

Научная статья

УДК 629.7

URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=176858>

МЕТОДИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ОЦЕНИВАНИЮ ЭФФЕКТИВНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ОРБИТАЛЬНЫХ СРЕДСТВ КОНТРОЛЯ ЗОН БЕЗОПАСНОСТИ КРИТИЧЕСКИ ЗНАЧИМЫХ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ НА ОСНОВЕ ДИСКРЕТНЫХ ЦЕПЕЙ МАРКОВА

**Евгений Петрович Минаков¹, Максим Андреевич Александров²,
Богдан Александрович Данилюк³, Андрей Владимирович Вербин⁴**

^{1,2,3,4}Военно-космическая академия имени А. Ф. Можайского,

Санкт-Петербург, Россия

⁴yka@mil.ru

Аннотация. Рассматривается дискретная марковская модель оценивания эффективности применения орбитальных средств контроля зон безопасности критически значимых космических аппаратов по показателям вероятности обнаружения опасных объектов и математического ожидания числа наступления событий, связанных с расходом ресурсов орбитальных средств контроля. Приводятся математические модели оценивания указанных вероятностных характеристик наступления соответствующих случайных событий и определения оптимальных и требуемых значений вероятностей переходов, а также примеры оценивания указанных характеристик и результаты вычислительных экспериментов по каждой из

предлагаемых моделей. Практическая значимость полученных результатов исследований состоит в разработке программного обеспечения, апробации математических моделей и программного обеспечения в ходе вычислительных экспериментов, получении оценок эффектов применения ОСК ЗБ КЗКА и оценивании их корректности, а также в предложениях по их использованию для оценивания технических характеристик и способов применения, создаваемых ОСК.

Ключевые слова: орбитальное средство контроля, опасных объектов, зона безопасности, критически значимый космический аппарат, показатель эффективности, вероятность, математическое ожидание, дискретная цепь Маркова, вероятность перехода, матрица, граф

Для цитирования: Минаков Е.П., Александров М.А., Данилюк Б.А., Вербин А.В. Методический подход к оцениванию эффективности применения орбитальных средств контроля зон безопасности критически значимых космических аппаратов на основе дискретных цепей Маркова // Труды МАИ. 2023. № 132. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=176858>

Original article

THE METHODOICAL APPROACH TO ESTIMATION OF EFFICIENCY OF APPLICATION OF ORBITAL MONITORING AIDS OF SAFETY ZONES OF CRITICALLY SIGNIFICANT SPACE VEHICLES ON THE BASIS OF DISCRETE-TIME MARKOV CHAIN

Evgeny P. Minakov¹, Maxim A. Aleksandrov², Bogdan A. Danilyuk³, Andrey V. Verbin⁴✉

^{1,2,3,4} Military space Academy named after A.F. Mozhaisky, Saint Petersburg, Russia

⁴ yka@mil.ru 

Abstract. The article considers discrete Markov model for efficiency estimating of orbital aids for safety zones monitoring of critically significant spacecraft by the probability of dangerous objects detecting indicators and mathematical expectation of the event occurrence number, associated with the use of resources on the orbital monitoring aids. The author adduces mathematical estimation models of the specified random events and definitions of the optimal and required values of transition probabilities, as well as examples of the said characteristics estimation and results of numerical experiments on each of the models being suggested. Practical meaningfulness of the obtained results consists the software developing, trying-out of mathematical models and software during numerical experiments, esteems obtaining of the orbital monitoring aids application effects and their correctness evaluation, as well as proposals on their employing for technical characteristics assessment and ways of the created orbital monitoring systems application.

Keywords: orbital monitoring aids, dangerous objects, safety zone, critically significant space vehicle, indicator of efficiency, probability, mathematical expectation, discrete-time Markov chain, probability of transition, matrix, graph

For citation: Minakov E.P., Alexandrov M.A., Danilyuk B.A., Verbin A.V. The Methodical Approach to Estimation of Efficiency of Application of Orbital Monitoring Aids of Safety Zones of Critically Significant Space Vehicles on the Basis of Discrete-Time Markov Chain. *Trudy MAI*, 2023, no. 132. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=176858>

Введение

Одной из проблем современной космонавтики является защита космических аппаратов (КА) от воздействия опасных объектов (ОО) природного и техногенного происхождения [1-0]. Ее решение возможно с применением орбитальных средств контроля (ОСК), осуществляющих периодическое наблюдение в видимом спектре околоспутникового пространства критически значимых космических аппаратов (КЗКА) в пределах определенных зон безопасности (ЗБ) вокруг них. Это должно позволить при обнаружении в них ОО своевременно принимать решения на защиту КЗКА и, в частности, на выполнение маневров уклонения от ОО. Разработанный к настоящему времени научно-методический аппарат оценивания эффективности применения ОСК ЗБ КЗКА учитывает совокупность случайных факторов, действующих в процессе подготовки и применения ОСК, а также факторов космического пространства. В целом, использование Марковских дискретных моделей может быть целесообразно для различных задач, где необходимо оценивание будущих событий на основании наблюдений (оценивании) прошлых, указанное обстоятельство обуславливает целесообразность использования марковских дискретных моделей для оценивания эффективности применения ОСК ЗБ КЗКА.

Таким образом разработка и апробация стохастических моделей оценивания вероятности и математического ожидания наступления случайных событий указанных процессов и вероятностей переходов между этими событиями является актуальной. Достижение поставленной цели базируется на использовании математического аппарата теории дискретных цепей Маркова. Основными результатами проделанных исследований являются графовые модели

соответствующих процессов, матрицы инцидентий, математические модели и порядок их применения при оценивании и прогнозировании вероятностных характеристик наступления случайных событий, способы определения вероятностей переходов, обеспечивающих выдвинутые критерии по вероятности наступления финального состояния процесса обнаружения ОО и математического ожидания числа наступлений заданного события применения ОСК.

Постановка задачи

Качество выполнения задач применения ОСК целесообразно оценивать показателями вероятности обнаружения ОО в зоне безопасности КЗКА – $P_{об}$ и математическим ожиданием числа наступлений случайных событий, связанных с расходом его ресурсов – $m_{рес}$. Указанные характеристики взаимосвязаны как друг с другом, так и с количеством применения ОСК и комплексно оценивают эффективность процесса обнаружения ОО в ЗБ КЗКА. Их оценивание базируется на знании вероятностей переходов соответствующих процессов, которые отражают технические характеристики ОСК, способы его применения при обнаружении ОО, условия космической обстановки. Задача оценивания $P_{об}$ и $m_{рес}$ по известным вероятностям переходов может рассматриваться как прямая задача. Обратной задачей является определение вероятностей переходов между состояниями процесса обнаружения ОО, для чего могут быть использованы либо математические модели, либо статистические данные. Из-за отсутствия последних в настоящее время особую значимость приобретают модели оценивания указанных характеристик переходов.

Особое место в процессе оценивания вероятности обнаружения ОСК ОО в ЗБ КЗКА занимает оценивание общего числа применений ОСК – n , которое в рамках рассматриваемой ниже дискретной марковской модели соответствует числу шагов.

Схема функционирования ОСК ЗБ КЗКА приведена на рисунке 1.

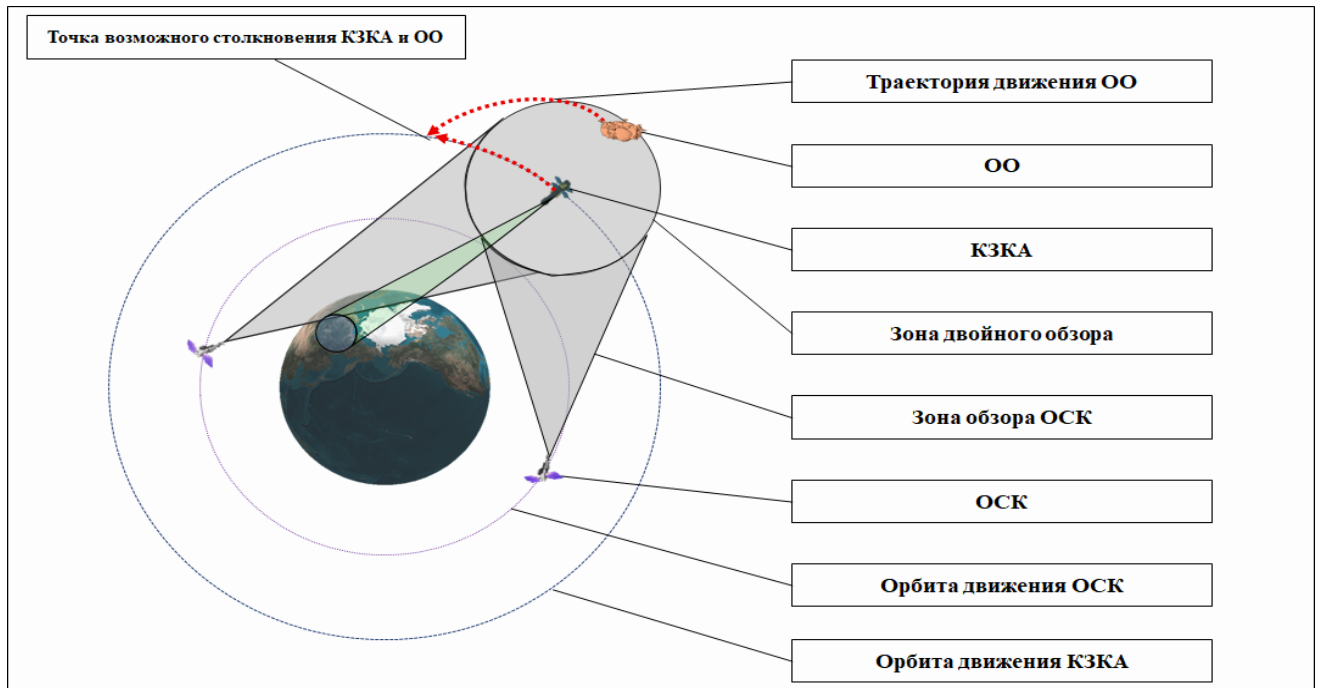


Рис. 1 Общая схема функционирования ОСК ЗБ КЗКА

Дискретная марковская модель оценивания вероятности обнаружения ОСК ОО в ЗБ КЗКА

Пусть процесс обнаружения ОО ОСК ЗБ КЗКА может моделироваться состоящим из отдельных событий, переходы из одного в другое между которыми происходит «скачками», для оценивания вероятностных характеристик которого может быть применен математический аппарат теории дискретных цепей Маркова [0-0]. Такой процесс может моделироваться графом, каждой вершине которого соответствуют его возможные состояния – $A_j(k)$, а дугам – возможные

переходы из состояния $A_j(k-1)$ в $A_j(k)$ и величины $P_{ij}^{(k)} = P\left[\frac{A_j(k)}{A_i(k-1)}\right]$ условной вероятности перехода на k -ом шаге в состояние $A_j(k)$ из состояния $A_i(k-1)$ на предыдущем $(k-1)$ шаге [0].

Пусть процесс обнаружения ОСК ОО в ЗБ КЗКА может находиться в одном из трех случайных состояний, приведенных в таблице 1.

Таблица 1

Состояние	Описание состояния	Тип состояния	Вероятность
1	3	4	5
$A_1(k)$	Все состояния, исход которых связан с невозможностью продолжения обнаружения ОО: – требуемое воздействие произведено; «ресурс» ОСК израсходован; задача выполнена; – требуемое воздействие не произведено; ОО не обнаружен; ОСК вышел из строя; задача не выполнена; – требуемое воздействие произведено, но ОСК вышел из строя.	поглощающее	$P(k)$
$A_2(k)$	ОО не обнаружен; ОСК готов к применению; ресурс не израсходован; исходное состояние	возвратное	$P_2(k)$
$A_3(k)$	ОО не обнаружен; ресурс ОЛСК не израсходована; ОСК не готов к применению для обнаружения ОО	возвратное	$P_3(k)$

В соответствии с теорией дискретных цепей Маркова все состояния могут быть разделены, как указано в 4-м столбце таблицы 1, на поглощающие – $A_1(k)$ и возвратные – $A_2(k)$, $A_3(k)$ [0-0]. Они несовместны и образуют полную группу [0, 0]:

$$\sum_{i=1}^3 P_i(k) = 1. \quad (1)$$

В общем случае процесс обнаружения ОО в ЗБ КЗКА может моделироваться как однородная дискретная марковская цепь, когда указанные вероятности

перехода – $P_{ij}^{(k)}$, $[i, j=1,2,3]$, не зависят от номера шага – k или как неоднородная дискретная марковская цепь, если они меняются от шага к шагу.

Вероятности $P_{ij}^{(k)}$ являются элементами квадратных матриц переходных вероятностей (матриц переходов) для каждого k -го шага, которые в общем случае (для m возможных состояний процесса) имеют вид [0]:

$$\pi_k = \begin{pmatrix} P_{11}^{(k)} & P_{12}^{(k)} & \dots & P_{1j}^{(k)} & \dots & P_{1m}^{(k)} \\ P_{21}^{(k)} & P_{22}^{(k)} & \dots & P_{2j}^{(k)} & \dots & P_{2m}^{(k)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{i1}^{(k)} & P_{i2}^{(k)} & \dots & P_{ij}^{(k)} & \dots & P_{im}^{(k)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{m1}^{(k)} & P_{m2}^{(k)} & \dots & P_{mj}^{(k)} & \dots & P_{mm}^{(k)} \end{pmatrix}.$$

В рассматриваемой модели процесса обнаружения ОО ОСК в ЗБ КЗКА $m = 3$.

Так как в общем случае процесс на k -м шаге обязательно должен перейти в одно из возможных состояний – $A_i(k)$, $[i=1,2,3]$, то сумма элементов каждой строки матрицы π_k должна равняться единице:

$$\sum_{j=1}^m P_{ij}(k) = 1. \quad (2)$$

Элементы любого j -го столбца матрицы переходов π_k представляют собой условные вероятности перехода в результате k -го шага в состояние $A_j(k)$, вычисленные при условии, что перед k -м шагом система находилась в состоянии $A_i(k-1)$.

Знание матрицы переходов на каждом шаге позволяет определить элементы матрицы переходов – $\pi(n)$ за (после) n шагов [0, 0]:

$$\pi(n) = \begin{pmatrix} P_{11(n)} & P_{12(n)} & \dots & P_{1i(n)} & \dots & P_{1m(n)} \\ P_{21(n)} & P_{22(n)} & \dots & P_{2i(n)} & \dots & P_{2m(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{i1(n)} & P_{i2(n)} & \dots & P_{ij(n)} & \dots & P_{im(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{m1(n)} & P_{m2(n)} & \dots & P_{mi(n)} & \dots & P_{mm(n)} \end{pmatrix}.$$

Матрица переходов за n шагов определяется в результате последовательного перемножения n матриц π_k и обладает теми же свойствами, что и матрица перехода за один шаг.

Для однородного процесса

$$\pi(n) = \pi_k^n. \quad (3)$$

Для неоднородного процесса

$$\pi(n) = \prod_{k=1}^n \pi_k. \quad (4)$$

Пусть $P_k(A_j)$ – вероятность нахождения процесса в состоянии $A_j(k)$ на k -м шаге (таблица 1).

Вектор начальных условий процесса (на нулевом шаге) в общем случае имеет вид:

$$P_0 = \langle P_1(0), P_2(0), \dots, P_m(0) \rangle. \quad (5)$$

На первом шаге процесса вероятность наступления событий определяются зависимостью

$$P_1 = \langle P_1(1), P_2(1), \dots, P_m(1) \rangle = P_0 \pi_0, \quad (6)$$

где π_0 – матрица вероятностей переходов на «нулевом» шаге.

Для любого n -го шага соответствующая вероятность определяется по формуле

$$P_n = \langle P_1(n), P_2(n), \dots, P_m(n) \rangle = P_0 \pi_{n-1}. \quad (7)$$

В рассматриваемой модели процесс обнаружения ОСК ОО в ЗБ КЗКА $P_{об} = P_3(n)$. Может быть выдвинуто два критерия решения этой задачи:

1) Оптимальности

$$P_{об} \rightarrow \max ; \quad (8)$$

2) Пригодности

$$P_{об} \rightarrow P_{об}^{тр}, \quad (9)$$

где $P_{об}^{тр}$ – требуемая вероятность обнаружения ОО в зоне безопасности КЗКА.

Алгоритм оценивания математического ожидания расхода ресурсов ОСК ОО в ЗБ КЗКА

Для оценивания математического ожидания расхода ресурса ОСК, потребного для обнаружения ОО в ЗБ КЗКА, достаточно рассмотреть подграфы переходов только из возвратных состояний.

Подграф переходов из состояния $A_2(k)$ в другие состояния (дерево переходов) имеет вид, представленный на рисунке 2.

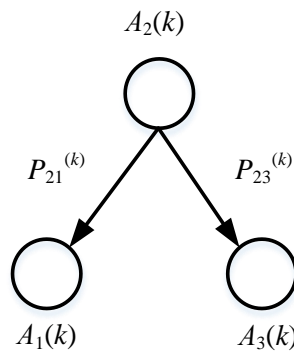


Рис. 2 Дерево переходов из состояния $A_2(k)$

Если обозначить через P_{Π} – вероятность приведения ОСК в готовое к применению состояние после неудачного применения на $(k-1)$ -м шаге, то дерево переходов из состояния $A_3(k)$ в другие состояния имеет вид, представленный на рисунке 3.

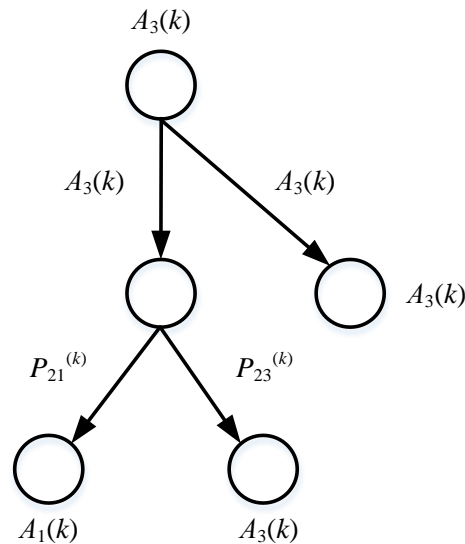


Рис. 3 Дерево переходов из состояния $A_3(k)$

Вероятность P_{Π} определяется чаще всего экспериментальным путем или с использованием специальных математических моделей [0, 0].

Рассмотренные деревья позволяют сформировать матрицу перехода за n шагов для рассматриваемой трехсобытийной модели применения ОСК по ОО – $\pi(n)_{[3]}$

$$\pi(n)_{[3]} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ P_{21}(n) & P_{22}(n) & P_{23}(n) \\ P_{\Pi}P_{21}(n) & P_{\Pi}P_{22}(n) & (1-P_{\Pi}) + P_{\Pi}P_{23}(n) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_{[1]} & O_{[1,2]} \\ R_{[2,1]} & Q_{[2]} \end{vmatrix}. \quad (10)$$

В блочном представлении матрицы через $I_{[1]}$ обозначены единичная матрица, $O_{[1,2]}$ – нулевая матрица, $R_{[2,1]}$ – дополнительная матрица, $Q_{[2]}$ – фундаментальная матрица.

Матрица математических ожиданий числа наступлений возвратных событий имеет вид [0]:

$$\begin{aligned}
 M_{[2]} &= (I_{[2]} - Q_{[2]})^{-1} \cdot J_{\langle 2 \rangle} = \begin{vmatrix} m_4 \\ m_5 \end{vmatrix} = \left\| \begin{matrix} 1 - P_{22}(n) & -P_{23}(n) \\ -P_{\Pi} P_{22}(n) & P_{\Pi} - P_{\Pi} P_{23}(n) \end{matrix} \right\|^{-1} \cdot J_{\langle 2 \rangle} = \\
 &= \left\| \begin{matrix} \frac{P_{\Pi} - P_{\Pi} P_{22}(n)}{B} & \frac{P_{\Pi} P_{23}(n)}{B} \\ \frac{P_{22}(n)}{B} & \frac{1 - P_{23}(n)}{B} \end{matrix} \right\| \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad (11)
 \end{aligned}$$

где $I_{[2]}$ – единичная матрица, размерность которого совпадает с числом возвратных событий;

$J_{\langle 2 \rangle}$ – единичный вектор-столбец, размерность которого совпадает с числом возвратных событий;

$B = P_{\Pi} (1 - P_{22}(n) - P_{23}(n))$ – определитель матрицы $(I_{[2]} - Q_{[2]})$.

Математическое ожидание числа переходов в состояние $A_3(k)$, связанных с расходом ресурсов ОСК, до попадания процесса в поглощающее состояние определяется зависимостью:

$$M_3 = \frac{P_{22}(n)}{B} + \frac{1 - P_{23}(n)}{B}. \quad (12)$$

В том случае когда расход ресурса ОСК, потребный для обнаружения ОО в ЗБ КЗКА, может быть только целой величиной в качестве оценки математического ожидания числа переходов в состояние $A_3(k)$ должна приниматься величина

$$M_3 = E[M_3] + 1, \quad (13)$$

где $E[]$ – операция выделения целой части числа.

В том случае, если определен предельный расход ресурсов ОСК – $m_3^{\text{зад}}$, может быть выдвинуто требование по математическому ожиданию числа наступлений возвратных событий. В рассматриваемом примере это соответствует критерию пригодности

$$M \geq M_3^{\text{зад}}. \quad (14)$$

Как было указано ранее возникает задача оценивания потребного количества шагов n , обеспечивающих выполнение указанных критериев.

Алгоритм определения оптимальных значений вероятностей переходов

Определение вероятностей переходов является самостоятельной сложной задачей, в которой должны учитываться технические характеристики ОСК, способы его применения при обнаружении ОО, условия космической обстановки. Альтернативным подходом является отыскание решения обратной задачи: определение вероятностей переходов за n шагов, удовлетворяющих критериям оптимальности или пригодности для финального состояния процесса обнаружения ОО в ЗБ КЗКА, с использованием математических моделей.

Пусть финальным состоянием является состояние $A_j(n)$ и требуется обеспечить максимум вероятности попадания процесса в это состояние за n шагов:

$$P_j(n) \rightarrow \max .$$

Из формул (5), (7) видно, что

$$\begin{cases} P_1 = \langle P_1(1), P_2(1), \dots, P_m(1) \rangle = P_0 \pi_0, \\ P = \langle P_1(1), P_2(1), \dots, P_m(1) \rangle = P_1 \pi_0 \pi_1, \\ P = \langle P_1(1), P_2(1), \dots, P_m(1) \rangle = P_2 \pi_0 \pi_1 \pi_2, \\ P = \langle P_1(1), P_2(1), \dots, P_m(1) \rangle = P_{n-1} \pi_0 \pi_1 \pi_2 \dots \pi_{n-1}. \end{cases} \quad (15)$$

Из (15) видно, что варьируя элементами матриц $\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-1}$, можно определить такие их величины, которые при заданном векторе начальных условий процесса (на нулевом шаге) P_0 обеспечивают удовлетворение критериям (8) и (9).

Отыскание $P_j(n)$ можно осуществлять методом случайного поиска при равномерном распределении $P_{ij}(k), k = 0, 1, \dots, n-1$, на интервале $[0, 1]$. При этом объем выборки для каждого k должен быть 200-300 испытаний.

Для случая, когда процесс обнаружения ОСК ОО в ЗБ КЗКА может считаться однородным и

$$P_n = \langle P_1(1), P_2(1), \dots, P_m(1) \rangle = P_0 \pi_0^n, \quad (16)$$

объем выборки сокращается в $(n-1) \cdot m$ раз.

Пусть элементы матриц $\pi_0^*, \pi_1^*, \pi_2^*, \dots, \pi_{n-1}^*$, обеспечивают для $A_j(n)$ -го состояния процесса вероятность $P_j^*(n)$ за каждые n шагов и пусть известны элементы матриц $\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-1}$, полученные каким-либо способом, и соответствующая им и $A_j(n)$ -му состоянию процесса вероятность $P_j(n)$ за каждые n шагов. Для оценивания соответствия вероятностей переходов между состояниями процесса, описываемого матрицами $\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-1}$, значениям элементов матриц $\pi_0^*, \pi_1^*, \pi_2^*, \dots, \pi_{n-1}^*$, обеспечивающим указанный экстремум может быть введен коэффициент:

$$K_j^c(n) = \frac{P_j^*(n)}{P_j(n)}. \quad (17)$$

Очевидно, что $K_j^c(n) \geq 1$.

При $K_j^c(n) = 1$ элементы матриц переходов $\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-1}$, равны элементам матриц $\pi_0^*, \pi_1^*, \pi_2^*, \dots, \pi_{n-1}^*, \pi_0^*$, и могут считаться оптимальными по критерию (8) или пригодными по критерию (9).

При $K_j^c(n) > 1$ элементы $\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-1}$, могут быть определены так, чтобы минимизировать разность вероятностей $P_j^*(n)$ и $P_j(n)$:

$$P_j^*(n) - P_j(n) \rightarrow \min. \quad (18)$$

Не исключается случай, когда вместо $P_j^*(n) = \max P_j(n)$ ищется какой-либо другой экстремум и зависимости приобретают «зеркальный» характер.

Так как элементы матриц переходов непосредственно отображают технические характеристики и характеристик применения ОСК при обнаружении ОО в ЗБ КЗКА, их знание позволяет сформировать технические требования к этим характеристикам.

Оценивание требуемых значений вероятностей переходов базируется на удовлетворении за заданное число шагов n критериев (8) или (9).

Определение числа шагов процесса обнаружения ОО в ЗБ КЗКА

Определение числа шагов – n может быть осуществлено в соответствии с двумя различными подходами:

- 1) исходя из баллистических условий применения ОСК;

2) в соответствии с рассмотренными критериями (8) или (9) оценивания эффективности применения ОСК при обнаружении ОО в ЗБ КЗКА.

Пусть применение ОСК по ОО может осуществляться только при полном покрытии ЗБ КЗКА ЗВ ОСК, а также, что может быть обеспечено любое направление оси визирования видео- или фотоаппаратуры ОСК, т.е. его ЗВ может моделироваться шаром, в пределах которого возможно обнаружение ОО. В свою очередь, пусть ЗБ также моделируется шаром.

В рамках первого подхода, когда задан общий интервал времени применения ОСК – ΔT к основным баллистическим условиям его применения следует отнести:

- 1) компланарность или некомпланарность орбит ОСК и КЗКА;
- 2) виды орбит ОСК и КЗКА.

Пусть модели движения ОСК и КЗКА соответствуют Кеплеровской теории, а параметры их орбит задаются кеплеровскими элементами

– для ОСК – $K_{\text{ОСК}} < a_{\text{ОСК}}, e_{\text{ОСК}}, i_{\text{ОСК}}, \Omega_{\text{ОСК}}, \omega_{\text{ОСК}}, \tau_{\text{нОСК}} >$, где $a_{\text{ОСК}}$ – большая полуось орбиты, $e_{\text{ОСК}}$ – относительный эксцентриситет, $i_{\text{ОСК}}$ – наклонение, $\Omega_{\text{ОСК}}$ – прямое восхождение восходящего узла орбиты, $\omega_{\text{ОСК}}$ – аргумент широты перигея, $\tau_{\text{нОСК}}$ – время прохождения перигея орбиты;

– для КЗКА – $K_{\text{КЗКА}} < a_{\text{КЗКА}}, e_{\text{КЗКА}}, i_{\text{КЗКА}}, \Omega_{\text{КЗКА}}, \omega_{\text{КЗКА}}, \tau_{\text{нКЗКА}} >$, где $a_{\text{КЗКА}}, e_{\text{КЗКА}}, i_{\text{КЗКА}}, \Omega_{\text{КЗКА}}, \omega_{\text{КЗКА}}, \tau_{\text{нКЗКА}}$ – аналогичные кеплеровские элементы орбиты.

Различные сочетания компонентов векторов $K_{\text{ОСК}}$ и $K_{\text{КЗКА}}$ позволяют выявить следующие основные баллистические условия применения ОСК при обнаружении ОО в ЗБ КЗКА:

1) при компланарных орбитах ОСК и КЗКА:

а) орбиты круговые разновысокие с периодическим покрытием ЗБ КЗКА ЗВ ОСК;

б) одна из орбит круговая, а другая эллиптическая, пересекающиеся в двух точках;

в) одна из орбит круговая, а другая эллиптическая с периодическим покрытием ЗБ КЗКА ЗВ ОСК (условно касающиеся в одной точке);

г) обе орбиты эллиптические, пересекающиеся в четырех точках;

д) обе орбиты эллиптические, пересекающиеся в двух точках;

е) обе орбиты эллиптические с периодическим покрытием ЗБ КЗКА ЗВ ОСК (условно касающиеся в одной точке).

2) при некомпланарных орбитах ОСК и КЗКА:

а) орбиты круговые разновысокие с периодическим покрытием ЗБ КЗКА ЗВ ОСК;

б) одна из орбит круговая, а другая эллиптическая, пересекающиеся в двух точках;

в) одна из орбит круговая, а другая эллиптическая с периодическим покрытием ЗБ КЗКА ЗВ ОСК (условно касающиеся в одной точке);

г) обе орбиты эллиптические, пересекающиеся в двух точках;

д) обе орбиты эллиптические с периодическим покрытием ЗБ КЗКА ЗВ ОСК (условно касающиеся в одной точке).

При некомпланарных маневрах орбиты ОСК пересекают плоскости орбиты КЗКА в узловых точках и наоборот.

В общем случае в каждой узловой точке или точке условного касания должен выполняться баланс времени:

$$n_1 T_{\text{ОСК}} = m T_{\text{КЗКА}}, \quad (19)$$

где $T_{\text{ОСК}} = 2\pi \sqrt{\frac{a_{\text{ОСК}}^3}{K_3}}$;

$$T_{\text{КЗКА}} = 2\pi \sqrt{\frac{a_{\text{КЗКА}}^3}{K_3}}$$

$$a_{\text{ОСК}} = R_3 + \frac{H_{\text{АОСК}} + H_{\text{ПОСК}}}{2} - \text{большая полуось орбиты ОСК};$$

$H_{\text{АОСК}}$ – высота апогея орбиты ОСК;

$H_{\text{ПОСК}}$ – высота перигея орбиты ОСК;

$$a_{\text{КЗКА}} = R_3 + \frac{H_{\text{АКЗКА}} + H_{\text{ПКЗКА}}}{2} - \text{большая полуось орбиты КЗКА};$$

$H_{\text{АКЗКА}}$ – высота апогея орбиты КЗКА;

$H_{\text{ПКЗКА}}$ – высота перигея орбиты КЗКА;

n_1, m – целые числа.

Отсюда число шагов n_1 определяется по формуле

$$n_1 = \frac{m T_{\text{КЗКА}}}{T_{\text{ОСК}}}. \quad (20)$$

Строго говоря n_1 может быть целым только при целом отношении $\frac{T_{\text{КЗКА}}}{T_{\text{ОСК}}}$.

С другой стороны, задача определения числа шагов распадается на две подзадачи:

1) когда ОСК оснащен видеоаппаратурой;

2) при оснащении ОСК фотоаппаратурой.

В первом случае, когда ОСК оснащен видеоаппаратурой, в качестве оценки числа шагов n можно рассматривать количество случаев полного покрытия ЗБ КЗКА зоной обзора ОСК – n_1 . Определение n_1 может осуществляться прогнозированием движения по любым орбитам ОСК и ОО с использованием стандартных баллистических моделей и оцениванием числа полного покрытия ЗБ КЗКА зоной обзора ОСК на интервале времени ΔT , что связано в зависимости от используемой модели либо с интегрированием системы дифференциальных уравнений, либо использованием итерационных процедур.

Для круговых или близких к ним компланарным или некомпланарным орбитам ОСК и ОО в рамках Кеплеровой теории для оценивания n_1 может быть использован другой подход, реализованный в виде следующего алгоритма:

1) определение геоцентрической широты линии пересечения плоскостей орбит ОСК и КЗКА на восходящих ветвях траекторий (рисунок 4);

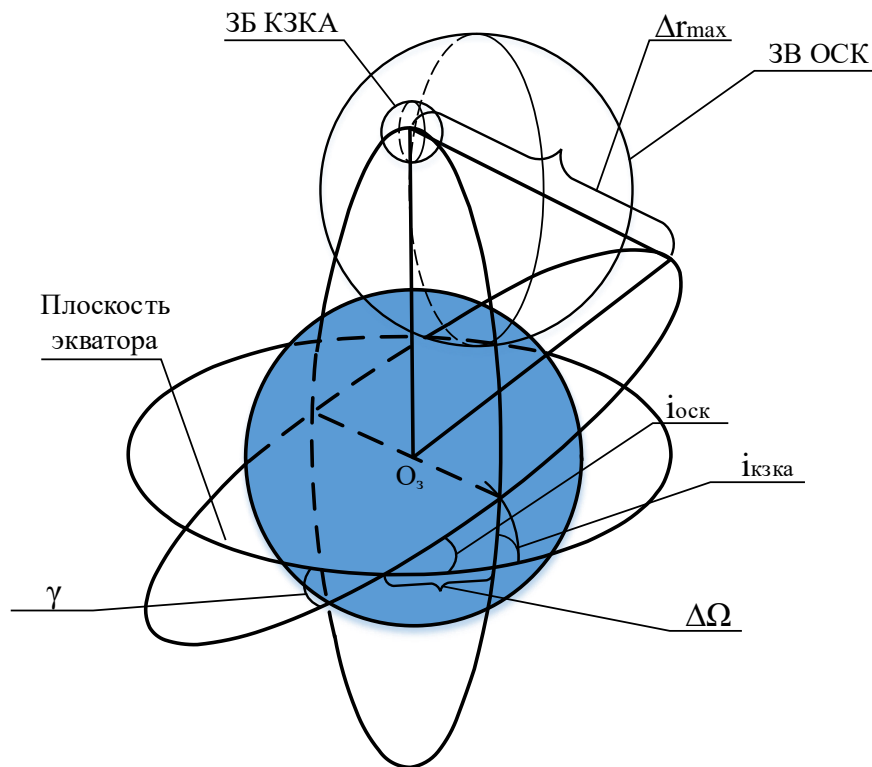


Рис. 4 Графическое отображение пересечения плоскостей орбит ОСК и КЗКА

2) – указанная широта определяется по правилу Непера для прямоугольных сферических треугольников [0-0] для орбиты КЗКА

$$\operatorname{tg} \psi = \sin \chi \operatorname{tg} i_{\text{КЗКА}}; \quad (21)$$

– эта же широта для орбиты ОСК определяется аналогично

$$\operatorname{tg} \psi = \sin(\Delta\Omega + \chi) \operatorname{tg}(i_{\text{ОСК}}), \quad (22)$$

где

$$\chi = \arctan \frac{\sin \Delta\Omega}{\frac{\operatorname{tg}(i_{\text{КЗКА}})}{\operatorname{tg}(i_{\text{ОСК}})} - \cos \Delta\Omega}, \quad (23)$$

где: $\Delta\Omega = \operatorname{abs}(\Omega_{\text{КЗКА}} - \Omega_{\text{ОСК}})$;

$\Omega_{\text{КЗКА}}$ – прямое восхождение восходящего узла орбиты КЗКА;

$\Omega_{\text{ОСК}}$ – прямое восхождение восходящего узла орбиты ОСК;

3) расчет аргумента широты точки пересечения по орбите КЗКА по правилу Непера

$$\operatorname{ctg} u_{\text{КЗКА}} = \frac{\cos i_{\text{КЗКА}}}{\operatorname{tg} \chi}; \quad (24)$$

4) определение аргумента широты точки пересечения по орбите ОСК по правилу Непера

$$\operatorname{ctg} u_{\text{ОСК}} = \frac{\cos i_{\text{ОСК}}}{\operatorname{tg} \chi}; \quad (25)$$

5) вычисление угла некомпланарности между плоскостями орбит КЗКА и ОСК по теореме косинусов для сферических треугольников

$$\cos \gamma = \frac{\cos \Delta\Omega - \cos u_{\text{КЗКА}} \cos u_{\text{ОСК}}}{\sin u_{\text{КЗКА}} \sin u_{\text{ОСК}}}; \quad (26)$$

6) расчет максимального удаления орбиты ОСК от орбиты КЗКА линейного расстояния между точками максимального удаления КЗКА и ОСК по теореме косинусов для плоских треугольников

$$\Delta r_{\max}^2 = (R_3 + H_{\text{КЗКА}})^2 + (R_3 + H_{\text{ОСК}})^2 - 2(R_3 + H_{\text{КЗКА}})(R_3 + H_{\text{ОСК}}) \cos \gamma; \quad (27)$$

7) оценивание потенциальной применимости ОСК по ЗБ КЗКА по критерию пригодности

$$(\Delta r_{\max} + r_{\text{ЗБ}}) \leq d, \quad (28)$$

где $r_{\text{ЗБ}}$ – радиус ЗБ КЗКА;

d – дальность действия видео- или фотоаппаратуры ОСК:

– если критерий удовлетворяется, то существует факт потенциального применения ОСК и оценивание величины n_1 может быть продолжено;

8) по высотам движения ОСК и ОО определяются их периоды обращения –

$T_{\text{ОСК}}$ и $T_{\text{КЗКА}}$:

$$\begin{cases} T_{\text{ОСК}} = 2\pi \sqrt{\frac{(R_3 + H_{\text{ОСК}})^3}{K_3}}, \\ T_{\text{КЗКА}} = 2\pi \sqrt{\frac{(R_3 + H_{\text{КЗКА}})^3}{K_3}}, \end{cases} \quad (29)$$

где $R_3 = 6371$ км – средний радиус Земли;

$K_3 = 398600,44$ км³/с² – гравитационная постоянная Земли;

9) рассчитываются угловые скорости их вращения вокруг Земли – $\omega_{\text{ОСК}}$, $\omega_{\text{ОО}}$:

$$\begin{cases} \omega_{\text{ОСК}} = \frac{2\pi}{T_{\text{ОСК}}}, \\ \omega_{\text{КЗКА}} = \frac{2\pi}{T_{\text{КЗКА}}}; \end{cases} \quad (30)$$

10) вычисляется относительная угловая скорость ОСК и ОО – $\Delta\omega$:

$$\Delta\omega = \text{abs}(\omega_{\text{ОСК}} - \omega_{\text{ОО}}); \quad (31)$$

11) определяется периодичность пролета ОО на траверзе ОСК – Δt_{Π} :

$$\Delta t_{\Pi} = \frac{2\pi}{\Delta\omega}; \quad (32)$$

12) оценивается величина n_1 как отношение общего интервала времени применения ОСК – ΔT к периодичности пролета ОО на траверзе ОСК:

$$n_1 = E\left[\frac{\Delta T}{\Delta t_{\Pi}}\right], \quad (33)$$

где $E[]$ – символ операции выделения целой части числа.

В случае оснащения ОСК фотоаппаратурой при оценивании числа шагов можно положить, что при полном покрытии ЗБ КЗКА зоной обзора ОСК в среднем может

быть сделано n_2 фотоснимков. Пусть фотоснимок может осуществляться только при полном покрытии области ЗБ КЗКА областью ЗВ ОСК (рисунок 5).

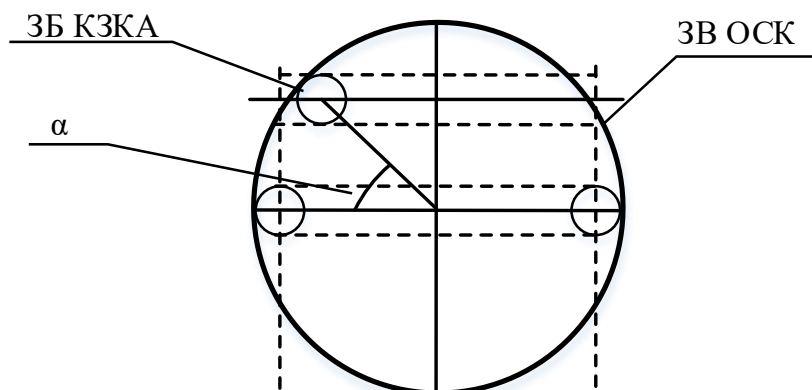


Рис. 5 Покрытие области ЗБ КЗКА областью ЗВ ОСК

Максимальное время движения ЗБ в ЗВ ОСК на «экваторе» ЗВ составляет (рисунок 5)

$$\Delta t_{\max} \approx \frac{2d - 2r_{\text{ЗБ}}}{(R_3 + H_{\text{ОСК}})\Delta\omega}. \quad (34)$$

Время пролета ЗБ в ЗВ ОСК «под углом α » составляет (рисунок 5)

$$\Delta t(\alpha) \approx \frac{2r_{\text{ЗБ}}(\alpha) - 2d}{(R_3 + H_{\text{ОСК}})\Delta\omega}, \quad (35)$$

где $r_{\text{ЗБ}}(\alpha) = r_{\text{ЗБ}} \cos \alpha$.

При оценивании n для ОСК, оснащенных фотоаппаратурой, среднее время движения ЗБ в пределах ЗВ ОСК приближенно может быть оценено по формуле

$$\Delta t_{\text{ср}} \approx \frac{1}{\pi} \int \Delta \text{tg} \alpha = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2D \cos \alpha - 2r_{\text{ЗБ}}}{(R_3 + H_{\text{ОСК}})\Delta\omega} \partial \alpha = \frac{1}{\pi(R_3 + H_{\text{ОСК}})\Delta\omega} (4D - 2\pi r_{\text{ЗБ}}). \quad (36)$$

Пусть время подготовки к фотографированию аппаратуры, включающее в себя подготовку фотоаппаратуры, экспозицию и ряд других операций, составляет

величину Δt_{III} . Тогда среднее количество фотоснимков при одиночном пролете ЗБ через ЗВ ОСК составляет величину

$$n_2^1 = \frac{\Delta t_{\text{cp}}}{\Delta t_{\text{III}}}. \quad (37)$$

Тогда для круговых или близких к ним орбитам ОСК и КЗКА в рамках Кеплеровой теории движения оценка общего количества фотосъемок (числа шагов) – n_2 может быть определена как

$$n_2 = n_1 n_2^1. \quad (38)$$

В рамках второго подхода при использовании критерия оптимальности (8) строго говоря число шагов $n \rightarrow \infty$ Однако с учетом баллистических условий применения ОСК оно не может быть больше либо n_1 или n_2 . Тогда соответствующие вероятности $P_j(n_1)$ или $P_j(n_2)$ могут рассматриваться как нижние грани вероятности $P_j(n)$:

$$P_j(n) = \begin{cases} \inf P_j(n_1) - \text{при использовании видеоаппаратуры ОСК,} \\ \inf P_j(n_2) - \text{при использовании фотоаппаратуры ОСК.} \end{cases} \quad (39)$$

При использовании критерия пригодности при втором подходе число шагов n может быть любым при условии выполнения (9). С точки зрения сокращения вычислений в качестве его оценки целесообразно определять как $n = \min \{n_i, n_{i+1}, n_{i+2} \dots\}$, где $n_i, n_{i+1}, n_{i+2} \dots$ – число шагов, при которых удовлетворяется указанный критерий.

Пример прогнозирования вероятностей наступления событий обнаружения ОО в ЗБ КЗКА

С целью апробации представленных моделей была разработана программа в электронных таблицах Excel. Для прогнозирования вероятностей наступления событий обнаружения ОО в ЗБ КЗКА при моделировании рассматриваемого процесса простой однородной цепью Маркова были приняты следующие исходные данные:

- 1) начальные условия: $P_0 = \langle 0,1,0 \rangle$;
- 2) $\pi_k = \text{const}$;
- 3) матрица переходных вероятностей:

$$\pi_k = \begin{pmatrix} 0,276331 & 0,007765 & 0,715905 \\ 0,06364 & 0,375017 & 0,561343 \\ 0,131443 & 0,099188 & 0,769369 \end{pmatrix}.$$

Полученные в ходе вычислительных экспериментов зависимости $P_1(n)$, $P_2(n)$, $P_3(n)$ для $n = 1, 2, 3, \dots, 30$ приведены на рисунке 6.

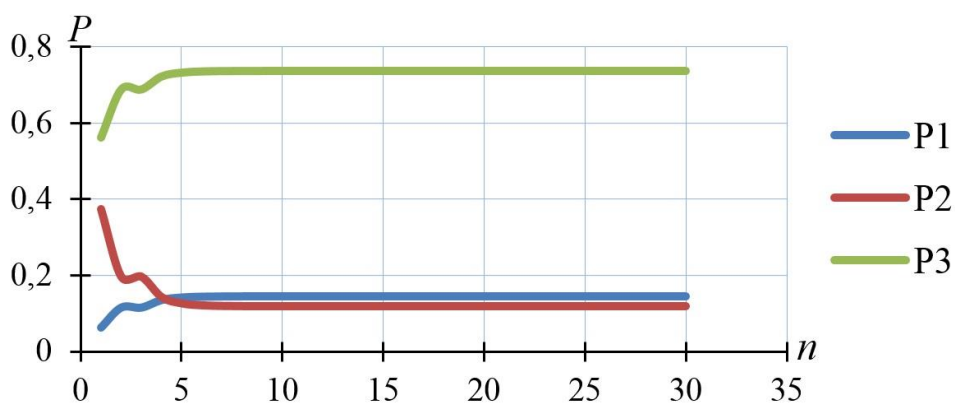


Рис. 6 Зависимости $P_1(n)$, $P_2(n)$, $P_3(n)$ при $\pi_k = \text{const}$

Приведенные результаты демонстрируют, что после первоначально колебательного характера с ростом n все вероятности стремятся к некоторым постоянным величинам. Варьирование элементами матрицы π_k позволяет утверждать, что эта закономерность проявляется для любых других значениях элементов матриц переходных вероятностей.

Для прогнозирования вероятностей наступления событий обнаружения ОО в ЗБ КЗКА при моделировании рассматриваемого процесса простой неоднородной цепью Маркова были приняты следующие исходные данные:

- 1) начальные условия: $P_0 = \langle 0,1,0 \rangle$;
- 2) $\pi_k \neq \text{const}$;
- 3) матрицы переходных вероятностей:

$$\pi_0 = \begin{vmatrix} 0,242868 & 0,67664 & 0,080492 \\ 0,047507 & 0,772289 & 0,180204 \\ 0,450423 & 0,05598 & 0,493597 \end{vmatrix};$$

$$\pi_1 = \begin{vmatrix} 0,673644 & 0,183603 & 0,142753 \\ 0,44864 & 0,522844 & 0,028517 \\ 0,477623 & 0,463864 & 0,058514 \end{vmatrix};$$

$$\pi_2 = \begin{vmatrix} 0,257249 & 0,241349 & 0,501402 \\ 0,940718 & 0,044625 & 0,014657 \\ 0,444885 & 0,251871 & 0,303243 \end{vmatrix}.$$

Полученные в ходе вычислительных экспериментов зависимости $P_1(n)$, $P_2(n)$, $P_3(n)$ для $n = 1, 2, 3, \dots, 30$ приведены на рисунке 7.

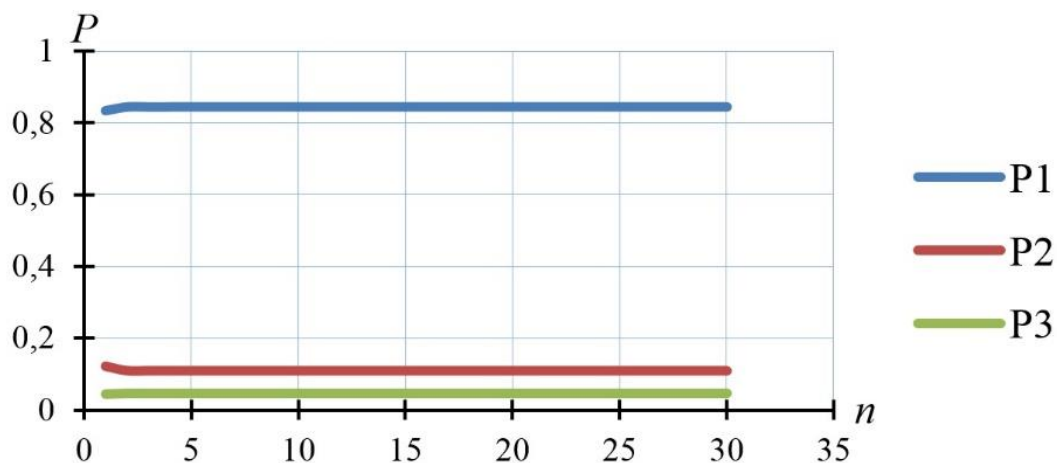


Рис. 7 Зависимости $P_1(n)$, $P_2(n)$, $P_3(n)$ при $\pi_k \neq \text{const}$

Приведенные результаты демонстрируют, что после первоначально колебательного характера с ростом n все вероятности стремятся к некоторым постоянным величинам. Варьирование элементами матрицы π_k позволяет утверждать, что эта закономерность проявляется для любых других значениях элементов матриц переходных вероятностей.

Анализ приведенных в примере результатов указывает на их корректность, адекватность рассматриваемых моделей и возможность использования разработанной программы в дальнейших вычислительных экспериментах.

Пример оценивания математического ожидания числа наступления событий, связанных с расходом ресурсов ОСК на обнаружения ОО в ЗБ КЗКА

Результаты моделирования и оценивания значения M_3 и M_3^* при начале применения ОСК из исходного состояния A_2 при $k=1(1)5$ по формулам (10), (11) приведены в таблице 2.

Таблица 2

k	1	2	3	4	5
M_3	1,077584	1,008943	1,002971	1,002453	1,002408
M_3^*	2	2	2	2	2

Гистограмма зависимостей M_3 и M_3^* от k приведена на рисунке 8.

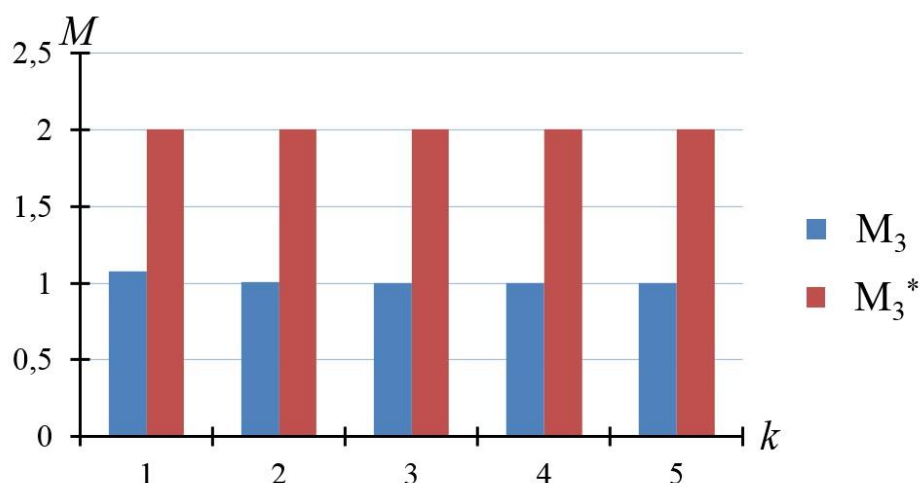


Рис. 8 Зависимости M_3 и M_3^* от k

Из данных в таблице 2 и гистограмм на рисунке 8 видно, что к окончанию модельного процесса применения ОСК по ОО для варианта $1 - \inf M_3 > 1,002$, а $M_3^* = 2$, что указывает на их корректность, адекватность рассматриваемых моделей и возможность использования разработанной программы в дальнейших вычислительных экспериментах.

Пример оценивания числа шагов при применения ОСК, оснащенного видеоаппаратурой, в ходе обнаружения ОО в ЗБ КЗКА по баллистическим условиям применения

При проведении вычислительных экспериментов были приняты исходные данные, приведенные в таблице 3.

Таблица 3

ΔT	$H_{\text{КЗКА}}$	$i_{\text{КЗКА}}$	$\Omega_{\text{КЗКА}}$	r_{36}	$H_{\text{ОСК}}$	$i_{\text{ОСК}}$	$\Omega_{\text{ОСК}}$	D	R_3	K_3, K_3
сут.	км	град.	град.	км	км	град.	град.	км	км	км ³ /с ²
0,5	500	82	10	200	300	82	30	10000	6371	398600,44
1,5	500	82	10	200	300	82	30	10000	6371	398600,44
2,5	500	82	10	200	300	82	30	10000	6371	398600,44
3,5	500	82	10	200	300	82	30	10000	6371	398600,44
4,5	500	82	10	200	300	82	30	10000	6371	398600,44

Результаты определения n_1 при варьировании высотой ОСК – $H_{\text{ОСК}}$ сведены в таблице 4.

Таблица 4

ΔT	$H_{\text{ОСК}}$			
	300	400	400	700
сут	км	км	Км	км
0,5	0	0	0	0
1,5	1	0	0	0
2,5	1	0	0	1
3,5	2	1	1	2
4,5	3	1	1	2

Тренды зависимостей n_1 от ΔT приведены на графиках (рисунок 9).

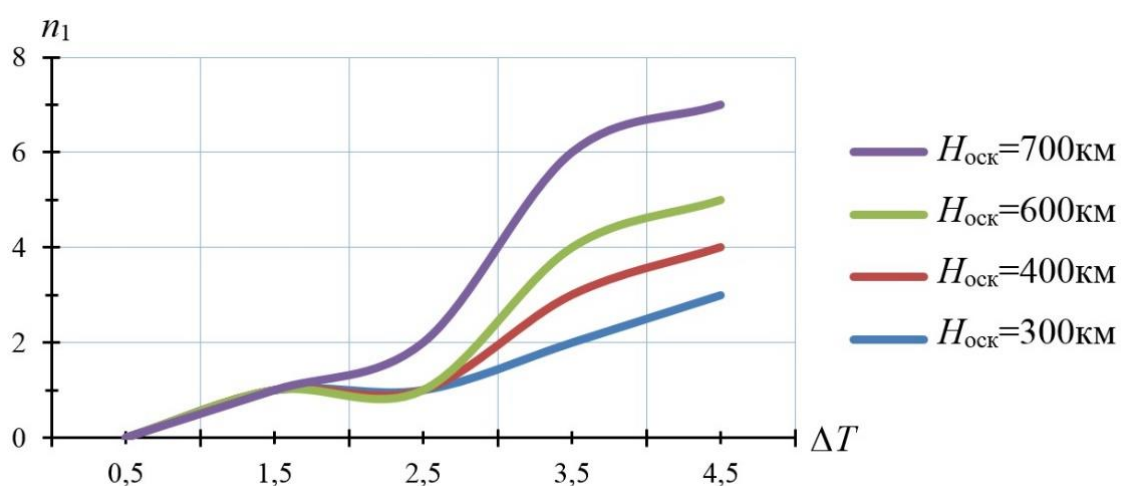


Рис. 9 Тренды зависимостей n_1 от ΔT

Результаты исследований зависимости n_1 от $i_{\text{ОСК}}$ приведены в таблице 5.

Таблица 5

ΔT	$i_{\text{ОСК}}$	$i_{\text{ОСК}}$	$i_{\text{ОСК}}$	$i_{\text{ОСК}}$
сут	54	72	82	98
0,5	0	0	0	0
1,5	1	1	1	1
2,5	1	1	1	1
3,5	2	2	2	2
4,5	3	3	3	3

Тренды зависимостей n_1 от ΔT приведены на графиках (рисунок 10).

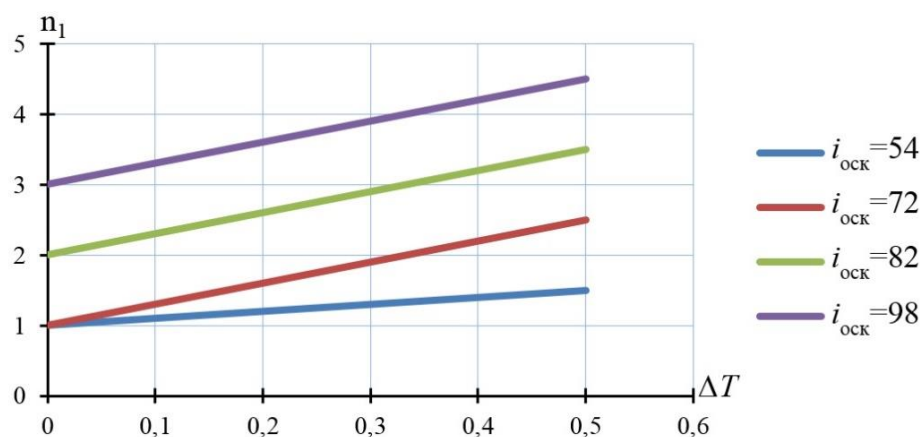


Рис. 10 Тренды зависимостей n_1 от ΔT

На рисунке 10 наклоны $i_{оск}$, соответствующие каждому графику заданы в градусах.

Заключение

Предлагаемый подход к моделированию и оцениванию эффективности процесса применения ОСК ЗБ КЗКА с использованием математического аппарата теории дискретных цепей Маркова закладывает фундамент создания математического аппарата выбора оптимальных параметров ОСК ЗБ КЗКА.

Анализ результатов вычислительных экспериментов указывает на их достоверность, а также на адекватность разработанных математических моделей, что позволяет использовать их в дальнейших исследованиях.

Практическая значимость полученных результатов исследований состоит в разработке программного обеспечения, апробации математических моделей и программного обеспечения в ходе вычислительных экспериментов, получении оценок эффектов применения ОСК ЗБ КЗКА и оценивании их корректности, а также в предложениях по их использованию для оценивания технических характеристик и способов применения, создаваемых ОСК.

Дальнейшим направлением развития предметной области является разработка моделей и методов оценивания параметров стохастических процессов применения ОСК ЗБ КЗКА.

Список источников

1. Котяшов Е.В. Концептуально-структурная модель функционирования орбитальной системы космических аппаратов наблюдения и предупреждения опасных ситуаций на геостационарной орбите // Труды военно-космической академии имени А.Ф. Можайского. 2020. № 672. С. 25-32.

2. Бондаренко А.В. Совершенствование организационно-правовых основ космической деятельности Российской Федерации // 17-я Международная конференция "Авиация и космонавтика - 2018" (Москва, 19–23 ноября 2018): тезисы доклада. – М.: Люксор, 2018. С. 570-572.

3. Efimov S., Pritykin D., Sidorenko V. Long-term Attitude Dynamics of Space Debris in Sun-synchronous Orbits: Cassini Cycles and Chaotic Stabilization // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 2018, vol. 130, no.10. DOI:[10.1007/s10569-018-9854-4](https://doi.org/10.1007/s10569-018-9854-4)

4. Пикалов Р.С., Юдинцев В.В. Обзор и выбор средств увода крупногабаритного космического мусора // Труды МАИ. 2018. № 100. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=93299>

5. Баркова М.Е. Космический аппарат для утилизации космического мусора в околоземном пространстве // Труды МАИ. 2018. № 103. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=100712>

- 6.Баркова М.Е. К вопросу о построении трассы космического аппарата для утилизации космического мусора и объекта космического мусора // Труды МАИ. 2022. № 125. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=168147>. DOI: [10.34759/trd-2022-125-01](https://doi.org/10.34759/trd-2022-125-01)
- 7.Соколов Н.Л. Метод определения орбитальных параметров космического мусора бортовыми средствами космического аппарата // Труды МАИ. 2014. № 77. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=52950>
- 8.Минаков Е.П., Шафигуллин И.Ш., Зубачев А.М. Методы исследования эффективности применения организационно-технических систем космического назначения. - СПб.: ВКА имени А.Ф. Можайского, 2016. – 244 с.
- 9.Замалютдинов Р.Ю., Ладоскин А.И. Цепи Маркова // Студенческий форум. 2019. № 8 (59). С. 44–45.
- 10.Зубков А.М., Филина М.В. Вычисление распределений статистик с помощью цепей Маркова // Дискретная математика. 2020. Т. 32. № 4. С. 38–51. DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1622>
- 11.Перепелкин Е.А. Оценка состояния неоднородной цепи Маркова // Вторая Всероссийская научная конференция «Моделирование и ситуационное управление качеством сложных систем» (Санкт-Петербург, 14–22 апреля 2021). - Санкт-Петербург, 2021. С. 38–39. DOI: [10.31799/978-5-8088-1558-2-2021-2-38-39](https://doi.org/10.31799/978-5-8088-1558-2-2021-2-38-39)
- 12.Былинина Ю.В. Статистический метод прогнозирования: цепи Маркова // Теоретический и практический потенциал современной науки: сборник научных статей. – М.: Изд-во Перо, 2020. С. 103-107.

- 13.Цахоева А.Ф., Гаспарян А.Ф. Моделирование вероятностей состояний системы для однородной цепи Маркова // Бюллетень Владикавказского института управления. 2018. № 55. С. 154–159.
- 14.Zhiyan Shi, Dan Bao Baihui Wu. The asymptotic equipartition property of Markov chains in single infinite Markovian environment on countable state space // Stochastics, 2019, vol. 91, no. 6, pp. 945–957. DOI:[10.1080/17442508.2019.1567730](https://doi.org/10.1080/17442508.2019.1567730)
- 15.Wenguang Yu, Peng Guo, Qi Wang et al. On a periodic capital injection and barrier dividend strategy in the compound Poisson risk model // Mathematics, 2020, vol. 8, no. 4, pp. 511. DOI:[10.3390/math8040511](https://doi.org/10.3390/math8040511)
- 16.Борсоев В.А., Лебедев А.М., Степанов С.М. Аналитическое решение системы дифференциальных уравнений Колмогорова для ошибок пилота первого и второго рода // Научный вестник МГТУ ГА. 2011. № 171. С. 89-95.
- 17.Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Операционное исчисление. Теория устойчивости: Задачи и примеры с подробными решениями. - М.: Едиториал УРСС, 2003. - 176 с.
- 18.Минаков Е.П. Применение сферической тригонометрии для расчета параметров движения космических аппаратов навигационных систем ГЛОНАСС, GPS, Галилео в зонах радиовидимости наземных пунктов // Труды Военно-космической академии имени А.Ф.Можайского. 2012. № 634. С. 41-44.
- 19.Минаков Е.П., Бугайченко П.К. Модель оценивания вероятности пролета орбитального объекта через зону видимости пункта, расположенного на поверхности земли // Труды Военно-космической академии имени А.Ф.Можайского. 2015. № 646. С. 24-28.

20. Соколов Б.В., Минаков Е.П. Исследования характеристик размещения и вариантов применения моноблочных стационарных наземных средств поражения астероидов // Труды СПИИРАН. 2016. № 5(48). С. 182-197. DOI: [10.15622/sp.48.9](https://doi.org/10.15622/sp.48.9)

References

1. Kotyashov E.V. *Trudy voenno-kosmicheskoi akademii imeni A.F. Mozhaiskogo*, 2020, no. 672, pp. 25-32.
2. Bondarenko A.V. *17-ya Mezhdunarodnaya konferentsiya "Aviatsiya i kosmonavtika - 2018"*, Moscow, Lyuksor, 2018, pp. 570-572.
3. Efimov S., Pritykin D., Sidorenko V. Long-term Attitude Dynamics of Space Debris in Sunynchronous Orbits: Cassini Cycles and Chaotic Stabilization, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 2018, vol. 130, no.10. DOI:[10.1007/s10569-018-9854-4](https://doi.org/10.1007/s10569-018-9854-4)
4. Pikalov R.S., Yudintsev V.V. *Trudy MAI*, 2018, no. 100. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=93299>
5. Barkova M.E. *Trudy MAI*, 2018, no. 103. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=100712>
6. Barkova M.E. *Trudy MAI*, 2022, no. 125. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=168147>. DOI: [10.34759/trd-2022-125-01](https://doi.org/10.34759/trd-2022-125-01)
7. Sokolov N.L. *Trudy MAI*, 2014, no. 77. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=52950>
8. Minakov E.P., Shafigullin I.Sh., Zubachev A.M. *Metody issledovaniya effektivnosti primeneniya organizatsionno-tekhnicheskikh sistem kosmicheskogo naznacheniya* (Methods of studying the effectiveness of the use of organizational and technical systems for space purposes), Saint Petersburg, VKA imeni A.F. Mozhaiskogo, 2016, 244 p.

9. Zamalyutdinov R.Yu., Ladoshkin A.I. *Studencheskii forum*, 2019, no. 8 (59), pp. 44–45.
10. Zubkov A.M., Filina M.V. *Diskretnaya matematika*, 2020, vol. 32, no. 4. pp. 38–51.
DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1622>
11. Perepelkin E.A. *Vtoraya Vserossiiskaya nauchnaya konferentsiya «Modelirovanie i situatsionnoe upravlenie kachestvom slozhnykh sistem»*, Sankt-Peterburg, 2021, pp. 38–39.
DOI: [10.31799/978-5-8088-1558-2-2021-2-38-39](https://doi.org/10.31799/978-5-8088-1558-2-2021-2-38-39)
12. Bylinina Yu.V. *Teoreticheskii i prakticheskii potentsial sovremennoi nauki: sbornik nauchnykh statei*, Moscow, Izd-vo Pero, 2020, pp. 103-107.
13. Tsakhoeva A.F., Gasparyan A.F. *Byulleten' Vladikavkazskogo instituta upravleniya*, 2018, no. 55, pp. 154–159.
14. Zhiyan Shi, Dan Bao Baihui Wu. The asymptotic equipartition property of Markov chains in single infinite Markovian environment on countable state space, *Stochastics*, 2019, vol. 91, no. 6, pp. 945–957. DOI:[10.1080/17442508.2019.1567730](https://doi.org/10.1080/17442508.2019.1567730)
15. Wenguang Yu, Peng Guo, Qi Wang et al. On a periodic capital injection and barrier dividend strategy in the compound Poisson risk model, *Mathematics*, 2020, vol. 8, no. 4, pp. 511. DOI:[10.3390/math8040511](https://doi.org/10.3390/math8040511)
16. Borsoev V.A., Lebedev A.M., Stepanov S.M. *Nauchnyi vestnik MGTU GA*, 2011, no. 171, pp. 89-95.
17. Krasnov M.L., Kiselev A.I., Makarenko G.I. *Operatsionnoe ischislenie. Teoriya ustichivosti: Zadachi i primery s podrobnymi resheniyami* (Operational calculus. The theory of consistency: Problems and examples with detailed solutions), Moscow, Editorial URSS, 2003, 176 p.

18. Minakov E.P. *Trudy Voенno-kosmicheskoi akademii imeni A.F.Mozhaiskogo*, 2012, no. 634, pp. 41-44.
19. Minakov E.P., Bugaichenko P.K. *Trudy Voенno-kosmicheskoi akademii imeni A.F.Mozhaiskogo*, 2015, no. 646, pp. 24-28.
20. Sokolov B.V., Minakov E.P. *Trudy SPIIRAN*, 2016, no. 5(48). pp. 182-197. DOI: [10.15622/sp.48.9](https://doi.org/10.15622/sp.48.9)

Статья поступила в редакцию 03.08.2023

Одобрена после рецензирования 08.08.2023

Принята к публикации 27.10.2023

The article was submitted on 03.08.2023; approved after reviewing on 08.08.2023; accepted for publication on 27.10.2023