

На правах рукописи



Гавва Любовь Михайловна

**МЕТОДЫ АНАЛИЗА СТАТИЧЕСКОЙ ПРОЧНОСТИ И УСТОЙЧИВОСТИ
КОНСТРУКТИВНО-АНИЗОТРОПНЫХ ПАНЕЛЕЙ
ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ ИЗ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ
НА ОСНОВЕ УТОЧНЁННОЙ ТЕОРИИ
С УЧЁТОМ ТЕХНОЛОГИИ ИЗГОТОВЛЕНИЯ**

Специальность 05. 07. 03
«Прочность и тепловые режимы летательных аппаратов»

Автореферат диссертации на соискание учёной степени
доктора технических наук

Москва – 2021

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)»

Научный консультант доктор технических наук, профессор
Фирсанов Валерий Васильевич

Официальные оппоненты: **Белов Пётр Анатольевич**,
доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории неклассических моделей механики композиционных материалов,
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт прикладной механики Российской академии наук
ИПРИМ РАН, г. Москва

Гришин Вячеслав Иванович,
доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник отделения статической и тепловой прочности,
Федеральное государственное унитарное предприятие
«Центральный аэрогидродинамический институт имени профессора Н. Е. Жуковского» ЦАГИ, МО, г. Жуковский

Морозов Евгений Михайлович,
доктор технических наук, профессор, профессор кафедры
«Физика прочности»,
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», г. Москва

Ведущая организация Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт машиноведения имени А.А. Благонравова Российской академии наук ИМАШ РАН, г. Москва

Защита диссертации состоится 12 мая 2022 г. в 12:00 часов на заседании диссертационного совета Д 212.125.10 в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» по адресу: Волоколамское шоссе, д. 4, г. Москва, А-80, ГСП-3, 125993

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» <https://mai.ru/events/defence/>

Автореферат разослан « ____ » _____ 2022 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета Д 212.125.10
к.т.н., доцент

Денискина Антонина Робертовна

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования

Исследование современных проблем прочности относится к числу важнейших задач прикладной механики в свете развития научно-технического прогресса в рамках приоритетных комплексных проектов. Проблемы возникают в связи с необходимостью создания новых объектов авиационной техники, эффективность которых во многом зависит от оптимальности силовых несущих конструкций. Несущие поверхности современных летательных аппаратов (ЛА) представляют собой геометрически сложные дискретно-континуальные тонкостенные пространственные системы, подкреплённые дискретным набором продольных и поперечных силовых элементов. Важнейший круг проблем, стоящих перед теорией, практикой проектирования и практикой изготовления, - применение в конструкциях ЛА полимерных волокнистых композиционных материалов, обладающих целым рядом специфических особенностей, включая анизотропию механических свойств, которые необходимо учитывать при построении новых математических моделей.

«Главные проекты – ближне-среднемагистральный пассажирский самолёт МС-21 и широкофюзеляжный дальнемагистральный пассажирский самолёт CRJ929, где применение композиционных материалов (КМ) является ключевым аспектом. С заменой металлических конструкций на композитные происходит смена подхода к проектированию. Новые материалы позволяют проектировать агрегаты, где прочность конструкции распределяется в соответствии с нагрузками в различных зонах в необходимом направлении. Появляется возможность целенаправленно создавать КМ под конкретную конструкцию в соответствии с действующими нагрузками, особенностями ее эксплуатации и технологическими возможностями полимерных композитов. Многообразие волокон и матричных материалов, а также схем армирования, используемых при создании композитных конструкций, позволяет направленно регулировать прочность, жесткость, уровень рабочих температур путем подбора состава, изменения соотношения компонентов и микроструктуры композита. В самолётах будущего применение композитов станет ключевым фактором, который сейчас позволяет реализовать революционный скачок. Тот, кто научится использовать лучшие свойства композитов и сможет создать эффективные конструкции, получит колоссальное преимущество» [Гайданский А.И.].

МС-21 - инновационный самолет. Главная из инноваций: **самолет с композитным крылом** (Рисунок 1). Принципиально важно: композиты используются в высоконагруженных конструкциях. Из композитов у МС-21 изготовлены отдельные элементы фюзеляжа, центроплан и **оперение**. Выпускаются **элементы кессона крыла, лонжероны, интегральные панели крыла, элементы механизации** для российских самолетов МС-21 и Superjet 100. Крыло ЛА из полимерных КМ имеет обшивку, расположенные вдоль размаха крыла лонжероны и ребра жесткости - внутренние нервюры на основе стекло-, углеткани (углеленты) (Рисунок 2).



Рисунок 1 - MS-21 – инновационный самолёт с композитным крылом



Рисунок 2 - Верхняя панель крыла со стрингерами из полимерных композиционных материалов (ПКМ)

Практика проектирования авиационных конструкций требует создания и развития общих методов расчёта, совершенствования прикладных способов решения соответствующих краевых задач для каркасированных тонкостенных систем, в том числе – плоских прямоугольных панелей при регулярном и произвольном наборе как постоянной, так и переменной жёсткости, при наборе однонаправленном и перекрёстном, а также при эксцентричном расположении рёбер относительно срединной поверхности обшивки. Расчёт и проектирование конструкций из композиционных материалов является приоритетным тематическим направлением при реализации приоритетных комплексных проектов. Как отмечается в работах исследователей ведущих научных школ, дальнейшее развитие теории ребристых панелей, диктуемое потребностями авиационной и ракетно-космической техники, должно идти по пути обоснования и ввода в практику новых расчётных схем натурной обшивки с элементами жёсткости продольного силового набора и нервюрами, которые бы, с одной стороны, отражали в достаточно полной мере специфику рассматриваемых конструкций и в то же время были эффективными в смысле возможности построения решения. Здесь особенно важным является уточнение расчётной

модели ребра, что, в свою очередь, представляет собой источник новых постановок задач.

Авиастроительная промышленность требует снижения затрат на разработку и эксплуатацию авиационной техники в краткосрочной и долгосрочной перспективе. Снижение веса планера за счёт использования структурных резервов в композитных авиационных конструкциях способствует достижению данной цели, однако, необходим точный и экспериментально подтверждённый анализ, моделирование напряжённо-деформированного состояния (НДС), прочности и устойчивости реальных конструкций в реальных условиях нагружения.

Вышеизложенное указывает на **актуальность** комплексного изучения проблем статики и устойчивости эксцентрично подкреплённых прямоугольных панелей из композиционных и изотропных материалов с учётом технологии изготовления в условиях силового и температурного воздействия как элементов несущих поверхностей ЛА.

Степень разработанности темы

Основные направления теории и методы расчёта композитных тонкостенных конструкций класса конструктивно-анизотропных панелей проанализированы в главе 1.

Возрастающее использование конструктивно-анизотропных панелей, изготовленных из ПКМ, требует теоретически обоснованного анализа механического поведения данных конструктивных элементов. В обзоре рассматриваются упругие модели в линейной постановке, построенные на основе моделей методы решения задач и результаты анализа НДС и устойчивости с учётом неоднородности и анизотропии свойств, а также технологии изготовления. В приведённой обзорной библиографии представлен материал, начиная с основополагающих работ до последних достижений. В публикациях последних двадцати лет большинство авторов при проведении теоретических исследований уделяет надлежащее внимание учёту особенностей поведения композитных панелей под нагрузкой. Даны классификация и анализ основных направлений развития теории конструктивно-анизотропных панелей из композиционных материалов, обсуждаются наиболее разработанные модели и уравнения, математический аппарат, предназначенный для решения краевых задач.

Представленный обзор российских и зарубежных публикаций даёт возможность оценить современное состояние вопроса, очерчивает область дальнейших научных исследований. Из приведённого обзора следует, - проблема анализа прочности и устойчивости прямоугольных в плане подкреплённых панелей из полимерных композиционных материалов при статическом нагружении отражена в литературе широким спектром постановок задач, методов их решения, полученных результатов. Многообразие научных подходов к проблеме указывает на актуальность работ в данном направлении. Вопросы, возникающие в практике проектирования авиационной техники при жёстких требованиях к её весу, надёжности и стоимости, служат постоянным стимулом к дальнейшему развитию теории, так как каждый существующий метод расчёта имеет свои особенности и свою область применения, обладает как преимуществами, так и недостатками. **Недостаточно изученными** являются

возможности использования принципов конструктивной анизотропии в рамках общей контактной задачи композитных обшивки и набора; необходимо совершенствование теории учёта кручения подкрепляющих элементов из ПКМ; практически отсутствуют алгоритмы, реализующие интегрирование разрешающих уравнений восьмого порядка и более высоких порядков в одинарных тригонометрических рядах; не рассматривается возможность построения решения краевых задач с дифференциальным оператором восьмого порядка при расчёте панелей с эксцентричным подкреплением и граничными условиями на смежных сторонах контура, соответствующих реальному закреплению панели в составе проектируемой конструкции. В связи с вышеизложенным в диссертации **представляется целесообразным** попытаться восполнить существующий пробел, а именно исследовать напряжения, деформации и критические параметры произвольным образом закреплённых прямоугольных панелей из ПКМ, усиленных односторонним взаимно-ортогональным жесткостным набором, а также гладких композитных панелей с несимметричной структурой пакета по толщине. Используются подходы в рамках связанных плоской задачи и задачи изгиба, согласно конструктивно-анизотропной модели, с уточнением расчётной схемы ребра при учёте его работы на кручение. Перспективное направление исследований – проектирование композитных конструкций с учётом технологии изготовления, когда технологический процесс принимается во внимание на этапе разработки изделия.

Представляется целесообразным предложить общую теорию расчёта широкого класса конструктивно-анизотропных панелей: композитных, металлических, комбинированных. Широкое распространение конструктивно-анизотропных панелей в конструкциях современных образцов авиационной техники приводит к необходимости развития уточнённых методов для оценки напряжённо-деформированного состояния и устойчивости на этапе проектирования. Новые расчётные модели в уточнённой постановке составляют основу процессов проектирования и оптимизации.

Цель диссертации

Разработка в рамках междисциплинарного подхода на основе уточнённой теории с учётом технологии изготовления проблем комплексного исследования статической прочности и устойчивости эксцентрично подкреплённых прямоугольных панелей из композиционных и изотропных материалов как элементов несущих поверхностей ЛА.

Разработка универсального математического аппарата и компьютерного математического обеспечения для снижения и оптимизации весовых характеристик конструктивно-анизотропных панелей ЛА из композиционных материалов необходима при последующей реализации решения проблемы проектирования под заданную стоимость, - в качестве перспективы дальнейшей проработки темы.

Задачи исследования сформулированы для реализации цели диссертационной работы и состоят

- в построении научно обоснованных универсальных расчётных схем для исследования в уточнённой постановке прочности и устойчивости конструктивно-

анизотропных панелей ЛА из композиционных материалов, находящихся в условиях силового и температурного воздействия,

- в обобщении уточнённых расчётных моделей для класса плоских прямоугольных конструктивно-анизотропных панелей:

- изготовленных из полимерных волокнистых композиционных материалов, эксцентрично подкреплённых стержнями двух направлений, расположенными параллельно сторонам опорного профиля (контура);

- гладких, без подкреплений, из высококомодульных композиционных материалов, обладающих анизотропией вследствие несимметрии свойств структуры многослойного пакета по толщине;

- эксцентрично подкреплённых стержнями двух направлений, расположенными параллельно сторонам опорного профиля, изготовленных из изотропных материалов;

- эксцентрично подкреплённых стержнями двух направлений, расположенными параллельно сторонам опорного профиля, изготовленных из изотропных материалов с усилением рёбер жёсткости композитными жгутами;

- в использовании аналитических подходов, основанных на принципах конструктивной анизотропии и дальнейшем развитии теории тонкостенных упругих стержней В.З. Власова,

- в построении научно обоснованных универсальных расчётных схем для исследования прочности и устойчивости конструктивно-анизотропных панелей ЛА, находящихся в условиях силового и температурного воздействия, с учётом технологии изготовления, когда технологический процесс принимается во внимание на этапе разработки изделия,

- в построении уравнений равновесия высоких порядков и естественных граничных условий для исследования общего напряжённого состояния,

- в доказательстве правомочности упрощения расчётной схемы при определении основного напряжённого состояния путём сведения её к краевой задаче для уравнения с дифференциальным оператором восьмого порядка в соответствии с теорией асимптотического интегрирования дифференциальных уравнений,

- в разработке общих способов определения напряжённо-деформированного состояния и критических параметров произвольным образом закреплённых прямоугольных панелей с учётом технологических факторов,

- в построении решений уравнений равновесия двенадцатого и восьмого порядков в одинарных тригонометрических рядах с учётом и без учёта краевых эффектов,

- в анализе возможности использования для исследования прочности односторонне усиленных панелей известного в литературе приёма, заключающегося в формальном распространении гипотезы Кирхгофа на всё тело анизотропной среды, в оценке границ применимости теории Кирхгофа,

- в распространении известных способов решения различных краевых бигармонических задач на интегрирование дифференциального уравнения восьмого порядка в частных производных и применении модификаций метода однородных решений к расчёту широкого класса конструктивно-анизотропных панелей с эксцентричным продольно-поперечным набором, с реальными типами опираний и креплений смежных сторон контура,

- в решении практически важных задач о бифуркации равновесных форм прямоугольных панелей с односторонними подкреплениями по двум взаимно-перпендикулярным направлениям; в выявлении условий возникновения общей изгибающей и многоволновой крутильной форм потери устойчивости при построении решения в двойных тригонометрических рядах,
- в разработке метода определения критических усилий конструктивно-анизотропных панелей с учётом переменности исходного докритического напряжённого состояния,
- в построении алгоритмов исследования задач устойчивости эксцентрично подкреплённых панелей в одинарных тригонометрических рядах, а также с использованием метода однородных решений при произвольных условиях на контуре,
- в разработке комплекса программ в операционной среде MATLAB, который может быть использован в дальнейшем в системе автоматизированного проектирования при решении задачи проектирования изделия под заданную стоимость; в численном анализе полученных решений, компьютерной параметрической оптимизации конструктивно-анизотропных панелей ЛА,
- в экспериментальном подтверждении достоверности теоретических результатов,
- в изложении новых научно обоснованных технических и технологических решений, внедрение которых внесёт значительный вклад в развитие авиационной промышленности.

Объект исследования – конструктивно-анизотропные панели несущих поверхностей ЛА (Рисунок 3).

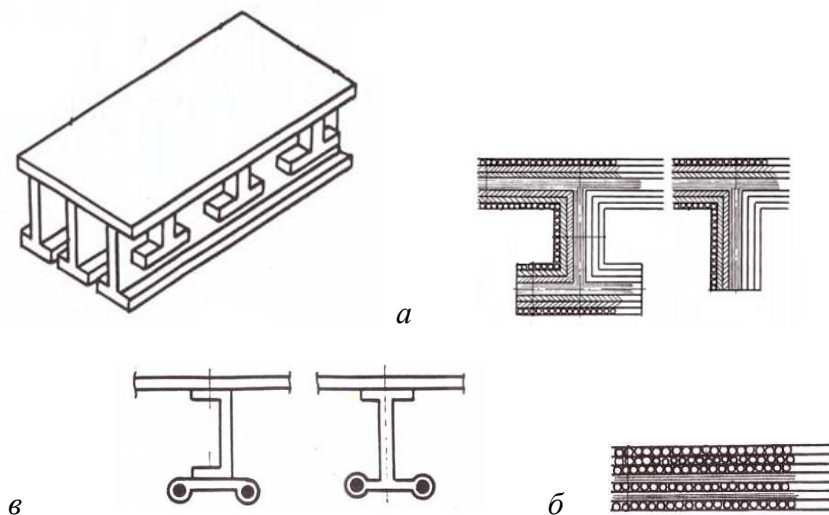


Рисунок 3 - Конструктивно-анизотропные панели:

а - изготовленные из полимерных волокнистых композиционных материалов, с эксцентричным продольно-поперечным набором; *б* - многослойные композитные с несимметричной по толщине структурой пакета; *в* - изготовленные из изотропных материалов, с усилением эксцентрично расположенных ребер жёсткости композитными жгутами

Научная новизна

Выполненное в диссертации дальнейшее развитие теории тонкостенных упругих стержней В.З. Власова применительно к общей контактной задаче для обшивки и ребра с учётом деформации сдвига при закручивании составляет

научную новизну работы. Концепция принадлежала профессору кафедры «Строительная механика и прочность ЛА» А.Н. Елпатьевскому.

К новым научным результатам относятся:

- формирование новой обобщённой универсальной математической модели для исследования прочности и устойчивости конструктивно-анизотропных панелей ЛА, находящихся в условиях силового и температурного воздействия; технологический процесс принимается во внимание на этапе разработки изделия из полимерных композиционных материалов,
- обобщение комплексной системы новых уточнённых расчётных моделей для класса конструктивно-анизотропных панелей несущих поверхностей ЛА, изготовленных из композиционных и изотропных материалов,
- постановка и решение новых краевых задач статики конструктивно-анизотропных панелей ЛА; реализация решения краевых задач с дифференциальными операторами уравнений равновесия двенадцатого и восьмого порядков в одинарных тригонометрических рядах,
- доказательство правомочности значительного упрощения обобщённой универсальной математической модели при определении основного напряжённого состояния без учёта краевых эффектов, - в широком диапазоне жесткостей панелей в соответствии с теорией асимптотического интегрирования дифференциальных уравнений,
- распространение приёмов исследования различных краевых бигармонических задач – вариантов метода однородных решений – на интегрирование дифференциального уравнения восьмого порядка при расчёте конструктивно-анизотропных панелей с реальными условиями закрепления контура в составе проектируемой конструкции,
- разработка методологии определения критических сил различных форм потери устойчивости конструктивно-анизотропных панелей из композиционных материалов с учётом неравномерности исходного сложного докритического напряжённого состояния, формулы для критических параметров изгибающей и крутильной форм рекомендуется использовать в качестве ограничений целевой функции при последующей реализации решения проблемы проектирования несущих поверхностей ЛА,
- оценка влияния технологии изготовления на статику и устойчивость конструктивно-анизотропных панелей из полимерных волокнистых композиционных материалов в рамках решения краевых задач для уравнения восьмого порядка,
- разработка нового универсального математического аппарата и нового компьютерного математического обеспечения для реализации процесса компьютерной многокритериальной оптимизации с учётом технологии изготовления конструктивно-анизотропных панелей из композиционных материалов, находящихся в условиях механического, внешнего температурного и технологического температурного воздействий.

Теоретическая значимость работы определяется её новизной.

Практическая значимость работы

В операционной среде MATLAB разработан пакет прикладных программ и

реализован процесс компьютерной многокритериальной оптимизации с учётом технологии изготовления конструктивно-анизотропных панелей из композиционных материалов, находящихся в условиях механического, внешнего температурного и технологического температурного воздействия.

Так как решение строится точными аналитическими методами, время расчёта минимально, что представляет интерес с точки зрения практики проектирования с использованием параметрического анализа. Результаты расчётов на прочность и устойчивость с учётом технологических факторов дают возможность снижения и оптимизации весовых характеристик конструкции.

Анализ влияния различных жесткостных, геометрических и конструктивных параметров на прочность и устойчивость анизотропных панелей позволил оценить пределы применимости существующих расчётных моделей и методов, а также выявить некоторые второстепенные факторы, которые в значительной мере упрощают задачу.

Построенные алгоритмы и разработанный комплекс MATLAB-программ предназначены для дальнейшего применения при проектировании авиационной техники. Уточнение в отношении возможностей конструкции противостоять продольно-поперечным и температурным внешним воздействиям при жёстких требованиях к весу и надёжности составляет основу любого анализа о минимальной массе в рамках решения задачи о проектировании под заданную стоимость.

Практическая значимость диссертации подтверждается:

поддержкой гранта Министерства науки и высшего образования РФ, проект № FSFF-2020-0013, руководитель В.Ю. Гидаспов, поддержкой гранта КИАС РФФИ, проект № 17-08-00849/17, руководитель В.В. Фирсанов.

Результаты исследований используются в учебном процессе МАИ (НИУ) в курсе лекций «Основы прочности конструкций», при руководстве курсовыми проектами, при руководстве диссертациями магистрантов совместного университета МАИ-ШУЦТ (Шанхайский университет ЦзяоТун), Shanghai, China.

Методология и методы исследования

В качестве методологической основы используется системный подход с разделным формированием моделей и алгоритмов, с последующим построением научно обоснованных обобщённых универсальных расчётных схем для исследования прочности и устойчивости конструктивно-анизотропных панелей ЛА, находящихся в условиях силового и температурного воздействия, с учётом технологии изготовления.

Методология как совокупность методов исследования включает аналитические методы теории упругости, строительной механики тонкостенных конструкций, механики композиционных материалов: решение в перемещениях, теорию тонкостенных упругих стержней, вариационный принцип Лагранжа, теорию асимптотического интегрирования дифференциальных уравнений, метод символического интегрирования дифференциальных уравнений, решение краевых задач для дифференциальных уравнений высоких порядков в тригонометрических рядах, модификации метода однородных решений.

В качестве методов исследования используются принципы

конструктивной анизотропии в рамках общей контактной задачи для обшивки и ребра с уточнением модели последнего при закручивании. К одному из направлений построения достаточно результативных моделей, основу которых составляют аналитические методы расчёта, оперирующие непрерывными зависимостями для напряжений и деформаций, принадлежат работы, базирующиеся на схематизации тонкостенной конструкции крыла в виде конструктивно-анизотропной панели. Модель применима к некоторым типам монолитных крыльев и используется для расчёта несущих поверхностей, усиленных регулярным набором стрингеров и лонжеронов.

Положения, выносимые на защиту

На защиту выносятся:

- новая обобщённая универсальная математическая модель для исследования в уточнённой постановке проблем прочности и устойчивости конструктивно-анизотропных панелей ЛА, находящихся в условиях силового и температурного воздействия; технологический процесс принимается во внимание на этапе разработки изделия из полимерных композиционных материалов; теория тонкостенных упругих стержней В.З. Власова свободна от гипотезы об отсутствии деформации сдвига срединной поверхности профиля элемента жёсткости,
- постановка и решение новых краевых задач статики конструктивно-анизотропных панелей ЛА; результаты численной реализации решения краевых задач с дифференциальными операторами уравнений равновесия двенадцатого и восьмого порядков в одинарных тригонометрических рядах,
- доказательство правомочности значительного упрощения обобщённой универсальной математической модели при определении основного напряжённого состояния без учёта влияния краевых эффектов в соответствии с теорией асимптотического интегрирования дифференциальных уравнений,
- новые алгоритмы интегрирования дифференциального уравнения равновесия восьмого порядка при расчёте конструктивно-анизотропных панелей с реальными условиями закрепления контура в составе проектируемой конструкции, - с использованием приёмов исследования различных краевых бигармонических задач: вариантов метода однородных решений,
- методология определения критических сил изгибной и крутильной форм потери устойчивости конструктивно-анизотропных панелей из композиционных материалов с учётом неравномерности исходного сложного докритического напряжённого состояния, формулы для критических усилий, рекомендуемые в качестве ограничений целевой функции при последующей реализации решения проблемы проектирования несущих поверхностей ЛА,
- оценка влияния технологии изготовления на статику и устойчивость конструктивно-анизотропных панелей из полимерных волокнистых композиционных материалов в рамках решения краевых задач для уравнения восьмого порядка,
- результаты численного анализа проблем устойчивости и компьютерной многокритериальной оптимизации конструктивно-анизотропных панелей ЛА из полимерных композиционных материалов при сжатии,

- результаты экспериментальных исследований проблем устойчивости конструктивно-анизотропных панелей ЛА из полимерных композиционных и изотропных материалов при сжатии, верификация математических моделей.

Степень достоверности результатов

Необходимым условием достоверности теоретических исследований проблем статики и устойчивости конструктивных элементов несущих поверхностей ЛА является корректный математический анализ расчётных моделей. Здесь особую роль играют точные аналитические решения, построенные в форме конечных выражений или бесконечных рядов, позволяющих получать результаты с любой степенью точности. Таким образом, достоверность теоретического исследования обеспечивается обоснованностью применения гипотез, полнотой расчётной модели и корректностью её математической обработки. Достоверность подтверждается сравнением полученных теоретических результатов с результатами натуральных экспериментов.

Апробация результатов

Основные положения и результаты доложены и обсуждены

на международном конгрессе International Council of Aeronautical Sciences ICAS2020(2021) (2021 г., Shanghai, China), на семнадцати международных и всероссийских конференциях, симпозиумах и научных семинарах.

Содержание диссертации изложено в двадцати девяти публикациях, в том числе – в десяти изданиях перечня ВАК по специальности 05.07.03, из которых три публикации проиндексированы в международных базах данных SCOPUS и Web of Science, в пяти изданиях перечня ВАК по смежным специальностям, пять публикаций статей по материалам конференций проиндексированы в международных базах данных SCOPUS и Web of Science. В представленной библиографии содержатся ссылки на статьи автора.

Личный научный вклад автора

Исследования, результаты которых изложены в диссертационной работе, проведены лично соискателем в процессе научной деятельности. Исследования включают математическую постановку проблемы, разработку математических моделей, аналитических методов, подходов и алгоритмов, создание программных комплексов, многокритериальные параметрические расчёты, обработку и анализ результатов, представленных в выносимых на защиту положениях. Автор лично подготовил публикации, отражающие содержание диссертации, и лично выступал с докладами по выполненной работе. При этом необходимо отметить, что проведённые исследования основывались на научных концепциях и научной базе, созданных выдающимися отечественными учёными – профессорами А.Н. Елпатьевским, С.А. Лурье, В.В. Фирсановым. Автор выражает глубокую признательность и благодарность своему научному консультанту Заслуженному работнику высшей школы Российской Федерации, Почётному работнику высшего профессионального образования Российской Федерации, доктору технических наук, профессору Фирсанову Валерию Васильевичу за постоянную поддержку, ценные замечания и рекомендации.

Структура и объём диссертации

Диссертация состоит из введения, семи глав, заключения, списка

литературы и приложений с актами внедрения результатов исследования. Общий объём диссертации составляет 315 страниц, работа содержит 43 рисунка, 12 таблиц. Список публикаций соискателя и использованных источников включает 364 наименования.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

В первой главе приведены классификация и обзор работ, посвящённых построению расчётных моделей, разработке аналитических, численных и экспериментальных методов исследования напряжённо-деформированного состояния и устойчивости конструктивно-анизотропных панелей из композиционных материалов.

Представлен обзор работ отечественных и зарубежных авторов, анализируется современное состояние проблем статичности и устойчивости, излагаются получившие наибольшее распространение подходы к проблеме оптимального проектирования конструктивно-анизотропных прямоугольных панелей из композиционных материалов, находящихся в условиях силового и температурного воздействия. Оценка современного состояния даёт возможность формулировать рекомендации и перспективы последующей разработки темы, очерчивает круг дальнейших исследований в области рационального проектирования несущих поверхностей перспективных изделий авиационной техники из композиционных материалов.

Обзорная литература

[Образцов И.Ф., Сироткин О.С., Литвинов В.Б., 2000], [Альтенбах Х., 1998], [Kobayashi H., 1997], [Carrera E., 1998], [Ахмедов А.Б., 2011], [Немировский Ю.В., Горынин Г.Л., 2011], [Carrera E., 2001], [Carrera E., Demasi L., 2003], [Захаров Д.Д., 2000], [Motygin O.V., Nazarov S.A., 2000], [Edwards D.A., Williams F.W., Kennedy D., 1998], [Tseng Y-P, Jiang Y-C, 1998], [Robbins D.H., Reddy J.N., 1996], [Kam T.Y., Sher H.F., Chao T.N., Chang R.R., 1996], [Soldatos K.P., Watson P., 1997], [Carrera E., 2003], [Jalali S.J., Taheri F., 1998], [Zenkour A.M., Fares M.E., 2001], [Ugrimov S.V., 2002], [Соколкин Ю.В., Макарова Е.Ю., 2002], [Ni Q-Q., Kataoka S., 1998], [Henderson J.L., Gurdal Z., Loos A.C., 1998], [Андреев А. Н., Немировский Ю.В., 2001], [Голушко С.К., Немировский Ю.В., 2008], [Григолюк Э.И., Куликов Г.М., 2005], [Голушко С.К., 2005], [Немировский Ю.В., Янковский А.П., 2004], [Chen H.J., Tsai S.W., 1996], [Liew K.M., Pan Z.Z., Zhang I.W., 2019], [Nikbakt S., Kamarian S., Shakeri M., 2018], [Thai H.T., Kim S.E., 2015], [Jiang J., Chen N., Geng Y., Shao H., Lin F., 2017], [Kulkarni P., Dhoble A., Padole P., 2018], [Degenhardt R., Tessmer J., 2005], [Гришин В.И., Дзюба А.С., Дударьков Ю.И., 2013], [Дудченко А.А., Шумова Н.П., 2006], [Дудченко А.А., 2013], [Васильев В.В., 2012], [Зорин В.А., 2011], [Чернышев С.В., 2013], [Смердов А.А., 2011], [Mikhasev G. I., Altenbach H., 2019], [Morozov E.V., Vasiliev V 2007], [Voyiadjis G.Z., Kattan P.I., 2005].

Различные аспекты **проблем статичности** слоистых композитных пакетов и подкреплённых композитных панелей несущих поверхностей изделий авиационной техники - **математическое моделирование, математическое моделирование при термомеханическом воздействии, математическое моделирование с учётом технологии изготовления, аналитические методы**

решения задач статики, численные методы решения статических задач, экспериментальные исследования рассматриваются в работах [Candiotti S., Mantari J.L., 2015], [Candiotti S., Mantari J.L., Yarasca J., Petrolo M., Carrera E., 2017], [Carrera E., Cinefra M., Lamberti A., Zenkour A.M., 2015], [Cater C., Xiao X., 2014], [Chau-Dinh T., Truong-Duc T., Nguyen-Trung K., Nguyen-Van H., 2018], [Deb Nath S.K., 2013], [Gruttmann F., Wagner W., 2017], [Hug N.M.L., Afsar A.M., 2012], [Javed S., Viswanathan K.K., Aziz Z.A., Karthik K., Lee J.H., 2016], [Joshani Y.S., Grover N., Singh B.N., 2017], [Joshani Y.S., Grover N., Singh B.N., 2018], [Kefal A., Tessler A., Oterkus E., 2017], [Naik N.S., Sayyad A.S., 2019], [Nguyen T.N., Thai C.H., Nguyen-Xuan H., 2016], [Pagani A., Valvano S., Carrera E., 2018], [Petrolo M., Cinefra M., Lamberti A., Carrera E., 2015], [Petrolo M., Lamberti A., Miglioretti F., 2016], [Ramaswamy S., Rajadurai J.S., Moshi A.A.M., 2017], [Sayyad A.S., Ghugal Y.M., Mhaske B.A., 2015], [Shahravi M., Fallahzade S., Mokhtari M., 2018], [Tran L.V., Kim S.E., 2018], [Tran L.V., Thai C.H., Le H.T., Lee J., Nguyen-Xuan H., 2014], [Tran L.V., Wahab M.A., Kim S.E., 2017], [Yarasca J., Mantari J.L., Petrolo M., Carrera E., 2017], [York C.B., de Almeida S.F.M., 2017], [Zarei A., Khosravifard A., 2019], [Zhen W., Li T., 2013], [Горбачев В.И., 2017].

Различные аспекты **проблем устойчивости** слоистых композитных пакетов и подкреплённых композитных панелей несущих поверхностей изделий авиационной техники - **постановка задач устойчивости, постановка задач устойчивости при термомеханическом воздействии, постановка задач устойчивости с учётом технологии изготовления, аналитические методы решения задач устойчивости, численные методы решения задач устойчивости, экспериментальные исследования** рассматриваются в работах [Bai R., Bao S., Lei Z., Liu D., Yan C., 2018], [Baucke A., Mittelestedt C., 2015], [Castro S.G.P., Donadon M.V., 2017], [Castro S.G.P., Donadon M.V., Guimaraes T.A.M., 2019], [Cetkovic M., 2016], [Cetkovic M., Gyorgy I., 2016], [Ehsani A., Rezaeepazhand J., 2016], [Kettaf F.Z., Benguediab M., Tounsi A., 2015], [Kumar S., Kumar R., Mandal S., 2018], [Kumar S., Kumar R., Mandal S., Rahul A.K., 2018], [Kumar S., Kumar R., Mandal S., Ranjan A., 2018], [Lopatin A.V., Morozov E.V., Shanov A.V., 2016], [Ragb O., Matbuly M.S., 2017], [Sanchez M.L., De Almeida S.F.M., Carrillo J., 2017], [Tran L.V., Wahab M.A., Kim S.E., 2017], [Tsai T.C., Chen C.S., Fung C. P., Chang Y. C., 2014], [Vosoughi A.R., Darabi A., Anjabin N., Topal U., 2017], [Xu Y., Tong Y., Liu M., Suman B., 2016], [Yshii L.N., Lucena Neto E., Monteiro F.A.C., Santana R.C., 2018], [Zarei A., Khosravifard A., 2019], [Zhen W., Li T., 2019], [Degenhardt R., Kling A., Klein H., Hillger W., Goetting Ch., Zimmermann R., Rohwer K., Gleiter A., 2007].

Проблеме оптимального проектирования слоистых композитных пакетов и подкреплённых композитных панелей авиаконструкций посвящены работы [Азиков Н.С., Алипов А.Е., Косарев В.А., 2013], [Андриенко В.М., Белоус В.А., 2001], [Бохоева Л.А., Балданов А.Б., Чермошенцева А.С., 2020], [Грищенко С.В., 2015], [Грищенко С.В., 2019], [Зинченков М.Ч., Кондаков И.О., Шаныгин А.Н., 2016], [Карпов Я.С., 2004], [Комаров В.А., Черняев А.В., 2009], [Кусяков А.Ш., 2013], [Митрофанов О.В., Кайков К.В., 2017], [Митрофанов О.В., Огнянова Т.С., 2013], [Михайловский К.В., Барановский С.В., 2018], [Попов Ю.И., Стрелец Д.Ю.,

Солошенко В.Н., 2017], [Солошенко В.Н., Попов Ю.И., 2013], [Шаныгин А.Н., 2011], [Смердов А.А., 2011], [Chen X., Wang X., Qiu Z., Li X., Shi Q., 2018], [Ehsani A., Rezaeepazhand J., 2016], [Ho-Huu V., Do-Thi T.D., Dang-Trung H., Vo-Duy T., Nguyen-Thoi T., 2016], [Kazemi M., Verchery G., 2016], [Lam –Phat T., Nguyen-Hoai S., Ho-Huu V., Nguyen Q., Nguyen-Thoi T., 2018], [Wang G.D., Wang J., Hossain S.K.M., Chen H., 2015], [Emmanuel Nicholas P., Dharmaraja C., Sathya Sofia A., Vasudevan D., 2019], [Kirubakaran R., Lokesharun D., Rajkumar S., Anand R., 2017], [Li D., 103, Xiang J., 2013], [Maksimenko V.N, 2003], [Park C.H., 2004], [Singha Maloy K., Ramachandra L.S., Bandyopadhyay J.N., 2000].

Представляется целесообразным предложить общую теорию для расчёта широкого класса конструктивно-анизотропных панелей: композитных, металлических, комбинированных. Выполненные исследования должны способствовать полной применимости усовершенствованных методов анализа на основе уточнённой теории в проектировании. Перспективой дальнейшей разработки темы является сценарий оптимального проектирования композитных подкреплённых панелей, который позволяет использовать значительные резервы в многослойных композитных конструкциях.

Вторая глава посвящена построению математических моделей конструктивно-анизотропных панелей из композиционных материалов, находящихся под действием произвольной поперечной нагрузки и температуры, с учётом технологии изготовления.

Разработана проблема исследования напряжённо-деформированного состояния конструктивно-анизотропных композитных панелей в уточнённой постановке в рамках междисциплинарного подхода. Математические модели и численная реализация решения представляют интерес с точки зрения практики проектирования панелей из современных композиционных материалов для перспективных изделий авиационной техники. Рассматриваются статические задачи – определение сложного напряжённо-деформированного состояния (НДС) плоской прямоугольной многослойной панели, изготовленной из полимерных волокнистых композиционных материалов (ПКМ), с эксцентричным продольно-поперечным набором. Панель находится под действием произвольным образом распределённой поперечной нагрузки $q(x, y)$ в стационарном температурном поле ΔT . Условия закрепления контура предполагаются достаточно общими. Принимаются во внимание технологические факторы, имеющие место при изготовлении композитов: остаточные температурные напряжения, возникающие при охлаждении после завершения процесса отверждения, и технологическая операция предварительного натяжения армирующих волокон, осуществляемая в целях повышения несущей способности конструкции. Задачи решаются в перемещениях с использованием гипотез технической теории тонких пластин для обшивки и приводятся к нахождению смещений единой базисной поверхности приведения. В качестве математической модели предлагается схематизация панелей как конструктивно-анизотропных с осреднением жесткостей тонкостенных подкрепляющих элементов, которые находятся в условиях косоугольного изгиба и стеснённого кручения вследствие одностороннего контакта с обшивкой.

Статико-геометрическая модель анизотропной пластины

Компоненты тензора напряжений k -ого слоя панели на макро-уровне с учётом влияния температуры и предварительного натяжения волокон определяются равенствами

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} & -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} z^{(k)} & -\bar{\alpha}_1^{(k)} \Delta T & -\bar{\varepsilon}_{H1}^{(k)} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} & -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} z^{(k)} & -\bar{\alpha}_2^{(k)} \Delta T & -\bar{\varepsilon}_{H2}^{(k)} \\ \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) & -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} 2z^{(k)} & -\bar{\alpha}_6^{(k)} \Delta T & -\bar{\varepsilon}_{H6}^{(k)} \end{Bmatrix}, \quad (1)$$

в рамках гипотезы Кирхгофа теории тонких пластин, где $u_0(x, y)$ и $v_0(x, y)$ – перемещения $u(x, y, z)$ и $v(x, y, z)$ при $z=0$, то есть в плоскости приведения, $\bar{Q}_{i,j}^{(k)}$, $i, j=1, 2, 6$ – жёсткости, $\bar{\alpha}_j^{(k)}$, $j=1, 2, 6$, – коэффициенты температурного расширения, $\bar{\varepsilon}_{Hj}^{(k)}$, $j=1, 2, 6$, – деформации натяжения k -ого слоя, приведённые к осям координат панели, ΔT – разность между комнатной температурой и температурой отверждения при расчёте остаточных температурных напряжений, либо уровень температуры внешнего температурного поля. Уровень деформации предварительного натяжения слоя определяется допустимой деформацией слоя с точностью до безразмерного коэффициента K_{Hj} , $j=1, 2, 6$, меняющегося от 0 до 1.

Тонкостенный анизотропный стержень с учётом деформации сдвига в условиях одностороннего контакта с обшивкой

Расчёт на прочность композитной панели, подкреплённой односторонним жесткостным набором, принадлежит к числу контактных проблем прикладной теории упругости. Так как тонкостенный стержень работает в контакте с обшивкой, на линии контакта, по которой стрингер жёстко присоединяется к обшивке, перемещения и углы поворота пластины и тонкостенного стержня полагаются равными. В силу совместной работы в одностороннем контакте с ПКМ – обшивкой рёбра жёсткости из ПКМ находятся в условиях сложного сопротивления: косоугольного изгиба и стеснённого кручения. Для определения НДС рёбер жёсткости применяется предложенный В.З. Власовым вариационный метод расчёта тонкостенных пространственных систем в перемещениях, дающий возможность построить теорию тонкостенных упругих стержней без введения гипотезы об отсутствии деформации сдвига срединной поверхности профиля в соответствии с концепцией профессора А.Н. Елпатьевского. Теория тонкостенных стержней, подкрепляющих обшивку, не подтверждается экспериментом.

Построены уравнения, соответствующие работе подкрепляющих композитных элементов. Поперечное сечение стержня наделяется четырьмя степенями свободы в отношении продольных перемещений и тремя степенями свободы в отношении контурных перемещений. При построении компонент вектора перемещений стержня в рамках контактной задачи следует учесть

равенства перемещений, а также углов поворота обшивки и подкрепляющих её рёбер по линиям контакта. Деформация $u_4(x)$ полагается свободной. Компоненты напряжённого состояния k -ого слоя композитных стрингеров на макро-уровне с учётом влияния температуры и предварительного натяжения волокон вычисляются по формулам

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{x_1}^{(k)} &= \bar{Q}_{11}^{(k)} \left[\frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} z^{(k)} - \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} y^{(k)} + \frac{\partial (u_4)_1}{\partial x} \omega_1^{(k)} - \bar{\alpha}_1^{(k)} \Delta T - \bar{\varepsilon}_{H1}^{(k)} \right] \\ \tau_{xy_1}^{(k)} &= \bar{Q}_{66}^{(k)} \left[-\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} (\rho_1 + \rho_1^0)^{(k)} + (u_4)_1 \rho_{\omega_1}^{(k)} - \bar{\alpha}_6^{(k)} \Delta T - \bar{\varepsilon}_{H6}^{(k)} \right] \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Слагаемое $\left[-\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} y^{(k)} \right]$ представляет собой дополнительную по сравнению с теорией тонких пластин осевую деформацию, обусловленную изгибом подкрепляющих элементов в плоскости обшивки. Слагаемое $\frac{\partial (u_4)_1}{\partial x} \omega_1^{(k)}$ представляют собой дополнительную по сравнению с теорией тонких пластин осевую деформацию, вызванную деформацией поперечного сечения. Деформация поперечного сечения $[u_4(x)]_1$ полагается свободной, $\omega_i^{(k)}(s)$, $i=1,2$ строятся в соответствии с эпюрами секториальных площадей для открытых контуров стрингера и поперечного ребра. Учитываются деформации сдвига при кручении тонкостенных стержней. Деформации сдвига при кручении тонкостенных стержней определяются поворотом поперечных сечений относительно выбранного полюса – начала отсчёта $\rho_i^{(k)}$, $i=1,2$, а также относительно центра изгиба – начала отсчёта $\rho_{\omega_i}^{(k)}$, $i=1,2$ в рамках поправок по теории «чистого кручения», $\rho_i^{(k)}(s)$, $\rho_{\omega_i}^{(k)}(s)$, $i=1,2$ – длины перпендикуляров, опущенных на касательную к контуру в рассматриваемой точке из точек контакта рёбер с обшивкой и из центров изгиба, соответственно. По теории «чистого кручения» Сен-Венана в (2) и аналогичных формулах для поперечного набора введены поправки $\rho_i^{0(k)}$, $i=1,2$ для деформаций сдвига $\gamma_{xy_1}^{(k)}$ и $\gamma_{yx_2}^{(k)}$. $\rho_i^{0(k)}(s)$, $i=1,2$ определяют дополнительные моменты инерции рёбер при «чистом кручении».

Нормальные напряжения обусловлены растяжением-сжатием, изгибом из плоскости обшивки, изгибом в плоскости обшивки и деформацией поперечных сечений. Касательные напряжения, связанные с задачей кручения стержня, определяются поворотом поперечного сечения относительно выбранного полюса и относительно центра изгиба, поправки по теории «чистого кручения» принимаются во внимание. Учитывается деформация сдвига при кручении тонкостенного стержня.

Вариационная формулировка задачи

Уравнения равновесия и естественные граничные условия эксцентрично подкреплённой панели из полимерных композиционных материалов с учётом

закручивания рёбер жёсткости построены на основании вариационного принципа Лагранжа в результате минимизации функционала полной потенциальной энергии системы. При введении потенциальной энергии внутренних сил набора учитывается потенциальная энергия внутренних сил растяжения – сжатия, изгиба в двух плоскостях и кручения. Согласно принципу Лагранжа задача сводится к нахождению минимума функционала

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = \iint_{F_{xy}} \Phi \left[x, y; u_{0x}, u_{0y}, u_{0yy}; v_{0x}, v_{0y}, v_{0xx}; \right. \\ \left. w, w_{xx}, w_{xy}, w_{yy}, w_{x^2y}, w_{xy^2}; \right. \\ \left. (u_4)_1, (u_4)_{1x}; (u_4)_2, (u_4)_{2y} \right] dx dy \end{aligned} \quad (3)$$

Равенство первой вариации функционала (3) $\delta \mathcal{E}$ нулю позволяет построить систему дифференциальных уравнений равновесия конструктивно-анизотропной панели из ПКМ и сформулировать естественные граничные условия.

Естественные граничные условия. Внутренние силовые факторы

Естественные граничные условия позволяют построить выражения для внутренних силовых факторов, а также перейти в уравнениях равновесия к усилиям и моментам.

Математическая модель. Уравнения равновесия. Связь внутренних силовых факторов с искомыми перемещениями

Математическая модель конструктивно-анизотропных панелей из ПКМ с эксцентричным жесткостным набором значительно упрощается, если при построении выражений для внутренних силовых факторов в соотношениях (2) и аналогичных для поперечного набора пренебречь членами, содержащими производные v_{0xx} , u_{0yy} , $[(u_4)_1]_x$, $[(u_4)_2]_y$, которые соответствуют краевым эффектам. Данное допущение означает пренебрежение нормальными напряжениями, вызванными изгибом в плоскости обшивки и деформацией поперечных сечений. Задача сводится к исследованию медленно меняющегося основного напряжённого состояния. Связь внутренних силовых факторов с искомыми перемещениями $u_0(x, y)$, $v_0(x, y)$ и $w(x, y)$ через деформации плоскости приведения и кривизны плоскости приведения приведена в матричной форме. Усилия и моменты согласно приведенным формулам зависят как от функций перемещений в плоскости обшивки $u_0(x, y)$, $v_0(x, y)$, так и от функции прогиба $w(x, y)$. В рассматриваемой постановке задача является связанной, то есть не разделяется на плоскую и изгиб пластины.

Уравнения равновесия. Разрешающее уравнение

Уравнения равновесия панели при действии внешней погонной нагрузки в направлении нормали к поверхности представляют собой систему трёх дифференциальных уравнений с линейными дифференциальными операторами относительно трёх искоемых функций перемещений – $u_0(x, y)$, $v_0(x, y)$, $w(x, y)$.

В рамках метода символического интегрирования система

дифференциальных уравнений равновесия сведена к одному разрешающему дифференциальному уравнению относительно потенциальной функции $\Phi(x,y)$, через которую посредством линейных дифференциальных операторов четвёртого – седьмого порядков выражаются все расчётные величины задачи: компоненты вектора перемещений, внутренние силовые факторы. Технологические процессы изготовления конструктивно-анизотропных панелей из ПКМ представлены в выражениях для внутренних силовых факторов усилиями и моментами: $N_x^T, N_y^T, N_{xy}^T, N_{yx}^T, M_x^T, M_y^T, H_{xy}^T, H_{yx}^T$ – температурные усилия и моменты, $N_x^H, N_y^H, N_{xy}^H, N_{yx}^H, M_x^H, M_y^H, H_{xy}^H, H_{yx}^H$ – усилия и моменты от натяжения. Третье уравнение системы уравнений равновесия на основании формул связи сведено к неоднородному линейному дифференциальному уравнению в частных производных восьмого порядка относительно искомой потенциальной функции

$$\sum_{i=0,1,2,\dots}^8 K_{8-i,i} \frac{\partial^8 \Phi(x,y)}{\partial x^{8-i} \partial y^i} = q \quad (4)$$

Коэффициенты $R_{5-i,i}, i=0,1,\dots,5, S_{5-i,i}, i=0,1,\dots,5, R_{4-i,i}, i=0,1,\dots,4$ в формулах связи и $K_{8-i,i}, i=0,1,\dots,8$ в разрешающем уравнении (4) – постоянные величины, зависящие от упругих свойств материала и геометрических параметров конструкции.

Рассматриваются плоские прямоугольные композитные панели, эксцентрично подкреплённые продольно-поперечным набором, при интегральном учёте закручивания анизотропных стержней. Математическая модель эксцентрично подкреплённой панели из ПКМ может быть сформулирована путём распространения гипотезы Кирхгофа на всё тело анизотропной среды. Модель представляет интерес с точки зрения обобщений, является точной для расчёта гладких обшивок, обладающих анизотропией вследствие несимметрии свойств структуры пакета по толщине. Приведены статико-геометрическая модель анизотропной панели, внутренние силовые факторы, уравнения равновесия, разрешающее уравнение.

Обобщение математических моделей для расчёта конструктивно-анизотропных панелей из композиционных и изотропных материалов

Математическая модель, построенная в рамках интегрального учёта закручивания стержней (раздел 2.2), является наименее точной при расчётах, но, с математической точки зрения, – наиболее общей, так как в символическом виде включает формулы

- математической модели эксцентрично подкреплённой композитной панели с тонкостенным стержнем с учётом деформации сдвига (раздел 2.1),

- математической модели гладкого композитного пакета несимметричной структуры (разделы 2.1, 2.2),

- математической модели эксцентрично подкреплённой металло-композитной панели и панели из изотропного материала с тонкостенным стержнем с учётом деформации сдвига,

- математической модели эксцентрично подкреплённой металло-композитной панели и панели из изотропного материала при интегральном учёте закручивания стержней.

Уточнённые расчётные модели обобщены для класса плоских прямоугольных конструктивно-анизотропных панелей (Рисунок 3).

Если структура панели из ПКМ ортотропна, в формулах связи компонентов вектора перемещений с потенциальной функцией $\Phi(x,y)$, в уравнении равновесия (4) пропадут коэффициенты линейных дифференциальных операторов при производных нечётной степени по каждой из координат.

Разрешающим уравнением задачи является неоднородное линейное дифференциальное уравнение в частных производных восьмого порядка относительно искомой потенциальной функции $\Phi(x,y)$, линейный дифференциальный оператор которого содержит производные чётной степени по каждой из координат

$$K_{80} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial x^8} + K_{62} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial x^6 \partial y^2} + K_{44} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial x^4 \partial y^4} + K_{26} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial x^2 \partial y^6} + K_{08} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial y^8} = q \quad (5)$$

Построены и приведены соотношения математических моделей для исследования влияния краевых эффектов типа «погранслоя» на медленно меняющееся основное напряжённо-деформированное состояние конструктивно-анизотропных панелей из композиционных материалов и конструктивно-анизотропных панелей из изотропных материалов с усилением элементов набора композитными жгутами. С математической точки зрения проблема исследования общего НДС конструктивно-анизотропных панелей, трактуемых как ортотропные, сводится к решению краевых задач в прямоугольной области для неоднородного линейного дифференциального уравнения восемнадцатого порядка в частных производных относительно искомой потенциальной функции $\Phi(x,y)$. Если принимаются во внимание нормальные напряжения, связанные с изгибом рёбер жёсткости в плоскости обшивки и депланацией поперечных сечений при закручивании, разрешающее уравнение задачи представляет собой неоднородное линейное дифференциальное уравнение в частных производных относительно потенциальной функции $\Phi(x,y)$, линейный дифференциальный оператор которого содержит производные чётной степени по каждой из координат. Наибольший порядок смешанных производных – восемнадцатый, максимальный порядок производных по x или y – двенадцатый. Коэффициенты уравнения (6) $K_{12-i,i}, i=0,2,4,6,\dots,12$ зависят от упругих и геометрических параметров конструкции.

Разрешающие уравнения восемнадцатого (6) и восьмого (5) порядков построены с различной степенью уточнения моделей при закручивании рёбер жёсткости, находящихся в условиях одностороннего контакта с обшивкой. В рамках общего НДС подкрепляющие рёбра работают на растяжение – сжатие, изгиб из плоскости панели, изгиб в плоскости панели и кручение. В рамках основного НДС подкрепляющие рёбра работают на растяжение – сжатие, изгиб из плоскости панели и кручение. Нормальными напряжениями, вызванными изгибом набора в плоскости обшивки и депланацией поперечных сечений, пренебрегаем.

$$\begin{aligned}
& \left\{ K_{108} \frac{\partial^{18}}{\partial x^{10} \partial y^8} + K_{810} \frac{\partial^{18}}{\partial x^8 \partial y^{10}} + \right. \\
& + K_{124} \frac{\partial^{16}}{\partial x^{12} \partial y^4} + K_{106} \frac{\partial^{16}}{\partial x^{10} \partial y^6} + K_{88} \frac{\partial^{16}}{\partial x^8 \partial y^8} + K_{610} \frac{\partial^{16}}{\partial x^6 \partial y^{10}} + K_{412} \frac{\partial^{16}}{\partial x^4 \partial y^{12}} \\
& + K_{122} \frac{\partial^{14}}{\partial x^{12} \partial y^2} + K_{104} \frac{\partial^{14}}{\partial x^{10} \partial y^4} + K_{86} \frac{\partial^{14}}{\partial x^8 \partial y^6} + K_{68} \frac{\partial^{14}}{\partial x^6 \partial y^8} + K_{410} \frac{\partial^{14}}{\partial x^4 \partial y^{10}} + K_{212} \frac{\partial^{14}}{\partial x^2 \partial y^{12}} + \\
& + K_{120} \frac{\partial^{12}}{\partial x^{12}} + K_{102} \frac{\partial^{12}}{\partial x^{10} \partial y^2} + K_{84} \frac{\partial^{12}}{\partial x^8 \partial y^4} + K_{66} \frac{\partial^{12}}{\partial x^6 \partial y^6} + K_{48} \frac{\partial^{12}}{\partial x^4 \partial y^8} + K_{210} \frac{\partial^{12}}{\partial x^2 \partial y^{10}} + \\
& \qquad \qquad \qquad + K_{012} \frac{\partial^{12}}{\partial y^{12}} + \\
& + K_{100} \frac{\partial^{10}}{\partial x^{10}} + K_{82} \frac{\partial^{10}}{\partial x^8 \partial y^2} + K_{64} \frac{\partial^{10}}{\partial x^6 \partial y^4} + K_{46} \frac{\partial^{10}}{\partial x^4 \partial y^6} + K_{28} \frac{\partial^{10}}{\partial x^2 \partial y^8} + \\
& \qquad \qquad \qquad + K_{010} \frac{\partial^{10}}{\partial y^{10}} + \\
& \qquad \qquad \qquad + K_{80} \frac{\partial^8}{\partial x^8} + K_{62} \frac{\partial^8}{\partial x^6 \partial y^2} + K_{44} \frac{\partial^8}{\partial x^4 \partial y^4} + K_{26} \frac{\partial^8}{\partial x^2 \partial y^6} + \\
& \qquad \qquad \qquad \left. + K_{08} \frac{\partial^8}{\partial y^8} \right\} \Phi(x, y) = q
\end{aligned} \tag{6}$$

Третья глава посвящена разработке аналитических методов исследования проблем статической прочности при определении сложного напряжённо-деформированного состояния конструктивно-анизотропных панелей из композиционных материалов с граничными условиями общего вида.

Постановка краевой задачи

С математической точки зрения проблема исследования напряжённо-деформированного состояния конструктивно-анизотропных панелей, трактуемых как ортотропные, сводится к решению краевой задачи в прямоугольной области для неоднородного линейного дифференциального уравнения восьмого порядка в частных производных относительно искомой потенциальной функции $\Phi(x, y)$

$$L^{(8)}\Phi = q. \tag{7}$$

Линейный дифференциальный оператор (7) содержит производные чётной степени по каждой из координат. Линейные дифференциальные операторы связи для симметричных кинематических и статических компонентов НДС содержат производные чётной степени по каждой из координат. Косо-симметричные компоненты НДС определяются нечётными производными.

Краевая задача общего вида в прямоугольной области представлена условиями упругой заделки при

$$x = const \quad (\gamma_1 u_0 + \delta_1 N_x) = (\gamma_2 v_0 + \delta_2 N_{xy}) = (\gamma_3 w + \delta_3 \bar{Q}_x) = (\gamma_4 w'_x + \delta_4 M_x) = 0 \tag{8}$$

$y = const (\alpha_1 u_0 + \beta_1 N_{yx}) = (\alpha_2 v_0 + \beta_2 N_y) = (\alpha_3 w + \beta_3 \bar{Q}_y) = (\alpha_4 w'_y + \beta_4 M_y) = 0$, (9)
коэффициенты $\gamma_i, \delta_i, \alpha_i, \beta_i, i = 1, 2, 3, 4$ меняются от 0 до 1.

Равенства (8), (9) позволяют рассмотреть все возможные варианты закрепления граничных кромок в отношении связанных плоской задачи и задачи изгиба: защемление, скользящую заделку, шарнирное опирание, свободный край.

Влияние остаточных температурных напряжений, имеющих место при охлаждении после завершения процесса отверждения, а также предварительного натяжения армирующих волокон на несущую способность конструктивно-анизотропных панелей из композиционных материалов представляется возможным оценить в том случае, когда граничные условия являются несогласованными, а решение строится в одинарных тригонометрических рядах либо с использованием метода однородных решений.

Конкретные исследования связаны с условиями закрепления панелей в составе проектируемой конструкции.

Построение точного общего решения для согласованных граничных условий на части контура

Решение краевых задач в прямоугольной области для уравнения (7) построено в замкнутом виде в одинарных тригонометрических рядах для частного случая граничных условий по двум противоположным кромкам. Эти условия принято называть согласованными: они соответствуют шарниру в отношении изгиба, а в отношении плоской задачи – скользящей заделке в тангенциальном направлении, когда часть контура панели нагружена потоками касательных сил. Условия на торцах произвольны и могут быть условиями упругой заделки в симметричной либо в несимметричной краевых задачах.

Разрешающая функция $\Phi(x, y)$ – обобщённая функция перемещений, удовлетворяющая (7), (9) и затем – (8), раскладывается в одинарный ряд по системе тригонометрических функций.

При решении задачи общего вида в отношении краевых условий по поперечным кромкам в разложении следует сохранить и чётные, и нечётные функции. С точностью до восьми произвольных постоянных обобщённая функция перемещений

$$\Phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{L=1}^4 A_{nL} sh(\lambda_{nL} x) + \sum_{L=1}^4 B_{nL} ch(\lambda_{nL} x) + \Phi_{n \frac{y}{h}} \right] \sin(n\pi y) \quad (10)$$

Метод однородных решений в задачах статики конструктивно-анизотропных панелей из композиционных материалов с граничными условиями общего вида

Рассматривается класс точных аналитических решений краевых задач, соответствующих общей трактовке физических граничных условий элементов конструкции. Проблема определения напряжённо-деформированного состояния конструктивно-анизотропных композитных панелей сведена к решению краевой задачи для уравнения восьмого порядка в частных производных в прямоугольной области. Данное решение в замкнутом виде построено методом однородных решений для произвольных несогласованных граничных условий на контуре.

Рассматриваются все возможные варианты закрепления граничных кромок в отношении связанных плоской задачи и задачи изгиба. Применяется схема решения краевых задач для конечных областей, предложенная профессором С.А. Лурье в качестве подхода к исследованию бигармонической проблемы теории упругости. Изложен алгоритм нового метода, позволяющего представить решение уравнения (7) в виде разложения по неортогональной системе обобщённых собственных функций с коэффициентами, определяемыми явно. Особенность метода однородных решений для бигармонического уравнения состоит в сведении задачи к разложению двух вещественных функций с одной системой констант, которые, не являясь ортогональными, подчиняются условию обобщённой ортогональности. Краевые условия могут быть кинематическими, статическими и смешанными:

$$\text{при } x=\text{const} \quad L_i^{(j)}\Phi = \xi_i(y) \quad (11)$$

$$\text{при } y=\text{const} \quad M_i^{(j)}\Phi = \chi_i(x), \quad i = \overline{1,4}, \quad j = \overline{4,7} \quad (12)$$

Здесь $L_i^{(j)}\Phi$, $M_i^{(j)}\Phi$ - дифференциальные граничные операторы, $\xi_i(y)$, $\chi_i(x)$ - известные граничные функции. Вид граничных условий диктуется характером закрепления реальных конструктивных элементов в составе проектируемой конструкции.

Регулярная составляющая общего интеграла строится в форме разложения по однородным функциям $\Phi_k(y)$

$$\Phi(x, y) = \Phi_{01}(x, y) + \Phi_{02}(x, y) + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \Phi_k(y) \text{ch}(\lambda_k x) \quad (13)$$

B_k - произвольные постоянные, определяемые из условий на торцах при $x = \pm 1$.

Собственные функции $\Phi_k(y)$ строятся с точностью до констант B_{kL}

$$\Phi_k(y) = \sum_{L=1}^4 B_{kL} \text{ch}\left(\lambda_k z_L \frac{b}{a} y\right), \quad (14)$$

В общем случае при различных граничных условиях по продольным кромкам $y = \pm 1$ собственные числа λ_k являются корнями трансцендентного уравнения типа

$$\begin{aligned} \sum_{L=1}^4 X_L \text{th}\left(\lambda_k z_L \frac{b}{a}\right) = 0 & \quad \sum_{L=1}^4 X_L \text{cth}\left(\lambda_k z_L \frac{b}{a}\right) = 0 \\ \sum_{L=1}^3 \sum_{m=1}^3 X_{Lm} \text{th}\left(\lambda_k z_L \frac{b}{a}\right) \text{th}\left(\lambda_k z_m \frac{b}{a}\right) = 0 & \quad , \end{aligned} \quad (15)$$

представляющего собой условие нетривиальности решения системы линейных алгебраических уравнений при удовлетворении однородным граничным условиям по продольным кромкам, где X_L, X_{Lm} - коэффициенты, зависящие от вида граничных операторов (12), z_L - корни характеристического полинома восьмой степени, λ_k - собственные числа однородной задачи.

Система однородных функций $\{\Phi_k(y)\}$ не образует ортогонального

семейства. Для выполнения краевых условий на торцах $x = \pm 1$ необходимо воспользоваться условием обобщённой ортогональности собственных функций. Воспользуемся условием биортогональности собственных функций прямой и соответствующей сопряжённой задач. Собственная функция сопряжённой задачи строится в рамках аппарата теории линейных дифференциальных операторов.

В пространстве восьмикомпонентных векторов ψ_k краевая задача по координате y для собственной функции

$$\Phi_k(y) = \sum_{L=1}^4 B_{kL} \operatorname{ch}\left(\lambda_k z_L \frac{b}{a} y\right) \quad (16)$$

формулируется следующим образом:

$$\text{при } y = \pm 1 \quad \left. \begin{array}{l} \psi'_k = \lambda_k R \psi_k \\ M(\psi_k) = 0 \end{array} \right\}, \quad (17)$$

$$\text{где } \psi_k = (\psi_0^k, \psi_1^k, \dots, \psi_7^k)^* = \left(\Phi_k, \frac{1}{\lambda_k} \frac{d\Phi_k}{dy}, \dots, \frac{1}{\lambda_k^7} \frac{d^7\Phi_k}{dy^7} \right)^*, \quad (18)$$

индекс «*» здесь и ниже означает операцию транспонирования.

С помощью разложения (18) обыкновенное дифференциальное уравнение восьмого порядка сводится к системе дифференциальных уравнений первого порядка

$$\psi'_k = \lambda_k R \psi_k$$

с весовой квадратной матрицей R .

Для сопряжённой функции - собственной функции сопряжённой задачи

$$F_k(y) = \sum_{L=1}^4 A_{kL} \operatorname{sh}\left(\bar{\lambda}_k z_L \frac{b}{a} y\right) \quad (19)$$

$$\text{при } y = \pm 1 \quad \left. \begin{array}{l} \phi'_k = -\bar{\lambda}_k R^* \phi_k \\ N(\phi_k) = 0 \end{array} \right\}, \quad (20)$$

$$\text{где } \phi_k = (\phi_0^k, \phi_1^k, \dots, \phi_7^k)^* = \left(F_k, \frac{1}{\bar{\lambda}_k} \frac{dF_k}{dy}, \dots, \frac{1}{\bar{\lambda}_k^7} \frac{d^7F_k}{dy^7} \right)^* \quad (21)$$

Условие обобщённой ортогональности, которому подчиняются однородные функции прямой (16) и сопряжённой (19) задач в векторном пространстве, содержит весовую матрицу R

$$\int_{-1}^1 (\bar{\phi}_k^* R \psi_i) dy = \begin{cases} 0, & \lambda_k \neq \bar{\lambda}_i \\ H_i, & \lambda_k = \bar{\lambda}_i \end{cases}, \quad (22)$$

где H_i – норма обобщённых собственных функций.

В результате удовлетворения краевых условий по поперечным кромкам $x = \pm 1$ следует найти коэффициенты B_k разложения (13) для искомой потенциальной функции $\Phi(x, y)$. Рассмотрен подход к решению данной

проблемы, который предполагает переход к задаче Коши в пространстве вектор-функций.

В общем случае условия закрепления поперечных кромок (11), соответствующие достаточно общей трактовке физических граничных условий элементов конструкции, предлагается трактовать как разложение вектор-функции восьмого порядка по системе собственных восьмикомпонентных векторов ψ_k

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{c} K_{0i} \\ 0 \\ K_{2i} \\ 0 \\ K_{4i} \\ 0 \\ K_{6i} \\ 0 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} f_0(y) \\ 0 \\ f_2(y) \\ 0 \\ f_4(y) \\ 0 \\ f_6(y) \\ 0 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} L_0\Phi_0(y) \\ 0 \\ L_2\Phi_0(y) \\ 0 \\ L_4\Phi_0(y) \\ 0 \\ L_6\Phi_0(y) \\ 0 \end{array} \right\} = \sum_{k=1}^{\infty} B_k h^u(\lambda_k) \psi_k(y), \quad i = \overline{0,7} \\
 & \left[\begin{array}{c} 0 \\ K_{1j} \\ 0 \\ K_{3j} \\ 0 \\ K_{5j} \\ 0 \\ K_{7j} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ f_1(y) \\ 0 \\ f_3(y) \\ 0 \\ f_5(y) \\ 0 \\ f_7(y) \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ L_1\Phi_0(y) \\ 0 \\ L_3\Phi_0(y) \\ 0 \\ L_5\Phi_0(y) \\ 0 \\ L_7\Phi_0(y) \end{array} \right\} = \sum_{k=1}^{\infty} B_k h^{u/4}(\lambda_k) \psi_k(y), \quad j = \overline{0,7}
 \end{aligned} \tag{23}$$

Здесь существенным является выделение чётной и нечётной составляющих.

$L_0\Phi_0^{T,H}$ определяется линейными комбинациями температурных усилий N_x^T , усилий от натяжения N_x^H , температурных моментов M_x^T , моментов от натяжения M_x^H ; $L_2\Phi_0^{T,H}$, $L_4\Phi_0^{T,H}$ определяются линейными комбинациями температурных усилий N_x^T и усилий от натяжений N_x^H .

Несогласованные граничные условия характеризуются тем, что из восьми компонент $f_j(y)$, $j = \overline{0,7}$ (23) известны четыре, и непосредственное осуществление процедуры (22) не представляется возможным.

С использованием условия расширенной ортогональности (22) система (23) представлена как скалярное произведение

$$\begin{aligned}
 & (\Omega_k \Theta(y)) = C_k, \tag{24} \\
 & \Theta(y) = (f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7)^*(y)
 \end{aligned}$$

$$\Omega_k = (\Omega_0^k, \Omega_1^k, \dots, \Omega_7^k) ,$$

C_k известным образом зависят от частных интегралов $\Phi_{0i}(x, y)$, $i=1,2$ (13).

Процедура ортогонализации ряда векторов Ω_k позволяет построить выражение для вектор-функции $\Theta(y)$ (24).

Если затем к разложению (23) применить соотношение обобщённой ортогональности (22), формула для искомым констант определяется в явном виде:

$$B_k = \frac{\hat{H}}{h^u(\lambda_k) H_k} ,$$

H_i – норма обобщённых собственных функций.

Краевые эффекты в уточнённой теории конструктивно-анизотропных панелей из композиционных материалов

Цель данного раздела – анализ влияния краевых эффектов на основное НДС конструктивно-анизотропных панелей ЛА и обоснование возможности упрощения математических моделей путём сведения к решению краевых задач для разрешающего уравнения с линейным дифференциальным оператором восьмого порядка. Постановка проблемы и предлагаемый подход к её решению являются новыми разработками и представляют интерес с точки зрения практики проектирования конструктивно-анизотропных панелей с применением КМ для перспективных изделий авиационной техники.

Постановка краевой задачи

С математической точки зрения проблема исследования общего напряжённо-деформированного состояния конструктивно-анизотропных панелей, трактуемых как ортотропные, сводится к решению краевой задачи в прямоугольной области для неоднородного линейного дифференциального уравнения восемнадцатого порядка в частных производных относительно искомой потенциальной функции $\Phi(x, y)$

$$L^{(18)}\Phi = q. \quad (25)$$

Если в рамках математической модели принимаются во внимание нормальные напряжения, связанные с изгибом рёбер жёсткости в плоскости обшивки и деформацией поперечных сечений при закручивании, разрешающее уравнение задачи представляет собой неоднородное линейное дифференциальное уравнение в частных производных относительно разрешающей функции $\Phi(x, y)$, линейный дифференциальный оператор которого для панели ортотропной структуры содержит производные чётной степени по каждой из координат. Наибольший порядок смешанных производных – восемнадцатый, максимальный порядок производных по x или y – двенадцатый. Общее НДС, включая краевые эффекты и основное НДС, определяется решением краевых задач и анализируется в рамках разрешающего уравнения (25).

Краевая задача общего вида в прямоугольной области представлена условиями упругой заделки

$$\begin{aligned} \text{при } x = \text{const} \quad (\gamma_1 u_0 + \delta_1 N_x) &= (\gamma_2 v_0 + \delta_2 N_{xy}) = (\gamma_3 w + \delta_3 \bar{Q}_x) = (\gamma_4 w'_x + \delta_4 M_x) = \\ &= (\gamma_5 w''_{xy} + \delta_5 C_x) = [\gamma_6 (u_4)_1 + \delta_6 B_{xy}] = 0 \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \text{при } y = \text{const} \quad (\alpha_1 u_0 + \beta_1 N_{yx}) &= (\alpha_2 v_0 + \beta_2 N_y) = (\alpha_3 w + \beta_3 \bar{Q}_y) = (\alpha_4 w'_y + \beta_4 M_y) = \\ &= (\alpha_5 w''_{xy} + \beta_5 C_y) = [\alpha_6 (u_4)_2 + \beta_6 B_{yx}] = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

коэффициенты $\gamma_i, \delta_i, \alpha_i, \beta_i, i = 1, 2, \dots, 6$ меняются от 0 до 1,

$N_x, N_y, N_{xy}, N_{yx}, M_x, M_y, \bar{Q}_x, \bar{Q}_y, C_x, C_y, B_{xy}, B_{yx}$ – внутренние силовые факторы, причем C_x, C_y – изгибающие моменты в плоскости обшивки, B_{xy}, B_{yx} – бимоменты.

Равенства (26), (27) позволяют рассмотреть все возможные варианты закрепления граничных кромок в отношении связанных плоской задачи и задачи изгиба: защемление, скользящую заделку, шарнирное закрепление, свободный край. Граничные условия могут быть кинематическими, статическими и смешанными. Конкретные исследования связаны с условиями закрепления панелей в составе проектируемой конструкции.

Построение точного общего решения для согласованных граничных условий на части контура

Решение краевых задач в прямоугольной области для уравнения (25)

$$L^{(18)}\Phi = q$$

с линейным дифференциальным оператором, который содержит производные четной степени по каждой из координат (6), построено в замкнутом виде в одинарных тригонометрических рядах для частного случая граничных условий по двум противоположным кромкам, которые принято называть согласованными. Условия на торцах произвольны и могут быть условиями упругой заделки в симметричной либо в несимметричной краевых задачах.

Разрешающая функция $\Phi(x, y)$ – обобщенная функция перемещений, удовлетворяющая (25), (27) и затем – (26), раскладывается в одинарный ряд по системе тригонометрических функций.

При решении задачи общего вида в отношении краевых условий по поперечным кромкам в разложении следует сохранить и четные, и нечетные функции. С точностью до двенадцати произвольных постоянных обобщенная функция перемещений

$$\Phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{L=1}^6 A_{nL} sh(\lambda_{nL} x) + \sum_{L=1}^6 B_{nL} ch(\lambda_{nL} x) + \Phi_{n \neq 4/n} \right] \sin(n\pi y) \quad (28)$$

В четвертой главе представлены результаты численной реализации разработанных алгоритмов на основе уточненной теории при определении общего напряженного состояния с краевыми эффектами и основного напряженно-деформированного состояния конструктивно-анизотропных панелей.

В операционной среде MATLAB разработан пакет прикладных программ и реализован процесс компьютерной многокритериальной оптимизации с учетом технологии изготовления конструктивно-анизотропных панелей из композиционных материалов, находящихся в условиях механического, внешнего

температурного и технологического температурного воздействия. В рамках связанных плоской задачи и задачи изгиба рассматриваются все возможные варианты закрепления граничных кромок, вытекающие из условий упругой заделки. Разработаны быстрые процедуры для анализа подкреплённых панелей из ПКМ. Так как решение строится точными аналитическими методами, время расчёта вариантов минимально, что представляет интерес с точки зрения практики проектирования с использованием параметрического анализа. Результаты расчётов дают возможность снижения и оптимизации массовых характеристик конструкции. Постановка проблемы и предлагаемые подходы к её решению представляют интерес с точки зрения практики проектирования конструктивно-анизотропных панелей с применением КМ для перспективных изделий авиационной техники. Представлены новые достижения в области вычислительных исследований НДС композитных авиационных конструкций.

Панели находятся под действием постоянной погонной поперечной нагрузки $q(x,y) = const$.

На Рисунке 4 представлены результаты определения перемещений в прямоугольных панелях из углепластика с эксцентричным продольно-поперечным набором. Краевые условия по координате x симметричны и соответствуют защемлению. Прогибы панели зависят от соотношения сторон c . При изменении соотношения сторон от 2,0 до 1,0 вес панели снижается в два раза, а максимальный прогиб падает в 9,6 раза.

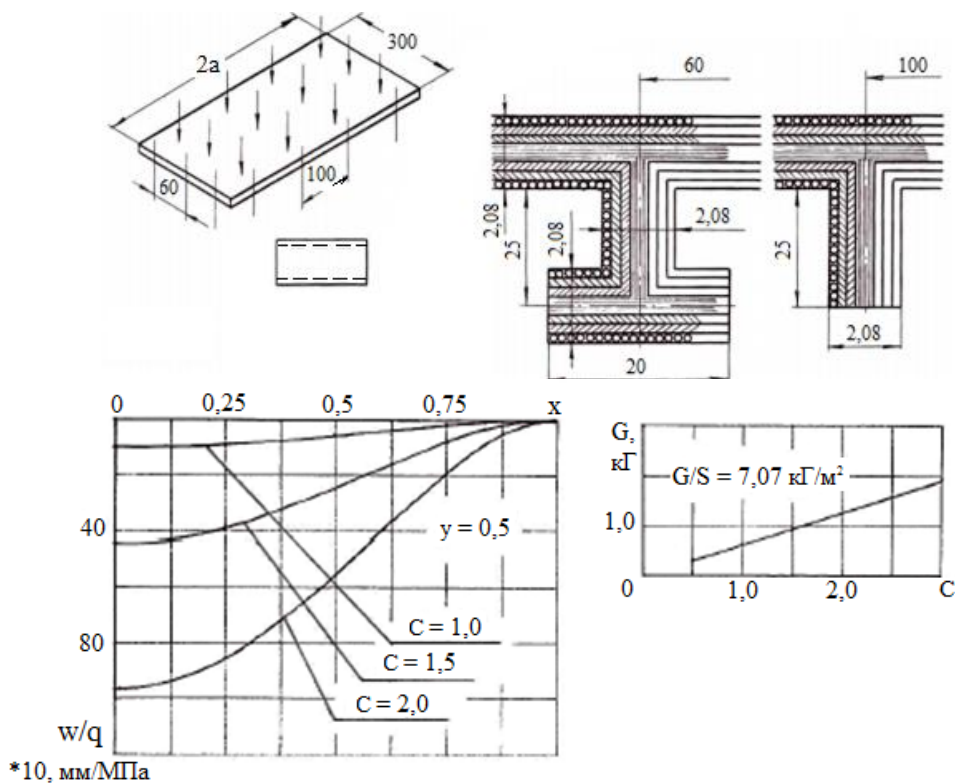


Рисунок 4 - Панель с продольно-поперечным набором, защемлённая по торцам. Зависимость прогибов и весовых характеристик от соотношения сторон панели

На Рисунке 5 представлены результаты определения перемещений в

прямоугольных панелях из углепластика с эксцентричным продольно-поперечным набором. Граничные условия по координате x несимметричны.

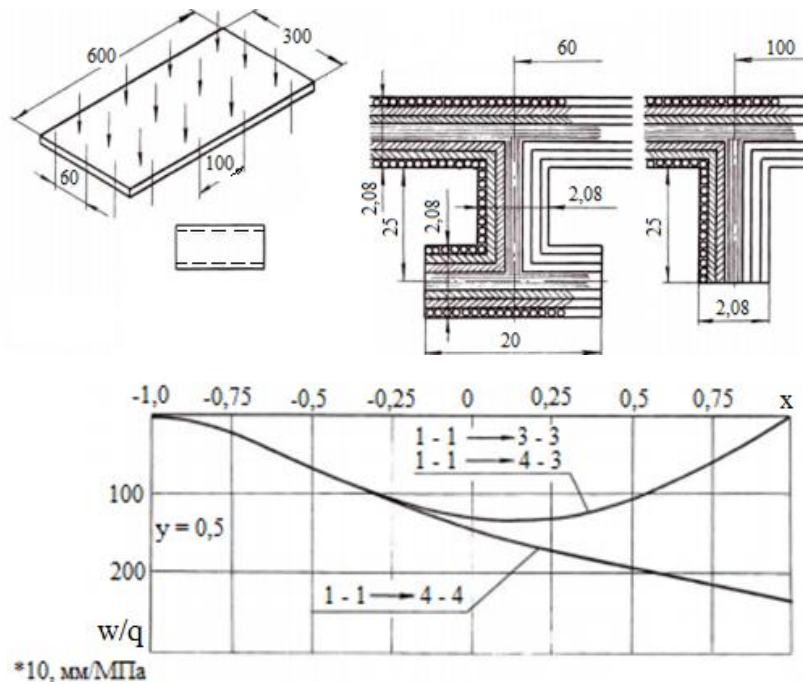


Рисунок 5 - Панель с продольно-поперечным набором.

Несимметричная краевая задача. Зависимость прогибов от типа граничных условий на торцах

Граничные условия: плоская задача – задача изгиба;

1 – защемление, 2 – скользящая заделка, 3 – шарнир, 4 – свободный край

Один из краёв $x = -1$ защемлен, на другом $x = +1$ - три комбинации граничных условий в отношении плоской задачи и в отношении изгиба: шарнир либо свободный от усилий и моментов край. Максимальные прогибы в центре панели отличаются на 12 % при защемлении одного из торцов, когда другой либо шарнирно опёрт, либо свободен.

На Рисунке 6 представлены результаты определения перемещений и послойных нормальных напряжений эксцентрично подкреплённых в продольном направлении прямоугольных панелей из углепластика. Краевые условия по координате x симметричны.

Прогибы панели зависят от граничных условий в её плоскости, если в отношении изгиба торцевые кромки шарнирно опёрты. Когда относительно изгиба торцевые кромки защемлены, при варьировании условий закрепления в отношении плоской задачи кривые прогибов практически совпадают.

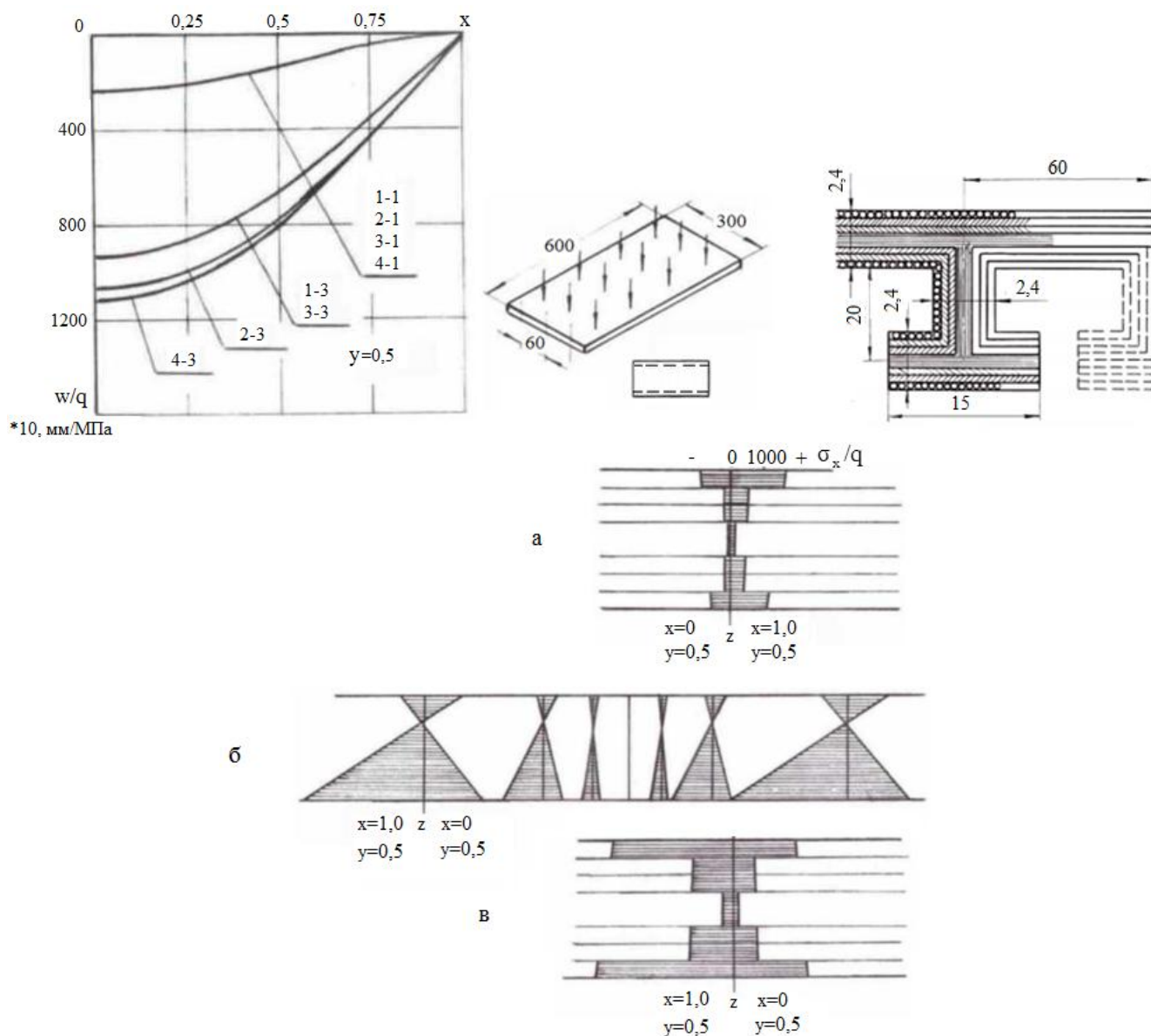


Рисунок 6 - Панель, подкрепленная в продольном направлении.
Симметричная краевая задача.

Зависимость прогибов от типа граничных условий на торцах.

Граничные условия: плоская задача – задача изгиба;

1 – защемление, 2 – скользящая заделка, 3 – шарнир, 4 – свободный край

Распределение нормальных напряжений:

a – нормальные напряжения в обшивке, *б* – нормальные напряжения в стенке стрингера,
в – нормальные напряжения в полке стрингера

Для оценки эквивалентных остаточных температурных напряжений, возникающих при охлаждении после завершения процесса отверждения в плоской прямоугольной панели из углепластика, использован критерий Гольденבלата-Копнова. На Рисунке 7 представлены результаты определения остаточных температурных напряжений, возникающих при охлаждении после завершения процесса отверждения в плоской прямоугольной панели из углепластика с несимметричной структурой пакета по толщине. Контур панели шарнирно оперт в отношении изгиба, граничные условия по продольным кромкам соответствуют скользящей заделке, поперечные края свободны от усилий и

МОМЕНТОВ В ОТНОШЕНИИ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ.

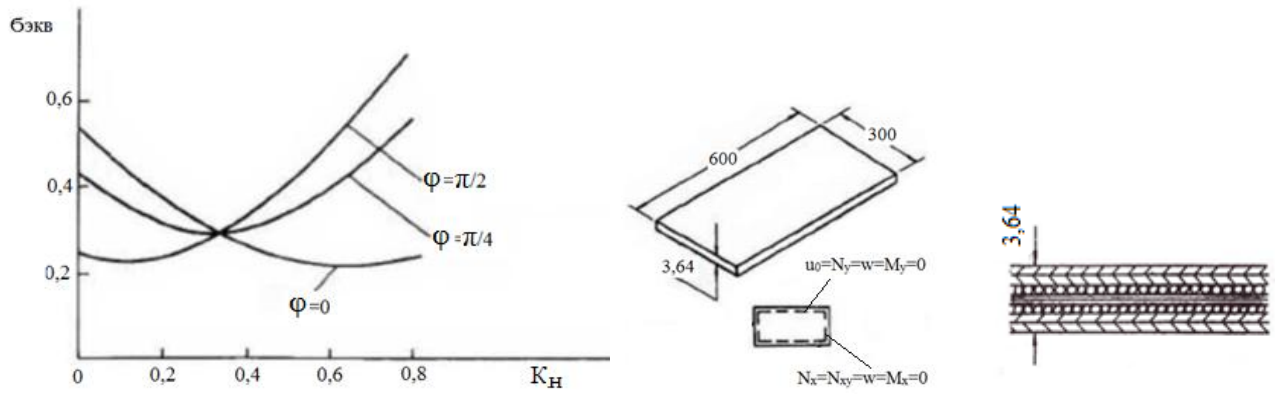


Рисунок 7 - Панель с несимметричной структурой пакета.
Зависимость эквивалентных остаточных температурных напряжений от коэффициента предварительного натяжения армирующих волокон

Оценивается влияние предварительного натяжения армирующих волокон на уровень относительных эквивалентных остаточных технологических напряжений. Оптимальный уровень предварительного натяжения соответствует 35 % от допускаемой деформации слоя.

На Рисунке 8 представлены результаты определения остаточных температурных напряжений, возникающих при охлаждении после завершения процесса отверждения в плоской прямоугольной панели из углепластика с несимметричной структурой пакета по толщине. Контур панели шарнирно опёрт в отношении изгиба, граничные условия по продольным кромкам соответствуют скользящей заделке, поперечные края свободны от усилий и моментов в отношении плоской задачи.

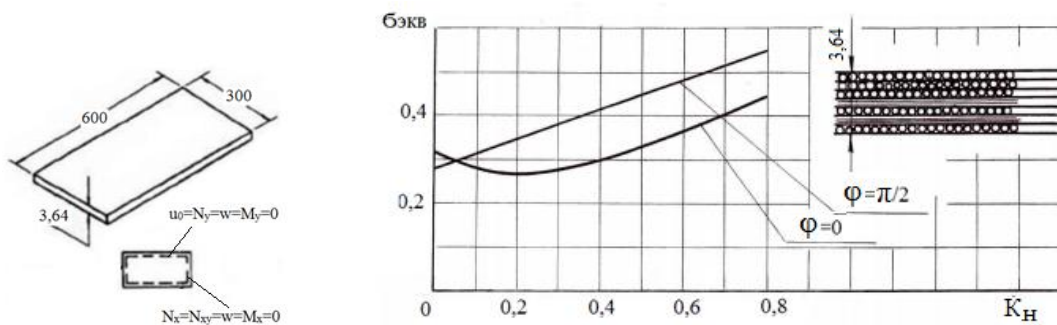


Рисунок 8 - Панель с несимметричной структурой пакета.
Зависимость эквивалентных остаточных температурных напряжений от коэффициента предварительного натяжения армирующих волокон

Оптимальный уровень предварительного натяжения соответствует 5 % от допускаемой деформации слоя. Далее, от уровня в 20 % процедура предварительного натяжения армирующих волокон для представленной несимметричной структуры пакета является неэффективной: относительные эквивалентные остаточные технологические напряжения и в продольных, и в поперечных слоях возрастают.

На Рисунке 9 представлены результаты определения перемещений эксцентрично подкреплённых в продольном направлении прямоугольных панелей из углепластика, находящихся под действием постоянной погонной поперечной нагрузки $q(x,y) = const$. Краевые условия по координате x симметричны.

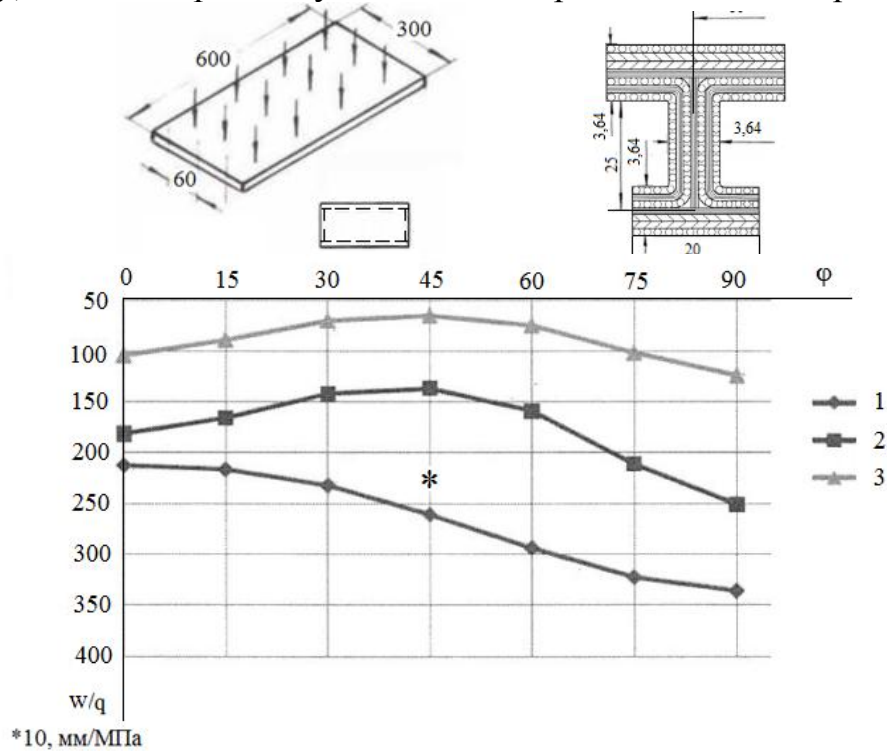


Рисунок 9 - Панель, подкрепленная в продольном направлении.

Зависимость прогибов от углов укладки косых слоев при шарнирном опирании торцов:

1 – тонкостенный стержень В.З. Власова; 2 – тонкостенный стержень с учётом жесткостей в направлении 12; 3 – интегральный учёт закручивания по Кирхгофу; * - тонкостенный стержень с учётом деформации сдвига срединной поверхности профиля

Проанализирована возможность использования для исследования прочности односторонне усиленных панелей известного в литературе приёма, заключающегося в формальном распространении гипотезы Кирхгофа на всё тело анизотропной среды. Установлено, что результаты определения напряжённо-деформированного состояния в рамках гипотезы Кирхгофа и при решении контактной задачи совпадают с точностью до 13%, если обшивка подкреплена ортогонально расположенными рёбрами жёсткости. Значительные расхождения имеют место в конструкции с однонаправленным набором, для панелей с ярко выраженной анизотропией свойств.

Разработанный пакет прикладных программ для персонального компьютера (PC) на языке операционной среды MATLAB предназначен для определения и сопоставления компонентов общего НДС с краевыми эффектами и медленно меняющегося основного НДС конструктивно-анизотропных панелей ЛА с целью компьютерной оптимизации процесса проектирования. На основе сопоставления результатов численного анализа в широком диапазоне изменения геометрических и жесткостных характеристик конструктивно-анизотропных панелей обоснована возможность проектирования без учёта краевых эффектов в соответствии с теорией асимптотического интегрирования дифференциальных уравнений.

Показано, что заземлённые торцевые кромки существенно снижают влияние краевых эффектов на основное напряжённое состояние. Установлено, что краевые эффекты существенны, если рассматривать НДС панели типа "погранслой" в зоне граничных кромок.

Выполнен параметрический анализ перемещений и напряжений плоской прямоугольной панели, изготовленной из алюминиевого сплава и эксцентрично подкреплённой продольно-поперечным набором, полки которого усилены композитными жгутами (Рисунок 10). Нормальная нагрузка $q(x,y) = const$. Варьировались жёсткость жгутов, геометрия обшивки и подкрепляющих рёбер. В качестве примера представлены результаты расчётов панелей с меняющейся жёсткостью армирующих жгутов из углепластика. Величины коэффициентов обыкновенного дифференциального уравнения при производных двенадцатого и десятого порядков 10^4-10^2 по сравнению с единицей. Соответствующие пятый и шестой корни характеристических полиномов раскрывают быструю изменчивость напряжённого состояния. Согласно асимптотическим аспектам решения производные высоких порядков не оказывают существенного влияния на медленно меняющееся основное напряжённое состояние панели. В Таблице 1 значения прогибов и нормальных напряжений приведены в зависимости от жёсткости армирующих жгутов из углепластика. Представляется возможным пренебречь краевыми эффектами, так как компоненты НДС различаются менее, чем на 3 %.

Таблица 1 - Прогибы и нормальные напряжения для панелей с различной жёсткостью армирующих жгутов

x	(-)	0	1,0	1,0	1,0	0	Δ				
y	(-)	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5					
z	мм	—	—	—	-0,5	-0,5					
$E_{ж}$	N	w/q	N_x/q	M_x/q	σ_x/q	σ_y/q	Δw	ΔN_x	ΔM_x	$\Delta \sigma_x$	$\Delta \sigma_y$
кГ/мм ²	(-)	мм ³ /кГ	мм	мм ²	(-)	(-)	%				
0	8	33,761	-136,82	-12612	367,30	-265,15	0,18	1,36	0,02	0,35	0,23
	12	33,701	-134,98	-12609	368,59	-264,53					
18000	8	19,232	-116,57	-12241	334,38	-219,69	0,34	1,26	0,16	0,13	0,43
	12	19,167	-115,12	-12221	334,81	-218,76					
30000	8	15,789	-108,68	-11997	324,10	-203,06	0,42	1,06	0,01	0,06	0,51
	12	15,723	-107,54	-11996	323,91	-202,03					

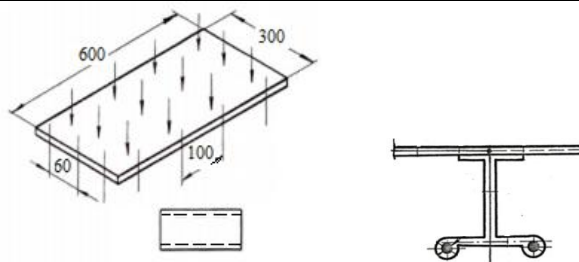


Рисунок 10 – Конструктивно-анизотропная панель, усиленная композитными жгутами

В Таблице 2 представлены результаты определения перемещений и напряжений в прямоугольных изотропных алюминиевых панелях с эксцентричным продольным набором, находящихся под действием постоянной погонной поперечной нагрузки $q(x,y) = const$ (Рисунок 11). Граничные условия по координатам x и y симметричны. Контур панелей шарнирно опёрт в отношении изгиба и свободен от усилий в отношении плоской задачи.

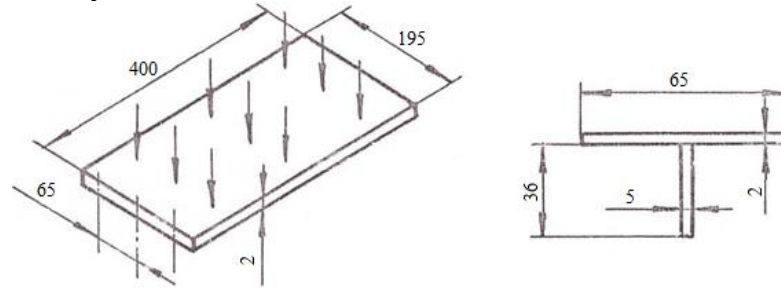


Рисунок 11 – Тестовая панель из алюминиевого сплава

Таблица 9 – Перемещения и напряжения в подкреплённых панелях из изотропного материала . Сопоставление результатов расчёта

		$x = 0 \quad y = 0$			
$z, \text{ мм}$		-	-1	37	-1
Способ построения решения		$w/q \cdot 10,$ мм/МПа	σ_x/q	σ_x/q	σ_y/q
Метод однородных решений		57,762	-221,91	697,13	39,158
Одинарные тригоном. Ряды		57,011	-221,49	689,25	35,072
Δ	%	1,300	0,189	1,130	10,435

Приведено сопоставление результатов расчёта в рамках метода однородных решений и с использованием одинарных тригонометрических рядов для согласованных граничных условий при $y = 1(-1)$, когда панель по продольным кромкам нагружена потоками касательных сил, что соответствует скользящей заделке в тангенциальном направлении. Влияние несогласованных граничных условий на НДС конструкции в приведённом примере находится в пределах 10%.

Пятая глава содержит исследование различных аспектов проблем устойчивости конструктивно-анизотропных панелей из композиционных материалов с граничными условиями общего вида.

С целью реализации в дальнейшем процесса рационального и оптимального проектирования несущих поверхностей ЛА исследуются различные аспекты проблемы расчёта конструктивно-анизотропных панелей из композиционных материалов, которые находятся в условиях силового и температурного воздействия, приводящего к потере устойчивости. Рассматриваются задачи устойчивости плоской прямоугольной многослойной панели из полимерных волокнистых композиционных материалов с эксцентричным продольно-поперечным набором и плоской прямоугольной композитной панели с несимметричной по толщине структурой пакета. Панели находятся под действием постоянных погонных сжимающих и сдвигающих усилий, приложенных к

кромкам в плоскости обшивки. Граничные условия на контуре соответствуют условиям частного вида, которые являются согласованными в отношении плоской задачи и задачи изгиба и позволяют построить решение в тригонометрических рядах. Рассматриваются задачи устойчивости композитных панелей с граничными условиями общего вида, соответствующими достаточно общей трактовке физических условий закрепления панели в составе проектируемой конструкции.

Согласно традиционной схеме проектирования наиболее актуальным для практических расчётов является определение критических сил общей изгибной формы потери устойчивости рассматриваемой тонкостенной системы, когда число полуволн много меньше числа стрингеров; определение критических сил многоволнового крутильного выпучивания, связанного с изгибом обшивки в направлении нормали к поверхности между узлами пересечений и поворотом рёбер без искажения формы профиля. Для исследования изгибной формы потери устойчивости панели правомочной является математическая модель, построенная на основе принципов конструктивной анизотропии с «размазыванием» - осреднением жесткостей подкрепляющих элементов по обшивке. Для исследования крутильной формы потери устойчивости жесткостные характеристики стержней следует вводить дискретно с помощью аппарата обобщённых функций. В рамках предлагаемой расчётной модели при определении напряжённо-деформированного состояния и решении задач устойчивости конструктивно-анизотропных панелей из композиционных материалов анализируются тонкостенные подкрепляющие элементы, которые находятся в условиях сложного сопротивления вследствие одностороннего контакта с обшивкой. Дальнейшее развитие теории тонкостенных упругих стержней применительно к общей контактной задаче для обшивки и ребра с уточнением модели последнего при закручивании составляет научную новизну работы в отношении проблемы устойчивости. Строится упрощённый вариант математической модели, соответствующий предположению о малости нормальных напряжений, обусловленных изгибом подкреплений в плоскости панели и деформацией их поперечных сечений. Используя асимптотические свойства и пренебрегая членами, соответствующими краевым эффектам, полагаем, что стержни работают на растяжение–сжатие, изгиб из плоскости пластины и кручение. Задача устойчивости так же, как и задача о докритическом напряжённом состоянии, является связанной, то есть не разделяется на плоскую и изгиб пластины. Постановка задачи устойчивости и подходы к её решению с учётом неравномерности докритического напряжённого состояния и технологии изготовления панелей в рамках разрешающего дифференциального уравнения восьмого порядка являются новыми и представляют интерес с точки зрения практики проектирования композитных панелей для перспективных изделий авиационной техники.

Изгибная форма потери устойчивости. Постановка задачи. Разрешающие уравнения

Выполнено математическое моделирование общей изгибной формы потери устойчивости, включая постановку задачи и вывод разрешающих уравнений.

Решение задачи устойчивости осуществляется с использованием общего

дифференциального уравнения устойчивости восьмого порядка, построенного на основе дифференциального уравнения равновесия с учётом приведённой нагрузки от действия нормальных $-N_x, N_y$ и тангенциальных $-N_{xy}, N_{yx}$ усилий. Если структура композитной панели ортотропна, задача устойчивости сводится к исследованию дифференциального уравнения, в левой части которого содержатся чётные производные $\Phi(x, y)$ по каждой из координат, а нечётные производные в правой части связаны со сдвигом

$$\frac{K_{80}}{a^8} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial x^8} + \frac{K_{62}}{a^6 b^2} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial x^6 \partial y^2} + \frac{K_{44}}{a^4 b^4} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial x^4 \partial y^4} + \frac{K_{26}}{a^2 b^6} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial x^2 \partial y^6} + \frac{K_{08}}{b^8} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial y^8} =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \frac{N_x R_{40}}{a^6} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial x^6} + \frac{(N_{xy} + N_{yx}) R_{40}}{a^5 b} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial x^5 \partial y} + \\ + \frac{(N_x R_{22} + N_y R_{40})}{a^4 b^2} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial x^4 \partial y^2} + \frac{(N_{xy} + N_{yx}) R_{22}}{a^3 b^3} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial x^3 \partial y^3} + \\ + \frac{(N_x R_{04} + N_y R_{22})}{a^2 b^4} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial x^2 \partial y^4} + \frac{(N_{xy} + N_{yx}) R_{04}}{a b^5} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial x \partial y^5} + \\ + \frac{N_y R_{04}}{b^6} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial y^6} \end{array} \right], \quad (29)$$

$x = x/a, y = y/b$ – безразмерные координаты, a, b – длина и ширина панели, соответственно, коэффициенты $R_{ij}, i=4,3,\dots,0, j=0,1,\dots,4$ в формуле связи и $K_{ij}, i=8,7,\dots,0, j=0,1,\dots,8$ в разрешающем уравнении (29) – постоянные величины, зависящие от упругих свойств материала и геометрических параметров конструкции.

Все компоненты напряжённого состояния и внутренние силовые факторы – усилия в плоскости обшивки могут быть выражены через потенциальную функцию $\Phi(x, y)$ посредством линейных дифференциальных операторов

$$\left. \begin{array}{l} N_x = L_{N_x} \Phi - N_x^T - N_x^H, \quad N_y = L_{N_y} \Phi - N_y^T - N_y^H \\ N_{xy} = L_{N_{xy}} \Phi - N_{xy}^T - N_{xy}^H, \quad N_{yx} = L_{N_{yx}} \Phi - N_{yx}^T - N_{yx}^H \end{array} \right\}, \quad (30)$$

$N_x^T, N_y^T, N_{xy}^T, N_{yx}^T$ – температурные усилия и моменты, $N_x^H, N_y^H, N_{xy}^H, N_{yx}^H$ – усилия и моменты от предварительного натяжения волокон композита.

Задача устойчивости конструктивно-анизотропной композитной панели является нелинейной согласно уравнению (29) и формулам связи (30), для определения критических сил применён метод линеаризации. С целью исследования характера распределения нормальных и сдвигающих усилий, вызванных внешней нагрузкой, рассматривается напряжённо-деформированное состояние конструкции при продольном изгибе, то есть сложное докритическое основное напряжённое состояние. Далее задача устойчивости, из решения которой может быть найдено дополнительное по отношению к исходному деформированию искривление поверхности приведения, формулируется как задача о собственных значениях.

Крутильная форма потери устойчивости. Вариационная формулировка задачи. Разрешающие уравнения

Выполнено математическое моделирование многоволновой крутильной формы потери устойчивости в рамках вариационной формулировки задачи с последующим выводом разрешающих уравнений.

Исследуется совместная потеря устойчивости композитной обшивки с рёбрами жёсткости, при которой в направлении нормали к поверхности обшивка изгибается между узлами пересечений, элементы набора поворачиваются без искажения формы профиля. В рамках уточнённой математической модели жесткостные характеристики панели, связанные с изгибом и закручиванием стержней, вводятся дискретно с применением аппарата обобщённых функций. Вариационный принцип Лагранжа используется для вывода уравнения изогнутой поверхности, соответствующего многоволновому крутильному выпучиванию панели. В выражении потенциальной энергии внутренних сил с помощью δ - функций вводятся жёсткости стержней, определяющие нормальные и касательные напряжения, причём нормальными напряжениями, обусловленными изгибом в плоскости обшивки и закручиванием, пренебрегаем.

Устойчивость панели с согласованными граничными условиями на контуре при сжатии

Выполнено математическое моделирование различных форм потери устойчивости панели с согласованными граничными условиями на контуре при сжатии.

Общая изгибная форма потери устойчивости панели

Рассмотрено определение критических сил общей изгибной формы потери устойчивости плоской прямоугольной несимметрично подкреплённой композитной панели ортотропной структуры. Граничные условия соответствуют шарнирному опиранию в отношении изгиба и скользящей заделке в тангенциальном направлении в отношении плоской задачи, когда края панели нагружены потоками касательных сил. По двум противоположным сторонам распределены равномерно нормальные сжимающие усилия интенсивности P .

В первом приближении пренебрегаем переменной докритического напряжённого состояния. Интеграл уравнения (29), удовлетворяющий краевым условиям при $y=0$ и $y=1$, при $x=0$ и $x=1$, соответствующим условиям скользящей заделки, представлен двойным тригонометрическим рядом

$$\Phi(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{mn} \sin(m\pi x) \sin(n\pi y) \quad , \quad (31)$$

где m и n – параметры волнообразования.

Равенство (32), где $c = a/b$, при параметрах волнообразования $m = 1, 2, 3, \dots$ и $n = 1, 2, 3, \dots$ даст спектр значений параметра P , при котором становится возможным деформирование поверхности приведения вида (31):

$$P = \frac{\pi^2}{b^2} \frac{K_{80} \left(\frac{m}{c}\right)^8 + K_{62} \left(\frac{m}{c}\right)^6 n^2 + K_{44} \left(\frac{m}{c}\right)^4 n^4 + K_{26} \left(\frac{m}{c}\right)^2 n^6 + K_{08} n^8}{\left[R_{40} \left(\frac{m}{c}\right)^4 + R_{22} \left(\frac{m}{c}\right)^2 n^2 + R_{04} n^4 \right] \left(\frac{m}{c}\right)^2}, \quad (32)$$

Традиционный подход к построению функции $\Phi(x,y)$ в виде разложения её в двойные ряды по системе тригонометрических функций (31) позволяет исследовать критические параметры панелей с граничными условиями частного вида, которые соответствуют шарнирному опиранию в отношении изгиба, а в отношении плоской задачи – скользящему заземлению в тангенциальном направлении при нагружении контура потоками касательных сил. Если краевые условия отличны от условий частного вида, представляется возможным оценить влияние технологии изготовления на несущую способность конструктивно-анизотропной композитной панели. Решение строится в одинарных тригонометрических рядах или методом однородных решений, либо принимается во внимание сложное докритическое напряжённое состояние конструкции.

Многоволновая крутильная форма потери устойчивости панели

Рассматривается задача многоволновой крутильной, например, в направлении оси y формы потери устойчивости плоской прямоугольной панели из композиционных материалов, эксцентрично подкреплённой ортогонально расположенными рёбрами жёсткости. Деформация конструкции осуществляется сжимающими усилиями интенсивности P , равномерно распределёнными вдоль торцов. Края панели закреплены в соответствии с граничными условиями частного вида, согласованными по плоской задаче и задаче изгиба. Дискретно расположенными считаются продольные стержни, жесткости поперечного набора «размазываются» по обшивке. Метод разделения переменных используется для введения жесткостных характеристик панели.

Выражение полной потенциальной энергии системы

$$\mathcal{E} = \int_l f \left[x; u_0, u_{0x}; v_0, v_{0x}; w, w_x, w_{xx}; (u_4)_1(x), (u_4)_2(x) \right] dx \quad (33)$$

является функционалом, зависящим от одной переменной x , где жесткости стрингеров вводятся дискретно с помощью аппарата обобщённых функций $\delta(y - y_i)$.

Формула для усилий P с точностью до коэффициентов K_{ij} и R_{ij} совпадает с формулой (32)

$$P = \frac{\pi^2}{b^2} \frac{\hat{K}_{80} \left(\frac{m}{c}\right)^8 + \hat{K}_{62} \left(\frac{m}{c}\right)^6 n^2 + \hat{K}_{44} \left(\frac{m}{c}\right)^4 n^4 + \hat{K}_{26} \left(\frac{m}{c}\right)^2 n^6 + \hat{K}_{08} n^8}{\left[\hat{R}_{40} \left(\frac{m}{c}\right)^4 + \hat{R}_{22} \left(\frac{m}{c}\right)^2 n^2 + \hat{R}_{04} n^4 \right] \left(\frac{m}{c}\right)^2} \quad (34)$$

Здесь коэффициенты \hat{K}_{ij} , $i, j = 0, 2, 4, 6, 8$ и \hat{R}_{ij} , $i, j = 0, 2, 4$ определяются через обобщённые жесткостные характеристики, когда осреднение жесткостей

элементов продольного набора по обшивке заменяется дискретным вводом, c_1 -

$$\frac{1}{c_1} \rightarrow \begin{cases} \frac{2}{b} \sum_{i=1}^N \sin^2(n\pi y_i) \\ \frac{2}{b} \sum_{i=1}^N \cos^2(n\pi y_i) \end{cases} \rightarrow \hat{K}_{ij}, \hat{R}_{ij} ,$$

межстрингерное расстояние, y_i - координата у дискретно расположенного ребра.

Докритическое напряжённо-деформированное состояние конструктивно-анизотропных композитных панелей при сжатии

Выполнено математическое моделирование докритического напряжённо-деформированного состояния конструктивно-анизотропных композитных панелей при сжатии.

Поставлена задача исследования неравномерности распределения внутренних силовых факторов, вызванных внешней сжимающей нагрузкой, по координатам конструктивно-анизотропных панелей на примере ряда панелей из углепластика. Рассматривается определение докритического напряжённого состояния плоской прямоугольной несимметрично подкреплённой композитной панели ортотропной структуры. По двум противоположным сторонам распределены равномерно нормальные сжимающие усилия интенсивности P . Граничные условия соответствуют скользящей заделке в тангенциальном направлении в отношении плоской задачи, когда продольные края панели нагружены потоками касательных сил, и шарнирному опиранию в отношении изгиба. Для исследования характера распределения нормальных усилий N_x по координатам x и y определяется напряжённо-деформированное состояние конструктивно-анизотропной панели при сжатии. Когда внешние поверхностные силы отсутствуют, разрешающее уравнение (29) становится однородным.

Интеграл уравнения (29), удовлетворяющий краевым условиям панели, «шарнирно опертой» по продольным кромкам и сжатой по поперечным кромкам, строится в одинарных тригонометрических рядах

$$\Phi(x, y) = \sum_{i=1,3,5}^{\infty} \left[\sum_{L=1}^4 B_{iL} ch(\lambda_{iL} x) \right] \sin(i\pi y) \quad (35)$$

Здесь $\lambda_{iL} = z_L \lambda_{iy} a$, $\lambda_{iy} = \frac{i\pi}{b}$, z_L - корни соответствующего характеристического полинома, которые находятся численно с использованием встроенных функций операционной среды MATLAB. Закон распределения продольных усилий N_x , соответствующих докритическому напряжённому состоянию сжатой вдоль оси x подкреплённой композитной панели, имеет вид:

$$N_x = P \sum_{i=1,3,5\dots}^{\infty} \left\{ \left[\sum_{L=1}^4 (N_x)_{iL} ch(\lambda_{iL} x) \right] - \frac{(N_x^T)_i}{P} - \frac{(N_x^H)_i}{P} \right\} \sin(i\pi y) , \quad (36)$$

$(N_x)_{iL}$ - коэффициенты разложения в одинарные тригонометрические ряды

нормальных усилий N_x , известные после определения констант B_{iL} .

$(N_x^T)_i, (N_x^H)_i$ - коэффициенты разложения в одинарные тригонометрические ряды температурных усилий N_x^T и усилий предварительного натяжения N_x^H .

Таким образом, если рассматриваются краевые условия на торцах, представляется возможным оценить влияние технологии изготовления на несущую способность конструктивно-анизотропной композитной панели.

Устойчивость панели с согласованными граничными условиями на контуре при сжатии с учётом неравномерности докритического напряжённого состояния

Выполнено математическое моделирование устойчивости панели с согласованными граничными условиями на контуре при сжатии с учётом неравномерности докритического напряжённого состояния.

Линейная задача устойчивости формулируется далее как задачи о собственных значениях. Общее дифференциальное уравнение изогнутой поверхности, определяющее смежное по отношению к исходному докритическому равновесное состояние конструкции, с учётом формул связи и закона изменения нормальных усилий (36) имеет вид :

$$\begin{aligned} & \frac{K_{80}}{a^8} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial x^8} + \frac{K_{62}}{a^6 b^2} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial x^6 \partial y^2} + \frac{K_{44}}{a^4 b^4} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial x^4 \partial y^4} + \frac{K_{26}}{a^2 b^6} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial x^2 \partial y^6} + \frac{K_{08}}{b^8} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial y^8} = \\ & = P \left\{ \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \left[\sum_{L=1}^4 (N_x)_{iL} \operatorname{ch}(\lambda_{iL} x) \right] - \frac{(N_x^T)_i}{P} - \frac{(N_x^H)_i}{P} \right\} \sin(i\pi y) \quad (37) \\ & \times \left[\frac{R_{40}}{a^6} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial x^6} + \frac{R_{22}}{a^4 b^2} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial x^4 \partial y^2} + \frac{R_{04}}{a^2 b^4} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial x^2 \partial y^4} \right] \end{aligned}$$

Здесь усилия N_x (36) фигурируют в качестве переменных коэффициентов.

Построена формула для критических усилий

$$P = P^* \left\{ \frac{\pi}{\sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \left(-\frac{2}{i} - \frac{1}{2n-i} + \frac{1}{2n+i} \right) \left\{ \sum_{L=1}^4 (N_x)_{iL} \left[\frac{(m\pi)^2 - \lambda_{iL}^2}{(m\pi)^2 + \lambda_{iL}^2} \right] \frac{\operatorname{sh}(\lambda_{iL})}{\lambda_{iL}} \right\} - \frac{(N_x^T)_i}{P} - \frac{(N_x^H)_i}{P} \right\} \quad (38)$$

где символом «*» обозначены критические усилия (32), (34), рассчитываемые без учёта неравномерности основного докритического напряжённого состояния для общей изгибной и для крутильной форм потери устойчивости, соответственно.

Таким образом, представляется возможным оценить влияние технологии изготовления на несущую способность конструктивно-анизотропной композитной панели. Решение строится в рамках одночленной аппроксимации тригонометрическими функциями. Определение критических сил осуществляется

методом последовательных приближений.

Устойчивость панели с согласованными граничными условиями закрепления двух противоположных кромок при сжатии

Выполнено математическое моделирование устойчивости панели с согласованными граничными условиями закрепления двух противоположных кромок при сжатии.

Рассмотрено определение критических сил общей изгибной формы потери устойчивости плоской прямоугольной несимметрично подкреплённой композитной панели ортотропной структуры. По двум противоположным сторонам распределены равномерно нормальные сжимающие усилия интенсивности P . Граничные условия на ненагруженных кромках соответствуют скользящей заделке в тангенциальном направлении в отношении плоской задачи, когда продольные края панели нагружены потоками касательных сил, и шарнирному опиранию в отношении изгиба. Нагруженные кромки закреплены произвольно или свободны. Решение задачи устойчивости строится с использованием результатов, представленных в разделе 3.2.

Изложенный алгоритм определения критического усилия общей потери устойчивости конструктивно-анизотропной композитной панели с согласованными граничными условиями по двум противоположным кромкам при сжатии в продольном направлении может быть реализован в операционной среде MATLAB в рамках итерационного процесса.

Метод однородных решений в задачах устойчивости конструктивно-анизотропных панелей из композиционных материалов с граничными условиями общего вида

Разработан метод однородных решений в задачах устойчивости конструктивно-анизотропных панелей из композиционных материалов с несогласованными граничными условиями на контуре.

Рассматривается класс точных аналитических решений краевых задач устойчивости конструктивно-анизотропных панелей из композиционных материалов, соответствующих общей трактовке физических граничных условий элементов конструкции.

Проблема определения критических усилий конструктивно-анизотропных композитных панелей сведена к решению краевой задачи и задачи на собственные значения для уравнения восьмого порядка в частных производных в прямоугольной области. Данное решение построено в рамках итерационного процесса методом однородных решений для произвольных несогласованных граничных условий на контуре. Рассматриваются все возможные варианты закрепления граничных кромок в отношении связанных плоской задачи и задачи изгиба. Применяется схема решения краевых задач для конечных областей, предложенная профессором С.А. Лурье в качестве подхода к исследованию бигармонической проблемы теории упругости. Используются алгоритмы, представленные в разделе 3.3 для исследования напряжённо-деформированного состояния конструктивно-анизотропных панелей из композиционных материалов. Изложен алгоритм нового метода, позволяющего представить решение в виде разложения по неортогональной системе обобщённых собственных функций с

коэффициентами, определяемыми явно.

Определение критических усилий общей потери устойчивости произвольным образом закреплённой по контуру конструктивно-анизотропной панели из композиционных материалов при сжатии сводится к решению системы трёх совместных алгебраических уравнений относительно корней полинома

$$z_L, \text{ собственных значений } \lambda_k, \text{ параметра нагрузки } \hat{P} = \frac{P}{\left(\lambda_k \frac{b}{a}\right)^2}$$

Предложенный алгоритм может быть реализован в операционной среде MATLAB в рамках метода последовательных приближений.

В шестой главе представлены результаты численной реализации разработанных алгоритмов на основе уточнённой теории при исследовании проблем устойчивости конструктивно-анизотропных панелей.

В операционной среде MATLAB разработаны программы и реализован процесс компьютерной многокритериальной оптимизации с учётом технологии изготовления конструктивно-анизотропных панелей из композиционных материалов, находящихся в условиях механического, внешнего температурного и технологического температурного воздействия. Программы предназначены для определения докритического напряжённого состояния, исследования задач устойчивости и компьютерной оптимизации процесса проектирования конструктивно-анизотропных панелей из композиционных материалов. Разработаны быстрые процедуры для анализа устойчивости подкреплённых панелей из ПКМ. Так как решение строится точными аналитическими методами, время расчёта вариантов минимально, что представляет интерес с точки зрения практики проектирования с использованием параметрического анализа. Результаты расчётов на устойчивость дают возможность снижения и оптимизации массовых характеристик конструкции. Постановка проблемы и предлагаемые подходы к её решению представляют интерес с точки зрения практики проектирования конструктивно-анизотропных панелей с применением КМ для перспективных изделий авиационной техники. Представлены новые достижения в области вычислительных исследований устойчивости композитных авиационных конструкций.

На Рисунке 12 представлены эпюры нормальных сил N_x эксцентрично подкреплённых прямоугольных панелей из углепластика, находящихся под действием постоянной погонной сжимающей нагрузки, при продольном изгибе в зависимости от отношения сторон панели.

Чем короче панель обшивки, тем ближе докритическое напряжённое состояние к однородному. Если отношение сторон панели $s < 1,0$, внутренние нормальные усилия распределены по длине панели практически равномерно.

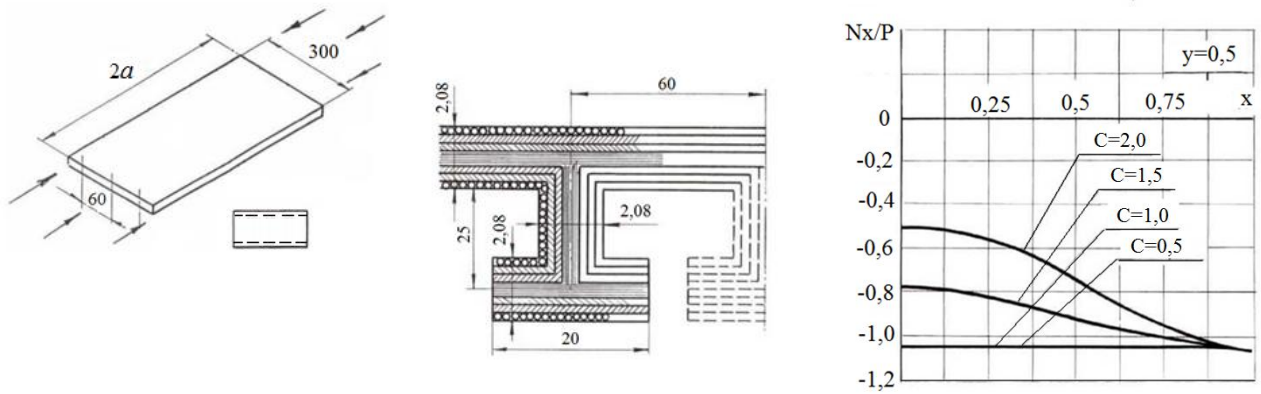


Рисунок 12 - Стрингерная панель, сжатая в продольном направлении.
Зависимость нормальных усилий от отношения сторон панели
при продольном изгибе

На Рисунке 13 представлены результаты определения критических параметров эксцентрично подкреплённых в продольном и поперечном направлениях прямоугольных панелей из углепластика, находящихся под действием постоянной погонной сжимающей нагрузки, в зависимости от отношения сторон панели; n – число полуволин в направлении координаты y , m – число полуволин в направлении координаты x .

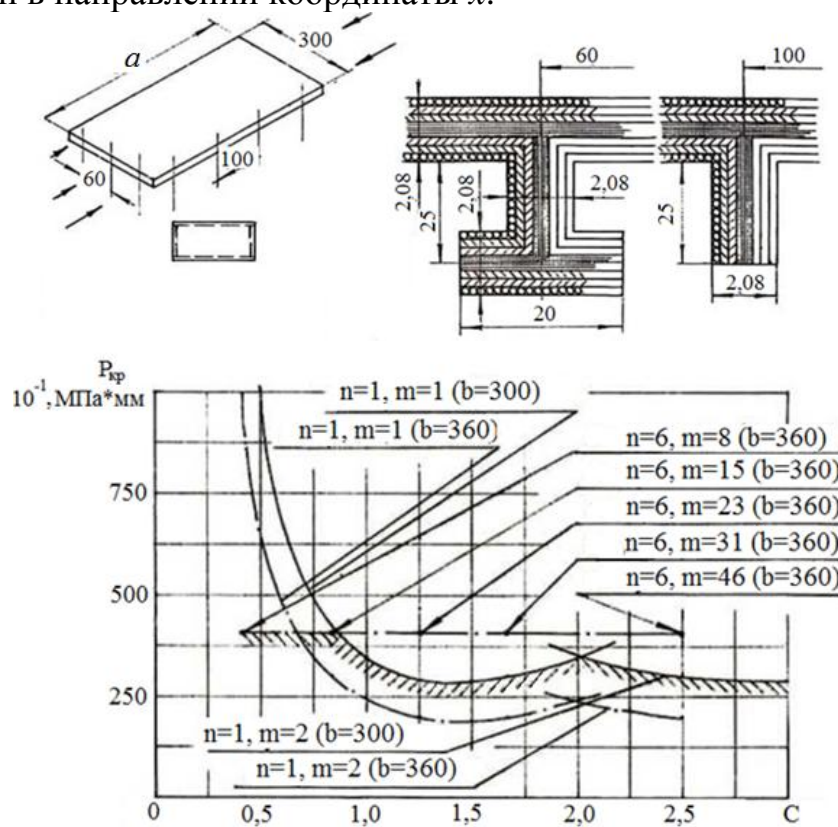


Рисунок 13 - Панель с продольно-поперечным набором, сжатая в продольном направлении.
Зависимость критических усилий изгибной формы потери устойчивости
и крутильной формы потери устойчивости от отношения сторон панели
————— конструктивная анизотропия; - - - - - дискретные рёбра

Для коротких панелей при отношении сторон $c < 0,75$ характерно многоволновое

крутильное выпучивание $n = 6$, $m = 8$. При отношении сторон $c = 0,75$ панель равноустойчива. Панели с $0,75 < c < 2,0$ теряют устойчивость по общей изгибной форме $n = 1$, $m = 1$, при $c > 2,0$ по общей изгибной форме $n = 1$, $m = 2$.

Седьмая глава демонстрирует верификацию математических моделей, приведены результаты экспериментальных исследований устойчивости и деформированного состояния конструктивно-анизотропных панелей.

Сопоставление результатов с данными зарубежного эксперимента по деформированию конструктивно-анизотропных панелей из изотропных материалов

Выполнено сопоставление результатов с данными зарубежного эксперимента по деформированию конструктивно-анизотропных панелей из изотропных материалов. Предложенные решения оценены по сравнению с известными решениями. С целью оценки правомочности полученных теоретических зависимостей выполнено сопоставление результатов расчёта с данными зарубежного эксперимента по деформированию стальных стрингерных панелей. Экспериментальная модель панели находилась под действием постоянной погонной поперечной нагрузки $q(x,y) = const$. Симметричные краевые условия на контуре соответствовали шарнирному опиранию (Рисунок 14). Результаты натурного эксперимента и расчётные данные на основе уточнённой теории практически совпадают (Таблица 3).

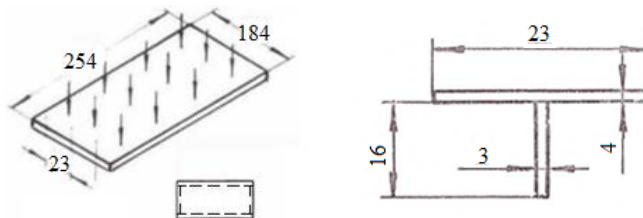


Рисунок 14 – Экспериментальная панель

Таблица 3 – Сопоставление результатов по прогибам панели

Модель		Мольнар		Уточнённая теория	Интегральн. учёт закр.
		Эксперим.	Расчёт		
q	МПа	0,5			
w_{max}	Мм	0,60	0,85	0,62	0,21

Экспериментальные исследования устойчивости конструктивно-анизотропных панелей из композиционных материалов

Проведены серии испытаний с целью экспериментальных исследований устойчивости конструктивно-анизотропных панелей из композиционных материалов

С целью оценки правомочности полученных теоретических зависимостей проведены серии испытаний экспериментальных моделей углепластиковых стрингерных панелей на равномерное сжатие в продольном направлении до потери устойчивости (Рисунок 15). Результаты натурных экспериментов и

расчётные данные совпадают качественно по формам потери устойчивости и количественно с точностью до 12–13 %, если не рассматривать переменное докритическое напряжённое состояние. Учёт неравномерности основного напряжённого состояния приводит к увеличению точности до 8–10 %.

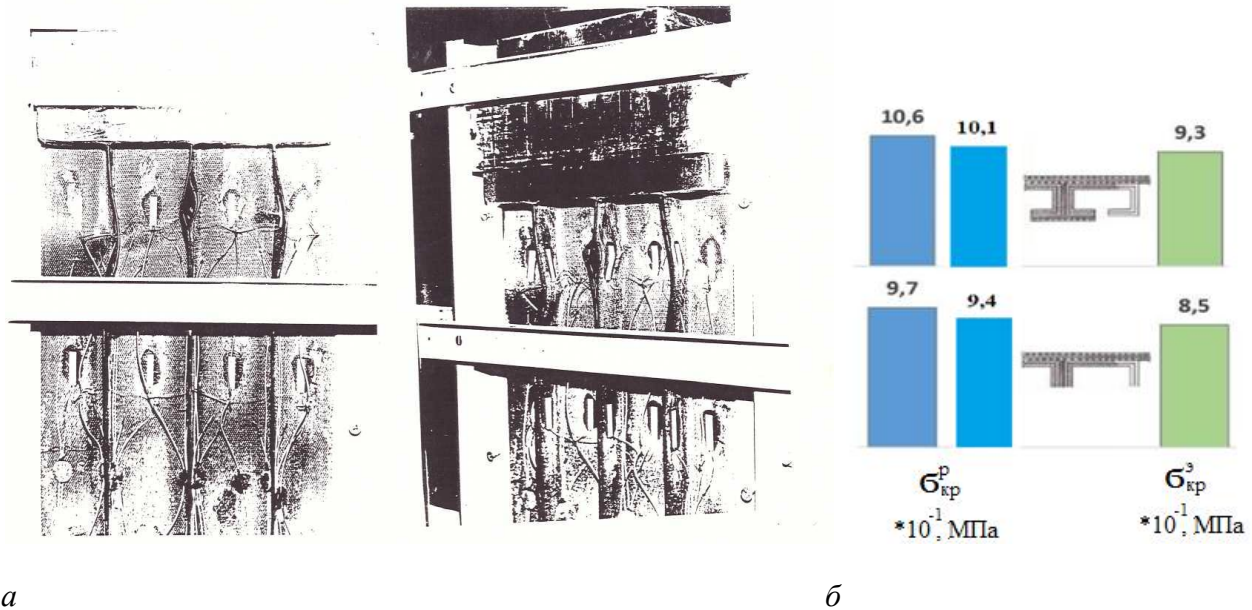


Рисунок 15 - Стрингерная панель из КМ, сжатая в продольном направлении:
 а – экспериментальные образцы, испытания на сжатие до потери устойчивости;
 б – сопоставление расчётных и экспериментальных критических напряжений

Представлены результаты экспериментальных исследований устойчивости конструктивно-анизотропных панелей из изотропных материалов, усиленных КМ-жгутами, также экспериментальных исследований устойчивости конструктивно-анизотропных панелей кессона из изотропных материалов, усиленных КМ-жгутами.

Выполнена экспериментальная верификация математических моделей устойчивости и разработанных подходов к решению задач с учётом неравномерности докритического напряжённого состояния в рамках разрешающего дифференциального уравнения восьмого порядка, построенного с уточнением расчётной схемы подкрепляющего ребра при закручивании.

Заключение диссертации состоит из восемнадцати основных новых научных результатов, отражающих решения задач, сформулированных для достижения цели исследования. Усовершенствованы методы анализа статической прочности и устойчивости конструктивно-анизотропных панелей летательных аппаратов из композиционных материалов. Отражены перспективы дальнейшей разработки темы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработаны методы анализа статической прочности и устойчивости конструктивно-анизотропных панелей летательных аппаратов (ЛА) из композиционных материалов на основе уточнённой теории с учётом технологии изготовления.

Основные результаты, полученные в диссертационной работе, состоят в следующем:

1. Предложена новая обобщённая универсальная математическая модель для исследования на основе уточнённой теории статической прочности и устойчивости конструктивно-анизотропных панелей ЛА, находящихся в условиях силового и температурного воздействия, с учётом технологии изготовления.
2. Рассмотрены плоские прямоугольные панели с обшивкой постоянной толщины:
 - эксцентрично подкреплённые стержнями двух направлений, расположенными параллельно сторонам опорного профиля, изготовленные из полимерных волокнистых композиционных материалов;
 - гладкие, без подкреплений, из высокомодульных композиционных материалов, обладающие анизотропией вследствие несимметрии свойств структуры многослойного пакета по толщине;
 - эксцентрично подкреплённые стержнями двух направлений, расположенными параллельно сторонам опорного профиля, изготовленные из изотропных материалов;
 - эксцентрично подкреплённые стержнями двух направлений, расположенными параллельно сторонам опорного профиля, изготовленные из изотропных материалов с усилением набора композитными жгутами.
3. Новая расчётная модель основана на принципах конструктивной анизотропии и дальнейшем развитии теории тонкостенных упругих стержней В.З. Власова в рамках общей контактной задачи.
4. Приняты во внимание технологические факторы, имеющие место при изготовлении конструкций из композиционных материалов. Перспективным направлением исследований является проектирование композитных конструкций с учётом технологии изготовления, когда технологический процесс принимается во внимание на этапе разработки изделия.
5. Построено уравнение равновесия восемнадцатого порядка с характеристическим полиномом двенадцатого порядка, и сформулированы естественные граничные условия для исследования общего напряжённого состояния с краевыми эффектами типа «погранслоя».
6. Доказана правомочность значительного упрощения математической модели при определении основного напряжённого состояния путём сведения её к краевой задаче для уравнения с дифференциальным оператором восьмого порядка в соответствии с теорией асимптотического интегрирования дифференциальных уравнений.
7. Решение уравнений равновесия двенадцатого и восьмого порядков построено в одинарных тригонометрических рядах, для которых продемонстрирована достаточно быстрая сходимость. На основании проведённого анализа компонентов напряжённо-деформированного состояния с учётом и без учёта краевых эффектов установлено, что краевыми эффектами можно пренебречь в широком диапазоне жесткостей рассматриваемой тонкостенной пространственной системы, при этом погрешность не превышает 3%.

8. Исследовано влияние крутильной жёсткости рёбер на характеристики деформирования панели из углепластика с продольным набором. Учёт деформации сдвига в рамках теории тонкостенных упругих стержней приводит к снижению прогибов в среднем на 17% по сравнению с «чистым» кручением.

9. Исследовано влияние крутильной жёсткости рёбер на прочностные характеристики алюминиевой панели с продольно-поперечным набором в виде двутавра, армированного жгутами из композиционных материалов. Учёт деформации сдвига в рамках теории тонкостенных упругих стержней приводит к снижению прогибов и нормальных напряжений в поперечном направлении в среднем на 27%, продольных нормальных напряжений – в среднем на 8% по сравнению с «чистым» кручением.

10. Проанализирована возможность использования для исследования прочности односторонне усиленных панелей известного в литературе приёма, заключающегося в формальном распространении гипотезы Кирхгофа на всё тело анизотропной среды. Установлено, что результаты определения напряжённо-деформированного состояния в рамках гипотезы Кирхгофа и при решении контактной задачи совпадают с точностью до 13%, если обшивка подкреплена ортогонально расположенными рёбрами жёсткости. Значительные расхождения имеют место в конструкции с однонаправленным набором, для панелей с ярко выраженной анизотропией свойств.

11. Известные способы решения различных краевых бигармонических задач распространены на интегрирование дифференциального уравнения восьмого порядка в частных производных и применены к расчёту широкого класса конструктивно-анизотропных панелей, в частности – с эксцентричным продольно-поперечным набором, с реальными типами опираний и закреплений смежных сторон контура. Используются модификации метода однородных решений. Получены конкретные результаты, позволяющие оценить влияние краевых условий на прочностные характеристики конструкции.

12. В рамках дифференциального уравнения деформированной поверхности восьмого порядка решён ряд практически важных задач о бифуркации равновесных форм прямоугольных панелей с односторонними подкреплениями по двум взаимно-перпендикулярным направлениям. По традиционной схеме, используемой при проектировании, найдены критические усилия, соответствующие общей потере устойчивости панели, а также соответствующие совместному выпучиванию листа с рёбрами, связанному с изгибом обшивки между узлами пересечений с последующим поворотом стрингеров без искажения формы профиля. Применяются принцип «размазывания» жесткостей элементов набора и дискретный учёт последних с помощью аппарата обобщённых функций. На конкретных примерах при построении решения в двойных тригонометрических рядах выявлены условия появления той или иной формы бифуркации.

13. Разработан метод определения критических усилий конструктивно-анизотропных панелей с учётом переменности исходного докритического напряжённого состояния, которое является сложным, так как не разделяется на плоскую задачу и изгиб пластины. Показано, чем короче обшивка, и чем выше

жёсткость стрингеров, тем ближе основное напряжённое состояние к однородному, когда нормальные силы распределены по длине практически равномерно.

14. Построены алгоритмы исследования задач устойчивости эксцентрично подкреплённых панелей в одинарных тригонометрических рядах, а также с использованием метода однородных решений при произвольных условиях на контуре. Предложенные алгоритмы могут быть реализованы в операционной среде MATLAB согласно методу последовательных приближений.

15. С целью оценки правомочности полученных теоретических зависимостей проведены серии испытаний экспериментальных моделей подкреплённых композитных панелей на равномерное сжатие до потери устойчивости. Результаты экспериментов и расчётные данные совпадают качественно по формам бифуркации и количественно с точностью до 8 – 13 %, тогда как приближённый расчёт панели как балки даёт значительно заниженные результаты по изгибной форме потери устойчивости в отношении длинных панелей. Выявить крутильную форму потери устойчивости, характерную для коротких образцов, по балочной теории не представляется возможным.

16. Предложенные решения оценены по сравнению с известными решениями. Сопоставление максимальных прогибов, полученных расчётным путём, с данными зарубежного эксперимента подтверждает достоверность результатов в отношении задач прочности.

17. Для определения компонентов напряжённо-деформированного состояния и критических параметров конструктивно-анизотропных панелей на основе уточнённой теории с учётом технологии изготовления составлен комплекс программ в операционной среде MATLAB, который может быть использован в дальнейшем в системе автоматизированного проектирования при решении задачи проектирования изделия под заданную стоимость. Разработаны быстрые процедуры для анализа эксцентрично подкреплённых панелей из композиционных и изотропных материалов. Представлены новые достижения в области вычислительных исследований напряжённо-деформированного состояния и устойчивости композитных авиационных конструкций.

18. На основании выполненных исследований решена научная проблема, имеющая важное хозяйственное значение, изложены новые научно обоснованные технические и технологические решения, внедрение которых вносит значительный вклад в развитие авиационной промышленности.

Перспективы дальнейшей разработки темы

Решение новой задачи проектирования – проектирование под заданную стоимость – возможно при объединении моделей высокой точности с современными компьютерными технологиями, подтверждении достоверности полученных результатов, снижении объёма экспериментальных исследований.

Комплексные решения сформулированных проблем и задач возможно эффективно использовать на различных этапах проектирования панелей несущих поверхностей ЛА из композиционных материалов при выборе конструктивных вариантов. При исследовании целевых функций на условный экстремум в строгой

математической постановке решения задач статики и устойчивости, построенные в рамках уточнённой теории, логично вводить в качестве строгих ограничений.

В ПРИЛОЖЕНИИ к диссертации представлены Акты внедрения результатов диссертационной работы в ОКБ Сухого и в учебный процесс Московского авиационного института (национального исследовательского университета) МАИ (НИУ)

Полнота изложения материалов диссертации в работах, опубликованных соискателем ученой степени

Научные статьи в ведущих научных журналах и изданиях, включенных в международные системы цитирования

1. Гавва Л.М., Фирсанов В.В. Математические модели и методы расчета напряженно-деформированного состояния панелей летательных аппаратов из композиционных материалов с учетом технологии изготовления // Известия РАН. МТТ. – 2020. - №3.- С. 122-133.

Версия: Gavva L.M., Firsanov V.V. Mathematical Models and Methods for Calculating the Stress-Strain State of Aircraft Panels from Composite Materials Taking into Account the Production Technology // Mechanics of Solids (Springer). – 2020. - № 3.- PP. 603-612

2. Boitsov V.V., Gavva L.M., Pugachev Y.N. The Stress-Strain State of Structurally Anisotropic Panels from Composite Materials under force and process temperature exposure // Polymer Science. Series D. – 2019. – Vol. 12. - № 1. – PP. 85-90

3. Бойцов Б.В., Гавва Л.М., Ендогур А.И., Фирсанов В.В. Напряженно-деформированное состояние и устойчивость конструктивно-анизотропных панелей летательных аппаратов из композиционных материалов с учетом технологии изготовления // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. – 2018. - №4. – С. 20-27

Версия: Boitsov V.V., Gavva L.M., Endogur A.I., Firsanov V.V. Stress-Strain State and Buckling Problem of Structurally-Anisotropic Aircraft Panels Made of Composite Materials in view of Production Technology // Russian Aeronautics. – 2018. – Vol. 61. - № 4. – PP. 524-532

Научные статьи в ведущих рецензируемых научных журналах и изданиях, входящих в Перечень Высшей аттестационной комиссии Российской Федерации

Специальность 05.07.03

1. Фирсанов В.В., Гавва Л.М. Анализ краевых эффектов и основного напряжённо-деформированного состояния конструктивно-анизотропных панелей летательных аппаратов с применением композиционных материалов по уточнённой теории // Конструкции из композиционных материалов. – 2021. - № 1. – С. 3-9

2. Гавва Л.М. Экспериментальные исследования устойчивости конструктивно-анизотропных панелей с применением композиционных материалов для верификации уточненных математических моделей // Конструкции из композиционных материалов. – 2021. - № 1. – С. 10-15

3. Фирсанов В.В., Гавва Л.М. Параметрический анализ докритического напряжённо-деформированного состояния конструктивно-анизотропных панелей

из композиционных материалов // Механика композиционных материалов и конструкций. ИПРИМ РАН.– 2019. – Т. 25. – № 2. – С. 145-153

4. Фирсанов В.В., Гавва Л.М. Исследование устойчивости конструктивно-анизотропных панелей из композиционных материалов с учетом докритического напряженного состояния // Конструкции из композиционных материалов. – 2019. - № 4 (156). – С. 17-24

5. Гавва Л.М., Лурье С.А. Метод расчета напряженно-деформированного состояния конструктивно-анизотропных панелей из композиционных материалов с учетом технологии изготовления и граничных условий общего вида // Полет. Общероссийский научно-технический журнал. – 2018. - №7. – С. 14-23

6. Бойцов Б.В., Гавва Л.М., Пугачев Ю.Н. Напряженно-деформированное состояние конструктивно-анизотропных панелей из композитных материалов, находящихся в условиях силового и технологического температурного воздействия // Все материалы. Энциклопедический справочник. – 2018. - №7. – С. 16-23

7. Гавва Л.М. Параметрический анализ в операционной среде MATLAB напряжённо-деформированного состояния конструктивно-анизотропных панелей из композиционных материалов с учетом технологии изготовления // Труды МАИ. – 2017. - № 93. – С. 27

Научные статьи в ведущих рецензируемых научных журналах и изданиях, входящих в Перечень Высшей аттестационной комиссии Российской Федерации

Смежные специальности

1. Бойцов Б.В., Ендогур А.И., Пугачев Ю.Н., Ефимов В.В., Гавва Л.М. Интеграция бортовых гидросистем в силовые конструкции самолетов из композиционных материалов // Качество и жизнь. – 2018. - № 4 (20). – С. 388-396

2. Фирсанов В.В., Гавва Л.М. Исследование изгибной формы потери устойчивости конструктивно-анизотропных панелей из композиционных материалов в операционной среде MATLAB // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2017. - № 4. – С. 66-76

3. Фирсанов В.В., Гавва Л.М. Исследование в операционной среде MATLAB крутильной формы потери устойчивости конструктивно-анизотропных панелей из композиционных материалов // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. – 2017. - № 2. – С. 226-237

4. Бойцов Б.В., Гавва Л.М. Параметрический анализ напряженно-деформированного состояния конструктивно-анизотропных панелей из композиционных материалов. Математическая модель // Качество и жизнь. – 2017. – № 2 (14). - С. 84-89

5. Бойцов Б.В., Гавва Л.М. Параметрический анализ напряженно-деформированного состояния конструктивно-анизотропных панелей из композиционных материалов. Решение краевых задач // Качество и жизнь. – 2017. – № 3 (15). - С. 19-24

Статьи в материалах международных конференций - в изданиях, включенных в международные системы цитирования

1. Gavva L.M., Firsanov V.V., Korochkov A.N. Buckling Problem Statement and Approaches to Buckling Problem Investigation of Structurally-Anisotropic Aircraft Panels Made from Composite Materials // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 714(1), 012007 (2020)
2. Gavva L.M. New Model and Analytical Review of Approaches to Buckling Problem Investigation of Structurally-Anisotropic Aircraft Panels Made from Composite Materials // Lecture Notes in Electrical Engineering 622. – 2020. - С. 163-175
3. Gavva L.M., Firsanov V.V. Analytical Review of Account Methods and Experimental Approaches to Stress-Strain State Investigation of Structurally-Anisotropic Aircraft Panels Made from Composite Materials // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 927(1), 012067 (2020)
4. Gavva L.M. Buckling problems of structurally-anisotropic composite panels of aircraft with influence of production technology // 5th International Conference on Mechanical Structures and Smart Materials. ICMSSM 2019. Xian. China. 27 May – 28 May 2019. – Materials Science Forum. – Vol. 971 MSF/ - 2019. – PP. 45-50 (237059)
5. Gavva L.M., Endogur A.I. Statics and Buckling Problems of Aircraft Structurally-Anisotropic Composite Panels with the influence of Production Technology // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering in Aeronautics (MEA2017). – 2018. – 312 (1). - С. 012009

Материалы международных и всероссийских конференций

1. Гавва Л.М., Фирсанов В.В. Моделирование остаточных температурных напряжений в конструктивно-анизотропных панелях из композиционных материалов по уточнённой теории // в сборнике Материалы XXVII Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова 17-21 мая 2021 г. Москва. – ООО «ТРП». – Москва. – Т. 1. - С. 68-70
2. Гавва Л.М., Митрофанов О.В., Фирсанов В.В. Оптимальное проектирование конструктивно-анизотропных панелей ЛА из композиционных материалов с ограничениями по уточнённой теории устойчивости // в сборнике Материалы XXII Международной конференции по Вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС2021) 4-13 сентября 2021 г. Алушта. – Москва. – МАИ. - Т. 1. - С. 189-190
3. Гавва Л.М., Фирсанов В.В. Аналитический обзор методов расчёта и экспериментальных исследований напряжённо-деформированного состояния конструктивно-анизотропных панелей ЛА из композиционных материалов // в сборнике Материалы XIII Международной конференции по Прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли (АММАГ2020) 6-13 сентября 2020 г. Алушта. - Москва. – МАИ. - Т. 1. - С. 273-274
4. Гавва Л.М., Фирсанов В.В. Аналитический обзор методов расчёта и экспериментальных исследований устойчивости конструктивно-анизотропных панелей ЛА // 18-я Международная конференция «Авиация и космонавтика - 2019». - 2019. -Тезисы. – С. 14

Версия: Gavva L.M., Firsanov V.V. Analytical survey of approach methods and experimental investigations of Buckling Problems of Structurally-Anisotropic Aircraft Panels Made from Composite Materials // 18th International Conference «Aviation and Cosmonautics – 2019». – Abstracts. – 2019. – PP. 333-334

5. Ковкута А.В., Гавва Л.М. Оптимизация анизотропных панелей с несимметричной структурой пакета // 18-я Международная конференция «Авиация и космонавтика - 2019». - 2019. -Тезисы. – С. 193

Версия: Kovkuta A.V., Gavva L.M. Optimization of Anisotropic Panels with Asymmetrical thickness package structure // 18th International Conference «Aviation and Cosmonautics – 2019». – Abstracts. – 2019. – P. 491

6. Гавва Л.М., Лисейцев Н.К., Стрелец Д.Ю. Аналитический обзор методов расчёта и экспериментальных исследований прочности конструктивно-анизотропных панелей из композиционных материалов // 17-я Международная конференция «Авиация и космонавтика - 2018». - 2018. -Тезисы. – С. 17-18

7. Фирсанов В.В., Гавва Л.М. Влияние технологии изготовления на критические параметры изгибной и крутильной форм потери устойчивости конструктивно-анизотропных панелей из композиционных материалов // 16-я Международная конференция «Авиация и космонавтика - 2017». - 2017. -Тезисы. – С. 18-19

8. Гавва Л.М., Лурье С.А. Напряжённно-деформированное состояние конструктивно-анизотропных панелей из композиционных материалов с учетом технологии изготовления при произвольном закреплении контура // Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред. Сборник трудов 7-й всероссийской научно-технической конференции с международным участием им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского. – 2017. – С. 51-52

9. Гавва Л.М. Параметрический анализ в операционной среде MATLAB напряжённно-деформированного состояния конструктивно-анизотропных панелей из композиционных материалов с учетом технологии изготовления // 15-я Международная конференция «Авиация и космонавтика - 2016». - 2017. -Тезисы. – С. 19-21