681.516.7

Математическая модель движения системы мягкой посадки космического аппарата

В.М. Чуркин

Описывается математическая модель пространственного движения комбинированной системы мягкой посадки (КСМП) спускаемого космического аппарата (КА), составленной из КА, парашютной системы (ПС) и тормозной двигательной установки (ТДУ). При записи уравнений движения КСМП рассматривается ее упрощенная физическая модель в виде двух твердых тел (купола ПС и КА с ТДУ), соединенных невесомыми стропами и подвесной системой. Скорость воздушной среды выражается суммой трех составляющих ветра: постоянной, турбулентной и порыва. При определении проекций главного вектора и главного момента сил тяги ТДУ считается, что тормозные двигатели расположены на кольце с центром на оси симметрии КА, а создаваемые ими силы тяги параллельны и направлены в одну сторону. Предлагаемая математическая модель может быть использована как для численного, так и аналитического исследования динамики КСМП.

Ключевые слова: парашютная система; космический аппарат; тормозная двигательная установка; порыв ветра; случайная величина; закон Релея; массовый расход топлива.

Составим математическую модель пространственного движения комбинированной системы мягкой посадки (КСМП) космического аппарата (КА), составленной из однокупольной парашютной системы (ПС) и КА, оснащенного тормозной двигательной установкой (ТДУ). Реальную КСМП заменим ее упрощенной физической моделью в виде двух твердых тел (купола ПС и КА), соединенных невесомыми стропами и подвесной системой (рис.1).

Полагая, что купол ПС имеет плоскость симметрии, а его центр масс совпадает с центром давления, запишем уравнения движения купола в проекциях на оси связанной с ним системы координат XOYZ, [1]

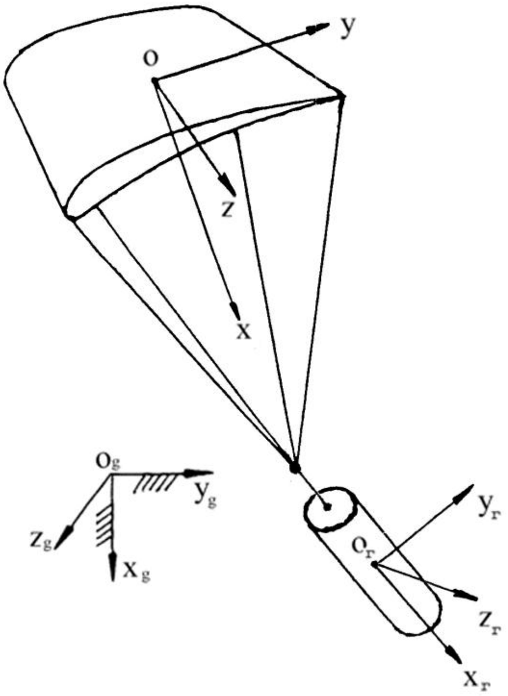

Рис. 1.

$$(m_k + \lambda_{11})\dot{V}_1 + \lambda_{12}\dot{V}_2 - (m_k y_k - \lambda_{16})\dot{\omega}_3 + (m_k + \lambda_{33})\omega_2 V_3 - (m_k + \lambda_{22})\omega_3 V_2 - \lambda_{12}\omega_3 V_1 +$$

$$+ (m_k y_k + \lambda_{34})\omega_1\omega_2 - (m_k x_k - \lambda_{35})\omega_2^2 - (m_k x_k + \lambda_{26})\omega_3^2 = - m_k g \alpha_{12} - 0.5c_{x1}\rho V_r^2 F_n + T_x +$$

$$+ \sum_{j=1}^{3} W_j \{\lambda_{12}\omega_1\alpha_{3j} - (\lambda_{11} - \lambda_{33})\omega_2\alpha_{3j} + [(\lambda_{11} - \lambda_{12})\alpha_{2j} - 2\lambda_{12}\alpha_{1j}]\omega_3\};$$

$$(m_k + \lambda_{22})\dot{V}_2 + \lambda_{12}\dot{V}_1 + (m_k x_k + \lambda_{26})\dot{\omega}_3 + (m_k + \lambda_{11})\omega_3 V_1 - (m_k + \lambda_{33})\omega_1 V_3 + \lambda_{12}\omega_3 V_2 +$$

$$+ (m_k x_k - \lambda_{35})\omega_1\omega_2 - (m_k y_k + \lambda_{34})\omega_1^2 - (m_k y_k - \lambda_{16})\omega_3^2 = - m_k g \alpha_{22} + 0.5c_{y1}\rho V_r^2 F_n + T_y +$$

$$+ \sum_{j=1}^{3} W_j \{(\lambda_{22} - \lambda_{33})\omega_1\alpha_{3j} - \lambda_{12}\omega_2\alpha_{3j} + [((\lambda_{11} - \lambda_{22})\alpha_{1j} + 2\lambda_{12}\alpha_{2j}]\omega_3\};$$

$$(m_k + \lambda_{33})\dot{V}_3 + (m_k y_k + \lambda_{34})\dot{\omega}_1 - (m_k x_k - \lambda_{35})\dot{\omega}_2 + (m_k + \lambda_{22})\omega_1 V_2 - (m_k + \lambda_{11})\omega_2 V_1 +$$

$$+\lambda_{12}(\omega_1 V_1 - \omega_2 V_2) + (m_k x_k + \lambda_{26})\,\omega_1\omega_3 + (m_k y_k - \lambda_{16})\,\omega_2\omega_3 = -m_k g\,\alpha_{32} + 0.5c_{z1}\rho\, V_r^2 F_n +$$

$$+T_z + \sum_{j=1}^{3} W_j\, \{[(\lambda_{22} - \lambda_{33})\,\alpha_{2j} + \lambda_{12}\alpha_{1j}]\,\omega_1 - [((\lambda_{11} - \lambda_{33})\,\alpha_{1j} + \lambda_{12}\alpha_{2j}]\,\omega_2\};$$

$$(J_{11} + \lambda_{44})\,\dot{\omega}_1 + (J_{12} + \lambda_{45})\,\dot{\omega}_2 + (m_k y_k + \lambda_{34})\,\dot{V}_3 + (J_{33} + \lambda_{66} - J_{22} - \lambda_{55})\,\omega_2\omega_3 -$$

$$-(J_{21} + \lambda_{45}))\,\omega_1\omega_3 + (m_k y_k + \lambda_{34})\,\omega_1 V_2 - (m_k y_k - \lambda_{16})\,\omega_2 V_1 +$$

$$+(\lambda_{26} + \lambda_{35})(\omega_2 V_2 - \omega_3 V_3) = \sum_{j=1}^{3} W_j\, \{[(\lambda_{16} + \lambda_{34})\,\alpha_{1j} + \lambda_{26}\alpha_{2j}]\,\omega_2 -$$

$$-\lambda_{34}\omega_1\alpha_{2j} - \lambda_{35}\omega_3\alpha_{3j}\} - m_k g y_k\,\alpha_{32} + 0.5m_{x1}\,\rho\, V_r^2 D_k F_n + M_x;$$

$$(J_{22} + \lambda_{55})\,\dot{\omega}_2 + (J_{12} + \lambda_{45})\,\dot{\omega}_1 - (m_k x_k - \lambda_{35})\,\dot{V}_3 + (J_{12} + \lambda_{45})\,\omega_2\omega_3 +$$

$$+(J_{11} + \lambda_{44} - J_{33} - \lambda_{66})\,\omega_1\omega_3 - (m_k x_k + \lambda_{26})\,\omega_1 V_2 - (m_k x_k - \lambda_{35})\,\omega_2 V_1 +$$

$$+(\lambda_{16} + \lambda_{34})(\omega_3 V_3 - \omega_1 V_1) = \sum_{j=1}^{3} W_j\, \{-[(\lambda_{26} + \lambda_{35})\,\alpha_{2j} + \lambda_{16}\alpha_{1j}]\,\omega_1 +$$

$$+\lambda_{35}\omega_2\alpha_{1j} + \lambda_{34}\omega_3\alpha_{3j}\} + m_k g x_k\,\alpha_{32} + 0.5m_{y1}\,\rho\, V_r^2 D_k F_n + M_z;$$

$$(J_{33} + \lambda_{66})\,\dot{\omega}_3 - (m_k y_k - \lambda_{16})\,\dot{V}_1 + (m_k x_k + \lambda_{26})\,\dot{V}_2 + (J_{12} + \lambda_{45})(\omega_1^2 - \omega_2^2) +$$

$$+(J_{22} + \lambda_{55} - J_{11} - \lambda_{44})\,\omega_1\omega_2 + (m_k x_k + \lambda_{26})\,\omega_2 V_1 - (m_k x_k - \lambda_{35})\,\omega_1 V_3 -$$

$$-(m_k y_k + \lambda_{34})\,\omega_2 V_3 + (m_k y_k - \lambda_{16})\,\omega_3 V_2 = \sum_{j=1}^{3} W_j\, \{(\lambda_{26} + \lambda_{35})\,\omega_1\,\alpha_{3j} -$$

$$-(\lambda_{16} + \lambda_{34})\,\omega_2\alpha_{3j} + (\lambda_{16}\alpha_{2j} - \lambda_{26}\alpha_{1j})\,\omega_3\} - m_k g(x_k\alpha_{22} - y_k\alpha_{12}) +$$

$$+0.5m_{z1}\,\rho\, V_r^2 D_k F_n + M_z.$$

Здесь V_i, ω_i (i = 1, 2, 3) - проекции векторов скорости центра масс купола, совмещенного с началом О, и угловой скорости вращения купола; W_j - проекции скорости воздушной среды (ветра) на высоте центра давления купола; V_r - скорость центра давления купола относительно воздушной среды; c_{x1}, c_{y1}, c_{z1}, m_{x1}, m_{y1}, m_{z1} - коэффициенты аэродинамических сил и моментов купола в осях системы XOYZ; T_x, T_y, T_z, M_x, M_y, M_z - проекции главного вектора и главного момента сил натяжения строп; m_k - масса купола; λ_{ij} (i, j = 1,...,6) - коэффициенты присоединенных масс купола, вычисленные относительно осей системы XOYZ; x_k, y_k, z_k - координаты центра масс купола; J_{ij} (i, j = 1, 2, 3) - компоненты тензора инерции купола в осях системы XOYZ; F_n, D_k - характерные площадь и линейный размер купола; ρ - плотность воздуха; α_{ij} (i, j = 1, 2, 3) – косинусы углов между осями связанной с куполом системы XOYZ и неподвижной системы $X_gOgYgZg$

$\alpha_{11} = \cos\psi\cos\vartheta$; $\alpha_{12} = \sin\vartheta$; $\alpha_{13} = -\sin\psi\cos\vartheta$;

$\alpha_{21} = -\cos\psi\sin\vartheta\cos\gamma + \sin\psi\sin\gamma$; $\alpha_{22} = \cos\gamma\cos\vartheta$;

$\alpha_{23} = \cos\psi\sin\gamma + \sin\psi\sin\vartheta\cos\gamma$; $\alpha_{31} = \cos\psi\sin\vartheta\sin\gamma + \sin\psi\cos\gamma$;

$\alpha_{32} = -\sin\gamma\cos\vartheta$; $\alpha_{33} = \cos\psi\cos\gamma - \sin\psi\sin\vartheta\sin\gamma$;

ϑ, γ, ψ - углы тангажа, крена и рысканья купола ПС.

Скорость воздушной среды (ветра) можно представить суммой

$$\overline{W}(t,x) = \overline{U}_0(x) + \overline{U}_t(t,x) + \overline{W}_t(t,x),$$

где $\overline{U}_0(\overline{x})$ - постоянная составляющая ветра

$\overline{U}_0(\overline{x}) = (u_{01}, u_{02}, u_{03})$;

$u_{01} = u_0 \cos\theta$; $u_{02} = 0$; $u_{03} = u_0 \sin\theta$; $\theta = Rav[0,2\pi]$;

$u_0 = v_0 g(\overline{x})\sqrt{-4/\pi \ln\gamma}$; $g(x) = (x_2/h_0)k$; $\gamma = Rav[0,1]$;

$\overline{x} = (x_1, x_2, x_3)$ - пространственные координаты точки поля скоростей воздушной среды;

$\overline{U}_t(t,\overline{x})$ - порыв ветра

$\overline{U}_t(t,\overline{x}) = a\,\overline{k}_a\, f(t)$;

a - амплитуда порыва; $\overline{k}_a = (k_{a1}, k_{a2}, k_{a3})$ - орты порыва; f(t) - форма порыва

$f_1(t) = \sin(wt + \phi)$; $f_2(t) = 1$, при $t_1 < t < t_2$;

Турбулентную составляющую ветра $\overline{W}_t(t,\overline{x})$ будем моделировать методом параметрических представлений случайных полей [2]

$$\overline{W} = (W_1, W_2, W_3); \quad \overline{W}_t(t, \overline{x}) = \overline{W}(\overline{x} - \overline{U}_0 t) = \overline{W}(\overline{y}),$$

где

$$W_k(y) = \sqrt{1/N} \sum_{i=1}^{N} b_k(z_i, u_i) \sin[u_i^T y + \phi], \quad k = 1,2,3;$$

$\overline{u} = (u_1, u_2, u_3)$ - вектор пространственной частоты с плотностью распределения $\psi(\overline{u})$;
$\overline{z} = (z_1, z_2, z_3)$ - векторная случайная величина с некоррелированными компонентами, распределенными по закону Релея

$$\overline{z} = k\sqrt{-\ln\gamma}; \quad \gamma = \mathrm{Rav}[0,1]; \quad k = \pm 1{,}0 \text{ с } p = 0{,}5;$$

$$b_k(z_i, u_i) = \sqrt{E(\overline{u})/[4\pi u^2}\,\psi(\overline{u})] \sum_{j=1}^{k} z_k a_{kj}(\overline{u});$$

a_{kj} - элементы матрицы $A_s(\overline{u}) = [a_{kj}(\overline{u})]$, определяемые соотношениями

$$A_s(\overline{u}) = \begin{pmatrix} k_u & 0 & 0 \\ -\dfrac{u_1 u_2}{k_u u^2} & \dfrac{\mathrm{sign}(u_3) u_3}{k_u u} & 0 \\ -\dfrac{u_1 u_3}{k_u u^2} & -\dfrac{\mathrm{sign}(u_3) u_3}{k_u u} & 0 \end{pmatrix}; \qquad k_u = \sqrt{1 - u_1^2/u^2}\ .$$

Функция $E(\overline{u})$ задает распределение кинетической энергии турбулентности по модулю пространственной частоты $\overline{u}$. При

$$\psi(\overline{u}) = \frac{E(\overline{u})}{4c\pi u^2}\ ,$$

из условий

$$\psi(\bar{u}) > 0; \quad \int\limits_{R3} \psi(\bar{u}) d\bar{u} = 1,$$

следует, что нормирующая константа $c = 1{,}5\,\sigma_w^2$.

Методом обратной функции находим

$$\mathrm{abs}\,\bar{u} = \frac{1}{L_w}\sqrt{\chi_1^2/\chi_5^2}\,; \quad \bar{u} = (\mathrm{abs}\,\bar{u})\,\bar{e},$$

где χ_n^2 - случайная величина с распределением χ^2 и n степенями свободы; $\bar{e}$ - вектор, изотропный в R_3.

Уравнения движения КА записываем в проекциях на связанные с ним оси системы $X_г O_г Y_г Z_г$. Полагая, что центр масс и центр давления КА совмещены с началом $O_г$, имеем

$$m_г\,\dot{V}_{г1} + m_г(\omega_{г2}V_{г3} - \omega_{г3}V_{г2}) = -\,m_г\,g\,\beta_{12} - 0.5\,c_{xг}\,\rho V_{г\,г}^2 S + T_{гx} + T_{дx};$$

$$m_г\,\dot{V}_{г2} + m_г(\omega_{г3}V_{г1} - \omega_{г1}V_{г3}) = -\,m_г\,g\,\beta_{22} + 0.5\,c_{yг}\,\rho V_{г\,г}^2 S + T_{гy} + T_{дy};$$

$$m_г\,\dot{V}_{г3} + m_г(\omega_{г1}V_{г2} - \omega_{г2}V_{г1}) = -\,m_г\,g\,\beta_{32} + 0.5\,c_{zг}\,\rho V_{г\,г}^2 S + T_{гz} + T_{дz};$$

$$J_{11}^г\dot{\omega}_{г1} + J_{12}^г\dot{\omega}_{г2} + J_{13}^г\dot{\omega}_{г3} + \omega_{г2}(J_{13}^г\omega_{г1} + J_{23}^г\omega_{г2} + J_{33}^г) - \omega_{г3}(J_{12}^г\omega_{г1} + J_{22}^г\omega_{г2} + J_{32}^г\omega_{г3}) =$$

$$= 0.5\,m_{xг}\,\rho V_{г\,г}^2 SL + M_{гx} + M_{дx};$$

$$J_{12}^г\dot{\omega}_{г1} + J_{22}^г\dot{\omega}_{г2} + J_{32}^г\dot{\omega}_{г3} + \omega_{г3}(J_{11}^г\omega_{г1} + J_{21}^г\omega_{г2} + J_{31}^г\omega_{г3}) - \omega_{г1}(J_{13}^г\omega_{г1} + J_{23}^г\omega_{г2} + J_{33}^г\omega_{г3}) =$$

$$= 0.5\,m_{yг}\,\rho V_{г\,г}^2 SL + M_{гy} + M_{дy};$$

$$J_{13}^г\dot{\omega}_{г1} + J_{23}^г\dot{\omega}_{г2} + J_{33}^г\dot{\omega}_{г3} + \omega_{г1}(J_{12}^г\omega_{г1} + J_{22}^г\omega_{г2} + J_{23}^г\omega_{г3}) - \omega_{г2}(J_{11}^г\omega_{г1} + J_{12}^г\omega_{г2} + J_{13}^г\omega_{г3}) =$$

$$= 0.5\,m_{zг}\,\rho V_{г\,г}^2 SL + M_{гz} + M_{дz}.$$

Здесь $V_{гi}$ (i = 1,2,3) - проекции вектора скорости центра масс КА; $\omega_{гi}$ (i = 1, 2, 3) - проекции вектора угловой скорости вращения КА; $V_{гг}$ - скорость центра давления КА; $m_г$ - масса КА; $J^{г}_{ij}$(i, j = 1, 2, 3) - компоненты тензора инерции КА в осях системы $X_гO_гY_г Z_г$; S, L - характерные площадь и линейный размер КА; $c_{xг}$, $c_{yг}$, $c_{zг}$, $m_{xг}$, $m_{yг}$, $m_{zг}$ - коэффициенты аэродинамических сил и моментов КА в осях системы $X_гO_гY_гZ_г$; $V_{г\,г}$- скорость центра масс КА относительно воздушного потока; $T_{гх}$, $T_{гу}$, $T_{гz}$, $M_{гх}$, $M_{гу}$, $M_{гz}$ - проекции главного вектора и главного момента сил, действующих со стороны звеньев подвесной системы на КА; $T_{дх}$, $T_{ду}$, $T_{дz}$, $M_{дх}$, $M_{ду}$, $M_{дz}$ - проекции главного вектора и главного момента сил тяги ТДУ; β_{i2} (i = 1, 2, 3) – косинусы углов между осями системы координат $X_гO_гY_г Z_г$, связанной с КА и неподвижной системы $X_gOgYgZg$

$$\beta_{12} = \sin\vartheta_г\,; \quad \beta_{22} = \cos\gamma_г \cos\vartheta_г\,; \; \beta_{32} = -\sin\gamma_г \cos\vartheta_г\,;$$

$\vartheta_г, \gamma_г$ - углы тангажа и крена КА.

Поскольку масса $m_г$ включает не только массу собственно КА, но и массу ТДУ, на этапах работы ТДУ масса $m_г$ считается функцией времени. Изменение массы КА учитываем следующим равенством

$$m_г = m_0 - \int_{t_0}^{t} \mu dt\,;$$

где $m_0 = m_{00} + m_{т0}$;

m_{00} - масса КА без топлива; $m_{т0}$ - начальный запас массы топлива; μ - секундный массовый расход топлива

$\mu = \dot{m}$;

t_0 - момент времени включения ТДУ.

В процессе выгорания топлива происходят изменения положения центра масс и моментов инерции КА, которые можно описать выражениями

$$m_г l_c = m_0 x_{c0} - x_{ст} \int_{t_0}^{t} \mu dt\,; \qquad x_{c0} = l_c(t_0); \qquad m_0 x_{c0} = m_{00} x_{c00} + m_{т0} x_{ст}\,;$$

$$J_x = J_{x0} + J_{xт}\,; \quad J_{xт} = m_т r^2\,; \quad m_т = m_{т0} - \int_{t_0}^{t} \mu dt\,;$$

$$J_y = J_{y0} + J_{y\text{т}}; \quad J_{y\text{т}} = m_\text{т}\left(x_{c\text{т}}^2 + r^2/2\right); \quad J_z = J_{z0} + J_{z\text{т}}; \quad J_{z\text{т}} = m_\text{т}\left(x_{c\text{т}}^2 + r^2/2\right).$$

Здесь x_{c00} - координата центра масс КА без топлива; $x_{c\text{т}}$ - координата центра масс топлива; l_c - координата центра масс КА; J_{x0} - момент инерции КА без топлива; $J_{x\text{т}}$ - момент инерции топлива; r - радиус кольца, на котором распределена масса топлива. Изменение центробежных моментов инерции при выбранной модели распределения массы топлива по кольцу не происходит.

При вычислении проекций главного вектора и главного момента сил тяги ТДУ предположим, что тормозные двигатели расположены на кольце с центром на оси $O_\text{г}X_\text{г}$ и создаваемые ими тяги параллельны и направлены в одну сторону. В этом случае реактивные силы имеют равнодействующую, проходящую через центр параллельных сил. При одинаковых двигателях и симметричном их расположении относительно оси $O_\text{г}X_\text{г}$ центр параллельных сил имеет координаты $(x_p,\ 0,\ 0)$. Если управление торможением заключается в изменении величины тяги и повороте осей ТДУ в одну и ту же сторону на один и тот же угол вокруг параллельных осей, то силы тяги ТДУ и их моменты относительно осей связанной системы определяются по формулам

$$T_{\text{д}x} = -u_\text{г}\mu\cos\delta\cos\chi; \quad T_{\text{д}y} = -u_\text{г}\mu\cos\delta\sin\chi; \quad T_{\text{д}z} = -u_\text{г}\mu\sin\delta;$$

$$M_{\text{д}x} = 0; \quad M_{\text{д}y} = -x_p T_{\text{д}x}; \quad M_{\text{д}z} = x_p T_{\text{д}y},$$

где $u_\text{г}$ – модуль относительной скорости отделяющихся частиц топлива; δ - угол между относительной скоростью центра масс отделяющихся частиц и плоскостью $X_\text{г}O_\text{г}Y_\text{г}$; χ - угол между проекцией вектора относительной скорости $\vec{u}_\text{г}$ на плоскость $X_\text{г}O_\text{г}Y_\text{г}$ и осью $O_\text{г}X_\text{г}$.

Выражения, определяющие проекции главных векторов и главных моментов сил натяжения строп и сил, действующих со стороны звеньев подвесной системы на КА, а также равенства, связывающие кинематические параметры движения и углового положения купола и КА, записываются при задании конструктивной схемы подвесной системы КА.

Библиографический список.

1. Рысев О.В., Вишняк А.А., Чуркин В.М., Юрцев Ю.Н. Динамика связанных тел в задачах движения парашютных систем. – М.: Машиностроение, 1992 – 288 с.

2. Шалыгин А.С., Палагин Ю.И. Прикладные методы статистического моделирования. - Л.: Машиностроение, 1986 – 320 с.

Сведения об авторе.

Чуркин Валерий Михайлович; профессор Московского авиационного института (национального исследовательского университета), д.ф.-м.н., тел.: (499) 158-45-84 ; 613-30-13.; e-mail: churandr@mail.ru