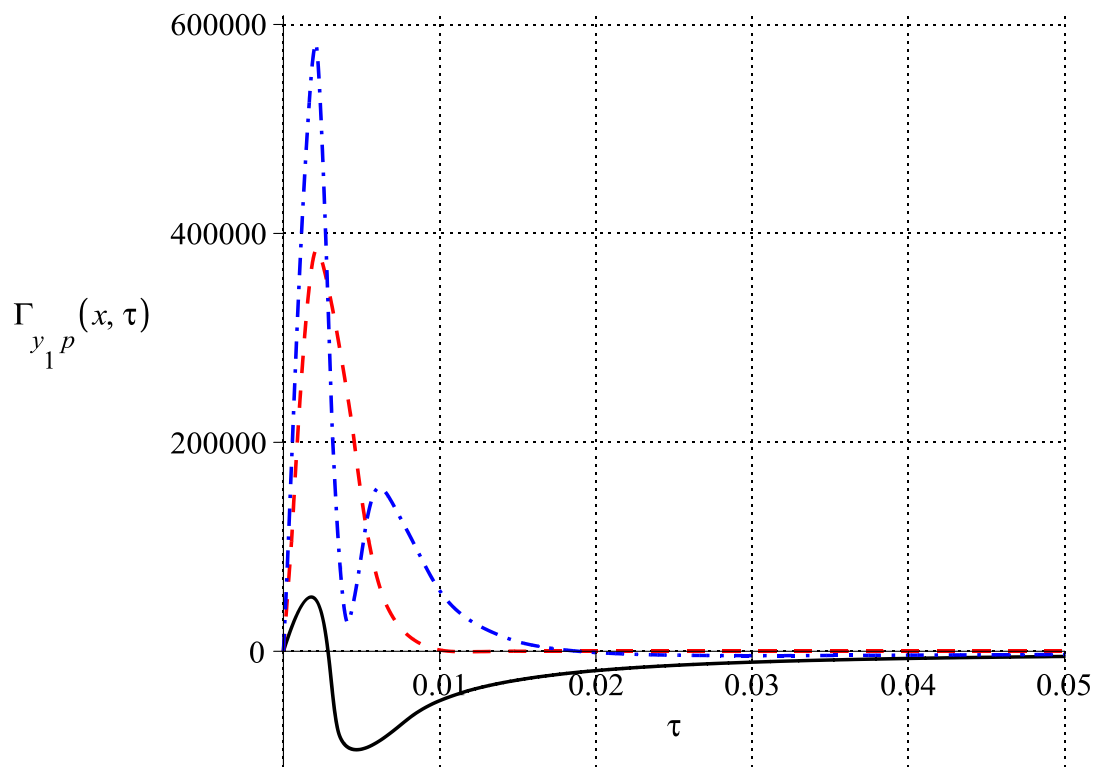


Рис. 4.3.8. Зависимости $\Gamma_{y_1 p}(x, \tau)$ от τ . Сплошная линия $x = 0.01$, пунктирная $x = 0.02$, штрихпунктирная $x = 0.03$.

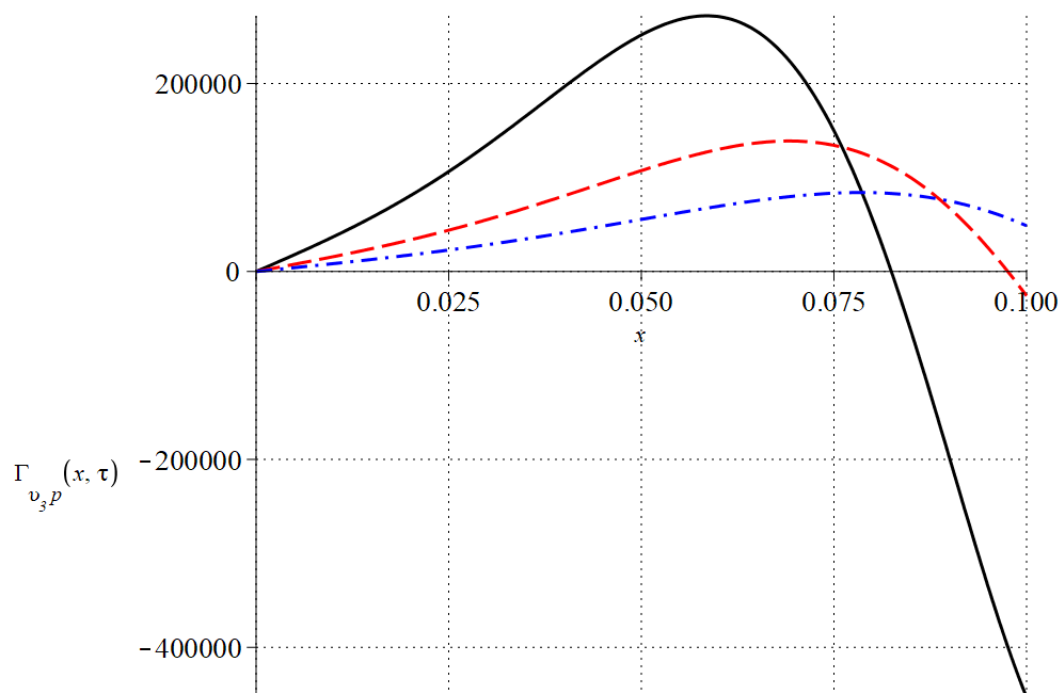


Рис. 4.3.9. Зависимости $\Gamma_{v_3 p}(x, \tau)$ от x . Сплошная линия $\tau = 0.05$, пунктирная $\tau = 0.07$, штрихпунктирная $\tau = 0.09$.

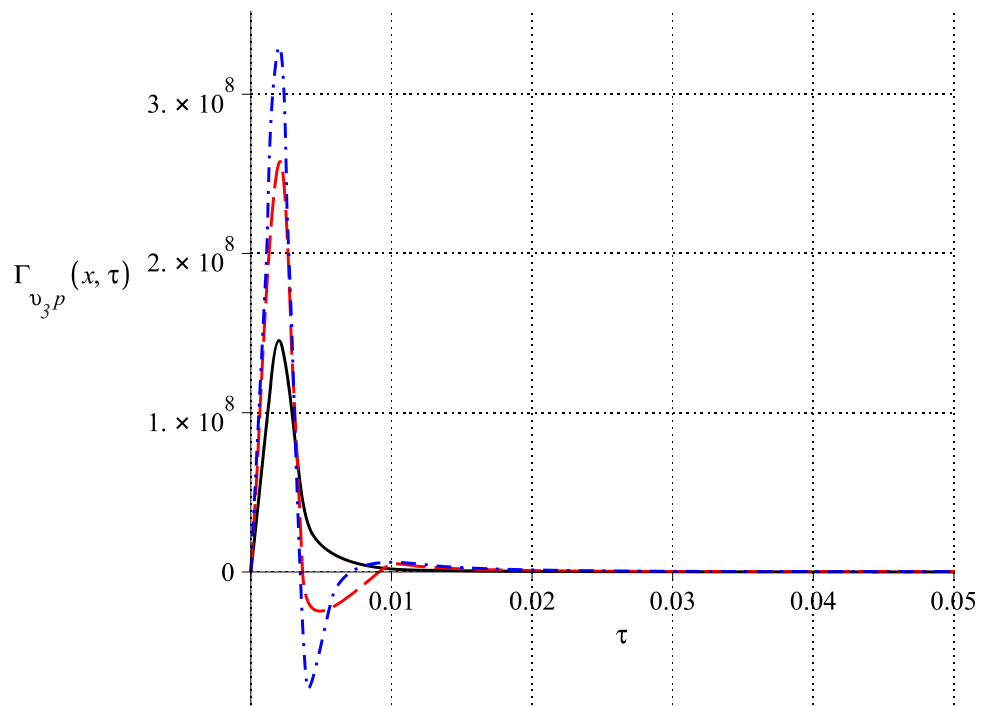


Рис. 4.3.10. Зависимости $\Gamma_{v_3p}(x, \tau)$ от τ . Сплошная линия $x = 0.01$, пунктирная $x = 0.02$, штрихпунктирная $x = 0.03$.

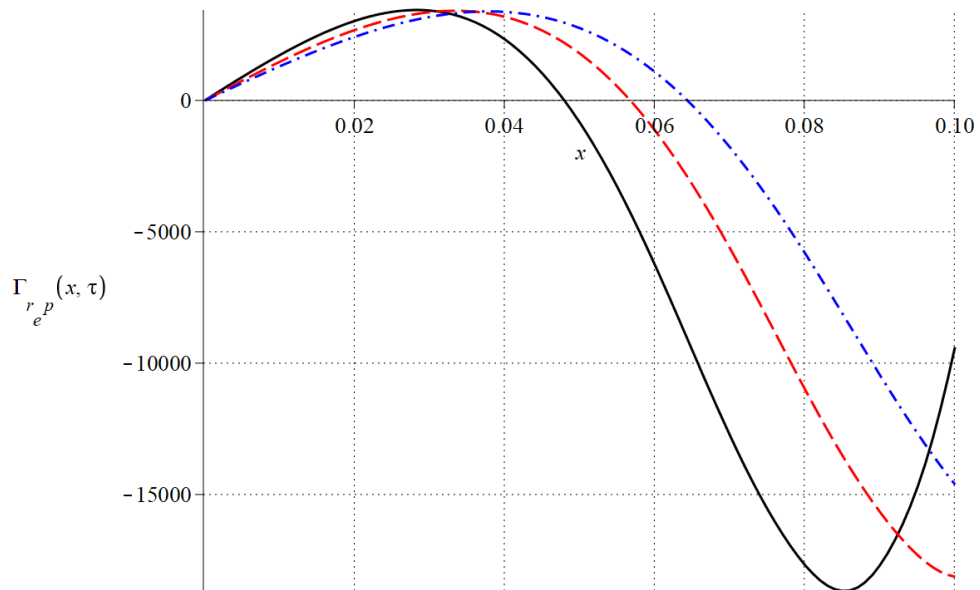


Рис. 4.3.11. Зависимости $\Gamma_{r_e p}(x, \tau)$ от x . Сплошная линия $\tau = 0.05$, пунктирная $\tau = 0.07$, штрихпунктирная $\tau = 0.09$.

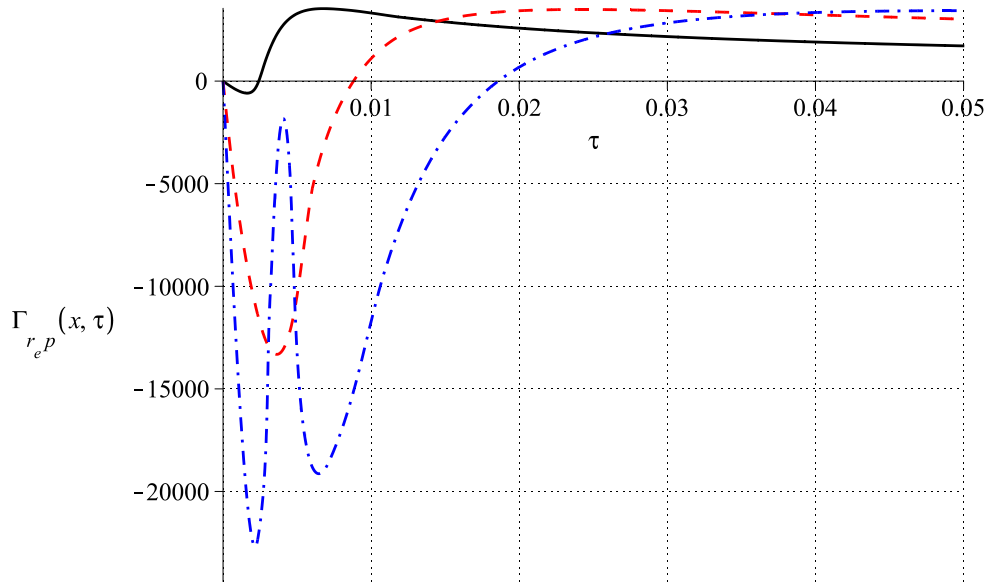


Рис. 4.3.12. Зависимости $\Gamma_{r_e p}(x, \tau)$ от τ . Сплошная линия $x=0.01$, пунктирная $x=0.02$, штрихпунктирная $x=0.03$.

Теперь рассмотрим действие сосредоточенной в начале координат нагрузки следующего вида:

$$p(x, \tau) = \delta(x)H(\tau). \quad (4.3.8)$$

Для нее формулы (4.2.11) записываются так:

$$a(x, \tau) = \Gamma_{ap}(x, \tau) * H(\tau) \quad (a = w, \psi, e_1, y_1, v_3, r_e). \quad (4.3.9)$$

Отсюда с учетом (4.2.12), (4.2.17) и (П.1.27) получаем

$$\begin{aligned} w(x, \tau) &= \sum_{n=0}^1 (-1)^n \gamma^n \alpha^n F_{w_{pn}}(x, \tau) * H(\tau), \\ \psi(x, \tau) &= \sum_{n=0}^1 (-1)^{n+1} \gamma^n \alpha^n F'_{w_{pn}}(x, \tau) * H(\tau), \\ e_1(x, \tau) &= 2 \sum_{n=0}^1 (-1)^n \gamma^{n+1} \alpha^n F_{0en}(x, \tau), \\ y_1(x, \tau) &= \sum_{n=0}^1 (-1)^{n+1} \gamma^n \alpha^n [F_{w_{pn}}(x, \tau) - 2F_{0en}(x, \tau)], \\ v_3(x, \tau) &= \sum_{n=0}^1 (-1)^{n+1} \gamma^n \alpha^n F'_{w_{pn}}(x, \tau), \\ r_e(x, \tau) &= 2 \sum_{n=0}^1 (-1)^{n+1} \gamma^{n+1} \alpha^n e^{-\gamma\tau} * F'_{w_{pn}}(x, \tau). \end{aligned} \quad (4.3.10)$$

Результаты расчетов для начального поля вида (4.3.2) представлены на рис.

4.3.13 – 4.3.24. По высказанным выше соображениям все графики за исключением перемещения $w(x, \tau)$ построены на интервале $\tau \geq 0.0001$.

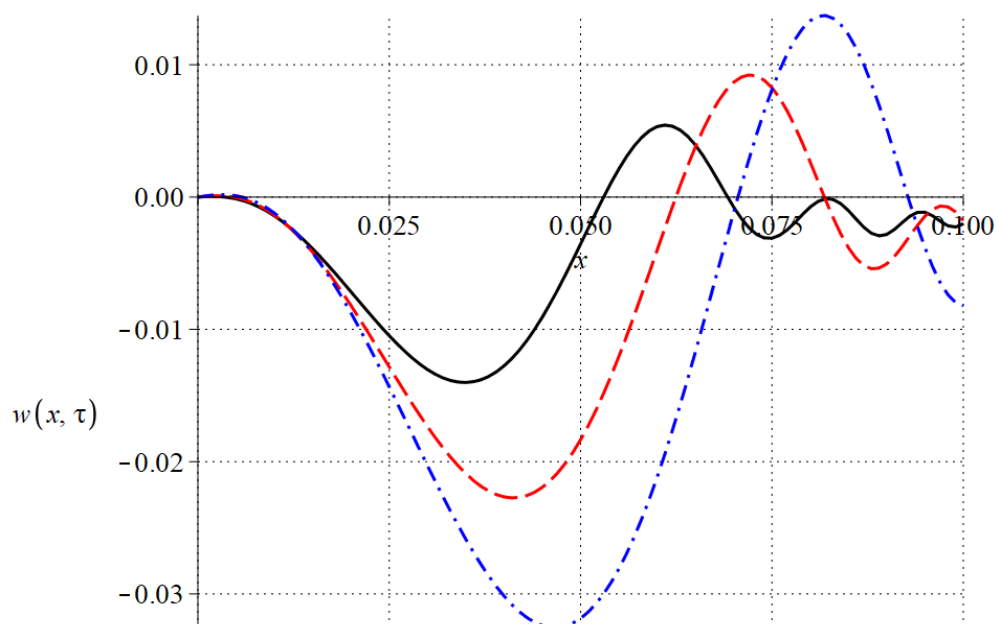


Рис. 4.3.13. Зависимости $w(x, \tau)$ от x . Сплошная линия $\tau = 0.05$, пунктирная $\tau = 0.07$, штрихпунктирная $\tau = 0.09$.

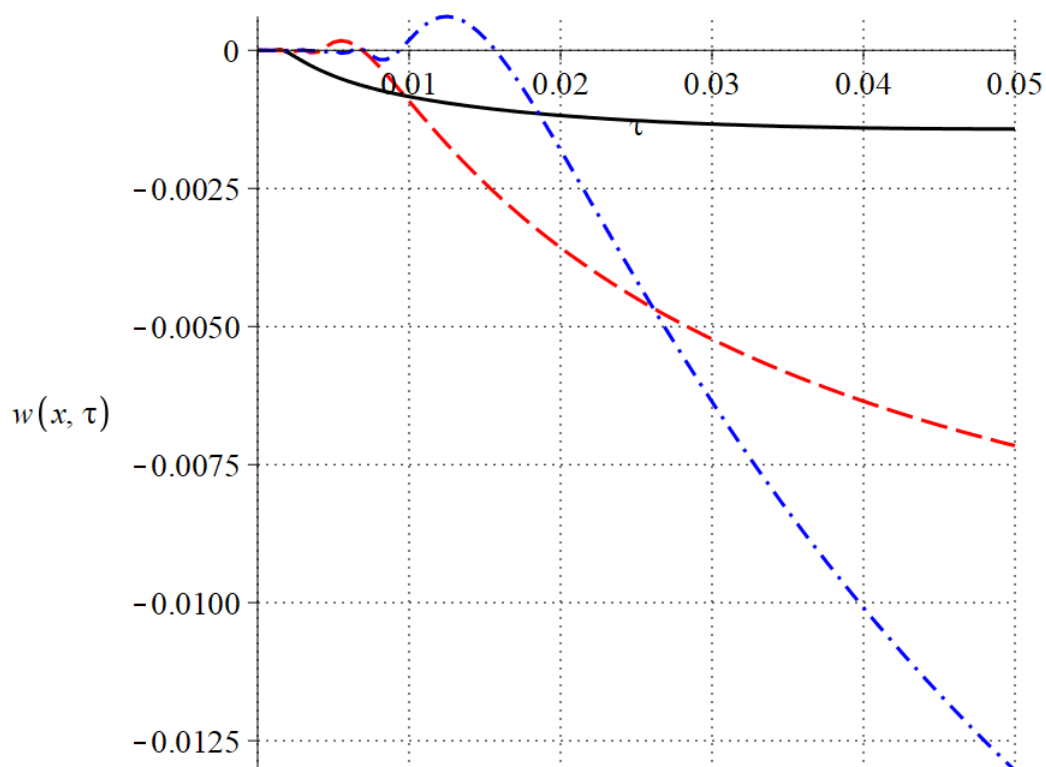


Рис. 4.3.14. Зависимости $w(x, \tau)$ от τ . Сплошная линия $x = 0.01$, пунктирная $x = 0.02$, штрихпунктирная $x = 0.03$.

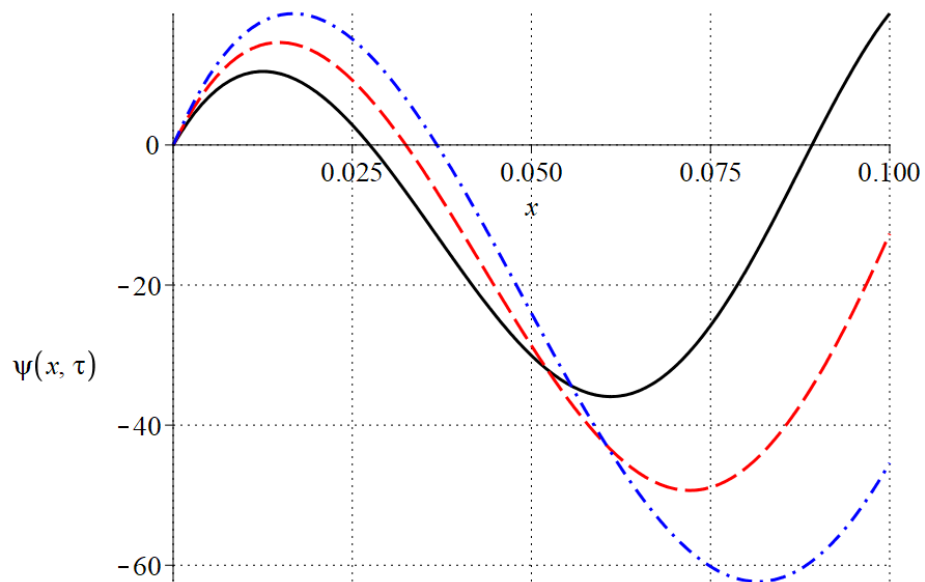


Рис. 4.3.15. Зависимости $\psi(x, \tau)$ от x . Сплошная линия $\tau = 0.05$, пунктирная $\tau = 0.07$, штрихпунктирная $\tau = 0.09$.

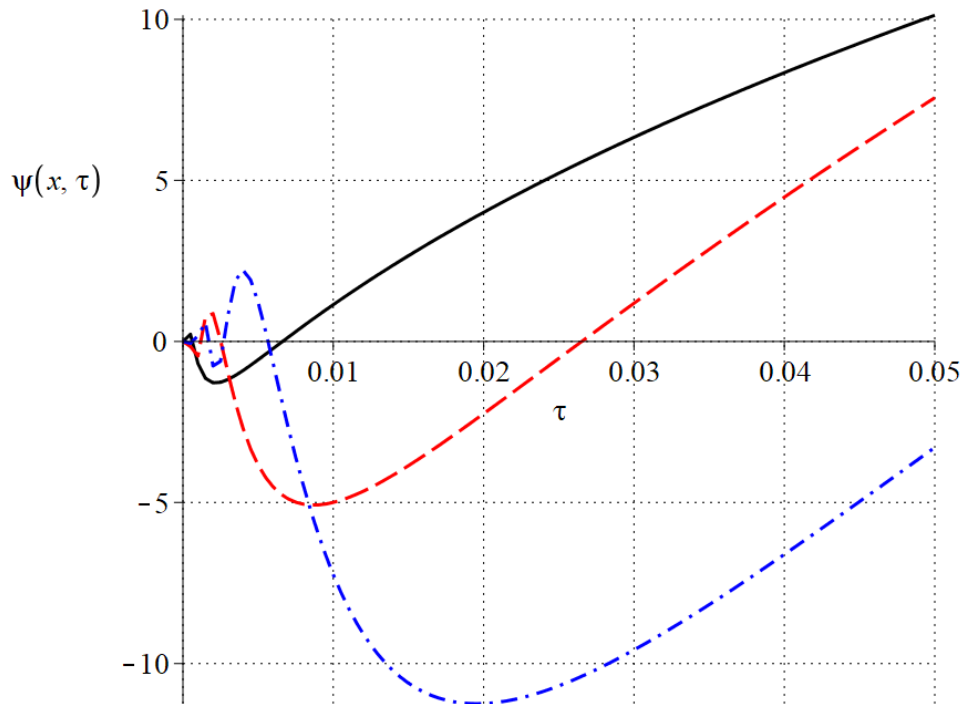


Рис. 4.3.16. Зависимости $\psi(x, \tau)$ от τ . Сплошная линия $x = 0.01$, пунктирная $x = 0.02$, штрихпунктирная $x = 0.03$.

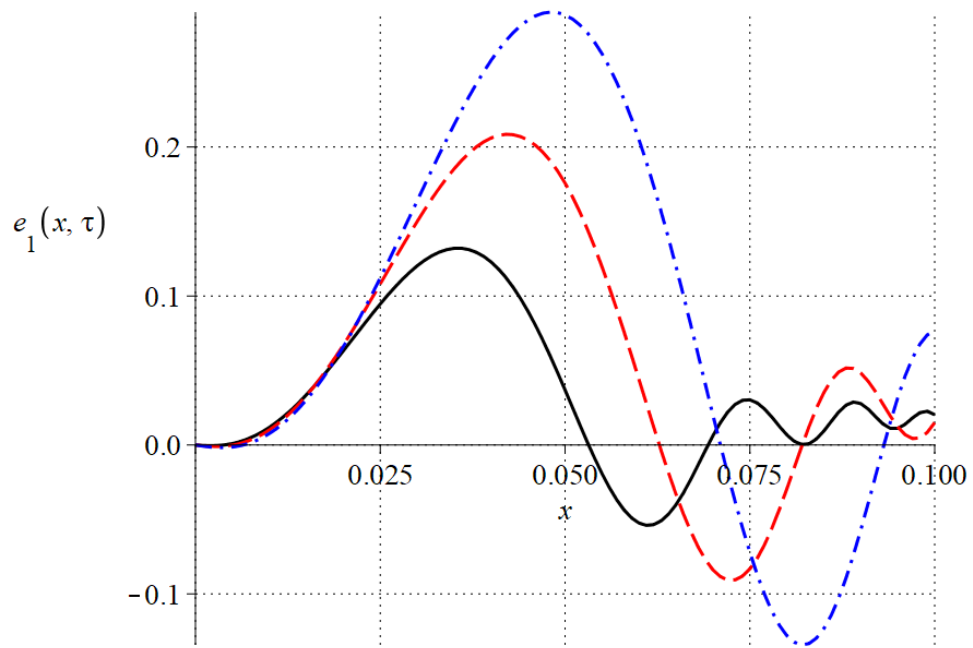


Рис. 4.3.17. Зависимости $e_1(x, \tau)$ от x . Сплошная линия $\tau = 0.05$, пунктирная $\tau = 0.07$, штрихпунктирная $\tau = 0.09$.

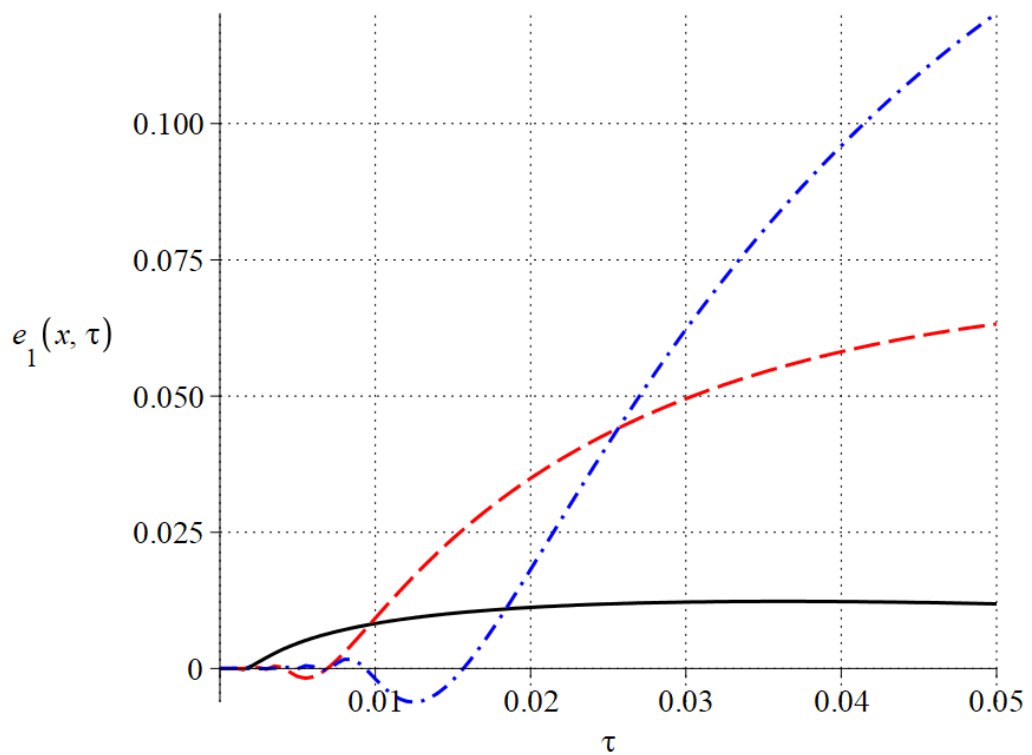


Рис. 4.3.18. Зависимости $e_1(x, \tau)$ от τ . Сплошная линия $x = 0.01$, пунктирная $x = 0.02$, штрихпунктирная $x = 0.03$.

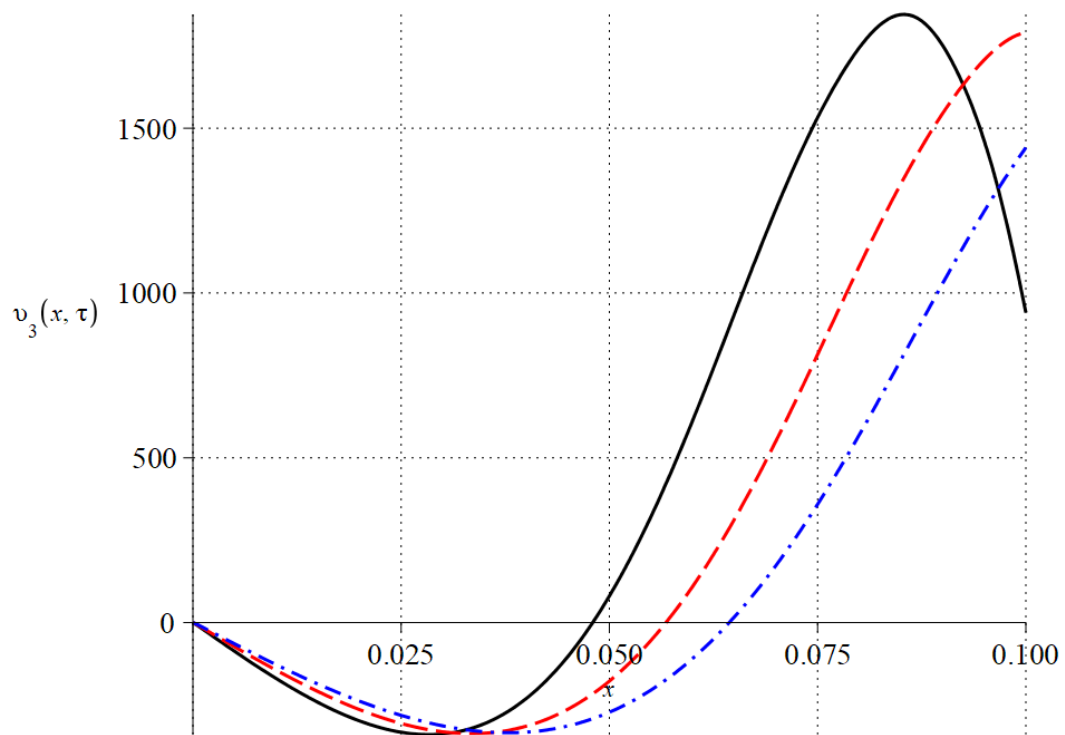


Рис. 4.3.19. Зависимости $v_3(x, \tau)$ от x . Сплошная линия $\tau = 0.05$, пунктирная $\tau = 0.07$, штрихпунктирная $\tau = 0.09$.

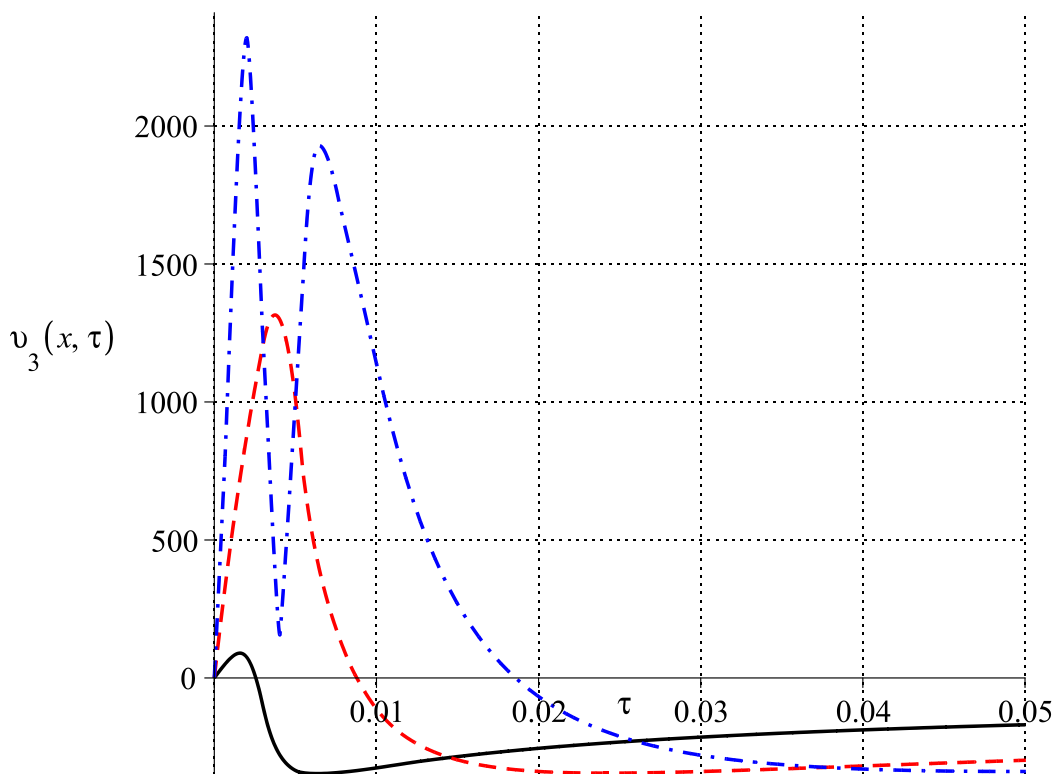


Рис. 4.3.20. Зависимости $v_3(x, \tau)$ от τ . Сплошная линия $x = 0.01$, пунктирная $x = 0.02$, штрихпунктирная $x = 0.03$.

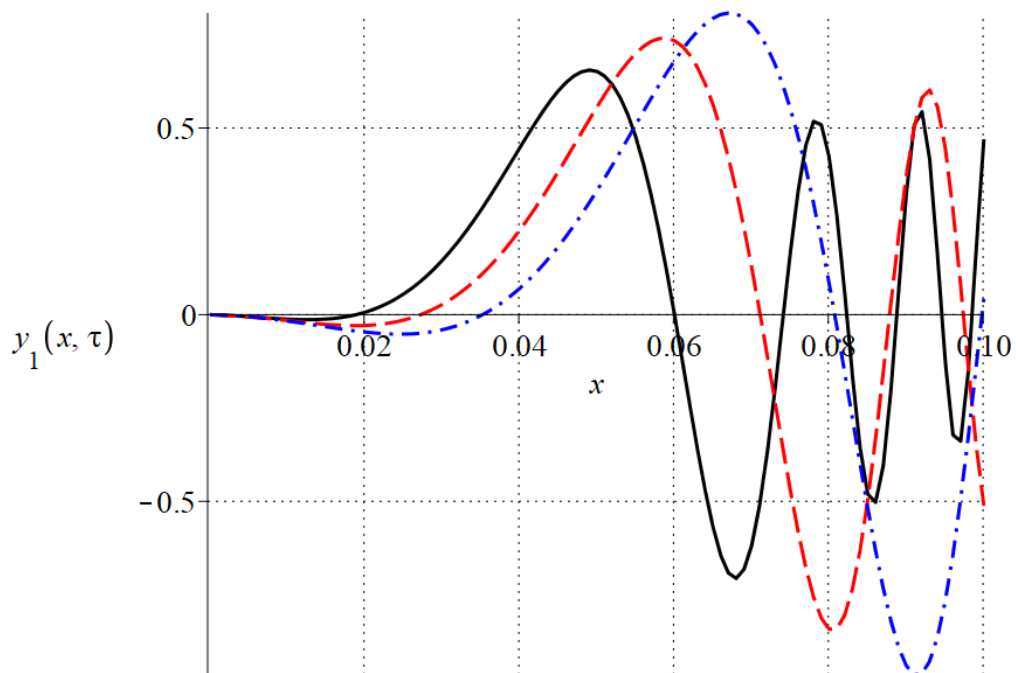


Рис. 4.3.21. Зависимости $y_1(x, \tau)$ от x . Сплошная линия $\tau = 0.05$, пунктирная $\tau = 0.07$, штрихпунктирная $\tau = 0.09$.

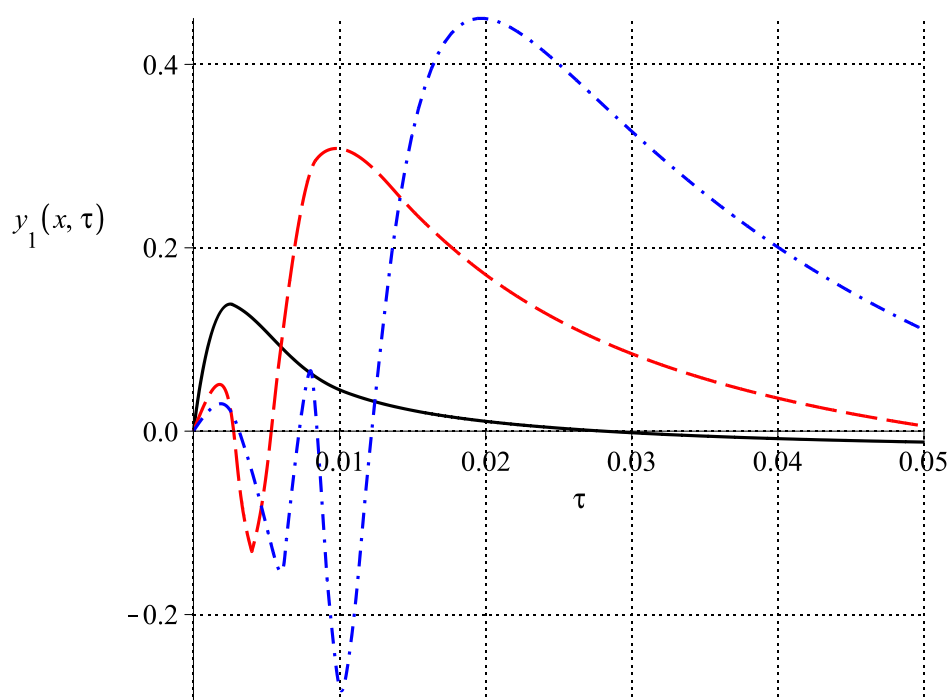


Рис. 4.3.22. Зависимости $y_1(x, \tau)$ от τ . Сплошная линия $x = 0.01$, пунктирная $x = 0.02$, штрихпунктирная $x = 0.03$.

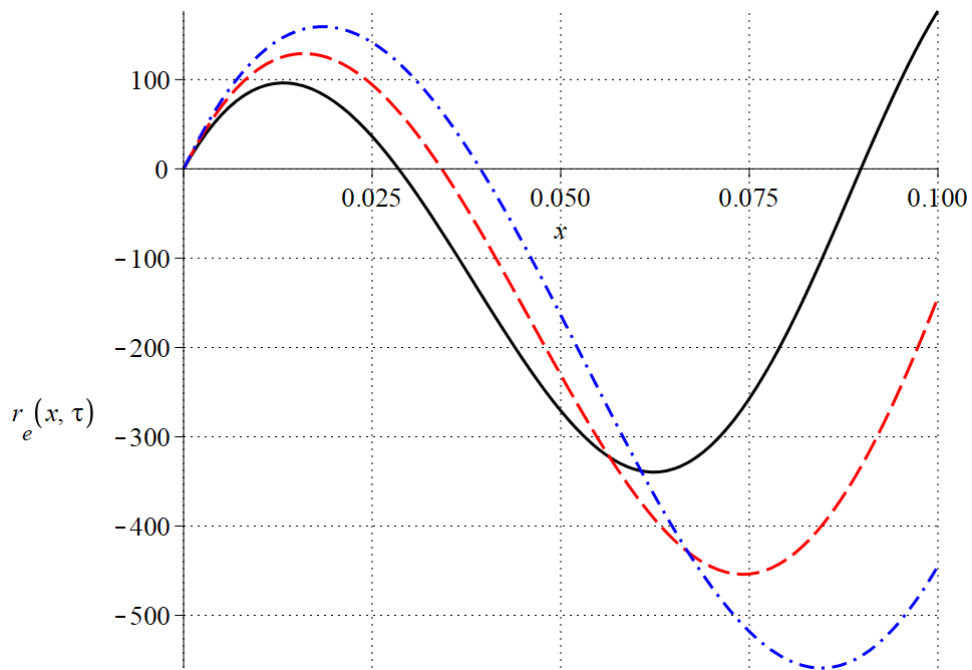


Рис. 4.3.23. Зависимости $r_e(x, \tau)$ от x . Сплошная линия $\tau = 0.05$, пунктирная $\tau = 0.07$, штрихпунктирная $\tau = 0.09$.

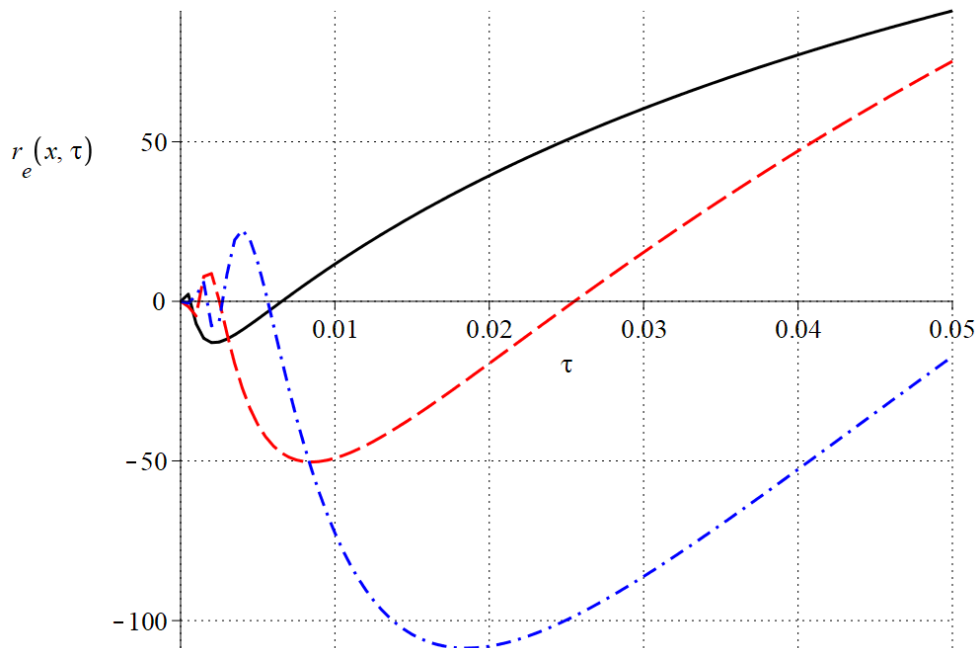


Рис. 4.3.24. Зависимости $r_e(x, \tau)$ от τ . Сплошная линия $x = 0.01$, пунктирная $x = 0.02$, штрихпунктирная $x = 0.03$.

4.4. Изгиб конечного электромагнитоупругого стержня

Аналогично параграфу 3.4 рассматриваем стержень единичной длины, шарнирно закрепленный в сечениях с координатами $x = 0$ и $x = 1$, которому согласно (2.3.4) соответствуют следующие равенства

$$w|_{x=0} = w|_{x=1} = \psi'|_{x=0} = \psi'|_{x=1} = 0. \quad (4.4.1)$$

Далее ограничимся использованной в параграфе 4.2 моделью Эйлера-Бернулли и квазистатическим приближением, соответствующим гипотезе (3.1.30). При этом с учетом (4.2.1) условия (4.4.1) записываются так:

$$w|_{x=0} = w|_{x=1} = w''|_{x=0} = w''|_{x=1} = 0. \quad (4.4.2)$$

Соответствующее уравнение проще получить, записывая равенство (4.2.7) с учетом (4.2.14) в пространстве оригиналов по Фурье:

$$(s + \gamma) \left[s^2 w^L + r^2 w^{(4)L} \right] - \alpha H_0 \gamma s \left\{ 2E_{30} w'^L + H_0 \left[r^2 (s + \gamma) w''^L - (s - \gamma) w^L \right] \right\} = (s + \gamma) p^L. \quad (4.4.3)$$

Аналогичным образом с помощью (4.2.15) для нетривиальных компонент электромагнитного поля получаем:

$$e_1^L = \frac{2\gamma H_0 s}{s + \gamma} w^L, \quad y_1^L = -\frac{H_0 s (s - \gamma)}{s + \gamma} w^L, \quad v_3^L = -s H_0 w'^L, \quad r_e^L = -\frac{2H_0 \gamma s}{s + \gamma} w'^L. \quad (4.4.4)$$

Аналитически построить систему собственных функций для краевой задачи (4.4.2), (4.4.3) не представляется возможным. Поэтому далее положим, что начальное электрическое поле отсутствует:

$$E_{30} = 0. \quad (4.4.5)$$

При этом удовлетворяющее граничным условиям (4.4.2) решение задачи и внешнюю нагрузку можно представить в виде рядов Фурье:

$$w(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(\tau) \sin \lambda_n x, \quad p(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(\tau) \sin \lambda_n x, \quad \lambda_n = \pi n. \quad (4.4.6)$$

Тогда согласно (4.2.1) и (4.4.4) угол поворота сечения и компоненты электромагнитного поля записываются так:

$$\begin{aligned} \psi(x, \tau) &= \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(\tau) \cos \lambda_n x, \quad e_1(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} e_{1n}(\tau) \sin \lambda_n x, \quad y_1(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} y_{1n}(\tau) \sin \lambda_n x, \\ v_3(x, \tau) &= \sum_{n=1}^{\infty} v_{3n}(\tau) \cos \lambda_n x, \quad r_e(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} r_{en}(\tau) \cos \lambda_n x, \end{aligned} \quad (4.4.7)$$

где

$$\psi_n = -\lambda_n w_n, \quad e_{1n}^L = \frac{2\gamma H_0 s}{s + \gamma} w_n^L, \quad y_{1n}^L = -\frac{H_0 s (s - \gamma)}{s + \gamma} w_n^L, \quad v_{3n}^L = -H_0 \lambda_n s w_n^L, \quad r_{en}^L = -\frac{2H_0 \gamma \lambda_n s}{s + \gamma} w_n^L. \quad (4.4.8)$$

Подставляя ряды (4.4.6) в (4.4.3), с учетом (4.4.5) приходим к следующим равенствам:

$$w_n^L = M_{wn}^L(s) p_n^L, \quad M_{wn}^L(s) = \frac{s + \gamma}{L_n(s)}, \quad N_{wn}(s) = s + \gamma, \quad (4.4.9)$$

$$L_n(s) = b_{n0} s^3 + b_{n1} s^2 + b_{n2} s + b_{n3},$$

$$b_{n0} = 1, \quad b_{n1} = H_0^2 \gamma (r^2 \lambda_n^2 + 1) + \gamma, \quad b_{n2} = H_0^2 \gamma^2 (r^2 \lambda_n^2 - 1) + r^2 \lambda_n^4, \quad b_{n3} = \gamma r^2 \lambda_n^4.$$

Тогда из (4.4.8) получаем

$$a_n^L = M_{an}^L(s) p_n^L \quad (a = \psi, e_1, y_1, v_3, r_e), \quad (4.4.10)$$

где

$$M_{\psi n}^L(s) = -\lambda_n M_{wn}^L(s), \quad M_{r_e n}^L(s) = -\lambda_n M_{e_1 n}^L(s), \quad M_{e_1 n}^L(s) = \frac{N_{e_1 n}(s)}{L_n(s)}, \quad M_{v_3 n}^L(s) = \frac{N_{v_3 n}(s)}{L_n(s)}, \quad M_{y_1 n}^L(s) = \frac{N_{y_1 n}(s)}{L_n(s)}, \quad (4.4.11)$$

$$N_{e_1 n}(s) = 2\gamma H_0 s, \quad N_{v_3 n}(s) = -H_0 \lambda_n s (s + \gamma), \quad N_{y_1 n}(s) = -H_0 s (s - \gamma).$$

В пространстве оригиналов равенства (4.4.9) и (4.4.10) принимают следующий вид:

$$a_n(\tau) = M_{an}(\tau) * p(\tau) \quad (a = w, \psi, e_1, y_1, v_3, r_e). \quad (4.4.12)$$

Оригиналы функций $M_{wn}^L(s)$, $M_{e_1 n}^L(s)$, $M_{v_3 n}^L(s)$, и $M_{y_1 n}^L(s)$ достаточно просто находятся с помощью вычетов:

$$M_{an}(\tau) = H(\tau) \sum_{j=1}^3 A_{anj} e^{s_{nj} \tau} \quad (a = w, e_1, y_1, v_3), \quad A_{anj} = \frac{N_{an}(s_{nj})}{L'_n(s_{nj})}, \quad (4.4.13)$$

где

$$M_{\psi n}(\tau) = -\lambda_n M_{wn}(\tau), \quad M_{r_e n}(\tau) = -\lambda_n M_{e_1 n}(\tau), \quad L'_n(s) = 3b_{n0} s^2 + 2b_{n1} s + b_{n2}. \quad (4.4.14)$$

Здесь s_{nj} нули многочлена $L_n(s)$.

Коэффициенты рядов для искомым функций в (4.4.6), (4.4.7) в

соответствии с (3.4.11) и (3.4.12) определяются так:

$$\begin{aligned} w_n(\tau) &= M_{wn}(\tau) * p_n(\tau), \quad \psi_n(\tau) = -\lambda_n M_{wn}(\tau) * p_n(\tau), \\ e_{1n}(\tau) &= M_{e_{1n}}(\tau) * p_n(\tau), \quad y_{1n}(\tau) = M_{y_{1n}}(\tau) * p_n(\tau), \\ v_{3n}(\tau) &= M_{v_{3n}}(\tau) * p_n(\tau), \quad r_{en}(\tau) = -\lambda_n M_{e_{1n}}(\tau) * p_n(\tau). \end{aligned} \quad (4.4.15)$$

4.5. Примеры расчетов изгиба конечного электромагнитоупругого стержня

Полагаем, что материал стержня характеризуется безразмерными параметрами (3.5.1), а нагрузка имеет аналогичный (3.5.2) вид:

$$p(x, \tau) = f(\tau) \delta(x - x_0), \quad 0 < x_0 < 1. \quad (4.5.1)$$

Тогда из (4.4.15) с использованием (3.5.3) получаем

$$\begin{aligned} w_n(\tau) &= 2M_{wn}(\tau) * f(\tau) \sin \lambda_n x_0, \quad \psi_n(\tau) = -2\lambda_n M_{wn}(\tau) * f(\tau) \sin \lambda_n x_0, \\ e_{1n}(\tau) &= 2M_{e_{1n}}(\tau) * f(\tau) \sin \lambda_n x_0, \quad y_{1n}(\tau) = 2M_{y_{1n}}(\tau) * f(\tau) \sin \lambda_n x_0, \\ v_{3n}(\tau) &= 2M_{v_{3n}}(\tau) * f(\tau) \sin \lambda_n x_0, \quad r_{en}(\tau) = -2\lambda_n M_{e_{1n}}(\tau) * f(\tau) \sin \lambda_n x_0. \end{aligned} \quad (4.5.2)$$

Подставляя эти равенства в (4.4.6) и (4.4.7), приходим к следующим рядам:

$$\begin{aligned} w(x, \tau) &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} M_{wn}(\tau) * f(\tau) \sin \lambda_n x_0 \sin \lambda_n x, \\ \psi(x, \tau) &= -2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n M_{wn}(\tau) * f(\tau) \sin \lambda_n x_0 \cos \lambda_n x, \\ e_1(x, \tau) &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} M_{e_{1n}}(\tau) * f(\tau) \sin \lambda_n x_0 \sin \lambda_n x, \\ y_1(x, \tau) &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} M_{y_{1n}}(\tau) * f(\tau) \sin \lambda_n x_0 \sin \lambda_n x, \\ v_3(x, \tau) &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} M_{v_{3n}}(\tau) * f(\tau) \sin \lambda_n x_0 \cos \lambda_n x, \\ r_e(x, \tau) &= -2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n M_{e_{1n}}(\tau) * f(\tau) \sin \lambda_n x_0 \cos \lambda_n x. \end{aligned} \quad (4.5.3)$$

Для примера аналогично параграфу 3.5 положим, что нагрузка изменяется по закону $f(\tau) = H(\tau)$. При этом часть сверток с учетом (4.4.13) может быть упрощена:

$$\begin{aligned}
M_{an}(\tau) * f(\tau) &= \sum_{j=1}^3 A_{anj} e^{s_{nj}\tau} H(\tau) * H(\tau) \\
&= H(\tau) \sum_{j=1}^3 \frac{A_{anj}}{s_{nj}} (e^{s_{nj}\tau} - 1) \quad (a = w, e_1, y_1, v_3)
\end{aligned}
\tag{4.5.4}$$

Учитывая (4.5.4), при такой нагрузке ряды (4.5.3) удобно записать так:

$$\begin{aligned}
w(x, \tau) &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} M_{wn}(\tau) \sin \lambda_n x_0 \sin \lambda_n x, \\
\psi(x, \tau) &= -2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n M_{wn}(\tau) \sin \lambda_n x_0 \cos \lambda_n x, \\
e_1(x, \tau) &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} M_{e_1n}(\tau) \sin \lambda_n x_0 \sin \lambda_n x, \\
v_3(x, \tau) &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} M_{v_3n}(\tau) \sin \lambda_n x_0 \cos \lambda_n x, \\
y_1(x, \tau) &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} M_{y_1n}(\tau) \sin \lambda_n x_0 \sin \lambda_n x, \\
r_e(x, \tau) &= -2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n M_{e_1n}(\tau) \sin \lambda_n x_0 \sin \lambda_n x.
\end{aligned}
\tag{4.5.5}$$

Результаты вычислений представлены на рис. 4.5.1 – 4.5.12 для нагрузки в центре стержня ($x_0 = 1/2$). Суммирование рядов проводится с точностью до 0.0001.

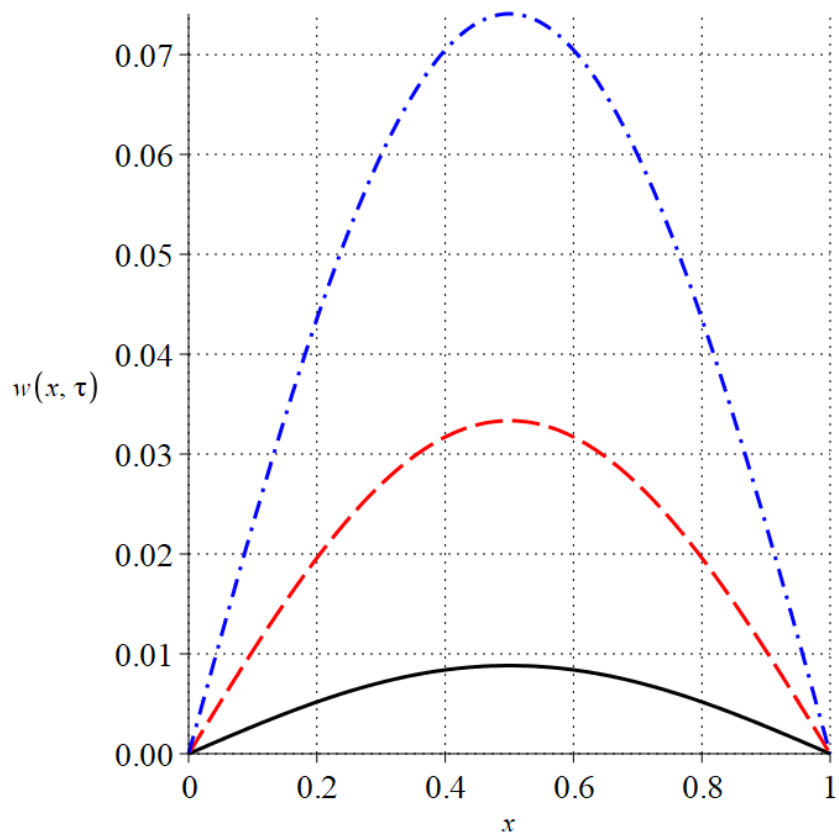


Рис. 4.5.1. Зависимости $w(x, \tau)$ от x . Сплошная линия $\tau = 0.1$, пунктирная $\tau = 0.2$, штрихпунктирная $\tau = 0.3$.

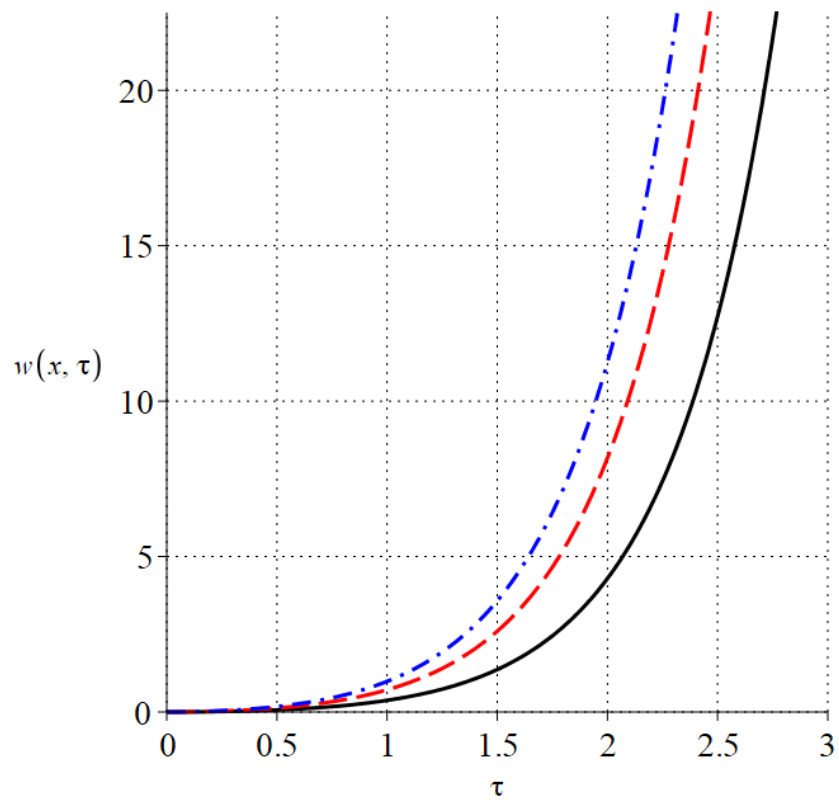


Рис. 4.5.2. Зависимости $w(x, \tau)$ от τ . Сплошная линия $x = 0.1$, пунктирная $x = 0.2$, штрихпунктирная $x = 0.3$.

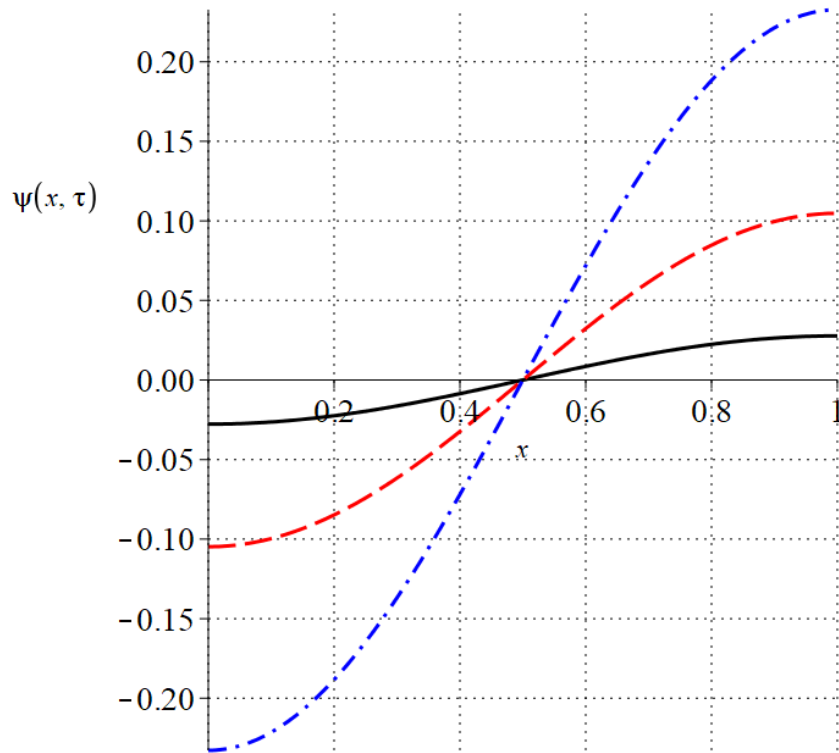


Рис. 4.5.3. Зависимости $\psi(x, \tau)$ от x . Сплошная линия $\tau = 0.1$, пунктирная $\tau = 0.2$, штрихпунктирная $\tau = 0.3$.

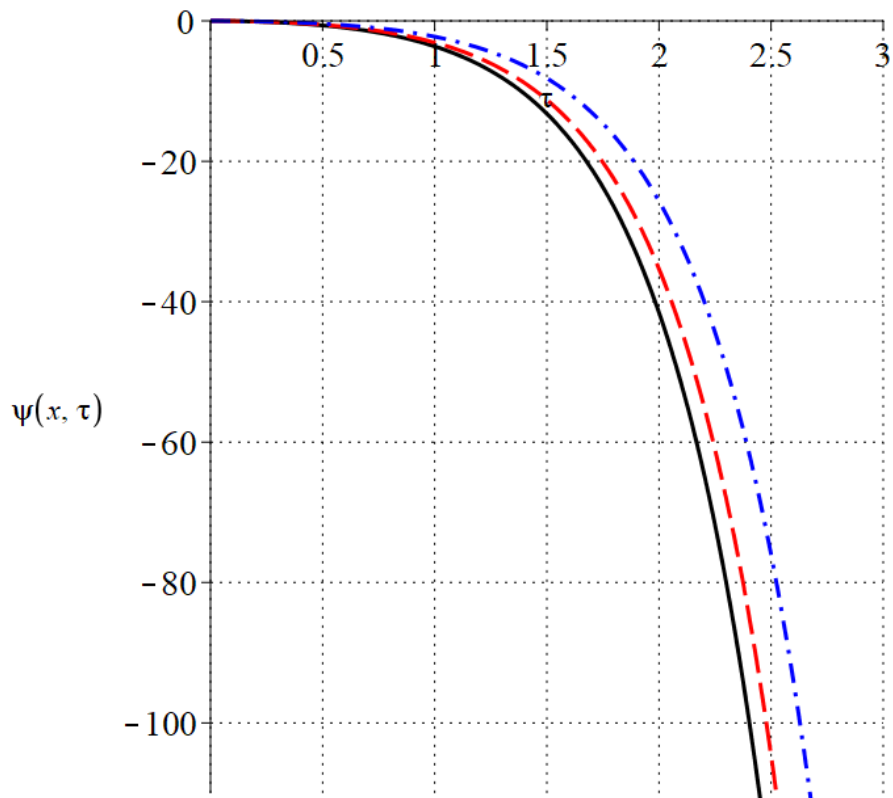


Рис. 4.5.4. Зависимости $\psi(x, \tau)$ от τ . Сплошная линия $x = 0.1$, пунктирная $x = 0.2$, штрихпунктирная $x = 0.3$.

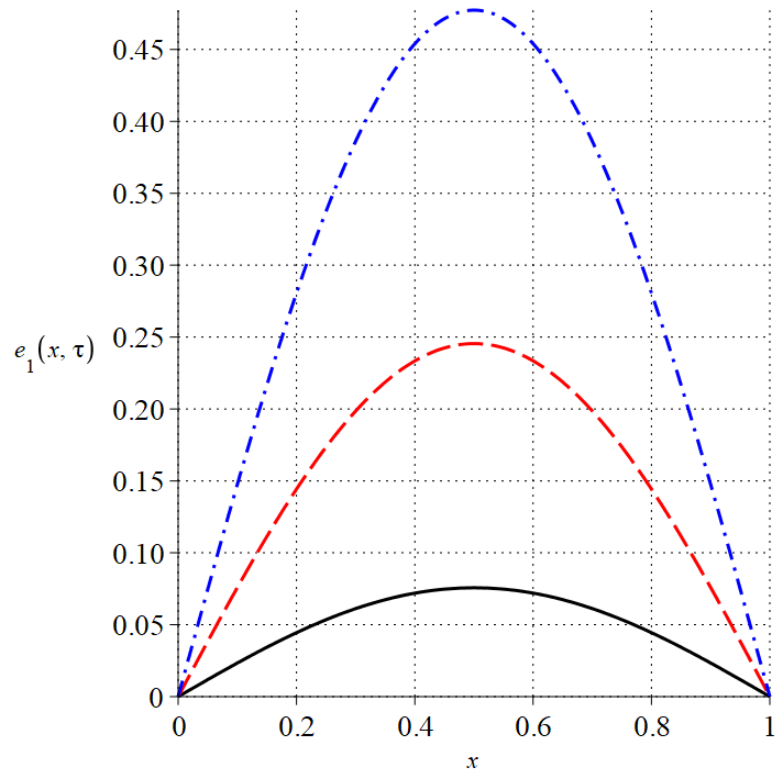


Рис. 4.5.5. Зависимости $e_1(x, \tau)$ от x . Сплошная линия $\tau = 0.1$, пунктирная $\tau = 0.2$, штрихпунктирная $\tau = 0.3$.

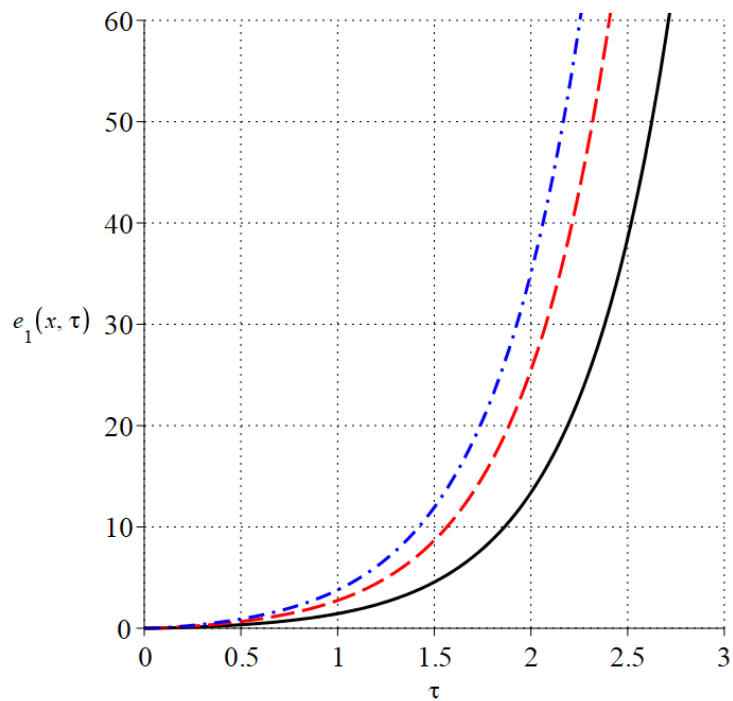


Рис. 4.5.6. Зависимости $e_1(x, \tau)$ от τ . Сплошная линия $x = 0.1$, пунктирная $x = 0.2$, штрихпунктирная $x = 0.3$.

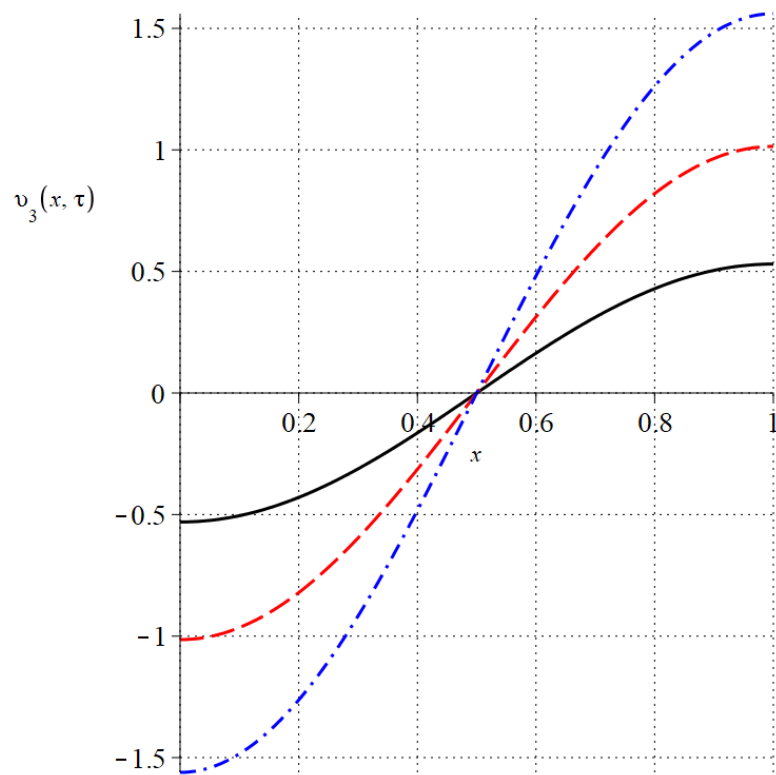


Рис. 4.5.7. Зависимости $v_3(x, \tau)$ от x . Сплошная линия $\tau = 0.1$, пунктирная $\tau = 0.2$, штрихпунктирная $\tau = 0.3$.

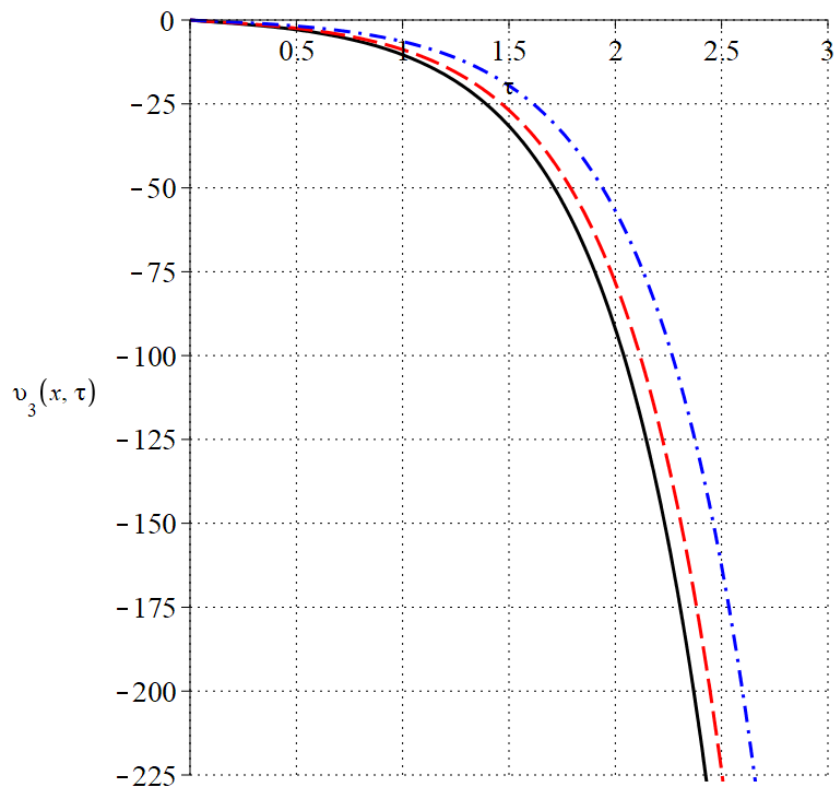


Рис. 4.5.8. Зависимости $v_3(x, \tau)$ от τ . Сплошная линия $x = 0.1$, пунктирная $x = 0.2$, штрихпунктирная $x = 0.3$.

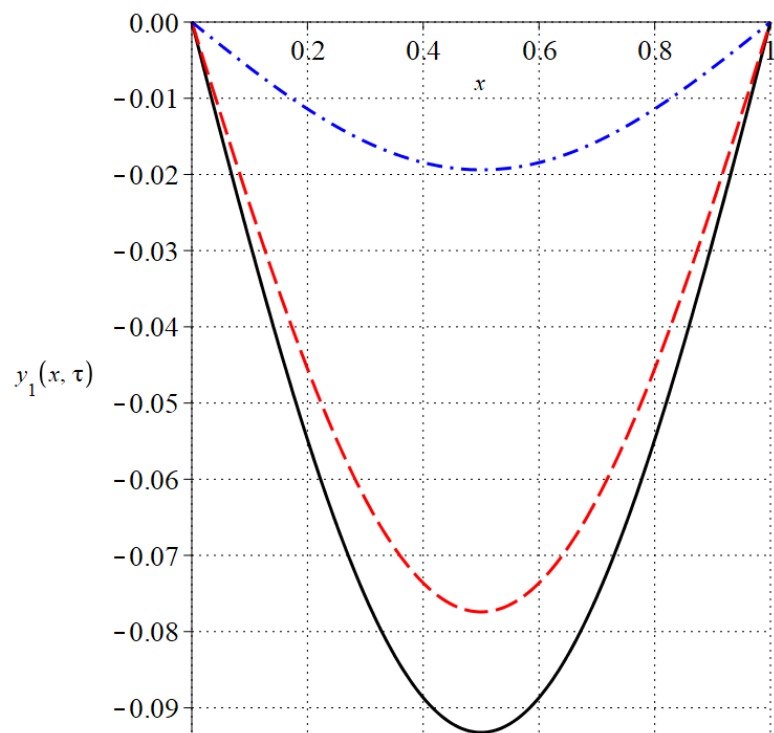


Рис. 4.5.9. Зависимости $y_1(x, \tau)$ от x . Сплошная линия $\tau = 0.1$, пунктирная $\tau = 0.2$, штрихпунктирная $\tau = 0.3$.

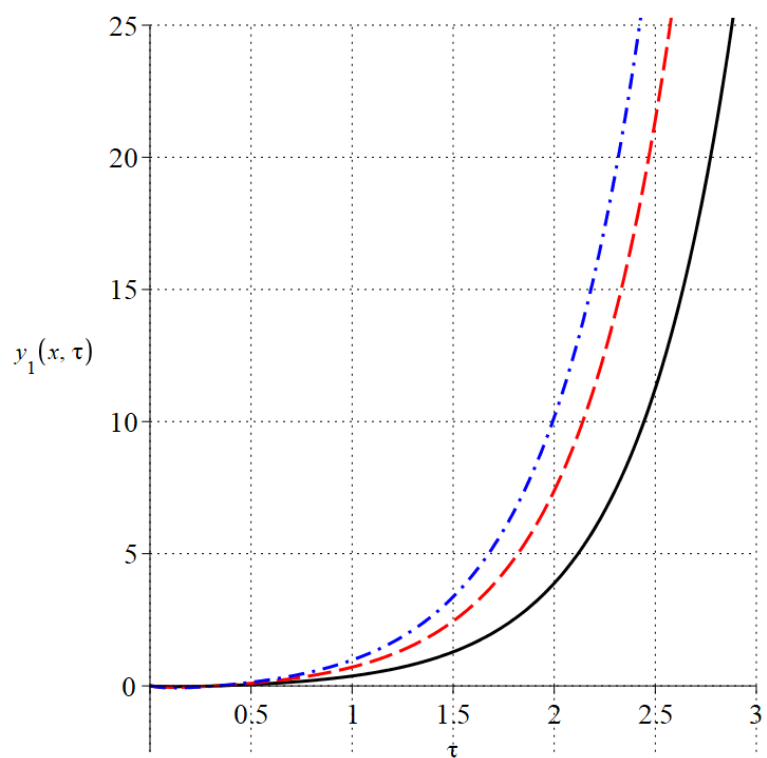


Рис. 4.5.10. Зависимости $y_1(x, \tau)$ от τ . Сплошная линия $x = 0.1$, пунктирная $x = 0.2$, штрихпунктирная $x = 0.3$.

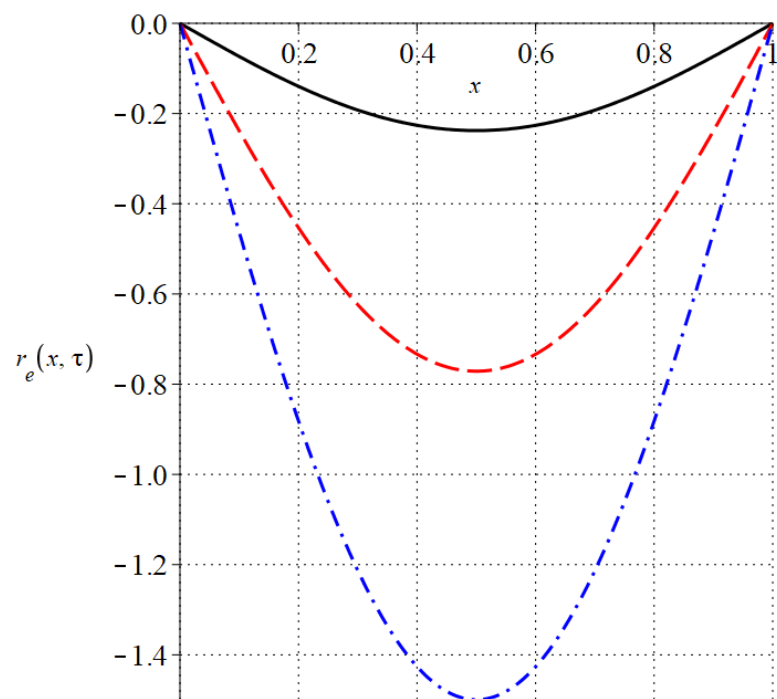


Рис. 4.5.11. Зависимости $r_e(x, \tau)$ от x . Сплошная линия $\tau = 0.1$, пунктирная $\tau = 0.2$, штрихпунктирная $\tau = 0.3$.

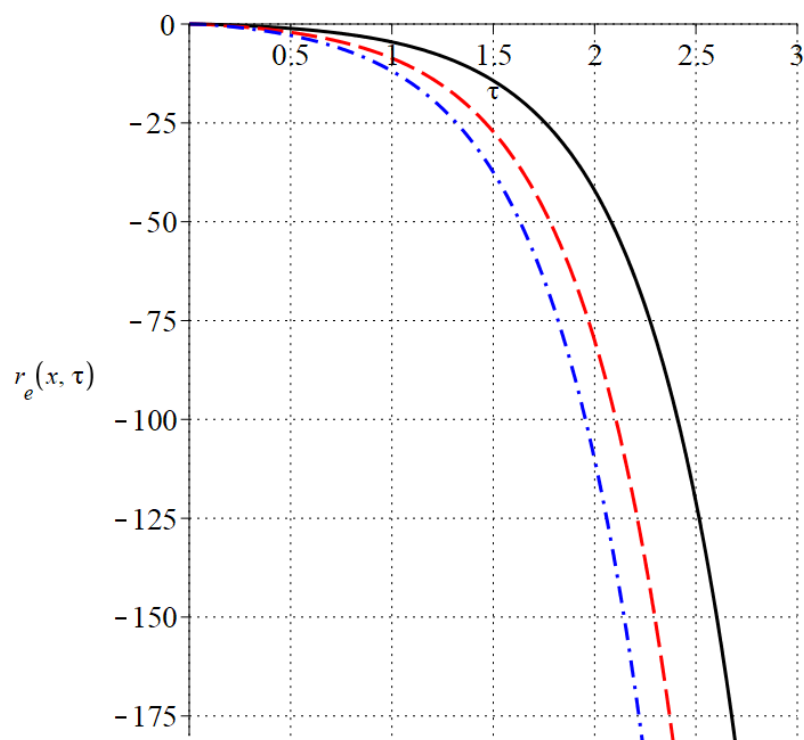


Рис. 4.5.12. Зависимости $r_e(x, \tau)$ от τ . Сплошная линия $x = 0.1$, пунктирная $x = 0.2$, штрихпунктирная $x = 0.3$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты диссертационной работы следующие.

1. Построена связанная нестационарная модель, описывающая нестационарные процессы в тонких электромагнитных оболочках, пластинах и стержнях.
2. Дано решение задач о нестационарных продольных колебаниях бесконечного и конечного электромагнитоупругих стержней.
3. Проведено подробное исследование задач о нестационарном изгибе бесконечного и конечного электромагнитоупругих стержней.
4. Показано, что учет связанности задач приводит к качественному изменению напряженно-деформированного состояния тонкостенных упругих тел.

ПРИЛОЖЕНИЕ

П.1. Оригиналы функций $F_{ap0}^{FL}(q, s)$ и $F_{ap1}^{FL}(q, s)$ в параграфе 4.2

Здесь речь пойдет об оригиналах функций в (4.2.13), (4.2.16) и (4.2.18).

Оригинал функции $F_{wp0}^{FL}(q, s)$ находим последовательным обращением преобразований Лапласа и Фурье [41, 78]:

$$F_{wp0}^F(q, \tau) = Y^F(q, \tau; -1)H(\tau), Y^F(q, \tau; \beta) = r^\beta q^{2\beta} \sin rq^2 \tau; \quad (\text{П.1.1})$$

$$F_{wp0}(x, \tau) = Y(x, \tau; -1)H(\tau). \quad (\text{П.1.2})$$

При выводе формулы (П.1.1) использовано соответствие:

$$g_1^L(s; z) = \frac{1}{s^2 + z^2}, g_1(\tau; z) = \frac{\sin z\tau}{z} H(\tau). \quad (\text{П.1.3})$$

Для построения оригинала функции $F_{wp1}^{FL}(q, s)$ представляем ее в виде

$$F_{wp1}^{FL}(q, s) = \left\{ H_0(1 + r^2 q^2) + 2 \frac{iqE_{30} - \gamma H_0}{s + \gamma} \right\} s g_2^L(s; rq^2) \quad (\text{П.1.4})$$

где

$$g_2^L(s; z) = \frac{1}{(s^2 + z^2)^2}. \quad (\text{П.1.5})$$

Теперь обращаем равенство (П.1.4) по Лапласу:

$$F_{wp1}^F(q, \tau) = H_0(1 + r^2 q^2) \dot{g}_2(\tau; rq^2) + 2(iqE_{30} - \gamma H_0) \dot{g}_2(\tau; rq^2) * e^{-\gamma\tau}, \quad (\text{П.1.6})$$

Для определения оригинала функции $g_2^L(s; z)$ используем равенство

$$\frac{\partial}{\partial z} g_1^L(s; z) = -2z g_2^L(s; z),$$

откуда с учетом (П.1.3) получаем

$$g_2(\tau; z) = -\frac{H(\tau)}{2z} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\sin z\tau}{z} \right) = \frac{\sin z\tau - z\tau \cos z\tau}{2z^3} H(\tau). \quad (\text{П.1.7})$$

Производная этой функции и ее свертка с экспонентой определяются так:

$$\dot{g}_2(\tau; z) = \frac{1}{2z} \tau_+ \sin z\tau; \quad (\text{П.1.8})$$

$$\begin{aligned} \dot{g}_2(\tau; z) * e^{-\gamma\tau} &= \frac{H(\tau)}{2z} e^{-\gamma\tau} \int_0^\tau t e^{\gamma t} \sin zt dt = \\ &= \frac{H(\tau)}{2(z^2 + \gamma^2)} \left[\left(\gamma\tau + 1 - \frac{2\gamma^2}{z^2 + \gamma^2} \right) \frac{\sin z\tau}{z} - \left(\tau - \frac{2\gamma}{z^2 + \gamma^2} \right) \cos z\tau - e^{-\gamma\tau} \frac{2\gamma}{z^2 + \gamma^2} \right]. \end{aligned} \quad (\text{П.1.9})$$

Тогда формула (П.1.6) преобразовывается следующим образом

$$\begin{aligned} F_{wp1}^F(q, \tau) &= H(\tau) \left\langle \frac{\tau}{2} H_0 [Y^F(q, \tau; -1) + rY^F(q, \tau; 0)] + \right. \\ &+ (\gamma H_0 - iqE_{30}) \left\{ 2\gamma X^F(q; 2) [e^{-\gamma\tau} - Z^F(q, \tau)] + \tau X^F(q; 1) Z^F(q, \tau) + \right. \\ &\left. \left. + [2\gamma^2 X^F(q; 2) - (\tau\gamma + 1) X^F(q; 1)] Y^F(q, \tau; -1) \right\} \right\rangle. \end{aligned} \quad (\text{П.1.10})$$

где

$$X^F(q; \alpha) = (\gamma^2 + r^2 q^4)^{-\alpha}, \quad Z^F(q, \tau) = \cos rq^2 \tau, \quad (\text{П.1.11})$$

а функция $Y^F(q, \tau; \beta)$ определена в (П.1.1).

Оригинал соотношения (П.1.10) записываем с учетом свойств преобразования Фурье (здесь звездочка обозначает свертку по x):

$$\begin{aligned} F_{wp1}(x, \tau) &= H(\tau) \left\langle \frac{\tau}{2} H_0 [Y(x, \tau; -1) + rY(x, \tau; 0)] + \right. \\ &+ \left(\gamma H_0 + E_{30} \frac{\partial}{\partial x} \right) \left\{ 2\gamma X(x; 2) * [e^{-\gamma\tau} - Z(x, \tau)] + \tau Z(x, \tau) * X(x; 1) + \right. \\ &\left. \left. + [2\gamma^2 X(x; 2) - (\tau\gamma + 1) X(x; 1)] * Y(x, \tau; -1) \right\} \right\rangle. \end{aligned} \quad (\text{П.1.12})$$

Функцию $X(x; 1)$ находим, обращая преобразование Фурье [78]:

$$X(x; 1) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos qxdq}{\gamma^2 + r^2 q^4} = \frac{\cos ax + \sin a|x|}{2\gamma^{3/2} \sqrt{2r}} e^{-a|x|}, \quad a = \sqrt{\frac{\gamma}{2r}}. \quad (\text{П.1.13})$$

Отсюда, используя соответствующее равенство в (П.1.11) и дифференцирование по параметру, получаем функцию $X(x; 2)$:

$$X(x; 2) = -\frac{1}{2\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} X(x; 1) = \frac{3(\cos ax + \sin a|x|) + 2ax \sin ax}{8\gamma^{7/2} \sqrt{2r}} e^{-a|x|}. \quad (\text{П.1.14})$$

Остальные входящие в (П.1.2) и (П.1.12) функции при $\tau > 0$ находим

аналогично (П.1.13):

$$\begin{aligned}
Y(x, \tau; 0) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \sin r q^2 \tau \cos q x d q = -\frac{1}{2\sqrt{\pi r \tau}} \sin\left(bx^2 - \frac{\pi}{4}\right) = \\
&= -\sqrt{\frac{b}{\pi}} \sin\left(bx^2 - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{\frac{b}{\pi}} \cos\left(bx^2 + \frac{\pi}{4}\right), \quad b = \frac{1}{4r\tau}, \\
Y(x, \tau; -1) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin r q^2 \tau}{r q^2} \cos q x d q = \\
&= \frac{|x|}{2r} \left[S_2(bx^2) - C_2(bx^2) + \sqrt{\pi r \tau} \sin\left(bx^2 + \frac{\pi}{4}\right) \right] = \\
&= \frac{|x|}{2r} \left[S_2(bx^2) - C_2(bx^2) + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{b}} \sin\left(bx^2 + \frac{\pi}{4}\right) \right], \\
Z(x, \tau) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos r q^2 \tau \cos q x d q = \frac{1}{2\sqrt{\pi r \tau}} \sin\left(bx^2 + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{\frac{b}{\pi}} \sin\left(bx^2 + \frac{\pi}{4}\right). \quad (\text{П.1.15})
\end{aligned}$$

Здесь $C_2(y)$ и $S_2(y)$ - косинус- и синус-интегралы Френеля:

$$C_2(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^y \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt, \quad S_2(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^y \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt. \quad (\text{П.1.16})$$

Поскольку под такими наименованиями используются различные функции, то здесь используем обозначения из [82], где также вводятся функции

$$C(y) = \int_0^y \cos \frac{\pi t^2}{2} dt, \quad S(y) = \int_0^y \frac{\pi t^2}{2} dt. \quad (\text{П.1.17})$$

Они связаны с (П.1.16) так:

$$C(y) = C_2\left(\frac{\pi y^2}{2}\right), \quad S(y) = S_2\left(\frac{\pi y^2}{2}\right). \quad (\text{П.1.18})$$

Кроме того, в [82] используются вспомогательные функции

$$\begin{aligned}
g(y) &= \left[\frac{1}{2} - C(y) \right] \cos \frac{\pi y^2}{2} + \left[\frac{1}{2} - S(y) \right] \sin \frac{\pi y^2}{2}, \\
f(y) &= \left[\frac{1}{2} - S(y) \right] \cos \frac{\pi y^2}{2} - \left[\frac{1}{2} - C(y) \right] \sin \frac{\pi y^2}{2},
\end{aligned} \quad (\text{П.1.19})$$

что эквивалентно равенствам

$$\begin{aligned}
S(y) &= \frac{1}{2} - f(y) \cos \frac{\pi y^2}{2} - g(y) \sin \frac{\pi y^2}{2}, \\
C(y) &= \frac{1}{2} + f(y) \sin \frac{\pi y^2}{2} - g(y) \cos \frac{\pi y^2}{2}.
\end{aligned}
\tag{П.1.20}$$

Отметим, что поведение первой и третьей функций в (П.1.15) очевидно из приведенных там формул. Для построения асимптотики для функции $Y(x, \tau; -1)$ с учетом (П.1.18) и (П.1.20) преобразуем соответствующую разность интегралов Френеля:

$$\begin{aligned}
S_2(y) &= S\left(\sqrt{\frac{2y}{\pi}}\right) = \frac{1}{2} - f\left(\sqrt{\frac{2y}{\pi}}\right) \cos y - g\left(\sqrt{\frac{2y}{\pi}}\right) \sin y, \\
C_2(y) &= C\left(\sqrt{\frac{2y}{\pi}}\right) = \frac{1}{2} + f\left(\sqrt{\frac{2y}{\pi}}\right) \sin y - g\left(\sqrt{\frac{2y}{\pi}}\right) \cos y,
\end{aligned}
\tag{П.1.21}$$

$$S_2(y) - C_2(y) = \sqrt{2} \left[g\left(\sqrt{\frac{2y}{\pi}}\right) \cos\left(y + \frac{\pi}{4}\right) - f\left(\sqrt{\frac{2y}{\pi}}\right) \sin\left(y + \frac{\pi}{4}\right) \right],$$

и записываем функцию $Y(x, \tau; -1)$ так:

$$\begin{aligned}
Y(x, \tau; -1) &= \\
&= \frac{|x|}{r\sqrt{2}} \left\{ g\left(|x|\sqrt{\frac{2b}{\pi}}\right) \cos\left(bx^2 + \frac{\pi}{4}\right) + \left[\frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\pi}{b}} - f\left(|x|\sqrt{\frac{2b}{\pi}}\right) \right] \sin\left(bx^2 + \frac{\pi}{4}\right) \right\}.
\end{aligned}
\tag{П.1.22}$$

При этом для функций в (П.1.19) можно применять асимптотические разложения при $y \rightarrow \infty$ [82]:

$$\begin{aligned}
g(y) &\sim \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(4m+1)!!}{\pi^{2(m+1)} y^{4m+3}} = \frac{1}{\pi^2 y^3} - \frac{15}{\pi^4 y^7} + \dots, \\
f(y) &= \frac{1}{\pi y} + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{(4m-1)!!}{\pi^{2m+1} y^{4m+1}} = \frac{1}{\pi y} - \frac{3}{\pi^3 y^5} + \dots
\end{aligned}
\tag{П.1.23}$$

В результате получаем, что при $\tau \rightarrow +0$ ($bx^2 \rightarrow +\infty$) имеет место следующее соотношение:

$$Y(x, \tau; -1) \sim \frac{\pi|x| - 2}{4r\sqrt{\pi b}} \sin\left(bx^2 + \frac{\pi}{4}\right).
\tag{П.1.24}$$

Однако, вероятно, при расчетах удобнее использовать аппроксимации

рациональными функциями, гарантирующие абсолютную ошибку $|\varepsilon(y)| \leq 2 \cdot 10^{-3}$ на интервале $0 \leq y < \infty$:

$$g(y) \approx \frac{1}{2 + 4,142y + 3,492y^2 + 6,670y^3}, \quad f(y) \approx \frac{1 + 0,926y}{2 + 1,792y + 3,104y^2}. \quad (\text{П.1.25})$$

Формулы в (П.1.16) нельзя использовать при $\tau = 0$. Поэтому из (П.1.1) и (П.1.11) находим

$$Y^F(q, 0; 0) = Y^F(q, 0; -1) = 0, \quad Z^F(q, 0) = 1.$$

Отсюда, а также из (П.1.16), следуют равенства

$$\begin{aligned} Y(x, 0; 0) = Y(x, 0; -1) = 0, \quad Z(x, 0) = \delta(x), \quad \tau Z(x, \tau) \Big|_{\tau=0} = 0, \\ X(x; 2) * \left[e^{-\gamma\tau} - Z(x, \tau) \right] \Big|_{\tau=0} = X(x; 2) - X(x; 2) * Z(x, 0) = 0. \end{aligned} \quad (\text{П.1.26})$$

Они и используются при вычислениях в точке $\tau = 0$.

Оригиналы функций в (4.2.18) определяются с помощью свойств преобразований:

$$\begin{aligned} F_{\text{впн}}(x, \tau) &= -F'_{\text{впн}}(x, \tau), \\ F_{e_1, \text{пн}}(x, \tau) &= 2\gamma H_0 \left[F_{\text{впн}}(x, \tau) - F_{0\text{ен}}(x, \tau) \right], \\ F_{y_1, \text{пн}}(x, \tau) &= -H_0 \left[\dot{F}'_{\text{впн}}(x, \tau) - 2\gamma F_{\text{впн}}(x, \tau) + 2\gamma F_{0\text{ен}}(x, \tau) \right], \\ F_{v_3, \text{пн}}(x, \tau) &= -H_0 \dot{F}'_{\text{впн}}(x, \tau), \\ F_{r_e, \text{пн}}(x, \tau) &= -2H_0 \gamma e^{-\gamma\tau} * \dot{F}'_{\text{впн}}(x, \tau) = -2H_0 \gamma \left[\delta(\tau) - \gamma e^{-\gamma\tau} \right] * F'_{\text{впн}}(x, \tau) = \\ &= -2H_0 \gamma \left[F'_{\text{впн}}(x, \tau) - F_{1\text{ен}}(x, \tau) \right], \\ F_{0\text{ен}}(x, \tau) &= \gamma e^{-\gamma\tau} * F_{\text{впн}}(x, \tau), \quad F_{1\text{ен}}(x, \tau) = \gamma e^{-\gamma\tau} * F'_{\text{впн}}(x, \tau). \end{aligned} \quad (\text{П.1.27})$$

Входящие сюда производные согласно (П.1.2), (П.1.12) и (П.1.26) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} F_{\text{впн}0}(x, \tau) &= Y'(x, \tau; -1) H(\tau), \\ F'_{\text{впн}1}(x, \tau) &= H(\tau) \left\langle \frac{\tau}{2} H_0 \left[Y'(x, \tau; -1) + rY(x, \tau; 0) \right] + \right. \\ &+ \left(\gamma H_0 + E_{30} \frac{\partial}{\partial x} \right) \left\{ 2\gamma X'(x; 2) * \left[e^{-\gamma\tau} - Z(x, \tau) \right] + \tau Z(x, \tau) * X'(x; 1) + \right. \\ &\left. \left. + \left[2\gamma^2 X'(x; 2) - (\tau\gamma + 1) X'(x; 1) \right] * Y(x, \tau; -1) \right\} \right\rangle; \end{aligned} \quad (\text{П.1.28})$$

$$\begin{aligned}
F_{wp0}(x, \tau) &= \dot{Y}(x, \tau; -1)H(\tau), \\
\dot{F}_{wp1}(x, \tau) &= H(\tau) \left\langle \frac{\tau}{2} H_0 [\dot{Y}(x, \tau; -1) + r\dot{Y}(x, \tau; 0)] + \right. \\
&+ \left. \left(\gamma H_0 + E_{30} \frac{\partial}{\partial x} \right) \left\{ (Z(x, \tau) + \tau \dot{Z}(x, \tau)) * X(x; 1) - \right. \right. \\
&- 2\gamma X(x; 2) * [\gamma e^{-\gamma \tau} + \dot{Z}(x, \tau)] - \\
&\left. \left. - \gamma X(x; 1) * Y(x, \tau; -1) + [2\gamma^2 X(x; 2) - (\tau\gamma + 1) X(x; 1)] * \dot{Y}(x, \tau; -1) \right\} \right\rangle; \tag{П.1.29}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{F}'_{wp0}(x, \tau) &= \dot{Y}'(x, \tau; -1)H(\tau) \\
\dot{F}'_{wp1}(x, \tau) &= H(\tau) \left\langle \frac{\tau}{2} H_0 [\dot{Y}'(x, \tau; -1) + r\dot{Y}'(x, \tau; 0)] + \right. \\
&+ \left. \left(\gamma H_0 + E_{30} \frac{\partial}{\partial x} \right) \left\{ (Z(x, \tau) + \tau \dot{Z}(x, \tau)) * X'(x; 1) - \right. \right. \\
&- 2\gamma X'(x; 2) * [\gamma e^{-\gamma \tau} + \dot{Z}(x, \tau)] - \\
&\left. \left. - \gamma X'(x; 1) * Y(x, \tau; -1) + [2\gamma^2 X'(x; 2) - (\tau\gamma + 1) X'(x; 1)] * \dot{Y}'(x, \tau; -1) \right\} \right\rangle. \tag{П.1.30}
\end{aligned}$$

Для использования этих формул (П.1.28) - (П.1.30) необходимы производные функций в (П.1.13) - (П.1.15). Сначала находим первые производные:

$$X'(x; 1) = -\frac{\sin ax}{2r\gamma} e^{-a|x|}, \quad X'(x; 2) = \frac{ax(\cos ax - \sin a|x|) - 2\sin ax}{8\gamma^3 r}; \tag{П.1.31}$$

$$\begin{aligned}
Y'(x, \tau; 0) &= -\frac{bx}{\sqrt{\pi r \tau}} \cos\left(bx^2 - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{2xb^{3/2}}{\sqrt{\pi}} \cos\left(bx^2 - \frac{\pi}{4}\right) = \\
&= -\frac{x}{4r\tau\sqrt{\pi r \tau}} \sin\left(bx^2 + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{2xb^{3/2}}{\sqrt{\pi}} \sin\left(bx^2 + \frac{\pi}{4}\right), \\
Y'(x, \tau; -1) &= \frac{1}{2r} \left\{ \frac{x(\pi|x| - 2)\sqrt{b}}{2r\sqrt{\pi}} \cos\left(bx^2 + \frac{\pi}{4}\right) + \right. \\
&\left. + \left[S_2(bx^2) - C_2(bx^2) + \sqrt{\pi r \tau} \sin\left(bx^2 + \frac{\pi}{4}\right) \right] \text{sign} x \right\}; \tag{П.1.32}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{Y}(x, \tau; 0) &= -\frac{2rb^{3/2}}{\sqrt{\pi}} \left[\cos\left(bx^2 + \frac{\pi}{4}\right) - 2bx^2 \sin\left(bx^2 + \frac{\pi}{4}\right) \right], \\ \dot{Y}(x, \tau; -1) &= \frac{b^{3/2}}{2\sqrt{\pi}} \left[2(2 + x^2|x|\pi) \cos\left(bx^2 + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{|x|}{b} \sin\left(bx^2 + \frac{\pi}{4}\right) \right],\end{aligned}\quad (\text{П.1.33})$$

$$\begin{aligned}\dot{Z}(x, \tau) &= \frac{2rb^{3/2}}{\sqrt{\pi}} \left[2bx^2 \cos\left(bx^2 + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(bx^2 + \frac{\pi}{4}\right) \right], \\ \dot{Y}'(x, \tau; 0) &= \frac{4xrb^{5/2}}{\sqrt{\pi}} \left[3\sin\left(bx^2 + \frac{\pi}{4}\right) + 2bx^2 \cos\left(bx^2 + \frac{\pi}{4}\right) \right], \\ \dot{Y}'(x, \tau; -1) &= \frac{x\sqrt{b}}{2|x|\sqrt{\pi}} \left[2bx^2(3\pi + 1) \cos\left(bx^2 + \frac{\pi}{4}\right) - \right. \\ &\quad \left. - (8b^2|x| + 4b^2x^4\pi - 1) \sin\left(bx^2 + \frac{\pi}{4}\right) \right].\end{aligned}\quad (\text{П.1.34})$$

Здесь учтены следующие равенства

$$\dot{b} = \frac{1}{4r} \frac{\partial \tau_+^{-1}}{\partial \tau} = -\frac{1}{4r} \tau_+^{-2} = -4rb^2; \quad (\text{П.1.35})$$

$$S_2'(y) - C_2'(y) = \frac{\sin y - \cos y}{\sqrt{2\pi y}} = -\frac{1}{\sqrt{\pi y}} \cos\left(y + \frac{\pi}{4}\right). \quad (\text{П.1.36})$$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Абрамян Б.Л. Об одной задаче распространения упругих волн в полупространстве // Докл. АН АрмССР. 1985. 81, N 3, С. 118-122.
2. Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М.: Наука, 1977. 272 с.
3. Амбарцумян С.А., Саркисян С.В. Магнитоупругие колебания электропроводящей ортотропной цилиндрической оболочки в продольном магнитном поле // Изв. Нац. АН Армении. Мех.. 1997. 50, N 3-4, С. 3-16.
4. Бабаев А. Э., Савин В.Г. Излучение нестационарных акустических волн толстостенной электроупругой сферой // Прикл. мех. (Киев). 1995. 31, N11, С. 25-32.
5. Бабаев А.Э., Бут Л.М., Савин В.Г. Нестационарные колебания тонкостенного цилиндрического пьезовибратора в жидкости при неосесимметричном электрическом возбуждении // Прикл. мех. (Киев). 1990. 26, N 12, С. 59-67.
6. Бабаев А.Э., Докучаева Л.И. Излучение нестационарных волн тонкостенным пьезокерамическим цилиндром, содержащим вязкую сжимаемую жидкость // Прикл. мех. (Киев). 1999. 35, N 12, С. 63-71.
7. Бабаев А.Э., Рябуха Ю.Н., Савин В.Г. Возбуждение нестационарными электрическими сигналами толстостенного радиально поляризованного пьезокерамического цилиндра // Прикл. мех. (Киев). 1994. 30, N 9, С. 24-30. (b13)
8. Бабаев А.Э., Рябуха Ю.Н., Савин В.Г. Возбуждение толстостенной пьезокерамической сферы нестационарными электрическими импульсами // Изв.АН. Мех. тверд. тела. 1995, N 5, С. 94-101.
9. Бабаев А.Э., Савин В. Г., Стадник А.И. Излучение звука системой пьезокерамических сферических оболочек при электрическом импульсном возбуждении // Прикл. мех. (Киев). 1988. 24, N 10, С. 34-40.
10. Бабаев А.Э., Савин В.Г., Джулинский А.В. Аналитический метод решения задачи излучения нестационарных волн сферическим пьезопреобразователем // Теор. и прикл. мех. (Киев). 2003, N 37, С. 195-199, 213.
11. Багдасарян Г.Е. Возбуждение сдвиговых поверхностных волн в полупространстве волной Релея // Изв. АН АрмССР. Мех.. 1990. 43, N 2, С. 38-43.
12. Багдасарян Г.Е., Асанян Д.Д. Основные уравнения и соотношения теории несимметричной магнитоупругости ферромагнитного тела. Проблемы механики деформируемых твердых тел // Сб. трудов, посвященный 80-летию С.А. Амбарцумяна. Ереван: Изд-во НАН Армении, 2002. С. 37-47.
13. Багдасарян Г.Е., Даноян З.Н. Электромагнитоупругие волны. Ереван: Изд-

во ЕГУ, 2006. 492 с.

14. Баженов В.Г., Игумнов Л.А. Методы граничных интегральных уравнений и граничных элементов в решении задач трехмерной динамической теории упругости с сопряженными полями. – М.: Физматлит, 2008. – 352 с.
15. Базаренко Н.А., Ворович И.И. Анализ трехмерного напряженного и деформированного состояния круговых цилиндрических оболочек. Построение уточненных теорий // ПММ. 1969. Т. 33. Вып. 3.1. С. 496-510.
16. Бай А.В., Сторожев В.А. Нормальные электроупругие волны в слое произвольного среза пьезокристалла кварца // Консонанс-2003: Акустический симпозиум. Киев: 2003. — 1-3 октября. С. 252-257.
17. Бардзокас Д.И., Кудрявцев Б.А., Сеник Н.А. Распространение волн в электромагнитоупругих средах. М.: Едиториал УРСС, 2003. 336 с.
18. Белоконь А.В. Об одном методе решения задач теории упругости для тел конечных размеров // ДАН СССР. 1977. Т. 233. №1. С. 56-59.
19. Белоконь А.В., Вовк Л.П. Об установившихся колебаниях электроупругой пластины переменной толщины // Прикл. Механика.-1982.-Т.18, №5.-С. 93-97.
20. Болкисев А. М. Особенности напряженного состояния цилиндрического пьезокерамического преобразователя в резонансном режиме работы // «Прикл. механика», 1988, № 2, с. 38-43.
21. Болкисев А. М., Ефимова Т. Л., Шульга Н. А. Колебания пьезокерамического полого цилиндра при механическом нагружении // «Прикл. механика», 1985, № 9, с. 109-112.
22. Болкисев А. М., Шульга Н. А. Вынужденные колебания вязкоупругого пьезокерамического цилиндра // «Прикл. механика», 1986, № 4, с. 103-106.
23. Болкисев А. М., Шульга Н. А. Вынужденные колебания пьезокерамического полого цилиндра (осевая поляризация) // «Прикл. механика», № 12, с. 109-111.
24. Болкисев А. М., Шульга Н. А. Вынужденные колебания пьезокерамического полого цилиндра (радиальная поляризация) // «Прикл. механика», 1985, № 5, с. 118-121.
25. Борисейко В. А. Исследование колебаний пьезокерамической цилиндрической оболочки, заполненной жидкостью // Тепловые напряжения в элементах конструкций. Киев: Наук. Думка, 1978. Вып. 18. С. 91-95.
26. Борисейко В.А. Связанные электроупругие колебания толстостенной пьезокерамической сферы в сжимаемой жидкости // В сб. Тепловые напряж. в

- элементах конструкций. Вып. 12, Киев: Наукова думка, 1972, с. 111-115.
27. Борисейко В.А., Улитко А.Ф. Связанные электроупругие колебания толстостенной пьезокерамической сферы // В сб.: Тепловые напряж. в элементах конструкций. Вып. II, Киев: Наукова думка, 1971, с. 121-126.
 28. Ватульян А.О. О некоторых закономерностях поведения решений в термоэлектроупругости // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. н.. 1999, N 3, С. 28-31, 128.
 29. Ватульян А.О., Гусева И.А. О колебаниях ортотропной полуплоскости с полостью//ПМТФ.- 1993.-№2.-С. 123-127.
 30. Ватульян А.О., Кубликов В.Л. Метод граничных элементов в электроупругости // Механика деформируемых тел. Межвузовский сб-к научных трудов. Ростов-на-Дону.: Изд-во ДГТУ, 1994. С. 17-21.
 31. Ватульян А.О., Чебакова Е. М. Фундаментальные решения для анизотропной упругой среды в случае установившихся колебаний // Теоретическая и прикладная механика. 2005. - вып. 40. - С. 174-178.
 32. Вековищева И.А. Вариационные принципы в теории электроупругости.// Прикл.механика. - 1971. Т.7. N9. С.129-134
 33. Вестяк В.А., Гачкевич А.Р., Мусий Р.С., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Двумерные нестационарные волны в электромагнитоупругих телах. – М. ФИЗ-МАТЛИТ, 2019. - 288 с.
 34. Вестяк В.А., Тарлаковский Д.В. Исследование нестационарных радиальных колебаний электромагнитоупругой толстостенной сферы с помощью численного обращения преобразования Лапласа // Вестник Тверского государственного университета. Серия: Прикладная математика. Вып. 9. – 2014, № 1. - С. 51 - 64.
 35. Вестяк В.А., Тарлаковский Д.В. Одномерные нестационарные волны в толстостенной электромагнитоупругой сфере // Экологический вестник научных центров ЧЭС. 2011. № 4. С. 16 – 21.
 36. Власенко В.Д. Существование и единственность обобщенных решений для двумерных нестационарных задач связанной электроупругости // Методы числ. анал. РАН. ДВО. ВЦ. Владивосток. 1993, С. 49-60.
 37. Вовк Л.П., Динамические задачи теории упругости для тел сложной структуры // Изд-во Рост. гос. строит. ун-та., – 2003. – 168 с.
 38. Вовкодав И.Ф, Улитко А.Ф. Радиальные колебания тонкой пьезокерамической пластины // Докл. АН УССР. -1973. №9. С.830-834.
 39. Гетман И.П., Устинов Ю.А. К теории неоднородных электроупругих плит //

- ПММ. 1979. Т. 43. Вып. 5. С. 923-932.
40. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
 41. Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В. Волны в сплошных средах. - М.: Физматлит, 2004. – 472 с.
 42. Горшков А.Г., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В. Основы тензорного анализа и механика сплошной среды. – М.: Наука, 2000. – 214 с.
 43. Григорьева Л.О. Численное решение начально-краевой задачи электроупругости для полого пьезокерамического цилиндра с радиальной поляризацией // Прикладная механика. 2006. Т. 42, № 12. С. 67-75.
 44. Гринченко В.Т., Карлаш В.Л., Мелешко В.В., Улитко А.Ф. Исследование планарных колебаний прямоугольных пьезокерамических пластин // Прикл. механика. -1976. -12. -№5. -С. 71-78.
 45. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. Механика связанных полей в элементах конструкций. Т.5. Электроупругость. – Киев: Наукова думка, 1989. – 280 с.
 46. Даноян З.Н. Электроупругие поверхностные волны Лява в пьезоэлектриках // Проблемы механики тонких деформируемых тел: Сборник: Посвящается 80-летию академика НАН Армении С.А. Амбарцумяна. Ин-т мех.НАН Армении. Ереван: Гитутюн., – 2002. – С.177-187.
 47. Даноян З.Н., Симонян А.М. Поверхностные магнитоупругие волны Рэлея при наличии поперечного магнитного поля // Изв. АН АрмССР. Мех..1985. 38, N 3, С. 37-46.
 48. Дашко О.Г. Несвязанная задача магнитоупругости для ферромагнитного тела со сферической полостью // Прикл. мех.. 2007. 43, N 10, С. 42-48.
 49. Дидковский В.С, Климов А.Е., Лейко А.Г., Петрищев О.Н. Радиальные колебания цилиндрической пьезокерамической оболочки // Акустич. приборы и системы. 2009. №6. С.31-40.
 50. Диткин В.А., Прудников А.П. Справочник по операционному исчислению. – М.: «Высшая школа», 1965. – 467 с.
 51. Евдокимова О.В., Белянкова Т.И., Калинин В.В. Уравнения динамики преднапряженной пьезоактивной среды при наличии внешнего электростатического поля // Вестн. ЮНЦ РАН. 2007. Т. 3. № 4. С. 19-25.
 52. Калинин А.В., Морозов С.Ф. Стационарные электромагнитные поля в неоднородных средах с непроводящими и слабопроводящими включениями // Вестник нижегородского университета им Н.и. лобачевского. Серия:

- математическое моделирование и оптимальное управление. 1999. № 1. С. 48-62.
53. Калинин В.В., Белянкова Т.И. Уравнения динамики предварительно напряженной магнитоэластичной среды // Изв. РАН. МТТ. 2016. № 5. С. 101-110.
 54. Калинин В.В., Белянкова Т.И., Динамические контактные задачи для предварительно напряженных электроупругих сред – М.: ФИЗМАТЛИТ., 2006. – 273 с.
 55. Калинин В.В., Белянкова Т.И., Евдокимова О.В. Определяющие соотношения динамики преднапряженной пьезоактивной среды в отсутствие внешних электрических полей // Вестн. ЮНЦ РАН. 2006. Т. 2. № 1. С. 16-23.
 56. Калинин В.В., Белянкова Т.И., Леви М.О., Агаян К.Л. Некоторые особенности динамики слабонеоднородного магнитоупругого полупространства // Вестн. ЮНЦ РАН. 2013. Т. 9. № 4. С. 13-17.
 57. Калинин В.В., Белянкова Т.И., Шейдаков Д.Н. Уравнения динамики предварительно напряженной магнитоупругой среды // Вестн. ЮНЦ РАН. 2013. Т. 9. Юбилейный вып. С. 20-28.
 58. Карлаш В.Л. Напряженное состояние прямоугольной пьезокерамической пластины с поперечно-продольной поляризацией // Прикл. механика, -2001. —37. -№3. -С. 105-111.
 59. Карлаш В.Л. Несимметричные колебания многоэлектродных пьезокерамических круговых колец с поляризацией по толщине // Прикл. механика, -1990. -26. -№4. -С. 67-74.
 60. Карлаш В.Л. Несимметричные колебания пьезокерамических круговых колец с двусторонне - диаметрными разрезами электродного покрытия/ В.Л. Карлаш // Прикл. механика, -1988. -24. -№8. -С. 79-85.
 61. Карлаш В.Л. Продольные колебания и входная проводимость составной пьезокерамической пластины с поперечно-продольной поляризацией/ В.Л. Карлаш // Прикл. механика, -2002. -38. -№5. -С. 117-123.
 62. Кудрявцев Б.А. Электроупругое состояние полуплоскости из пьезокерамики с двумя граничными электродами// Пробл. прочности, 1982, \$ 7, с. 56-59.
 63. Кудрявцев Б.А., Партон В.З., Ракитин В.И. Механика разрушения пьезоэлектрических материалов. Осесимметричная трещина на границе с проводником // Приют, матем. и мех., 1975, 39, JS 2,с. 352-362.
 64. Кудрявцев Б.А., Партон В.З., Ракитин В.И. Механика разрушения пьезоэлектрических материалов. Прямолинейная туннельная трещина на границе

- с проводником // Прикл. матем. и мех., 1975, 39, Л I, с. 149-159.
65. Мартиросян Э. В. Поверхностные сдвиговые магнитоупругие волны вдоль границы идеально проводящего полупространства // Изв. АН Армении. Мех.. 2004. 57, N 1, С. 63-69.
 66. Мельник В.Н. Существование и единственность обобщенных уравнений в связанных нестационарных задачах двумерной электроупругости // Вопр. вычисл. и прикл. мат. (Ташкент). 1990, N 88, С. 123-134.
 67. Мельник В.Н. Теоремы существования и единственности обобщенного решения для одного класса нестационарных задач связанной электроупругости // Изв. вузов. Мат.. 1991, N 4, С. 24-32.
 68. Михайлова Е.Ю., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Обобщенная линейная модель динамики тонких упругих оболочек // Ученые записки Казанского уни-верситета. Серия физико-математические науки. – 2018, Т. 160, кн. 3. – С. 561–577.
 69. Михайлова Е.Ю., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Общая теория упругих оболочек: Учебное пособие. – М.: Изд-во МАИ, 2018 – 112 с.
 70. Михайлова Е.Ю., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Упругие пластины и пологие оболочки: Учебное пособие. - М.: Изд-во МАИ, 2018 – 92 с.
 71. Можен Ж. Механика электромагнитных сплошных сред. М.: Мир, 1991. 560 с.
 72. Наседкин А.В. Исследование шаговых по времени схем метода конечных элементов для нестационарных задач электроупругости с классическими-граничными условиями // Мех. деформируем. тел, Дон. гос. техн. ун-т. Ростов н/Д. 1994, с. 78-84.
 73. Новацкий В. Электромагнитные эффекты в твердых телах. М.: Мир, 1986. 160 с.
 74. Партон В.З., Кудрявцев Б.А. - Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел-ФМЛ (1988)
 75. Петросян М.Р. К задаче трансформации при отражении магнитоупругой волны // Изв. Нац. АН Армении. Мех.. 1999. 52, N 2, С. 40-44.
 76. Подстригач Я.С., Бурак Я.И., Гачкевич А.Р., Чернявская Л.В. Термоупругость электропроводных тел. – Киев: Наукова думка, 1977. – 247 с.
 77. Половинкина И.Б., Улитко А.Ф. К теории равновесия пьезокерамических тел с трещинами. В сб. Тепловые напряж. в элементах конструкций. Вщ1. 18, Киев: Наукова думка, 1978, с. 10-17.
 78. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. – М.:

Наука, 2002. – 632 с.

79. Рогачева Н.Н. Зависимость коэффициента электромеханической связи пьезоэлектрических элементов от положения и размера электродов. ПММ. 2001. Т. 65. Вып. 2. С. 323-333.
80. Рогачева Н.Н. О применимости общих теорем электроупругости к теории пьезоэлектрических оболочек. Изв. АН СССР. МТТ. 1986. №5. С. 172-180.
81. Смородинский Я.Г. Упругие волны и магнитоакустические явления в намагниченной трансверсально-изотропной среде // Екатеринбург: Изд-во УрО РАН. 2003, 113 с.
82. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами// Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. - М.: Наука, 1979. - 832 с.
83. Степанов Г.В., Бабуцкий А.И., Мамеев И.А. Нестационарное напряженно-деформированное состояние в длинном стержне, вызванное импульсом электрического тока высокой плотности // Пробл. прочн.. 2004, N4, С. 60-67, 158-159.
84. Трофимов А.И. Пьезоэлектрические преобразователи статических нагрузок. М. Машиностроение, 1979. 95 с.
85. Турилов В. В. Разработка метода гранично-временных элементов для решения трехмерных нестационарных динамических задач магнитотермоупругости // Прикл. пробл. прочн. и пластич.. 1995, N 52, С. 47-58.
86. Угодчиков, А.Г. Метод граничных элементов в механике деформируемого твердого тела. / А.Г. Угодчиков, Н.М. Хуторянский. – Казань: Изд-во КГУ, 1986. – 296 с.
87. Фильштинский Л.А. Фундаментальные решения уравнений электроупругости для пьезокерамического слоя в R_3 // Мех. композит. матер., – 2001, Т.37, №3. – С.377-388.
88. Хорошун Л. Построение динамических уравнений электромагнитомеханики диэлектриков и пьезоэлектриков на основе двухконтинуумной механики // Фіз.-мат. моделюв. інф. технол.. 2006, N 3, С.177-198.
89. Шляхин Д.А. Нестационарная осесимметричная задача электроупругости для анизотропного пьезокерамического радиально поляризованного цилиндра // Изв. РАН. Мех. тверд. тела. 2009, N 1, С. 73-82.
90. Шляхин Д.А. Нестационарная осесимметричная задача электроупругости для пьезокерамического цилиндра с окружной поляризацией // Прикл.мех. и техн. физ.. 2009. 50, N 1, С. 12-21.
91. Шляхин Д.А., Нестационарная осесимметричная задача электроупругости

- для пьезокерамической пластины // Труды 21-ой Международной конференции по теории оболочек и пластин, Саратов, 14-16 нояб., 2005. Саратов: Изд-во СГТУ., – 2005. – С.242-248.
92. Шульга Н.А., Болкисев А.М. Колебания пьезоэлектрических тел // Киев: Наук. думка. 1990, 228 с.
 93. Шульга Н.А., Григорьева Л.О. Анализ методом характеристик распространения электроупругих толщинных колебаний в пьезокерамическом слое при электрическом возбуждении // Прикл. мех.. 2008. 44, N 10, с. 23-27.
 94. Эпп В.Я., Копытов Г.Ф., Митрофанова Т.Г. Обратная задача для стационарного электромагнитного поля в дипольном приближении // Вестник Томского государственного педагогического университета. 2014. № 12 (153). С. 63-66.
 95. Altay G., Dökmeci M.C. Fundamental equations of certain electromagneticacoustic discontinuous fields in variational form // Continuum Mechanics and Thermodynamics 16, 2004, pp. 53–71
 96. Altay G., Dökmeci M.C. Variational principles and vibrations of a functionally graded plate // Computers and Structures 83, 2005, pp.1340–1354.
 97. Altay G., Dökmeci M.C. Fundamental variational equations of discontinuous thermopiezoelectric fields // International Journal of Engineering Science 34, 1996, pp. 769–782.
 98. Altay, G., Dökmeci, M.C.: On the fundamental equations of electro-magneto-elastic media in variational form with an application to shell-laminae equations // Int. J. Solids Struct. 47, 2010, pp. 466–492.
 99. Annigeri A.R., Ganesan N., Swarnamani S. Free vibrations of simply supported layered and multiphase magneto-electro-elastic cylindrical shells // Smart Materials and Structures 15, 2006, pp. 459–467.
 100. Aouadi M.: On the coupled theory of thermo-magneto-electro-elasticity // Q. J. Mech. Appl. Mech. 60(4), 2007, pp. 443–456.
 101. Arai Masahiro, Adachi Tadaharu, Matsumoto Hiroyuki. Boundary element analysis for unsteady elastodynamic problems based on the Laplace transform // JSME Int. J. A. 1999. 42, N 4, C.507-514.
 102. Bhangale R.K., Ganesan N. Free vibration of simply supported functionally graded and layered magneto- electro-elastic plates // Journal of Sound and Vibration 294, 2006, pp. 1016–1038.
 103. Bhangale R.K., Ganesan N. Free vibration studies of simply supported nonhomogeneous functionally graded magneto-electro-elastic finite cylindrical shells // Journal of Sound and Vibration 288, 2005, pp. 412–422. (A28)

104. Buchanan G.R. Layered versus multiphase magneto-electro-elastic composites // *Composites Part B: Engineering* 35, 2004, 413–420.
105. Challande P. Optimizing ultrasonic transducers based on the finite element method // *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*. 1990. V. 37, № 2. P. 135-140.
106. Chandrashekhara K., Agarwai A.N. Active vibration control of laminated composite plates using piezoelectric devices: a finite element approach // *Journal of Intelligent Material System and Structures*. 1993. V. 4. P. 496-507.
107. Chandrashekhara K., Tenneti R. Thermally induced vibration suppression of laminated plates with piezoelectric sensors and actuators // *Smart Materials and Structures*. 1995. V. 42 . P. 281-290.
108. Curie J, Curie P (1880) Développement, par pression, de l'électricité polaire dans les cris-taux hémihédres à faces inclinés // *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* 91: 294; 383.
109. Curie J, Curie P (1881) Contractions et dilatations produites par des tensions électriques dans les cristaux hémihédres à faces inclinés// *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* 93: 1137-1140.
110. Daga A., Ganesan N., Shankar K. Comparative studies of the transient response for PECP, MSCP, Barium titanate, magneto-electro-elastic finite cylindrical shell under constant internal pressure using finite element method // *Finite Elements in Analysis and Design* 44, 2008, pp. 89–104.
111. Ding Haojiang, Liang Jian. The fundamental solutions for transversely isotropic piezoelectricity and boundary element method // *Comput. and Struct.*. 1999. 71, N 4, C. 447-455.
112. Dökmeci, M.C.Theory of vibrations of coated, thermopiezoelectric laminae // *Journal of Mathematical Physics* 19 (1), 1978, pp. 109–126.
113. Dökmeci, M.C.Variational principles in piezoelectricity // *Lettere al Nuovo Cimento* 7, 1973, pp. 449–454.
114. El-Karamany A.S., Ezzat M.A. Uniqueness and reciprocal theorems in linear micropolar electro-magnetic thermoelasticity with two relaxation times // *Mechanics of Time-Dependent Materials* 13, 2009, pp. 93–115.
115. Garcia Lage R., Mota Soares C.M., Mota Soares C.A., Reddy J.N. Layerwise partial mixed finite element analysis of magneto-electro-elastic plates // *Computers and Structures* 82, 2004, pp. 1293–1301.
116. Green A.E., Naghdi P.M. On electromagnetic effects in the theory of shells and plates // *Philosophical Transactions of Royal Society of London A* 309, 1983, pp. 559–610.

117. Guo S.H. A fully dynamic theory of piezoelectromagnetic waves // *Acta mech.*. 2010. 215, N 1-4, C. 335-344.
118. He, J.-H.: Variational theory for linear magneto-electro-elasticity // *Int. J. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 2(4), 309–316 (2001)
119. He, J.-H.: Coupled variational principles of piezoelectricity // *Int. J. Eng. Sci.* 39, 2001, pp. 323–341
120. Heyliger P.R., Pan E. Static fields in magneto-electroelastic laminates // *AIAA Journal* 42, 2004, pp. 1435–1443.
121. Heyliger P.R., Ramirez F., Pan E. Two dimensional static fields in magneto-electroelastic laminates // *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* 15, 2004, pp. 689–709.
122. Jiang A., Ding H. Analytical solutions to magneto-electro-elastic beams // *Structural Engineering and Mechanics* 18, 2004, pp.195–209.
123. Kaloerov S. A., Petrenko A. V., Khoroshev K. G. Electromagnetoelastic problem for a plate with holes and cracks // *Prikladnaya Mekhanika*, Vol. 46, No. 2, 2010, pp. 93–105
124. Kaloerov S. A., Samodurov A. A. Problem of Electromagnetoviscoelasticity for Multiply Connected Plates. *Prikladnaya Mekhanika*, Vol. 51, No. 6, 2015, pp. 23–41
125. Li, J.Y.: Uniqueness and reciprocity theorems for linear thermo-electro-magneto-elasticity // *Q. J. Mech. Appl. Mech.* 56(1), 35–43 (2003)
126. Lukyanov A., Molokov S. Flexural magneto-elastic vibrations of thin metal wires // *J. Phys. D.* 2004. 37, N 5, C. 784-793.
127. Majhi M. C. Discontinuities in generalized thermoelastic wave propagation in a semi-infinite piezoelectric rod // *J. Techn. Phys.*. 1995. 36, N 3, C. 269-278.
128. Mindlin, R.D. Equations of high frequency vibrations of thermopiezoelectric crystal plates // *International Journal of Solids and Structures*, No.10, 1974.
129. Nicolet Andre, Movchan Alexander B., Guenneau Sebastien, Zolla Frederic. Asymptotic modelling of weakly twisted electrostatic problems. // *C. r.Mec.. Acad. sci.. Paris*, – 2006, т. 334, №2. –C.91-97.
130. Pan E. Exact solution for simply supported and multilayered magnet-electroelastic plates // *ASME – Journal of Applied Mechanics* 68, 2001, 608–618.
131. Pan E., Han F. Exact solution for functionally graded and layered magneto-electroelastic plates // *International Journal of Engineering Science* 43, 2002, pp.321–339.

132. Pan E., P.R. Heyliger. Free vibrations of simply supported and multilayered magneto-electro-elastic plates // *Journal of Sound and Vibration* 252 (3), 2002, pp. 429–442.
133. Pao, Y.H. Electromagnetic forces in deformable continua // In: Nemat-Nasser, S. (Ed.), *Mechanics Today*, vol. IV. Pergamon Press, London, pp. 209–305.
134. Pao, Y.H., Yeh, C.S. A linear theory for soft ferromagnetics elastic solids// *International Journal of Engineering Science* 11,1973, pp. 415–436.
135. Priimenko, V., Vishnevskii, M., 2007. An initial boundary-value problem for model electromagnetoelasticity system// *Journal of Differential Equations* 235, 31–55.
136. Qing G.-H., Qui J.-J., Liu Y.-H. Mixed H-R mixed variational principle for magneto-electroelastic bodies and state-vector equation// *Applied Mathematics and Mechanics* 26 (6), 2005, pp. 722–728.
137. Rice J. M., Sadd M.H. Propagation and scattering of SH-Waves in semiinfinite domains using a time-dependent boundary element method // *Trans ASME: J. Appl. Mech.* 1984. 51, N 3, C. 641-645.
138. Ryu, J., Priya, S., Uchino, K., Kim, H-E., 2002. Magnetoelectric effect in composites of magnetostrictive and piezoelectric materials// *Journal of Electroceramics* 8, 107–119.
139. Shakeri M. Three-Dimensional Elasticity Solution for Thick Laminated Cylinder with Piezoelectric Layer/ M. Shakeri, M.R. Saviz, M.H. Yas // *Iranian Journal of Mechanical Engineering*. -2005.-Vol. 6,-№.2.-P. 5-18.
140. Shulga N.A., Grigoreva L.O. Electroelastic two-dimensional nonstationary vibrations of a piezoceramic prismatic body under mechanical loading // *Int. Appl. Mech.* 2010. 46, N 5, pp. 493-498.
141. Turner, M.J.; Clough, R.W.; Martin, H.C.; Topp, L.J. Stiffness and deflection analysis of complex structures. *J. Aero. Sci.* 23, 1956.
142. Vestyak V.A., Tarlakovskii D.V. Unsteady Axisymmetric Deformation of an Elastic Thick-Walled Sphere Under the Action of Volume Forces // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. - 2015, Vol. 56, No. 6. - P. 984–994.
143. Wang J., Chen L., Fang S., State vector approach to analysis of multilayered magneto-electro-elastic plates // *International Journal of Solids and Structures* 40, 2003, pp. 1669–1680.
144. Wang X.M., Shen Y.P. Some fundamental theory of electro-magnetothermo-elastic material // *Journal of Applied Mechanics* 12 (2),1995, pp. 28–39.