

УДК 531

Модель напряженно-деформированного состояния криволинейной слоистой композитной балки

Русланцев А.Н.^{1*}, Думанский А.М.^{2}, Алимов М.А.^{2***}**

¹*Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, ул. 2-я Бауманская, 5, Москва, 105005, Россия*

²*Институт машиноведения имени А.А. Благонравова РАН, Малый Харитоньевский пер., 4, Москва, 101990, Россия*

* andreiruslantsev@gmail.com

** alduman@rambler.ru

*** alimov_mike@mail.ru

Аннотация

Полимерные композиционные материалы применяются в широком спектре изделий авиационной и ракетно-космической техники. Многие детали представляют собой криволинейные балки, работающие на изгиб. Однако, в связи с ярко выраженной анизотропией свойств, поведение композиционных материалов в подобных деталях значительно отличается от металлов, но при этом нет аналитических математических моделей, во всей полноте описывающих напряженно-деформированное состояние подобных слоистых конструкций. В настоящей работе предложена модель определения напряжений в слоистой криволинейной композитной балке. Показано, что максимальные значения

напряжений определяются изгибающим моментом и геометрическими параметрами балки. Определено, что для композитной балки наиболее опасной является центральная часть, в которой наиболее вероятно расслоение. Выработаны рекомендации по повышению несущей способности криволинейных балок.

Ключевые слова: изгиб, полимерный композиционный материал, напряженно-деформированное состояние, криволинейная балка.

Введение

Полимерные композиционные материалы получают все более широкое распространение в авиационной и ракетно-космической технике благодаря своим уникальным физико-механическим свойствам. Они обладают высокими удельными характеристиками, коррозионной стойкостью, низким коэффициентом линейного термического расширения, при этом они характеризуются существенной анизотропией механических характеристик.

При разработке методики проектирования нужно иметь информацию о работе материала в тех или иных конструкциях. Для этой цели исследуют образцы, приближенные по форме к типовым элементам конструкций, в процессе чего проводится изучение напряженно-деформированного состояния в этих элементах. В связи с консервативностью авиационной отрасли, с учетом многолетнего опыта использования композиционных материалов, до сих пор преобладают эмпирические

приёмы при переносе результатов лабораторных исследований на серийное производство [1].

При проектировании композитных структур необходимо учитывать межслойные напряжения, поскольку зона контакта слоев имеет низкую прочность и там может произойти разрушение, вызванное расслоением материала [2-5]. Поэтому определение внутренних напряжений, вызванных межслойными взаимодействиями при растяжении-сжатии слоёв, является важной задачей

Классические испытания на растяжение, сжатие и сдвиг не могут во всей полноте показать поведение многослойных композиционных материалов. Испытания на изгиб могут дать дополнительную информацию, более полно описывающую поведение материала [6, 7].

В стандарте ASTM D6415 [8] описывается испытание образцов типового элемента конструкции. По окончании испытаний определяются радиальные напряжения, возникающие в угловом переходе образца. Четырехточечный изгиб типового L-образного элемента конструкции представлен на рисунке 1.

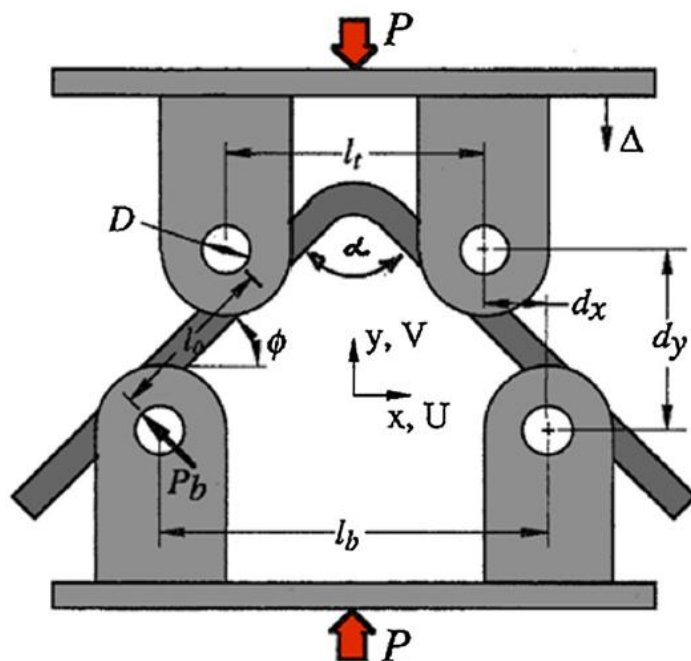


Рис. 1. Схема четырёхточечного изгиба типового L-образного элемента [8]

В промышленном стандарте ASTM D6415 предлагается аналитический метод для описания результата испытания образцов, состоящий из двух шагов:

- определение критического распределенного момента криволинейной балки CBS (Curved Beam Strength).
- определение нормальных напряжений при разрушающей нагрузке с учетом коэффициента прочности криволинейной балки.

Аналитический метод, позволяющий определить значение CBS, описан в стандарте ASTM D6415 и может быть определён для криволинейного элемента с радиальной анизотропией свойств:

$$CBS = \left(\frac{P}{2\omega \cos \varphi} \right) \left(\frac{d_x}{\cos \varphi} + (D+t) \operatorname{tg} \varphi \right),$$

$$\varphi = \sin^{-1} \left(\frac{-d_x(D-t) + d_y \sqrt{d_x^2 + d_y^2 - (D-t)^2}}{d_x^2 + d_y^2} \right),$$

$$d_y = d_x \operatorname{tg}(\varphi_0) + \frac{D+t}{\cos(\varphi_0)} - \Delta$$

где P – приложенная нагрузка, d_x – расстояние между нагружающими и поддерживающими цилиндрами, D – диаметр нагружающего цилиндра, φ – угол раскрытия концевых участков образца при разрушении, d_y – вертикальное перемещение оснстки при разрушающей нагрузке, Δ – перемещение траверсы испытательного стенда.

На основании экспериментальных данных, приведённых в стандартах ASTM, можно судить, что разрушение происходит в связи с расслоением образца в зоне радиального перехода (рис. 2). Кроме расслоения возможно разрушение образца в трансверсальном направлении.

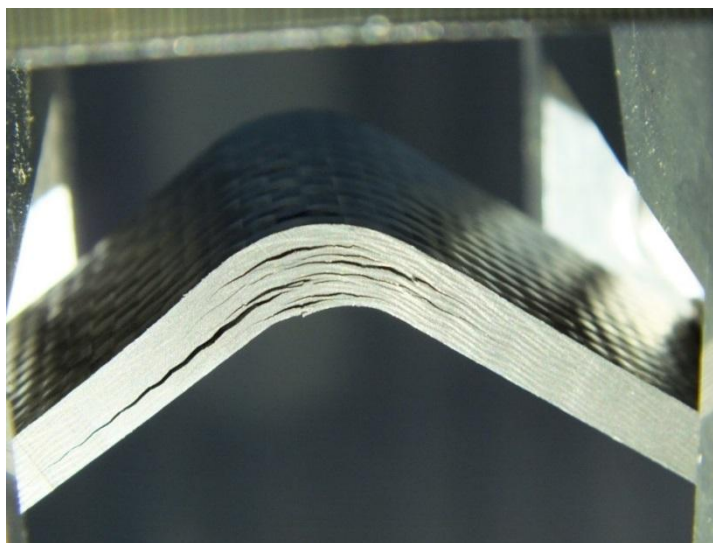


Рис. 2. Расслоение образца [9].

Наиболее сложным для моделирования и расчета является именно расслоение. Этот тип разрушения возникает вследствие невысокой прочности связующего. Современные аналитические модели расчета криволинейных балок, как правило, используются для расчета элементов конструкций, выполненных из материалов с постоянным по толщине модулем упругости. Кроме того, данные модели не позволяют производить расчеты для слоистых материалов, однако результаты, полученные по таким моделям, могут дать оценочные значения прочности.

Для аналитического расчета окружных и радиальных напряжений в криволинейной балке с учетом анизотропии механических свойств материала Лехницким была предложена модель, основанная на предположении, что криволинейный элемент обладает цилиндрической анизотропией с полюсом в центре окружностей, образующих внешний и внутренний контур бруса (рис. 3). Условия на границах элемента предполагают, что на внешней и внутренней цилиндрических поверхностях с радиусами b и a соответственно напряжения равны нулю, на концах элемента напряжения приводятся к моментам M .

Выражения для напряжений имеют вид [10]:

$$\sigma_r = -\frac{M}{b^2 h g} \left[1 - \frac{1-c^{k+1}}{1-c^{2k}} \left(\frac{r}{b}\right)^{k-1} - \frac{1-c^{k-1}}{1-c^{2k}} \cdot c^{k+1} \left(\frac{r}{b}\right)^{k+1} \right],$$

$$\sigma_\theta = -\frac{M}{b^2 h g} \left[1 - \frac{1-c^{k+1}}{1-c^{2k}} \cdot k \left(\frac{r}{b}\right)^{k-1} - \frac{1-c^{k-1}}{1-c^{2k}} \cdot k c^{k+1} \left(\frac{r}{b}\right)^{k+1} \right],$$

$$\tau_{r\theta} = 0 ,$$

где a, b – внутренние и внешние радиусы бруса (рис. 3), h – толщина бруса, M – величина моментов,

$$c = \frac{a}{b},$$

$$g = \frac{1-c^2}{2} - \frac{k}{k+1} \cdot \frac{(1-c^{k+1})^2}{1-c^{2k}} + \frac{kc^2}{k-1} \frac{(1-c^{k-1})^2}{1-c^{2k}},$$

$$k = \sqrt{\frac{E_\theta}{E_r}}.$$

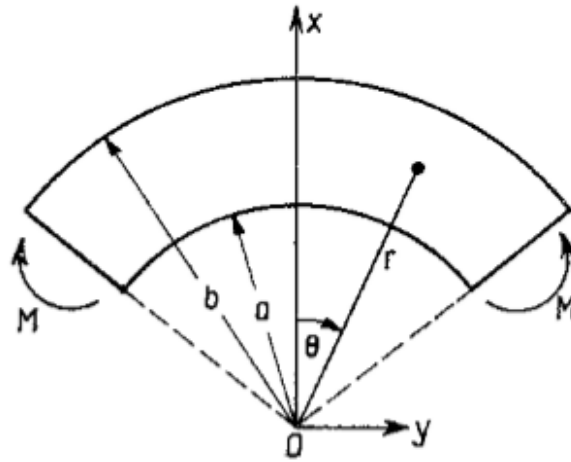


Рис. 3. Расчетная схема [10]

К особенностям решения можно отнести слабую зависимость напряжений от величины радиального модуля упругости. Также модель не позволяет рассчитывать напряженное состояние для изотропного материала и для слоистых балок.

Также задача о чистом изгибе криволинейного элемента рассмотрена Тимошенко в [11]. Рассматривается кривой брус с постоянным прямоугольным

сечением, изгибаемый в плоскости кривизны моментами M , приложенными по концам бруса.

Получены следующие граничные условия:

- $\sigma_r = 0$ при $r=a$ и $r=b$, что означает отсутствие нормальных напряжений на поверхности;
- $\int_a^b \sigma_\theta dr = 0$, $\int_a^b \sigma_\theta r dr = -M$;
- $\tau_{r\theta} = 0$ на всей поверхности.

Таким образом, формулы распределения напряжений для чистого изгиба имеют вид [11]:

$$\begin{cases} \sigma_r = -\frac{4M}{N} \left(\frac{a^2 b^2}{r^2} \ln \frac{b}{a} + b^2 \ln \frac{r}{b} + a^2 \ln \frac{a}{r} \right) \\ \sigma_\theta = -\frac{4M}{N} \left(-\frac{a^2 b^2}{r^2} \ln \frac{b}{a} + b^2 \ln \frac{r}{b} + a^2 \ln \frac{a}{r} + b^2 - a^2 \right) \\ \tau_{r\theta} = 0, N = (b^2 - a^2)^2 - 4a^2 b^2 \left(\ln \frac{b}{a} \right)^2 \end{cases}$$

По сравнению с формулами Лехницкого, данная модель позволяет производить расчеты изотропных балок, однако она также неприменима для расчета слоистых конструкций.

Модель деформирования криволинейной балки

Рассмотрим постановку задачи о деформировании изотропной криволинейной балки под действием изгибающих моментов, приложенных к её краям. Данная задача является симметричной. При деформировании происходит раскрытие угла θ и изменение кривизны балки. Вводя допущение, что балка не деформируется по толщине, можем считать приращение радиуса кривизны для всех слоёв dr . Расчетная схема представлена на рис. 4.

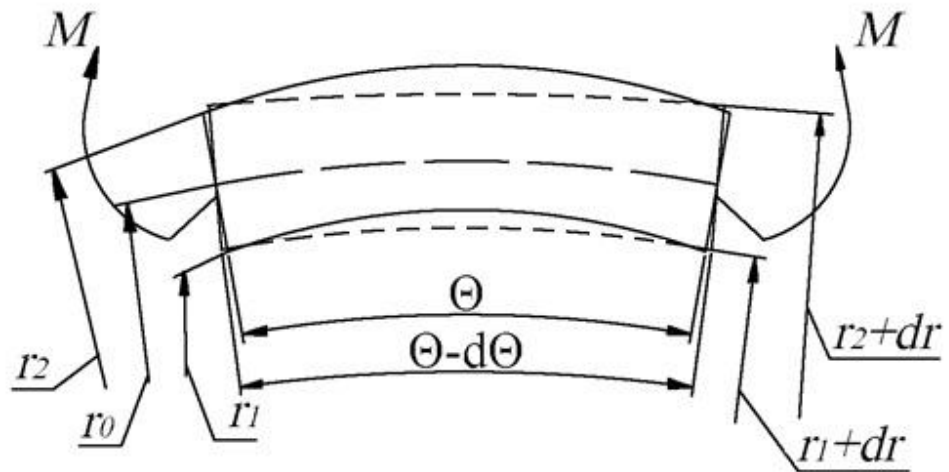


Рис. 4. Расчетная схема деформирования

Предполагается наличие нейтральной линии, которая при деформировании меняет кривизну, но сохраняет свою длину. Обозначим ее координату как r_0 . Приравняв длину нейтральной линии до деформирования и после деформирования, записываем следующее выражение:

$$r_0\theta = (r_0 + dr)(\theta - d\theta)$$

Избавляясь от бесконечно малых второго порядка получаем соотношение:

$$\frac{r_0}{dr_0} = \frac{\theta}{d\theta}$$

Длина произвольного слоя с радиальной координатой $r = r_0 + y$ до деформирования равняется $l_0 = (r_0 + y)\theta$. С учетом допущений, после деформирования длина слоя равняется $l_1 = (r_0 + dr_0 + y)(\theta - d\theta)$. Окружные деформации равны:

$$\varepsilon_\theta = \frac{l_1 - l_0}{l_0} = \frac{y}{r_0 + y} \frac{d\theta}{\theta} = \frac{r - r_0}{r} \frac{d\theta}{\theta} = \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) \frac{d\theta}{\theta}$$

Вводим допущение, что окружные напряжения определяются по закону Гука:

$$\sigma_\theta(r) = E\varepsilon_\theta(r)$$

Балка нагружена только изгибающим моментом, и на сечение не действуют ни нормальные, ни перерезывающие силы, поэтому:

$$\int_r \sigma_\theta dr = E \frac{d\theta}{\theta} \int_{r_1}^{r_2} \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) dr = 0$$

Интегрируя выражение, определяем положение нейтральной линии:

$$r_0 = \frac{r_2 - r_1}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$

Зависимость между окружными напряжениями и изгибающим моментом имеет вид:

$$M = \int_r \sigma_\theta r dr = E \frac{d\theta}{\theta} \int_{r_1}^{r_2} \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) r dr = E \frac{d\theta}{\theta} \left[\frac{r_2^2 - r_1^2}{2} - r_0(r_2 - r_1) \right]$$

Положительное направление момента показано на рис. 5.

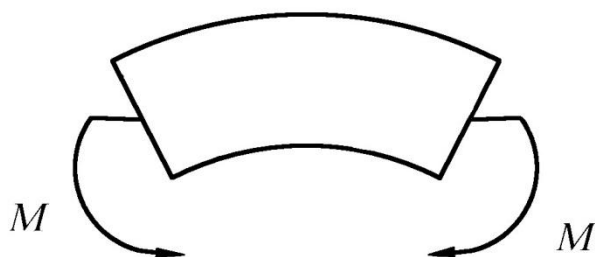


Рис. 5. Положительное направление изгибающего момента

Далее необходимо рассмотреть равновесие элемента криволинейной балки относительно оси y . Схема представлена на рисунке 6.

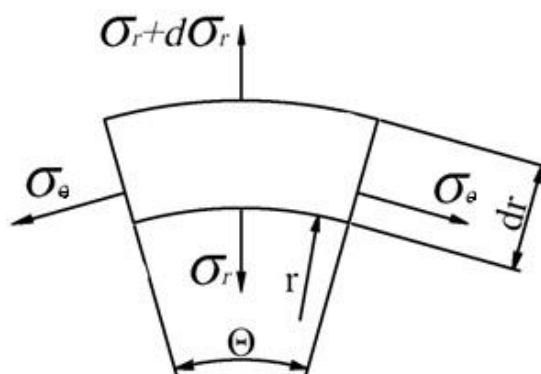


Рис. 6. Равновесие элемента балки

Поскольку элемент находится в равновесии, складывая составляющие от σ_θ , σ_r и $\sigma_r + d\sigma_r$ и пренебрегая бесконечно малыми второго порядка получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{\sigma_r}{r} + \frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{\sigma_\theta}{r}.$$

Наружная и внутренняя поверхности балки свободны от напряжений, граничные условия имеют следующий вид:

$$\sigma_r(r_1) = \sigma_r(r_2) = 0.$$

Решая уравнение, получаем следующие зависимости для раскрытия угла (аналог деформаций), радиальных и окружных напряжений:

$$\frac{d\theta}{\theta} = \frac{M}{E} \frac{1}{\frac{r_2^2 - r_1^2}{2} - \frac{(r_2 - r_1)^2}{\ln \frac{r_2}{r_1}}}$$

$$\sigma_\theta = \frac{M}{\frac{r_2^2 - r_1^2}{2} - \frac{(r_2 - r_1)^2}{\ln \frac{r_2}{r_1}}} \left(1 - \frac{r_2 - r_1}{r \ln \frac{r_2}{r_1}} \right)$$

$$\sigma_r = \frac{M}{\frac{r_2^2 - r_1^2}{2} - \frac{(r_2 - r_1)^2}{\ln \frac{r_2}{r_1}}} \frac{(r - r_1) - \frac{r_2 - r_1}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \ln \frac{r}{r_1}}{r}$$

Можно видеть, что величины напряжений определяются только изгибающим моментами и геометрическими параметрами балки. Для уменьшения действующих напряжений необходимо уменьшать кривизну элемента. В предельном случае, при кривизне стремящейся к бесконечности, получим решение для изгиба прямой балки, радиальные напряжения станут равны нулю.

Воспользуемся аналогичным подходом для криволинейной балки с переменным по толщине модулем упругости $E=E(r)$. Распределение окружных деформаций по толщине балки имеет тот же вид. Окружные напряжения имеют вид $\sigma_\theta(r) = E(r)\varepsilon_\theta(r)$.

Выражение для нейтральной линии принимает следующий вид:

$$r_0 = \frac{\int_{r_1}^{r_2} E(r) dr}{\int_{r_1}^{r_2} \frac{E(r)}{r} dr}$$

Связь изгибающего момента и окружных напряжений выражается зависимостью:

$$M = \int_r \sigma_\theta r dr = \frac{d\theta}{\theta} \int_{r_1}^{r_2} E \left(1 - \frac{r_0}{r} \right) r dr = \frac{d\theta}{\theta} \left(\int_{r_1}^{r_2} E r dr - r_0 \int_{r_1}^{r_2} E dr \right)$$

Из этого соотношения получим раскрытие угла (аналог деформации):

$$\frac{d\theta}{\theta} = \frac{M}{\int_{r_1}^{r_2} E r dr - r_0 \int_{r_1}^{r_2} E dr}$$

Распределение радиальных и окружных напряжений определяется из аналогичного дифференциального уравнения и имеет следующий вид:

$$\sigma_r = \frac{d\theta}{\theta} \frac{\int_{r_1}^r E(r) dr - r_0 \int_{r_1}^r \frac{E(r)}{r} dr}{r}$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{d\theta}{\theta} \left(1 - \frac{r_0}{r} \right) E(r)$$

В данном случае напряжения зависят не только от геометрических параметров балки, появляется зависимость и от модуля упругости $E(r)$, то есть от схемы армирования, однако эффективное уменьшение действующих напряжений возможно за счет уменьшения кривизны балки, как и в предыдущем случае.

Наибольшие значения радиальных напряжений достигаются в средней части балки.

Проверка корректности модели

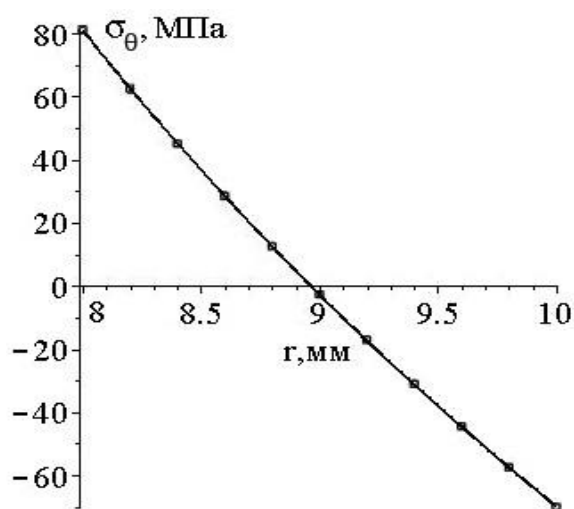
Проверка предложенной модели выполнялась при помощи конечноэлементного моделирования. Для расчёта была создана 3D модель в соответствии с рекомендациями стандарта ASTM D6415.

Для моделирования образца были выбраны следующие геометрические параметры: длина полки $L = 50\text{мм}$, толщина образца $t = 2\text{мм}$, ширина образца $w = 25\text{мм}$, внутренний радиус криволинейной части $r_i = 8\text{мм}$.

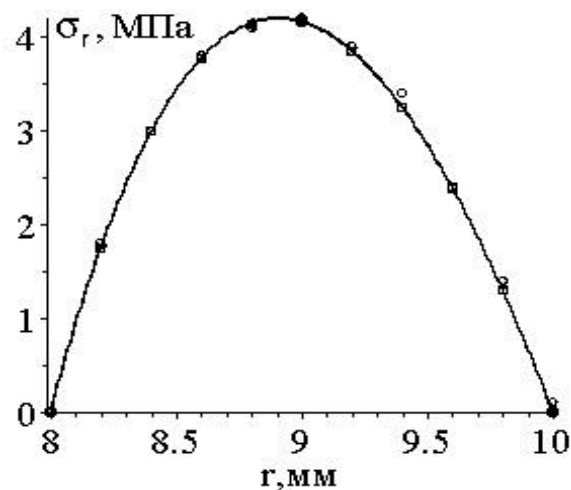
Для определения значений радиальных и окружных напряжений в радиальном переходе элемента была выбрана модель нагружения, соответствующая стандарту – четырехточечный изгиб. Кроме того, было применено условие симметрии, которое позволили считать данный элемент как имеющий бесконечную длину.

Расхождения значений, полученных при помощи конечноэлементной модели нагружения и при помощи аналитических зависимостей, составили не более 5%.

Также был выполнен расчет по формуле Лехницкого. Значения, полученные при помощи данной зависимости, совпадают со значениями, полученными с помощью предложенной модели. На рис. 7 представлены распределения окружных и радиальных напряжений, полученные аналитическим методом (линия), по формуле Лехницкого (квадратный маркер), методом конечных элементов (круглый маркер). Можно видеть хорошее соответствие между значениями, полученными при помощи предложенной модели и значениями, полученными другими методами. Это свидетельствует об отсутствии в модели грубых допущений, влияющих на точность расчетов.



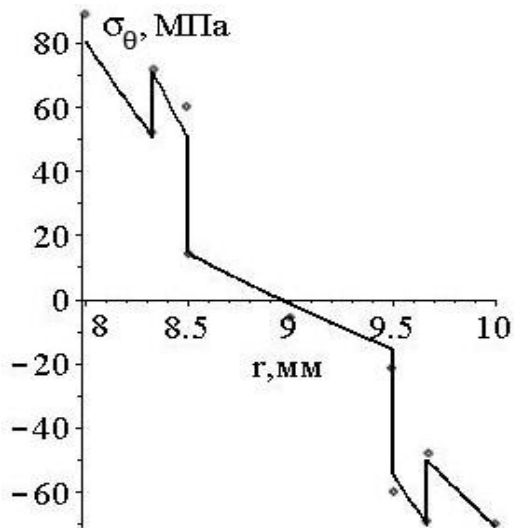
а) Окружные напряжения



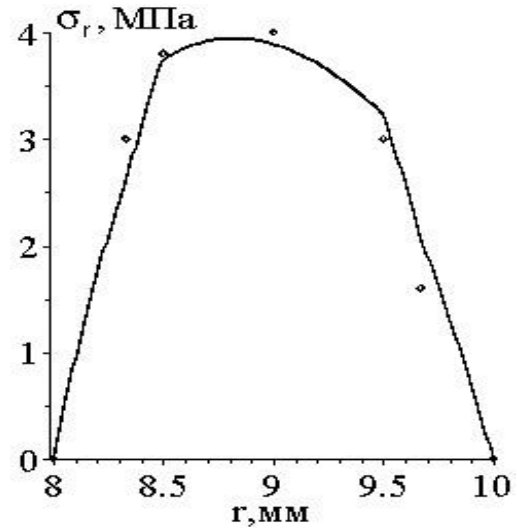
б) Радиальные напряжения

Рис. 7. Распределение напряжений по толщине балки, линией показан расчет по предложенной модели, квадратными маркерами – по формуле Лехницкого, круглыми маркерами – методом конечных элементов

Также был проведен расчет пятислойной слоистой балки. На рис 9, 10 показаны результаты расчетов, полученные аналитическим методом (линия) и методом конечных элементов (маркер).



а) Окружные напряжения



б) Радиальные напряжения

Рис. 8. Распределение напряжений по толщине балки, линией показан расчет по предложенной модели, круглыми маркерами – методом конечных элементов

По результатам расчета можно видеть удовлетворительное согласие между значениями, получаемыми при помощи аналитической зависимости, и значениями, получаемыми при помощи метода конечных элементов.

Анализ результатов расчета

Условие работоспособности можно выразить через критерий Хашина-Ротема, который при отсутствии напряжений поперек слоя и касательных напряжений примет следующий вид:

$$\left(\frac{\sigma_c}{\sigma_c^B}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_r}{\sigma_r^B}\right)^2 \leq 1$$

Можно видеть, что пока левая часть неравенства меньше единицы, конструкция работоспособна. Введем аналог коэффициента запаса для композитной конструкции:

$$k(r) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_c(r)}{\sigma_c^B}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_r(r)}{\sigma_r^B}\right)^2}}.$$

Нетрудно заметить, что при $k \geq 1$ конструкция будет работоспособной.

На рис. 9 показаны значения коэффициента запаса для различных комбинаций прочности вдоль волокон и перпендикулярно слою. Для расчета взят широко распространенный углепластик AS-4/3501-6. Его прочность вдоль волокон составляет 2560 МПа, а на разрыв перпендикулярно слою – 63 МПа [12]. Также были построены графики для модельных материалов с кратно увеличенной межслойной прочностью (рис. 11) Прочность материала вдоль волокон составляет 2560 МПа для всех расчетных примеров.

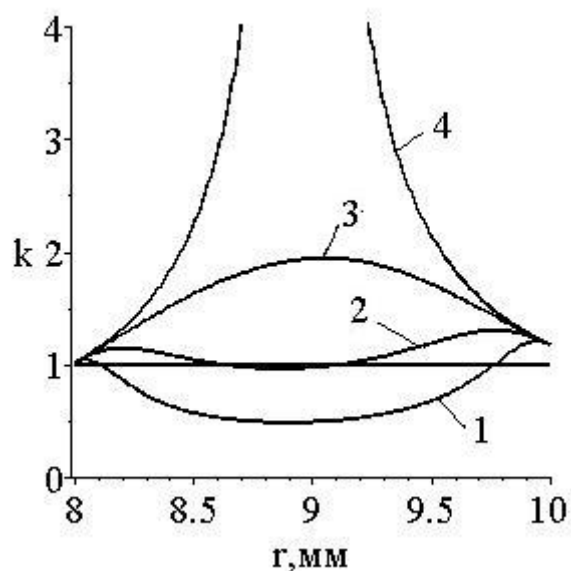


Рис. 9. Зависимость коэффициента запаса от радиальной координаты. 1 – исходный материал, прочность на разрыв перпендикулярно слою 63 МПа, 2 – прочность на разрыв перпендикулярно слою 126 МПа, 3 – прочность на разрыв перпендикулярно слою 252 МПа, 4 – изотропный материал, прочность 2560 МПа.

Из графиков видно, что для композиционного материала наиболее опасной оказывается зона в средней по толщине части. Повышение межслойной прочности приводит к тому, что опасная зона смещается к краям. Таким образом, для изотропных материалов, например металлов, наиболее опасными оказываются зоны на внутренней и наружной поверхностях балки, а для материалов с существенной анизотропией свойств, то есть для композитов, наиболее опасна зона в середине балки. Также можно видеть, что есть определенное соотношение продольной и межслойной прочностей материала, при котором зависимость коэффициента запаса наиболее близка к линейной, а конструкция по толщине наиболее близка к равнопрочной. Такое соотношение можно считать оптимальным. Для данного

примера численно определенные оптимальные значения прочности равны $\sigma_1^B = 2560$ МПа, $\sigma_3^B = 140$ МПа. Зависимость коэффициента запаса от радиальной координаты для данных значений показана на рис. 10. Для наглядности на графике также показана прямая, соединяющая крайние точки графика.

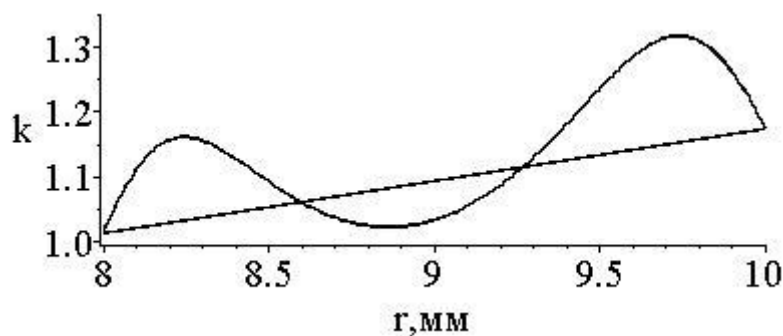


Рис. 10. Оптимальная зависимость коэффициента запаса от радиальной координаты.

Выводы

Получены соотношения для расчета радиальных и окружных напряжений криволинейной слоистой балки, позволяющие учитывать влияние геометрии балки, изгибающего момента и модуля упругости.

Показано, что для композитной балки наиболее опасной является центральная зона, в то время как для изотропных материалов наиболее опасны края

Показано, что максимальные радиальные напряжения определяются геометрическими параметрами балки. Для уменьшения значения возникающих напряжений необходимо увеличивать радиус кривизны балки. Таким образом,

можно предложить следующие способы повышения несущей способности криволинейной балки:

- Прошивка слоев
- Изменение геометрии балки
- Изменение укладки

Библиографический список

1. Арутюнов А.Г., Дыдышко Д.В., Кузнецов К.В. История развития транспортных самолетов // Труды МАИ. 2016. № 89. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=72654>
2. Byron Pipes R., Pagano N.J. Interlaminar Stresses in Composite Laminates Under Uniform Axial Extension // Journal of Composite Materials. 1970. Vol. 4, pp. 538-548.
3. Puppo A.H., Evensen H.A. Interlaminar Shear in Laminated Composites Under Generalized Plane Stress // Journal of Composite Materials. 1970. Vol. 4, pp. 204-220.
4. Wang A.S.D., Crossman F.W. Some New Results on Edge Effect in Symmetric Composite Laminates // Journal of Composite Materials. 1977. Vol. 11, pp. 92-106.
5. Pagano N., Pipes R. Some Observations on the Interlaminar Strength of Composite Laminates // International Journal of Mechanical Sciences. 1973. Vol. 15, pp. 679-688.
6. De Baere I., Van Paeppegem W., Degriek J. Comparison of Different Setups for Fatigue Testing of Thin Composite Laminates in Bending // International Journal of Fatigue. 2009. Vol. 31, pp. 1095-1101.

7. De Baere I., Van Paepegem W., Degriek J. On the Feasibility of a Three-point Bending Setup for the Validation of (Fatigue) Damage Models for Thin Composite Laminates // Polymer Composites. 2008. Vol. 29, pp. 1067-1076.
8. ASTM D6415/D6415M REV A-2006 Standard Test Method for Measuring the Curved Beam Strength of a Fiber-Reinforced Polymer-Matrix Composite. Annual Book of ASTM Standards. 2006.
9. Charkviani R.V., Pavlov, A.A., Pavlova, S.A. Interlaminar Strength and Stiffness of Layered Composite Materials // Procedia Engineering. 2015. Vol. 185, pp. 168-172.
10. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. - М.: ОГИЗ Государственное издательство технико-технической литературы, 1947. – 355 с.
11. Тимошенко С.П., Гудьер Д. Теория упругости. - М.: Наука, 1975. – 576 с.
12. Hinton M.J., Kaddour A.S., Soden P.D. Failure criteria in fibre reinforced polymer composites. The World-Wide Failure Exercise, Elsevier, 2004, 1269 p.