

Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения
высшего профессионального образования
Московский авиационный институт
«национальный исследовательский университет»

На правах рукописи



Мин Тейн

ОПТИМИЗАЦИЯ ТРАЕКТОРИЙ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ С
ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЭВОЛЮЦИОННОЙ СТРАТЕГИИ С АДАПТАЦИЕЙ
КОВАРИАЦИОННОЙ МАТРИЦЫ

Специальность 05.07.09

Динамика, баллистика, управление движением летательных аппаратов

Диссертация

на соискание ученой степени доктора технических наук

Научный консультант:

д.т.н., проф. Константинов М.С.

Москва – 2018

Оглавление

Введение.....	6
1 МЕТОД ЭВОЛЮЦИОННОЙ СТРАТЕГИИ С АДАПТАЦИЕЙ КОВАРИАЦИОННОЙ МАТРИЦЫ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ.....	11
1.1 Общие положения задачи оптимального управления КА с ЭРДУ	13
1.2 Формулировка задачи оптимального управления КА с ЭРДУ	14
1.3 Краевая задача и условия трансверсальности	18
1.4 Непрямой метод с использованием СМА-ES	20
1.5 Метод эволюционной стратегии с адаптацией ковариационной матрицы (СМА-ES).....	21
1.6 Анализ эффективности методов решения краевой задачи на примере оптимизации межпланетного перелета к Марсу КА с ЭРДУ	50
1.6.1 Оптимизация траектории гелиоцентрического перелета орбита Земли – орбита Марса КА с идеально-регулируемой ЭРДУ.....	50
1.6.2 Оптимизация траектории гелиоцентрического перелета орбита Земли – орбита Марса КА с нерегулируемой ЭРДУ.....	67
Заключение по главе.....	78
2 ОПТИМИЗАЦИЯ МНОГОВИТКОВЫХ МЕЖОРБИТАЛЬНЫХ ПЕРЕЛЕТОВ КА С ЭРДУ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ МЕТОДА ЭВОЛЮЦИОННОЙ СТРАТЕГИИ С АДАПТАЦИЕЙ КОВАРИАЦИОННОЙ МАТРИЦЫ.....	80
2.1 Математическая модель, описывающая движение КА с ЭРДУ на траектории межорбитального перелета.....	81
2.2 Оптимальное управление.....	83
2.3 Краевая задача.....	84
2.4 Гибридный метод, объединяющий метод Левенберга - Марквардта с модифицированным методом Ньютона	86
2.5 Метод эволюционной стратегии с адаптацией ковариационной матрицы	89
2.6 Численные результаты и их сравнение с результатами, полученными другими авторами	90
2.6.1 Пример задачи перелета между некомпланарными орбитами за минимальное время.....	90
2.6.2 Второй пример задачи перелета между некомпланарными орбитами за минимальное время.....	92

2.6.3	Пример задачи перелета между компланарными эллиптическими орбитами за минимальное время (Оптимальный разворот линии апсид)	93
2.6.4	Пример задачи оптимального некопланарного перелета с круговой орбиты на ГСО за минимальное время (сравнение С и Е решений)	95
2.6.5	Пример задачи оптимального некопланарного перелета между эллиптической и круговой орбитами при фиксированном времени перелета	96
2.6.6	Пример задачи оптимизации траектории выведения КА на геостационарную орбиту для транспортной системы с удельным импульсом двигателя 600-900 с	98
	Заключение по главе.....	98
3	ОПТИМИЗАЦИЯ ТРАЕКТОРИЙ ПРЯМЫХ ГЕЛИОЦЕНТРИЧЕСКИХ ПЕРЕЛЕТОВ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С МАЛОЙ ТЯГОЙ ПРИ ПОМОЩИ МЕТОДА ЭВОЛЮЦИОННОЙ СТРАТЕГИИ С АДАПТАЦИЕЙ КОВАРИАЦИОННОЙ МАТРИЦЫ.....	107
3.1	Общая идея развития подхода к оптимизации траекторий КА	108
3.2	Математическая модель для анализа и оптимизации траектории гелиоцентрического перелета КА с ЭРДУ	109
3.3	Численные результаты, их анализ и сравнение.....	110
3.3.1	Оптимизация траекторий к Марсу для КА с малой тягой	110
3.3.2	Оптимизация траектории полета к Юпитеру для КА с ЯЭРДУ.....	117
3.3.3	Анализ характеристик оптимальной траектории прямого перелета на геоцентрическую орбиту с низким перигелием и большим наклоном.....	128
	Заключение по главе.....	139
4	ОПТИМИЗАЦИЯ СЛОЖНЫХ СХЕМ МЕЖПЛАНЕТНЫХ ПЕРЕЛЕТОВ ТРАНСПОРТНЫХ СИСТЕМ С ХИМИЧЕСКИМИ РАЗГОННЫМИ БЛОКАМИ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ МЕТОДА ЭВОЛЮЦИОННОЙ СТРАТЕГИИ С АДАПТАЦИЕЙ КОВАРИАЦИОННОЙ МАТРИЦЫ.....	141
4.1	Постановка задачи оптимизации сложной схемы межпланетного перелета.....	141
4.2	Формулировка задачи оптимизации сложной схемы межпланетного перелета как задачи поиска безусловного экстремума.....	144
4.3	Анализ единичного гелиоцентрического перелета «планета – планета» при оптимизации сложной схемы межпланетного перелета как задачи поиска безусловного экстремума.....	144
4.4	Метод оптимизации сложной схемы межпланетного перелета, как задачи поиска безусловного экстремума.....	151

4.5 Анализ сложных схем полета к Юпитеру с гравитационными маневрами у Земли, Венеры и Марса для КА с химическими ракетными двигателями.....	163
4.5.1 Анализ маршрута Земля – Земля – Юпитер.....	164
4.5.2 Анализ маршрута Земля - Марс - Земля - Юпитер.....	167
4.5.3 Анализ маршрута Земля – Венера – Земля - Марс - Земля - Юпитер	170
4.5.4 Анализ маршрута Земля – Венера – Земля - Земля - Юпитер.....	173
4.5.5 Сравнительный анализ рассмотренных вариантов маршрутов к Юпитеру.....	177
4.5.6 Проектно-баллистический анализ рассмотренных вариантов маршрутов к Юпитеру	178
4.6 Анализ сложных схем полета к Сатурну с гравитационными маневрами у Земли, Венеры и Юпитера для КА с химическими ракетными двигателями.....	179
4.6.1 Анализ маршрута Земля – Юпитер – Сатурн.....	180
4.6.2 Анализ маршрута Земля – Земля – Юпитер – Сатурн.....	182
4.6.3 Анализ маршрута Земля – Венера – Венера – Земля – Юпитер – Сатурн (дата старта-2018г).....	184
4.6.4 Анализ маршрута Земля – Венера – Венера – Земля – Юпитер – Сатурн (дата старта-2039г).....	186
4.7 Анализ сложных схем полета к Плутону с гравитационными маневрами у Земли, Венеры, Юпитера и Сатурна для КА с химическими ракетными двигателями.....	188
4.8 Анализ схемы полета к астероиду TV135 с гравитационными маневрами у Земли для КА с химическими ракетными двигателями	191
Заключение по главе.....	193
5 КВАЗИОПТИМИЗАЦИЯ ТРАЕКТОРИИ СЛОЖНЫХ МЕЖПЛАНЕТНЫХ ПОЛЕТОВ КА С МАЛОЙ ТЯГОЙ ПРИ ПОМОЩИ МЕТОДА ЭВОЛЮЦИОННОЙ СТРАТЕГИИ С АДАПТАЦИЕЙ КОВАРИАЦИОННОЙ МАТРИЦЫ.....	195
5.1 Математическая модель для анализа траектории перелета КА с ЭРДУ	195
5.2 Формулировка задачи оптимизации траектории КА с ЭРДУ при использовании гравитационных маневров у промежуточных планет.....	197
5.3 Формулировка вспомогательной задачи и использование её для оптимизации траектории перелета КА с ЭРДУ.....	201

5.4 Квазиоптимальная траектория КА с ЭРДУ по маршруту Земля – Земля – Венера – Земля – Земля – Юпитер.....	206
5.5 Квазиоптимальная траектория выведения КА на систему гелиоцентрических орбит	212
5.5.1 Траектория Земля – Земля – Венера для выведения КА на первую рабочую орбиту	214
5.5.2 Траектория Земля – Земля – Венера – Земля – Венера для выведения КА на первую рабочую орбиту.....	217
Заключение по главе.....	223
6 ОПТИМИЗАЦИЯ МЕЖПЛАНЕТНЫХ ТРАЕКТОРИЙ КА С МАЛОЙ ТЯГОЙ И ГРАВИТАЦИОННЫМИ МАНЕВРАМИ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ МЕТОДА ЭВОЛЮЦИОННОЙ СТРАТЕГИИ С АДАПТАЦИЕЙ КОВАРИАЦИОННОЙ МАТРИЦЫ.....	225
6.1 Постановка задачи	225
6.2 Математическая модель для анализа траектории перелета КА с ЭРДУ	227
6.3 Этапы предлагаемого метода решения оптимизационной задачи	227
6.3.1 Первый этап. Вспомогательная задача. Оптимизация маршрута импульсного перелета с цепочкой гравитационных маневров	227
6.3.2 Второй этап. Оптимизация перелета КА с ЭРДУ по выбранному из решения вспомогательной задачи маршруту с характерными датами, полученными при решении вспомогательной задачи	229
6.3.3 Третий этап. Сквозная оптимизация траектории перелета КА с ЭРДУ по выбранному маршруту с оптимизацией характерных дат маршрута	231
6.4 Анализ межпланетного перелета к Юпитеру	231
6.5 Решение вспомогательной задачи.....	231
Заключение по главе.....	239
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	241
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	246
СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ И ОБОЗНАЧЕНИЙ	263

ВВЕДЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена разработке методов оптимизации траекторий межорбитального перелета в окрестности одного гравитирующего тела (прежде всего, Земли) и траекторий межпланетного перелета. Основное внимание уделяется оптимизации траекторий перелетов, в которых используются не только традиционные химические двигательные установки, но и перспективные электроракетные двигательные установки. Исследуются и оптимизируются, как траектории перелета с относительно простой схемой (например, прямой перелет к некоторому небесному телу), так сложные многомаршрутные траектории перелета (например, траектории межпланетного перелета с последовательностью гравитационных маневров).

Актуальность представляемой работы определяется:

- целесообразностью повышения эффективности выполнения транспортных космических маневров с использованием электроракетных двигательных установок благодаря их высокому удельному импульсу;
- необходимостью разработки математических моделей, описывающих оптимальные траектории космических аппаратов (КА) с электроракетной двигательной установкой (ЭРДУ) при использовании сложной схемы межорбитальных и межпланетных перелетов;
- необходимостью совершенствования методов оптимизации космических маневров, разработки алгоритмов, обеспечивающих сходимость тех итерационных процедур, без которых не обходится ни один поиск оптимальной траектории космического перелета;
- необходимостью развивать подходы, позволяющие надеяться на получение глобальной, а не локальной экстремали при траекторной оптимизации в механике космического полета. При оптимизации траекторий межорбитального и межпланетного перелета существует несколько (иногда очень много) экстремалей. Оптимальное решение соответствует глобальной экстремали. В настоящее время успехи в разработке методов поиска глобальной экстремали (глобального экстремума) очень скромны. В настоящей работе предпринимается попытка продвижения в этом направлении.

Основными целями диссертационной работы являются:

- повышение эффективности космических транспортных систем с ЭРДУ при реализации межорбитальных и межпланетных перелетов;

- совершенствование методических основ механики космического полета с малой тягой; совершенствование методов проектирования траекторий КА с малой тягой.

Достижение сформулированных целей потребовало решения следующих **научно-технических задач**:

- Разработка универсальной методики для решения краевой задачи принципа максимума Л. С. Понтрягина (ПМП), основанной на применении нового численного метода безусловной оптимизации (СМА-ES), относящегося к группе метаэвристических методов и представляющего собой некоторую специфическую модификацию алгоритма эволюционной стратегии.
- Разработка универсальной методики оптимизации сложных схем межпланетного перелета КА с использованием гравитационных маневров у промежуточных планет и дополнительных импульсов скорости на гелиоцентрических участках перелета. Реализация рассматриваемой методики основана на применении новых численных методов глобальной оптимизации.

Метод проведения исследования – расчетно-теоретический. Основным подходом при решении задач траекторной оптимизации КА с электроракетной двигательной установкой является использование непрямого метода - ПМП Л.С. Понтрягина. При этом задача оптимального управления сводится к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Решение краевой задачи сводится к численному решению системы нелинейных уравнений. Для решения этой системы рассматривается задача безусловной минимизации скалярной функции нескольких переменных, выражающей сумму квадратов невязок для рассматриваемой краевой задачи. Эта функция принимает только неотрицательные значения, ее нижняя грань равна нулю, причем она достижима только на тех значениях переменных, которые удовлетворяют системе нелинейных уравнений. Для минимизации этой функции используется численный метод эволюционной стратегии (Evolution Strategy) с адаптацией ковариационной матрицы (Covariance Matrix Adaptation). Для исследования и анализа оптимальных программ управления тяги ЭРДУ используется численное моделирование. При оптимизации траекторий межпланетных перелетов используется метод грависфер нулевой протяженности.

Объектом исследования являются траектории движения космического аппарата с электроракетной (малой тяги) или химической (большой тяги) двигательной установкой.

Предметом исследования являются методы оптимизации траекторий движения космических аппаратов, оснащенных электроракетными или химическими двигательными

установками при рассмотрении различных схем межпланетных или межорбитальных перелетов.

Научная новизна полученных в работе результатов заключается в следующем:

- Сформирована методическая база для решения задачи оптимального управления движением КА с ЭРДУ с помощью совместного использования условий оптимальности принципа максимума и численного метода оптимизации, представляющего собой эволюционную стратегию с адаптацией ковариационной матрицы.
- Разработан устойчивый и регулярный с вычислительной точки зрения метод оптимизации многовитковых межорбитальных перелетов КА с ЭРДУ между некомпланарными орбитами не только при рассмотрении задачи оптимального быстрогодействия, но и для задачи минимизации затрат топлива при фиксированном времени перелета, основанный на совместном использовании условий оптимальности непрямого метода и эволюционной стратегии с адаптацией ковариационной матрицы.
- Разработан устойчивый и регулярный метод решения задач траекторной оптимизации при рассмотрении прямых гелиоцентрических перелетов КА с идеально-регулируемой ЭРДУ и для КА с нерегулируемым двигателем на основе совместного использования необходимых условий оптимальности ПМП, и численного алгоритма эволюционной стратегии с адаптацией ковариационной матрицы.
- Предложен подход к оптимизации траекторий КА с ЭРДУ, идея которого состоит в том, чтобы свести задачу оптимизации (в том числе краевую задачу ПМП) к задаче безусловного минимума вспомогательной функции, состоящей из суммы квадратов невязок краевой задачи ПМП и оптимизируемого критерия, взятого с весовым коэффициентом для получения глобального оптимума.
- Разработаны и описаны алгоритмы анализа и оптимизации сложных схем межпланетного перелета КА к небесным телам Солнечной системы с использованием гравитационных маневров у промежуточных планет и дополнительных импульсов скорости на гелиоцентрических участках перелета с использованием метода эволюционной стратегии с адаптацией ковариационной матрицы.
- Разработан трехступенчатый метод решения сквозной задачи оптимизации для сложных траекторий перелета КА с ЭРДУ с совместным использованием полного набора условий оптимальности ПМП и метода эволюционной стратегии с адаптацией ковариационной матрицы.

Практическая значимость работы заключается в следующем:

- Разработаны новый методический подход для решения задач оптимизации траекторий межорбитальных и межпланетных перелетов КА с ЭРДУ.
- Разработана методика проектирования сложных схем межпланетного перелета КА к небесным телам Солнечной системы с использованием гравитационных маневров у промежуточных планет и дополнительных импульсов скорости на гелиоцентрических участках перелета.
- С использованием разработанных методов и программного обеспечения можно проводить проектно-баллистический анализ ряда перспективных космических миссии в том числе:
 - ✓ выведение КА с низкой околоземной орбиты на ГСО с использованием космической транспортной системы на базе РН, ХРБ и ЭРДУ;
 - ✓ выведение КА на систему рабочих гелиоцентрических орбит для исследования Солнца;
 - ✓ выведение КА на орбиту около планеты назначения для исследования этой планеты или его спутников.
- Разработанные методы могут быть использованы при разработке программных продуктов, обеспечивающих решение широкого круга задач для анализа перспективных космических транспортных средств.

Достоверность полученных результатов: Достоверность полученных результатов подтверждается сравнением с результатами, опубликованными другими авторами, в том числе российскими, американскими и европейскими исследователями.

Реализация результатов работы. Полученные теоретические, методические и практические результаты использовались на кафедрах 601 и 202, и в НИИ ПМЭ МАИ.

На защиту выносятся:

- Комплекс методов оптимизации межорбитальных и межпланетных траекторий КА с ЭРДУ на основе совместного применения условий оптимальности ПМП и численного алгоритма эволюционной стратегии с адаптацией ковариационной матрицы.
- Результаты анализа свойств оптимальных траекторий межорбитальных и прямых межпланетных перелетов КА с ЭРДУ.
- Результаты анализа оптимизации сложных схем межпланетного перелета КА с использованием гравитационных маневров у промежуточных планет и дополнительных импульсов скорости на гелиоцентрических участках перелета.

- Результаты анализа оптимизации прямых и сложных схем выведения КА с ЭРДУ на систему рабочих гелиоцентрических орбит.
- Результаты оптимизации сложных схем межпланетного перелета КА к Юпитеру.

Апробация работы проведена на международных и российских конференциях, включая конгрессы международной астронавтической федерации (2012; 2014; 2015), международный симпозиум по программному обеспечению и методам астродинамики (6th ICATT, Дармштадт, Германию, 2014), международную научную конференцию «Системный анализ, управление и навигация» (Евпатория, Украина, 2012), международный симпозиум по глобальной оптимизации траекторий (Рим, Италия, 2014), 13-ую конференцию по новым проблемам космоса (the 13th Reinventing Space Conference. Oxford, UK, 2015), международные конференции «Авиация и Космонавтика» (Москва, 2011; 2013; 2014; 2017), IX конференцию молодых ученых, посвященную дню космонавтики «Фундаментальные и прикладные космические исследования» (Москва, ИКИ РАН, 2012), конференцию «Управление в технических, эргатических, организационных и сетевых системах» УТЭОСС-2012, (Спб. Петербург, 2012), научные чтения, посвященные разработке творческого наследия К.Э. Циолковского (Калуга, 2009; 2011; 2012; 2013; 2014; 2015; 2016), объединенные Научные Чтения по космонавтике (Москва, 2010; 2012; 2013; 2014; 2015; 2016; 2018). Результаты работы представлялись на семинарах механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова, кафедры 601 МАИ и НИИ ПМЭ МАИ.

Личный вклад и публикации. Все результаты, приведенные в диссертации, получены лично автором. Основные результаты опубликованы в 46 работах, из которых одна монография [49], 10 [33-40,46,48] – в изданиях из списка ВАК Минобрнауки России и 7 [160-162, 164-167,] – в иностранных рецензируемых изданиях.

Структура и объем работы. Работа состоит из введения, шести глав, заключения и списка использованных источников. Диссертация содержит 265 страниц, 117 рисунков, 60 таблиц. Список использованных источников содержит 216 наименований.

1 МЕТОД ЭВОЛЮЦИОННОЙ СТРАТЕГИИ С АДАПТАЦИЕЙ КОВАРИАЦИОННОЙ МАТРИЦЫ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

В настоящей главе предлагается непрямой метод, основанный на совместном использовании необходимых условий оптимальности [7] и эволюционной стратегии с адаптацией ковариационной матрицы (СМА-ES) [129-133,218,219]. Эта методология обходит трудности нахождения хорошего первого приближения для решения задачи оптимального управления итерационными методами, когда, например, задача сводится к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Среди различных доступных стохастических методов алгоритм СМА-ES предпочтителен из-за его простоты и недавно полученных обнадеживающих результатов, о которых сообщается в научной литературе. В работе решены различные задачи оптимизации траектории КА с малой тягой и показана эффективность алгоритма для решения задач оптимального управления с использованием СМА-ES .

Классические методы численной оптимизации обычно подразделяются на:

непрямые методы, основанные на применении необходимых условий оптимальности (т. е. ПМП Понтрягина и уравнений Эйлера-Лагранжа), возникающих из вариационного исчисления;

прямые методы, основанные на преобразовании задачи оптимизации в задачу нелинейного программирования (часто включающую большое количество оптимизируемых параметров) без использования необходимых условий оптимальности;

гибридные методы, которые объединяют прямые и непрямые методы обычно путем замены некоторых сложных условий, которые возникают из вариационного исчисления, на некоторые упрощенные соотношения.

Эти три типа методов относятся к классу так называемых детерминированных методов. В связи с их теоретическими основаниями прямые и непрямые алгоритмы имеют определенные особенности. В целом прямые методы надежнее непрямых методов, потому что они способны регулярно сходиться к желаемому результату часто даже с плохим первым приближением. С другой стороны, непрямые методы являются численно более точными и не требуют какой-либо параметризации величин, изменяющихся во времени и связанных с интересующей нас проблемой. Как прямые, так и непрямые алгоритмы являются относительно быстрыми и точными, обеспечивая оптимальное решение, если предоставляется хорошее первое приближение. Но реализация детерминированных методов обычно требует значительных усилий по программированию – как для

определения основных подпрограмм, так и для разработки общей архитектуры алгоритма. Однако две неотъемлемые особенности детерминированных подходов представляют собой их основные ограничения – это (а) потребность хорошего первого приближения и (б) локальность результатов оптимизации. Фактически как прямые, так и непрямые методы являются локальными по своей сути, поэтому оптимальное решение, получение которого они могут обеспечить, зависит от выбранного первого приближения.

Эти обстоятельства мотивировали разработку стохастических методов оптимизации по аналогии с природными явлениями. Стохастические методы используют понятие популяции особей, выявляя различные возможные решения задачи. Первоначальная популяция генерируется случайным образом, поэтому не требуется сразу задавать ее в начале итерационного процесса при поиске решения. Оптимальное решение получается путем выборки и рекомбинации. Самым популярным классом этих методов являются генетические алгоритмы, которые моделируют эволюцию популяции особей, основанную на принципе Дарвина о выживаемости наиболее приспособленных популяций. Применение стохастических алгоритмов к задачам оптимального управления требует их предварительного преобразования в задачи параметрической оптимизации, если это возможно, при умеренном числе неизвестных параметров. Фактически по мере увеличения размерности набора параметров число анализируемых популяций должно увеличиваться, чтобы получить удовлетворительную сходимость. Основным недостатком использования стохастических подходов является то, что нет гарантии получения оптимального решения и не существует аналитических доказательств об их сходимости даже к локально минимизирующему решению. Эффективность стохастических подходов, компенсирующая эти недостатки, основана на вероятности сближения с глобально минимизирующими решениями для разных задач.

В работе описывается и применяется общая методология оптимизации, основанная на совместном использовании необходимых условий оптимальности и стохастической методики (точнее, алгоритм CMA-ES). В частности, необходимые условия оптимальности используются для выражения управляющих переменных как функций сопряженных переменных, которые подчиняются фазовым элементам. В результате параметры для задачи оптимального управления достаточно уменьшить до набора начальных значений сопряженных переменных. Кроме того, оптимальные управляющие переменные определяются без каких-либо ограничений, поскольку не предполагается какого-либо конкретного представления решения задачи. Наконец, удовлетворение всех необходимых условий гарантирует (локальную) оптимальность решения.

Эту методологию можно назвать непрямым алгоритмом с использованием СМА-ES . Она позволяет обойти основные трудности получения хорошего первого приближения. Основное преимущество этой методологии заключается в простой реализации программного комплекса. Это исследование призвано доказать, что непрямой метод с применением СМА-ES , несмотря на его интуитивность, способен эффективно решать различные задачи оптимизации траектории с малой тягой с большой численной точностью.

1.1 ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ КА С ЭРДУ

В рамках настоящей диссертационной работы большинство задач траекторной оптимизации рассматривается в качестве отдельных оптимизационных проблем, которые могут быть отнесены к широкому классу т.н. *задач оптимизации для управляемых динамических систем*. В качестве такой динамической системы (объекта управления) естественно рассматривается КА с ЭРДУ. При этом необходимо учитывать, что траектория его движения, как и оказываемое на него управляющее воздействие, а также ряд параметров самого аппарата – подвержены целому ряду ограничений (физических, проектных и т.д.), которые необходимо учитывать при решении задач оптимизации траекторий. Следовательно, типичная формализация для рассматриваемого типа задач соответствует постановке задачи на условный экстремум. Для ее решения требуется воспользоваться надлежащим методом. В рамках настоящей работы, в качестве последнего выступает непрямой метод [106] вариационной группы [12] – ПМП [79,201].

Известно, что формализм данного метода (как и любого непрямого), подразумевает использование необходимых условий оптимальности, которые должны быть представлены в явном аналитическом виде при рассмотрении каждой конкретной постановки задачи оптимизации для управляемой динамической системы (в нашем случае – КА с ЭРДУ). В данном разделе необходимые условия оптимальности, используемые применительно к рассматриваемым задачам траекторной оптимизации, и следствия из них будут приведены в достаточно общем виде, что позволит получить соответствующие им выражения в форме, наиболее общей для всех рассматриваемых в работе постановок. Далее, по ходу изложения, они будут записаны явно применительно к каждой конкретной постановке задачи баллистического проектирования траектории межпланетного или межорбитального перелета. Поэтому, приведем здесь (явно) лишь некоторые общие положения, основополагающие для задач оптимизации управляемых динамических систем.

1.2 ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ КА С ЭРДУ

Будем рассматривать движение управляемой динамической системы (объекта) на отрезке времени

$$\Delta = [t_0, t_f],$$

границы, которого t_0, t_f (в общем случае) могут быть, как зафиксированы, так и полагаться свободными.

Вектор-функция $\mathbf{x}(t)$, описывающая фазовое состояние объекта управления в каждый момент времени, определяется следующим образом:

$$\mathbf{x}(t): t \in \Delta \rightarrow \mathbf{R}^n, \quad \mathbf{x}(t) \in AC(\Delta, \mathbf{R}^n), \quad (1.1)$$

т.е. (в общем случае) представляет собой элемент пространства абсолютно-непрерывных вектор-функций, определенных на отрезке Δ со значениями в \mathbf{R}^n .

Вектор функция $\mathbf{u}(t)$ непосредственно определяет управляющее воздействие, оказываемое на рассматриваемый объект управления (КА с ЭРДУ). В наиболее общем случае, ее можно определить следующим образом:

$$\mathbf{u}(t): t \in \Delta \rightarrow \mathbf{u} \in U \subseteq \mathbf{R}^m, \quad \mathbf{u}(t) \in L_\infty(\Delta, \mathbf{R}^m), \quad (1.2)$$

т.е. в виде измеримой существенно ограниченной функции со значениями в \mathbf{R}^m , определенной на рассматриваемом отрезке Δ . Кроме того полагается, что значения, принимаемые $\mathbf{u}(t)$ на Δ принадлежат некоторому множеству U (как правило, замкнутому и ограниченному). Последнее и определяет область допустимых значений, принимаемых вектор-функцией (1.2) для рассматриваемой динамической системы.

В качестве отдельного вектора, описывающего набор из каких-либо неизвестных параметров объекта управления, будем рассматривать следующий:

$$\mathbf{p} \in \mathbf{R}^p.$$

Здесь под \mathbf{p} мы непосредственно понимаем лишь те параметры, неизвестные значения которых могут (*должны быть*) выбраны оптимально при решении задач траекторной оптимизации и значения которых остаются постоянными вдоль траектории динамической системы. При этом вполне естественно предполагается, что значения элементов p_i , составляющих вектор \mathbf{p} , как минимум принадлежат некоторому ограниченному допустимому множеству (вследствие того, что данные параметры описывают некоторые конкретные физические характеристики рассматриваемого объекта управления – КА с ЭРДУ), следовательно, можно считать, что

$$\mathbf{p} \in \mathbf{P} \subseteq \mathbf{R}^p. \quad (1.3)$$

К числу ограничений, налагаемых на рассматриваемую в рамках настоящей диссертационной работы управляемую динамическую систему также отнесем следующие. Вектор-функции (1.1) и (1.2), также, как и вектор \mathbf{p} , в каждый рассматриваемый момент времени из Δ должны удовлетворять целому ряду ограничений. Например, дифференциальной связи вида

$$\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}, t) = \mathbf{0}, \quad (1.4)$$

т.е. ограничению типа равенство, определяющему изменение фазового состояния управляемого объекта с течением времени, согласно принятой математической модели, описывающей его движение. Так, например, для рассматриваемых в работе задач траекторной оптимизации в качестве такой дифференциальной связи выступает система уравнений, описывающая управляемое движение центра масс КА с ЭРДУ. Далее, множество значений фазовых состояний рассматриваемого управляемого объекта обозначим \mathbf{X} . Тогда «жизненное пространство» \mathcal{Q} [11] рассматриваемой динамической системы определим, как прямое произведение $\mathbf{X} \times \mathbf{U} \times \mathbf{P} \times \Delta$. Необходимо отметить, что в рамках данной работы всюду предполагается, что функция \mathbf{f} в (1.4) представляет собой (в общем случае) кусочно-непрерывную вектор-функцию, определенную на элементах пространства $\mathbf{X} \times \mathbf{U} \times \mathbf{P} \times \Delta$, и при этом непрерывную и обладающую непрерывными производными по своим аргументам $\mathbf{x}, \mathbf{p}, t$.

Ограничения, налагаемые на концы траектории управляемой динамической системы, в общем виде могут быть представлены следующим образом:

$$\Psi(t_0, \mathbf{x}(t_0), t_f, \mathbf{x}(t_f), \mathbf{p}) = \mathbf{0}, \quad \Psi: (\mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p) \rightarrow \mathbf{R}^k. \quad (1.5)$$

Другими словами, вектор-функция Ψ описывает терминальные многообразия, которым должны принадлежать концы оптимальной траектории рассматриваемой динамической системы. При этом предполагается, что для всех рассматриваемых в диссертационной работе задач оптимального управления

$$\Psi \in C^1\left(\left(\mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p\right), \mathbf{R}^k\right).$$

Так же могут быть рассмотрены аналогичные ограничения типа равенств (вида (1.5)) в промежуточных точках траектории:

$$\Psi_j(t_j^-, \mathbf{x}(t_j^-), t_j^+, \mathbf{x}(t_j^+), \mathbf{p}) = \mathbf{0}. \quad (1.6)$$

Здесь моменты времени t_j принадлежат внутренности отрезка Δ и

$$t_j^+ - t_j^- = 0.$$

При этом вектор-функции вида (1.6) как и ранее полагаются непрерывными вместе со своими частными производными по своим аргументам.

В качестве основного будем рассматривать следующее представление для целевого функционала:

$$J = \varphi(t_0, t_f, \mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_f), \mathbf{p}) + \int_{t_0}^{t_f} f^0(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{p}, t) dt. \quad (1.7)$$

Функционал вида (1.6), как известно, отвечает т.н. задаче Больца, представляющей собой комбинацию т.н. задач Лагранжа и Майера [16]. Здесь, как и ранее, функционал вида (1.7) предполагается непрерывным и (по крайней мере) непрерывно дифференцируемым по своим аргументам t , \mathbf{x} , \mathbf{p} . Для решения рассматриваемого типа задач оптимизации с функционалами вида (1.7) всюду в настоящей работе будет использован ПМП [79,201]. Для приведения задачи оптимизации с функционалом смешанного типа (1.1) – (1.7) к стандартной терминальной постановке (Майера) добавим к системе (1.4) следующее уравнение

$$\dot{y} - f^0(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{p}, t) = 0$$

тем самым искусственно увеличивая размерность фазового вектора рассматриваемой управляемой динамической системы. Следовательно, получаем следующее представление для функционала (1.7) в «терминальном» виде:

$$J = \varphi(t_0, t_f, \mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_f), \mathbf{p}) + (y(t_f) - y(t_0)), \quad (1.7^*)$$

при этом очевидно, что значение $y(t_0)$ может быть выбрано произвольно. Для удобства, положим его равным нулю.

Также необходимо отметить, что для определения оптимальных значений параметров, составляющих вектор \mathbf{p} , входящих в выражения (1.4) - (1.6) и (возможно) функционал задачи (1.7), следует воспользоваться подходом, судя по всему, впервые предложенным Болтянским [13], и нашедшим широкое применение в работах авторов [191,195]. Суть данного подхода состоит в следующем: компоненты вектора \mathbf{p} на просто рассматриваются как фазовые переменные. И при этом полагается, что они удовлетворяют следующим элементарным (и очевидным) дифференциальным уравнениям:

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{0}.$$

Таким образом, приходим к эквивалентной задаче, отличительной чертой которой является только лишь формальное расширение фазового пространства. Тем не менее, данный прием прост и эффективен – он позволяет без какого-либо особого труда определить необходимые условия оптимальности выбора значений вектора \mathbf{p} , используя

при этом все ту же основную теорему ПМП [79,201]. При этом в приведенных ранее выражениях (1.3) – (1.7) можно формально считать $\mathbf{p}=\mathbf{p}(t)$.

Для решения оптимизационной проблемы (1.1) – (1.7), будем использовать ПМП[20,53-55,82,174]. Его применение позволяет редуцировать решение исходной оптимизационной проблемы к решению (в общем случае) многоточечной краевой задачи. Далее, выпишем условия ПМП применительно к рассматриваемой нами проблеме вида (1.1) – (1.7).

Итак, следуя формализму основной теоремы (ПМП) [79,201], введем функцию Понтрягина следующим образом:

$$H = \lambda_y f^0(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{p}(t)) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{p}(t), t) + \boldsymbol{\lambda}_p^T \dot{\mathbf{p}} + \lambda_t, \quad (1.8)$$

Оптимальное управление определяется исходя из условий максимума функции (1.8):

$$\mathbf{u}^*(t) = \underbrace{\arg \max}_{\mathbf{u} \in U} H.$$

Кроме того, почти всюду вдоль оптимальной траектории должно также выполняться второе условие из т.н. группы условий максимума [7]:

$$H^* + \lambda_t (\equiv) 0 \quad \forall t \in \Delta, \quad (1.9)$$

где $H^* = H(\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t), \mathbf{u}^*(t), \boldsymbol{\lambda}(t), t)$ – оптимальный гамильтониан задачи.

Вектор функция $\boldsymbol{\lambda}(t)$ (функциональный множитель Лагранжа), как известно, удовлетворяет т.н. сопряженной системе дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\lambda}_y &= - \frac{\partial H^*}{\partial y} \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}} &= - \frac{\partial H^*}{\partial \mathbf{x}} \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}_p &= - \frac{\partial H^*}{\partial \mathbf{p}} \\ \dot{\lambda}_t &= - \frac{\partial H^*}{\partial t} \end{aligned} \right\}$$

Далее, следуя формализму ПМП, введем терминант – концевую функцию Лагранжа [16] рассматриваемой задачи оптимального управления. Так как в работе предполагается рассматривать оптимизационные проблемы, содержащие условия (типа равенств) на конечном числе промежуточных точек траектории динамической системы (КА с ЭРДУ), то в концевой блок задачи необходимо включить также условия вида (1.6). Тогда

$$l = \alpha_0 \left(\varphi(t_0, t_f, \mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_f), \mathbf{p}) + (y(t_f) - y(t_0)) \right) + \mathbf{v}^T \Psi(t_0, \mathbf{x}(t_0), t_f, \mathbf{x}(t_f), \mathbf{p}) + \left. \begin{aligned} &+ \sum_{j=1}^{N_j} \mathbf{v}_j^T \Psi_j(t_j^-, \mathbf{x}(t_j^-), t_j^+, \mathbf{x}(t_j^+), \mathbf{p}) + \sum_{j=1}^{N_j} v_j^t (t_j^+ - t_j^-) + \sum_{j=1}^{N_j} v_j^y (y(t_j^+) - y(t_j^-)) \end{aligned} \right\}$$

В приведенном выражении N_j – число промежуточных точек траектории (им соответствуют моменты времени t_j). Действительные числа и векторы α_0 , \mathbf{v} , \mathbf{v}_j , v_j^t , v_j^y – т.н. числовые множители Лагранжа, общее число и размерность которых определяется в зависимости от условий вида (1.5) и (1.6). Согласно условиям основной теоремы ПМП [13,79,201], данные множители (числовые), в свою очередь, удовлетворяют следующим двум условиям:

$$\alpha_0 \geq 0, \quad (1.10)$$

и

$$\alpha_0 + \|\mathbf{v}\|_E + \sum_{j=1}^{N_j} \|\mathbf{v}_j\|_E + \sum_{j=1}^{N_j} |v_j^t| + \sum_{j=1}^{N_j} |v_j^y| > 0, \quad (1.11)$$

неотрицательности (1.10) и нетривиальности (1.11). Выбор значения множителя Лагранжа при функционале задачи α_0 , как известно, обеспечивает нормировку сопряженных переменных. При этом, выполнение условия нетривиальности (1.11) обеспечивает $\|\lambda(t)\|_{BV} \neq 0$ всюду на Δ .

1.3 КРАЕВАЯ ЗАДАЧА И УСЛОВИЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНОСТИ

На концах оптимальной траектории и в ее промежуточных точках должны выполняться следующие условия (условия трансверсальности):

$$\left. \begin{aligned} &\eta = \{t, y\}, \quad \zeta = \{\mathbf{x}, \mathbf{p}\}: \\ &\lambda_\eta(t_0) = \frac{\partial l}{\partial \eta} \Big|_{t_0}, \quad \lambda_\eta(t_j^+) = \frac{\partial l}{\partial \eta} \Big|_{t_j^+}, \quad \lambda_\eta(t_f) = -\frac{\partial l}{\partial \eta} \Big|_{t_f}, \quad \lambda_\eta(t_j^-) = -\frac{\partial l}{\partial \eta} \Big|_{t_j^-}, \\ &\lambda_\zeta(t_0) = \frac{\partial l}{\partial \zeta} \Big|_{t_0}, \quad \lambda_\zeta(t_j^+) = \frac{\partial l}{\partial \zeta} \Big|_{t_j^+}, \quad \lambda_\zeta(t_f) = -\frac{\partial l}{\partial \zeta} \Big|_{t_f}, \quad \lambda_\zeta(t_j^-) = -\frac{\partial l}{\partial \zeta} \Big|_{t_j^-}. \end{aligned} \right\} \quad (1.12)$$

Приведенные выражения (1.8) – (1.12) и следствия из них вместе составляют набор необходимых условий оптимальности для рассматриваемой задачи оптимального управления. При этом необходимо отметить, что, так как функция Понтрягина задачи (1.8) не зависит от переменной $y(t)$, то согласно уравнениям сопряженной системы $\lambda_y = \text{const}$, и из условий трансверсальности (1.12) следует, что $\lambda_y = -\alpha_0$. Дифференциальное уравнение относительно сопряженной переменной $\lambda_t(t)$ также может быть исключено из рассмотрения, так как оно не оказывает никакого влияния на решение задачи.

При рассмотрении каждой конкретной задачи траекторной оптимизации КА с ЭРДУ в ходе последующего изложения, условия оптимальности (1.8) – (1.12) и следствия из них каждый раз будут представлены в явном виде. Здесь же (в качестве примера) можно ограничиться условиями, непосредственно вытекающими из условий максимума и трансверсальности, которые позволяют (если это необходимо в конкретной рассматриваемой задаче), например, определить оптимальные промежуточные моменты времени t_j , или границы отрезка Δ в случае, если они заранее не задаются. Их можно представить в следующем наиболее общем виде:

$$\left. \begin{aligned} H^* \Big|_{t_0} + \frac{\partial l}{\partial t_0} = 0, \quad H^* \Big|_{t_f} - \frac{\partial l}{\partial t_f} = 0, \\ H^* \Big|_{t_j^+} - H^* \Big|_{t_j^-} + \frac{\partial \tilde{l}}{\partial t_j^+} + \frac{\partial \tilde{l}}{\partial t_j^-} = 0, \quad \tilde{l} = l - \sum_{j=1}^{N_j} v'_j (t_j^+ - t_j^-). \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

Для определения оптимального значения какого-либо параметра p_j (элемента вектора \mathbf{p}), будут использоваться следующие простые условия (вытекающие из условий трансверсальности (1.12)):

$$\int_{\Delta} \frac{\partial H^*}{\partial p_j} dt = 0.$$

Если же неизвестный параметр p_j (или параметры) входит в функционал рассматриваемой задачи, то приведенное ранее условие можно, например, заменить следующим, по аналогии с известными работами [193]:

$$\frac{\partial l}{\partial p_j} \Big|_{t_0} = \int_{\Delta} \frac{\partial H^*}{\partial p_j} dt.$$

Для всех рассматриваемых в диссертационной работе задач оптимального управления в качестве нормирующего множителя положим $\alpha_0=1$.

Применение необходимых условий оптимальности ПМП в рассматриваемом случае сводит оптимизационную проблему к многоточечной краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Как известно, решение данной задачи сводится к численному решению системы нелинейных уравнений вида

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{z} \in \mathbf{R}^m. \quad (1.14)$$

Основная трудность решения системы уравнений (1.14) заключается в получении начального приближения – то есть в получении первой оценки неопределенных условий на одном конце, которая создает решение, близкое к указанным условиям на другом конце. Экстремальные решения, которые очень чувствительны к небольшим изменениям

неуточенных граничных условий, являются причиной этого значительного затруднения. Поскольку система уравнения для фазовых переменных и система уравнения Эйлера-Лагранжа связаны между собой, численное интегрирование с плохим приближением начальных условий приводит к «диким» траекториям в пространстве фазовых состояний. Эти траектории могут быть совершенно неприемлемыми, потому что значения $x(t)$ и / или $\lambda(t)$ превышают числовой диапазон компьютера.

Для преодоления проблемы этой чувствительности был предложен ряд методов. Один довольно очевидный подход – начать итерационный процесс с хорошим начальным приближением. Основная идея рассматриваемых методов продолжения [26,65-74,95,97,187-199] или гомотопии[126] состоит в том, чтобы последовательно решить несколько задач и использовать решение одной задачи как исходное предположение для слегка измененной последующей задачи.

1.4 НЕПРЯМОЙ МЕТОД С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СМА-ES

Для решения системы уравнения (1.14) в настоящей диссертационной работе будет использоваться следующий известный прием. Вместо непосредственного решения системы нелинейных уравнений $\mathbf{f}(\mathbf{z})=\mathbf{0}$ будем рассматривать задачу минимизации следующей скалярной функции m переменных:

$$F(\mathbf{z}) = \frac{1}{2} \mathbf{f}(\mathbf{z}) \mathbf{f}^T(\mathbf{z}), \quad F: \mathbf{z} \in \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^1, \quad (1.14^*)$$

выражающей сумму квадратов невязок рассматриваемой краевой задачи (в общем случае – многоточечной). Очевидно, что $F(\mathbf{z})$ принимает только неотрицательные значения и ее нижняя грань равна нулю, причем она достижима только на тех значениях \mathbf{z}^* , для которых справедливо $\mathbf{f}(\mathbf{z}^*)=\mathbf{0}$. Для минимизации функции (1.14) всюду в диссертационной работе будем использовать численный метод СМА-ES [129-133,218,219].

Если решение системы нелинейных уравнений (1.14) существует, то глобальный минимум (1.14*) равен нулю. Наша задача – найти этот глобальный минимум. Если существуют несколько решений, то следует найти все нулевые минимумы (1.14*) оценить решения по критерию оптимизации, и из них выбрать наилучшее решение.

Ниже представлена общая схема решения краевой задачи с использованием СМА-ES.

Вход: начальное приближение неизвестных параметров
Выход: фазовые и сопряженные переменные экстремальной траектории
Do While: Ошибка в краевых условиях задачи больше заданной точности
Интегрирование траектории от t_0 до t_f ;
вычисление невязки в краевых условиях задачи;
обновление неизвестных параметров с помощью СМА-ES
End

1.5 МЕТОД ЭВОЛЮЦИОННОЙ СТРАТЕГИИ С АДАПТАЦИЕЙ КОВАРИАЦИОННОЙ МАТРИЦЫ (СМА-ES)

В данной главе дается описание численного метода решения задач безусловной оптимизации, повсеместно используемого в рамках диссертационной работы. Этот метод позволяет находить решение краевых задач ПМП. Он также эффективен для задач поиска минимума скалярной функции нескольких переменных, возникающих при рассмотрении оптимизационной проблемы проектирования межпланетных траекторий со сложным маршрутом в импульсной постановке.

При решении краевых задач ПМП в качестве минимизируемой рассматривается функция вида (1.14*), выражающая сумму квадратов невязок для системы нелинейных уравнений вида (1.14). Важен тот факт, что с помощью проведения соответствующих вычислений нетрудно установить, что для описанных типов задач поиска безусловного минимума скалярной функции n переменных характерна весьма сложная *многоэкстремальная* структура многообразия ее значений. Это многообразие можно изобразить гиперповерхностью на некотором (на практике ограниченном) множестве пространства \mathbf{R}^{n+1} . При этом в ряде случаев приходится довольствоваться одной лишь непрерывностью целевой функции на множестве ее аргументов.

Все это вместе значительно усложняет поиск решения при использовании численных методов минимизации, использующих в своей основе оценки производных первого или второго порядка. К этим методам (по наиболее общей условной классификации) можно отнести методы линейного поиска (градиентные, квазиньютоновские и т.д.) и доверительного интервала, а также гибридные алгоритмы на основе квазиньютоновских и градиентных, для которых характерно управление длиной шага посредством оценки точности локальной аппроксимации минимизируемой функции. Их эффективность в данном случае невысока, так как в своей основе данные методы

используют локальную аппроксимацию целевой функции в некоторой сравнительно малой окрестности. Во-первых, это налагает достаточно жесткие требования к дифференцируемости рассматриваемой функции (для сходимости данных методов требуется дифференцируемость по Фреше вплоть до производных второго порядка). Во-вторых, именно «локальная природа» этих методов не позволяет создать эффективный механизм управления шагом для преодоления сложной «топографии» многообразия значений целевой функции. Следовательно, область сходимости ее значений всегда будет ограничена сравнительно небольшим регионом, для которого можно выявить преимущественно одну, причем локальную, структуру направлений убывания. Таким образом, при использовании методов линейного поиска или методов, построенных на оценках доверительного интервала, вопрос о нахождении глобального экстремума целевой функции не возникает. При этом также очень важно достаточно точно оценивать производные, что далеко не всегда представляет собой простую задачу.

В рамках настоящей работы предлагается использовать численный метод оптимизации, по своей природе не являющийся локальным и не требующий оценки производных минимизируемой функции. В качестве основной информации, необходимой для построения и работы алгоритма данного численного метода, используется только вычисленные на каждой его итерации значения целевой функции (целевого функционала). Тем самым удастся существенно понизить требования, предъявляемые непосредственно к минимизируемой функции, т.к. отсутствие необходимости в оценке производных фактически понижает их только лишь до непрерывности (абсолютной) на некотором ограниченном множестве в пространстве \mathbf{R}^n , отвечающем «зоне поиска» точки минимума. При этом сама «зона поиска» всегда может быть определена достаточно широкой для того, чтобы в должной мере исследовать сложную «топографию» многообразия значений минимизируемой функции, что позволяет рассматриваемому методу претендовать на глобальность.

К численным методам оптимизации, обладающим описанными свойствами, в настоящее время можно отнести [122,200,213]: методы, построенные на использовании случайного поиска, генетические алгоритмы, эволюционные стратегии [102], методы, воспроизводящие механизмы функционирования иммунных систем живых организмов, методы, имитирующие некоторые физические процессы, а также методы, использующие «роевой интеллект». В диссертационной работе в качестве основного численного метода минимизации используется алгоритм CMA-ES [129-133,218,219], предложенный Хансеном и Остермайером. Он представляет собой значительную модификацию ядра

базовых алгоритмов, относящихся к эволюционным стратегиям (ES – Evolution Strategy). Для него характерна значительная «*дерандомизация*» (детерминированный выбор) основных параметров его «управления», т.е. максимально возможное исключение случайных факторов из применяемых в алгоритме механизмов выбора длины шага и определения его направления. При этом понятия величины и направления шага рассматриваемого метода следует рассматривать не в привычном нам «локальном» ключе, как в случае с численными методами оптимизации на основе оценки производных, а в «условно глобальном», при котором трансформация заданной на начало работы алгоритма «зоны поиска» происходит итеративно.

Одним из основных механизмов, предложенных авторами этого метода и эффективно реализующих описанную трансформацию «зоны поиска», является итеративная адаптация ковариационной матрицы (СМА – Covariance Matrix Adaptation). Она характеризует облако рассеяния в популяции признаков каждой отдельной особи (т.е. ее *фенотип*) при генерации каждого последующего поколения, фактически реализуя концепцию «управления мутацией», которая несколько противоречит естественным механизмам биологической эволюции.

Переходя к описанию основных этапов и структуры рассматриваемого в работе алгоритма СМА-ES, необходимо кратко охарактеризовать эволюционные стратегии в целом. Наравне с приведенными выше примерами нелокальных численных методов безусловной оптимизации скалярной функции n переменных (не требующих оценки производных) последние также можно отнести к группе т.н. *метаэвристических* алгоритмов[62]. В базовую структуру таких алгоритмов путем использования некоторых *эвристических* соображений переносятся известные механизмы функционирования и свойства, характеризующие *течение некоторых естественных процессов природы*. В целом эволюционные стратегии наиболее близки к генетическим алгоритмам – они в равной степени используют базовые механизмы естественной биологической эволюции, среди которых основную роль играют *селекция, мутация и рекомбинация* (подробнее об этом будет сказано позже).

Важно отметить, что для рассматриваемых групп алгоритмов, воспроизводящих процессы естественной биологической эволюции, характерно итеративное исследование изолированной популяции на протяжении нескольких или многих поколений. Такая популяция состоит из конечного числа особей с некоторым набором признаков (т.е. фенотипом) и используется при переходе от поколения к поколению с целью постепенного улучшения некоторого качественного *показателя* популяции – т.н.

«функции приспособленности». Этот показатель характеризует их текущую приспособленность особей и каким-либо способом может быть выражен через текущий фенотип.

Очевидно, что при использовании эволюционных стратегий и генетических алгоритмов в качестве «функции приспособленности» выступает или непосредственно минимизируемая скалярная функция (целевой функционал) $f(\mathbf{x})$, или же ее некоторый эквивалентный аналог, а в качестве набора признаков отдельной особи (т.е. фенотипа) популяции – ее векторный аргумент $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$.

Основным отличием эволюционных стратегий от генетических алгоритмов является отсутствие использования бинарного кодирования на этапах селекции, мутации и рекомбинации, т.е. в них формально не используется понятие гена. Также в различных вариантах могут быть отличия в модельном воспроизведении механизмов селекции, мутации и рекомбинации.

Далее приведем базовые (чисто эвристические) соображения, представляющие собой основу структуры алгоритмов численной оптимизации (как вариантов реализации эволюционной стратегии) и позволяющие выявить основные этапы рассматриваемого в данной работе алгоритма.

В отличие от генетических алгоритмов и их модификаций [213], эволюционные стратегии [101,102] позволяют проще и более направленно воспроизводить естественные процессы генерации новых поколений. В ходе этих процессов постепенно (от поколения к поколению) закрепляется некоторый выбираемый «наследственный признак» (формально определяющий *фенотип* отдельной особи в популяции). Для этой цели эффективно используются известные механизмы генетики и общей биологии: *мутация*, *селекция* и (в меньшей степени) *рекомбинация*. Процессы селекции и рекомбинации формально позволяют выявить в текущем поколении особи популяции с наилучшим значением т.н. «функции приспособленности», а потомство этих особей должно обеспечить закрепление целевого признака при генерации следующего поколения. Под «функцией приспособленности» подразумевается некоторое качественное свойство или отдельный признак, характерный для каждой особи рассматриваемой популяции.

Процессы селекции и рекомбинации в целом описать с помощью различных моделей. Эти модели могут быть как условно детерминированными, т.е. полученными из некоторых опытных или эвристических соображений (например, при рассмотрении естественных процессов в биологии), или чисто случайными. Процесс мутации особей популяции при переходе от поколения к поколению всегда представляется

стохастическим, так как в биологии не существует естественных механизмов «управляемой» мутации. По этой причине отклонение (девиация) каких-либо признаков отдельной особи популяции (при последовательной генерации потомков) может быть описано случайным вектором (или числом) и обычно моделируется в численных алгоритмах с помощью обычного нормального распределения (и его многомерного варианта). Однако при рассмотрении ряда *длительных эволюционных процессов в живой природе*, в результате которых происходит итоговое улучшение функции приспособленности для особей популяции, в некоторых случаях оказывается, что мутация (наравне с «условно управляемыми» механизмами селекции и рекомбинации) может случайным образом способствовать закреплению «наилучшего наследственного признака» при генерации следующего поколения. Таким образом, в рассматриваемом эволюционном процессе мутация тоже может увеличивать вероятность закрепления «удачных» признаков особи популяции в фенотипе особей следующего поколения.

Исходя из приведенных выше (преимущественно эвристических) соображений, можно говорить о попытках создания некоторого «условно управляемого» эволюционного процесса. Его конечной целью естественно является улучшение функции приспособленности особей популяции за конечное число поколений. При этом должна быть выработана некоторая *эволюционная стратегия*, непосредственно определяющая и регулирующая рассматриваемые механизмы биологической эволюции. Следовательно, имея возможность полноценного «управления» процессами селекции, рекомбинации и мутации, можно выработать более «детерминированный» эволюционный процесс, максимально исключив из него случайные факторы при воспроизведении естественных механизмов биологической эволюции от поколения к поколению.

Очевидно, что рассмотренные соображения можно использовать при построении нового метаэвристического численного алгоритма (модификации эволюционной стратегии), предназначенного для решения задач безусловной оптимизации со скалярной функцией нескольких переменных в качестве целевой (минимизируемой или максимизируемой). Рассматриваемый же в настоящей работе алгоритм CMA-ES как раз представляет собой модификацию эволюционной стратегии, в которой в полной мере реализованы приведенные выше эвристические соображения. Так, предложенная авторами схема адаптации матрицы ковариаций решает проблему практической реализации «управляемой» мутации, что в процессе работы алгоритма фактически приводит к повышению вероятности включения найденного удачного набора признаков в фенотип особей следующего поколения.

Перед тем, как перейти к краткому описанию, достаточному для понимания основной структуры и сути рассматриваемого численного алгоритма (СМА-ES), приведем некоторые вспомогательные, но важные для практической реализации алгоритма теоретические положения.

Мутация, многомерное нормальное распределение, матрица ковариаций случайного вектора и ее спектральное разложение

Основываясь на чисто эвристических соображениях, в генетике и биологии процесс мутации можно успешно описывать с помощью простейших стохастических моделей. Часто для моделирования мутации текущего набора признаков, характеризующих фенотип особи, используется обыкновенное **многомерное нормальное распределение** $N(\mathbf{m}, C)$, которое полностью определяется двумя основными параметрами: *математическим ожиданием* $\mathbf{m} \in \mathbb{R}^n$ случайного вектора $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, и его *ковариационной матрицей* C размерности $n \times n$. Главная диагональ матрицы C , согласно определению [50], содержит дисперсию σ_j^2 компонент случайного вектора x_j , а внедиагональные элементы, представляют собой попарные *ковариации* его компонент. Важно отметить, что при моделировании сам процесс мутации (при генерации каждого последующего поколения) всегда представляется в целом *ограниченным*, так как вариация *признаков отдельных особей* преимущественно происходит в четко обозначенной области. Эта область может быть определена с помощью задания надлежащих параметров распределения для рассматриваемого случайного вектора, т.е. как раз его *математического ожидания* и *элементов ковариационной матрицы*.

В целом это соответствует тому, что в природе не может быть неограниченной вариации набора признаков особи при генерации нового поколения. Допустим, что мы задаем дисперсию σ_j^2 (где $j=1..n$) для составляющих x_j случайного вектора $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, который описывает, например, возможную девиацию набора признаков отдельной особи в результате мутации. Очевидно, что в случае использования многомерного нормального распределения вероятность выхода покомпонентных значений отклонений за границы условной области $|x_j| \leq 3 \cdot \sigma_j$ практически равна нулю.

Остановимся подробнее на основных параметрах, полностью определяющих многомерное нормальное распределение $N(\mathbf{m}, C)$ случайного вектора \mathbf{x} . Естественно, наибольший интерес здесь представляет ковариационная матрица C , ее свойства и их «геометрический» смысл. По определению [50], матрица ковариаций случайного вектора \mathbf{x} представляет собой положительно определенную симметричную матрицу (т.е. $c_{ij} = c_{ji}$), выражающую параметры его облака распределения. Известно, что облако

распределения условно описывается гиперэллипсоидом в пространстве \mathbf{R}^n , основные геометрические параметры которого (величина и ориентация полуосей) однозначно определяются с помощью компонент c_{ij} ковариационной матрицы. Главная диагональ матрицы C содержит дисперсии компонент рассматриваемого случайного вектора, характеризуя размер полуосей отвечающего ей гиперэллипсоида облака распределения. Внедиагональные элементы фактически определяют коэффициенты ковариации между компонентами случайного вектора \mathbf{x} , задавая ориентацию в пространстве для главных осей гиперэллипсоида. Для наглядного представления формы и ориентации осей гиперэллипсоида облака распределения случайного вектора \mathbf{x} удобно использовать поверхности следующего вида, представляющие собой обобщение уравнения эллипса в \mathbf{R}^n :

$$M_\sigma = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : \mathbf{x}^T C^{-1} \mathbf{x} = c, \quad c \in \mathbf{R}_+ \setminus \{0\}\}.$$

Важно отметить, что в общем случае (при выборе различных значений постоянной c) поверхности вида M_σ фактически представляют собой *изоповерхности* функции плотности вероятности для рассматриваемого многомерного нормального распределения $N(\mathbf{m}, C)$. Другими словами, задание ковариационной матрицы полностью определяет форму гиперповерхности значений функции плотности вероятности в пространстве \mathbf{R}^{n+1} . В простейшем случае, когда C представляет собой единичную матрицу, данная гиперповерхность описывается хорошо известной унимодальной «колоколообразной» формой с вершиной в точке $\mathbf{m} \in \mathbf{R}^n$. Ее изолинии на гиперплоскости в \mathbf{R}^n представляют собой окружности, что следует из выражения для M_σ . В общем случае задания матрицы C сечения данной поверхности будут представлять собой гиперэллипсоиды.

Получив необходимое количество информации о «существо» многомерного нормального распределения $N(\mathbf{m}, C)$ и ряда его основных параметров (в первую очередь о ковариационной матрице C), можно перейти к вопросу эффективного применения рассмотренного распределения в структуре алгоритма эволюционной стратегии.

Предположим, что процесс генерации фенотипа отдельных особей популяции для каждого следующего $(g+1)$ -ого поколения модельно может быть представлен следующим образом:

$$\mathbf{x}^{(g+1)} \sim N(\mathbf{m}^{(g)}, C^{(g)}). \quad (1.15)$$

Выражение (1.15) непосредственно описывает процесс *мутации* набора признаков особи, выражаемого случайным вектором \mathbf{x} , – т.е. их случайные вариации, центрированные относительно некоторого известного (например, выбранного в результате *селекции*)

значения $m^{(g)}$. При этом ясно, что, задавая ковариационную матрицу $C^{(g)}$, можно *регулировать направленность мутации*. Это происходит за счет деформации облака распределения для вариаций набора признаков особей в одном (выбираемом) преимущественном направлении. Данное направление процесса мутации может быть выбрано посредством выявления такого набора признаков особей популяции, который лучше всего отвечает значению функции приспособленности для текущего поколения g , а также путем использования некоторой информации (о признаках), накопленной на предыдущих поколениях. Таким образом, мы задаем параметры нормального распределения $N(m^{(g)}, C^{(g)})$ и фактически «управляем» мутацией при генерации каждого следующего нового поколения. Этим мы повышаем вероятность закрепления ранее найденных и удачных (с точки зрения значения функции приспособленности) направлений вариации признаков особей популяции. Здесь вполне уместно говорить именно о повышении вероятности, так как рассматриваемое «управление» мутацией осуществляется в первую очередь за счет направленной деформации гиперэллипсоида облака распределения вектора девиации набора признаков особей, т.е. направленным изменением его плотности распределения.

Приведенные выше соображения теперь необходимо формализовать и напрямую использовать в структуре численного алгоритма поиска минимума скалярной функции нескольких переменных $f(x)$, который реализует эволюционную стратегию с «управляемой мутацией». Во-первых, для этого надо установить функцию приспособленности для особей популяции равной целевому функционалу $f(x)$. При этом набор оптимизируемых признаков отдельной особи нужно представить вектором неизвестных параметров $x \in \mathbf{R}^n$ рассматриваемой оптимизационной проблемы. Во-вторых, необходимо задать механизмы определения и итеративного обновления (от поколения к поколению) для параметров многомерного нормального распределения в приведенном выражении (1), т.е. $m^{(g)}$ и $C^{(g)}$. Важно отметить, что выражение (1.15) является основным шагом рассматриваемого численного алгоритма. Далее оно будет представлено в несколько иной, эквивалентной форме, которая используется в алгоритме CMA-ES.

Возможность «направленного управления» мутацией вектора $x \in \mathbf{R}^n$ (выражающего набор признаков отдельной особи) посредством соответствующего задания ковариационной матрицы может быть представлена в графическом виде. Рисунок 1.1 приведен авторами алгоритма в работах [218,219]. На нем изображены различные гиперэллипсоиды, характеризующие облако распределения случайного вектора x и описывающие его отклонения (девиацию) от заданного центрированного значения –

математического ожидания (в данном случае $m=0$) при рассмотрении многомерного нормального распределения. Изображенные на рисунке эллипсоиды (двумерный случай) фактически представляют собой изолинии для значений функции плотности вероятности. Показаны шесть различных нормальных распределений. Кроме того, на рисунке 1.1 также изображены изолинии значений минимизируемой функции $f(x)$. Основной целью данного рисунка является демонстрация возможности реализации механизма «управления мутацией» путем надлежащего выбора параметров распределения – в данном случае *ковариационной матрицы*. Она выбрана таким образом, чтобы выявить преимущественные направления для последующей вариации компонент случайного вектора x , на которых будут достигнуты лучшие значения функции приспособленности $f(x)$. Для этого определенным образом (например, на основе анализа значений функции приспособленности для особей популяции текущего поколения) необходимо скорректировать ковариационную матрицу. Для этого надо повернуть эллипсоид плотности распределения по направлениям ее убывания и далее использовать полученную информацию при генерации особей следующего поколения. На рисунке 1.1 показана принципиальная возможность сделать это только путем соответствующего задания ковариационной матрицы. В результате этого особи популяции в следующем поколении с *большой вероятностью* будут обладать набором признаков, которым отвечают лучшие значения функции приспособленности. Таким образом, *рассматриваемый алгоритм обеспечивает отслеживание направлений убывания для целевого функционала*, при этом в общем случае *они не являются локальными*, в отличие от большинства известных численных методов оптимизации.

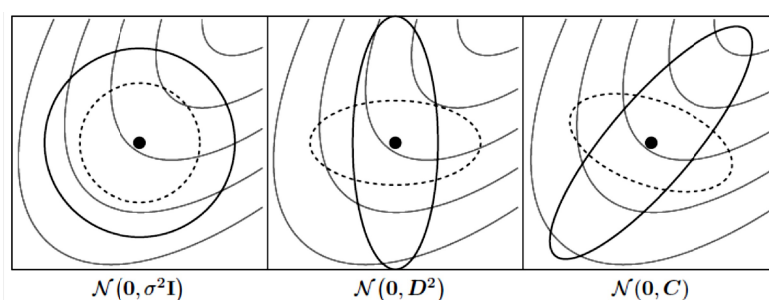


Рисунок 1.1 Эллипсоиды облака распределения случайного вектора (кривые равной плотности вероятности) для шести различных нормальных распределений (показаны толстой сплошной и пунктирной линиями), построенные на плоскости изолиний значения минимизируемой функции. Как видно из рисунка, различные варианты задания ковариационной матрицы C обеспечивают возможность построения ориентации осей гиперэллипсоида по характерным направлениям (градиента или антиградиента) целевой функции, а также непосредственно определяют размер и форму облака распределения случайного вектора (что используется при управлении величиной «глобального шага» алгоритма). Тем самым в рамках структуры рассматриваемого алгоритма минимизации функции удается реализовать отслеживание *нелокальных* направлений убывания.

Теперь непосредственно прокомментируем отдельные изображения, составляющие рисунок 1.1. Как уже говорилось, ориентация осей и форма приведенных на рисунке 1.1 эллипсоидов облака распределения случайного вектора полностью обеспечивается заданием компонент ковариационной матрицы. Это возможно исходя из того, что для записи обобщенного уравнения эллипса в пространстве \mathbf{R}^n требуется задание некоторой симметричной положительно определенной матрицы [50]). Для описания «механизма вращений» эллипсоидов рассмотрим примеры «покомпонентного» задания элементов ковариационной матрицы C , напрямую характеризующие различную ориентацию облака распределения случайного вектора x .

На левой части рисунка 1.1 в качестве матрицы ковариации рассматривается *диагональная*, имеющая равные положительные значения элементов (главной диагонали) и полученная простым умножением единичной матрицы I на скаляр σ^2 , т.е. $C = \sigma^2 \cdot I$. В рассматриваемом случае, когда попарные ковариации компонент случайного вектора равны нулю (внедиагональные элементы матрицы C нулевые), получаем изотропный эллипсоид распределения с одинаковыми значениями полуосей, величины которых пропорциональны значению постоянной σ^2 . Она в данном случае фактически определяет дисперсию компонент случайного вектора x . Сплошная и пунктирная линии (окружности), изображенные поверх изолиний значения целевого функционала, соответствуют двум различным изотропным нормальным распределениям случайного вектора. По сути эти распределения отличаются только дисперсией своих компонент (т.е. формально радиусами эллипсоидов).

Центральная часть рисунка 1.1 описывает случай, когда попарные ковариации компонент случайного вектора x снова полагаются равными нулю (т.е. *внедиагональные элементы C нулевые*). При этом значения, лежащие на главной диагонали ковариационной матрицы, *различны*. Оси эллипсоида (уже различные по своей величине) сориентированы по направлениям (ортогональным), совпадающим с базисом рассматриваемого пространства \mathbf{R}^n . Длины полуосей эллипсоида снова непосредственно определяются заданием элементов на главной диагонали матрицы C , выражая собой дисперсию случайного вектора x . Таким образом, рассматриваемый способ задания элементов главной диагонали матрицы ковариаций (при котором все они различны) обеспечивает уже *неизотропное* распределение случайного вектора, оси которого всегда будут сориентированы по базисным направлениям опорного пространства \mathbf{R}^n . Другими словами, при отсутствии попарной ковариации между компонентами случайного вектора (согласно определению *ковариации* [50], выражающей меру линейной зависимости между ними)

деформация многомерного нормального распределения носит строго направленный характер. Такая деформация происходит исключительно вдоль фиксированных базисных направлений и может быть определена посредством покомпонентного задания дисперсии для рассматриваемого случайного вектора x .

На правой части рисунка 1.1 представлен случай, когда главные оси эллипсоида облака распределения могут быть *сориентированы произвольным образом*. Это происходит, когда ковариационная матрица C содержит *ненулевые внедиагональные элементы*, т.е. когда для рассматриваемого распределения случайного вектора определены значения попарной ковариации между его компонентами. Следовательно, с помощью надлежащего *выбора значений внедиагональных элементов* ковариационной матрицы всегда можно обеспечить произвольную ориентацию главных осей гиперэллипсоида облака распределения случайного вектора x . Элементы главной диагонали по-прежнему характеризуют дисперсию рассматриваемого случайного вектора.

Завершая описание рисунка 1.1, отметим, что все изображенные на нем эллипсоиды фактически представляют собой изолинии (изоповерхности в \mathbf{R}^n) значений функции плотности вероятности многомерного нормального распределения. С точки зрения рассматриваемого нами алгоритма эволюционной стратегии надлежащий выбор размеров, формы и направления ориентации их осей повышает вероятность включения выявленного удачного (с точки зрения значений минимизируемой функции $f(x)$) набора признаков особи (вектора x) популяции текущего поколения при генерации последующих. Тем самым реализуется на практике описанный ранее механизм «направленной» мутации, что с точки зрения задачи оптимизации эквивалентно заданию множества *нелокальных* направлений убывания.

Теперь перейдем к описанию основной структуры рассматриваемого в диссертационной работе численного алгоритма CMA-ES, которая полностью определяется выражением (1.15). При реализации этого алгоритма удобно использовать ряд свойств *симметричной положительно определенной матрицы* [50]. Речь здесь пойдет о приемах и особенностях, напрямую связанных с вычислением ковариационной матрицы C и ряда ее «производных», используемых в процессе итеративного обновления последней. Поскольку C представляет собой положительно определенную симметричную матрицу, ее производные также используются при формировании многомерного нормального распределения в процессе генерации признаков особей каждого нового поколения популяции в рамках рассматриваемого алгоритма. Для этих целей авторы алгоритма предлагают использовать *спектральное разложение* [50].

Итак, симметричная, положительно определенная квадратная матрица $C \in \mathbf{R}^{n \times n}$ согласно своему определению характеризуется тем, что для всех $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ выполнено следующее простое условие:

$$\mathbf{x}^T C \mathbf{x} > 0.$$

При этом известно [48], что для рассматриваемой матрицы C всегда существует единственный и конечный набор из ортонормированных (нормализованных) собственных векторов \mathbf{b}_j ($j=1..n$) и отвечающих им собственных значений d_j^2 . Последние всегда строго положительны, поэтому здесь в обозначении удобно использовать квадрат. Согласно определению, получаем:

$$C \mathbf{b}_j = d_j^2 \mathbf{b}_j,$$

Следовательно, для матрицы C единственным образом может быть определено разложение следующего вида:

$$C = B D^2 B^T, \quad (1.16)$$

называемое *спектральным*. В приведенном выражении (1.16) B представляет собой ортогональную матрицу размерности $n \times n$, столбцами которой являются ортонормированные собственные значения вектора \mathbf{b}_j . Для этой матрицы справедливо $B^{-1} = B^T$ и $B \cdot B^T = B^T \cdot B$. А D^2 – диагональная матрица той же размерности, главную диагональ которой образуют собственные значения d_j^2 матрицы C . Приведенное разложение вида (1.16) при проведении вычислений всегда может быть найдено численно, например, с помощью метода вращений [219].

Представленное разложение вида (1.16) также может быть использовано и для определения обратной матрицы C^{-1} . Тогда искомое выражение может быть записано как

$$C^{-1} = (B D^2 B^T)^{-1} = (B^T)^{-1} D^{-2} (B)^{-1} = B D^{-2} B^T = B \operatorname{diag} \left(\frac{1}{d_1^2}, \dots, \frac{1}{d_n^2} \right) B^T. \quad (1.17)$$

Здесь D^{-2} – диагональная матрица, элементами (главной диагонали) которой являются величины, обратные собственным значениям матрицы C . Кроме того, в процессе каждой итерации рассматриваемого алгоритма СМА-ES будет необходимо вычислять матрицу $C^{-\frac{1}{2}}$, которая также может быть определена с помощью разложения (1.16):

$$C^{-\frac{1}{2}} = B D^{-1} B^T = B \operatorname{diag} \left(\frac{1}{d_1}, \dots, \frac{1}{d_n} \right) B^T. \quad (1.18)$$

Приведенные выражения вида (1.16) – (1.18) удобно (и необходимо) использовать при программной реализации рассматриваемого алгоритма модифицированной эволюционной стратегии в случаях, когда требуется проведение каких-либо операции *с* или же *над ковариационной матрицей*.

Теперь переходим к описанию «основного шага» рассматриваемого численного алгоритма модифицированной эволюционной стратегии, реализующего описанный принцип «условно детерминированного» эволюционного процесса. В этом процессе используются описанные ранее механизмы управления «направленной» мутацией для набора признаков (фенотипа) особей популяции. Вместе с эффективным механизмом *селекции* они образуют мощный инструмент для построения (и отслеживания) множества *нелокальных направлений убывания* для функции приспособленности, т.е. для минимизируемой функции $f(x)$. Последнее особенно важно, так как именно *нелокальность* непосредственно определяет «глобальные» возможности рассматриваемого численного метода оптимизации.

Начнем с того, что *все без исключения* методы оптимизации в рамках своей окончательной формализации используют одни и те же базовые понятия и определения, среди которых особое место занимают понятия *длины шага* и его *направления*. Рассматривая, например, вопросы, связанные с получением необходимых условий оптимальности в рамках общей теории экстремальных задач, мы фактически опираемся на чисто «локальные» понятия (такие как *производная*). При этом мы часто сталкиваемся с необходимостью введения некоторых дополнительных вспомогательных и весьма специфичных понятий и категорий. Типичным примером является выделение так называемого *пространства направлений*, элементы которого образуют некоторые характерные множества – *множества направлений*. Эти множества комплексно отражают интересующее нас поведение (*убывание или возрастание*) исследуемой на экстремум функции в некоторой локальной и всегда *ограниченной* области. Таким образом, формируется основной понятийный аппарат в теории экстремальных задач [102], при этом мы одновременно получаем понятия длины шага и его направления в строго «локальном» смысле.

Данный понятийный аппарат практически без изменений переносится в плоскость рассмотрения численных методов оптимизации, построение которых основано на итеративном использовании того или иного механизма, осуществляющего выбор *направления* шага и его *длины*. При этом, ввиду общности введенного понятийного аппарата, в большинстве классических численных методов оптимизации (методах

линейного поиска, доверительной области и т.д.) при их построении используются «локальные средства». Рассматриваемый в настоящей работе численный алгоритм безусловной оптимизации CMA-ES в своем построении использует тот же базовый понятийный аппарат, и применительно к нему можно выделить стандартные понятия *длины шага* и его *направления*. При этом он выгодно отличается от большинства известных «классических» численных алгоритмов минимизации функции, т.к. в его случае данные понятия уже не являются локальными, и для их определения используются специфические механизмы, в основе которых лежат чисто эвристические соображения. Описание наиболее важных из них (*мутация*) было представлено ранее. Таким образом, в рамках рассматриваемого метаэвристического алгоритма можно рассматривать понятия длины шага и его направления в некотором «условно глобальном» или «квазиглобальном» смысле. Важно отметить, что относительно метода в целом следует сознательно избегать понятия «глобальный», так как для работы описываемого алгоритма на практике (как и для любого другого) всегда требуется ограничить «область поиска» решения. При этом в подавляющем большинстве случаев у нас недостаточно информации о «топографии» гиперповерхности значений минимизируемой функции. Тем не менее, применительно к рассматриваемому алгоритму будем использовать понятия глобального шага и глобального направления.

Теперь перейдем к рассмотрению реализации механизмов итеративного выбора *направления* и определения *длины шага* в рамках рассматриваемого алгоритма эволюционной стратегии. Чтобы понять, что считать глобальным направлением, а что глобальной длиной шага в CMA-ES, необходимо снова обратиться к выражению (1.15). Используя свойство устойчивости многомерного нормального распределения относительно линейных преобразований (т.е. аддитивность и однородность) [48], можно следующим образом представить эквивалент выражения (1.15), которое определяет фенотип каждой отдельной особи популяции в следующем $(g+1)$ -ом поколении:

$$\mathbf{x}^{(g+1)}_j \sim \mathbf{m}^{(g)} + \sigma^{(g)} N(\mathbf{0}, C^{(g)}), \quad j = 1.. \lambda. \quad (1.19)$$

Здесь $N(\mathbf{0}, C^{(g)})$ – нормальное распределение случайного вектора, центрированное относительно $\mathbf{0}$, $\sigma^{(g)} \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ – масштабирующий скалярный, строго положительный множитель, или «обобщенное стандартное отклонение» (по терминологии авторов алгоритма). Из выражения (1.19) следует, что параметр $\sigma^{(g)}$ напрямую «масштабирует» облако распределения случайного вектора (его задание позволяет пропорционально изменять длины полуосей соответствующего гиперэллипсоида). Индекс j соответствует номеру каждой отдельной особи популяции, чей набор признаков (фенотип) в следующем

поколении определяется посредством (1.19). Всего популяция насчитывает λ особей, их число остается неизменным при переходе от поколения к поколению.

Приведенное выражение (1.19) по своей общей структуре и форме напоминает типичное выражение, задающее базовый шаг алгоритма для известных локальных методов, например, градиентных, квазиньютоновских и др. Действительно, можно рассматривать математическое ожидание набора признаков особи $\mathbf{m}^{(g)}$ (для каждого поколения популяции) как текущее (в итерационном процессе) значение векторного аргумента (\mathbf{x}) минимизируемой функции. Тогда выражение вида $\sigma^{(g)}N(\mathbf{0}, C^{(g)})$ должно в определять его *приращение*. Для этого оно должно содержать в себе выражения (или отдельные параметры), определяющие направление и длину шага такого приращения.

Очевидно, что выражение $\sigma^{(g)}N(\mathbf{0}, C^{(g)})$ полностью соответствует данным «требованиям». Во-первых, при использовании многомерного нормального распределения $N(\mathbf{0}, C^{(g)})$ путем надлежащего выбора его параметров (ковариационной матрицы) удастся реализовать механизм «направленной мутации», т.е. фактически отслеживать характерные направления (*убывания*) для целевой функции, осуществляя таким образом механизм выбора *направления* для приращения векторного аргумента \mathbf{x} . Во-вторых, имея возможность с помощью скалярного параметра $\sigma^{(g)}$ масштабировать «размер» гиперэллипсоида облака распределения $N(\mathbf{0}, C^{(g)})$, можно говорить о некотором эквиваленте управления длиной шага приращения в рамках рассматриваемого численного алгоритма. При этом мы можем рассматривать данные понятия в «условно глобальном» ключе, то есть говорить о глобальном направлении и о глобальной величине шага приращения векторного аргумента \mathbf{x} .

Вследствие использования общего понятийного аппарата удастся выделить общность структуры для рассматриваемого численного алгоритма и большинства известных локальных методов. Однако в отличие от последних в данном случае мы сталкиваемся с более сложными связями между элементами, формирующими правую часть выражения (1.19). Важным моментом является то, что основными параметрами, определяющими основной шаг алгоритма, является тройка $(\mathbf{m}^{(g)}, C^{(g)}, \sigma^{(g)})$. При каждой следующей итерации метода, т.е. при генерации набора признаков особей следующего поколения с помощью выражения (1.19), требуется каким-то образом производить их *обновление*. Единственно возможный путь реализации процесса обновления – это проведение некоторой *апостериорной* оценки только на основе единственно доступной информации о значениях функции приспособленности для текущего поколения особей

популяции. Последнее определяет связи между основными управляющими параметрами алгоритма $(\mathbf{m}^{(g)}, C^{(g)}, \sigma^{(g)})$.

На практике это происходит так. Предположим, что мы задали (произвольно) некоторое начальное приближение \mathbf{x}_0 для *неизвестного* векторного аргумента \mathbf{x}^* , доставляющего минимум скалярной функции $f(\mathbf{x})$. Для получения информации о значениях минимизируемой функции в некоторой заранее ограниченной «области поиска» $Q \subset \mathbf{R}^n$ (Q - выпуклый многогранник в \mathbf{R}^n) следует сгенерировать начальную популяцию, состоящую из $\lambda > 2$ особей. Для этого необходимо воспользоваться выражением (1.19). При этом в качестве начальных значений для параметров $(\mathbf{m}^{(g)}, C^{(g)})|_{g=1}$ (т.е. первого поколения $g=1$) из «управляющей» алгоритмом тройки можно взять следующие:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{m}^{(1)} &= \mathbf{x}_0, \\ C^{(1)} &= I, \end{aligned} \right\}$$

где I – единичная матрица, а значение масштабирующего параметра $\sigma^{(1)}$ выбраны таким образом, чтобы вписать множество Q в закрытый шар радиуса $3 \cdot \sigma^{(1)}$. При таком выборе $\sigma^{(1)}$ вероятность выхода значений компонент случайного вектора \mathbf{x}_j за границы области Q *крайне мала*, что характерно для нормального распределения. Таким образом, воспользовавшись выражением (1.19) при генерации набора признаков для первого поколения популяции ($g=1$), состоящей из λ особей, мы получаем *изотропное* распределение вектора \mathbf{x} . После этого необходимо произвести обновление основной тройки управляющих параметров метода $(\mathbf{m}^{(g)}, C^{(g)}, \sigma^{(g)})$, используя для этого единственно доступную информацию о значениях функции приспособленности отдельных особей в текущем поколении популяции, т.е. $f(\mathbf{x}_j)|_{j=1..λ}$. На данном этапе (*обновление* управляющих параметров алгоритма) реализуются описанные ранее основные механизмы направленного, «условно детерминированного» эволюционного процесса. Так, механизму «направленной» или же «управляемой» **мутации** отвечает переопределение ковариационной матрицы C , а механизму «направленной» **селекции** – переопределение значения матожидания \mathbf{m} . Этап обновления данных параметров $(\mathbf{m}^{(g)}, C^{(g)})$ является наиболее важным, так как именно он фактически определяет *направление шага приращения* векторного аргумента \mathbf{x} в рамках структуры рассматриваемого алгоритма поиска минимума скалярной функции.

Интересно отметить следующее. Процедура итерационного *обновления* параметров $(\mathbf{m}^{(g)}, C^{(g)})$ в своей основе использует в качестве базовой информации апостериорные (после генерации популяции) оценки значений целевой функции. При этом присутствует

взаимовлияние рассматриваемых параметров друг на друга так как именно форма эллипсоида облака распределения будет влиять на результаты *селекции*, т.е. на обновление значения m . С другой стороны, именно задание вектора m в процессе итераций метода, центрирующего распределение (1.19), обеспечивает информацию о значениях функции приспособленности в окрестности вида $U_{(-3\sigma)}(m)$. На ее основе и обеспечивается отслеживание направлений убывания. В каком-то смысле здесь можно использовать в качестве аналогии процедуру оценки направлений в локальных методах – там мы всегда вычисляем производные именно в текущей точке, т.е. применительно к текущему значению аргумента функции. Помимо обновления параметров *направления* шага метода ($m^{(g)}$, $C^{(g)}$) требуется переопределить и параметр $\sigma^{(g)}$, характеризующий его *длину*. Для этого в рамках рассматриваемого алгоритма эволюционной стратегии используются некоторые эвристические соображения, о которых будет подробно рассказано позже.

Итак, обновив значения управляющих параметров распределения ($m^{(g)}$, $C^{(g)}$, $\sigma^{(g)}$) и *завершая базовый шаг рассматриваемого алгоритма*, можно переходить к генерации следующего поколения особей популяции. Для этого снова используется выражение (1.19). Таким образом, повторяя описанный базовый шаг алгоритма при переходе от поколения к поколению, удастся реализовать эволюционный процесс, направленный на последовательное улучшение значений функции приспособленности.

В целом, приведенное общее описание для базового шага алгоритма можно упрощенно проиллюстрировать следующей схемой, представленной на рисунке 1.2.

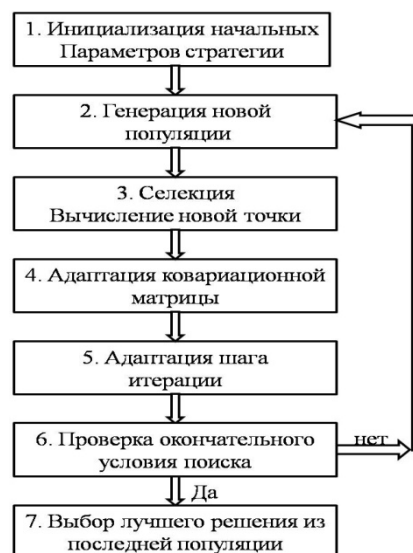


Рисунок 1.2 Упрощенная схема алгоритма рассматриваемой эволюционной стратегии с адаптацией параметров распределения. Показаны основные этапы, формирующие базовый шаг алгоритма.

Теперь непосредственно переходим к описанию процессов *обновления* (или *адаптации*) для тройки управляющих параметров ($m^{(g)}$, $C^{(g)}$, $\sigma^{(g)}$) рассматриваемого

алгоритма эволюционной стратегии в рамках его базового шага. Иными словами, опишем практическую реализацию механизмов «направленной» селекции и «управляемой» мутации.

Начнем с механизма *селекции*, отвечающего за апостериорное переопределение матожидания $\mathbf{m}^{(g)}$. Для этого используется следующий простой подход. С помощью выражения (1.19) в рамках генерируемой для каждого g -ого поколения популяции из λ особей происходит отбор (*селекция*) *лучших*, «элитных» особей μ (естественно, $\mu < \lambda$). Набор их признаков (фенотип) обладает наилучшим значением функции приспособленности для данного поколения популяции. Именно элитные особи должны дать потомство, чтобы закрепить найденный удачный набор признаков в следующем $(g+1)$ -ом поколении. При этом предполагается, что общее количество особей в популяции не изменяется при переходе от поколения к поколению и всегда составляет λ . Реализация механизма отбора в структуре алгоритма обеспечивается с помощью *смещения* оценки матожидания для набора признаков особей следующего поколения популяции $\mathbf{m}^{(g)} \rightarrow \mathbf{m}^{(g+1)}$. Смещение происходит на основе информации о значениях функции приспособленности у выявленных μ элитных особей. Последнее осуществляется следующим образом: при каждом *обновлении* значения $\mathbf{m}^{(g)}$ для векторов вида $\mathbf{x}_{i;\lambda}$, отвечающих наборам признаков элитных особей популяции, вычисляется их *средневзвешенное значение* $\mathbf{m}^{(g+1)}$. Оно используется для смещения центра распределения при генерации следующего поколения из λ особей. Для вычисления *средневзвешенного* $\mathbf{m}^{(g+1)}$ авторы алгоритма предлагают использовать следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{m}^{(g)} &\rightarrow \mathbf{m}^{(g+1)} : \\ \mathbf{m}^{(g+1)} &= \sum_{i=1}^{\mu} \omega_i \cdot \mathbf{x}_{i;\lambda}^{(g+1)}, \\ \omega_i &\geq 0, \quad \sum_{i=1}^{\mu} \omega_i = 1, \\ \omega_i &= \frac{\omega'_i}{\sum_{k=1}^{\mu} \omega'_k}, \quad \omega'_i = \ln(\mu + 0.5) - \ln(i). \end{aligned} \right\} \quad (1.20)$$

В приведенном выражении (1.20) вектора вида $\mathbf{x}_{i;\lambda}^{(g+1)}$ ($i \leq \mu$) соответствуют набору признаков отдельных элитных μ особей популяции. Их можно определить при помощи простой сортировки по убыванию значений функции приспособленности:

$$\left. \begin{aligned} S^{(g+1)} &= \bigcup_{j=1}^{\lambda} \mathbf{x}_j^{(g+1)}, \\ \mathbf{x}_{i:\lambda}^{(g+1)} &= \arg \min_{\mathbf{x}_j^{(g+1)} \in S^{(g+1)}} f(\mathbf{x}_j^{(g+1)}), \\ \forall i : i \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, i \leq \mu &\Rightarrow \\ S^{(g+1)} &= S^{(g+1)} \setminus \{\mathbf{x}_{i-1:\lambda}^{(g+1)}\} \\ \mathbf{x}_{i:\lambda}^{(g+1)} &= \arg \min_{\mathbf{x}_j^{(g+1)} \in S^{(g+1)}} f(\mathbf{x}_j^{(g+1)}), \end{aligned} \right\}$$

где множество $S^{(g+1)}$ состоит из отдельных наборов признаков (векторов \mathbf{x}_j) для рассматриваемой популяции из λ особей. Веса ω_i , входящие в выражение (1.20), подобраны так, чтобы обеспечить экспоненциальный характер «влияния» фенотипа $\mathbf{x}_{i:\lambda}^{(g+1)}$ наилучших особей среди μ элитных при формировании значения $\mathbf{m}^{(g+1)}$. Это значит, что центр распределения $\mathbf{m}^{(g+1)}$ всегда будет ощутимо смещаться в сторону тех элитных особей, для которых значение функции приспособленности является наименьшим в текущем $(g+1)$ -ом поколении популяции. Это обеспечивается близким к экспоненциальному росту значений весов ω_i по мере убывания номера i ($i \leq \mu$) для отобранных наборов признаков элитных особей $\mathbf{x}_{i:\lambda}^{(g+1)}$, отсортированных по убыванию значений функции приспособленности.

Стоит отметить, что в рамках рассматриваемого алгоритма в качестве значения μ всегда выбирается половина от общего числа особей популяции, т.е. $\mu = \lambda/2$. На чисто эмпирической основе авторы полагают, что выбор данного значения μ обеспечивает требуемую направленность смещения вектора матожидания $\mathbf{m}^{(g)} \rightarrow \mathbf{m}^{(g+1)}$ для набора признаков особей популяции, при котором в следующем поколении происходит закрепление наилучшего фенотипа. При этом, как указывается в работах авторов [129-133,218,219], для любого выбранного способа задания весовых коэффициентов ω_i , который удовлетворяет условиям из (1.20), всегда существует некоторое значение минимально потребного числа элитных особей, характеризующее эффективность принятого способа задания весов и определяемое следующим выражением:

$$\mu_{eff} = \left[\sum_{i=1}^{\mu} \omega_i^2 \right]^{-1}.$$

Очевидно, что всегда $1 \leq \mu_{eff} \leq \mu$, согласно условиям в (1.20). Чем ближе значение μ_{eff} к своей левой границе, тем большую «направленность» будет иметь смещение

математического ожидания $m^{(g)} \rightarrow m^{(g+1)}$ (1.20) в сторону векторов $x_{i;\lambda}^{(g+1)}$ с наименьшим индексом i . Это означает, что $m^{(g+1)}$ будет вбирать в себя наилучшие признаки среди элитных особей популяции.

Для рассматриваемого в алгоритме способа определения весовых коэффициентов ω_i (1.20) при выборе значения μ равным $\lambda/2$ значение μ_{eff} всегда составляет $\approx \lambda/4$. Следовательно, описываемый выражениями (1.20) способ определения $m^{(g+1)}$ обладает достаточной для эффективной работы алгоритма направленностью смещения математического ожидания $m^{(g)} \rightarrow m^{(g+1)}$. При этом он позволяет выбирать сравнительно небольшое число элитных особей популяции ($\lambda/2$), что напрямую отражается на объеме общих вычислительных затрат при реализации рассматриваемого численного метода.

Механизм обновления (*адаптации*) ковариационной матрицы C можно описать в рамках представленного ранее базового шага алгоритма. Данный этап обновления параметров распределения, представленный выражением (1.19), наиболее важен, т.к. именно адаптация матрицы C обеспечивает реализацию механизма «направленной» мутации. Это наравне с механизмом «направленной» селекции делает возможной реализацию «условно детерминированного» эволюционного процесса. С точки зрения формализации рассматриваемого численного алгоритма процедура адаптации ковариационной матрицы (как и обновление параметра m) в первую очередь позволяет задать эквивалент направлению шага приращения векторного аргумента x минимизируемой функции. На практике это обеспечивается посредством ориентации облака распределения случайного вектора (x) по нелокальным направлениям убывания целевой функции. О реализации вращений гиперэллипсоида распределения говорилось выше.

Очевидно, что для обновления ковариационной матрицы $C^{(g)} \rightarrow C^{(g+1)}$ необходимо использовать единственную доступную информацию (апостериорную) о наборе признаков особей популяции $(g+1)$ -ого поколения. Этим признакам отвечают значения функции приспособленности, как и на этапе селекции $m^{(g)} \rightarrow m^{(g+1)}$. На основе данной информации необходимо определить направленную оценку ковариационной матрицы $C^{(g+1)}$ («направленный эстиматор» по терминологии авторов алгоритма). Она должна быть такой, чтобы ее использование при генерации набора признаков для особей следующего поколения популяции $((g+2)$ -ого в текущих обозначениях) при помощи выражения (1.19) увеличило вероятность проявления ранее обнаруженных удачных признаков. В работах авторов рассматривалось несколько возможных вариантов

построения такого *направленного эстиматора*. Например, один из самых простых - вычислять ковариационную матрицу $C^{(g+1)}$ согласно ее определению:

$$C^{(g+1)} = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^{\lambda} (\mathbf{x}_j^{(g+1)} - \mathbf{m}^{(g)}) (\mathbf{x}_j^{(g+1)} - \mathbf{m}^{(g)})^T.$$

Очевидно, что данный вариант «эстиматора» $C^{(g+1)}$ не имеет *направленности*, так как не использует информацию о значениях функции приспособленности для текущего поколения популяции. Следовательно, он является неудовлетворительным с точки зрения возможного применения в составе алгоритма. Для формирования надлежащей «*направленности*» эстиматора кажется естественным и очевидным вновь обратиться к опробованной ранее (при *селекции*) схеме с «элитными» особями (μ), которые выявляются апостериорно. В итоге авторами эмпирическим путем был получен следующий способ вычисления «направленного эстиматора» ковариационной матрицы $C^{(g+1)}$:

$$C_{\mu}^{(g+1)} = \sum_{i=1}^{\mu} \omega_i (\mathbf{x}_{i:\lambda}^{(g+1)} - \mathbf{m}^{(g)}) (\mathbf{x}_{i:\lambda}^{(g+1)} - \mathbf{m}^{(g)})^T. \quad (1.21)$$

В приведенном выражении (1.21) весовые коэффициенты ω_i определяются согласно выражениям (1.20). Здесь представленный эстиматор $C_{\mu}^{(g+1)}$ использует информацию о значениях целевой функции, так как в его определении участвуют наборы признаков $\mathbf{x}_{i:\lambda}^{(g+1)}$, отвечающие элитным особям. При этом происходит дополнительное *усиление* направленной деформации гиперэллипсоида облака распределения, характеризующего девиацию набора признаков каждой отдельной особи популяции от некоторого центрирующего значения $\mathbf{m}^{(g)}$. Это осуществляется с помощью весовых коэффициентов ω_i , по *направлению* векторов $\mathbf{x}_{i:\lambda}^{(g+1)}$ с наименьшими значениями индекса i , так же как при вычислении смещения $\mathbf{m}^{(g)} \rightarrow \mathbf{m}^{(g+1)}$. Тем самым реализуется механизм отслеживания нелокальных направлений убывания целевой функции. Это можно проиллюстрировать изображениями, приведенными на рисунке 1.3. Вместе они отражают базовый шаг рассматриваемого нами алгоритма эволюционной стратегии с адаптацией параметров распределения.

В левой части рисунка 1.3 представлено облако распределения случайного вектора \mathbf{x} , отражающего девиацию набора признаков особей относительно некоторого центрированного значения $\mathbf{m}^{(0)}$ (показано «жирным» крестиком). Представленное распределение изотропно, т.е. поверхность гиперэллипсоида равной плотности распределения представляет собой гипербсферу. Это обусловлено тем, что при генерации первого поколения популяции особей в качестве ковариационной матрицы $C^{(g)}$ всегда

используется единичная, умноженная на некоторый масштабирующий скалярный множитель $\sigma^{(g)}$. Фактически этим задается начальная область поиска Q . Последнее характерно исключительно для *первого шага* алгоритма (т.е. генерации первого поколения), но не уменьшает общность структуры входящих в него операций. Для перехода к генерации набора признаков особей следующего поколения популяции необходимо обновить (адаптировать) параметры распределения в выражении (1.19), т.е. $m^{(0)} \rightarrow m^{(1)}$, $C^{(0)} \rightarrow C^{(1)}$, $\sigma^{(0)} \rightarrow \sigma^{(1)}$. Для этого из полученного изотропного распределения отбирается (селекция) μ векторов $x_{i;\lambda}^{(1)}$ (наборы признаков), соответствующих «элитным» особям, для которых значения функции приспособленности оказываются наилучшими. После этого с помощью выражений (1.20) и (1.21), реализующих механизмы «направленной» *селекции* и «направленной» *мутации*, происходит переопределение параметров m и C .

Результатом являются направленное смещение матожидания и направленная деформация эллипсоида распределения (вместе с переориентацией его осей в общем случае) по направлению убывания целевой функции. Последнее показано в центральной части рисунка 1.3. На всех трех приведенных изображениях тонкие пунктирные линии соответствуют изолиниям значения минимизируемой функции, которая в рассматриваемом примере линейная. Наконец, после завершения процедуры адаптации параметров распределения, что соответствует окончанию базового шага алгоритма, с помощью выражения (1.19) можно будет сгенерировать новый набор признаков для λ особей популяции (т.е. для потомства элитных). При этом, как показано в правой части рисунка 1.3, происходит закрепление в следующем поколении популяции найденных наилучших наборов признаков особей. Помимо этого увеличивается вероятность того, что потомство унаследует от своих родителей общую положительную динамику развития набора признаков. Это отражено в направленном смещении матожидания и соответствующей деформации гиперэллипсоида облака распределения случайного вектора. Последнее приводит к увеличению числа особей популяции, для которых девиация компонент случайного вектора, определяющего их фенотип, скоррелирована с характерными направлениями целевой функции. Начиная с генерации нового поколения популяции базовый шаг алгоритма повторяется. Итерационный процесс (при переходе от поколения к поколению) продолжается до срабатывания заданного критерия останова (их, как правило, несколько). Об этом, также как и о механизме обновления «глобального шага» $\sigma^{(g)}$ (масштабирующего эллипсоид распределения), будет сказано ниже.

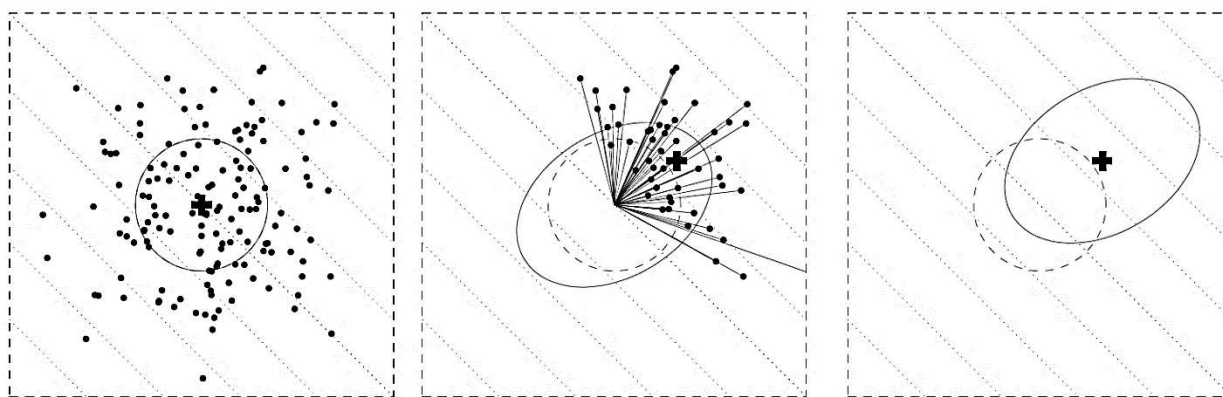


Рисунок 1.3 Обновление управляющих параметров распределения ($m^{(g)}$, $C^{(g)}$) в ходе базового шага алгоритма. На приведенных изображениях, построенных на плоскости изолиний целевой функции (линейной в рассматриваемом примере) показано: математическое ожидание (толстый «жирный» крестик) для набора признаков отдельных особей популяции (точки на графике); гиперэллипсоиды облака распределения случайного вектора (тонкие сплошные линии), определяющие форму данных эллипсоидов, отвечают равному значению плотности вероятности многомерного нормального распределения. На левом рисунке показано первое поколение популяции, характеризуемое изотропным облаком распределения случайного вектора. В центре изображены процессы направленного смещения математического ожидания (селекции) и адаптации ковариационной матрицы (деформация эллипсоида распределения), основанные на информации о значениях целевой функции в точках, отвечающих «элитным» особям. Представлен механизм отслеживания *направлений*. В правой части рисунка изображены адаптированные параметры распределения, которые будут использованы при генерации фенотипа особей следующего поколения. Видно, что потомство элитных особей с большей вероятностью унаследует удачный набор признаков. При этом возрастет и число особей, девиация фенотипа которых скоррелирована с направлением убывания целевой функции.

В целом на данном этапе заканчивается общее описание базового шага алгоритма и соответствующих ему этапов адаптации параметров распределения, отражающих процессы «направленных» (или управляемых) селекции и мутации. Остается нераскрытым вопрос только об эффективном управлении масштабирующим параметром $\sigma^{(g)}$ (длиной «глобального» шага), которое напрямую определяет общую и «локальную» сходимость метода. Для его решения авторы алгоритма предлагают дальнейшее усовершенствование процедур адаптации управляющих параметров ($C^{(g)}$, $\sigma^{(g)}$), используя для этого эвристические соображения в той или иной степени реализующие процессы обучения. Кроме того, реализация текущей версии алгоритма требует проведения достаточно большого объема вычислений минимизируемой функции, т.к. качество описываемых процессов итеративной *адаптации* управляющих параметров распределения напрямую зависит от количества особей популяции, от числа элитных особей и т.д. Здесь под «качеством» мы понимаем точность полученных оценок средневзвешенного $m^{(g+1)}$ и направленного эстиматора $C_{\mu}^{(g+1)}$.

Основным общим недостатком всех метаэвристических алгоритмов, в том числе рассматриваемого численного метода оптимизации, является значительное число потребных вычислений функции. Для того, чтобы нивелировать этот недостаток требуется максимально использовать накопленную информацию о ранее сделанных удачных шагах алгоритма, т.е. использовать эффект *кумуляции*, или *накопления*. При реализации данного подхода с целью обновления параметров $(C^{(g)}, \sigma^{(g)})$ авторы алгоритма предлагают использовать несколько независимых механизмов простого «обучения». Первый из них предполагает использование всей доступной информации, накопленной в ходе эволюционного процесса. Так, например, можно использовать следующее простое выражение для оценки направленного эстиматора ковариационной матрицы:

$$C^{(g+1)} = \frac{1}{g+1} \sum_{i=0}^g \frac{1}{(\sigma^{(i)})^2} C_{\mu}^{(i+1)}. \quad (1.22)$$

Видно, что «отмасштабированные» оценки для направленного эстиматора C_{μ} , найденные на предыдущих поколениях популяции, фактически просто суммируются с равными «весами». Интуитивно понятно, что накопленная в ходе g -ых поколений информация в данном случае не должна иметь *равный вес*. Здесь можно воспользоваться следующей аналогией с локальными методами: в близкой окрестности решения направление шага метода изменяется не так сильно, как, например, в начале работы алгоритма. Таким образом, для рассматриваемого *нелокального* метода, в котором преимущественные направления убывания целевой функции могут быть определены достаточно быстро (на первых поколениях популяции), можно использовать аналогичный механизм «стабилизации» направлений. Этот механизм состоит в смещении веса информации, применяемой для оценки ковариационной матрицы, в сторону предпоследних поколений эволюционного процесса. Подобное смещение «веса» при оценке матрицы $C^{(g+1)}$ (стабилизирующее «актуальное» направление убывания) использовано в следующей «модификации» приведенного ранее выражения (1.22):

$$\left. \begin{aligned} C^{(g+1)} &= (1 - c_{\text{cov}}) C^{(g)} + c_{\text{cov}} \frac{1}{(\sigma^{(g)})^2} C_{\mu}^{(g+1)} = \\ &= (1 - c_{\text{cov}}) C^{(g)} + c_{\text{cov}} \sum_{i=1}^{\mu} \omega_i \mathbf{y}_{i:\lambda}^{(g+1)} \mathbf{y}_{i:\lambda}^{(g+1)\text{T}}, \\ \mathbf{y}_{i:\lambda}^{(g+1)} &= \left(\mathbf{x}_{i:\lambda}^{(g+1)} - \mathbf{m}^{(g)} \right) / \sigma^{(g)}. \end{aligned} \right\} \quad (1.23)$$

В приведенном выражении весовой коэффициент c_{cov} , $0 \leq c_{\text{cov}} \leq 1$ характеризует степень использования информации с предыдущего поколения при оценке направленного эстиматора ковариационной матрицы. Выбор и обновление данного параметра представляется весьма существенным для рассматриваемого численного метода оптимизации. Авторы алгоритма отмечают независимость выбора значения c_{cov} от вида минимизируемой функции и предлагают в процессе алгоритма определять его следующим образом:

$$c_{\text{cov}} = \min(\mu_{\text{eff}}, n^2) / n^2.$$

Данная оценка для параметра c_{cov} подобрана авторами на основе анализа результатов работы алгоритма при исследовании на минимум выпукло-квадратичных функций. В работах авторов показано, что применение выражения (1.23) для последовательного обновления направленного эстиматора ковариационной матрицы $C^{(g+1)}$ позволяет достаточно сильно снизить число особей в популяции без ощутимой потери качества ее оценки.

Также для повышения качества оценки направленного эстиматора с помощью выражения (1.23) при общем *снижении численности популяции* авторы алгоритма предлагают использовать концепцию т.н. *эволюционного пути*. Она основана на использовании накопления (кумуляции) информации о ранее выполненных «удачных» смещениях вектора матожидания $\mathbf{m}^{(g)} \rightarrow \mathbf{m}^{(g+1)}$. Основная «идея» данной концепции базируется на использовании *направления смещения* $\mathbf{m}^{(g)} \rightarrow \mathbf{m}^{(g+1)}$ при формировании ориентации гиперэллипсоида облака рассеяния случайного вектора. Это означает, что «направленность» эстиматора ковариационной матрицы $C^{(g+1)}$ должна быть согласована с *направлениями смещения* $\mathbf{m}^{(g)} \rightarrow \mathbf{m}^{(g+1)}$. Последнее также является эффективным механизмом «стабилизации» общего направления шага приращения рассматриваемого алгоритма при малом числе особей в популяции. Итак, в качестве такого *эволюционного пути* будем рассматривать вектор $\mathbf{p}_C \in \mathbf{R}^n$, который при переходе от поколения к поколению определяется следующим образом:

$$\mathbf{p}_C^{(g+1)} = (1 - c_c) \mathbf{p}_C^{(g)} + \sqrt{c_c (2 - c_c) \mu_{\text{eff}}} \frac{\mathbf{m}^{(g+1)} - \mathbf{m}^{(g)}}{\sigma^{(g)}}, \quad (1.24)$$

где $\mathbf{p}_C^{(g)}$ – *эволюционный путь* в g -ом поколении, c_c – параметр обучения (весовой коэффициент) эволюционного пути, как и ранее $0 \leq c_c \leq 1$. Начальное значение вектора $\mathbf{p}_C^{(0)}$ принимается равным $\mathbf{0}$. Выражение вида

$$\sqrt{c_c (2 - c_c) \mu_{eff}}$$

представляет собой т.н. *нормализующий коэффициент* (или *масштабирующий коэффициент*), который подбирается так, чтобы в процессе выполнения шагов алгоритма вектор $\mathbf{p}_C^{(g)}$ всегда «содержался» в границах облака распределения $N(\mathbf{0}, C^{(g)})$. В работах [126-126, 215,216] показано, что для эффективного определения значения параметра c_c можно использовать следующее простое выражение: $c_c=4/(4+n)$. Таким образом, используя концепцию *эволюционного пути*, авторы алгоритма предлагают следующее окончательное выражение для эффективной оценки направленного эстиматора ковариационной матрицы $C^{(g+1)}$, полученное на основе (1.23) и используемое при рассмотрении популяции с малым числом особей:

$$C^{(g+1)} = (1 - c_{cov}) C^{(g)} + c_{cov} \left(1 - \frac{1}{\mu_{cov}} \right) \sum_{i=1}^{\mu} \omega_i \mathbf{y}_{i:\lambda}^{(g+1)} \left(\mathbf{y}_{i:\lambda}^{(g+1)} \right)^T + \left. \begin{aligned} &+ \frac{c_{cov}}{\mu_{cov}} \mathbf{p}_C^{(g+1)} \left(\mathbf{p}_C^{(g+1)} \right)^T, \end{aligned} \right\} \quad (1.25)$$

Здесь в качестве весового коэффициента μ_{cov} авторы предлагают использовать значение оценки μ_{eff} . Представленное выражение (1.25) обеспечивает эффективное отслеживание нелокальных направлений убывания минимизируемой функции и при этом не требует проведения значительного объема вычислений, т.к. число особей популяции может быть выбрано относительно небольшим. Последнее особенно выделяет рассматриваемую в диссертационной работе модификацию алгоритма эволюционной стратегии с описанным механизмом адаптации ковариационной матрицы (СМА-ES) среди прочих метаэвристических алгоритмов. Преимущества данной модификации состоят в следующем: 1) при сравнительно малом количестве имеющейся информации о значениях целевой функции она позволяет без потери «глобальности» эффективно отслеживать ее направления убывания; 2) «искусственная стабилизация» направления шага приращения метода позволяет увеличить скорость его сходимости к решению.

Остается кратко описать предлагаемый авторами алгоритма [219] механизм *обновления (адаптации)* «масштабирующего» параметра распределения $\sigma^{(g)}$, фактически определяющего длину «глобального» шага для рассматриваемого численного метода оптимизации. Для этого также предполагается использовать концепцию эволюционного пути. В данном случае вводится понятие *сопряженного эволюционного пути*, который описывается следующим вектором $\mathbf{p}_\sigma \in \mathbf{R}^n$:

$$\mathbf{p}_\sigma^{(g+1)} = (1 - c_c) \mathbf{p}_\sigma^{(g)} + \sqrt{c_\sigma (2 - c_\sigma) \mu_{eff}} \left(C^{(g)} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\mathbf{m}^{(g+1)} - \mathbf{m}^{(g)}}{\sigma^{(g)}}, \quad (1.26)$$

где $\mathbf{p}_\sigma^{(0)} = \mathbf{0}$, а весовой коэффициент $c_\sigma < 1$. Использование в приведенном выражении матрицы $(C^{(g)})^{-1/2}$ фактически позволяет трансформировать (или же нормализовать) вектор \mathbf{p}_σ , так, чтобы он принадлежал распределению $N(\mathbf{0}, I)$. Далее используется эмпирическое предположение о том, что длину шага не требуется менять только в том случае, когда предыдущие шаги алгоритма

$$\sim \frac{\mathbf{m}^{(g+1)} - \mathbf{m}^{(g)}}{\sigma^{(g)}}$$

оказываются никак не *скоррелированы*. В качестве оценки потребности изменения параметра σ можно воспользоваться следующим выражением, фактически отражающим корреляцию между длиной вектора \mathbf{p}_σ (1.26) и математическим ожиданием для длин случайных векторов из распределения $N(\mathbf{0}, I)$:

$$\ln \sigma^{(g+1)} = \ln \sigma^{(g)} + \frac{c_\sigma}{d_\sigma \mathbb{E} \|N(\mathbf{0}, I)\|} \left(\|p_\sigma^{(g+1)}\| - \mathbb{E} \|N(\mathbf{0}, I)\| \right),$$

где d_σ – демпфирующий параметр, регулирующий скорость изменения величины $\sigma^{(g)}$. Параметры c_σ и d_σ были подобраны авторами алгоритма чисто эмпирическим путем. Полученное выражение можно представить в более удобной форме:

$$\sigma^{(g+1)} = \sigma^{(g)} \exp \left(\frac{c_\sigma}{d_\sigma} \left(\frac{\|p_\sigma^{(g+1)}\|}{\mathbb{E} \|N(\mathbf{0}, I)\|} - 1 \right) \right) \quad (1.27)$$

Таким образом, выражение, записанное в форме (13), используется в качестве основного механизма адаптации «глобального» шага метода. На этом мы заканчиваем описание механизмов *адаптации* тройки для основных параметров распределения ($\mathbf{m}^{(g)}$, $C^{(g)}$, $\sigma^{(g)}$) в рамках основного шага рассматриваемой эволюционной стратегии, а вместе с тем и описание самого алгоритма.

Далее приведем выражения, использующиеся для определения начальных значений основных управляющих параметров алгоритма. Для обеспечения начала работы алгоритма требуется задать следующие его параметры:

- количество особей λ в популяции рекомендуется выбирать следующим образом:
 $\lambda = 4 + \text{floor}(3 \ln(n))$, где n – размерность задачи;
- количество элитных особей $\mu \leq \lambda$ обычно задается $\mu = \frac{\lambda}{2}$;

- весовые коэффициенты: $w_i = \frac{\ln(\mu+1) - \ln(i)}{\sum_{i=1}^{\mu} \ln(\mu+1) - \ln(i)}$, $i=1, \dots, \mu$;
- коэффициент оценки эффективности выбранного способа определения весов $\mu_{eff} = \left(\sum_{i=1}^{\mu} w_i^2 \right)^{-1}$;
- параметр обучения при реализации механизма кумуляции в управлении размером «глобального» шага метода определяется как $c_{\sigma} = \frac{\mu_{eff} + 2}{n + \mu_{eff} + 3}$;
- параметр затухания, «масштабирующий» изменение размера «глобального» шага, $d_{\sigma} = 1 + 2 \max \left(0, \sqrt{\frac{\mu_{eff} - 1}{n + 1}} - 1 \right) + c_{\sigma}$;
- начальное значение показателя скорости адаптации ковариационной матрицы $c_{cov} = \frac{1}{\mu_{cov}} \frac{2}{(n + \sqrt{2})^2} + \left(1 - \frac{1}{\mu_{cov}} \right) \min \left(1, \frac{2\mu_{eff} - 1}{(n + 2)^2 + \mu_{eff}} \right)$.

Условия останова

В качестве условий окончания работы алгоритма могут быть использованы следующие:

- превышено некоторое заданное предельное количество поколений популяции;
- норма разности между $m^{(g)}$ и $m^{(g+1)}$ становится меньше некоторого заранее заданного значения;
- число обусловленности для ковариационной матрицы становится больше, чем 10^{14} ;
- значение выражения $\sigma \times \max(\text{diag}(D))$ превышает 10^4 ;
- если в течение последних $[10 + (30n/\lambda)]$ поколений диапазон изменения значений минимизируемой функции не превышает некоторого малого числа, например 10^{-12} .

Выбор решения

По окончании работы алгоритма решения задачи необходимо выбрать особь с набором признаков, для которого значение функции приспособленности оказывается наименьшим.

Общие замечания по методу CMA-ES

Применение данного метода целесообразно при численном решении задач безусловной оптимизации, где в качестве минимизируемой выступает в общем случае негладкая функция, обладающая сложной «топографией» многообразия ее значений. Эффективность применения данного метода для рассматриваемых в диссертационной работе оптимизационных проблем механики космического полета заключается в следующем.

Во-первых, этот метод не является *локальным*, т.е. в результате решения можно надеется на обнаружение *глобального оптимума*. Это будет зависеть от целого ряда факторов, и основными среди них являются: надлежащее определение первоначальных границ области поиска решения Q и количества особей популяции λ . Последнее является стандартной трудностью для всех метаэвристических алгоритмов. Однако за счет использования в процессе итеративного решения задачи ряда интересных механизмов управления основными параметрами шага алгоритма рассматриваемый метод может легко выйти за пределы начальной области поиска решения. Эти механизмы реализуют условно детерминированное отслеживание характерных нелокальных направлений для целевой функции и эффективный выбор длины «глобального» шага. К тому же предложенные авторами алгоритма [131,219] механизмы обновления трех ключевых параметров базового шага метода не требуют значительного размера популяции, т.к. снижение количества особей в популяции в целом не приводит к качественному ухудшению информации о значениях минимизируемой функции. Последнее компенсируется эффективным управлением длиной «глобального» шага.

Во-вторых, при решении известных оптимизационных проблем механики космического полета мы достаточно часто сталкиваемся с высокой чувствительностью сходимости последних в зависимости от выбора начального приближения. Это, в свою очередь, приводит к многочисленным отказам при использовании классических (как правило, локальных) численных методов. Используемый в работе метод показал очень хорошую вычислительную устойчивость и продемонстрировал сходимость даже в случае абсолютно произвольного начального приближения.

Основное преимущество метода CMA-ES по сравнению с другими модификациями алгоритма эволюционной стратегии, а также с метаэвристическими алгоритмами в целом, заключается в том, что он в своей структуре фактически

использует классический и притом строго детерминированный аппарат, характерный для локальных численных методов оптимизации (с качественной точки зрения). Последнее реализовано в структуре алгоритма СМА-ES отслеживанием «глобальных» направлений убывания целевой функции и эффективным механизмом выбора длины «глобального» шага приращения. Это обеспечивает лучшую скорость сходимости метода по сравнению с метаэвристическими методами.

1.6 АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОСТИ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ НА ПРИМЕРЕ ОПТИМИЗАЦИИ МЕЖПЛАНЕТНОГО ПЕРЕЛЕТА К МАРСУ КА С ЭРДУ

В настоящем разделе рассмотрено две модельные задачи оптимизации траектории межпланетного перелета к Марсу КА с ЭРДУ. В первой задаче исследуется вариант идеально-регулируемой ЭРДУ. Во второй задаче – вариант нерегулируемой ЭРДУ (тяги и удельный импульс этой установки рассматриваются заданными, а выбираемыми управлениями рассматривается закон включения-выключения ЭРДУ и направление её тяги на активных участках полета).

Целью раздела является сравнительный анализ эффективности большого числа тестируемых методов при решении задачи оптимизации межпланетного перелета КА с ЭРДУ.

1.6.1 Оптимизация траектории гелиоцентрического перелета орбита Земли – орбита Марса КА с идеально-регулируемой ЭРДУ

Модель движения КА с идеально-регулируемой ЭРДУ

Гелиоцентрическое движение КА рассматривается под влиянием двух сил: гравитационной силы притяжения КА Солнцем и силы тяги ЭРДУ. Гравитационное поле Солнца рассматривается как ньютоновское. Математическая модель[69], описывающая движение КА, имеет следующий вид:

$$\dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \mathbf{V} \\ -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} + \frac{T}{m}\mathbf{u} \\ -\frac{T^2}{2P} \end{bmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{X}, \mathbf{u}, t) \quad (1.28)$$

Где $\mathbf{X} = [\mathbf{r} \ \mathbf{V} \ m]^T$, $\mathbf{r} = [x \ y \ z]^T$, $\mathbf{V} = [v_x \ v_y \ v_z]^T$. \mathbf{r} – вектор положения КА, \mathbf{V} – вектор скорости КА, \mathbf{X} – вектор состояния КА, μ – гравитационная константа Солнца, T – величина тяги ЭРДУ, m – масса КА, P – реактивная мощность двигателя, \mathbf{u} – орт направления вектора тяги. Вектор управления для системы (1.28) определяется как[110]

$$\mathbf{u}_c = [\mathbf{u} \ T \ P]^T \quad (1.29)$$

При использовании идеально-регулируемого двигателя величина тяги, направление тяги и реактивная мощность двигателя связаны следующими зависимостями:

$$|\mathbf{u}| = 1 \quad (1.30)$$

$$0 \leq P \leq P_{\max} \quad (1.31)$$

$$T = \frac{2P}{c} \quad (1.32)$$

В последнем равенстве c – скорость истечения реактивной струи, P_{\max} – максимальная реактивная мощность.

Формулировка задачи оптимального управления

Критерий оптимизации (форма Майера)

$$\max J = m_f \quad (1.33)$$

Модификации критерия оптимизации (расширенный функционал)

$$\max J' = G + \int_{t_0}^{t_f} [H - \boldsymbol{\lambda}^T \dot{\mathbf{X}}] dt \quad (1.34)$$

$$G = m_f + \mathbf{v}^T \boldsymbol{\psi} \quad (1.35)$$

Гамильтониан задачи оптимального управления следующий:

$$H = \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{f} = \boldsymbol{\lambda}_r^T \mathbf{V} + \boldsymbol{\lambda}_v^T \left[-\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} + \frac{T}{m} \mathbf{u} \right] - \lambda_m \frac{T^2}{2P} \quad (1.36)$$

где $\boldsymbol{\lambda}_r = [\lambda_x \ \lambda_y \ \lambda_z]^T$ – сопряженный вектор к вектору положения КА,

$\boldsymbol{\lambda}_v = [\lambda_{vx} \ \lambda_{vy} \ \lambda_{vz}]^T$ – сопряженный вектор к вектору скорости КА (базис вектор) и λ_m –

сопряженная переменная к массе КА. Справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{X}} &= \mathbf{f} \\ \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}_c} &= 0 \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}} &= - \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{X}} \right)^T \end{aligned} \quad (1.37)$$

Условие равенства нулю производной от гамильтониана по управляющему вектору \mathbf{u}_c максимизирует гамильтониан и дает оптимальное управление. Производные гамильтониана по \mathbf{u} и T дают

$$\mathbf{u} = \frac{\boldsymbol{\lambda}_v}{\lambda_v} \quad (1.38)$$

$$T = \frac{\lambda_v P_{\max}}{\lambda_m m} \quad (1.39)$$

Формулировка краевой задачи

Вектор начальных условий для анализа гелиоцентрической траектории полета имеет вид:

$$\mathbf{X}(t_o) = [\mathbf{r}_E(t_o) \quad \mathbf{V}_E(t_o) \quad m_o]^T$$

где, $\mathbf{r}_E(t_o)$ и $\mathbf{V}_E(t_o)$ – радиус-вектор и вектор скорости Земли в момент старта КА и m_o – масса КА в начале гелиоцентрической траектории.

Краевыми условиями рассматриваются компоненты вектора положения КА и вектора скорости КА в конечной точке траектории.

$$\mathbf{g}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{КА}(t_f) - \mathbf{r}_f(t_f) \\ \mathbf{V}_{КА}(t_f) - \mathbf{V}_f(t_f) \end{bmatrix} = 0 \quad (1.40)$$

Конечная масса КА максимизируется. Из условий оптимальности следует, что сопряженная переменная к массе в конечной точке траектории не должна быть отрицательной. Используя однородность сопряженной системы, принимается ее равной единице [174]. Следовательно, краевые условия в конечной точке траектории могут быть представлены в следующем виде:

$$\mathbf{g}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{КА}(t_f) - \mathbf{r}_f(t_f) \\ \mathbf{V}_{КА}(t_f) - \mathbf{V}_f(t_f) \\ \lambda_m(t_f) - 1 \end{bmatrix} = 0. \quad (1.41)$$

При этом неизвестный вектор этой краевой задачи \mathbf{z} состоит из 7 скалярных величин сопряженных переменных в начальной точке гелиоцентрической траектории.

Для решения описанной краевой задачи, рассмотрим задачу нахождения таких компонентов вектора неизвестных начальных условий \mathbf{z} , которые минимизируют сумму квадратов невязок системы (1.41).

$$G(\mathbf{z}) = \mathbf{g}(\mathbf{z})^T \mathbf{g}(\mathbf{z}). \quad (1.42)$$

Уравнение (1.42) рассматривается минимизируемым функционалом при использовании СМА-ES .

Для численного анализа рассматриваются следующие характеристики КА и транспортной операции:

начальная масса КА – 1000кг;

максимальная мощность – 5.88399 кВт;

дата старта КА от Земли – 20.04.2035.

время перелета – 350 суток.

Положение и скорость планет считаются по DE 405 [205].

Для интегрирования системы дифференциальных уравнений оптимального перелета используется DOP853 [128].

Рассматривается «нулевая стыковка» КА с Марсом.

Положение Земли в момент старта КА в инерциальной гелиоцентрической эклиптической системе координат J2000 [-0.8760574069236544; -0.491154904729685; 0.000046001773724] а.е.

Скорость Земли в момент старта КА в той же системе координат [14.083376610721567 - 26.085404600217718 0.000966731832575] км/с.

Положение Марса при подлете КА к его окрестности в гелиоцентрической эклиптической системе координат

[-0.381605717682837; 1.554980648731750; 0.041943001629745] а.е.

Скорость Марса при подлете КА к его окрестности в той же системе координат

[-22.616680602871789; -3.713152591550343; 0.476274100766203] км/с.

Анализ зависимости невязок краевых условий от неизвестных параметров краевой задачи

Проанализируем зависимость невязок краевых условий (точнее суммы квадратов невязок краевых условий) от неизвестных параметров краевой задачи. Этих неизвестных параметров краевой задачи 7. Анализировать функцию семи аргументов задача сложная. Чтобы появилась возможность исследовать функции с использованием изолиний, поступим следующим образом. Зафиксируем пять из семи неизвестных параметров краевой задачи, оставляя свободными оставшиеся два параметра. Примем, что

$$\lambda_r(t_0) = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \\ 0 \end{bmatrix}; \lambda_{v_y}(t_0) = -0.1; \lambda_{v_z}(t_0) = 0.$$

Оставшиеся свободными параметры $\lambda_{v_x}(t_0), \lambda_m(t_0)$ проварьируем в диапазоне 0...+1. На рисунке 1.4 приведены изолинии суммы квадратов невязок краевых условий на плоскости $\lambda_{v_x}(t_0) - \lambda_m(t_0)$. Показаны изолинии со значением суммы квадратов невязок до 5. Точки плоскости, на которых нет изолиний (нижний левый угол плоскости и верхняя часть плоскости), соответствуют значениям суммы квадратов невязок большим 5. Анализ показывает, что анализируемая функция имеет два локальных минимума. Один находится в центре концентрических овалов с примерными координатами $\lambda_{v_x}=0.65, \lambda_m=0.32$. Второй минимум принадлежит к узкому ущелью в нижней части рассматриваемой плоскости. Значение обоих этих минимумов существенно отличается от нулевого (немного больше 1).

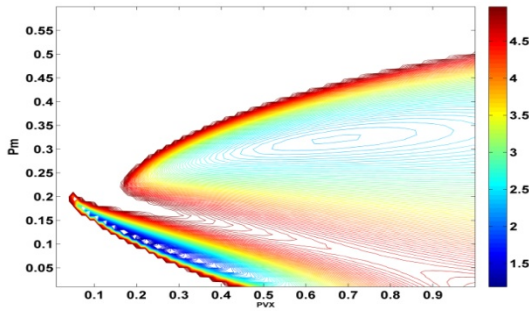


Рисунок 1.4а. Изолинии суммы квадратов невязок как функции λ_{vx} (ось абсцисс) и λ_m (ось ординат) $\lambda_{vy}(t_0) = -0.1$

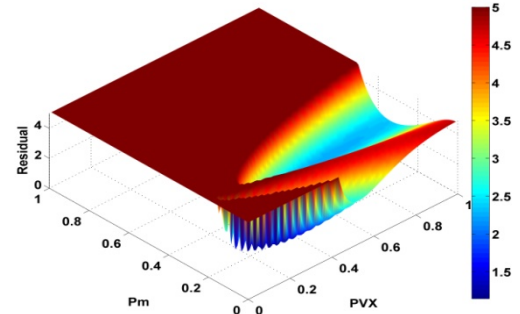


Рисунок 1.4б. Сумма квадратов невязок как функции λ_{vx} и λ_m в пространстве

На рисунке 1.4б сумма квадратов невязок краевой задачи как функция $\lambda_{vx}(t_0), \lambda_m(t_0)$ показана в пространстве. Тёмно-коричневым цветом выделена, та часть

к

пространства, где сумма квадратов невязок больше 5. Видна сложная структура функции, в частности несколько глубоких её «ущелий».

Приведем в качестве примера анализ рассматриваемой функции при двух других наборах фиксированных значений неизвестных параметров краевой задачи. На рисунке 1.5 представлены изолинии суммы квадратов невязок как функции λ_{vy} и λ_m для следующего набора параметров краевой задачи:

$$\lambda_r(t_0) = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \\ 0 \end{bmatrix}; \lambda_{vx}(t_0) = 0.1; \lambda_{vz}(t_0) = 0.$$

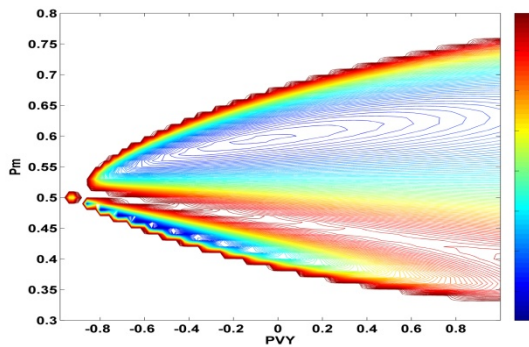


Рисунок 1.5. Изолинии суммы квадратов невязок как функции λ_{vy} (ось абсцисс) и λ_m (ось ординат). $\lambda_{vx}(t_0) = 0.1$

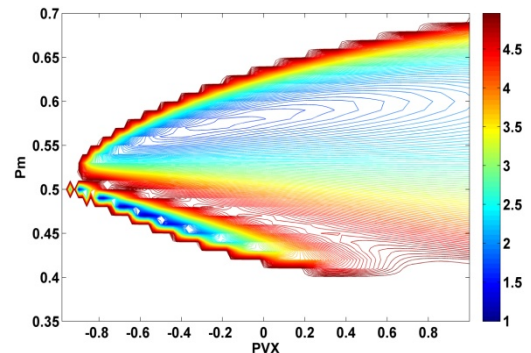


Рисунок 1.6. Изолинии суммы квадратов невязок как функции λ_{vx} (ось абсцисс) и λ_m (ось ординат). $\lambda_{vy}(t_0) = 0.1$

Анализ приведенных изолиний показывает, что анализируемая функция имеет ярко выраженные два минимума, которые разделены высоким «хребтом». Ясно, что использование локальных свойств исследуемой функции, принципиально не может дать возможности в процессе итерационного процесса минимизации суммы квадратов невязок перейти из окрестности одного минимума в окрестность другого минимума.

На рисунке 1.6 представлены изолинии суммы квадратов невязок как функции λ_{v_x} и λ_m для следующего набора параметров краевой задачи:

$$\lambda_r(t_0) = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \\ 0 \end{bmatrix}; \lambda_{v_y}(t_0) = 0.1; \lambda_{v_z}(t_0) = 0.$$

Анализ приведенных изолиний показывают существование двух очень “узких ущелий” исследуемой функции. Отметим, что использованное ограничение сверху значения суммы квадратов невязок значением 5, не позволило показать на рассматриваемой плоскости локальные минимумы с большим значением невязки. Они тоже существуют, что в общем случае затрудняет поиск решения краевой задачи и показывают, что методы оптимизации, использующие анализ только локальных свойств исследуемой функции, могут оказаться неэффективными и в общем случае могут не позволить решить задачу.

Анализ полученных решений рассматриваемой задачи оптимизации перелета с идеально-регулируемой электроракетной двигательной установкой

Для рассматриваемой задачи перелета к Марсу с идеально-регулируемой двигательной установкой было найдено два решения (две экстремали, удовлетворяющие условиям ПМП). Эти решения сильно отличаются по величине максимизируемой конечной массе КА:

Для решения, которое назовём первым, конечная масса КА равна 907.5 кг. Во втором решении конечная масса КА равна всего 128.7 кг.

На рисунке 1.7 показана траектория гелиоцентрического перелета для первого решения. Угловая дальность гелиоцентрического перелета равна почти 270° . Гелиоцентрический радиус вектор КА вдоль траектории перелета монотонно увеличивается. На всей траектории перелета тяга ЭРДУ увеличивает энергию КА. Оптимальная величина тяги как функция времени на траектории гелиоцентрического перелета к Марсу показана на рисунке 1.8. Довольно традиционно для перелетов КА с идеально-регулируемым двигателем в средней части траектории перелета тяга становится весьма малой, в этот момент максимального значения достигает удельный импульс рассматриваемого ЭРДУ.

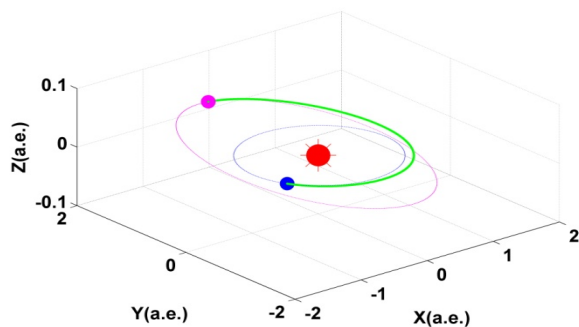


Рисунок 1.7. Траектория гелиоцентрического перелета к Марсу. Идеально-регулируемый ЭРДУ. Первое решение

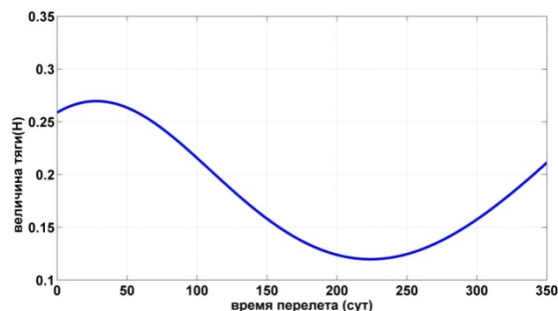


Рисунок 1.8. Оптимальная величина тяги как функция времени на траектории гелиоцентрического перелета к Марсу. Идеально-регулируемый ЭРДУ. Первое решение

На рисунке 1.9 показана оптимальная траектория гелиоцентрического перелета для второй экстремали. Угловая дальность гелиоцентрического перелета на втором решении больше угловой дальности на первом решении на один полный оборот вокруг Солнца. Гелиоцентрический радиус вектор КА вдоль траектории перелета меняется немонотонно. Благодаря тяге ЭРДУ КА начальная значительная часть (больше витка) траектории КА находится внутри орбиты Земли. Оскулирующая большая полуось на этой части траектории значительно меньше 1 а.е. Энергия вдоль траектории перелета меняется немонотонно (на начальном участке тяга ЭРДУ её уменьшает).

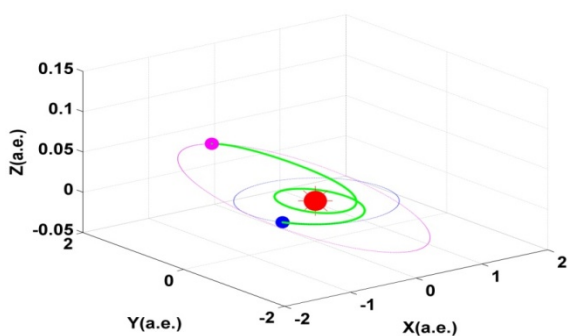


Рисунок 1.9. Траектория гелиоцентрического перелета к Марсу. Идеально-регулируемый ЭРДУ. Второе решение

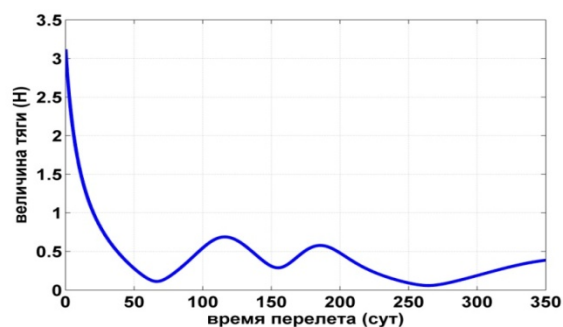


Рисунок 1.10. Оптимальная величина тяги как функция времени на траектории гелиоцентрического перелета к Марсу. Идеально-регулируемый ЭРДУ. Второе решение

Оптимальная величина тяги как функция времени на траектории гелиоцентрического перелета к Марсу показана на рисунке 1.10. Оптимальный закон изменения величины тяги оказался колебательным имеющим три минимума. В начальной точке перелета оптимальная величина тяги немного больше 3Н. Заметим, что на первом решении максимальная величина тяги равна только 0.27 Н. В окрестности точек траектории с минимальным значением тяги оптимальный удельный импульс достигает максимальных значений.

**Анализ сходимости разных методов минимизации суммы квадратов невязок
краевой задачи**

В разделе приведены результаты сравнительного анализа эффективности использования нескольких хорошо известных методов минимизации функции нескольких переменных (реализованных в среде Матлаба[216]). Показателями эффективности рассматриваются следующие характеристики:

- Получено ли решение задачи (найдена или нет какая-нибудь экстремаль, обеспечена ли сходимость метода)? В ниже представленных таблицах столбец с этой информацией обозначен: «да или нет».
- Какая экстремаль получена, первая или вторая. В таблицах столбец с этой информацией обозначен, как «номер экстремали».
- Число вычислений критериальной функции (суммы квадратов невязок). Это число определяет трудоемкость используемого метода.

Понятно, что характер всех итерационных процедур сильно зависит от начальных значений неизвестных параметров краевой задачи (начальных условий). Поэтому для оценки эффективности метода было решено рассмотреть несколько совокупностей начальных условий. Для анализируемой задачи было выбрано 7 таких совокупностей $\lambda^T(t_0)=[\lambda_x(t_0), \lambda_y(t_0), \lambda_z(t_0), \lambda_{v_x}(t_0), \lambda_{v_y}(t_0), \lambda_{v_z}(t_0), \lambda_m(t_0)]$:

$$\lambda(t_0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \lambda(t_0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \lambda(t_0) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}; \lambda(t_0) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \lambda(t_0) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \lambda(t_0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \lambda(t_0) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Такой большой набор совокупности начальных условий, с нашей точки зрения, дает возможность корректно оценить эффективность того или иного метода оптимизации. Приведем вектор неизвестных параметров, соответствующих обоим решениям краевой задачи, описанных выше:

Решение 1. $\lambda(t_0)=[-0.8091 \ -0.3189 \ 0.0213 \ 0.6274 \ -0.8606 \ -0.1704 \ 0.8235]^T$;

Решение 2. $\lambda(t_0)=[0.1957 \ 0.2746 \ -0.0017 \ 0.0418 \ 0.2580 \ -0.0058 \ 0.0166]^T$;

В таблице 1.1 показаны результаты исследования эффективности четырёх методов оптимизации при векторе начальных условиях $\lambda^T=[1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$.

Таблица 1.1. Сравнение результатов численных методов оптимизации с использованием начального приближения $\lambda^T = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$

Метод	Да/нет	Номер экстремали	Число вычислений функции
trust-region - dogleg	да	1	1560
trust-region – reflective	да	1	5144
levenberg-marquardt	да	1	88
CMA-ES	да	1	3187

Результаты, помещенные в таблицу, показывают, что все 4 анализируемые методы справились с нахождением решения рассматриваемой оптимизационной проблемы. Наиболее эффективным (потребовавшем минимальное число вычислений суммы квадратов невязок) оказался метод “levenberg-marquardt”. Напомним, что он обеспечивает эффективную (градиентную) сходимую вдали от экстремума и эффективную квадратичную сходимую в окрестности экстремума. Количество вычислений минимизируемой функции при использовании других трех методов оказалось существенно большим. Наименее эффективным оказался метод “trust-region-reflective”.

В таблице 1.2 показаны результаты исследования эффективности четырех методов оптимизации при векторе начальных условиях $\lambda^T = [1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1]$. Такая совокупность начальных условий несколько ближе к первому решению рассматриваемой проблемы. Можно было ожидать снижение трудоемкости при решении краевой задачи.

Таблица 1.2. Сравнение результатов численных методов оптимизации с использованием начального приближения $\lambda^T = [1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1]$

Метод	Да/нет	Номер экстремали	Число вычислений функции
trust-region - dogleg	да	1	479
trust-region - reflective	да	1	6912
levenberg-marquardt	да	1	88
CMA-ES	да	1	3340

К некоторому удивлению, только при использовании первого из анализируемых методов наблюдается существенное уменьшение числа вычислений минимизируемой функции (с 1560 до 479). При использовании других методов, количество вычислений или не изменилось (“levenberg-marquardt”) или возросло. Но как и при предыдущем наборе начальных условий все 4 анализируемые методы справились с нахождением решения рассматриваемой оптимизационной проблемы. Как и ранее, наиболее эффективным (потребовавшем минимальное число вычислений суммы квадратов невязок) оказался метод “levenberg-marquardt”. Количество вычислений минимизируемой функции при использовании других трех методов оказалось существенно большим. Наименее эффективным опять оказался метод “trust-region-reflective”.

В таблице 1.3 показаны результаты исследования эффективности четырех методов оптимизации при векторе начальных условиях $\lambda^T = [-1 \ -1 \ -1 \ -1 \ -1 \ -1 \ 1]$. Такая совокупность

значений сопряженных переменных является относительно далекой от решения оптимизационной проблемы. Ожидаемо у некоторых из анализируемых методов появились проблемы сходимости к решению оптимизационной проблемы.

Таблица 1.3. Сравнение результатов численных методов оптимизации с использованием начального приближения $\lambda^T = [-1 -1 -1 -1 -1 -1 1]$

Метод	Да/нет	Номер экстремали	Число вычислений функции
trust-region - dogleg	нет	-	10000
trust-region - reflective	нет	-	10000
levenberg-marquardt	да	2	818
CMA-ES	да	1	3061

Результаты, приведенные в таблице, показывают, что первые два анализируемые метода (“trust-region- dogleg” и “trust-region- reflective”) не позволили получить никакого решения задачи. При их использовании выход из итерационной процедуры осуществлялся по максимальному количеству вычислений минимизируемой функции (принятого равным 10000 вычислений). Метод “levenberg-marquardt” позволил получить решение краевой задачи, соответствующего второй экстремали (с очень малым значением максимизируемой конечной массы КА 128.7 кг). И только эволюционный метод с адаптацией ковариационной матрицы «CMA-ES » позволил решить задачу и получить оптимальную траекторию перелета, которая позволяет доставить в окрестность Марса КА массой 907.5 кг.

Полученный результат позволяет утверждать, что, несмотря на высокую эффективность в большом числе случаев, метод “levenberg-marquardt” не может обеспечить получения решения при начальном приближении, не находящемся в окрестности оптимального решения. Это происходит от того, что при его использовании итерационный поиск построен на анализе локальных свойств минимизируемой функции. В отличие от этого метода метод «CMA-ES » относительно легко справился с поиском минимума, который, по-видимому, является глобальным.

В таблице 1.4 показаны результаты исследования эффективности четырёх методов оптимизации при векторе начальных условиях $\lambda^T = [-1 -1 0 -1 -1 0 1]$. Такая совокупность значений сопряженных переменных является относительно далекой от решения оптимизационной проблемы (хотя и более близкой совокупностью, чем предыдущая, проанализированная в таблице 1.3). Ожидаемо у некоторых из анализируемых методов появились проблемы сходимости к решению оптимизационной проблемы.

Таблица 1.4. Сравнение результатов численных методов оптимизации с использованием начального приближения $\lambda^T = [-1 -1 0 -1 -1 0 1]$

Метод	Да/нет	Номер экстремали	Число вычислений функции
trust-region - dogleg	да	1	194
trust-region - reflective	нет	-	10000
levenberg-marquardt	нет	-	10000
CMA-ES	да	1	3142

Анализ результатов, приведенных в таблице, выявили два довольно неожиданных свойства исследуемых методов минимизации. Неожиданно самым эффективным оказался первый исследуемый метод “trust-region- dogleg”. При его использовании потребовалось всего 194 вычислений невязок краевой задачи, чтобы получить решение оптимизационной проблемы. При этом было получено первое решение (решение с большой величиной конечной массы). Неприятной неожиданностью оказалась «плохая» работа метода “levenberg-marquardt”. Его использование не привело к решению краевой задачи. Метод не обеспечил сходимости к решению.

Стоит отметить, что метод «CMA-ES », как и во всех ранее рассмотренных вариантах начальных условий обеспечил решение оптимизационной проблемы. Была получена траектория перелета, обеспечивающая доставку в окрестность Марса КА массой 907.5 кг.

В таблице 1.5 показаны результаты исследования эффективности четырёх методов оптимизации при векторе начальных условиях $\lambda^T = [-1 -1 0 1 1 0 1]$. Изменение знаков компонент $\lambda_{v_x}(t_0)$, $\lambda_{v_y}(t_0)$ вектора $\lambda_v(t_0)$, сопряженного к вектору скорости соответствует изменению направления эллиптической компоненты вектора тяги на противоположное направление в начальной точке гелиоцентрического перелета. Для рассматриваемой даты старта (определяющего положение радиус-вектора КА в начальной точке гелиоцентрического перелета) такое изменение направления тяги приводит к тому, что и трансверсальная и радиальная тяги в начальной точке гелиоцентрического перелета оказываются отрицательными. При полете к Марсу такое направление тяги не может быть рассмотрено как рациональное. То есть рассматриваемая в таблице 1.5 совокупность значений сопряженных переменных является менее целесообразной, чем совокупность, проанализированная в таблице 1.4. Можно было бы ожидать ухудшение сходимости анализируемых методов решения краевой задачи. Но этого не произошло.

Таблица 1.5. Сравнение результатов численных методов оптимизации с использованием начального приближения $\lambda^T = [-1 -1 0 1 1 0 1]$

Метод	Да/нет	Номер экстремали	Число вычислений функции
trust-region - dogleg	да	1	1507
trust-region - reflective	да	1	6456

levenberg-marquardt	да	1	130
CMA-ES	да	1	3304

Довольно неожиданно, все 4 метода обеспечили сходимость и получение оптимальной траектории перелета с большой величиной массы КА в окрестности Марса. Как часто случалось, наиболее эффективным оказался метод “levenberg-marquardt”. Он использовал только 130 вычислений суммы квадратов невязок. Неплохо показал себя метод “trust-region - dogleg” (1507 вычислений). Больше количество вычислений потребовали метод CMA-ES (3304 вычислений) и метод “trust-region - reflective” (6456 вычислений).

Анализируемый результат дает возможность утверждать, что не всегда более близкое приближение к оптимальному решению обеспечивает лучшую схоимость итерационных процедур поиска решения краевой задачи.

В таблице 1.6 показаны результаты исследования эффективности четырех методов оптимизации при векторе начальных условиях $\lambda^T = [1 \ 1 \ 0 \ -1 \ -1 \ 0 \ 1]$. Рассматриваемая совокупность начальных условий отличается от совокупности, рассмотренной в таблице 1.4 знаками компонент $\lambda_x(t_0)$, $\lambda_y(t_0)$ вектора $\lambda_r(t_0)$, сопряженного к радиус-вектору КА. Такое изменение знака приводит к изменению знака производной по времени компонент $\lambda_{v_x}(t_0)$, $\lambda_{v_y}(t_0)$ вектора $\lambda_v(t_0)$, сопряженного к вектору скорости. А так как вектор тяги ЭРДУ коллинеарен вектору $\lambda_v(t_0)$ проведенное изменение знаков $\lambda_x(t_0)$, $\lambda_y(t_0)$ могло привести к изменению направления угловой скорости эллиптической компоненты вектора тяги на противоположное направление. Но для рассматриваемого варианта, когда $\lambda_x(t_0) = \lambda_y(t_0)$ (или -1 для варианта таблицы 1.4 или +1 для варианта таблицы 1.6), скорость изменения компонент $\lambda_{v_x}(t_0)$, $\lambda_{v_y}(t_0)$ вектора $\lambda_v(t_0)$ оказывается одинаковой (или обе увеличиваются, или обе уменьшаются). Поэтому выявить какая совокупность начальных условий (соответствующая таблице 1.4 или таблице 1.6) является более рациональной очень трудно.

Таблица 1.6. Сравнение результатов численных методов оптимизации с использованием начального приближения $\lambda^T = [1 \ 1 \ 0 \ -1 \ -1 \ 0 \ 1]$

Метод	Да/нет	Номер экстремали	Число вычислений функции
trust-region - dogleg	нет	-	10000
trust-region - reflective	нет	-	10000
levenberg-marquardt	нет	-	84
CMA-ES	да	1	7471

Характеристики сходимости для рассматриваемого варианта начальных условий оказались близкими в варианте начальных условий, проанализированных в таблице 1.4. Метод CMA-ES оказался единственным методом, который обеспечил решение

рассматриваемой оптимизационной задачи. С его помощью, используя 7471 вычислений квадрата невязок краевой задачи, удалось получить оптимальную траекторию полета к Марсу с доставкой в окрестность Марса КА массой 907.5 кг.

Ни один из остальных методов не смог обеспечить получения решения. Стоит отметить, что благодаря существованию критериев окончания итерационного процесса метод “levenberg-marquardt” использовал только 84 вычислений квадратов невязок краевой задачи. После чего он «сдался», не трата машинное время. Это можно рассматривать как преимущество метода. Возможно, что в каких-то случаях целесообразно на первом этапе поиска решения краевой задачи пытаться использовать метод “levenberg-marquardt” и только, если он не сходится, перейти к другому более надежному, но трудоемкому методу.

В таблице 1.7 показаны результаты исследования эффективности четырех методов оптимизации при векторе начальных условиях $\lambda^T = [-1 \ -1 \ -1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$. Для рассматриваемой совокупности начальных условий неожиданно самым неудачным методом оказался метод «levenberg-marquardt». Его использование не обеспечило получение какого-либо решения краевой задачи. Причем окончание итерационного процесса происходило по максимальному числу вычислений минимизируемой функции. Такой вывод изменил наше мнение, высказанное при анализе результатов таблицы 1.6. По-видимому, не всегда целесообразно использовать этот метод как элемент системы нескольких методов решения краевой задачи.

Остальные три анализируемых метода обеспечили решение краевой задачи и нахождение оптимальной траектории, на которой в окрестность Марса доставляется КА с большой массой (907.5 кг). С точки зрения трудоёмкости метода (количества вычислений невязок краевых условий) наиболее эффективным оказался метод «trust-region – dogleg» (1734 вычислений), самым трудоемким «trust-region - reflective» (7576 вычислений). Использование СМА-ES позволило решить задачи, выполнив 3214 вычислений.

Таблица 1.7. Сравнение результатов численных методов оптимизации с использованием начального приближения $\lambda^T = [-1 \ -1 \ -1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$

Метод	Да/нет	Номер экстремали	Число вычислений функции
trust-region - dogleg	да	1	1734
trust-region - reflective	да	1	7576
levenberg-marquardt	нет	-	10000
СМА-ES	да	1	3214

Выводы из проведенного тестирования 4-х методов минимизации функции многих переменных для оптимизации рассматриваемого перелета к Марсу с идеально-регулируемой ЭРДУ можно сформулировать так:

- 1) Для всех семи рассмотренных вариантов неизвестных параметров краевой задачи ПМП только метод СМА-ES обеспечил нахождение оптимальной траектории перелета к Марсу.
- 2) При использовании этого метода во всех случаях масса КА, доставляемая в окрестность Марса, оказывалась большой (907.5 кг). По-видимому, справедливо утверждение, что полученное решение является глобальным экстремумом для анализируемой перелетной траектории.
- 3) Самым неудачным оказалось использование метода «trust-region - reflective». При его использовании далеко не всегда удавалось решить рассматриваемую траекторную задачу. При этом, когда решение удавалось получить, используемый итерационный процесс требовал большого числа вычислений суммы квадратов невязок краевой задачи.
- 4) Во многих случаях (в 4 из 7 рассмотренных) оказывался эффективным метод «levenberg-marquardt». При этом количество требуемых вычислений было на порядок (иногда на два порядка) меньше требуемых вычислений при использовании других методов. К большому сожалению метод «levenberg-marquardt» не обеспечил получение оптимальной траектории в 3 рассмотренных случаях. Поэтому его нельзя рекомендовать для оптимизации траекторий гелиоцентрического перелета

Общий вывод – несмотря на большое число вычислений квадрата невязок краевой задачи метод СМА-ES можно рекомендовать для оптимизации траекторий гелиоцентрического перелета КА с ЭРДУ.

Приведем результаты тестирования нескольких алгоритмов оптимизации, которые претендуют на получение глобального экстремума. Были протестированы следующие алгоритмы:

- метод роя частиц;
- генетический алгоритм;
- (первый) гибридный алгоритм (метод роя частиц + метод активного набора «active – set»);
- (второй) гибридный алгоритм (генетический алгоритм + метод последовательного квадратичного программирования);
- (третий) гибридный алгоритм (алгоритм имитации отжига + метод активного набора).

Каждый из перечисленных алгоритмов предполагает выбор нескольких (иногда многих) параметров, от которых зависит эффективность (прежде всего, сходимость) алгоритма. Многочисленные исследователи предлагают собственные алгоритмы выбора и

коррекции этих параметров. Алгоритмы выбора управляющих параметров иногда называется мета-оптимизацией. Эта мета оптимизация позволяет настроить используемый алгоритм, повысить вероятность его сходимости, повысить эффективность алгоритма. Результаты, проведенного в настоящей работе тестирования опирались на библиотеку программ MATLAB[220]. Управляющие параметры выбирались на основании рекомендаций, имеющихся в материалах разработчиков этой библиотеки.

Все перечисленные алгоритмы имеют в своем составе датчики случайных чисел с определенным законом распределения. При этом требуется предложить нижнюю и верхнюю границы по каждой координате частицы. Мы использовали следующие диапазоны для неизвестных параметров краевой задачи:

$$-1 \leq \lambda_x(t_0) \leq 1, -1 \leq \lambda_y(t_0) \leq 1, -1 \leq \lambda_z(t_0) \leq 1, -1 \leq \lambda_{v_x}(t_0) \leq 1, -1 \leq \lambda_{v_y}(t_0) \leq 1, -1 \leq \lambda_{v_z}(t_0) \leq 1, 0 \leq \lambda_m(t_0) \leq 1.$$

В таблице 1.8 приведены результаты использования метода роя частиц при оптимизации траектории гелиоцентрического перелета к Марсу для КА с идеально-регулируемым двигателем. Строки этой таблицы соответствуют пяти тестам (пяти обращениям к алгоритму роя частиц), при которых поразному происходила генерация начального положения частиц роя и весь дальнейший итерационный процесс решения краевой задачи. Критерием окончания процесса итерационного поиска рассматривалась относительная величина приращения минимизируемой функции на текущей итерации. Процесс заканчивался, когда эта величина оказывалась меньше 10^{-6} . Во втором столбце таблицы приводится число вычислений суммы квадратов невязок в испытании. В последнем столбце приводится величина суммы квадратов невязок, полученная в испытании.

Таблица 1.8. Результаты решения краевой задачи оптимального перелета с использованием метода роя частиц

	Число вычислений суммы квадратов невязок	Минимальная величина суммы квадратов невязок
1	9600	3.75289e-06
2	16400	3.681004e-05
3	13700	3.717265e-05
4	23400	2.730149e-04
5	16500	1.105906e-04

Анализ результатов исследования, приведенных в таблице 1.8, показывает, что

- Метод роя частиц позволяет решить анализируемую краевую задачу. При этом полученное решение соответствуют оптимальному межпланетному перелету с большой массой КА, доставляемого в окрестность Марса;
- Точность удовлетворения краевых условий ПМП оказывается невысокой (обычно мы рассматривали требуемую точность удовлетворения конечных условия на уровне 10^{-7});

- Трудоемкость анализа (число вычислений минимизируемой функции) оказывается существенно большей, чем в ранее исследуемых методах как правило в несколько раз (см. таблицы 1.1- 1.7).

В таблице 1.9 приведены результаты использования одного из вариантов генетического алгоритма при оптимизации траектории гелиоцентрического перелета к Марсу. Строки таблицы соответствуют пяти тестам (пяти обращениям к алгоритму). Информация по столбцам таблицы эквивалентна таблице 1.8.

Таблица 1.9. Результаты решения краевой задачи оптимального перелета с использованием генетического алгоритма

	Число вычислений суммы квадратов невязок	Минимальная величина суммы квадратов невязок
1	29600	0.00139
2	23000	0.0001216
3	31400	0.004356
4	21800	0.0004859
5	22000	0.001169

Анализ представленных данных приводит к выводам качественно очень похожим на выводы по использованию алгоритма роя частиц:

- использование генетического алгоритма позволяет найти оптимальную траекторию;
- точность удовлетворения краевых условий мала (точнее, недостаточная);
- число вычислений минимизируемой функции значительно превышает аналогичный показатель для, например, метода СМА-ES , обеспечивающего регулярную сходимость итерационного процесса.

В таблице 1.10 приведены результаты использования гибридного варианта названного выше первым (комбинации метода роя частиц и метода активного набора) при оптимизации траектории гелиоцентрического перелета к Марсу. Строки таблицы соответствуют пяти тестам (пяти обращениям к алгоритму). Второй столбец таблицы дает информацию о нахождении или нет решения краевой задачи. Третий столбец таблицы показывает номер полученной экстремали. Наконец, в последнем столбце таблицы приведено число вычислений минимизируемой функции в процессе поиска решения краевой задачи.

Таблица 1.10. Результаты решения краевой задачи оптимального перелета с использованием первого гибридного алгоритма (комбинация метода роя частиц и метода активного набора)

тест	Да/нет	Номер экстремали	Число вычислений суммы квадратов невязок
1	Да	1	4563
2	Да	1	10740
3	Да	1	9454

4	Да	1	13947
5	Да	1	18656

Анализ данных таблицы показывает, что во всех пяти испытаниях была получена оптимальная траектория гелиоцентрического перелета КА к Марсу. В одном из тестов (в первом тесте) число вычислений минимизируемой функции относительно невелико (по крайней мере, имеет тот же порядок, что и при использовании метода СМА-ES). Но в остальных четырех тестах число вычислений минимизируемой функции весьма велико. Последнее дает возможность утверждать, что для рассматриваемой оптимизационной проблемы метод СМА-ES является более эффективным.

В таблице 1.11 приведены результаты использования гибридного варианта названного выше вторым (комбинации генетического алгоритма и метод последовательного квадратичного программирования) при оптимизации траектории гелиоцентрического перелета к Марсу. Содержание строк и столбцов таблицы эквивалентно содержанию предыдущей таблицы.

Таблица 1.11. Результаты решения краевой задачи оптимального перелета с использованием второго гибридного алгоритма (комбинации генетического алгоритма и метод последовательного квадратичного программирования)

тест	Да/нет	Номер экстремали	Число вычислений суммы квадратов невязок
1	Да	1	18463
2	Да	1	30314
3	Да	1	35104
4	Да	1	31491
5	Да	1	28878

Анализ данных таблицы 1.11 показывает, что во всех пяти испытаниях была получена оптимальная траектория гелиоцентрического перелета КА к Марсу. То есть можно констатировать регулярную сходимость используемого гибридного алгоритма. К сожалению, анализируемый алгоритм требует большое число вычислений минимизируемой суммы квадратов невязок (18 до 35 тысяч вычислений). Поэтому, оценивая трудоемкость вычислений, вряд ли анализируемый метод является рациональным для рассматриваемой проблемы траекторной оптимизации.

В таблице 1.12 приведены результаты использования гибридного варианта названного выше третьем (комбинации алгоритма имитации отжига и метода активного набора) при оптимизации траектории гелиоцентрического перелета к Марсу. Содержание строк и столбцов таблицы эквивалентно содержанию предыдущих двух таблиц.

Таблица 1.12. Результаты решения краевой задачи оптимального перелета с использованием третьего гибридного алгоритма (комбинации алгоритма имитации отжига и метода активного набора)

Тест	Да/нет	Номер экстремали	Число вычислений суммы квадратов невязок
1	да	1	7991

2	да	1	6723
3	да	1	6744
4	да	1	6566
5	да	1	4872

Анализ результатов, помещенных в таблицу 1.12, показывает, что во всех пяти испытаниях была получена оптимальная траектория гелиоцентрического перелета КА к Марсу. То есть можно констатировать регулярную сходимость используемого гибридного алгоритма. Число вычислений минимизируемой суммы квадратов невязок находится в пределах от 5 до 8 тысяч вычислений. Сравнивая это число вычислений с числом вычислений при использовании метода СМА-ES, можно считать, что последний метод, скорее всего, является более эффективным. Но, исключать возможность использования такого гибридного метода было бы неправильно. На наш взгляд, приведенный анализ показывает, что для рассматриваемых в работе задач траекторной оптимизации может быть использован не только метод СМА-ES, но и комбинация алгоритма имитации отжига и метода активного набора. Оба эти метода обеспечивают сходимость используемых итерационных процедур с приемлемой трудоемкостью.

1.6.2 Оптимизация траектории гелиоцентрического перелета орбита Земли – орбита Марса КА с нерегулируемой ЭРДУ

Модель движения КА с нерегулируемой ЭРДУ

Движение КА рассматривается под влиянием двух сил: гравитационной силы притяжения КА Солнцем и силой тяги нерегулируемой ЭРДУ. Величина тяги и эффективная скорость истечения ЭРДУ считаются постоянными величинами. Гравитационное поле Солнца рассматривается как ньютоновское. Предполагается, что ЭРДУ может включаться и выключаться многократно. Уравнение движения КА можно представить в следующем виде:

$$\dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \mathbf{V} \\ -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} + \frac{\delta T}{m} \mathbf{u} \\ -\frac{\delta T}{w} \end{bmatrix} \quad (1.43)$$

где $\mathbf{X} = [\mathbf{r} \quad \mathbf{V} \quad m]^T$, $\mathbf{r} = [x \quad y \quad z]^T$, $\mathbf{V} = [v_x \quad v_y \quad v_z]^T$. \mathbf{X} – вектор состояния КА, μ – гравитационная константа Солнца, T – величина тяги ЭРДУ, m – масса КА, w – эффективная скорость истечения ЭРДУ, \mathbf{u} – направление вектора тяги ЭРДУ, \mathbf{r} – вектор положения КА, \mathbf{V} – вектор скорости КА, δ – функция тяги (функция включения и выключения ЭРДУ).

Требуется переместить КА с массой m_o из начального состояния $(\mathbf{r}_o, \mathbf{V}_o)$, определяемого датой старта от Земли в целевое состояние $(\mathbf{r}_f, \mathbf{V}_f)$, определяемое датой полета к окрестности Марса, за определенное время. Функционал, который требуется максимизировать, есть конечная масса КА:

$$J = \max m_f \quad (1.44)$$

Формулировка задачи оптимального управления

Гамильтониан задачи оптимального управления следующий [20,106,174]:

$$H = \boldsymbol{\lambda}_r^T \mathbf{V} + \boldsymbol{\lambda}_v^T \left[-\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} + \frac{\delta T}{m} \mathbf{u} \right] - \lambda_m \frac{\delta T}{w}, \quad (1.45)$$

где $\boldsymbol{\lambda}_r = [\lambda_x \quad \lambda_y \quad \lambda_z]^T$ – сопряженный вектор к вектору положения КА, $\boldsymbol{\lambda}_v = [\lambda_{vx} \quad \lambda_{vy} \quad \lambda_{vz}]^T$ – сопряженный вектор к вектору скорости КА (базис вектор) и λ_m – сопряженная переменная к массе КА. Исходя из условия максимума гамильтониана, можно утверждать, что направление вектора тяги коллинеарно базис вектору:

$$\mathbf{u} = \frac{\boldsymbol{\lambda}_v}{\lambda_v}. \quad (1.46)$$

Гамильтониан может быть представлен в следующем виде:

$$H = \boldsymbol{\lambda}_r^T \mathbf{V} + \boldsymbol{\lambda}_v^T \left[-\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} \right] + \delta S T, \quad (1.47)$$

где $S = \frac{\lambda_v}{m} - \frac{\lambda_m}{w}$ – функция переключения;

$$\lambda_v = \sqrt{\lambda_{vx}^2 + \lambda_{vy}^2 + \lambda_{vz}^2} \quad \text{и} \quad \delta = \begin{cases} 1, & \text{если } S > 0; \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}.$$

Уравнения оптимального движения КА следующие:

$$\dot{\mathbf{X}} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}}; \quad (1.48)$$

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{X}}, \quad (1.49)$$

где $\boldsymbol{\lambda} = [\boldsymbol{\lambda}_r \quad \boldsymbol{\lambda}_v \quad \lambda_m]^T$.

Дифференциальные уравнения сопряженных переменных имеют следующую форму:

$$\frac{d\boldsymbol{\lambda}_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\mu}{r^3} \boldsymbol{\lambda}_v - \frac{3\mu}{r^5} \mathbf{r} \mathbf{r}^T \boldsymbol{\lambda}_v; \quad (1.50)$$

$$\frac{d\boldsymbol{\lambda}_v}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{V}} = -\boldsymbol{\lambda}_r; \quad (1.51)$$

$$\frac{d\lambda_m}{dt} = -\frac{\delta T}{m^2} \lambda_v \quad (1.52)$$

Входные данные

Для численного анализа рассматриваются следующие характеристики КА и транспортной операции:

- начальная масса КА – 1000кг;
- тяга ЭРДУ - 0.4Н
- удельный импульс – 3000 с;
- дата старта КА от Земли – 20.04.2035.
- время перелета – 350 суток.

Краевая задача

Краевые условия в начале и конце гелиоцентрической траектории рассматриваются такими же, как (1.41) в предыдущем разделе.

Анализ зависимости невязок краевых условий от неизвестных параметров краевой задачи

Проанализируем зависимость невязок краевых условий (точнее суммы квадратов невязок краевых условий) от неизвестных параметров краевой задачи. Как и в рассмотренной выше задаче с идеально-регулируемым ЭРДУ, неизвестных параметров краевой задачи 7. Чтобы появилась возможность исследовать функции с использованием изолиний, поступим следующим образом. Зафиксируем пять из этих семи неизвестных параметров краевой задачи, оставляя свободными оставшиеся два параметра, и проанализируем сумму квадратов невязок краевой задачи, как функцию этих свободных параметров. Примем, что

$$\lambda_r(t_0) = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \\ 0 \end{bmatrix}; \lambda_{v_x}(t_0) = 0.1; \lambda_{v_z}(t_0) = 0.$$

Оставшиеся свободными параметры $\lambda_{v_x}(t_0), \lambda_m(t_0)$ проварьируем в диапазоне 0...+1. На рисунке 1.13 приведены изолинии суммы квадратов невязок краевых условий на плоскости $\lambda_{v_x}(t_0) - \lambda_m(t_0)$. Показаны изолинии со значением суммы квадратов невязок меньших 5. Точки плоскости, на которых нет изолиний (верхняя и нижняя части плоскости), соответствуют значениям суммы квадратов невязок большим 5.

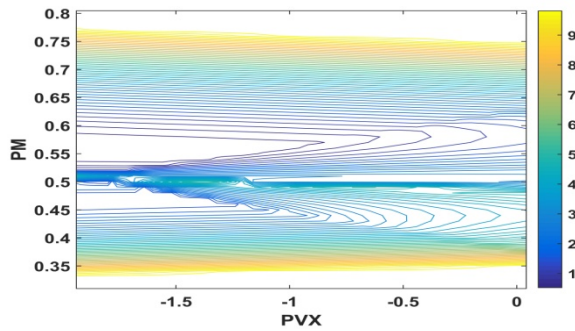


Рисунок 1.13. Изолинии суммы квадратов невязок как функции λ_{vx} (ось абсцисс) и λ_m (ось ординат) $\lambda_{vy}(t_0) = 0.1$

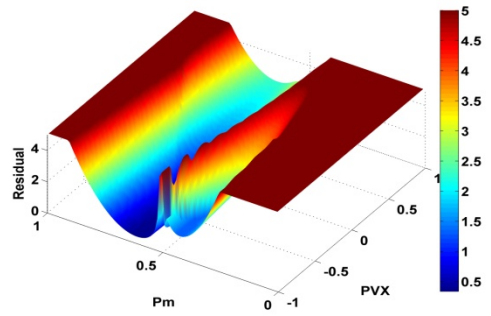


Рисунок 1.14. Сумма квадратов невязок как функции λ_{vx} и λ_m в пространстве $\lambda_{vy}(t_0) = 0.1$

На рисунке 1.14 сумма квадратов невязок краевой задачи как функция $\lambda_{vy}(t_0), \lambda_m(t_0)$ показана в пространстве. Тёмно-коричневым цветом выделена, та часть пространства, где сумма квадратов невязок больше 5. Видна сложная структура функции, в частности несколько глубоких её «ущелий».

Анализ показывает, что анализируемая функция имеет два локальных минимума. Один находится в центре концентрических овалов с примерными координатами $\lambda_{vx} = -1.5, \lambda_m = 0.55$ и значение этого минимума немного меньше 0.5. Второй минимум принадлежит к узкому «ущелью» в нижней части рассматриваемой плоскости. Значение этого минимума существенно отличается от нулевого значения (оно немного больше 1).

Приведем анализ суммы квадратов невязок как функции другого набора аргументов. На рисунке 1.15 показаны изолинии суммы квадратов невязок как функции λ_{vy} и λ_m , значения остальных параметров краевой задачи приняты следующими:

$$\lambda_r(t_0) = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \\ 0 \end{bmatrix}; \lambda_{vx}(t_0) = 0.1; \lambda_{vz}(t_0) = 0.$$

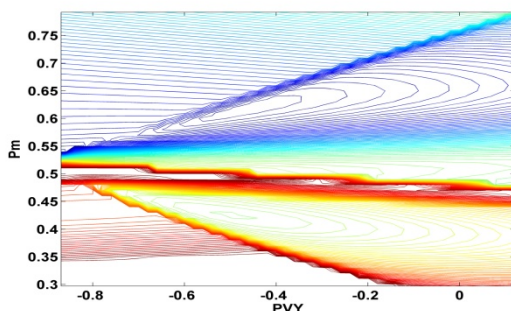


Рисунок 1.15. Изолинии суммы квадратов невязок как функции λ_{vy} (ось абсцисс) и λ_m (ось ординат) $\lambda_{vx}(t_0) = 0.1$

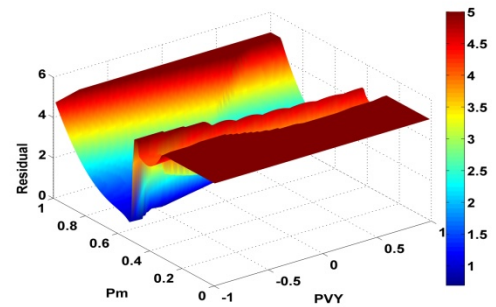


Рисунок 1.16. Сумма квадратов невязок как функции λ_{vy} и λ_m в пространстве $\lambda_{vx}(t_0) = 0.1$

Анализ рисунков 1.15 и 1.16 показывает существование нескольких локальных минимумов суммы квадратов невязок краевой задачи и сложную структуру анализируемой функции с глубокими и узкими «ущельями».

Приедем ещё одну зависимость суммы квадратов невязок краевой задачи от параметров λ_{vy} и λ_m для другого численного набора остальных неизвестных параметров краевой задачи. Рассмотрим такой набор:

$$\lambda_r(t_0) = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \\ 0 \end{bmatrix}; \lambda_{vx}(t_0) = -0.1; \lambda_{vz}(t_0) = 0.$$

На рисунке 1.17, 1.18 показан анализ минимизируемой суммы квадратов невязок как функции λ_{vy} и λ_m для такого набора параметров краевой задачи. На рисунке 1.17 показаны изолинии анализируемой функции, на рисунке 1.18 показан её пространственный вид.

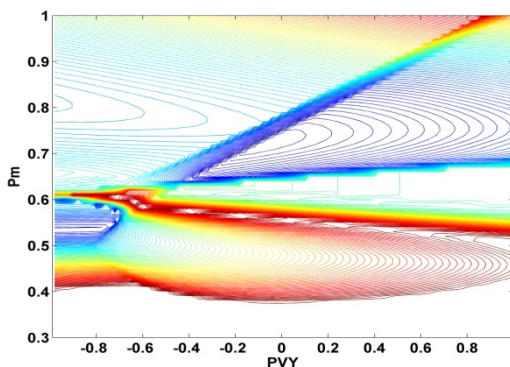


Рисунок 1.17. Изолинии суммы квадратов невязок как функции λ_{vy} (ось абсцисс) и λ_m (ось ординат) $\lambda_{vx}(t_0) = -0.1$

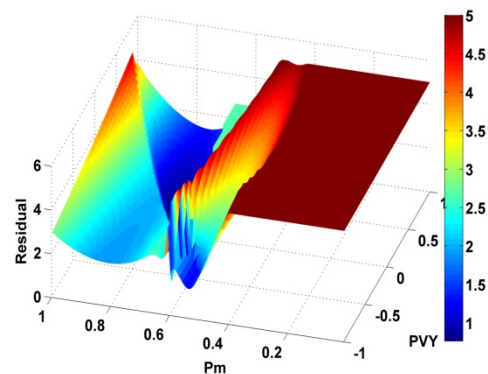


Рисунок 1.18. Сумма квадратов невязок как функции λ_{vy} и λ_m в пространстве $\lambda_{vx}(t_0) = -0.1$

Общий вывод из проведенного анализа ожидаемо таков: локальных минимумов суммы квадратов невязок в пространстве 7 неизвестных параметров краевой задачи много. Трудно ответить на вопрос о том, сколько этих локальных минимумов соответствуют решению краевой задачи (обеспечивают нулевое значение суммы квадратов невязок). В общем случае эффективность используемого метода при использовании итерационных процедур решения краевой задачи может сильно зависеть от выбора начального приближения. Ниже будет приведен анализ эффективности различных методов в зависимости от такого начального приближения.

Анализ полученного решения рассматриваемой задачи оптимизации перелета с нерегулируемой ЭРДУ

Для рассматриваемой задачи перелета к Марсу с нерегулируемой ЭРДУ было найдено всего одно решение. Для рассматриваемой задачи это связано с относительно малым располагаемым реактивным ускорением. В условиях фиксированности даты старта и даты окончания перелета небольшое реактивное ускорение не позволяет реализовать траекторию перелета с угловой дальностью большей полного оборота вокруг Солнца.

На рисунке 1.7 показана оптимальная траектория гелиоцентрического перелета КА с нерегулируемым двигателем. Активные участки траектории показаны жирной красной линией. Траектория КА на пассивных участках, как и орбита Земли, и орбита Марса показаны тонкими линиями. Кружочками показаны начальная и конечная точки гелиоцентрического перелета.

Гелиоцентрический радиус вектор КА вдоль траектории перелета монотонно увеличивается. На гелиоцентрической траектории перелета есть три пассивных и три активных участка. Траектория начинается с пассивного участка. Длительности и последовательность активных и пассивных участков хорошо анализировать, используя зависимость функции переключения двигателя. Она приведена на рисунке 1.20. Функция переключения двигателя в начальной точке траектории меньше нуля. На всей траектории она 5 раз меняет знак. При подлете КА к окрестности Марса функция переключения положительна, ЭРДУ работает на конечном участке гелиоцентрического перелета.

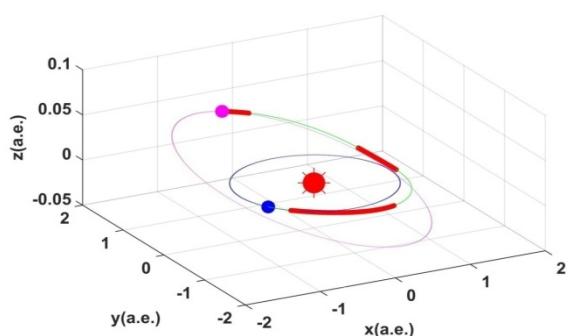


Рисунок 1.19. Траектория гелиоцентрического перелета к Марсу. Нерегулируемый ЭРДУ

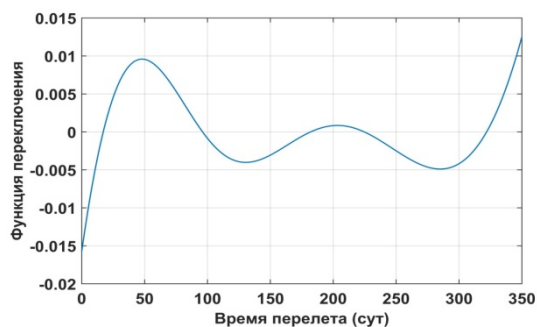


Рисунок 1.20. Функция переключения ЭРДУ как функция времени на траектории гелиоцентрического перелета к Марсу. Нерегулируемый ЭРДУ

На оптимальной траектории в окрестность Марса можно доставить КА массой 824.6 кг. Напомним, что при использовании идеально-регулируемого ЭРДУ максимальная конечная масса КА равна 907.5 кг (на 83 кг больше).

Анализ сходимости разных методов минимизации функции нескольких переменных

Как и при исследовании задачи оптимизации перелета с идеально-регулируемой ЭРДУ для рассматриваемого перелета с нерегулируемой ЭРДУ приведем результаты сравнительного анализа эффективности использования нескольких хорошо известных методов минимизации функции нескольких переменных. Анализируются аналогичные показатели эффективности:

- Получено ли решение задачи (обеспечена ли сходимость метода)? В ниже представленных таблицах столбец с этой информацией обозначен: «да или нет».

- Число вычислений критериальной функции (суммы квадратов невязок). Это число определяет трудоемкость используемого метода.

Понятно, что характер всех итерационных процедур сильно зависит от начальных значений неизвестных параметров краевой задачи (начальных условий). Поэтому для оценки эффективности метода было решено рассмотреть несколько совокупностей начальных условий. Для анализируемой задачи было выбрано 5 таких совокупностей $\lambda^T(t_0)=[\lambda_x(t_0), \lambda_y(t_0), \lambda_z(t_0), \lambda_{v_x}(t_0), \lambda_{v_y}(t_0), \lambda_{v_z}(t_0), \lambda_m(t_0)]$:

$$\lambda(t_0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \lambda(t_0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \lambda(t_0) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \lambda(t_0) = \begin{bmatrix} -0.809093088432252 \\ -0.318880152643743 \\ 0.021252710196353 \\ 0.627416895817389 \\ -0.860559957278684 \\ -0.170397919513681 \\ 0.823546075459133 \end{bmatrix}; \lambda(t_0) = \begin{bmatrix} 0.195732843208838 \\ 0.274640330048980 \\ -0.001714425566619 \\ 0.041783482949454 \\ 0.258013070295979 \\ -0.005769087279028 \\ 0.016561095236080 \end{bmatrix}. \quad (1.53)$$

Среди приведенных наборов начальных условий два последних набора соответствуют двум решениям (двум экстремалиям) краевой задачи для рассмотренного выше варианта КА с идеально-регулируемой ЭРДУ.

В таблице 1.13 показаны результаты исследования эффективности четырех методов оптимизации при векторе начальных условиях $\lambda^T=[1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$.

Результаты, помещенные в таблицу, показывают, что из четырех анализируемых метода, только последний метод (CMA-ES) позволил решить краевую задачу оптимального перелета. Правда, число вычислений минимизируемой функции суммы квадратов невязок оказалось весьма большим (26311). Остальные три тестируемых метода не обеспечили сходимости итерационного процесса к решению. Отметим, что набор начальных условий в рассматриваемом случае сильно отличался от решения (сравните первый и четвертый вектора в (1.53)). Но, несмотря на это, эволюционный метод с адаптацией ковариационной матрицы позволил решить задачу.

Таблица 1.13. Сравнительный анализ эффективности тестируемых методов минимизации функции нескольких переменных для оптимизации траектории перелета КА с нерегулируемым ЭРДУ при использовании начального приближения $\lambda^T=[1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$

Метод	Да/нет	Число вычислений функции
trust-region - dogleg	нет	66568
trust-region - reflective	нет	5944
levenberg-marquardt	нет	279
CMA-ES	да	26311

В таблице 1.14 показаны результаты исследования эффективности четырех методов оптимизации при векторе начальных условиях $\lambda^T=[1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1]$.

Таблица 1.14. Сравнительный анализ эффективности тестируемых методов минимизации функции нескольких переменных для оптимизации траектории перелета КА с нерегулируемым ЭРДУ при использовании начального приближения $\lambda^T=[1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1]$

Метод	Да/нет	Число вычислений функции
trust-region - dogleg	нет	163
trust-region - reflective	нет	8016
levenberg-marquardt	нет	186
СМА-ES	да	26206

Рассматриваемая совокупность начальных условий несколько ближе к решению рассматриваемой проблемы. Можно было ожидать улучшение эффективности и снижение трудоемкости при решении краевой задачи. Но, к некоторому удивлению, этого не произошло. Только эволюционный метод с адаптацией ковариационной матрицы смог обеспечить получение решения краевой задачи и найти оптимальную траекторию перелета. Остальные три тестируемых метода не позволили решить задачу. Очень незначительно уменьшилось требуемое число вычислений минимизируемой функции при использовании СМА-ES метода: с 26311 до 26206 вычислений.

В таблице 1.15 показаны результаты исследования эффективности четырех методов минимизации суммы квадратов невязок при векторе начальных условиях $\lambda^T=[1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1]$.

Таблица 1.15. Сравнительный анализ эффективности тестируемых методов минимизации функции нескольких переменных для оптимизации траектории перелета КА с нерегулируемым ЭРДУ при использовании начального приближения $\lambda^T=[-1\ -1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1]$

Метод	Да/нет	Число вычислений функции
trust-region - dogleg	нет	209
trust-region - reflective	нет	368
levenberg-marquardt	нет	201
СМА-ES	да	29431

Рассматриваемая совокупность начальных условий несколько ближе к решению рассматриваемой проблемы, чем рассмотренные ранее две совокупности. К нашему удивлению улучшение эффективности тестируемых методов при решении краевой задачи не произошло. Как и в предыдущих случаях, только эволюционный метод с адаптацией ковариационной матрицы смог обеспечить получение решения краевой задачи и найти оптимальную траекторию перелета. Остальные три тестируемых метода не позволили решить задачу. Неожиданным оказалось и то, что при использовании СМА-ES метода требуемое число вычислений минимизируемой функции возросло с 26206 до 29431 вычислений.

В таблице 1.16 показаны результаты исследования эффективности четырех методов минимизации суммы квадратов невязок, когда начальное приближение для неизвестных параметров краевой задачи соответствует оптимальному решению межпланетного перелета КА с идеально-регулируемой ЭРДУ:

$$\lambda(t_0) = \begin{bmatrix} -0.809093088432252 \\ -0.318880152643743 \\ 0.021252710196353 \\ 0.627416895817389 \\ -0.860559957278684 \\ -0.170397919513681 \\ 0.823546075459133 \end{bmatrix}.$$

Таблица 1.16. Сравнительный анализ эффективности тестируемых методов минимизации функции нескольких переменных для оптимизации траектории перелета КА с нерегулируемым ЭРДУ при использовании начального приближения, взятого из решения задачи оптимизации траектории КА с идеально-регулируемым двигателем

Метод	Да/нет	Число вычислений функции
trust-region - dogleg	нет	77691
trust-region - reflective	нет	256
levenberg-marquardt	да	967
СМА-ES	да	12736

При использовании начального приближения для оптимизации траектории КА с нерегулируемым двигателем, взятого из решения задачи оптимизации траектории КА с идеально-регулируемым двигателем позволило получить решение краевой задачи двумя из четырех тестируемых методов. Применение методов «trust-region – dogleg» и «trust-region – reflective» не обеспечило получение решения краевой задачи. Использование метод «levenberg-marquardt» обеспечило получение решения. При этом трудоемкость вычислений (число вычислений минимизируемой функции) была самой низкой (967 вычислений против 12736 вычислений метода СМА-ES). Метод СМА-ES, как во всей ранее рассмотренных случаях обеспечил сходимость итерационной процедуры к оптимальному решению.

Стоит обратить внимание и на то, что при применении метода СМА-ES использование в качестве начального приближения неизвестных параметров краевой задачи решение задачи оптимального перелета для КА с идеально-регулируемым двигателем привело к существенному сокращению количества вычислений минимизируемой суммы квадратов невязок: с 29431 (таблица 1.15) до 12736. То есть в 2.3 раза.

В таблице 1.17 показаны результаты исследования эффективности методов минимизации суммы квадратов невязок при начальном приближении для неизвестных параметров краевой задачи, соответствующих второй (неоптимальной) экстремали межпланетного перелета КА с идеально-регулируемой ЭРДУ.

$$\lambda(t_0) = \begin{bmatrix} 0.195732843208838 \\ 0.274640330048980 \\ -0.001714425566619 \\ 0.041783482949454 \\ 0.258013070295979 \\ -0.005769087279028 \\ 0.016561095236080 \end{bmatrix}.$$

Таблица 1.17. Сравнительный анализ эффективности тестируемых методов минимизации функции нескольких переменных для оптимизации траектории перелета КА с нерегулируемым ЭРДУ при использовании начального приближения, соответствующего второй экстремали решения задачи оптимизации траектории КА с идеально-регулируемым двигателем

Метод	Да/нет	Число вычислений функции
trust-region - dogleg	нет	198
trust-region - reflective	нет	968
levenberg-marquardt	нет	236
СМА-ES	да	30991

Так как вторая экстремаль существенно уступает первой по критерию оптимизации (массе КА, доставляемого в окрестность Марса), используемое начальное приближение никак нельзя рассматривать близким к оптимальному решению.

Анализ данных таблицы позволяет утверждать, что несмотря на очень плохое начальное приближение (соответствующее второй экстремали для идеально-регулируемой ЭРДУ с почти двух витковой угловой дальностью перелета, которая явно не может быть реализована в варианте с нерегулируемым ЭРДУ относительно малой тяги) метод СМА-ES, использующий эволюционную стратегию с адаптацией ковариационной матрицы позволил решить оптимизационную проблему. Ни один из остальных тестируемых методов не позволил получить оптимальную траекторию межпланетного перелета КА с нерегулируемым двигателем.

В последних трех таблицах раздела приведем результаты тестирования нескольких алгоритмов оптимизации, которые претендуют на получение глобального экстремума. Были протестированы следующие алгоритмы:

- гибридный алгоритм (метод роя частиц + метод активного набора «active – set») (таблица 1.18);
- гибридный алгоритм (генетический алгоритм + метод последовательного квадратичного программирования) (таблица 1.19);
- гибридный алгоритм (алгоритм имитации отжига «simulated annealing» + метод активного набора) (таблица 1.20).

Как и анализе эффективности перечисленных методов при решении краевой задачи для КА с идеально-регулируемым двигателем, и в рассматриваемом случае управляющие

параметры методов выбирались на основании рекомендаций, имеющихся в материалах разработчиков этой библиотеки MATLAB [220].

В таблице 1.18 приведены результаты использования гибридного алгоритма (метода роя частиц + метода активного набора «active – set») при оптимизации траектории гелиоцентрического перелета к Марсу для КА с нерегулируемым ЭРДУ. Строки этой таблицы соответствуют пяти тестам (пяти обращениям к рассматриваемому гибриднему алгоритму), при которых поразному происходила генерация начального приближения и весь дальнейший итерационный процесс решения краевой задачи. Критерием окончания процесса итерационного поиска рассматривалась относительная величина приращения минимизируемой функции на текущей итерации. Процесс заканчивался, когда эта величина оказывалась меньше $TolFun=10^{-5}$. Во втором столбце приводится информация: получено или нет решение краевой задачи. При этом критерий, по которому считается получено или нет решение краевой задачи есть полученное значение минимизируемой функции меньше или нет 10^{-6} . В третьем столбце таблицы приводится число вычислений суммы квадратов невязок в испытании.

Таблица 1.18. Результаты тестирования гибридного метода (метода роя частиц + метода активного набора) при решении краевой задачи оптимизации перелета КА с нерегулируемой ЭРДУ

	Получено ли решение	Число вычислений суммы квадратов невязок
	нет	22103
	нет	34307
	нет	19102
	нет	59879
	нет	111547

Результаты исследования – анализируемый гибридный метод не позволил решить задачу оптимизации траектории рассматриваемого перелета.

Результаты тестирования двух других гибридных методов (генетического алгоритм + метода последовательного квадратичного программирования и алгоритма имитации отжига «simulated annealing» + метод активного набора) помещены в таблицы 1.19 и 1.20.

Таблица 1.19. Результаты тестирования гибридного метода (генетического алгоритм + метода последовательного квадратичного программирования) при решении краевой задачи оптимизации перелета КА с нерегулируемой ЭРДУ

	Получено ли решение	Число вычислений суммы квадратов невязок
1	нет	140441
2	нет	138558
3	нет	140533
4	нет	140480
5	нет	140673

Таблица 1.20. Результаты тестирования гибридного метода (алгоритм имитации отжига «simulated annealing» + метод активного набора) при решении краевой задачи оптимизации перелета КА с нерегулируемой ЭРДУ

	Получено ли решение	Число вычислений суммы квадратов невязок
1	нет	9251
2	нет	9056
3	нет	6032
4	нет	4258
5	нет	7822

Ни один из трех гибридных методов не дал возможность решить краевую задачу ПМП при оптимизации гелиоцентрической траектории перелета к Марсу. Обращает на себя и большая трудоемкость методов. В частности, при использовании гибридного метода на базе генетического алгоритма и метода последовательного квадратичного программирования число вычисления минимизируемой функции оказалось более 130 тысяч. И при таком числе вычислений гибридным методом, часто характеризуемый как метод глобальной оптимизации, не смог решить краевую задачу.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ ПО ГЛАВЕ

В настоящей главе описан метод эволюционной стратегии с адаптацией ковариационной матрицы (CMA-ES). Проанализирована эффективность его использования в задаче оптимизации межпланетного перелета КА с ЭРДУ. Проведен сравнительный анализ эффективности использования этого метода по сравнению с известными методами при решении краевой задачи ПМП, при которых решение краевой задачи рассматривается как задача минимизации суммы квадратов невязок краевой задачи.

Показано, что метод CMA-ES обеспечивает получение оптимальной траектории межпланетного перелета для всех рассмотренных задач (и задачи с идеально-регулируемой ЭРДУ, и задачи с нерегулируемой ЭРДУ), для всех рассмотренных начальных приближений для неизвестного вектора параметров краевой задачи.

Для более простой по существу задачи оптимизации перелета КА с идеально-регулируемой ЭРДУ в ряде случаев обеспечивает хорошую сходимость метод levenberg-marquardt. При этом его трудоемкость (число вычислений минимизируемой суммы квадратов невязок) было меньше (часто существенно меньше) чем при использовании CMA-ES. Но рекомендовать этот метод даже для оптимизации траектории перелета КА с идеально-регулируемой ЭРДУ трудно, так как в ряде случаев (при неудачном наборе начальных приближений для неизвестных параметров краевой задачи) он не обеспечивает сходимость к оптимальному решению. Тестирование методов trust-region - dogleg и trust-

region – reflective показало, что они даже в задаче оптимизации перелета с идеально-регулируемым двигателем очень часто не обеспечивают решение краевой задачи, а в тех случаях, когда оптимальная траектория с их помощью находится, то по трудоемкости использования методов они всегда проигрывает методу levenberg-marquardt.

Использование методов, претендующих на название глобальных (метода роя частиц; генетического алгоритма; гибридного алгоритма на базе метода роя частиц и метода активного набора «active – set»; гибридного алгоритма на базе генетического алгоритма и метода последовательного квадратичного программирования; гибридного алгоритма на базе методов имитации отжига и активного набора), всегда позволяли найти оптимальную траекторию межпланетного перелета КА с идеально-регулируемым двигателем. Но при этом трудоемкость их использования была существенно более высокой, чем использование СМА-ES .

Для более сложной задачи оптимизации перелета КА с нерегулируемой ЭРДУ преимущество использования метода СМА-ES оказалось еще более очевидным. Только этот метод для всех вариантов начального приближения неизвестных параметров краевой задачи обеспечил получение оптимальной траектории межпланетного перелета. Неожиданно многие тестируемые методы ни в одном рассмотренном варианте начального приближения не смогли получить решения краевой задачи. Такими методами оказались методы: trust-region - dogleg и trust-region – reflective. Очень неудачным оказались попытки использования методов глобальной оптимизации: метода роя частиц; генетического алгоритма; и рассмотренных гибридных алгоритмов.

Можно отметить эффективность метода levenberg-marquardt в случае, когда начальное приближение для неизвестных параметров краевой задачи берется из решения задачи оптимизации межпланетного перелета для КА с идеально-регулируемой ЭРДУ. При этом метод обеспечивает быструю сходимость и число вычислений минимизируемой суммы квадратов невязок краевой задачи существенно меньше, чем при использовании метода СМА-ES . Такой результат показывает обоснованность подходов многих авторов [В. Г. Петухов и др.], которые активно используют оптимизацию перелетов КА с идеально-регулируемым двигателем, как предварительную ступень для оптимизации перелетов КА с нерегулируемой ЭРДУ.

Основным выводом проведенного тестирования можно считать следующий: универсальным эффективным методом решения краевой задачи ПМП при оптимизации межпланетных перелетов КА с ЭРДУ можно считать метод, использующий эволюционную стратегию с адаптацией ковариационной матрицы СМА-ES .

2 ОПТИМИЗАЦИЯ МНОГОВИТКОВЫХ МЕЖОРБИТАЛЬНЫХ ПЕРЕЛЕТОВ КА С ЭРДУ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ МЕТОДА ЭВОЛЮЦИОННОЙ СТРАТЕГИИ С АДАПТАЦИЕЙ КОВАРИАЦИОННОЙ МАТРИЦЫ

В данной главе рассматривается задача оптимизации траектории многовиткового перелета КА между некомпланарными орбитами. В качестве критерия оптимизации рассматривается или минимизируемое время выполнения космического маневра (задача быстрогодействия), или время работы двигателя (минимизируемое моторное время при фиксированном времени выведения). Базовая методическая идея состоит в применении ПМП. Задача оптимального управления сводится к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием ПМП.

Краевая задача есть система нелинейных (трансцендентных) уравнений, где неизвестными являются значения сопряженных переменных в начальной точке траектории перелета. Решения системы уравнений оптимального многовиткового перелета очень чувствительны к небольшим изменениям значений сопряженных переменных в начальной точке траектории перелета, что вызывает большие трудности при выборе хорошего начального приближения. Кроме того, рассматриваемая задача имеет большое число локальных минимумов, а также становится «очень негладкой» вследствие того, что при минимизации времени работы двигателя в правых частях дифференциальных уравнений оптимального движения появляются разрывы из-за переключения режима работы двигателя. Эти обстоятельства могут затруднять использование различных квазиньютоновских методов для решения рассматриваемой задачи.

Исследователями предлагаются разные типы метода продолжения для того, чтобы справиться с проблемой подбора начального приближения. Признавая эффективность такого подхода, считаем целесообразным поиск других вариантов оптимизации многовиткового перелета с большим количеством активных и пассивных участков на витках перелетной траектории.

Чтобы избежать упомянутых выше трудностей, предлагается использовать подход, основанный на методе эволюционной стратегии с адаптацией ковариационной матрицы. Критерий минимизации вводится в виде суммы критерия эффективности (например, массы требуемого для перелета топлива) с некоторым множителем и квадратов невязок граничных условий краевой задачи. Предполагается, что использование эволюционной стратегии (во время итерационного поиска) позволит монотонно уменьшать упомянутый множитель до нуля. Такой прием позволяет надеяться, что на начальном этапе

исследования (пока множитель достаточно велик) мы сможем найти окрестность глобального оптимума, а на заключительном этапе найти сам оптимум и тем самым удовлетворить необходимые условия ПМП.

Предложенный метод оказывается эффективным и позволяет выполнить численный анализ значительного массива входных данных. Удастся проанализировать оптимальную структуру управления движением КА на межорбитальном перелете и характеристики оптимальной траектории без осреднения (по угловой переменной) уравнений оптимального движения.

Для решения задачи оптимизации схем выведения КА с ЭРДУ на некомпланарную рабочую орбиту находится оптимальная программа управления движением КА при его выведении на рабочую орбиту. Предполагается, что

- ракета-носитель (РН) выводит КА на низкую околоземную орбиту,
- химический разгонный блок (ХРБ) выводит ЭРДУ с полезным грузом на промежуточную орбиту,
- ЭРДУ начинает работу на промежуточной орбите и обеспечивает доставку полезного груза на некомпланарную рабочую орбиту.

2.1 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ, ОПИСЫВАЮЩАЯ ДВИЖЕНИЕ КА С ЭРДУ НА ТРАЕКТОРИИ МЕЖОРБИТАЛЬНОГО ПЕРЕЛЕТА

КА с ЭРДУ рассматривается материальной точкой с массой m , на которую действуют земное притяжение и сила тяги T . Уравнения движения КА с ЭРДУ записываются в виде:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu\mathbf{r}}{r^3} + \frac{\delta T}{m}\mathbf{u} \quad (2.1)$$

где, $\mathbf{r} = [x \ y \ z]^T$ – радиус вектор и $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{V}$, $\mathbf{V} = [v_x \ v_y \ v_z]^T$ – вектор скорости в геоцентрической экваториальной системе координат; μ – гравитационный параметр Земли; δ – режим двигателя ЭРДУ ($\delta=0$ при неработающей ЭРДУ, $\delta=1$ при работающей ЭРДУ); T – величина тяги ЭРДУ, которая считается постоянной; $\mathbf{u} = [u_x \ u_y \ u_z]^T$ – орт вектора тяги ЭРДУ, на который не накладывається каких-либо ограничений.

К системе уравнений (2.1) необходимо добавить уравнение для изменения массы КА:

$$\dot{m} = -\frac{\delta T}{w} \quad (2.2)$$

Вместо вектора положения и вектора скорости для определения фазового вектора КА с ЭРДУ можно использовать шесть орбитальных элементов:

1. a – большая полуось орбиты или P – фокальный параметр орбиты;
2. e – ее эксцентриситет;
3. i – наклонение орбиты (угол между вектором площадей $\sigma = \mathbf{r} \times \mathbf{V}$ и осью z);
4. Ω – долгота восходящего узла (угол между осью x и линией узлов);
5. ω – аргумент перигея (угол между линией узлов и вектором Лапласа

$$\mathbf{L} = -\frac{\mu \mathbf{r}}{r} + \mathbf{V} \times \sigma);$$

6. v – истинная аномалия (угол между вектором Лапласа и текущим радиус-вектором).

Эти орбитальные элементы приводят к сингулярностям в случае, когда эксцентриситет орбиты равен нулю или наклонение орбиты равно нулю. Для того, чтобы избежать этих сингулярностей, используются равноденственные элементы [103,141,198]:

$$h = \sqrt{\frac{P}{\mu}}; \quad e_x = e \cos(\Omega + \omega); \quad e_y = e \sin(\Omega + \omega); \quad i_x = \operatorname{tg}\left(\frac{i}{2}\right) \cos(\Omega); \quad i_y = \operatorname{tg}\left(\frac{i}{2}\right) \sin(\Omega) \text{ и}$$

$F = \Omega + \omega + v$ – это истинная долгота, характеризующая угол между осью x и текущим радиус-вектором КА.

При этом положение и скорость КА вычисляется через равноденственные элементы следующим образом:

$$\mathbf{r} = \frac{P}{\phi \xi} \begin{bmatrix} (1 + i_x^2 - i_y^2) \cos F + 2i_x i_y \sin F \\ (1 - i_x^2 + i_y^2) \sin F + 2i_x i_y \cos F \\ 2\eta \end{bmatrix}; \quad (2.3)$$

$$\mathbf{V} = \frac{1}{\phi} \sqrt{\frac{\mu}{P}} \begin{bmatrix} 2i_x i_y (e_x + \cos F) - (1 + i_x^2 - i_y^2)(e_y + \sin F) \\ (1 - i_x^2 + i_y^2)(e_x + \cos F) - 2i_x i_y (e_y + \sin F) \\ 2(i_x (e_x + \cos F) + i_y (e_y + \sin F)) \end{bmatrix}; \quad (2.4)$$

где, $\xi = 1 + e_x \cos F + e_y \sin F$, $\eta = i_x \sin F - i_y \cos F$ и $\phi = 1 + i_x^2 + i_y^2$.

Проекция реактивного ускорения в орбитальной системе координат имеют вид:

$$a_\tau = \delta \frac{T}{m} \cos \vartheta \cos \psi, \quad a_r = \delta \frac{T}{m} \sin \vartheta \cos \psi, \quad a_n = \delta \frac{T}{m} \sin \psi,$$

где a_τ, a_r, a_n – трансверсальная, радиальная и бинормальная компоненты соответственно, ϑ – угол тангажа (угол между проекцией вектора тяги на плоскость оскулирующей орбиты КА и трансверсальным направлением), ψ – угол рыскания (угол между вектором тяги и плоскостью оскулирующей орбиты КА). Тогда уравнения движения КА в равноденственных элементах примут вид [68,198]:

$$\frac{dh}{dt} = \delta \frac{T}{m} \frac{h}{\xi} h \cos \vartheta \cos \psi, \quad (2.5a)$$

$$\frac{de_x}{dt} = \delta \frac{T}{m} \frac{h}{\xi} \{ \xi \sin F \sin \vartheta \cos \psi + [(\xi + 1) \cos F + e_x] \cos \vartheta \cos \psi - e_y \eta \sin \psi \}, \quad (2.5b)$$

$$\frac{de_y}{dt} = \delta \frac{T}{m} \frac{h}{\xi} \{ -\xi \cos F \sin \vartheta \cos \psi + [(\xi + 1) \sin F + e_y] \cos \vartheta \cos \psi + e_x \eta \sin \psi \}, \quad (2.5c)$$

$$\frac{di_x}{dt} = \delta \frac{T}{m} \frac{h}{\xi} \frac{\phi}{2} \cos F \sin \psi, \quad (2.5d)$$

$$\frac{di_y}{dt} = \delta \frac{T}{m} \frac{h}{\xi} \frac{\phi}{2} \sin F \sin \psi, \quad (2.5e)$$

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\xi^2}{h^3} + \delta \frac{T}{m} \frac{h}{\xi} \eta \sin \psi, \quad (2.5f)$$

$$\frac{dm}{dt} = -\delta \frac{T}{w}. \quad (2.5g)$$

Требуется перевести КА с начальной массой m_0 с начальной орбиты

$$h = h_0, e_x = e_{x0}, e_y = e_{y0}, i_x = i_{x0}, i_y = i_{y0} \quad (2.6)$$

на конечную орбиту

$$h = h_f, e_x = e_{xf}, e_y = e_{yf}, i_x = i_{xf}, i_y = i_{yf} \quad (2.7)$$

за заданное или минимизируемое время. Рассматривается задача минимизации функционала

$$J = \int_0^{t_f} \delta \frac{T}{w} dt \rightarrow \min, \quad (2.8a)$$

соответствующая задаче о перелёте с минимальными затратами топлива. Отметим, что при отсутствии ограничений на время перелёта t_f и при $\delta \equiv 1$, функционал (2.8a) соответствует задаче о перелёте за минимальное время. Традиционно, для задачи оптимального быстрогодействия используется функционал

$$J = \int_0^{t_f} dt \rightarrow \min. \quad (2.8b)$$

2.2 ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

Для решения задачи (2.5-2.8) используется формализм ПМП. Гамильтониан задачи оптимального управления (2.5-2.8) имеет вид:

$$H = -\lambda_m \delta \frac{T}{w} + \frac{\xi^2}{h^3} \lambda_F + \delta \frac{T}{m} \frac{h}{\xi} (A_r \cos \vartheta \cos \psi + A_r \sin \vartheta \cos \psi + A_n \sin \psi) \quad (2.9)$$

где, $A_\tau = h\lambda_h + \{(\xi + 1)\cos F + e_x\}\lambda_{ex} + \{(\xi + 1)\sin F + e_y\}\lambda_{ey}$,

$$A_r = \xi(\lambda_{ex}\sin F - \lambda_{ey}\cos F) \text{ и } A_n = \eta(e_x\lambda_{ey} - e_y\lambda_{ex}) + \frac{\phi}{2}(\lambda_{ix}\cos F + \lambda_{iy}\sin F) + \eta\lambda_F.$$

$\lambda_h, \lambda_{ex}, \lambda_{ey}, \lambda_{ix}, \lambda_{iy}, \lambda_F, \lambda_m$ – переменные, сопряженные к фазовым координатам h, e_x, e_y, i_x, i_y, F и m соответственно.

Оптимальное управление $\delta(t), \vartheta(t), \psi(t)$ определяется из условия максимума гамильтониана (2.9):

$$\cos \vartheta = \frac{A_\tau}{\sqrt{A_\tau^2 + A_r^2}}, \quad \sin \vartheta = \frac{A_r}{\sqrt{A_\tau^2 + A_r^2}}, \quad (2.10)$$

$$\cos \psi = \frac{\sqrt{A_\tau^2 + A_r^2}}{\sqrt{A_\tau^2 + A_r^2 + A_n^2}}, \quad \sin \psi = \frac{A_n}{\sqrt{A_\tau^2 + A_r^2 + A_n^2}} \text{ и} \quad (2.11)$$

$$\delta = \begin{cases} 1, & \text{если } \psi_s > 0 \\ 0, & \text{если } \psi_s \leq 0 \end{cases}. \quad (2.12)$$

где $\psi_s = \frac{h}{m\xi}\sqrt{A_\tau^2 + A_r^2 + A_n^2} - \frac{\lambda_m}{w}$ – функция переключения. В задаче о перелёте за

минимальное время вместо соотношения (2.12) из условий оптимальности следует

$$\delta \equiv 1, \quad (2.13)$$

а дифференциальные уравнения для переменных m и λ_m можно исключить из рассмотрения в силу явной зависимости массы КА m от времени:

$$m = m_0 - \left(\frac{T}{w}\right)t \quad (2.14)$$

Уравнения оптимального движения имеют вид:

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \text{ и } \frac{d\boldsymbol{\lambda}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{X}}. \quad (2.15)$$

где $\mathbf{X} = [h \ e_x \ e_y \ i_x \ i_y \ F \ m]^T$ и $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_h \ \lambda_{ex} \ \lambda_{ey} \ \lambda_{ix} \ \lambda_{iy} \ \lambda_F \ \lambda_m]^T$.

2.3 КРАЕВАЯ ЗАДАЧА

Интегрирование уравнений (2.15) с произвольным набором недостающих начальных условий дает возможность определить значения фазового вектора \mathbf{X} и вектора сопряженных переменных $\boldsymbol{\lambda}$ в конечный момент времени t_f , также как и значения невязок решения краевой задачи, которые на решении задачи оптимального управления должны равняться нулю:

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}) = \begin{pmatrix} h(t_f) - h_f \\ e_x(t_f) - e_{xf} \\ e_y(t_f) - e_{yf} \\ i_x(t_f) - i_{xf} \\ i_y(t_f) - i_{yf} \\ \lambda_F(t_f) - \lambda_{Ff} \\ \lambda_m(t_f) - 1 \end{pmatrix} = 0 \quad (2.16a)$$

для задачи с фиксированным временем и

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}) = \begin{pmatrix} h(t_f) - h_f \\ e_x(t_f) - e_{xf} \\ e_y(t_f) - e_{yf} \\ i_x(t_f) - i_{xf} \\ i_y(t_f) - i_{yf} \\ \lambda_F(t_f) - \lambda_{Ff} \\ H(t_f) \end{pmatrix} = 0 \quad (2.16b)$$

для задачи на оптимальное быстродействие.

Эти невязки являются функциями вектора неизвестных параметров краевой задачи. Учитывая это, записанные равенства (2.16a), (2.16b) следует рассматривать как уравнения относительно вектора неизвестных параметров краевой задачи:

$$\mathbf{z} = [\lambda_{h0} \quad \lambda_{ex0} \quad \lambda_{ey0} \quad \lambda_{ix0} \quad \lambda_{iy0} \quad \lambda_{F0} \quad \lambda_{m0}]^T \quad (2.17a)$$

для задачи с фиксированным временем и

$$\mathbf{z} = [\lambda_{h0} \quad \lambda_{ex0} \quad \lambda_{ey0} \quad \lambda_{ix0} \quad \lambda_{iy0} \quad \lambda_{F0} \quad t]^T \quad (2.17b)$$

для задачи на оптимальное быстродействие.

Так как рассматривается межорбитальный перелёт, а значение истинной долготы F в конечной точке траектории перелета не фиксировано, то из условия трансверсальности легко получить $\lambda_F(t_f)=0$. Сделано допущение, что значение этой сопряженной переменной равняется нулю на протяжении всего времени полета. Были попытки рассмотреть общий случай и найти оптимальное изменение этой переменной вдоль всей траектории выведения и эти попытки не привели к положительному результату. Такое исследование не может служить доказательством того, что $\lambda_F(t)$ должно быть тождественно нулевым. Но можно считать, что допускаемое при этом сужение области оптимального управления не должно сильно ухудшить характеристики получаемой траектории. Таким образом, рассматривается $\lambda_F(t) \equiv 0$ как допущение, возможно сужающее область оптимального управления полетом КА.

2.4 ГИБРИДНЫЙ МЕТОД, ОБЪЕДИНЯЮЩИЙ МЕТОД ЛЕВЕНБЕРГА - МАРКВАРДА С МОДИФИЦИРОВАННЫМ МЕТОДОМ НЬЮТОНА

Метод Левенберга-Марквардта разработан для нелинейной минимизации функции векторного аргумента. Сущность этого метода, при его использовании для решения системы трансцендентных уравнений, можно описать так [36,56,78]. Пусть необходимо решить систему нелинейных уравнений (2.16). Поставим задачу нахождения таких компонент вектора \mathbf{z} , которые минимизируют сумму квадратов невязок системы (2.16). Можно утверждать, что в определенных условиях решение системы уравнений (2.16) эквивалентно нахождению нулевого значения минимума функции $F(\mathbf{z})$:

$$F(\mathbf{z}) = \frac{1}{2} \mathbf{f}(\mathbf{z})^T \mathbf{f}(\mathbf{z}), \quad (2.18)$$

Идея метода Левенберга заключается в объединении положительных свойств градиентного метода и метода Ньютона. Дело в том, что градиентные методы в общем случае весьма эффективны вдали от решения.

$$\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{z}_k - \alpha \frac{\partial F}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}_k), \quad (2.19)$$

В (2.19) введены значения искомого аргумента на двух последовательных k -ой и $k+1$ -ой итерациях и градиент минимизируемой функции F при значении аргумента на k -ой итерации. В окрестности же решения эффективность градиентных методов падает. У градиентных методов есть еще один принципиальный недостаток: он заставляет аргумент «двигаться» по склону оврага, очень медленно изменяя те компоненты аргумента, которые обеспечивают «движение» аргумента вдоль «стенок впадины». Из этого следует тот очевидный факт, что овражную функцию очень трудно минимизировать градиентными методами.

С другой стороны метод Ньютона, используемый в равенстве

$$\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{z}_k - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \mathbf{z}^2}(\mathbf{z}_k) \right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}_k), \quad (2.20)$$

позволяет учитывать информацию о кривизне поверхности (вторые производные $\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \mathbf{z}^2}(\mathbf{z}_k) \right)$ и о градиенте, т.е. оказывается эффективным в окрестности решения. В чистом виде метод Ньютона используется очень редко. Чаще используются его модификации, регулирующие шаг в направлении изменения аргумента, вычисленного с помощью метода Ньютона.

Левенберг предложил алгоритм, который объединил идею метода простого градиента и метода Ньютона. При этом предложенный итерационный процесс оказался объединением записанных выше соотношений:

$$\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{z}_k - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \mathbf{z}^2}(\mathbf{z}_k) + \alpha E \right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}_k), \quad (2.21)$$

где E – единичная матрица размерности n , α – параметр, управляющий итерационным процессом. Когда α имеет большую величину, итерационный процесс близок к градиентному поиску. Когда величина этого параметра мала, процесс близок к «ньютоновскому». Достаточно широко принятая рекомендация по выбору параметра α может быть сформулирована так. Если на каком-либо шаге итерационного процесса невязка уменьшается, то можно или не менять α , или (полагая, что квадратичное представление минимизируемой функции корректно) уменьшить параметр α , например, в 2...10 раз. При этом понизится влияние градиентного спуска. Если же на итерационном шаге невязка увеличилась, то следует вернуться к предыдущему значению аргумента и увеличить параметр α в то же число раз.

Недостаток метода Левенберга состоит в том, что при больших значениях параметра α информация о кривизне (о гессиане, или матрице Гессе) $H(\mathbf{z}) = \frac{\partial^2 F}{\partial \mathbf{z}^2}(\mathbf{z}_k)$ практически не используется. Марквардт предложил модификацию метода Левенберга, которая, учитывая известную кривизну поверхности, «масштабирует» шаг вдоль каждой компоненты аргумента \mathbf{z} . Для этого Марквардт заменил единичную матрицу диагональной матрицей, полученной из гессиана – $diag(H)$. Итерационный процесс принимает вследствие этого следующий вид:

$$\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{z}_k - (H(\mathbf{z}_k) + \alpha diag(H(\mathbf{z}_k)))^{-1} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}_k) \quad (2.22)$$

Поправка Марквардта приводит к увеличению шагов вдоль малой кривизны поверхности и уменьшению шага вдоль большой кривизны. Это обстоятельство позволяет аргументу эффективно перемещаться вдоль «оврага».

Из литературы известно, что, несмотря на эвристичность, метод Левенберга-Марквардта показывает хорошую эффективность в большом числе задач, анализируемых разными авторами. Недостаток его по отношению к методу простого градиента состоит в том, что требуется вычислять матрицу вторых производных от минимизируемой функции. Но, несмотря на это, существует обоснованное большим опытом утверждение, что даже при размерности аргумента, превышающей 100, метод Левенберга-Марквардта работает быстрее, чем метод простого градиента.

Нами была рассмотрена возможность использования гибридного метода, который объединяет метод Левенберга-Марквардта с модифицированным методом Ньютона. Кратко опишем сущность этого гибридного метода.

Метод анализирует значение самой функции F и значение ее производной на каждом шаге итерационного процесса. Если оказывается, что значение самой функции достаточно далеко от нулевого значения, а значение ее производной мало на нескольких последовательных шагах итерационного процесса (при этом необходимое условие минимума функции F выполняется приближенно), то предлагается перейти от использования метода Левенберга-Марквардта к использованию квазиньютоновского метода.

Основное соотношение, описывающее «квазиньютоновский» итерационный процесс, отличается от уже приведенного соотношения (2.20) двумя обстоятельствами. В нем используется скалярный коэффициент γ , регулирующий величину итерационного шага, и вместо матрицы вторых производных используется оценка этой матрицы $B \approx \frac{\partial^2 F}{\partial \mathbf{z}^2}(\mathbf{z}_k)$. Итерационный процесс при этом описывается соотношением:

$$\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{z}_k - \gamma B^{-1} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}_k) \quad (2.23)$$

Приращение аргумента основывается на использовании оценки матрицы вторых производных от F $B \approx \frac{\partial^2 F}{\partial \mathbf{z}^2}(\mathbf{z}_k)$, а величина итерационного шага h_k по аргументам находится из соотношения:

$$\mathbf{h}_k = -B_k \frac{\partial F}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}_k), \quad (2.24)$$

Для оценки матрицы вторых производных может быть использована формула BFGS (Broyden, Fletcher, Goldfarb and Shanno):

$$B_{k+1} = B_k + \frac{1}{\mathbf{h}_k^T \mathbf{y}_k} \mathbf{y}_k \mathbf{y}_k^T - \frac{1}{\mathbf{h}_k^T \mathbf{u}_k} \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^T, \quad (2.25)$$

где, $\mathbf{u}_k = B_k \mathbf{h}_k$, $\mathbf{y}_k = J_{k+1}^T J_{k+1} \mathbf{h}_k + (J_{k+1} - J_k)^T F(\mathbf{z}_{k+1})$. J – матрица Якоби.

Итерационный процесс квазиньютоновского метода строится следующим образом. Начальным приближением для оценки матрицы вторых производных можно использовать матрицу вторых производных из предыдущего шага итерационного процесса, который выполнялся с использованием метода Левенберга-Марквардта. Впрочем, если таких результатов нет, за оценку допустимо взять единичную матрицу. По формуле (2.24) находится приращение аргумента, а сам аргумент – на следующем шаге итерационного

процесса $\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{z}_k + \mathbf{h}_k$. Определяются $F(\mathbf{z}_{k+1})$, J_{k+1}, J_k , и, используя (2.25), определяется оценка матрицы вторых производных B_{k+1} на следующем шаге итерационного процесса.

Используемая формула BFGS одновременно контролирует величину шага и обеспечивает положительную определенность матрицы вторых производных в процессе итерационного поиска.

Комбинация метода Левенберга-Марквардта с квазиньютоновским методом

Итерационный поиск начинается с ряда шагов, выполняемых с использованием метода Левенберга-Марквардта. Если выполнение этих шагов показывает, что значение $F(\mathbf{z}^*)$ сильно удалено от нуля и слабо уменьшается по итерациям:

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}_k) < 0.02 * F(\mathbf{z}) \quad (2.26)$$

(где число 0.02 – один из параметров управления итерационным процессом), то обеспечивается переход к использованию квазиньютоновского метода. Переход к квазиньютоновскому методу предлагается осуществлять, если условие (2.26) удовлетворено в трех последовательных, успешных итеративных шагах. Число три – это еще один параметр управления итерационным процессом.

Как только эффективность итерационного процесса снижается (норма уменьшается медленно), то необходимо вернуться к использованию метода Левенберга-Марквардта.

Этот метод эффективно работает для решения задачи на оптимальное быстродействие. Но для решения задачи с фиксированным временем очень трудно было получить начальное приближение из-за разрывов. Эти разрывы появляются в правых частях дифференциальных уравнений при переключении режима двигателя.

2.5 МЕТОД ЭВОЛЮЦИОННОЙ СТРАТЕГИИ С АДАПТАЦИЕЙ КОВАРИАЦИОННОЙ МАТРИЦЫ

Рассматривается возможность использования метода эволюционной стратегии с адаптацией ковариационной матрицы.

Общая идея разработанного подхода к оптимизации траекторий КА при использовании метода эволюционной стратегии с адаптацией ковариационной матрицы состоит в следующем.

- ✓ Используя условия ПМП, задача оптимизации траектории межорбитального перелета сводится к краевой задаче для системы дифференциальных уравнений.
- ✓ Краевые условия задачи $\mathbf{f}(\mathbf{z})=0$ (2.16) записываются в виде суммы квадратов невязок $\mathbf{f}(\mathbf{z})^T \mathbf{f}(\mathbf{z})=0$ (\mathbf{z} – вектор неизвестных параметров краевой задачи).

✓ Критерием оптимизации для использования эволюционной стратегии рассматривается сумма $\varepsilon g(\mathbf{z}) + \mathbf{f}(\mathbf{z})^T \mathbf{f}(\mathbf{z})$,

где $g(\mathbf{z})$ – показатель эффективности рассматриваемого межорбитального перелета (он вводится так, чтобы требовалось обеспечить минимум этого показателя), ε – некоторый весовой множитель. Этот множитель рассматривается как параметр продолжения в процессе решения оптимизационной проблемы. Конечное значение этого параметра равно нулю.

✓ Из этого следует, что на конечном этапе исследования важно найти решение краевой задачи в окрестности того минимума, к которому нас привел итерационный процесс с использованием эволюционной стратегии.

✓ При этом важно удовлетворить только необходимые условия оптимальности $\mathbf{f}(\mathbf{z})=0$.

2.6 ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ СРАВНЕНИЕ С РЕЗУЛЬТАТАМИ, ПОЛУЧЕННЫМИ ДРУГИМИ АВТОРАМИ

2.6.1 *Пример задачи перелета между некомпланарными орбитами за минимальное время*

В данном разделе приведены результаты решения задачи перелета за минимальное время между двумя околоземными некомпланарными орбитами, а также проведено сравнение полученных результатов с результатами других авторов.

В предлагаемом примере рассматривается перелет с начальной эллиптической орбиты, радиус перицентра которой составляет 6578.128 км, а радиус апоцентра – 42378.123 км. Наклонение начальной орбиты составляет 7 градусов. В качестве конечной околоземной орбиты выступает круговая экваториальная орбита радиусом 42378.123 км.

В качестве критерия оптимизации управления рассматривается длительность перелета, которая минимизируется (т.е. рассматривается задача быстрогодействия). Характеристики КА, оснащенного электроракетной двигательной установкой и совершающего рассматриваемый перелет, следующие: начальная масса КА – 2000 кг, тяга ЭРДУ – 0.35 Н, удельный импульс ЭРДУ – 2000 с.

В результате проведенного анализа данной задачи было выявлено, что минимальная длительность транспортной операции составила 139.1388 суток. Полученный результат оказался достаточно близок к результатам, которые были получены в работах [70]. В таблице 2.1 дано сопоставление результатов решения рассматриваемой тестовой задачи с результатами, известными в литературе.

Таблица 2.1. Сравнение минимального времени для перелета

Автор решения	Полученный результат (длительность перелета), сутки
Мин Тейн	139.1388
В. Г. Петухов [70]	139.0382
MIPELEC [70]	138.5349

На рисунках 2.1 - 2.3 показаны зависимости основных траекторных параметров оскулирующей перелетной траектории (фокального параметра, радиусов апоцентра и перицентра, а также эксцентриситета и наклона) как функций текущего времени перелета. Из данных рисунков можем видеть, что фокальный параметр и радиус перицентра монотонно увеличиваются от своих начальных значений до величины радиуса конечной круговой орбиты, составляющего 42378.123 км. Радиус апоцентра ведет себя немонотонно: он растет до приблизительно 70-х суток по времени перелета и достигает своего максимального значения (равного 52700 км), а затем постепенно уменьшается до радиуса конечной круговой орбиты.

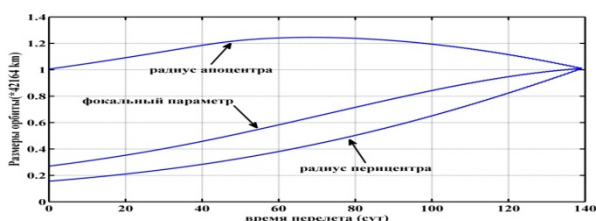


Рисунок 2.1. Изменение размеров орбиты как функции времени перелета

На рисунке 2.2 показано изменение эксцентриситета орбиты как функции времени перелета. Эксцентриситет орбиты монотонно уменьшается до нуля. На рисунке 2.3 показано изменение наклона орбиты как функции времени перелета. Наклонение орбиты также монотонно стремится к нулевому значению.

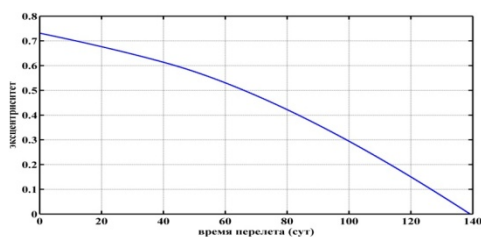


Рисунок 2.2. Изменение эксцентриситета орбиты как функции времени перелета

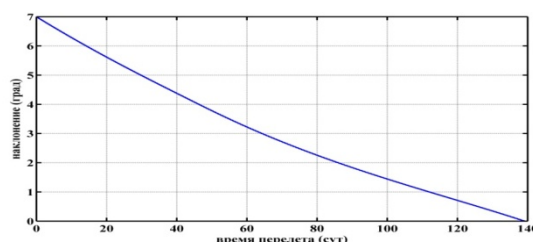


Рисунок 2.3. Изменение наклона орбиты как функции времени перелета

Рисунки 2.4 - 2.5 представляют временные зависимости параметров управления вектором тяги ЭРДУ - углов тангажа и рыскания КА (предполагается, что вектор тяги в каждый момент времени направлен по продольной оси КА).

Так, на рисунке 2.4 показано изменение угла тангажа как функции времени перелета. На рисунке 2.5 показано изменение угла рыскания как функции времени перелета.

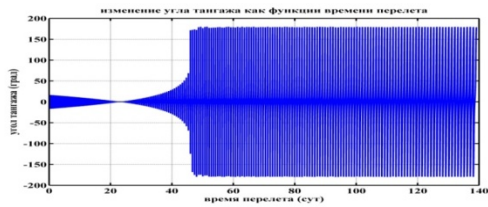


Рисунок 2.4. Изменение угла тангажа как функции времени перелета

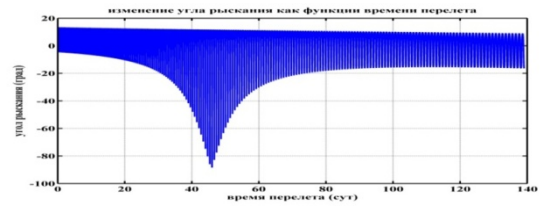


Рисунок 2.5. Изменение угла рыскания как функции времени перелета

Проведем краткий анализ представленных зависимостей. Из данных рисунков можем видеть, что на начальном участке перелета (до приблизительно тридцатых суток полета) углы тангажа и рыскания колеблются около нуля - изменение плоскости движения КА очень медленное. В этот период в основном происходит увеличение радиуса апоцентра орбиты. В районе 45-х суток полета углы рыскания достигают своих максимальных значений в 90 градусов. С этого же момента времени КА начинает выполнять полные развороты на 360 градусов по каналу тангажа с периодом приблизительно равным текущему периоду витка. В это время происходит плавное уменьшение радиуса апоцентра окулирующей траектории с одновременным увеличением радиуса перицентра.

2.6.2 Второй пример задачи перелета между некомпланарными орбитами за минимальное время

В данном примере рассматривается перелет с вытянутой эллиптической орбиты с фокальным параметром 11625 км, эксцентриситетом 0.75 и наклоном 7 градусов на круговую экваториальную орбиту радиусом 42165 км за минимальное время. Начальная масса КА составляет 1500 кг, тяга ЭРДУ принята равной 0.2 Н, а удельный импульс ЭРДУ – 19561.82 м/с.

Минимальное время для рассматриваемого перелета составило 177.3604 суток. Полученный результат оказался достаточно близок к результатам других авторов. В таблице 2.2 представлено сравнение минимального времени для этого перелета.

Таблица. 2.2. Сравнение минимального времени для перелета

Автор решения	Полученный результат (длительность перелета), сутки
Мин Тейн	177.3604
В. Г. Петухов [70]	177.3602
MIPELEC [70]	176.8357
Caillau J.V. и др. [105]	177.7375

На рисунке 2.6 показаны зависимости фокального параметра, радиуса перицентра и радиуса апоцентра как функции времени перелета. Фокальный параметр и радиус перицентра монотонно растут до своих конечных значения (42165 км). Радиус апоцентра

увеличивается до приблизительно 70 суток полета до максимального значения, равного 54800 км, а затем плавно уменьшается до радиуса конечной круговой орбиты.

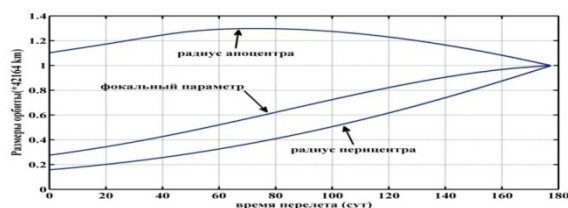


Рисунок 2.6. Изменение размеров орбиты как функции времени перелета

На рисунке 2.7 показано изменение эксцентриситета орбиты как функции времени перелета. Эксцентриситет орбиты монотонно уменьшается до нуля. На рисунке 2.8 показано изменение наклона орбиты как функции времени перелета. Наклонение орбиты также монотонно уменьшается до нуля.

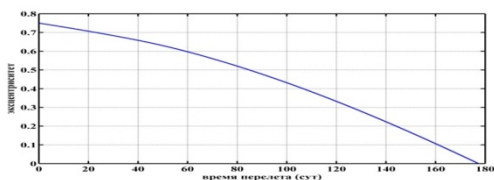


Рисунок 2.7. Изменение эксцентриситета орбиты как функции времени перелета

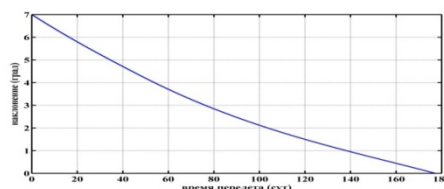


Рисунок 2.8. Изменение наклона орбиты как функции времени перелета

На рисунке 2.9 показано изменение угла тангажа как функции времени перелета. На рисунке 2.10 показано изменение угла рыскания как функции времени перелета.

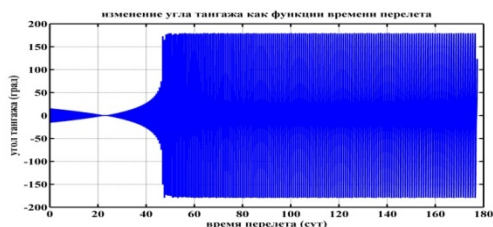


Рисунок 2.9. Изменение угла тангажа как функции времени перелета

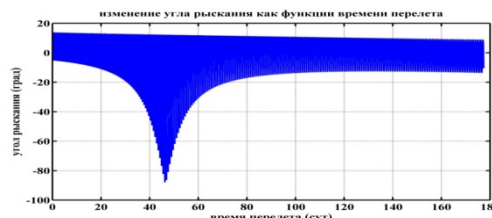


Рисунок 2.10. Изменение угла рыскания как функции времени перелета

В целом, характер изменения углов тангажа и рыскания КА, определяющих направление вектора тяги, такой же как и на рисунках 2.4 и 2.5.

2.6.3 Пример задачи перелета между компланарными эллиптическими орбитами за минимальное время (Оптимальный разворот линии апсид)

В данном примере рассматривается перелет КА с 12-часовой начальной орбиты на 8-часовую орбиту за минимальное время. Орбитальные элементы начальной и конечной орбиты даны в таблице 1.3. Начальная масса КА – 1250 кг, тяга ЭРДУ – 0.2324 Н, удельный импульс ЭРДУ – 18410 м/с.

Таблица 2.3. Орбитальные элементы начальной и конечной орбиты

Элементы орбиты	Начальная орбита	Конечная орбита
Радиус апогея, км	45253	32670
Радиус перигея, км	7871	7871
Наклонение орбиты, град	62.3	62.3
Долгота возводящего узла, град	0	0
Аргумент перигея, град	270	210
Период обращения, час	12	8

Минимальное время для рассматриваемого перелета оказалось равно 133.668 суток.

Полученное время перелета весьма близко к результату, опубликованном в работе [63]. В таблице 2.4 представлено сравнение полученных результатов для этого перелета.

Таблица. 2.4. Сравнение минимального времени для перелета

Автор решения	Полученный результат (длительность перелета), сутки
Мин Тейн	133.668
В. Г. Петухов [70]	133.688

На рисунке 2.11 показано изменение фокального параметра, радиуса перицентра и радиуса апоцентра как функции времени перелета. В начале радиус перицентра несколько увеличивается (до приблизительно 60 суток полета), а затем уменьшается до требуемого конечного значения. Радиус апоцентра монотонно уменьшается.

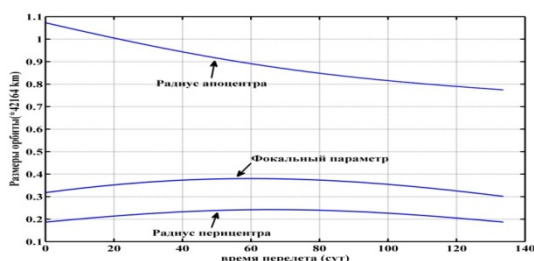


Рисунок 2.11. Изменение размеров орбиты как функции времени перелета

На рисунке 2.12 показано изменение эксцентриситета орбиты как функции времени перелета. На рисунке 2.13 показано изменение наклонения орбиты как функции времени перелета.

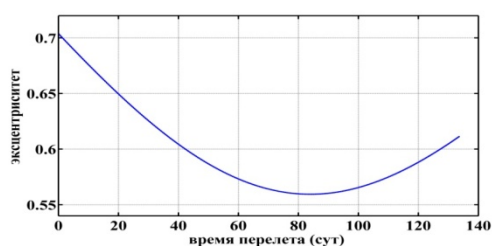


Рисунок 2.12. Изменение эксцентриситета орбиты как функции времени перелета

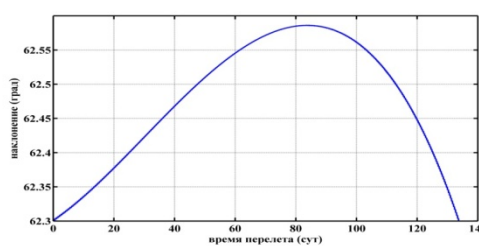


Рисунок 2.13. Изменение наклонения орбиты как функции времени перелета

Анализ данных рисунков показывает, что эксцентриситет и наклонение оскулирующей перелетной траектории изменяются немонотонно. Приблизительно в середине перелета наблюдается локальное уменьшение эксцентриситета с одновременным изменением наклона перелетной траектории.

На рисунке 2.14 показано изменение угла тангажа как функции времени перелета. Из рисунка видим, что угол тангажа колеблется на каждом витке от минус 180 градусов до плюс 180 градусов - КА на каждом витке осуществляет развороты по тангажу на 360 градусов. Таким образом, на каждом витке существуют участки разгона и торможения. На рисунке 2.15 показано изменение угла рыскания как функции времени перелета. Интересно отметить, что угол рыскания на рассматриваемой траектории ненулевой. Таким образом, для осуществления оптимального перелета между компланарными эллиптическими орбитами в данном случае требуется небольшое изменение плоскости движения КА.

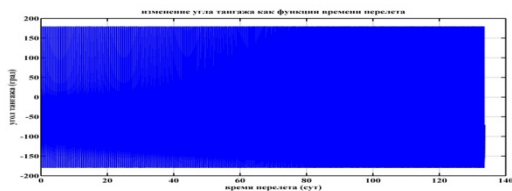


Рисунок 2.14. Изменение угла тангажа как функции времени перелета

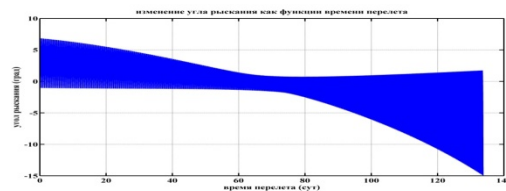


Рисунок 2.15. Изменение угла рыскания как функции времени перелета

2.6.4 Пример задачи оптимального некомпланарного перелета с круговой

орбиты на ГСО за минимальное время (сравнение С и Е решений)

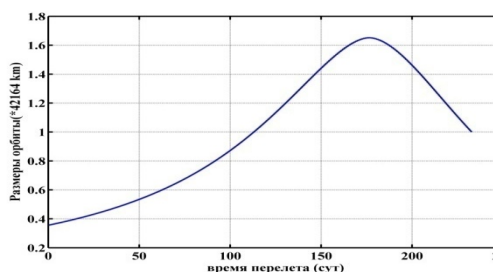
В данном случае рассматривается траектория перелета с круговой орбиты высотой 15000 км и наклоном 62.3 градусов на геостационарную орбиту за минимальное время. Начальная масса КА – 1320 кг, тяга ЭРДУ – 0.332 Н, удельный импульс ЭРДУ – 1500 с.

Как известно[70], в задачах такого типа могут существовать два типа оптимальных решений. Первый тип перелетных траекторий характеризуется тем, что КА постоянно движется по траектории с эксцентриситетом, близким к нулю. Траектория такого перелета может быть представлена совокупностью круговых орбит. Данный тип решений обычно называют решениями С-типа. Второй тип оптимальных траекторий перелета характеризуется тем, что эксцентриситет перелетной траектории может существенно отличаться от нуля в середине интервала времени перелета. Такой тип решений называют решениями Е-типа [70]. С использованием метода СМА-ES удалось получить оба решения. Длительности перелета для этих двух решений представлены в таблице 2.5.

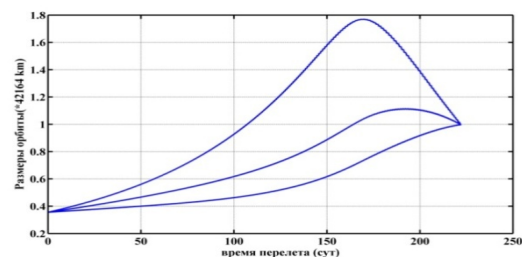
Таблица. 2.5. Сравнение длительности перелета для С и Е-решений.

Тип решения	С - решение	Е - решение
Длительность перелета, сутки	232.766	221.8708

На рисунке 2.16 показано изменение фокального параметра, радиуса перигея и радиуса апогея от времени. На рисунках 2.16, 2.17 и 2.18 левый график соответствует решениям С-типа, а правый – решениям Е-типа.



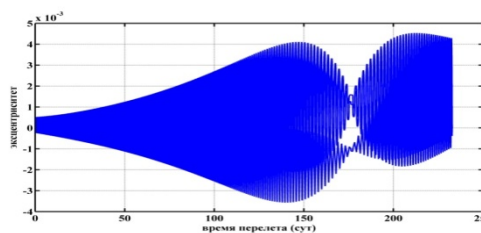
С - решение



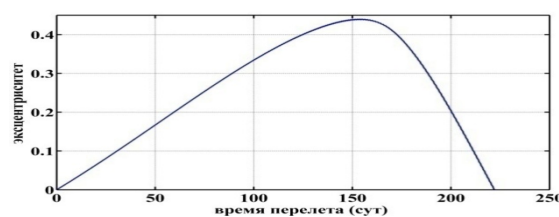
Е - решение

Рисунок 2.16. Изменение размеров орбиты как функции времени перелета

На рисунке 2.17 показано изменение эксцентриситета орбиты как функции времени перелета.



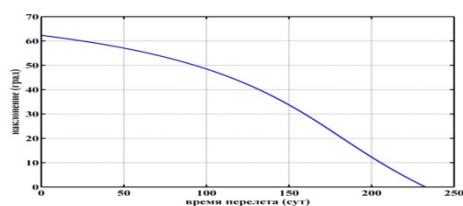
С - решение



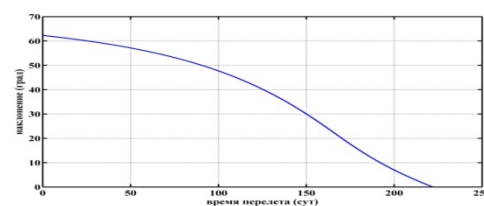
Е - решение

Рисунок 2.17. Изменение эксцентриситета орбиты как функции времени перелета

На рисунке 2.18 показано изменение наклона орбиты как функции времени перелета.



С - решение



Е - решение

Рисунок 2.18. Изменение наклона орбиты как функции времени перелета

2.6.5 Пример задачи оптимального некомпланарного перелета между эллиптической и круговой орбитами при фиксированном времени перелета

В данной задаче рассматривается перелет с эллиптической орбиты с радиусом апогея 34171 км, радиусом перигея 6595 км и наклоном 63.17 градусов на круговую

экваториальную орбиту радиусом 42160 км. Начальная масса КА – 776 кг, тяга ЭРДУ – 0.166 Н, удельный импульс ЭРДУ – 1500 с.

Минимальное время для этого перелета по нашим оценкам составляет 191.389 суток. В таблице 2.6 представлено сравнение полученного результата с результатом из [70].

Таблица 2.6. Сравнение минимального времени для перелета.

Автор решения	Полученный результат (минимальная длительность перелета), сутки
Мин Тейн	191.38986
В. Г. Петухов [70]	191.406

В таблице 2.7 представлены массовые характеристики космической транспортной системы при увеличении продолжительности перелета. В качестве критерия оптимальности управления в случае перелета за фиксированное время выступает масса затрачиваемого рабочего тела ЭРДУ, которая минимизируется.

В таблице 2.7 Ctf - коэффициент, определяющий длительность перелета. Время перелета рассчитывается следующим образом:

$$TOF = Ctf * T_{fmin},$$

где TOF - требуемое (фиксированное) время перелета, T_{fmin} - минимально-возможное время перелета.

Таблица 2.7. Массовые характеристики при увеличении продолжительности перелета

Коэффициент Ctf	Конечная масса КА, кг	Масса рабочего тела ЭРДУ, кг
1	589.39235	186.607
1.005	591.29669	184.70331
1.025	595.32484	180.67516
1.05	598.44321	177.5568
1.1	603.4089	172.5911
1.5	618.9915	157.0085
2	627.68597	148.314025
3	637.173449	138.82655
4	642.16445	133.83554

На рисунке 2.19 представлены проекции траекторий на плоскость земного экватора для некоторых рассматриваемых случаев перелета. На этих рисунках, активные участки показаны красным цветом, пассивные – зеленым.

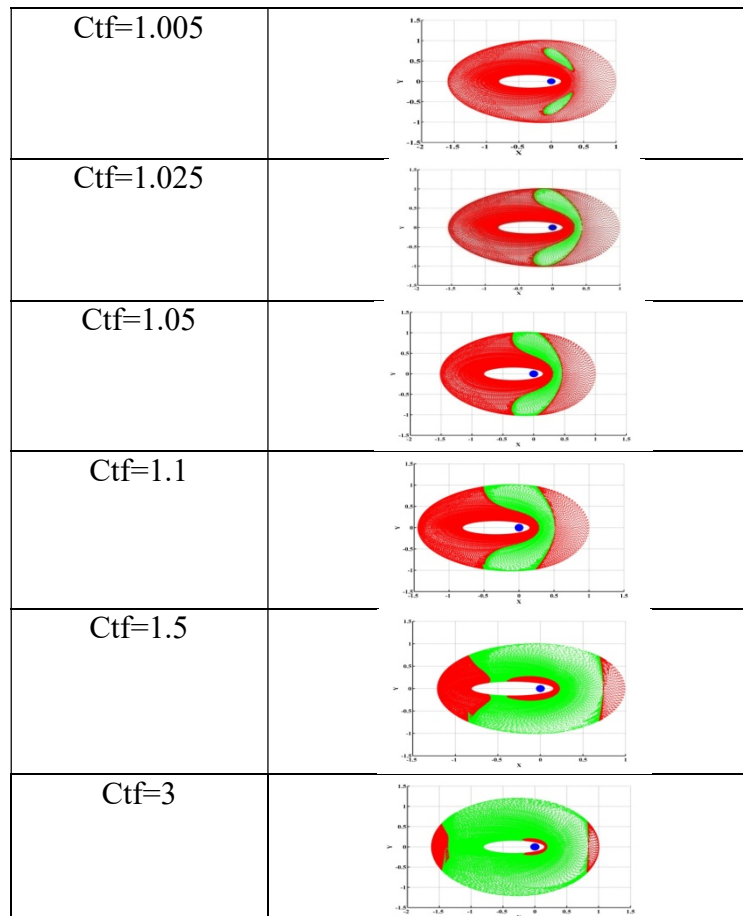


Рисунок 2.19 Проекция траекторий перелета на плоскость экватора

2.6.6 Пример задачи: Оптимизация траектории выведения КА на геостационарную орбиту для транспортной системы с удельным импульсом двигателя 600-900 с

Данный раздел посвящен выведению КА на ГСО с низкой околоземной орбиты, имеющей высоту 200 км и наклонение 51.6° [38]. РН «Союз-2-1б» обладает транспортными возможностями, соответствующими массе КА 8000 кг на начальной орбите. Характеристическая скорость маневра рассматривается в качестве критерия оптимизации. В рассматриваемой постановке минимуму этой скорости соответствуют минимум требуемой массы топлива или максимум конечной массы КА.

Проанализированы диапазон начальных реактивных ускорений 2.5-12.5 мм/с² и диапазон удельных импульсов двигателя 600-900 с [1,90-93]. Результаты анализа оптимальной траектории перелета представлены для трех значений времени перелета: 25, 30 и 35 суток. Основным результатом раздела является определение характеристической скорости как функции начального реактивного ускорения и удельного импульса двигателя КА. Использование этих результатов позволит разработчикам новых типов двигательных установок (например, установок с нагревом рабочего тела с использованием солнечных

концентраторов) корректно оценивать оптимальные характеристики и эффективность данных установок для рассматриваемой типовой транспортной операции.

На рисунке 2.20 дана проекция оптимальной траектории перелета на плоскость экватора (для варианта: время перелета – 30 суток, тяга ракетного двигателя – 80 Н, удельный импульс двигателя – 900 с). Красным выделены активные участки траектории, зеленым – пассивные. Радиус ГСО выбран за единицу расстояния. Сама ГСО, безразмерный радиус которой равен 1, не показана.

Оптимальная траектория обладает следующими характеристиками. В начале перелета за счет работы двигателя орбита вытягивается в перигейном сегменте витков траектории. Радиус перигея увеличивается очень слабо, а радиус апогея значительно возрастает, и становится примерно в 1.7 раза больше радиуса ГСО. Затем на витке траектории появляется апогейный активный участок. При этом двигатель на перигейном участке уже не включается. На апогейном активном участке скорость КА увеличивается, вследствие чего радиус перигея орбиты увеличивается довольно быстро и становится равным радиусу ГСО. В этот момент (на этом витке траектории) радиус апогея остаётся большим, почти не изменившись со времени появления на траектории первого апогейного активного участка. На перигейном участке двух последних витков траектории снова происходит включение двигателя КА для перехода на конечную орбиту. За счет активного торможения КА двигателем радиус апогея орбиты уменьшается.

На рисунке 2.21 показана проекция оптимальной траектории на плоскость $y-z$ (ось x направлена по линии узлов начальной орбиты). Очевидно, что линия узлов всех витков траектории практически не изменяется (она направлена на читателя и перпендикулярна рассматриваемой плоскости). Положение плоскости орбиты (след которой виден на рисунке) на первой части траектории с перигейным активным участком изменяется очень незначительно, но при апогейном включении двигателя изменяется сильно.

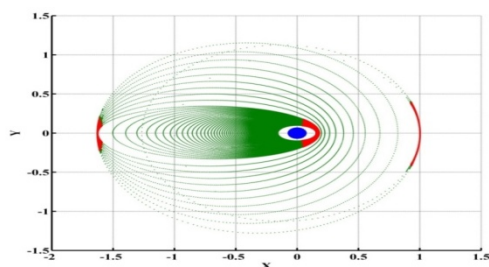


Рисунок 2.20. Проекция траектории перелета на плоскость экватора. Радиус ГСО принят за единицу расстояния

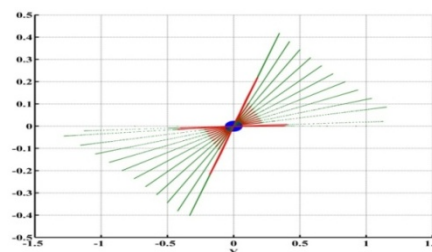


Рисунок 2.21. Проекция траектории перелета на плоскость $y-z$, перпендикулярную линии узлов начальной орбиты

На рисунке 2.22 показана функция переключения двигателя в качестве функции текущего времени перелета. Когда функция переключения больше нуля, двигатель

включен, а когда эта функция меньше нуля, то он выключен. Анализ приведенной зависимости ещё раз подтверждает вывод о том, что вся траектории состоит из трех участков. На первом из них каждый виток траектории содержит один перигейный активный участок. Второй участок траектории состоит из 8 витков, и на нем есть единственный активный участок, расположенный в окрестности апогея витка траектории. Третий участок включает последние два витка траектории, и в перигейной зоне витка траектории двигатель тормозит КА. Отметим, что на предпоследнем витке траектории продолжительность и протяженность активного участка существенно больше, чем на всех других витках траектории.

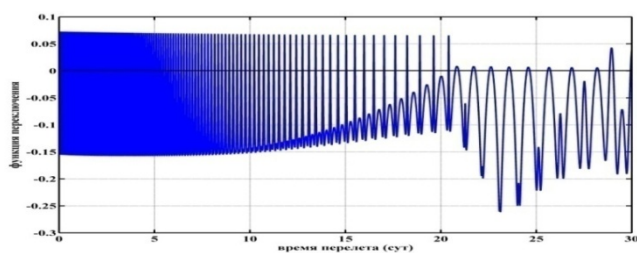


Рисунок 2.22. Функция переключения двигателя вдоль траектории перелета

Рисунки 2.23 и 2.24 иллюстрируют оптимальные законы изменения углов тангажа и рыскания. Видно, что на первой части траектории перелета угол тангажа колеблется вокруг нулевого значения с медленным увеличением амплитуды от 20 до 35 градусов. На второй части траектории перелета, содержащей апогейный активный участок, угол тангажа практически равен нулю. На последних двух витках на активных участках угол тангажа практически равен 180° .

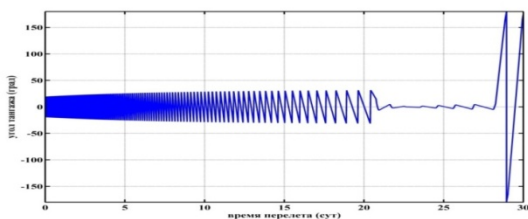


Рисунок 2.23. Оптимальная программа по углу тангажа на траектории перелета на ГСО

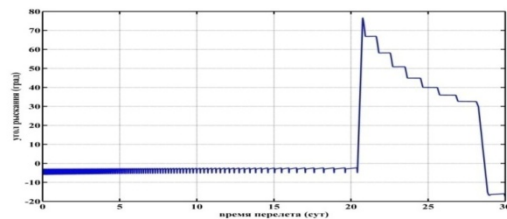


Рисунок 2.24. Оптимальная программа по углу рыскания на траектории перелета

Как показывает анализ программы по углу рыскания, на первом участке траектории тяга двигателя используется для уменьшения наклонения орбиты. При этом на перигейных участках, находящихся в окрестности восходящего узла орбиты, есть небольшой отрицательный угол рыскания, величина которого $2^\circ \dots 5^\circ$. На второй части траектории угол рыскания положительный и большой. При апогейном включении двигателя на первом витке угол рыскания уменьшается от 78° примерно до 68° . На рисунке 2.24 горизонтальные полки на втором участке траектории соответствуют пассивным сегментам витка траектории. На каждом следующем витке траектории на

активных участках происходит монотонное и довольно резкое уменьшение угла рыскания. Интересен тот факт, что практически равны углы рыскания в конечной точке активного сегмента предыдущего витка траектории и в начальной точке активного сегмента на последующем витке траектории. На последнем витке второго участка траектории угол рыскания равен примерно 32° . Последние два включения двигателя осуществляются в районе восходящего узла витка траектории и выполняются при отрицательном угле рыскания величиной около 15° .

На рисунке 2.25 показано изменение эксцентриситета орбиты вдоль траектории перелета. Очевидно, что максимальное значение эксцентриситета немного больше 0.8 и достигается в конце первого участка траектории на 21 сутки перелета. На второй и третьей части траектории перелета эксцентриситет уменьшается до нулевого значения. Горизонтальные полки при этом соответствуют пассивным участкам траектории перелета.

На рисунке 2.26 показано изменение наклона оскулирующей орбиты на оптимальной траектории перелета на ГСО. Видно, что на первом участке перелета наклонение уменьшается от начального значения 51.6° примерно до 50° за счет небольшого по величине угла рыскания. На втором участке траектории перелета наклонение орбиты эффективно уменьшают апогейные активные участки с большим углом рыскания. Причем на первых витках второго участка энергия орбиты невелика, и эксцентриситет изменяется более интенсивно, чем на последующих витках траектории.

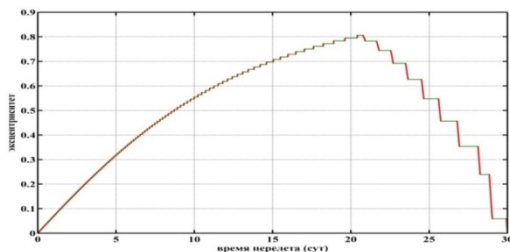


Рисунок 2.25. Изменение оскулирующего эксцентриситета вдоль траектории перелета

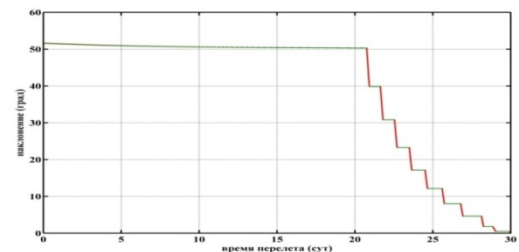


Рисунок 2.26. Изменение оскулирующего наклона вдоль траектории перелета

Большая полуось и фокальный параметр монотонно увеличиваются вдоль траектории на всех ее витках кроме двух последних. На последних двух витках большая полуось и фокальный параметр уменьшаются благодаря торможению КА двигателем.

В заключение анализа оптимальной траектории перелета отметим несколько важных ее свойств.

- Оптимальная траектория состоит из 3 участков с различной структурой управления движением. На последнем участке высота перигея и энергия орбиты уменьшаются за счет торможения КА двигателем.

- На первом участке траектории КА переводится на орбиту, радиус апогея которой значительно больше радиуса конечной орбиты.
- Оптимальная программа по углу рыскания весьма сложна. Угол рыскания на первой части траектории перелета ненулевой. На второй части траектории перелета он сильно меняется на каждом активном сегменте от витка к витку траектории.
- Длительность и протяженность активных участков меняются от витка к витку траектории.

Ниже приведены результаты оптимизации рассматриваемой типовой транспортной операции выведения на ГСО как функции начального реактивного ускорения и удельного импульса двигателя, которые являются важнейшими проектно-баллистическими характеристиками.

Строки таблицы соответствуют 9-ти значениям начального реактивного ускорения (от 2.5 мм/с^2 до 12.5 мм/с^2 с равномерным шагом 1.25 мм/с^2). В столбцах таблицы помещены четыре значения удельного импульса (600, 700, 800 и 900с). В ходе аппроксимации данных таблицы пользователь должен найти характеристическую скорость маневра для исследуемых характеристик КА и его двигательной установки. По характеристической скорости определяется требуемое для перелета топливо, а по корректным массовым и энергетическим моделям оценивается эффективность выполнения транспортной задачи. Это позволяет оптимизировать характеристики транспортной системы, в том числе характеристики двигательной установки.

В таблицах 2.8, 2.9 и 2.10 представлены значения характеристической скорости маневра перелета на ГСО с длительностью перелета 25, 30 и 35 суток.

Таблица 2.8. Характеристическая скорость [км/с] для рассмотренных значений реактивного ускорения и удельного импульса двигателя. Время перелета 25 суток

Начальное реактивное ускорение, мм/с^2	Удельный импульс двигателя			
	600 с	700 с	800 с	900 с
2.50	6.8149	6.9988	7.074	7.2562
3.75	5.9212	6.0292	6.1329	6.2066
5.00	5.525	5.6031	5.6525	5.7265
6.25	5.3142	5.3629	5.4133	5.4346
7.50	5.1743	5.2148	5.2462	5.2773
8.75	5.1317	5.1239	5.1352	5.1732
10.00	5.0787	5.1101	5.0664	5.0854
11.25	5.0769	5.0908	5.0077	5.0725
12.50	5.0687	5.0858	4.9749	5.0676

Таблица 2.9. Характеристическая скорость [км/с] для рассмотренных значений реактивного ускорения и удельного импульса двигателя. Время перелета 30 суток

Начальное реактивное ускорение, мм/с ²	Удельный импульс двигателя			
	600 с	700 с	800 с	900 с
2.50	6.3666	6.5244	6.6564	6.7741
3.75	5.6516	5.7413	5.8084	5.8654
5.00	5.3517	5.3973	5.4364	5.4817
6.25	5.1798	5.2205	5.2628	5.2841
7.50	5.0641	5.1145	5.1220	5.1471
8.75	5.0047	5.0324	5.0595	5.0689
10.00	4.9485	4.9659	4.9856	5.0152
11.25	4.8969	4.9225	4.9691	4.9880
12.50	4.8709	4.9201	4.9376	4.9808

Таблица 2.10. Характеристическая скорость [км/с] для рассмотренных значений реактивного ускорения и удельного импульса двигателя. Время перелета 35 суток

Начальное реактивное ускорение, мм/с ²	Удельный импульс двигателя			
	600 с	700 с	800 с	900 с
2.50	6.0368	6.1686	6.2818	6.3738
3.75	5.4738	5.5362	5.5987	5.6341
5.00	5.2390	5.2839	5.3171	5.3405
6.25	5.1033	5.1275	5.1578	5.1764
7.50	4.9978	5.0238	5.0515	5.0725
8.75	4.9422	4.9602	4.9812	5.0067
10.00	4.8913	4.9165	4.9257	5.0053
11.25	4.8549	4.8726	4.8856	4.9991
12.50	4.8400	4.8444	4.8500	4.9736

На рисунке 1.27 в виде изолиний показаны значения характеристической скорости как функции начального реактивного ускорения (ось абсцисс, равномерная сетка в диапазоне 2.5...12.5 мм/с²) и удельного импульса (ось ординат, равномерная сетка в диапазоне 600...900 с) для времени перелета 30 суток. С увеличением удельного импульса двигательной установки характеристическая скорость рассматриваемого маневра растет. Так, при начальном реактивном ускорении 2.5 мм/с² увеличение удельного импульса с 600 до 900 с приводит к росту характеристической скорости с 6366.6 до 6774.1 м/с.

Уменьшение характеристической скорости происходит с увеличением начального реактивного ускорения. Так при удельном импульсе двигателя 600 с увеличение реактивного ускорения с 2.5 до 12.5 мм/с² приводит к уменьшению характеристической скорости с 6366.6 до 4870.9 м/с.

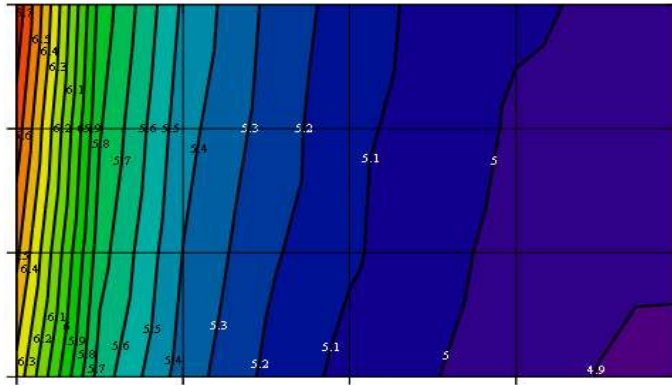


Рисунок 2.27. Изолинии характеристической скорости перелета на ГСО [км/с] на плоскости: начальное реактивное ускорение (ось абсцисс, равномерная шкала в диапазоне 2.5...12.5 мм/с²) – удельный импульс двигателя (ось ординат, равномерная шкала в диапазоне 600...900 с. Время перелета 30 суток.

На рисунке 2.28 представлены изолинии характеристической скорости маневра для перелета на ГСО продолжительностью 35 дней. По отношению 30-суточному перелету характер зависимости практически не изменился. Величина характеристической скорости стала немного меньше. Максимальное уменьшение скорости (на 400 м/с) соответствует малым реактивным ускорениям и высокому удельному импульсу.

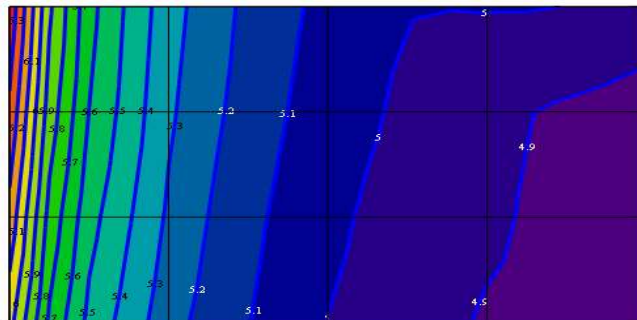


Рисунок 2.28. Изолинии характеристической скорости перелета на ГСО [км/с] на плоскости: начальное реактивное ускорение (ось абсцисс, равномерная шкала в диапазоне 2.5...12.5 мм/с²) – удельный импульс двигателя (ось ординат, равномерная шкала в диапазоне 600...900 с. Время перелета 35 суток.

Приведенные изолинии характеристической скорости как функции начального реактивного ускорения и удельного импульса используемого двигателя дают общее представление о характере влияния этих параметров на характеристическую скорость маневра. Они дают возможность оценить, например, степень уменьшения характеристической скорости при росте начального реактивного ускорения. Из рисунка видно, что при малых реактивных ускорениях и с увеличением удельного импульса характеристическая скорость маневра увеличивается незначительно. Обращает на себя внимание некоторая прерывистость изолиний в области больших реактивных ускорений.

Это происходит из-за того, что глобальный минимум характеристической скорости не удалось получить для некоторого набора входных параметров. Существование множества экстремалей с различным числом оборотов вокруг Земли также осложняют ситуацию. Трудности нахождения глобального экстремума с оптимальным числом витков траектории перелета не всегда удается преодолеть.

Для практического применения результатов данного раздела рекомендуется использовать таблицы значений характеристической скорости, представленные выше. Аппроксимация данных таблицы позволит осуществлять оценку характеристической скорости перелета на ГСО для значений реактивного ускорения и удельного импульса в рассмотренных диапазонах. В общем случае следует использовать двухмерную аппроксимацию. Одномерную аппроксимацию можно использовать в случае анализа проекта с известным значением удельного импульса. Так, при удельном импульсе 900 с и времени перелета 30 суток зависимость характеристической скорости Vh от величины начального реактивного ускорения a_o [мм/с²] можно представить в виде:

$$Vh(a_o) = \frac{4.966}{1 - 0.757 \exp(-0.418 a_o)} \frac{\text{км}}{\text{с}}.$$

Точность приведенной аппроксимации не ниже 0.5% в рассматриваемом диапазоне реактивных ускорений.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ ПО ГЛАВЕ

В данной главе предложен подход, основанный на методе эволюционной стратегии с адаптацией ковариационной матрицы, для оптимизации траектории многовиткового перелета КА между некомпланарными орбитами.

Решены не только задачи оптимального управления по минимуму времени выведения (задачи быстрогодействия), но и задача оптимального управления по минимуму характеристической скорости при фиксированном времени выведения (задача с использованием пассивных участков на траектории выведения).

Представлены численные результаты для нескольких задач межорбитальных перелетов КА с ЭРДУ. Проведен анализ свойств оптимальных траекторий, типов законов оптимального управления движением КА на перелетных траекториях. В частности, проведено сравнение двух типов экстремалей при перелете между круговыми некомпланарными орбитами, при котором существует второй тип экстремали.

Проведено сравнение полученных с использованием разработанного метода результатов оптимизации межорбитальных перелетов с результатами, опубликованными

другими авторами. Такое сравнение подтвердило достоверность получаемых результатов и эффективность предлагаемого метода.

Подробно проанализирована типовая транспортная операция – выведение КА на ГСО с низкой околоземной орбиты высотой 200 км и наклоном 51.6° . Для этой транспортной операции проведен анализ оптимальных характеристик траекторий перелета для диапазона удельных импульсов 600-900 с и диапазона начальных реактивных ускорений $2.5 \dots 12.5 \text{ мм/с}^2$. Основным результатом работы – характеристическая скорость как функция удельного импульса двигателя и начального реактивного ускорения. Эти результаты представлены в виде таблиц. Аппроксимация результатов, представленных в таблицах, может позволить корректно оценивать влияние параметров КА и его систем (прежде всего двигательной установки) на эффективность выполнения рассмотренной транспортной операции.

Разработаны математические модели, алгоритмы и программные средства для оптимизации космических маневров с низкой околоземной орбиты на высокие рабочие орбиты, в частности, на геостационарную орбиту.

3 ОПТИМИЗАЦИЯ ТРАЕКТОРИЙ ПРЯМЫХ ГЕЛИОЦЕНТРИЧЕСКИХ ПЕРЕЛЕТОВ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С МАЛОЙ ТЯГОЙ ПРИ ПОМОЩИ МЕТОДА ЭВОЛЮЦИОННОЙ СТРАТЕГИИ С АДАПТАЦИЕЙ КОВАРИАЦИОННОЙ МАТРИЦЫ

Задача оптимизации траекторий прямых гелиоцентрических перелетов КА с малой тягой сформулирована при использовании ПМП. Задача оптимизации траектории сведена к задаче минимизации суммы квадратов разности краевых условий и критерия оптимизации (массы требуемого топлива) с весовым коэффициентом. Весовой коэффициент рассматривается как параметр продолжения по итерационному процессу решения задачи оптимизации, и его окончательное значение равно нулю. Такая формулировка позволяет найти решение для краевой задачи в окрестности минимума требуемого топлива при помощи метода эволюционной стратегии с адаптацией ковариационной матрицы. Этот метод показал высокую эффективность при анализе рассматриваемых гелиоцентрических перелетов. Представлены численные результаты этого анализа. Рассмотрена задача оптимизации траектории перелета к Марсу КА с электроракетным двигателем с оптимизацией его основных параметров. Обнаружены и проанализированы десять типов экстремумов при оптимизации прямого перелета к Юпитеру КА с электроракетным двигателем.

При оптимизации межпланетного перелета КА с использованием необходимых условий оптимальности (например, условия ПМП) серьезной проблемой является поиск глобального оптимума, поскольку существует большое количество локальных оптимумов. Количество локальных оптимумов увеличивается за счет сложности рассматриваемого межпланетного перелета, за счет включения в перелет таких участков, на которых можно использовать электроракетную двигательную установку (ЭРДУ). Проблема поиска глобального оптимума становится более сложной из-за увеличения количества локальных оптимумов. В настоящее время есть определенные сдвиги в области глобальной оптимизации функций нескольких переменных. Большое количество исследований посвящено сравнительному анализу различных методов эволюционных стратегий в решении таких задач. Многие исследователи пришли к выводу об эффективности методов, основанных на эволюционной стратегии с использованием адаптации ковариационной матрицы. В данной главе представлены попытки использования одного из вариантов этого метода при оптимизации межпланетного перелета КА с ЭРДУ, оставаясь при этом в рамках подхода, основанного на использовании необходимых условий ПМП.

3.1 ОБЩАЯ ИДЕЯ РАЗВИТИЯ ПОДХОДА К ОПТИМИЗАЦИИ ТРАЕКТОРИЙ КА

При использовании условий ПМП задача оптимизации траектории гелиоцентрического перелета сводится к краевой задаче для системы дифференциальных уравнений. Краевые условия $\mathbf{g}(\mathbf{z})=0$ (\mathbf{z} – вектор неизвестных параметров краевой задачи) могут быть записаны как сумма квадратов невязок $\mathbf{g}(\mathbf{z})^T \mathbf{g}(\mathbf{z})=0$. Критерий оптимизации для использования эволюционной стратегии рассматривается как следующее выражение:

$$\varepsilon f(\mathbf{z}) + \mathbf{g}(\mathbf{z})^T \mathbf{g}(\mathbf{z}).$$

В этом выражении $f(\mathbf{z})$ является показателем эффективности рассматриваемого межпланетного перелета (он вводится для того, чтобы обеспечить требуемый минимум показателя эффективности), ε – весовой коэффициент. Этот коэффициент считается параметром продолжения в процессе решения задачи оптимизации. Конечное значение этого параметра равно нулю. Это значит, что на конечной стадии исследования важно найти решение краевой задачи в окрестности минимума, где мы оказались в результате процесса итерации, основанного на эволюционной стратегии. Важно, чтобы условия оптимальности (в форме $\mathbf{g}(\mathbf{z}) = 0$) удовлетворяли только необходимым условиям. В то же время можно отбросить «кандидатов» для решения краевой задачи (эволюционная стратегия включает в себя эту процедуру) с большими невязками, не обращая внимания на значение индикатора $f(\mathbf{z})$, что невозможно было сделать на начальной стадии исследования, т.к. мы потеряли бы решения, приводящие к лучшему локальному оптимуму.

Этот подход был проверен в процессе решения задачи полета КА к Марсу и Юпитеру. В настоящей главе представлены результаты сравнительного анализа численных результатов, полученных другими авторами при использовании общепринятых методов (с полученными мной данными).

При анализе полета к Марсу некоторые характеристики ЭРДУ (ее удельный вес, удельная масса топливной системы и системы электроснабжения, эффективность ЭРДУ) принимаются за известные. Рассматриваются два набора этих характеристик, взятые из работы [193]. Критерий оптимизации рассматривался как масса КА, доставляемого на Марс, за вычетом массы ЭРДУ, массы топливной системы и массы энергетической установки. В этом случае проанализирован широкий диапазон значений удельных импульсов ЭРДУ (2650, 2700 ... 3350с) и ее тяги 216, 217, ..., 230 мН. В результате расчетов было решено более 400 краевых задач с получением оптимальных значений тяги и удельного импульса. Результаты расчетов хорошо совпадают с результатами, представленными в работе [193]. Используемый метод эволюционной стратегии с

использованием адаптации ковариационной матрицы позволил справиться с задачей оптимизации очень быстро и без каких-либо затруднений со сходимостью.

При оптимизации прямого перелета КА с ядерной электроракетной двигательной установкой (ЯЭРДУ) к Юпитеру следующие характеристики КА считаются известными: электрическая мощность, обеспечиваемая энергетической установкой ЭРДУ, равна 200 кВт, начальная масса КА в начале гелиоцентрической траектории равна 16150 кг, гиперболический избыток скорости равен нулю при старте с Земли и при приближении к Юпитеру, удельный импульс ЯЭРДУ равен 4500с, тяга ЯЭРДУ равна 6.453 Н, дата старта - 02.05.2017, общая длительность перелета равна 1200 дням. В работе [73] показано, что существует несколько типов экстремумов с различными угловыми расстояниями (с различным количеством оборотов вокруг Солнца). Обнаружено пять экстремумов с различным количеством оборотов вокруг Солнца (от нуля до 4), из которых лучший – с одним полным оборотом вокруг Солнца. В данной работе подтвержден основной результат цитируемой работы [73]: глобальным оптимум соответствует решению в одном полным оборотом вокруг Солнца. Полученные характеристики траектории из оптимального решения совпадают с решениями описанными в работе [73]. Преимущество подхода, предложенного в данной главе, состоит в том, что глобальный оптимум мог быть получен без фиксации углового расстояния полета, что было сделано в работе [73]. Другие экстремумы должны были быть получены искусственным путем для того, чтобы продемонстрировать все существующие экстремумы.

Интересен тот факт, что нам удалось получить и исследовать несколько экстремумов, которые не были получены в работе [73]. Обнаружены два дополнительных локальных оптимума с количеством оборотов менее одного и локальные оптимумы с более чем 5 и 6 оборотами. Но эти решения хуже, чем оптимальный полет с одним полным оборотом вокруг Солнца.

3.2 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ АНАЛИЗА И ОПТИМИЗАЦИИ ТРАЕКТОРИИ ГЕЛИОЦЕНТРИЧЕСКОГО ПЕРЕЛЕТА КА С ЭРДУ

Используется такая же математическая модель, описывающая оптимальное движение КА с ЭРДУ, что и в разделе 1.6.2. Оптимизация траектории гелиоцентрического перелета основана на принципе максимума. Задача поиска оптимальной траектории перелета сводится к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Краевая задача формулируется как система нелинейных уравнений. Неизвестный вектор этой системы нелинейных уравнений x состоит из скалярных величин сопряженных переменных в начальной точке гелиоцентрической траектории.

Ставится задача нахождения таких компонентов вектора \mathbf{z} , которые минимизируют сумму квадратов невязок системы уравнений.

$$G(\mathbf{z}) = \mathbf{g}(\mathbf{z})^T \mathbf{g}(\mathbf{z}). \quad (3.1)$$

Для того, чтобы получить лучшее экстремальное решение (если существуют множество решений) вместо (3.1) рассматривается уравнение [164]:

$$F(\mathbf{z}) = \varepsilon f(\mathbf{z}) + G(\mathbf{z}). \quad (3.2)$$

Уравнение (3.2) рассматривается как целевая функция оптимизации для использования метода эволюционной стратегии с адаптацией ковариационной матрицы.

3.3 ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ, ИХ АНАЛИЗ И СРАВНЕНИЕ

3.3.1 Оптимизация траекторий к Марсу для КА с малой тягой

В первом примере рассматривается оптимизация траектории полета к Марсу для КА с ЭРДУ со следующими характеристиками [193]:

- дата отлета от Земли – 20 апреля 2035 года;
- гиперболический избыток скорости равен нулю;
- длительность перелета равна 350 дням;
- начальная масса КА равна 1000 кг.

Полезная нагрузка рассматривается как критерий оптимизации. Она максимизируется и подсчитывается следующим образом:

$$m_u = m_o - m_{ep} - m_{fss}. \quad (3.3)$$

Здесь m_u – полезная нагрузка (конечная масса КА за вычетом массы энергетической системы и системы двигателя), m_o – начальная масса КА, m_{ep} – масса электроракетной двигательной установки (ЭРДУ), m_{fss} – масса системы снабжения топливной системы с требуемым количеством топлива:

$$m_{ep} = \gamma P; \quad P = \frac{T_w}{2\eta} \quad (3.4)$$

где γ – соотношение массы и мощности электроракетной двигательной установки; P – входная электрическая мощность для ЭРДУ и η – Коэффициент полезного действия ЭРДУ.

$$m_{fss} = (1 + a_t) m_p, \quad (3.5)$$

m_p – масса требуемого топлива и a_t – коэффициент массы системы снабжения топливом.

Необходимые условия параметров оптимальности ЭРДУ (тяга T и эффективная скорость истечения w) могут быть записаны следующим образом. При условии, что

существует возможность включения этих параметров ЭРДУ в состав вектора состояния КА, вводятся сопряженные переменные для этих компонентов вектора состояния (λ_T, λ_w) . В соответствии с условиями ПМП гамильтониан и уравнения системы уравнений оптимального движения не будут меняться (т.к. производные этих новых компонентов вектора состояния равны нулю, а дифференциальные уравнения для новых сопряженных переменных будут иметь следующую форму:

$$\begin{aligned}\frac{d\lambda_T}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial T} = -\delta S = -\delta \left(\frac{\lambda_v}{m} - \frac{\lambda_m}{w} \right); \\ \frac{d\lambda_w}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial w} = -\delta T \frac{\partial S}{\partial w} = -\delta T \frac{\lambda_m}{w^2}.\end{aligned}\quad (3.6)$$

Условия оптимальности величины тяги и эффективной скорости истечения в начале и конце принимаются следующие:

$$\begin{aligned}\lambda_T(t_0) &= 0; \\ \lambda_w(t_0) &= 0.\end{aligned}\quad (3.7)$$

$$\begin{aligned}\lambda_T(t_f) &= -\frac{\gamma w}{2\eta}; \\ \lambda_w(t_f) &= -\frac{\gamma T}{2\eta}.\end{aligned}\quad (3.8)$$

Эти два условия оптимальности должны быть добавлены к семи скалярным краевым условиям уравнения (1.44). Так, оптимизация траектории перелета с одновременной оптимизацией двух параметров ЭРДУ сводится к решению двухточечной краевой задачи 9-го порядка. Отсюда видно, что нормализация решения для сопряженных переменных, использованная в уравнении (1.44) как $\lambda_m(t_f) = 1$, может быть замещена отношением $\lambda_m(t_f) = 1 + a_t$, которое получено в процессе уравнивания этого коэффициента с вариацией конечной массы КА $m(t_f)$ в выражении для вариации массы полезной нагрузки m_u .

Формулируя задачу совместной оптимизации межпланетной траектории КА и его проектных параметров, предлагается использовать минимизацию функции типа уравнения (1.45) или следующей функции, которая совпадает с (1.45) при $\varepsilon = 0$:

$$F(\mathbf{z}) = \varepsilon f(\mathbf{z}) + (1 - \varepsilon)G(\mathbf{z}), \quad (3.9)$$

и в которой $f(\mathbf{z})$ является критерием оптимизации, а $G(\mathbf{z}) = \mathbf{g}(\mathbf{z})^T \mathbf{g}(\mathbf{z})$,

$$\mathbf{g}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{sc}(t_f) - \mathbf{r}_f(t_f) \\ \mathbf{V}_{sc}(t_f) - \mathbf{V}_f(t_f) \\ \lambda_m(t_f) - 1 \\ \lambda_T(t_f) + \frac{\gamma w}{2\eta} \\ \lambda_w(t_f) + \frac{\gamma T}{2\eta} \end{bmatrix}, \quad (3.10)$$

ε – весовой коэффициент (параметр продолжения). Его начальное значение принято за 1, а конечное значение принято за ноль. Это обеспечивает строгое выполнение краевых условий рассматриваемой транспортной задачи и соблюдение необходимых условий оптимальности параметров КА в конце поиска в процессе итерации и активный поиск области выбираемых параметров краевой задачи, в которой критерий оптимальности предположительно имеет наименьшее значение.

Использованный метод СМА-ES позволил справиться с задачей оптимизации очень быстро и без каких-либо затруднений в сходимости.

Предложенный алгоритм для решения краевой задачи оптимального управления (основанный на эволюционной стратегии с адаптацией ковариационной матрицы) позволил эффективно выполнить численный анализ краевых задач 7-ого и 9-ого порядков. Здесь представляются результаты численного анализа для следующих двух наборов проектных характеристик, которые отличаются КПД ЭРДУ:

- 1) полный КПД ЭРДУ 70%;
- 2) полный КПД ЭРДУ 50%.

В то же время другие характеристики двигателя (удельная масса электроракетной двигательной установки и относительная масса топливной системы) считаются остающимися без изменения: $\gamma = 40$ кг / кВт, $a_t = 0.1$.

Изолинии массы полезной нагрузки (m_u) показаны на рисунке 3.1. На этом рисунке на оси абсцисс показана тяга, а на оси ординат показан удельный импульс. Относительно широкий диапазон значений тяги (216 ... 230 мН) и удельного импульса (2650 ... 3350 с) рассматривается в окрестности их оптимальных значений. Оптимальная тяга в рассматриваемом случае равна 222.663 мН. Оптимальный удельный импульс равен 2868.762 с. Результат точно соответствует результатам в работе [193]. Масса полезной нагрузки равна 611.96 кг. Оптимальный вариант соответствует реактивной мощности 3.132 кВт, входная электрическая мощность равна 4.474 кВт. В то же время масса требуемого топлива равна 190.1 кг, масса электроракетной двигательной установки равна 179 кг, масса системы хранения топлива равна 19 кг.

Анализ рисунка 3.1 показывает, что максимальная масса полезной нагрузки представляет собой достаточно плоскую функцию параметров ЭРДУ. Уменьшая тягу ЭРДУ на 5 мН, мы уменьшаем массу полезной нагрузки на 1.4 кг (0.23%). Увеличивая тягу ЭРДУ относительно оптимальной тяги на те же 5 мН, мы уменьшаем массу полезной нагрузки примерно на 1.2 кг (0.2%).

Уменьшение удельного импульса на 200 с относительно оптимального импульса приводит к уменьшению массы полезной нагрузки примерно на 0.9 кг (0.15%). Увеличение удельного импульса на 200 с относительно оптимального импульса приводит к уменьшению массы полезной нагрузки примерно на 0.75 кг (0.12%).

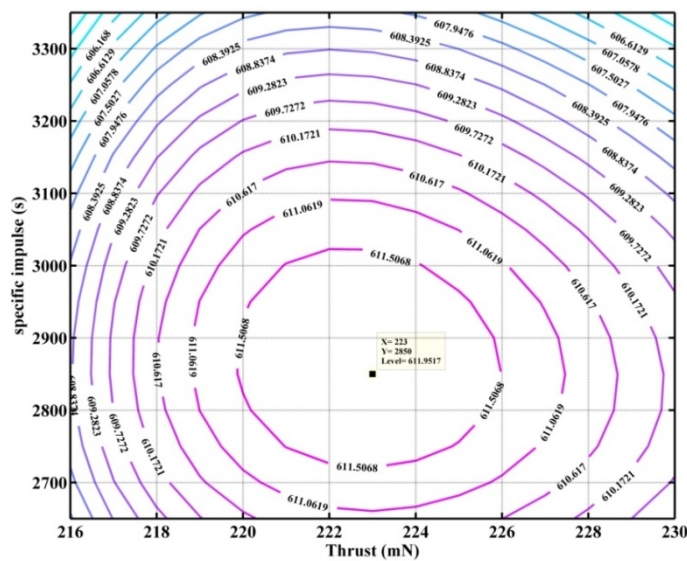


Рисунок 3.1. Масса полезной нагрузки для первого варианта системы электроснабжения и ЭРДУ ($\gamma=40\text{kg/kW}, \eta=0.7, a_r=0.1$) как функция тяги (ось абсцисс, мН) и удельного импульса (ось ординат, сек)

Анализ изолиний, показанных на рисунке 3.1, позволяет разработчику выбрать обоснованные параметры системы электроснабжения и тяги, принимая во внимание многочисленные ограничения, возникающие в начале проектирования. Разработчик почти всегда будет исходить из оптимальной тяги и удельного импульса, чтобы учесть любое ограничение, что было затруднительно предусмотреть в исходной формулировке задачи. Возможно, что будет необходимо принять к сведению ограничение по входной электрической мощности ЭРДУ. Например, пусть входная электрическая мощность меньше оптимальной мощности (4.474 кВт) и равна 4.2 кВт. В этом случае целесообразно проанализировать изолинии электрической мощности на той же плоскости: тяга – удельный импульс ЭРДУ (рис.3.2).

Линия, соответствующая электрической мощности 4.2 кВт, касается линии с массой полезной нагрузки 611.36 кг в точке с координатами 212 мН и 2700 с.

Следовательно, будет целесообразно использовать ЭРДУ с тягой 212 мН и удельным импульсом 2700 с. В то же время входная электрическая мощность ЭРДУ будет равной 4.2 кВт. Масса полезной нагрузки уменьшится на 0.64 кг относительно оптимальной массы (612 кг).

Аналогичным образом можно проанализировать другие возникающие ограничения, например, количество топлива (в связи с существующими емкостями для его хранения), величину тяги или удельный импульс и т.д. Важным моментом является влияние других характеристик ЭРДУ (КПД, удельного импульса и тяги ЭРДУ, удельной массы системы снабжения топливом) на проектные характеристики. КПД ЭРДУ сильно зависит от проектных характеристик. Чтобы проанализировать этот эффект, мы рассматриваем случай 2, когда КПД ЭРДУ равен 0.5 (а не 0.7, как в рассмотренном выше случае).



Рисунок 3.2. Входная электрическая мощность ЭРДУ (кВт) как функция тяги ЭРДУ (ось абсцисс, мН) и удельного импульса (ось ординат, сек)

Рисунок 3.3 показывает изолинии массы полезной нагрузки как функцию тяги и удельного импульса для случая, когда производительность ЭРДУ равна 0.5. В то же время удельная масса системы электроснабжения и тяги ЭРДУ предполагается равной 40 кг / кВт, удельная масса системы хранения топлива равна 0.1. Для анализа второго варианта было решено 240 краевых задач (тяга меняется в диапазоне 216 ... 230 мН с шагом в 1 мН, удельный импульс меняется в диапазоне 2100...2500 сек с шагом в 25 сек).

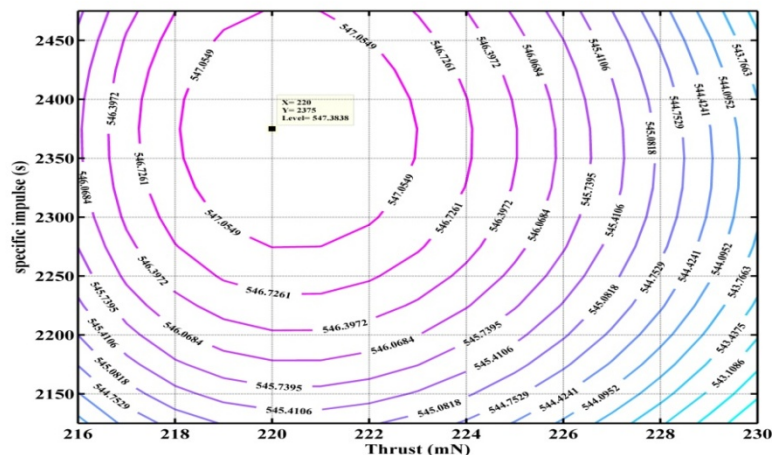


Рисунок 3.3. Масса полезной нагрузки для второго варианта системы электроснабжения и ЭРДУ ($\gamma=40$ кг/кВт, $\eta=0.5$, $a_t=0.1$) как функция тяги (ось абсцисс, мН) и удельного импульса (ось ординат, сек)

Рассмотрены то же самое в предыдущем случае со значениями тяги в диапазоне (216 ... 230 мН). Но диапазон значений удельного импульса сильно изменен – в силу того факта, что оптимальное значение удельного импульса в рассматриваемом варианте серьезно уменьшилось до 2373.919 сек (в случае высокого КПД оно было равно 2868.762 сек). Удельный импульс был выбран в диапазоне 2100 ... 2500 сек. Оптимальная тяга для рассматриваемого случая равна 220.391 мН. Она несколько ниже значения 222.663 мН. Максимальная масса полезной нагрузки равна 547.4 кг. Конечно, снижение КПД ЭРДУ с 0.7 до 0.5 приводит к значительному снижению массы полезной нагрузки примерно до 64.6 кг (более чем на 10.5%). Заметим, что значения этих оптимальных параметров весьма точно соответствуют результатам, данным в работе (ссылка 1).

Оптимальная реактивная мощность для этого варианта равна 2.565 кВт (она снизилась с уровня 3.132 кВт в силу уменьшения КПД ЭРДУ), входная электрическая мощность равна 5.131 кВт (поднялась с уровня 4.474 кВт в силу уменьшения КПД). В то же время масса требуемого топлива увеличилась из-за уменьшения оптимального удельного импульса до 224.9 кг (на 34.8 кг, более чем на 18.3%), масса двигателя равна 205.2 кг (она увеличилась на 26.2 кг).

Таблица 3.1 демонстрирует результаты анализа оптимальных проектных характеристик предложенного полета к Марсу. Четыре проектные характеристики КА были изменены: КПД ЭРДУ, удельная масса системы электроснабжения и ЭРДУ γ , удельная масса системы снабжения топливом a_t . Они даны в таблице в колонках со 2-й по 4-ю. Оптимальные значения удельного импульса и тяги даны в 5-й и 6-й колонках. В последующих колонках показаны: масса требуемого топлива, масса двигателя, максимальная масса полезной нагрузки. В последней колонке этой таблицы даны значения входной электрической мощности ЭРДУ.

Таблица 3.1 Результаты совместной оптимизации траектории полета КА к Марсу и основные проектные параметры ЭРДУ для различных значений проектных параметров, характеризующих уровень используемых технологий.

№	η	γ	a_t	c	T	$m(t_f)$	m_p	$m_{эдду}$	m_u	P
	--	kg/kW	--	s	mN	kg	kg	kg	kg	W
1	0.7	40	0.1	2868.8	222.66	809.95	190.06	388.04	611.96	4474.40
2	0.5	40	0.1	2373.9	220.39	775.11	224.89	452.61	547.39	5130.73
3	0.5	80	0.1	1579.2	214.30	681.96	318.04	615.34	384.66	3318.70
4	0.5	40	0.2	2494.1	221.02	784.69	215.31	474.61	525.39	5405.96

Анализ результатов в таблице, в частности, показывает, что:

- При удельной массе системы электроснабжения и ЭРДУ 80 кг / кВт (уровень, соответствующий текущему состоянию ЯЭРДУ с ядерным реактором) масса полезной нагрузки, доставляемая к Марсу, равна всего лишь 384 кг.
- Оптимальное значение входной электрической мощности с увеличением γ от 40 до 80 кг / кВт (с производительностью 0.5 и $a_t = 0.1$) уменьшается с 5131 кВт до 3318.6 кВт. Оптимальный удельный импульс ЭРДУ серьезно снижается: с 2373.9 сек до 1579.2 сек. Масса системы электроснабжения увеличивается с 452.6 кг до 615.3 кг. Количество требуемого топлива увеличивается с 224.9 кг до 318.0 кг. Оптимальное значение тяги ЭРДУ несколько уменьшается – с 220.391 до 214.3 Н.
- Увеличение удельной массы системы снабжения топливом a_t с 0.1 до 0.2 приводит к уменьшению массы полезной нагрузки с 547.4 до 525.4 кг. В то же время оптимальный удельный импульс увеличивается с 2373.9 сек до 2494.1 сек. Оптимальная тяга почти неизменна (увеличивается с 220.4 до 221.0 Н). Входная электрическая мощность ЭРДУ увеличивается с 5130.7 кВт до 5406.0 кВт. Необходимая для полета масса топлива уменьшается с 224.9 кг до 215.3 кг.

На рисунке 3.4 показана оптимальная траектория КА с тягой 220 мН и удельным импульсом 2375 сек. Такие характеристики близки оптимальным значениям тяги и удельного импульса в случае, когда КПД ЭРДУ равен 0.5, удельная масса системы электроснабжения и ЭРДУ равна 40 кг / кВт и удельная масса системы хранения топлива равна 0.1. На этом рисунке орбита Земли отмечена синим цветом, а орбита Марса – коричневым цветом. Точка старта КА от Земли отмечена, синим кружком, а точка прибытия КА на Марс отмечена оранжевым кружком. Активные участки траектории КА отмечены красными жирными линиями, а пассивный участок траектории КА отмечен зеленой линией.

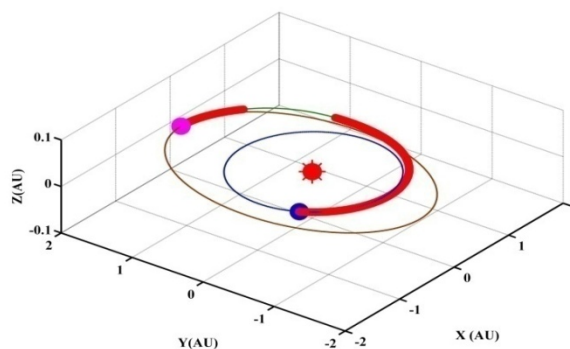


Рисунок 3.4. Оптимальная траектория КА с тягой 220 мН и удельным импульсом 2375 сек

На рисунке 3.5 показаны изменения функции переключения. Оптимальная траектория имеет два активных участка, разделенных одним пассивным участком.

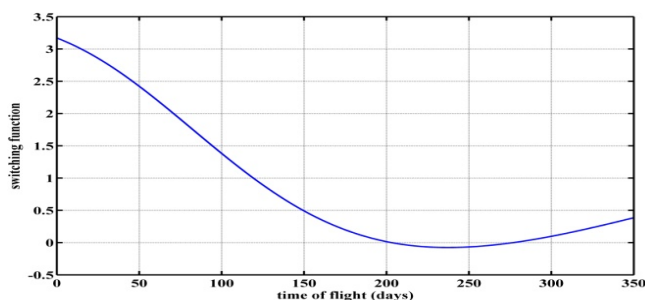


Рисунок 3.5. Изменение функции переключения

Таким образом, данный раздел представляет анализ численных результатов оптимизации траектории КА с ЭРДУ и его основных проектных параметров в процессе анализа проекта доставки КА в окрестности Марса. Проанализирована зависимость этих проектных характеристик как функция основных проектных параметров КА и его ЭРДУ. Использование метода, основанного на эволюционной стратегии с адаптацией ковариационной матрицы способствовало проведению широкого анализа рассматриваемой задачи оптимизации (было решено более 400 двухточечных краевых задач 7-го и 9-го порядка).

3.3.2 Оптимизация траектории полета к Юпитеру для КА с ЯЭРДУ

В работе [73] задача прямого (т.е. без гравитационных маневров) перелета к Юпитеру для КА с ЯЭРДУ рассматривалась как пример, демонстрирующий многоэкстремальность оптимальных траекторий. Автор этой работы показал, что существуют экстремумы с различным количеством оборотов на гелиоцентрическом участке перелета КА к Юпитеру. В настоящей главе, используя разработанный алгоритм оптимизации траектории КА с ЭРДУ, основанный на эволюционной стратегии с адаптацией ковариационной матрицы, проанализированы разнообразные типы экстремумов, некоторые из которых имеют одинаковое количество оборотов гелиоцентрического перелета. В этом случае принимались все входные характеристики из работы [73].

Предполагается, что в начальной точке гелиоцентрического перелета масса КА равна 16150 кг. Начальный гиперболический избыток скорости полета КА от Земли равен нулю. Входная электрическая мощность ЭРДУ равна 200 кВт. Тяга ЭРДУ равна 6.4527757 Н, а ее удельный импульс равен 4500 сек. Дата старта и время гелиоцентрического перелета к Юпитеру также будет взята из работы [73] – 05.02.2017 и 1200 дней соответственно. Проанализируем подлет КА к Юпитеру с нулевым гиперболическим

избытком скорости (задача нулевой стыковки с Юпитером). Критерием оптимизации является конечная масса КА, которая максимизируется.

Для поставленной задачи в работе [73] было найдено 5 локальных экстремумов, которые удовлетворяют необходимым условиям ПМП. Эти экстремумы отличаются друг от друга по количеству полных оборотов гелиоцентрической траектории вокруг Солнца. Были получены гелиоцентрические траектории с количеством полных оборотов вокруг Солнца от 0 до 4. Предельные случаи траекторий с большим количеством оборотов (с большой угловой дальностью гелиоцентрического перелета) не были обнаружены автором. Он сделал вывод, что «траектории с большой угловой дальностью ... очевидно, не существуют». Данный вывод оказался неверным, и здесь предоставлены данные об экстремумах, полученных при большем количестве оборотов. Это произошло благодаря методу, разработанному и представленному в настоящей работе. Сразу оговоримся, что экстремумы с большим количеством оборотов вокруг Солнца не являются удачными с точки зрения критерия оптимизации. Чем больше количество оборотов вокруг Солнца, тем меньше масса КА, достигающего окрестностей Юпитера. Лучший из полученных экстремумов (это глобальный экстремум) соответствует гелиоцентрической траектории, полученной в работе [73]. На этой траектории КА делает один полный оборот вокруг Солнца. Интересно также, что этот экстремум начинается с продолжительного пассивного участка (221.6 дня). Это значит, что принятая дата старта не является оптимальной. Действительная продолжительность гелиоцентрического перелета может быть уменьшена до 221.6 дня благодаря оптимизации даты запуска КА. Однако в рассматриваемой задаче дата старта считалась фиксированной.

В таблице 3.2 показаны характеристики локальных экстремумов, найденных для задачи прямого перелета к Юпитеру для КА с ЯЭРДУ. В первой колонке таблицы дан условный номер экстремума. Во второй колонке таблицы показано количество целых оборотов вокруг Солнца на траектории гелиоцентрического перелета. В третьей колонке таблицы показана масса КА при подлете в окрестности Юпитера (максимизированная конечная масса КА). В последней колонке таблицы дается величина той же самой конечной массы КА, найденная в работе [73]. Для экстремумов, не полученных в работе [73], в последней колонке используется обозначение «нет».

Таблица 3.2 Характеристики полученных экстремумов. Прямой перелет КА с ЯЭРДУ к Юпитеру

Номер экстремума	Количество оборотов	Конечная масса КА (кг)	Конечная масса КА, кг [69]
1	0	2268.38	2268.38
2	0	1739.30	нет
3	0	1746.67	нет
4	1	10693.68	10693.68
5	2	7661.82	7661.82
6	3	5429.07	5429.07
7	4	3903.51	3903.51
8	5	2826.89	нет
9	6	1944.49	нет
10	7	1225.73	нет

Прежде всего заметим, что характеристики всех экстремумов, полученных в работе [67], были подтверждены с высокой степенью точности (с точностью до пятого знака после запятой). Лучший из них (как мы полагаем, глобальный экстремум) – экстремум № 4 (см. таблицу 3.2). Характеристики этого экстремума выделены в таблице жирным шрифтом. Как уже было отмечено, в этом экстремуме траектория совершает один полный оборот вокруг Солнца. Траектория начинается с пассивного участка. Гелиоцентрическая траектория перелета показана на рисунке 3.6. На этой траектории имеется два пассивных и два активных участка (они показаны жирной линией). Точки запуска КА с Земли и приближения КА к Юпитеру отмечены кружочками. Солнце показано в виде относительно крупного круга. Тонкие линии обозначают орбиты Земли и Юпитера.

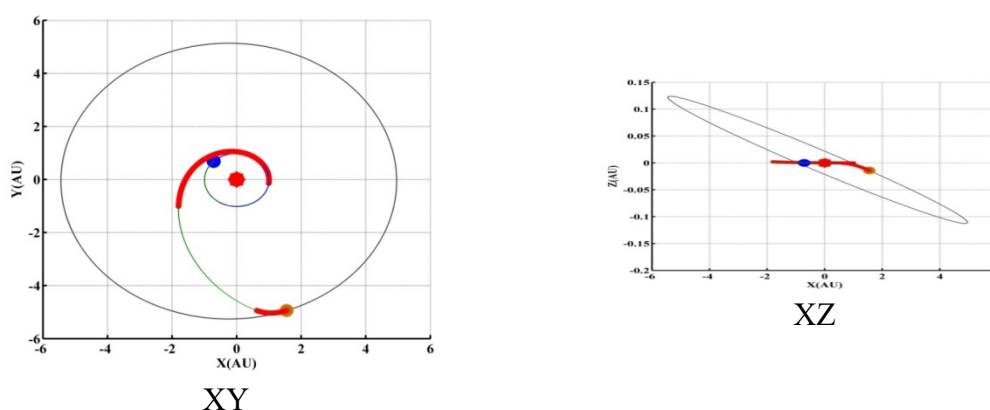


Рисунок 3.6. Гелиоцентрическая траектория полета к Юпитеру для четвертого экстремума В первых трех рядах таблицы 3.2 помещены характеристики локальных экстремумов гелиоцентрических траекторий с угловой дальностью менее одного оборота вокруг Солнца. Одна из них (а именно первая) была получена в работе [73], остальные две, по-видимому, были получены впервые. На всех этих траекториях имеется двойное изменение направления движения КА (вперед – назад – вперед). Первая экстремальная траектория показана на рисунке 3.7. КА на гелиоцентрической траектории слегка сдвинут с плоскости эклиптики. Траектория состоит из двух активных участков, разделенных

пассивным участком. На первом активном участке траектории тяга ЯЭРДУ на расстоянии около 3.3 а.е. от Солнца обеспечивает обратное (противоположно направленное) вращение радиус-вектора КА. Проекция радиус-вектора КА на плоскость эклиптики вращается относительно Солнца в направлении, противоположном вращению крупных планет. Этот тип движения сохраняется также на пассивном участке траектории. Характер гелиоцентрического движения изменяется с обратного на прямое на втором активном участке траектории КА из-за тяги ЯЭРДУ. Это происходит на расстоянии КА от Солнца, близком к удалению Юпитера от Солнца. На последнем участке из-за тяги ЯЭРДУ гелиоцентрические скорости КА и Юпитера выравниваются. Конечно, такой сложный маневр требует больших запасов топлива и маленькой массы КА в окрестности Юпитера (2268.38 кг, в отличие от 10693.68 кг на четвертой экстремали).

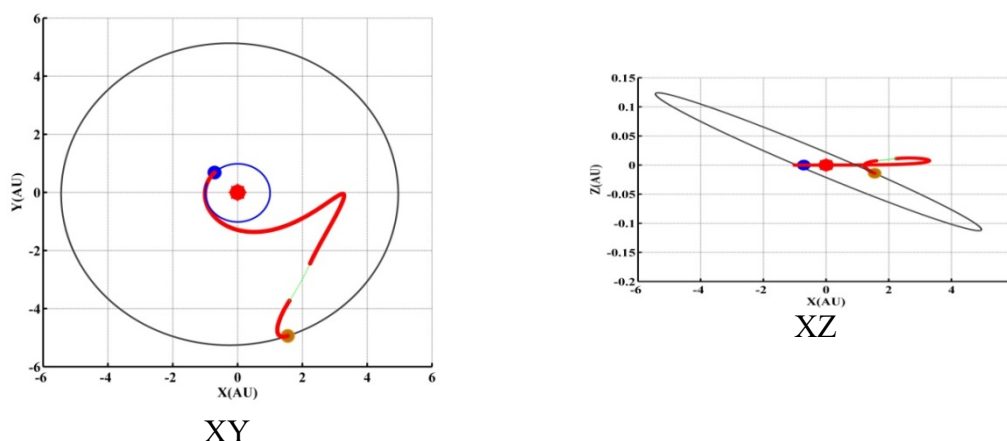
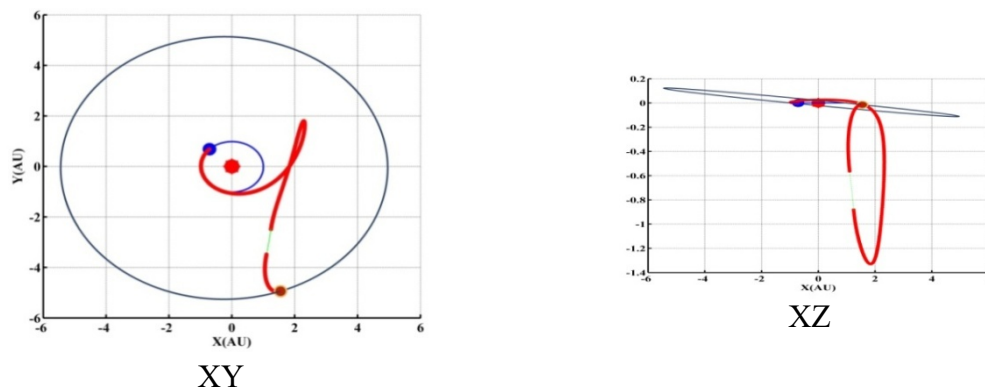


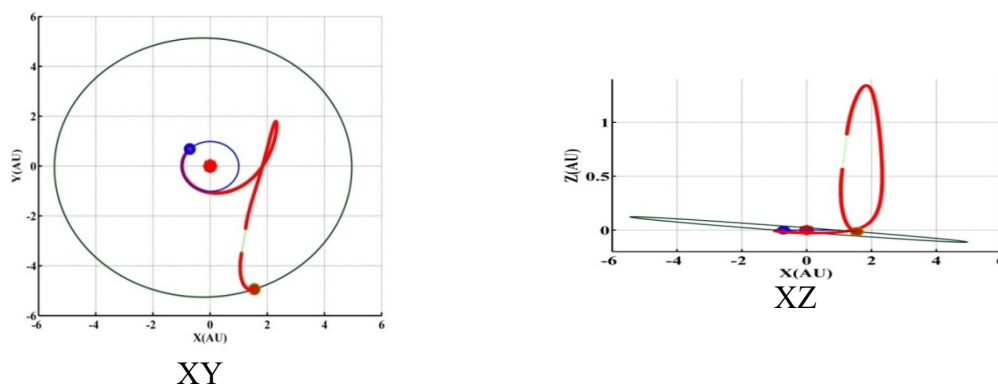
Рисунок 3.7. Гелиоцентрическая траектория перелета к Юпитеру для первой экстремали. Даже КА с меньшей массой может быть доставлен в окрестность Юпитера на

второй и третьей экстремали. Для этих экстремалей характерно большое расстояние от эклиптической плоскости. На рисунке 3.8 показана гелиоцентрическая траектория второй экстремали. Эта траектория состоит из двух активных участков, разделенных пассивным участком. На первом активном участке КА удаляется от эклиптической плоскости в сторону южного полушария. В этом случае максимальное расстояние КА от эклиптической плоскости намного больше, чем один а.е., а проекция радиус-вектора КА на эклиптическую плоскость будет обратным.



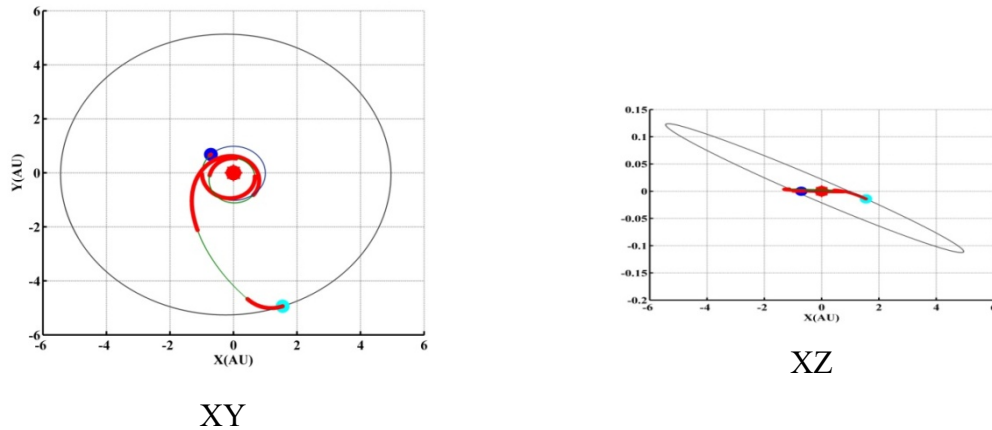
XY

Рисунок 3.8. Гелиоцентрическая траектория перелета к Юпитеру для второй экстремали
 На рисунке 3.9 показана гелиоцентрическая траектория третьей экстремали. Эта траектория состоит из двух активных участков, разделенных пассивным участком. В отличие от траектории второй экстремали на ее первом активном участке КА удаляется от эклиптической плоскости в сторону северного полушария. В этом случае проекция радиус-вектора КА на эклиптическую плоскость будет обратной. На втором активном участке обратное движение заменяется прямой линией из-за тяги ЯЭРДУ. Третья экстремаль может считать как зеркальная копия второй экстремали. Массы КА, доставляемого к Юпитеру на второй и третьей экстремальных, мало отличаются друг от друга (1739.3 кг и 1746.67 кг). Они несколько меньше, чем масса КА, доставляемого к Юпитеру на первой экстремали (2268.38 кг).



XY

Рисунок 3.9. Гелиоцентрическая траектория полета КА к Юпитеру для третьей экстремали
 На рисунке 3.10 показана гелиоцентрическая траектория КА для пятой экстремали. Она состоит из 5 активных участков, разделенных 4 пассивными участками. КА делает 2 полных оборота вокруг Солнца во время гелиоцентрического перелета. На первом и втором витке траектории КА достаточно глубоко входит в орбиту Земли, пересекая орбиту Венеры. Такой маневр требует больших запасов топлива, поэтому рассматриваемая экстремаль находится в невыгодном положении с точки зрения массы КА, доставляемого к Юпитеру (7661.82 кг), по сравнению с четвертой экстремалью (10693.68 кг).



XY

XZ

Рисунок 3.10. Гелиоцентрическая траектория полета КА к Юпитеру для пятой экстремали. На рисунке 3.11 показаны функции переключения ЯЭРДУ для первых пяти экстремалей. Очевидно, что траектория, относящаяся к 5-ой экстремали, содержит максимальное количество активных (и пассивных) участков. В этом случае общая протяженность пассивных участков на пятой экстремали больше, чем протяженность одного пассивного участка на первых трех экстремалях, и меньше, чем общая протяженность двух пассивных участков на четвертой экстремали.

На гелиоцентрических траекториях шестой экстремали и экстремалей с большим порядковым номером увеличивается угловое расстояние перелета. На них КА совершает больше и больше полных оборотов вокруг Солнца. За фиксированный период времени (1200 дней) КА должен увеличивать глубину входа в орбиту Земли для того, чтобы совершить большее количество оборотов вокруг Солнца. С увеличением количества полных оборотов вокруг Солнца гелиоцентрическая траектория КА начинает пересекать орбиту Меркурия; оскулирующий афелий орбиты КА становится ниже на первых витках траектории, так же как и масса КА, доставляемого в окрестность Юпитера. На девятой и десятой экстремалях (с 6 и 7 полными оборотами вокруг Солнца) масса КА, доставляемого в окрестность Юпитера (1944.49 и 1225.73 кг), меньше массы КА, доставляемого в окрестность Юпитера на экстремалях с обратным движением (первый экстремум 2268.38 кг).

На рисунке 3.12 показаны функции переключения ЯЭРДУ для экстремалей с 6-ой по 10-ую. Очевидно, что на шестой экстремали имеется три пассивных участка. Первые два из них относительно короткие, а последний (третий) участок более продолжительный (около 250 дней). На седьмой экстремали находится три пассивных участка. Но первые два из них очень короткие (их продолжительность равна 1 суток). Продолжительность третьего пассивного участка тоже уменьшается по сравнению с шестой экстремали (примерно до 220 дней). На траекториях 8-ой, 9-ой и 10-ой экстремалей имеется только

один пассивный участок. Его продолжительность уменьшается от 140 дней до 30 дней по мере увеличения порядкового номера экстремали. Минимальная величина функции переключения уменьшается и приближается к нулевому значению с увеличением порядкового номера экстремали. Минимальная величина для 7-ой экстремали – около -0.3; для 8-ой экстремали она составляет около -0.25; для 9-ой экстремали ее значение около -0.15; для 1-ой экстремали – около -0.05. На 10-ой экстремали почти вся траектория представляет собой активный участок. Так можно объяснить тот факт, что экстремалей с большим количеством полных оборотов может не существовать.

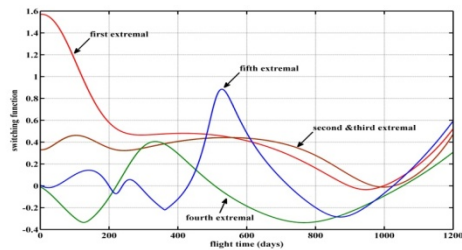


Рисунок 3.11. Функция переключения для первых пяти экстремалей (найденного) решения

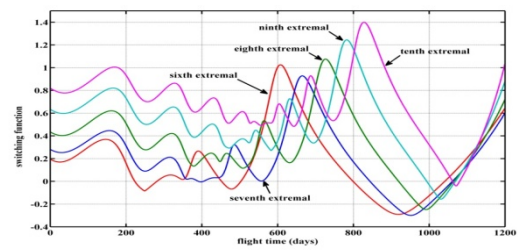


Рисунок 3.12. Функция переключения для последних пяти экстремалей (с 6-ой по 10-ую) (найденного) решения

Таким образом, использование разработанного метода, основанного на СМА-ES , позволило проанализировать возможные типы экстремалей при оптимизации межпланетных траекторий КА с ЭРДУ. Были получены новые типы экстремалей с различным количеством полных оборотов вокруг Солнца. Три экстремали были получены для гелиоцентрических перелетов с угловым расстоянием меньше одного полного оборота вокруг Солнца. У траекторий на этих экстремалях были зоны с обратным движением, и они (траектории) отличались величиной и направлением движения КА в сторону от эклиптической плоскости. Две из них были почти симметричны относительно плоскости эклиптики. Авторы уже сталкивались (в задаче гелиоцентрического перелета к Марсу) с такими траекториями. Следовательно, свойства экстремалей, раскрытые в данной работе, вполне могут считаться типичными.

К сожалению, нам не представилось возможности найти несколько типов экстремалей с одним полным оборотом вокруг Солнца для того случая, когда угловое расстояние гелиоцентрического перелета превышает один оборот. И все же мы полагаем, что такие экстремали, скорее всего, существуют.

3.3.2.1 Выбор оптимальной даты старта при нулевой величине гиперболического избытка скорости при отлете от Земли для решения краевой задачи

При фиксированном времени межпланетного перелета и при нулевом гиперболическом избытке скорости отлета от Земли условие оптимальности даты старта можно представить в виде равенства значений функций переключения двигателя $S(t)$ для начальной и конечной точек межпланетного перелета. Следовательно, краевые условия задачи оптимизации перелета в формулировке ПМП при оптимизации даты старта примут вид:

$$\mathbf{g}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{КА}(t_f) - \mathbf{r}_o(t_f) \\ \mathbf{V}_{КА}(t_f) - \mathbf{V}_o(t_f) \\ \lambda_m(t_f) - 1 \\ \delta(t_o)S(t_o) - \delta(t_f)S(t_f) \end{bmatrix} = 0, \quad (3.11)$$

Последнее условие в уравнении (3.11) представляет собой разницу между значениями функций переключения в начале и в конце гелиоцентрического участка траектории. В качестве выбираемых параметров выступают 8 скалярных переменных $\mathbf{z} = |\lambda_x \ \lambda_y \ \lambda_z \ \lambda_{vx} \ \lambda_{vy} \ \lambda_{vz} \ \lambda_m \ t_o|$. На рисунке 3.13 изображено полученное изменение функции переключения в случае выбора оптимальной даты старта для осуществления задачи нулевой стыковки.

По рисунку видно, что функции переключения в начале и в конце гелиоцентрического участка траектории равны. Оптимальная дата старта - 23.09.2017 года. Масса КА, Доставляемая в окрестность Юпитера масса КА в этом случае равна 11354.63кг.

Интерес представляет функция переключения двигателя для даты старта 05.07.2017, которая представлена на рисунке 3.14. В начале гелиоцентрической траектории очевидно уменьшение пассивного участка траектории. Из этого следует, что оптимальная дата старта является более поздней, чем 05.07.2017.

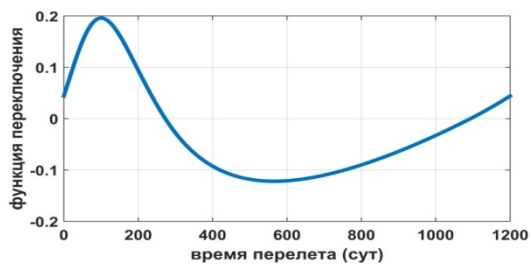


Рисунок 3.13. Функция переключения двигателя с оптимизацией даты старта

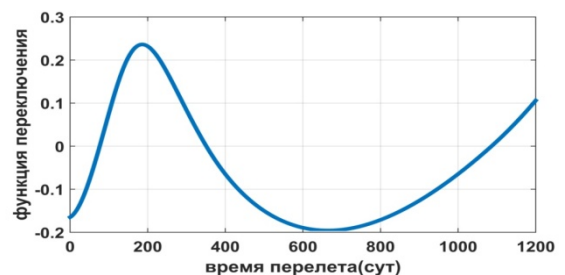


Рисунок 3.14. Функция переключения двигателя с датой старта 05.07.2017

3.3.2.2 Решение краевой задачи при оптимизации даты старта для фиксированной величины гиперболического избытка скорости при отлете от Земли

Условие оптимальности даты старта в том случае, когда время межпланетного перелета и ненулевой гиперболический избыток скорости отлета от Земли фиксированы, можно представить так:

$$\delta(t_o)TS(t_o) - \delta(t_f)TS(t_f) + \frac{|\mathbf{V}_\infty|}{|\lambda_{vo}|}(\lambda_{ro}, \lambda_{vo}) = 0 \quad (3.12)$$

Следовательно, в случае оптимизации даты старта краевые условия задачи оптимизации перелета в формулировке ПМП примут следующий вид:

$$\mathbf{g}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{KA}(t_f) - \mathbf{r}_o(t_f) \\ \mathbf{V}_{KA}(t_f) - \mathbf{V}_o(t_f) \\ \lambda_m(t_f) - 1 \\ \delta(t_o)TS(t_o) + \delta(t_f)TS(t_f) - \frac{|\mathbf{V}_\infty|}{|\lambda_{vo}|}(\lambda_{ro}, \lambda_{vo}) \end{bmatrix} = 0, \quad (3.13)$$

При этом неизвестными величинами краевой задачи остаются те же самые 8 скалярных переменных, с которыми мы встречались в уравнении (3.11)

$$\mathbf{z} = |\lambda_x \lambda_y \lambda_z \lambda_{vx} \lambda_{vy} \lambda_{vz} \lambda_m t_o|.$$

Анализируемая транспортная космическая система базируется на ракете-носителе «Ангара -5», химическом разгонном блоке «КВТК». Из материалов [217] государственного космического научно-производственного центра «имени М.В.Хруничева» следует, что космическая транспортная система на базе РН «Ангара -5» при старте с космодрома «Плесецк» может вывести на низкую околоземную орбиту КА общей массой 24235 кг.

Характеристики ХРБ «КВТК» взяты тоже из материалов [217]. Основные характеристики ХРБ «КВТК» представлены в таблице 3.3. Основные характеристики ЭРДУ представлены в таблице 3.4

Таблица 3.3- Основные характеристики РБ «КВТК»

1. Конечная масса, кг	3330
3. Рабочий запас топлива, максимальный, кг	19600
4. Удельный импульс двигателя, с	470

Таблица 3.4 - Основные характеристики ЭРДУ

Тяга	3.508701Н
Удельный импульс	4650 сек

В таблице 3.5 представлены оптимальная дата старта и конечная масса КА как функция величины гиперболического избытка скорости при старте от Земли.

Таблица 3.5 - Оптимальная дата старта и доставляемая к Юпитеру масса КА как функция гиперболического избытка скорости при отлете от Земли

Величина гиперболического избытка скорости (м/с)	Оптимальная дата старта	Конечная масса КА (кг)
0	28.10.2018	6185.0
100	31.10.2018	6198.7
200	03.11.2018	6211.2
300	05.11.2018	6222.0
400	08.11.2018	6230.7
500	11.11.2018	6237.3
600	13.11.2018	6241.9
700	16.11.2018	6244.7
800	18.11.2018	6245.9
900	21.11.2018	6245.6
1000	23.11.2018	6244.1
1100	26.11.2018	6241.7

Из таблицы следует, что доставляемая к Юпитеру максимальная масса КА составляет 6245.9 кг. Такая масса доставляется к Юпитеру при гиперболическом избытке скорости при отлете от Земли равном 800 м/с. Зависимость массы КА от величины гиперболического избытка скорости достаточно пологая. Изменение этой величины на 100 м/с приводит к уменьшению выводимой массы менее чем на 1 кг.

3.3.2.3 Решение краевой задачи при выборе оптимальной даты старта и оптимальной величины гиперболического избытка скорости при отлете от Земли

Условие оптимальности величины гиперболического избытка скорости при межпланетном перелете можно записать как: $|\lambda_{v_0}| + \lambda_{m_0} \left(\frac{\partial m_0}{\partial V_\infty} \right) = 0$. В данной формуле мы используем модуль базиса вектора в начальной точке гелиоцентрического перелета $|\lambda_{v_0}|$, значение переменной, сопряженной с массой КА, в начальной точке гелиоцентрического перелета λ_{m_0} и производная массы КА в начальной точке гелиоцентрического перелета при величине гиперболического избытка скорости $\frac{\partial m_0}{\partial V_\infty}$.

Вследствие этого при оптимизации даты старта и величины гиперболического избытка скорости краевые условия задачи оптимизации перелета в формулировке ПМП примут следующий вид:

$$\mathbf{g}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{KA}(t_f) - \mathbf{r}_y(t_f) \\ \mathbf{V}_{KA}(t_f) - \mathbf{V}_y(t_f) \\ \lambda_m(t_f) - 1 \\ \delta(t_o)TS(t_o) - \delta(t_f)TS(t_f) + \frac{|\mathbf{V}_\infty|}{|\lambda_{vo}|}(\lambda_{ro}, \lambda_{vo}) \\ |\lambda_{vo}| + \lambda_{mo} \left(\frac{\partial m_o}{\partial V_\infty} \right) \end{bmatrix} = 0, \quad (3.14)$$

Для краевой задачи неизвестными параметрами являются 9 компонент вектора $\mathbf{z} = |\lambda_x \ \lambda_y \ \lambda_z \ \lambda_{vx} \ \lambda_{vy} \ \lambda_{vz} \ \lambda_m \ t_o \ V_\infty|$. Пренебрегая гравитационными потерями скорости при работе ХРБ, мы можем получить величину производной массы КА в начале гелиоцентрического перелета по величине гиперболического избытка скорости $\frac{\partial m_o}{\partial V_\infty}$ из следующих соотношений:

$$\Delta V = \sqrt{\frac{2\mu}{r_o} + V_\infty^2} - \sqrt{\frac{\mu}{r_o}}; \quad m_o = M_o e^{\frac{-\Delta V}{W}} - m_{dryChUS}; \quad \frac{\partial m_o}{\partial V_\infty} = \left(-\frac{M_o e^{\frac{-\Delta V}{W}}}{W} \right) \frac{1}{2} \frac{2V_\infty}{\sqrt{\frac{2\mu}{r_o} + V_\infty^2}}.$$

Здесь r_o – радиус круговой орбиты старта ХРБ; M_o – масса КА с ХРБ на круговой орбите; W – удельный импульс ХРБ; $m_{dryChUS}$ – сухая масса ХРБ и m_o – масса КА в начале гелиоцентрической траектории.

Решая краевую задачу (3.14), получаем следующие результаты:

- Оптимальная величина гиперболического избытка скорости равна 840.25 м/сек;
- Оптимальная дата старта – 19.11.2018;
- Масса КА, доставляемого в окрестность Юпитера, составляет 6246.1 кг.

На рисунке 3.15 дано изображение оптимальной траектории прямого перелета к Юпитеру. Красными стрелками отмечено направление тяги электроракетной двигательной установки на активных участках траектории.

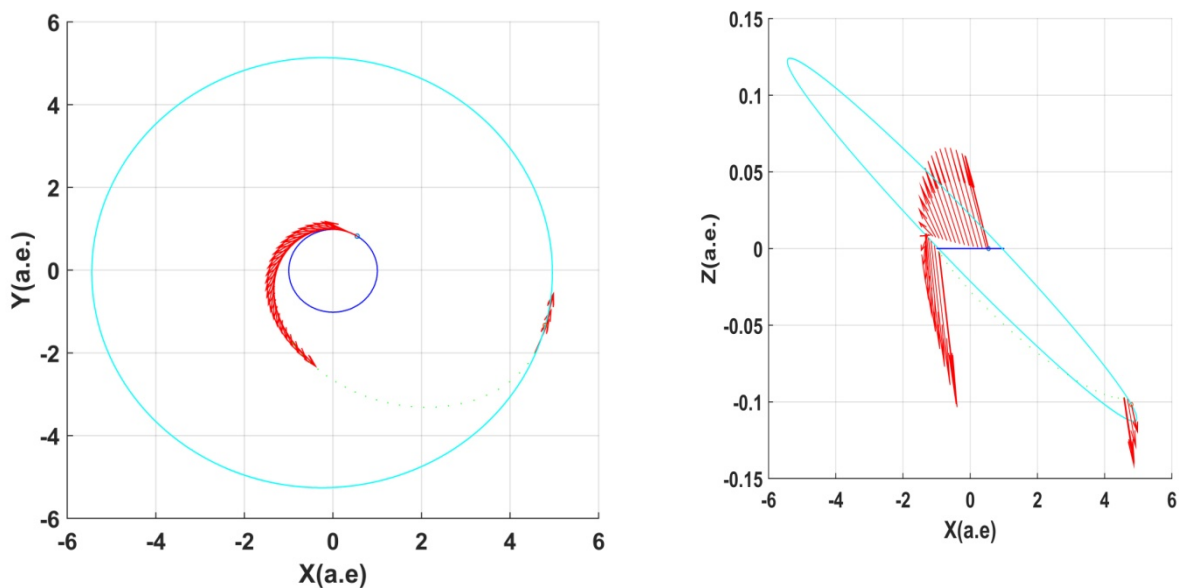


Рисунок 3.15 - Оптимальная траектория прямого перелета к Юпитеру. Оптимальная величина гиперболического избытка скорости. Оптимальная дата старта

3.3.3 Анализ характеристик оптимальной траектории прямого перелета на гелиоцентрическую орбиту с низким перигелием и большим наклоном

В данном разделе анализируется задача оптимизации траектории прямого выведения КА с ЭРДУ на рабочую гелиоцентрическую орбиту с большим наклоном к плоскости эклиптики и низким перигелием и [47,48]. Элементы рабочей орбиты выбирались, исходя из условий наблюдения за Солнцем, в том числе его полярными областями. В большинстве работ, посвященных этой задаче [40,47,48,74-77,158,159,161,162,166], анализируются сложные схемы выведения КА на рабочие гелиоцентрические орбиты с использованием продолжительной серии гравитационных маневров.

Вывод КА на низкую околоземную орбиту предполагается при помощи РН «Союз-2» с космодрома «Байконур». Старт КА с этой орбиты и выход на гиперболическую траекторию отлета от Земли обеспечивается ХРБ «Фрегат», который после этого отделяется от КА. Перелет КА на рабочую гелиоцентрическую орбиту обеспечивается ЭРДУ (на базе двух ионных двигателей типа «RIT-22») [215]. Считается, что основанная на РН «Союз-2» космическая транспортная система может вывести КА общей массой 8250 кг, стартующий с космодрома «Байконур», на низкую околоземную орбиту [216]. В материалах [5] НПО имени С.А. Лавочкина содержатся характеристики РБ «Фрегат», использованные в данной работе. Основные из них представлены в таблице 3.6.

Таблица 3.6 - Основные характеристики РБ «Фрегат»

Конечная масса РБ	980 кг
Рабочий запас топлива, максимальный	5600 кг
Удельный импульс двигателя	333,2 с

Основными характеристиками ионного двигателя типа «RIT-22» являются следующие: входная электрическая мощность 5 кВт, удельный импульс 4500 с, тяга 150 мН. В рассматриваемой двигательной установке используются два двигателя типа RIT-22, работающих параллельно.

Фиксация рабочей гелиоцентрической орбиты происходит при помощи фокального параметра, константой энергии и наклона орбиты. Заданными величинами является радиусы перигелия и афелия рабочей орбиты, а произвольными – долгота восходящего узла и аргумент перигея орбиты.

В задаче оптимизации траектории выведения КА с ЭРДУ на заданную рабочую гелиоцентрическую орбиту за фиксированное время используется ПМП. Для перелета на такую рабочую гелиоцентрическую орбиту обеспечиваются условия трансверсальности (т.е. необходимые условия оптимальности) и их выполнение для решения краевой задачи ПМП.

Представленный в разделе анализ включает в себя следующие важные элементы:

- использование условий трансверсальности при решении краевой задачи ПМП, для перелета на рассматриваемую рабочую гелиоцентрическую орбиту,
- анализ проблемы многоэкстремальности сформулированной оптимизационной задачи и разработка рекомендаций по выбору глобального оптимума.

Рабочая орбита, на которую выводится КА, имеет следующие характеристики: радиус перигелия считается равным 60-ти радиусам Солнца, большая полуось – 0.7 астрономических единиц, наклонение к плоскости эклиптики – 30°. Целью является поиск оптимальных характеристик перелета и программы управления движением КА на всем перелете для обеспечения выведения КА с максимальной массой на рабочую орбиту.

Высота базовой круговой околоземной орбиты считается известной. Ее наклонение определяется космодромом запуска. Величина гиперболического избытка скорости, являясь функцией используемой заправки ХРБ топливом, определяет массу КА в момент начала гелиоцентрического перелета. Следовательно, начальная масса КА на гелиоцентрическом перелете представляет собой монотонно убывающую функцию величины гиперболического избытка скорости. Эта функция была записана аналитически для активного участка полета при старте КА с базовой околоземной орбиты в

предположении его импульсной аппроксимации, при этом гравитационными потерями этого маневра мы пренебрегли.

Направление и величина гиперболического избытка скорости рассматривались в качестве выбираемых оптимизируемых характеристик схемы перелета. Управление движением КА на участке гелиоцентрического перелета описано при помощи трех оптимизируемых функций:

- программа включения – выключения двигателя на траектории гелиоцентрического перелета с неограниченным количеством и протяженностью активных и пассивных участков;
- программа по углу тангажа и рыскания на активных участках траектории.

Время перелета КА на рабочую гелиоцентрическую орбиту фиксировано и составляет 5 лет. Максимизированная масса КА, доставляемого на рабочую гелиоцентрическую орбиту, рассматривалась в качестве критерия оптимальности.

В данной работе, в том числе в этом разделе, используется метод грависфер нулевой протяженности [32]. Это означает, что в момент старта КА с базовой околоземной орбиты начальное положение КА на гелиоцентрической траектории относительно Солнца считается совпадающим с положением Земли относительно Солнца. Скорость КА в начальной точке гелиоцентрической траектории рассматривается как векторная сумма гелиоцентрической скорости Земли и вектора гиперболического избытка скорости КА относительно Земли и рассчитана на момент старта КА с базовой околоземной орбиты. Направление гиперболического избытка скорости соответствует условиям оптимальности и выбирается коллинеарным базис-вектору в начальной точке гелиоцентрической траектории. Величина гиперболического избытка скорости перебирается с целью анализа её влияния на характеристики проекта. Начальная масса КА для гелиоцентрического перелета равна массе КА после отделения разгонного блока «Фрегат».

Конечная рабочая гелиоцентрическая орбита фиксируются фокальным параметром, константой энергии и наклоном орбиты. Вектор ограничений типа равенства в конечной точке траектории перелета имеет следующий вид:

$$g = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - p_f \\ V^2 - \frac{2}{r} - h_f \\ \sigma_z - \sqrt{p_f} \cos(i_f) \end{pmatrix}, \quad (3.15)$$

где $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ – безразмерные компоненты вектора площади, p_f – заданный безразмерный фокальный параметр орбиты, h_f – заданная безразмерная константа энергии орбиты и i_f – заданное наклонение орбиты. Компоненты вектора площадей, компоненты радиус-вектора КА и вектора его скорости связаны следующим образом:

$$\sigma_x = yV_z - zV_y; \sigma_y = zV_x - xV_z; \sigma_z = xV_y - yV_x; r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}.$$

В соответствии с общим подходом к записи условий трансверсальности вводится вектор постоянных множителей Лагранжа \mathbf{v} (с размерностью 3 в рассматриваемом случае). Тогда мы можем определить вектор сопряженных переменных в конечной точке траектории перелёта таким образом [39,49]:

$$\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ p_{V_x} \\ p_{V_y} \\ p_{V_z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} v_1 + \frac{\partial g_2}{\partial x} v_2 + \frac{\partial g_3}{\partial x} v_3 \\ \frac{\partial g_1}{\partial y} v_1 + \frac{\partial g_2}{\partial y} v_2 + \frac{\partial g_3}{\partial y} v_3 \\ \frac{\partial g_1}{\partial z} v_1 + \frac{\partial g_2}{\partial z} v_2 + \frac{\partial g_3}{\partial z} v_3 \\ \frac{\partial g_1}{\partial V_x} v_1 + \frac{\partial g_2}{\partial V_x} v_2 + \frac{\partial g_3}{\partial V_x} v_3 \\ \frac{\partial g_1}{\partial V_y} v_1 + \frac{\partial g_2}{\partial V_y} v_2 + \frac{\partial g_3}{\partial V_y} v_3 \\ \frac{\partial g_1}{\partial V_z} v_1 + \frac{\partial g_2}{\partial V_z} v_2 + \frac{\partial g_3}{\partial V_z} v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\sigma_z V_y - \sigma_y V_z) 2v_1 + \frac{2xv_2}{r^3} + V_y v_3 \\ (\sigma_x V_z - \sigma_z V_x) 2v_1 + \frac{2yv_2}{r^3} - V_x v_3 \\ (\sigma_y V_x - \sigma_x V_y) 2v_1 + \frac{2zv_2}{r^3} \\ (\sigma_y z - \sigma_x y) 2v_1 + 2V_x v_2 - y \cdot v_3 \\ (\sigma_z x - \sigma_x z) 2v_1 + 2V_y v_2 + x \cdot v_3 \\ (\sigma_x y - \sigma_y x) 2v_1 + 2V_z v_2 \end{pmatrix}.$$

Неизвестные множители Лагранжа удается выразить при помощи трех (третьего, пятого и шестого) из приведенных шести равенств:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(\sigma_y V_x - \sigma_x V_y) & \frac{2z}{r^3} & 0 \\ 2(\sigma_z x - \sigma_x z) & 2V_y & x \\ 2(\sigma_x y - \sigma_y x) & 2V_z & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} p_z \\ p_{V_y} \\ p_{V_z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{r^3 V_z p_z - z \cdot p_{V_z}}{2A_1} \\ r^3 [(V_x \sigma_y - V_y \sigma_x) p_{V_z} - (\sigma_x y - \sigma_y x) p_z] \\ \frac{p_{V_y}}{x} - \frac{A_2 p_{V_z} + A_3 p_z}{xA_1} \end{pmatrix}, \text{ где}$$

$$A_1 = \sigma_y x z - \sigma_x y z + r^3 V_z (\sigma_y V_x - \sigma_x V_y);$$

$$A_2 = \sigma_x z^2 - \sigma_z x z + r^3 V_y (\sigma_y V_x - \sigma_x V_y);$$

$$A_3 = r^3 [V_y (\sigma_y x - \sigma_x y) + V_z (\sigma_z x - \sigma_x z)].$$

После этого можно получить краевые условия, не включая в формулу множители Лагранжа. Задача оптимизации сводится к краевой задаче 7-ого порядка с граничными условиями в конечной точке, имеющими следующий вид:

$$\mathbf{g}(\mathbf{z}) = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - p_f \\ V^2 - \frac{2}{r} - h_f \\ \sigma_z - \sqrt{p_f} \cos(i_f) \\ (\sigma_z V_y - \sigma_y V_z) 2v_1 + \frac{2xv_2}{r^3} + V_y v_3 - p_x \\ (\sigma_x V_z - \sigma_z V_x) 2v_1 + \frac{2yv_2}{r^3} - V_x v_3 - p_y \\ (\sigma_y z - \sigma_x y) 2v_1 + 2V_x v_2 - y \cdot v_3 - p_{V_x} \\ \lambda_m(t_f) - 1 \end{pmatrix} = 0 \quad (3.16)$$

В краевой задаче в качестве неизвестных рассматриваются 7 сопряженных переменных в начальной точке гелиоцентрической траектории. Решение такой краевой задачи связано с принципиальными трудностями, которые в том числе обусловлены проблемами существования и неединственности решения системы нелинейных уравнений (3.16). Многоэкстремальный характер (т.е. неединственность решения системы нелинейных уравнений) полученной краевой задачи значительно осложняет проблему поиска оптимальной траектории выведения КА на рабочую гелиоцентрическую орбиту.

Методические сложности при решении такой системы уравнений связаны с вычислительной неустойчивостью и с ограниченностью области сходимости используемых численных методов. При помощи методов оптимизации, основанных на малой вариации параметров, можно получить только локальное решение задачи. Для выбора наилучшего решения требуются другие возможные локальные решения с последующим их сравнением. При всей своей громоздкости и нестрогости этот подход чаще всего обеспечивает надежное нахождение глобального оптимума. Большинство локальных решений можно получить в ходе параметрических исследований путем вариации параметров в широком диапазоне их изменения. Результаты анализа 7 разных экстремалей, полученных при решении поставленной задачи оптимизации, приведены ниже.

Приведем численные результаты решения задачи оптимизации прямого выведения КА на заданную гелиоцентрическую рабочую орбиту. Орбита имеет следующие характеристики: большая полуось орбиты равна 0.7 а.е., радиус перигелия равен 60 радиусам Солнца, наклонение к плоскости эклиптики равно 30 градусам. Дата старта КА считается заданной – 25 марта 2016 г. Время перелета на заданную гелиоцентрическую орбиту фиксировано и составляет пять лет. Гиперболический избыток скорости при отлете от Земли рассматривается равным 1.8 км/с при начальной массе КА 1959.4 кг.

Было найдено более 20 экстремалей, по семи из которых результаты представлены в [38].

На рисунке 3.16 показана траектория гелиоцентрического перелета КА на целевую рабочую гелиоцентрическую орбиту для получения наилучшей экстремали (это экстремаль, обеспечивающая максимальную массу на рабочей орбите). На нем и на последующих шести рисунках слева представлена проекция гелиоцентрической траектории на плоскость эклиптики x-y, а справа – на плоскость x-z эклиптической системы координат. Толстая линия обозначает активные участки траектории, а тонкая – пассивные. Орбита Земли и конечная рабочая орбита отмечены точками. Траектория КА состоит из 7 пассивных и 8 активных участков. Количество витков КА вокруг Солнца немного меньше 6.5. Конечная масса КА составляет 1346.8 кг, требуемая масса ксенона – 612.5 кг. Долгота восходящего узла и аргумент перигелия конечной орбиты – 163.86° и -1.19° соответственно.

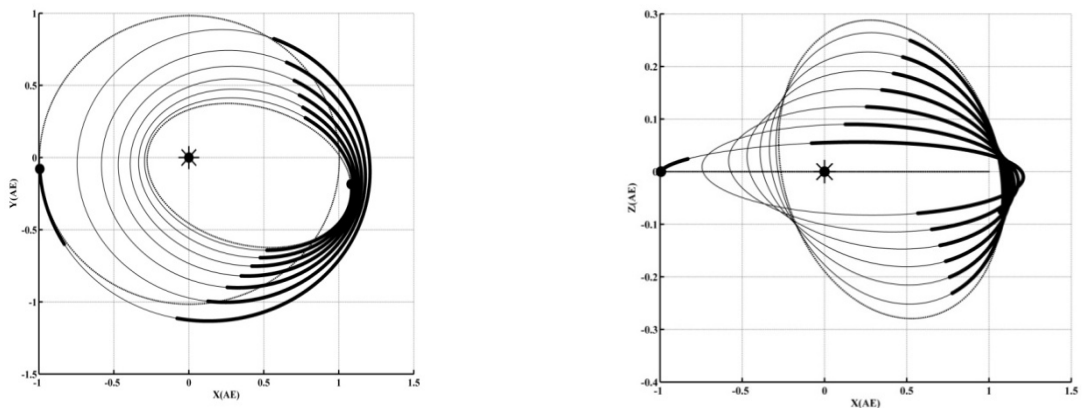


Рисунок 3.16 - Гелиоцентрическая траектория перелета. Слева – проекция на плоскость эклиптики, справа – на плоскость x-z

Управление движением на полученной экстремали объясняется достаточно просто. На первом активном участке направления тяги и гиперболического избытка скорости отлета от Земли выбраны с двойной целью – увеличить гелиоцентрическую скорости КА, что в свою очередь увеличит величину радиус-вектора КА относительно Солнца. После небольшого активного участка КА движется по пассивной траектории вплоть до афелия орбиты, который практически совпадает с нисходящим узлом оскулирующей орбиты КА. Все последующие активные участки многовиткового перелета располагаются только в районах афелия оскулирующей орбиты, у которой линия узлов совпадает с линией апсид.

На рисунке 3.17 показана зависимость расстояния КА от Солнца как функция времени. Жирной линией выделены активные участки полета.

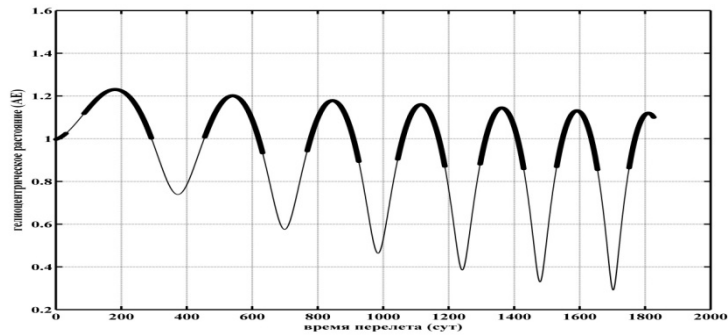


Рисунок 3.17 – Расстояние КА-Солнце [а.е.] как функция времени [сутки] на траектории перелета 5-ого типа экстремали. Толстой линией выделены активные участки траектории

Направление тяги выбрано так, чтобы на этих участках КА мог достаточно резко тормозить (для уменьшения перигелия орбиты) при одновременном эффективном увеличении наклона орбиты (за счет относительно большого по модулю угла рыскания). Максимальное значение угла рыскания на оскулирующих витках траектории перелета монотонно увеличивается примерно с 40° (на первом витке траектории КА вокруг Солнца) до 75° (на последнем витке траектории). Такое изменение оптимального значения угла рыскания происходит вследствие уменьшения на каждом последующем витке траектории орбитальной энергии и скорости в окрестности афелия оскулирующей орбиты. Это способствует эффективному изменению направления скорости КА и, как следствие, изменению наклона орбиты.

У анализируемых экстремалей ещё одно свойство: существование двух «симметричных» друг другу типов экстремалей вследствие нефиксированной долготы восходящего узла конечной орбиты. Так, например, для экстремали, которую мы рассматриваем как лучшую, существует экстремаль с долготой восходящего узла, отличающейся от долготы восходящего угла этой экстремали на 180° , и она обеспечивает выведение КА на рабочую орбиту. При этом у обеих экстремалей координаты x и y вдоль всей траектории совпадают, а координаты z равны по величине, но имеют противоположные знаки. Относительно плоскости эклиптики траектории этих экстремалей симметричны. Это хорошо видно на рисунке 3.18 и: в его левой части изображены проекции 5-ой экстремали на плоскость x - z , а в правой части – проекции симметричной ей экстремали. Видно, что на первом активном участке в случае «лучшей» экстремали КА уходит выше плоскости эклиптики, в случае симметричной ей экстремали КА «опускается» ниже плоскости эклиптики. Эти проекции симметричны относительно оси x , и проекции траекторий перелета для этих экстремалей на плоскость эклиптики совпадают.

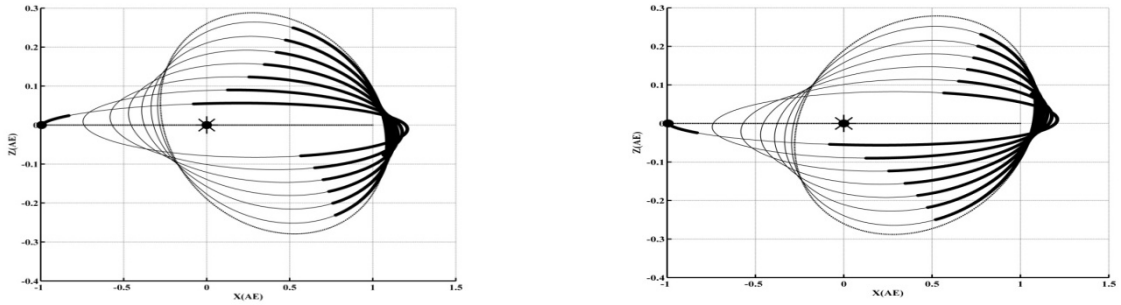


Рисунок 3.18–Проекция на плоскость x-z траектории перелета экстремали 5-ого типа (слева) и симметричной ей экстремали (справа).

Как видно из рисунка, аргументы перигея (ω_1 и ω_2) рабочих орбит для симметричных экстремалей соотносятся как $\omega_1 + \omega_2 = 180^\circ$.

Дата старта варьировалась в пределах одного года для выяснения характера ее влияния на массовые характеристики проекта. Эти изменения слабо меняли массу требуемого для перелета рабочего тела и, как следствие, мало влияли на массу КА на рабочей орбите (менее 10 кг). Столь малые изменения затрат на перелет объясняются небольшим эксцентриситетом земной орбиты.

Варьирование величины гиперболического избытка скорости отлета от Земли в диапазоне (1...2 км/сек) с шагом 100 м/сек привело к более интересным выводам. Основные результаты этой процедуры представлены на рисунках 3.19 и 3.20.

На рисунке 3.19 функции переключения электроракетной двигательной установки представлены как функция времени перелета для двух значений гиперболического избытка скорости отлета от Земли: $V_\infty = 1.5$ и 1.8 км/с.

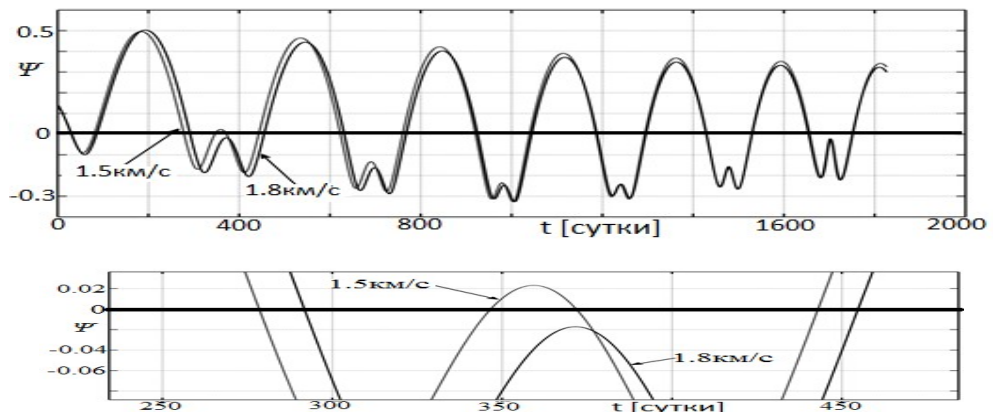


Рисунок 3.19 – Функции переключения на оптимальной траектории гелиоцентрического перелета для двух значений гиперболического избытка скорости отлета от Земли ($V_\infty = 1.5$ и 1.8 км/с). Внизу выделена в крупном масштабе область перигелия конца первого и начала второго витка орбиты

Напомним, что ЭРДУ работает при функции переключения со значением больше нуля. Когда она меньше нуля, ЭРДУ выключается, а траектория КА становится пассивной. Анализ зависимостей функции переключения для всех рассмотренных величин

гиперболического избытка скорости показывает, что начало и конец траекторий перелета являются активными участками. Только на втором витке траектории управление оказывается принципиально иным. При большом (1.8...2.0 км/с) гиперболическом избытке скорости на втором витке траектории есть только один активный участок – в районе афелия орбиты. При относительно малом (1.0...1.7 км/с) гиперболическом избытке скорости на втором витке траектории появляется два активных участка – один в районе афелия, а другой – в районе перигелия орбиты (см. рисунок 3.19).

На рисунке 3.20 представлены зависимости, иллюстрирующие описанное свойство. Гелиоцентрическое удаление КА показано на нем как функция времени перелета; активные участки траектории выделены жирной линией. Согласно результатам анализа, при небольшой величине гиперболического избытка скорости (до 1.7 км/сек) на втором витке траектории КА возникает небольшой активный участок в районе перигелия оскулирующей орбиты КА. На нем ЭРДУ «поднимает» афелий оскулирующей орбиты и увеличивает скорость КА. При величине гиперболического избытка скорости 1.8 км/сек. и выше активный участок исчезает. Ниже будет показано, что с увеличением гиперболического избытка скорости в рассматриваемом диапазоне этого избытка конечная масса КА из-за уменьшения его начальной массы монотонно уменьшается, несмотря на сопутствующее уменьшение требуемой массы ксенона для ЭРДУ.

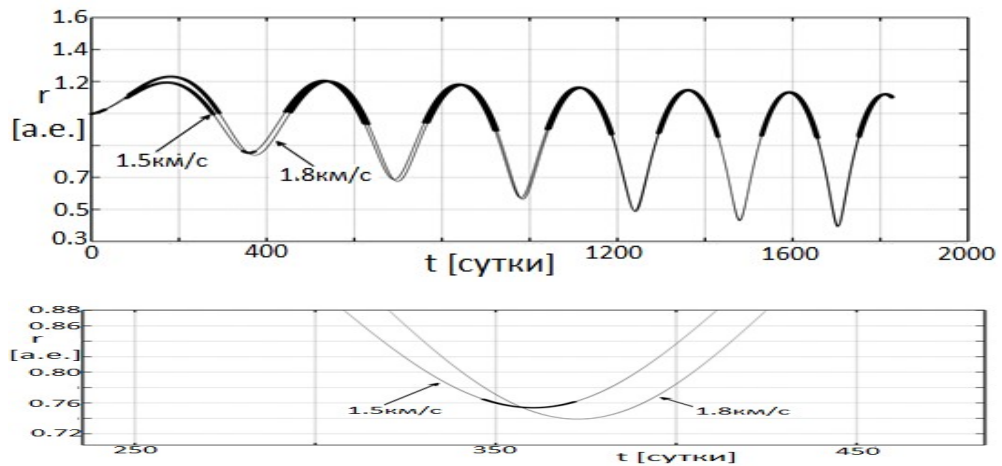


Рисунок 3.20 – Гелиоцентрическое удаление КА на оптимальной траектории перелета для двух значений гиперболического избытка скорости отлета от Земли ($V_{\infty} = 1.5$ и 1.8 км/с). Внизу выделена в крупном масштабе область перигелия конца первого и начала второго витка орбиты

На рисунке 3.21 изображены программы изменения угла тангажа и угла рыскания на активных участках траектории как функции времени перелета при начальном гиперболическом избытке скорости 1.8 км/с. Тонкие линии относятся к программе изменения угла рыскания, жирные – к программе изменения угла тангажа на активных участках траектории перелета.

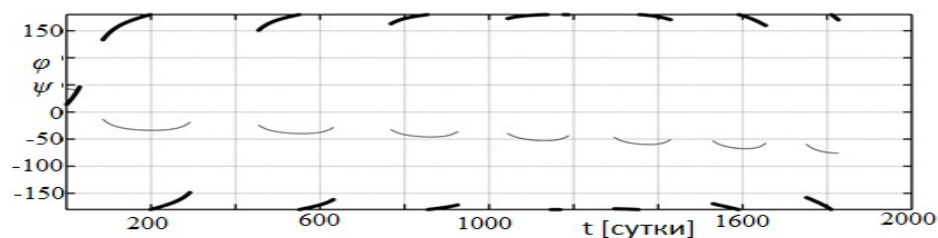


Рисунок 3.21 – Углы тангажа φ (жирная линия, градусы) и рыскания ψ (тонкая линия, градусы) как функция времени перелета [сутки]

Результаты анализа данных зависимостей показывают, что оптимальные значения (по модулю) угла рыскания увеличиваются в диапазоне $10^\circ..80^\circ$ на каждом последующем витке траектории. На всей траектории, кроме ее начального участка, угол тангажа близок к 180° , что обеспечивает эффективное торможение КА на активных участках траектории.

В таблице 3.7 даны результаты оптимизации траектории перелета путем варьирования величины гиперболического избытка скорости при отлете от Земли для даты старта 25.03.2016. Во втором столбце таблицы дается начальная масса КА m_o , в третьем столбце – масса КА на орбите назначения m_f , в последнем столбце – масса требуемого на перелет ксенона m_{xenon} .

Таблица 3.7 - Массовые характеристики проекта как функции величины гиперболического избытка скорости при отлете от Земли

V_∞ (км/с)	m_o (кг)	m_f (кг)	m_{xenon} (кг)
1	2051,4	1367,2	684,3
1,1	2042,7	1366,5	676,1
1,2	2033,7	1365,3	667,7
1,3	2022,7	1363,6	659,1
1,4	2011,5	1361,3	650,3
1,5	1999,6	1358,4	641,2
1,6	1986,9	1355,0	631,9
1,7	1973,5	1351,2	622,3
1,8	1959,3	1346,8	612,5
1,9	1944,5	1341,7	602,8
2	1928,9	1335,9	593

Согласно результатам анализа данных в таблице 3.7, максимальное значение массы КА на орбите назначения составляет 1367,2 кг, что достигается при минимальной (1 км/с) рассмотренной величине гиперболического избытка скорости.

Может показаться, что при анализе массовых критериев следовало исходить из меньших значений гиперболического избытка скорости. Помехой этому служат обстоятельства, отмечаемые проектантами КА и разработчиками научной аппаратуры. К ним относятся существующие ограничения на расстояние до Солнца на траектории выведения КА на рабочую орбиту.

Верхнее и нижнее ограничение на расстояние до Солнца на активных участках траектории обусловлено использованием солнечных батарей для обеспечения ЭРДУ энергией и для тепловой защиты систем КА. Если считать допустимым диапазон удалений от Солнца величиной 0.8...1.25 а.е., то целесообразно рассмотреть оптимальную траекторию с величиной гиперболического избытка скорости 1.8 км/с. Подробно рассмотреть этот случай заставляет отсутствие на этой траектории активных участков в районах оскулирующего перигелия. Постановку задачи можно и усложнить удовлетворяя фазовым ограничениям при меньших величинах гиперболического избытка скорости. Однако данные из таблицы 3.7 показывают, что вряд ли такой шаг целесообразен, т.к. масса КА на рабочей орбите с гиперболическим избытком скорости 1 км/сек всего на 20 кг больше массы КА при гиперболическом избытке 1.8 км/сек. Следовательно, предельный выигрыш оптимизации величины гиперболического избытка скорости – не более 20 килограмм конечной массы КА.

Дополнительное преимущество рассматриваемого варианта схемы выведения – отсутствие на предлагаемой траектории выведения КА активных участков в районах оскулирующих перигелиев траектории выведения. Это означает, что в данных районах для обеспечения работы научной аппаратуры может использоваться бортовая электрическая мощность, позволяющая с близкого расстояния изучать Солнце.

Массовые характеристики проекта могут быть проанализированы как функция наклона рабочей орбиты. В таблице 3.8 величина доставляемой массы КА на рабочую орбиту приведена как функция наклона этой орбиты с гиперболическим избытком скорости 1.8 км/с.

Таблица 3.8 - Масса КА на рабочей орбите как функция наклона конечной орбиты

Наклонение конечной орбиты (град)	Конечная масса КА (кг)
20	1467,7
21	1457,2
22	1446,2
23	1434,8
24	1423,1
25	1411,1
26	1398,8
27	1386,3
28	1373,4
29	1360,2
30	1346,8

Данные из таблицы 3.8 говорят о том, что увеличение наклона конечной орбиты на один градус требует увеличения массы необходимого для ЭРДУ ксенона примерно на

12 – 13 кг. Это дает возможность увеличить массу КА на рабочей орбите на 121 кг за счет уменьшения требуемой массы ксенона, если разработчики научной аппаратуры проекта сочтут приемлемым наклонение рабочей орбиты к плоскости эклиптики в 20 градусов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ ПО ГЛАВЕ

В данной главе предложен подход к анализу и оптимизации траекторий КА с двигателем малой тяги (с ЭРДУ), идея которого состоит в том, чтобы свести задачу оптимизации (в частности, краевую задачу ПМП) к задаче безусловного минимума добавочной функции, состоящей из суммы квадратов разностей краевой задачи ПМП и оптимизированного критерия, взятого с весовым коэффициентом. Весовой коэффициент используется в качестве параметра продолжения. Его начальная большая величина должна привести к области неизвестных параметров краевой задачи, в которой критерий оптимальности близок к глобальному минимуму, а конечная величина равна нулю. Это обеспечивает точное удовлетворение необходимым условиям ПМП и, как следствие, точное решение краевой задачи. Предлагается выполнить процесс максимизации при помощи разработанного метода, основанного на эволюционной стратегии с адаптацией ковариационной матрицы.

В рамках разработанного подхода произведен численный анализ трех задач. Анализ совместной оптимизации траектории полета КА с ЭРДУ к Марсу и его основных проектных параметров позволил решить сотни краевых задач, благодаря чему оптимальные значения тяги и удельного импульса ЭРДУ найдены и подробно изучены в пределах широкого диапазона оптимальных значений.

Анализ прямого перелета КА с ЭРДУ к Юпитеру привел к обнаружению новых типов экстремалей с различным количеством полных оборотов вокруг Солнца. Для гелиоцентрических перелетов с угловым расстоянием меньше одного полного оборота вокруг Солнца было получено 3 экстремали. Траектории на этих экстремалиях имеют зоны с обратным движением, которые отличаются размерами и направлением движения КА в сторону от эклиптической плоскости. Три новые экстремали были получены для прямых гелиоцентрических перелетов к Юпитеру для КА с ЭРДУ с большим количеством оборотов на траектории перелета. Свойства экстремалей, выявленные в настоящей главе, вполне могут считаться типичными.

Новизна данного исследования состоит в анализе проблемы многоэкстремальности и в использовании условий трансверсальности при такой формулировке краевой задачи

ПМП, которая включает в себя оптимизацию даты старта и величину гиперболического избытка скорости для межпланетного перелета КА с ЭРДУ.

Проведен сравнительный анализ результатов использования необходимых условий оптимальности с результатами перебора даты старта и величины гиперболического избытка скорости. Их совпадение подтверждает правильность используемых условий трансверсальности.

Представлены результаты анализа характеристик оптимальных траекторий прямых полётов к Юпитеру для КА с ядерной ЭРДУ.

Проанализирована задача оптимизации траектории прямого выведения КА с ЭРДУ на рабочую гелиоцентрическую орбиту, позволяющую исследовать полярные области Солнца. Получены необходимые условия оптимальности для перелета на такую рабочую гелиоцентрическую орбиту, причем их выполнение обеспечивается решением краевой задачи. Представлены характеристики оптимальной траектории прямого выведения КА на целевую гелиоцентрическую орбиту.

Предложенный метод оптимизации, основанный на эволюционной стратегии с адаптацией ковариационной матрицы, показал высокую эффективность для анализа рассмотренных межпланетных перелетов.

4 ОПТИМИЗАЦИЯ СЛОЖНЫХ СХЕМ МЕЖПЛАНЕТНЫХ ПЕРЕЛЕТОВ ТРАНСПОРТНЫХ СИСТЕМ С ХИМИЧЕСКИМИ РАЗГОННЫМИ БЛОКАМИ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ МЕТОДА ЭВОЛЮЦИОННОЙ СТРАТЕГИИ С АДАПТАЦИЕЙ КОВАРИАЦИОННОЙ МАТРИЦЫ

В данной главе проанализированы схемы межпланетных перелетов КА, оснащенных химическими двигательными установками и осуществляющих несколько гравитационных маневров. Химическая двигательная установка может обеспечить импульсное изменение вектора скорости КА в следующих случаях: при выведении с планетоцентрической орбиты на отлетную планетоцентрическую траекторию, при выведении с подлетной планетоцентрической орбиты на орбиту искусственного спутника планеты, на гелиоцентрических участках перелета по сложному маршруту (deep space maneuver) и при проведении ГМ (активный гравитационный маневр). Использование приведенного в главе материала [49] может распространяться не только на анализ транспортных возможностей КА с традиционными химическими двигателями, но и на выявление рациональных маршрутов транспортных космических систем с ЭРДУ. В последующих главах будет показано, как рациональные маршруты, полученные с помощью описанного в этой главе метода, могут быть оптимизированы в случае их реализации с использованием ЭРДУ.

В данной главе рассматривается задача оптимизации траектории сложной схемы межпланетного перелета. Сложная схема межпланетного перелета – это перелет к какому-либо небесному телу (планете, астероиду или комете) с использованием гравитационных маневров у планет или пролета нескольких небесных тел с их исследованием с пролетных траекторий. Второй вид сложной схемы перелета используется тогда, когда эти небесные тела имеют малую массу и невозможно использовать их для проведения ГМ. Приводятся типичные примеры сложных схем перелетов КА к Юпитеру, Сатурну и Плутону, астероиду TV135. Промежуточными планетами, у которых можно провести гравитационные маневры, будут Венера, Земля, Марс, Юпитер и Сатурн.

4.1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ СЛОЖНОЙ СХЕМЫ МЕЖПЛАНЕТНОГО ПЕРЕЛЕТА

Будем исходить из того, что, стартуя с базовой околоземной орбиты, КА за счет химического разгонного блока набирает некоторый гиперболический избыток скорости $V_{\infty 0}$, величина и направление которого оптимизируются. Величина этого гиперболического избытка скорости определяет необходимый импульс скорости при старте с базовой околоземной орбиты (dV_{00}). Затем реализуется перелет к планете

назначения. На траектории перелета используются гравитационные маневры у Земли, Венеры и Марса, а также несколько дополнительных импульсов скорости на гелиоцентрических участках траектории. Количество рассматриваемых в маршруте гравитационных маневров обозначим как n . При этом общее количество единичных перелетов «планета – планета» будет равно $(n+1)$. Предполагается, что на гелиоцентрическом участке траектории перелета «планета – планета» возможен только один импульс скорости вдали от каких-либо небесных тел. Поэтому максимальное число импульсов скорости на гелиоцентрических участках траектории равно $(n+1)$: (dV_0, \dots, dV_n) .

Каждый гравитационный маневр в рамках схемы ГМ обладает следующими семью характеристиками:

- dV_1 (изменение скорости КА за счет воздействия импульса скорости в бесконечности подлетной гиперболы),
- $\Delta\beta_1$, (угол поворота вектора скорости КА, осуществляемый импульсом скорости в бесконечности подлетной гиперболы),
- r_π (радиус перицентра подлетной гиперболы),
- dV_2 (изменение скорости КА за счет воздействия импульса скорости в перицентре подлетной гиперболы),
- ΔV_3 (величина импульса скорости КА в бесконечности отлётной гиперболы) или dV_3 (изменение скорости КА импульсом скорости в бесконечности отлётной гиперболы),
- $\Delta\beta_3$, (угол поворота вектора скорости КА, осуществляемый импульсом скорости в бесконечности отлетной гиперболы),
- параметр, определяющий положение плоскости ГМ.

Все n рассматриваемых гравитационных маневров характеризуются $7n$ параметрами.

При подлете к планете назначения КА имеет некоторый гиперболический избыток скорости $V_{\infty f}$. Предполагается, что известны характеристики маневра, планирующегося в окрестности планеты назначения – например, характеристики той околопланетной орбиты, на которую КА должен быть выведен химической двигательной установкой. Требуемый (или суммарный) импульс скорости такого выведения (dV_f) считается известной функцией гиперболического избытка скорости $V_{\infty f}$.

Выбираемыми характеристиками для анализируемого конкретного маршрута являются:

- Дата старта от Земли (в рассматриваемую эпоху) T_0 ;

- Даты проведения гравитационных маневров T_1, T_2, \dots, T_n ;
- Даты реализации импульсов скорости в глубоком космосе $T_{dV1}, T_{dV2}, \dots, T_{dV(n+1)}$;
- Дата подлета к планете назначения T_f ;
- Вектор гиперболического избытка скорости при старте от Земли $V_{\infty 0}$;
- Векторы импульсов скорости на гелиоцентрических участках траектории $dV_1, dV_2, \dots, dV_{(n+1)}$;
- Параметры гравитационных маневров. Этих параметров $7n$.

Общее количество скалярных выбираемых параметров рассматриваемой схемы перелета очень большое: $12n+9$.

Критерием выбора (оптимизации) характеристик анализируемого космического маневра, как правило, рассматривается массовый критерий. Например, максимизируется масса КА, доставляемая в окрестность планеты назначения. При этом должны быть известны начальная масса КА (масса КА на базовой орбите) и характеристики химического разгонного блока, обеспечивающего старт от Земли (например, удельный импульс используемого химического двигателя и конечная масса разгонного блока). Предполагается также, что известен и удельный импульс двигателя КА, который обеспечивает импульсы скорости в глубоком космосе, импульсы скорости при гравитационных маневрах и в окрестности планеты назначения.

В некоторых случаях целесообразно не рассматривать массовые модели КА и конкретные значения удельных импульсов двигательной установки, а выбрать суммарный импульс скорости в качестве критерия оптимальности схемы перелета для получения более универсального решения. При определенных условиях такое решение может быть использовано как начальное приближение для анализа схем перелетов с использованием электроракетной двигательной установки. Анализ такой возможности будет приведен в следующих разделах.

Задачу оптимизации перечисленных характеристик анализируемого маршрута можно рассматривать как задачу математического программирования. Ее решение должно удовлетворять большому числу ограничений типа равенства и неравенства. Выбираемые характеристики должны обеспечивать попадание КА не только в окрестности планеты назначения, но и в окрестность планет, у которых выполняются гравитационные маневры. При использовании метода грависфер нулевой протяженности это означает, что в выбираемые даты $(T_1, T_2, \dots, T_n, T_f)$ радиус-вектор КА относительно Солнца должен совпадать с радиусом вектором соответствующей планеты.

В области реализуемых параметров гравитационных маневров необходим ввод ограничений типа неравенства. Они, в частности, должны ограничивать минимальную высоту пролетной гиперболы.

Задача поиска минимума функции с ограничениями существенно труднее задачи безусловного экстремума, однако в анализируемом случае проблему можно сформулировать так, чтобы она сводилась к задаче поиска безусловного экстремума.

4.2 ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ СЛОЖНОЙ СХЕМЫ МЕЖПЛАНЕТНОГО ПЕРЕЛЕТА КАК ЗАДАЧИ ПОИСКА БЕЗУСЛОВНОГО ЭКСТРЕМУМА

Сформулированная в предыдущем разделе задача оптимизации сложной схемы межпланетного перелета требует решения проблемы условного экстремума. Изменяя набор выбираемых характеристик схемы перелета, эту задачу удастся сформулировать как задачу поиска безусловного экстремума. При этом автоматически выполняются условия попадания в окрестность планеты назначения и в окрестность планет, у которых проводятся гравитационные маневры.

Рассмотрим следующий набор выбираемых (оптимизируемых) характеристик:

- Дата старта от Земли (в рассматриваемую эпоху) T_0 ;
- Даты проведения гравитационных маневров T_1, T_2, \dots, T_n ;
- Даты реализации импульсов скорости на гелиоцентрических участках траектории $T_{dv1}, T_{dv2}, \dots, T_{dv(n+1)}$;
- Дата подлета к планете назначения T_f ;
- Вектор гиперболического избытка скорости при старте от Земли $V_{\infty 0}$;
- Вектора гиперболического избытка скорости после гравитационных маневров $V_{\infty 1}, V_{\infty 2}, \dots, V_{\infty n}$.

Отметим, что благодаря описанному подходу количество скалярных выбираемых параметров рассматриваемой схемы перелета значительно сократилось (до $5n+6$, тогда как ранее оно было равно $12n+9$). Это объясняется тем, что большая группа выбираемых параметров может быть определена из условия удовлетворения ограничений типа равенства, о которых говорилось выше. В следующем разделе показана корректность этого приема и предложен метод исследования единичного перелета «планета – планета».

4.3 АНАЛИЗ ЕДИНИЧНОГО ГЕЛИОЦЕНТРИЧЕСКОГО ПЕРЕЛЕТА «ПЛАНЕТА – ПЛАНЕТА» ПРИ ОПТИМИЗАЦИИ СЛОЖНОЙ СХЕМЫ МЕЖПЛАНЕТНОГО ПЕРЕЛЕТА КАК ЗАДАЧИ ПОИСКА БЕЗУСЛОВНОГО ЭКСТРЕМУМА

Рассмотрим произвольный i -ый ($i=1, \dots, n$) единичный гелиоцентрический перелет от $(i-1)$ -ой планеты к i -ой планете из анализируемого сложного маршрута. Его траектория

в рамках рассматриваемой схемы перелета состоит из двух участков (назовем их «сегментами»), каждый из которых рассматривается в рамках ограниченной задачи двух тел (Солнце – КА):

- Первый сегмент гелиоцентрической траектории начинается с отлета от $(i-1)$ -ой планеты и заканчивается в точке, где за счет включения химического двигателя импульс скорости (на гелиоцентрическом участке перелета) изменяет вектор скорости КА;
- Второй сегмент траектории начинается в точке, где дается импульс скорости на гелиоцентрическом участке перелета, и заканчивается подлетом к i -ой планете.

Рассмотрим характеристики первого сегмента траектории.

Выбор даты старта или даты гравитационного манера фиксирует положение КА в момент начала каждого единичного гелиоцентрического перелета «планета – планета» $r(T_{i-1})$. Вектор скорости $(i-1)$ -ой планеты $V_{pl(i-1)}(T_{i-1})$ в выбранные даты и вектор гиперболического избытка скорости отлета от планеты $V_{\infty(i-1)}$ дают в сумме вектор гелиоцентрической скорости КА в начальной точке гелиоцентрического перелета:

$$V_{o(i-1)}(T_{i-1}) = V_{pl(i-1)}(T_{i-1}) + V_{\infty(i-1)} \quad (i=1, 2, \dots, (n+1)).$$

Выбранные значения $r(T_{i-1})$ и $V_{o(i-1)}(T_{i-1})$ являются радиус-вектором положения и вектором гелиоцентрической скорости КА в начальной точке гелиоцентрического перелета «планета – планета». Если значения этих векторов известны, можно определить элементы орбиты КА на первом сегменте этого перелета (до импульса скорости на гелиоцентрическом участке траектории в момент T_{dvi}) [3,32,96,99,111]. Тогда можно найти фокальный параметр p_i путем использования интеграла площадей σ_i (векторное произведение радиуса вектора и вектора скорости КА):

$$\sigma_i = \left[\mathbf{r}(T_{i-1}) \times \mathbf{V}_{o(i-1)}(T_{i-1}) \right], \quad p_i = \frac{|\sigma_i|^2}{\mu},$$

где μ - гравитационный параметр Солнца.

Константа энергии h_i , эксцентриситет e_i и большая полуось a_i орбиты могут быть определены при помощи соотношений:

$$h_i = \left| V_{o(i-1)}(T_{i-1}) \right|^2 - \frac{2\mu}{r(T_{i-1})}, \quad e_i = \sqrt{1 + h_i \cdot \frac{p_i}{\mu}}, \quad a_i = \frac{-\mu}{h_i}.$$

Наклонение орбиты i_i определяется при помощи проекции вектора площадей на нормаль к плоскости эклиптики σ_{iz} (исследование проводится с использованием эклиптической системы координат):

$$i_i = \arccos \frac{\sigma_{iz}}{|\boldsymbol{\sigma}|}.$$

Долгота восходящего узла Ω_i орбиты определяется следующим образом:

$$\Omega_i = \begin{cases} \arccos \frac{\sigma_{iy}}{-\sin(i_i)}, & \text{если } \sigma_{ix} > 0; \\ 2\pi - \arccos \frac{\sigma_{iy}}{-\sin(i_i)}, & \text{если } \sigma_{ix} < 0; \\ 0, & \text{если } \sigma_{ix} = 0, \sigma_{iy} > 0; \\ \pi, & \text{если } \sigma_{ix} = 0, \sigma_{iy} < 0. \end{cases}$$

Аргумент широты начальной точки гелиоцентрического участка перелета можно найти таким образом:

$$u_{oi} = \begin{cases} \arccos \frac{x(T_{i-1}) \cos(\Omega_i) + y(T_{i-1}) \sin(\Omega_i)}{|r(T_{i-1})|}, & \text{если } z(T_{i-1}) > 0; \\ 2\pi - \arccos \frac{x(T_{i-1}) \cos(\Omega_i) + y(T_{i-1}) \sin(\Omega_i)}{|r(T_{i-1})|}, & \text{если } z(T_{i-1}) < 0; \\ 0, & \text{если } z(T_{i-1}) = 0, Vz_{oi}(T_{i-1}) > 0; \\ \pi, & \text{если } z(T_{i-1}) = 0, Vz_{oi}(T_{i-1}) < 0. \end{cases} \quad (4.1)$$

В последнем равенстве использованы проекции на оси x , y и z значений $(x(T_{i-1}), y(T_{i-1}), z(T_{i-1}))$ радиуса вектора КА в начальной точке гелиоцентрической траектории и проекция на ось z значений $Vz_{o(i-1)}(T_{i-1})$ вектора скорости в той же точке траектории.

Эксцентрисическая аномалия начальной точки гелиоцентрической орбиты может быть найдена так:

$$E_{oi} = \begin{cases} \arccos \frac{a_i - |r(T_{i-1})|}{a_i \cdot e_i}, & \text{если } Vr_{io} > 0; \\ 2\pi - \arccos \frac{a_i - |r(T_{i-1})|}{a_i \cdot e_i}, & \text{если } Vr_{io} < 0; \\ 0, & \text{если } Vr_{io} = 0, |V_{o(i-1)}(T_{i-1})| > \sqrt{\frac{\mu}{|r(T_{i-1})|}}; \\ \pi, & \text{если } Vr_{io} = 0, |V_{o(i-1)}(T_{i-1})| < \sqrt{\frac{\mu}{|r(T_{i-1})|}}. \end{cases} \quad (4.2)$$

В последнем равенстве Vr_{io} – это величина радиальной скорости КА в начальной точке гелиоцентрического участка траектории. Ее можно вычислить с помощью скалярного произведения радиуса вектора КА и его скорости:

$$Vr_{io} = \frac{(\mathbf{r}(T_{i-1}), \mathbf{V}_{o(i-1)}(T_{i-1}))}{|\mathbf{r}(T_{i-1})|}.$$

Эксцентрическую аномалию E_{fi} точки перелетной орбиты на гелиоцентрическом перелете, в которой включается двигатель и КА получает импульс скорости, определяют с использованием трансцендентного уравнения Кеплера. Для основного, наиболее интересного с точки зрения практики случая, – случая эллиптической перелетной орбиты – это уравнение может быть записано так:

$$E_{fi} - e_i \cdot \sin(E_{fi}) = E_{oi} - e_i \cdot \sin(E_{oi}) + n_i \cdot (T_{dVi} - T_{i-1}), \quad (4.3)$$

где n_i – среднее движение КА по орбите. Оно определяется величиной большой полуоси:

$$n_i = \sqrt{\frac{\mu}{a_i^3}}.$$

Равенство (4.3) рассматривается как уравнение относительно эксцентрической аномалии E_{fi} . Правая часть равенства является известной величиной. Как и во всяком уравнении Кеплера, его единственное решение легко находится любым численным методом при помощи небольшого числа итераций. Например, это можно сделать методом неподвижной точки:

$$E_{fi}^{j+1} = e_i \cdot \sin(E_{fi}^j) + E_{oi} - e_i \cdot \sin(E_{oi}) + n_i \cdot (T_{dVi} - T_{i-1}),$$

где j – номер итерации.

Обратим внимание на то, что найденная с использованием равенства (4.2) эксцентрическая аномалия начальной точки гелиоцентрической орбиты E_{oi} находится в первом координатном круге, то есть в диапазоне $[0, 2\pi]$. Найденная с использованием уравнение Кеплера эксцентрическая аномалия точки орбиты, где КА получает импульс скорости, может быть больше 360° . КА за время перелета может сделать один или несколько витков относительно Солнца. Разумеется, при положительном времени перелета (предполагается, что T_{dVi} больше T_{i-1}) E_{oi} меньше E_{fi} .

Зная эксцентрические аномалии начальной и конечной точек, можно определить их истинные аномалии:

$$v_{oi} = \begin{cases} 2 \arctg\left[\operatorname{tg}(E_{oi}) \cdot \sqrt{\frac{1+e_i}{1-e_i}}\right] & \text{если } \operatorname{tg}(E_{oi}) \geq 0; \\ 2 \arctg\left[\operatorname{tg}(E_{oi}) \cdot \sqrt{\frac{1+e_i}{1-e_i}}\right] + 2\pi & \text{если } \operatorname{tg}(E_{oi}) < 0; \end{cases} \quad (4.4)$$

$$v_{fi} = \begin{cases} 2 \arctg\left[\operatorname{tg}(E_{fi}) \cdot \sqrt{\frac{1+e_i}{1-e_i}}\right] + 2\pi \cdot \operatorname{floor}\left(\frac{E_{fi}}{2\pi}\right), & \text{если } \operatorname{tg}(E_{fi}) \geq 0; \\ 2 \arctg\left[\operatorname{tg}(E_{fi}) \cdot \sqrt{\frac{1+e_i}{1-e_i}}\right] + 2\pi \cdot (\operatorname{floor}\left(\frac{E_{fi}}{2\pi}\right) + 1), & \text{если } \operatorname{tg}(E_{fi}) < 0. \end{cases}$$

В последних равенствах используется функция floor, которая определяет наибольшее целое, меньшее или равное значение своего аргумента. Найденная с помощью этого равенства истинная аномалия начальной точки ν_{oi} принадлежит диапазону $[0, 2\pi]$. Истинная аномалия конечной точки первого рассматриваемого сегмента гелиоцентрической траектории ν_{fi} может быть больше 360° . Её значение учитывает число полных оборотов КА относительно Солнца.

Угловая дальность полета на первом рассматриваемом сегменте траектории может быть найдена как разность приведенных истинных аномалий:

$$\Phi_i = \nu_{fi} - \nu_{oi}.$$

Используя найденный ранее аргумент широты начальной точки траектории (4.1), легко найти аргумент широты конечной точки траектории первого сегмента:

$$u_{fi} = u_{oi} + \Phi_i.$$

Радиус вектор КА и его скорость в конечной точке первого рассматриваемого сегмента траектории можно найти, используя матрицу перехода между орбитальной и эклиптической системой координат. Эта матрица имеет следующий вид:

$$B(u, \Omega, i) = \begin{pmatrix} \cos(u) \cos(\Omega) - \sin(u) \sin(\Omega) \cos(i) & -\sin(u) \cos(\Omega) - \cos(u) \sin(\Omega) \cos(i) & \sin(\Omega) \sin(i) \\ \cos(u) \sin(\Omega) + \sin(u) \cos(\Omega) \cos(i) & -\sin(u) \sin(\Omega) + \cos(u) \cos(\Omega) \cos(i) & -\cos(\Omega) \sin(i) \\ \sin(u) \sin(i) & \cos(u) \sin(i) & \cos(i) \end{pmatrix}.$$

Радиус вектор КА в конце первого сегмента траектории можно найти, используя соотношение:

$$\mathbf{r}(T_{avi}) = B(u_{fi}, \Omega_i, i_i) \cdot \begin{pmatrix} r_{avi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

В последнем соотношении r_{avi} – это длина радиуса вектора КА в конечной точке первого сегмента рассматриваемой траектории. Она может быть определена так:

$$r_{avi} = \frac{P_i}{1 + e_i \cdot \cos(\nu_{fi})}.$$

Вектор гелиоцентрической скорости КА в конце первого сегмента траектории можно найти, используя соотношение:

$$\mathbf{V}(T_{avi}^-) = B(u_{fi}, \Omega_i, i_i) \cdot \begin{pmatrix} V_r(T_{avi}^-) \\ V_n(T_{avi}^-) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

В данном соотношении в обозначении используется знак «минус». Это сделано для того, чтобы подчеркнуть, что скорость в рассматриваемой точке траектории меняется, и в записанном соотношении идет речь о векторе скорости до того, как он был изменен импульсом скорости. В соотношение (4.6) входят радиальная (V_r) и трансверсальная (V_n) компоненты скорости КА в конце первого сегмента траектории. Эти компоненты могут быть найдены так:

$$V_r(T_{dVi}^-) = \sqrt{\frac{\mu}{p_i}} e_i \cdot \sin(\nu_{fi});$$

$$V_n(T_{dVi}^-) = \sqrt{\frac{\mu}{p_i}} (1 + e_i \cdot \cos(\nu_{fi})).$$

Таким образом, приведены соотношения для определения условий движения (положения и скорости КА) в конечной точке первого сегмента траектории. Перейдем к анализу второго сегмента траектории гелиоцентрического перелета «планета – планета».

Для второго сегмента траектории принимаются за известные следующие характеристики:

- Начальный радиус вектор КА $r(T_{dVi})$;
- Конечный радиус вектор КА. Он равен радиус-вектору i -ой планеты, к которой осуществляется подлет на этом участке $r_{pli}(T_i)$;
- Время перелета на сегменте траектории $T_i - T_{dVi}$.

Если перечисленные характеристики известны, анализ траектории перелета на рассматриваемом сегменте траектории сводится к решению задачи Ламберта [99]. Редкий специалист в области механики межпланетных перелетов не пытался получить своё решение этой задачи. Однако в настоящее время в литературе можно найти очень эффективные алгоритмы и программные продукты для решения подобных задач, поэтому нет особого смысла в поиске оригинального подхода. На практике можно воспользоваться, например, алгоритмом, разработанным Дарио Иццо [136,137], или весьма эффективным алгоритмом библиотеки MathLab [115]. Последний позволяет анализировать многовитковые перелеты и находить все возможные решения уравнения Ламберта. Обратим внимание на то, что для сформулированной нами задачи анализа второго сегмента траектории перелета угловая дальность на нем известна с точностью до целого числа витков относительно Солнца. Упомянутый алгоритм из библиотеки MathLab позволяет найти все реализуемые угловые дальности и получить для них все решения. Например, если решение задачи Ламберта для рассматриваемого времени перелета на сегменте траектории возможно для перелетов с двумя полными оборотами вокруг Солнца, то решений уравнения Ламберта будет пять:

- Одно решение для перелета с угловой дальностью меньше одного оборота,
- два решения для перелета с угловой дальностью, большей одного оборота, но меньше двух оборотов и
- два решения для перелета с угловой дальностью, большей двух оборотов относительно Солнца.

Траектории перелета с большим числом оборотов вокруг Солнца вряд ли интересны для практики проектирования межпланетных траекторий из-за большого времени их исполнения. С другой стороны, исключение полуторовиткового перелета из рассмотрения может привести к потере интересного варианта схемы перелета. При решении конкретных задач часто ограничивались траекторией с угловой дальностью, меньше двух оборотов вокруг Солнца. При этом максимальное число решений задачи Ламберта было равно трем.

Каждое решение уравнения Ламберта дает возможность получить траекторию на втором сегменте траектории перелета, найти элементы орбиты КА на сегменте, начальный $V(T_{dvi}^+)$ и конечный $V(T_i^-)$ векторы гелиоцентрической скорости КА на сегменте.

Найденные векторы скоростей дают возможность определить требуемый импульс скорости на гелиоцентрической участке траектории в момент T_{dvi} :

$$dV_i = V(T_{dvi}^+) - V(T_{dvi}^-)$$

и вектор гиперболического избытка скорости подлета к i -ой планете:

$$V_{\infty}^- = V(T_i^-) - V_{pli}(T_i).$$

В последнем соотношении $V_{pli}(T_i)$ – это вектор скорости i -ой планеты в момент реализации около неё ГМ.

Приведенный анализ единичного перелета от $(i-1)$ -ой планеты к i -ой планете в рассматриваемом маршруте показывает, что характеристики перелетной траектории определяются следующим набором входных данных: датами пролета $(i-1)$ -ой и i -ой планеты, вектором гиперболического избытка скорости отлета от $(i-1)$ -ой планеты и датой выполнения импульса скорости на гелиоцентрическом участке перелета. Выходными характеристиками анализа рассматриваются величина импульса скорости в глубоком космосе и вектор гиперболического избытка скорости при подлете к i -ой планете. Если существует несколько решений задачи Ламберта, то для каждого решения будет найдена своя величина требуемого импульса скорости и свой вектор гиперболического избытка скорости подлета к i -ой планете.

Проведенный анализ единичного перелета от $(i-1)$ -ой планеты к i -ой планете на рассматриваемом маршруте позволяет вернуться к сквозной оптимизации всей сложной схемы перелета, сформулированной в виде задачи безусловной минимизации.

4.4 МЕТОД ОПТИМИЗАЦИИ СЛОЖНОЙ СХЕМЫ МЕЖПЛАНЕТНОГО ПЕРЕЛЕТА, КАК ЗАДАЧИ ПОИСКА БЕЗУСЛОВНОГО ЭКСТРЕМУМА

Задача определения минимальной требуемой характеристической скорости для исследуемой схемы полета (минимального суммарного импульса скорости) сформулирована как задача безусловной минимизации функции большого числа $(5n+6)$ переменных: $T_0, T_1, T_2, \dots, T_n, T_{dV1}, T_{dV2}, \dots, T_{dV(n+1)}, T_f, V_{\infty 0}, V_{\infty 1}, V_{\infty 2}, \dots, V_{\infty n}$.

Хотя задача безусловной минимизации принципиально более проста по сравнению с задачей условной минимизации, но в случае большой размерности вектора выбираемых параметров её решение является достаточно трудным. Большое число локальных минимумов сформулированной задачи вызывает серьезную проблему при поиске и нахождении глобального минимума. К сожалению, рассматриваемая минимизируемая функция, зависящая от большого числа $(5n+6)$ переменных, имеет большое число локальных минимумов.

Нахождение глобального минимума является очень сложной задачей. В настоящее время существуют большое число методов глобальной оптимизации. Эти методы можно разделить на две категории: детерминированные и стохастические методы глобальной оптимизации. Детерминированные методы [112] находят глобальное решение посредством поиска на всем допустимом множестве. Поэтому большинство детерминированных алгоритмов теряют эффективность при возрастании размерности задачи. Стохастические методы [102,213] позволяют уйти от проблем детерминированных алгоритмов.

По-видимому, наиболее рациональными являются комбинированные методы, когда на первом этапе стохастический подход позволяет найти область, в которой с большой вероятностью находится глобальный минимум, а на втором этапе локальная оптимизация обеспечивает уточнение оптимального решения в полученной области.

Стохастические методы оптимизации основаны на случайном поиске. Они достаточно просты в реализации – как правило, в них не используются градиенты минимизируемой функции и не требуется преобразование исходной задачи. С другой стороны, они требуют большого числа итераций, чтобы увеличить вероятность нахождения глобального оптимума. И они могут найти его с высокой вероятностью за определенное время вычисления с помощью использования современных компьютеров.

К стохастическим методам глобальной оптимизации можно отнести: генетические алгоритмы, эволюционные алгоритмы и стратегии, «метод виртуальных частиц», «метод роя частиц», алгоритм контролируемого случайного поиска и др. В работе [34] «метод роя частиц» использовался для получения начального приближения выбираемых характеристик маршрута, а для нахождения локального минимума – метод последовательного квадратичного программирования или метод активного набора. В процессе тестирования возможности использования нескольких стохастических методов оптимизации наиболее эффективным оказался алгоритм метода эволюционной стратегии с адаптацией матрицы ковариаций.

Для тестирования эффективности методов рассматривалась задача оптимизации траектории перелета по схеме Земля - Земля - Юпитер. Для этой задачи выбираемыми параметрами являются

1. дата старта от Земли;
2. вектор гиперболического избытка скорости при отлете от Земли;
3. время перелета на гелиоцентрическом участке Земля - Земля;
4. момент осуществления дополнительного импульса скорости на гелиоцентрическом участке траектории Земля - Земля;
5. вектор гиперболического избытка скорости после ГМ у Земли;
6. время перелета на гелиоцентрическом участке траектории Земля - Юпитер;
7. момент осуществления дополнительного импульса скорости на гелиоцентрическом участке траектории Земля - Юпитер;

В первом тесте, в качестве первого приближения использованы следующие характеристики:

1. дата старта от Земли - 10.07.2019г;
2. вектор гиперболического избытка скорости при отлете от Земли задавался равным $[1; 1; 1]$ км/с;
3. время перелета гелиоцентрического участка Земля - Земля задавалось 650 дней;
4. момент осуществления дополнительного импульса скорости на гелиоцентрическом участке Земля - Земля задавался в середине гелиоцентрического полета Земля - Земля;
5. вектор гиперболического избытка скорости после ГМ у Земли задавался равным $[1; 1; 1]$ км/с;

6. время перелета на гелиоцентрическом участке Земля - Юпитер задавалось 1000 дней;

7. момент осуществления дополнительного импульса скорости на гелиоцентрическом участке Земля - Юпитер задавался в середине гелиоцентрического перелета Земля - Юпитер.

Прежде всего, проиллюстрируем сложный многоэкстремальный характер рассматриваемой проблемы. Выделим из перечисленных оптимизируемых характеристик параметров две характеристики: время гелиоцентрического перелёта Земля – Земля и время второго гелиоцентрического перелета Земля – Юпитер. Исследуем зависимость критерия оптимизации (суммарного импульса скорости) как функцию этих двух характеристик. Для этого зафиксируем значение остальных характеристик такими, какими они приведены выше, и проварьируем время перелета Земля – Земля в диапазоне от 200 до 700 сут., а время перелета Земля – Юпитер в диапазоне от 600 до 1100 сут.

На рисунке 4.1 показаны изолинии суммарного импульса скорости на плоскости время гелиоцентрического перелета Земля – Земля (ось абсцисс) – время гелиоцентрического перелета Земля – Юпитер (ось ординат). На рисунке 4.2 эта же функция показана в варианте 3d. Анализ рисунков показывает, что существует даже в пространстве двух аргументов большое число локальных минимумов, которые затрудняют нахождение оптимальной схемы перелета.

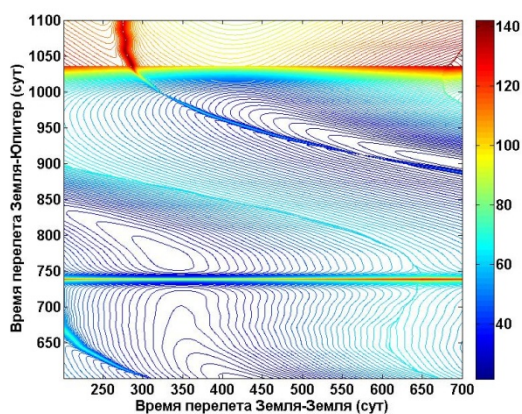


Рисунок 4.1 Изолинии суммарного импульса скорости на плоскости время гелиоцентрического перелета Земля – Земля (ось абсцисс) – время гелиоцентрического перелета Земля – Юпитер (ось ординат)

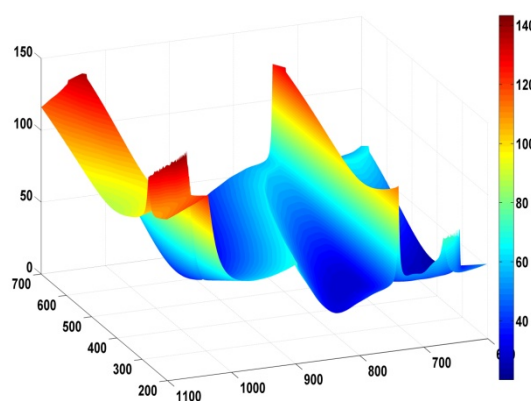


Рисунок 4.2 Суммарный импульс скорости как функции время гелиоцентрического перелета Земля – Земля и время гелиоцентрического перелета Земля – Юпитер

Представим результаты оптимизации анализируемого маршрута перелета к Юпитеру с использованием четырех тестируемых в этом разделе методов минимизации: метода активного набора (Active-set); метод внутренних точек (Interior points, также называемый барьерным методом); метод последовательного квадратичного

программирования (sqp) и эволюционный метод с адаптацией ковариационной матрицы (СМА-ES). Каждый из перечисленных методов получил своё решение задачи и по своему критерию окончания поиска минимума суммарного импульса скорости закончил итерационную процедуру. Среди критериев выхода из итерационной процедуры рассматривалась величина приращения критерия минимизации (суммарного импульса скорости) по последовательным итерациям. Эта величина минимального приращения была выбрана одинаковой (10^{-6}) для всех исследуемых методов минимизации.

В таблице 4.1 приведены характеристики оптимальной траектории перелета к Юпитеру по исследуемому маршруту. Столбцы таблицы показывают значения характеристик маршрута, полученных тестируемыми методами. К нашему большому удивлению, полученные решения оказались принципиально различными. Такое большое различие показывает, что различными методами получены четыре различных экстремали. Бросается в глаза большое различие в оптимальном значении гиперболического избытка скорости при старте от Земли. При использовании метода active-set гиперболический избыток скорости очень большой (более 6.5 км/с). При использовании метода СМА-ES гиперболический избыток скорости значительно меньше (менее 5.2 км/с). При использовании двух других методов оптимальная величина гиперболического избытка скорости оказалась равна 5.468 и 5.232 км/с.

Таблице 4.1 - Характеристики траектории Земля - Земля – Юпитер. Первое тестирование

	Active-set	Interior points	Sqp	CMA-ES
дата старта	14.07.2019	01.07.2019	26.06.2019	24.06.2019
гиперболический избыток скорости при старте от Земли (м/с)	6571.9	5468.4	5232.1	5197.1
требуемый импульс скорости при старте с базовой околоземной орбиты (км/с)	5037.7	4508.8	4405.6	4390.7
дата выполнения импульса скорости на гелиоцентрическом перелете Земля - Земля	08.04.2020	24.05.2020	23.05.2020	27.6.2020
величина импульса скорости при гелиоцентрическом перелете Земля - Земля	525.7	616.2	618.1	609.7
дата ГМ у Земли	23.04.2021	27.04.2021	30.04.2021	03.05.2021
гиперболический избыток скорости при гравитационном маневре у Земли (м/с)	9657.4	9513.9	9425.5	9380.8
Радиус перигея гиперболы пролета (км)	6783.2	6778.3	6781.5	6778.1
дата подлёта КА к Юпитеру	19.01.2024	13.03.2024	30.04.2024	31.05.2024
гиперболический избыток скорости при подлете к Юпитеру (м/с)	6051.1	6142.4	6255.9	6342.9
требуемый импульс скорости при торможении в окрестности Юпитера (м/с)	305.5	314.8	326.5	335.6
суммарное время полета (сут)	1649.8	1717	1770.1	1803.1
суммарный импульс скорости (м/с)	5868.9	5439.8	5350.2	5335.9

Разумеется, и остальные характеристики экстремалей, полученных разными методами, сильно отличаются друг от друга. Так, например, дата подлета КА к Юпитеру изменяется в диапазоне шириной почти 5 месяцев (с 19 января по 31 мая 2024 г). Гиперболический избыток скорости у Земли при гравитационном маневре у неё находится то же в широком диапазоне 9380-9657 м/с. Суммарное время полета для полученных экстремалей изменяется от 1650 суток до 1803 суток.

Суммарный импульс скорости (критерий оптимизации) оказался самым малым (5335.9 м/с) при использовании метода эволюционной стратегии с адаптацией ковариационной матрицы. Этим методом получена лучшая экстремаль, которая, возможно, является оптимальным решением реализации исследуемого маршрута. Остальные три тестируемых метода получили экстремали со значением критерия на 15, 104 и 532 м/с более, чем CMA-ES метод. Анализ экстремали, полученной методом sqp, величина критерия на которой очень близка к минимальному значению критерия (отличие всего 15 кг), показывает, что это особая экстремаль (несмотря на то, что некоторые характеристики её маршрута близки к характеристикам оптимального маршрута). На этой экстремали дата ГМ у Земли отличается от даты гравитационного манера на оптимальной траектории на целый месяц при почти одной дате старта.

Приведем результаты другого тестирования, в котором в качестве начального приближения оптимизируемых характеристик маршрута были взяты следующие характеристики:

1. дата старта от Земли - 10.07.2019г;
2. вектор гиперболического избытка скорости при отлете от Земли [2;2;2] км/с;
3. время гелиоцентрического перелета Земля - Земля 650 дней;
4. момент осуществления импульса скорости на гелиоцентрическом перелете Земля - Земля задавался в середине этого перелета;
5. вектор гиперболического избытка скорости после ГМ у Земли [3;3;3] км/с;
6. время перелета гелиоцентрического перелета Земля - Юпитер 1000 дней;
7. момент осуществления импульса скорости на гелиоцентрическом перелете Земля - Юпитер задавался в середине этого перелета.

Как и в предыдущем анализе исследуем зависимость критерия оптимизации (суммарного импульса скорости) как функцию времен гелиоцентрических перелетов (перелета Земля – Земля и перелета Земля-Юпитер). Для этого зафиксируем значение остальных характеристик такими, какими они приведены выше, и проварьируем время перелета Земля – Земля в диапазоне от 200 до 700 сут., а время перелета Земля – Юпитер в диапазоне от 600 до 1100 сут.

На рисунке 4.3 показаны изолинии суммарного импульса скорости на плоскости время гелиоцентрического перелета Земля – Земля (ось абсцисс) – время гелиоцентрического перелета Земля – Юпитер (ось ординат). На рисунке 4.4 эта же функция показана в варианте 3d. Анализ рисунков показывает, что даже в пространстве

двух аргументов существует большое число локальных минимумов, которые затрудняют нахождение оптимальной схемы перелета.

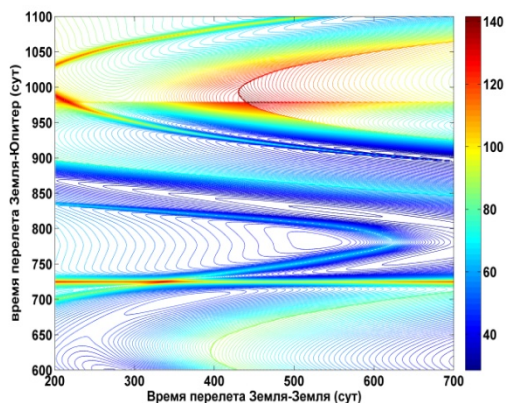


Рисунок 4.3 Изолинии суммарного импульса скорости на плоскости время гелиоцентрического перелета Земля – Земля (ось абсцисс) – время гелиоцентрического перелета Земля – Юпитер (ось ординат)

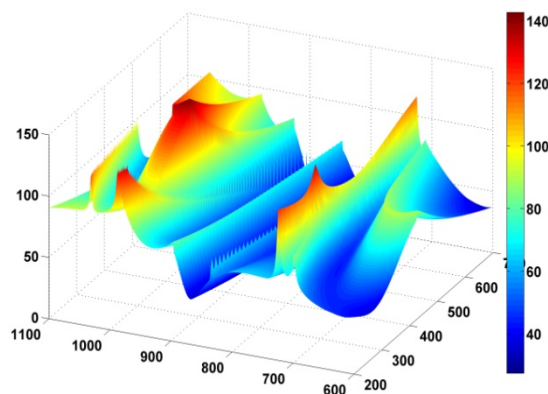


Рисунок 4.4 Суммарный импульс скорости как функции время гелиоцентрического перелета Земля – Земля и время гелиоцентрического перелета Земля – Юпитер

В таблице 4.2 приведены характеристики траектории перелета к Юпитеру по исследуемому маршруту, полученные при проведении второго тестирования. Столбцы таблицы показывают значения характеристик маршрута, полученных тестируемыми методами. Отметим сразу три важнейших для нас свойства полученных решений:

- Полученные различными методами решения опять оказались принципиально различными;
- Решение, полученное с использованием метода CMA-ES, оказалось тем же, что и при первом тестировании;
- Это решение опять самое лучшее по критерию оптимизации.

Такой вывод позволяет надеяться, что метод CMA-ES обеспечил получение глобального экстремума в рассматриваемой задаче.

Таблица 4.2 - Характеристики траектории Земля - Земля – Юпитер. Второе тестирование

	Active-set	Interior points	sqp	CMA-ES
дата старта	24.07.2019	09.07.2019	26.06.2019	24.06.2019
гиперболический избыток скорости при старте от Земли (м/с)	7940.5	6264.9	5328.7	5197.2
требуемый импульс скорости при старте с базовой околоземной орбиты (км/с)	5789.9	4883.1	4447.4	4390.7
дата выполнения импульса скорости на гелиоцентрическом перелете Земля - Земля	12.02.2020	28.04.2020	06.07.2020	27.06.2020
величина импульса скорости при гелиоцентрическом перелете Земля - Земля	241.8	566.0	623.1	609.8
дата ГМ у Земли	25.04.2021	21.04.2021	27.04.2021	03.05.2021
гиперболический избыток скорости при гравитационном маневре у Земли (м/с)	9151.1	9720.6	9530.7	9381.4
радиус перигея гиперболы пролета (км)	7779.3	7357.3	6778.1	6778.1
Импульс скорости при гравитационном маневре(м/с)	-	-	35.4	-
дата выполнения импульса скорости на гелиоцентрическом перелете Земля - Юпитер	1.1.2022	03.09.2022	-	-
величина импульса скорости на гелиоцентрическом перелете Земля - Юпитер	235.4	5.6	-	-
дата подлёта КА к Юпитеру	22.01.2024	25.01.2024	05.03.2024	30.05.2024
гиперболический избыток скорости при подлете к Юпитеру (м/с)	5943.1	6058.9	6125.9	6341.8
требуемый импульс скорости при торможении в окрестности Юпитера (м/с)	294.7	306.3	313.1	335.5
суммарное время полета (сут)	1642.5	1660.4	1713.9	1802.7
суммарный импульс скорости (м/с)	6561.8	5761.1	5419.0	5335.9

Решения, полученные при втором тестировании другими методами, оказались различными локальными экстремалиями. Интересно то, что эти три экстремали не совпадают с экстремалиями, полученными этими методами при первом тестировании. То есть можно утверждать, что, во-первых, для рассматриваемой задачи нами уже получены семь экстремалей, во-вторых, три метода, результаты которых приводятся первыми в таблице, в зависимости от начального приближения характеристик маршрута получают различные экстремали. Такого недостатка оказался лишен метод CMA-ES, который обеспечил получение глобального минимума.

Приведем результаты еще одного (третьего) тестирования, надеясь подтвердить им сделанные основные выводы.

В третьем тестировании в качестве первого приближения оптимизируемых характеристик маршрута будет использовать следующие характеристики:

1. дата старта от Земли - 10.07.2019г;
2. вектор гиперболического избытка скорости при старте от Земли $[0;0;0]$ км/с;
3. время гелиоцентрического перелета Земля - Земля 650 дней;
4. дата осуществления импульса скорости на гелиоцентрическом перелете Земля - Земля задавалась в середине гелиоцентрического перелета Земля - Земля;
5. вектор гиперболического избытка скорости после ГМ у Земли $[0;0;0]$ км/с;
6. время гелиоцентрического перелета Земля - Юпитер 1000 дней;
7. дата осуществления импульса скорости на гелиоцентрическом перелете Земля - Юпитер задавалась в середине этого перелета.

На рисунке 4.5 показаны изолинии суммарного импульса скорости на плоскости время гелиоцентрического перелета Земля – Земля (ось абсцисс) – время гелиоцентрического перелета Земля – Юпитер (ось ординат). На рисунке 4.6 эта же функция показана в варианте 3d. Как и в предыдущем анализе зафиксируем значение остальных характеристик такими, какими они приведены выше, и проварьируем время перелета Земля – Земля в диапазоне от 200 до 700 сут., а время перелета Земля – Юпитер в диапазоне от 600 до 1100 сут.

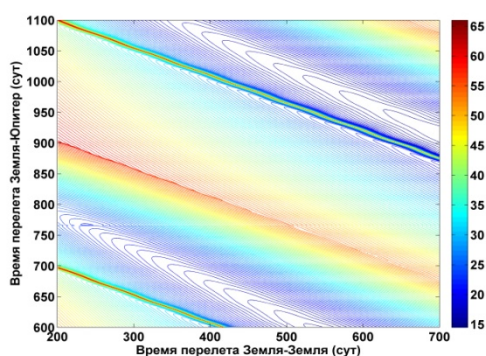


Рисунок 4.5 Изолинии суммарного импульса скорости на плоскости время гелиоцентрического перелета Земля – Земля (ось абсцисс) – время гелиоцентрического перелета Земля – Юпитер (ось ординат)

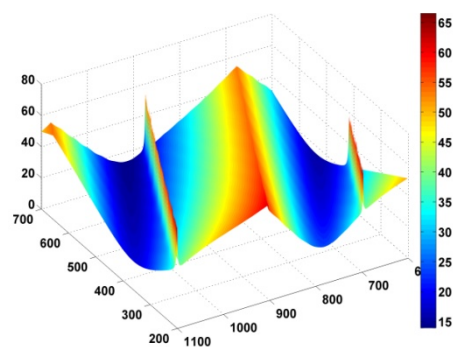


Рисунок 4.6 Суммарный импульс скорости как функции время гелиоцентрического перелета Земля – Земля и время гелиоцентрического перелета Земля – Юпитер

В таблице 4.3 приведены характеристики траектории перелета к Юпитеру по исследуемому маршруту, полученные при проведении третьего тестирования. Как и в предыдущих таблицах, её столбцы дают значения характеристик маршрута, полученных тестируемыми методами.

Бросается в глаза очень большие суммарные импульсы скорости, полученные методами «активного набора» и «внутренней точки» (результаты помещены во второй и третий столбцы таблицы). Можно утверждать, что две «плохие» экстремали. На первой из них (второй столбец) очень неэффективно используется гравитационный маневр у Земли, очень мал гиперболический избыток скорости при гравитационном маневре (всего 5.7 км/с).

Таблице 4.3 - Характеристики траектории Земля - Земля – Юпитер. Третье тестирование

	Active-set	Interior points	sqp	CMA-ES
дата старта	11.07.2019	17.07.2019	25.06.2019	19.06.2019
гиперболический избыток скорости при старте от Земли (м/с)	433.6	19.9	5297.8	5204.6
требуемый импульс скорости при старте с базовой околоземной орбиты (км/с)	3234.6	3226.1	4433.9	4393.8
дата выполнения импульса скорости на гелиоцентрическом перелете Земля - Земля	30.04.2020	07.05.2020	19.06.2020	27.06.2020
величина импульса скорости при гелиоцентрическом перелете Земля - Земля	4440.3	88.4	594.7	631.3
дата ГМ у Земли	21.04.2021	07.05.2021	27.04.2021	28.04.2021
гиперболический избыток скорости при гравитационном маневре у Земли (м/с)	5719.8	8680.0	9317.4	9490.8
радиус перигея гиперболы пролета (км)	6778.1	11846.79	6778.1	6778.1
Импульс скорости при гравитационном маневре(м/с)	972.2	8574.4	-	-
дата выполнения импульса скорости на гелиоцентрическом перелете Земля - Юпитер	05.06.2021	14.03.2022	19.02.2022	-
величина импульса скорости на гелиоцентрическом перелете Земля - Юпитер	3378.4	326.8	93.7	-
дата подлёта КА к Юпитеру	16.01.2024	25.01.2024	13.02.2024	28.03.2024

гиперболический избыток скорости при подлете к Юпитеру (м/с)	5824.4	5898.8	6053.2	6175.4
требуемый импульс скорости при торможении в окрестности Юпитера (м/с)	283	290.3	305.7	318.1
суммарное время полета (сут)	1649.8	1653.5	1694.2	1743.9
суммарный импульс скорости (м/с)	12308.6	12506.1	5428.2	5343.29

На маршруте, информация о котором помещена в третий столбец таблицы, используется активный гравитационный маневр с очень большим импульсом скорости. Неудачным является и очень маленький гиперболический избыток скорости при старте от Земли.

Несколько обидным оказался результат оптимизации маршрута при использовании метода CMA-ES . Хотя с его помощью, как и при предыдущих тестированиях, получено лучшее решение (суммарный импульс скорости 5343.3 м/с), но такой суммарный импульс на 7.4 м/с больше суммарного импульса, который был получен при первом и втором тестировании (5335.9 м/с). Разность критериев невелика, но нельзя уверенно утверждать, что полученное в третьем тестировании методом CMA-ES решение находится в окрестности глобального минимума. По некоторым характеристикам полученные маршруты отличаются значительно. Например, величина гиперболического избытка скорости отличается на 110 м/с.

В таблице 4.4 представлены полученные результаты оптимизации рассматриваемого маршрута с использованием трех гибридных методов:

- Комбинации генетического алгоритма и метода активного набора (GA + Active-set);
- Комбинации метода имитации отжига и метода внутренней точки. (SA + Interior points);
- Комбинации метод роя частиц и метода квадратичного программирования (PSO + SQP).

Таблице 4.4 - Характеристики траектории Земля - Земля – Юпитер. Тестирование гибридных методов

	GA+Active-set	SA+Interior points	PSO+SQP
дата старта	01.11.2019	23.09.2019	08.09.2019
гиперболический избыток скорости при старте от Земли (км/с)	4.0329	12.6621	9.3343
требуемый импульс скорости при старте с базовой	3.9412	8.9939	6.6493

околоземной орбиты (км/с)			
дата выполнения импульса скорости на гелиоцентрическом перелете Земля - Земля	16.11.2020	24.09.2019	06.03.2020
величина импульса скорости при гелиоцентрическом перелете Земля - Земля	1.5797	0.2277	0.0692
дата ГМ у Земли	15.06.2022	02.05.2021	27.05.2021
гиперболический избыток скорости при гравитационном маневре у Земли (км/с)	9.2395	12.5855	9.6456
радиус перигея гиперболы пролета (км)	6778.1	6778.1	6778.1
импульс скорости при гравитационном маневре (км/с)	3.6609	0.5359	0
дата выполнения импульса скорости на гелиоцентрическом перелете Земля - Юпитер	09.08.2022	18.11.2021	29.05.2021
величина импульса скорости на гелиоцентрическом перелете Земля - Юпитер	0.0404	3.3166	0.069
дата подлёта КА к Юпитеру	02.07.2024	22.04.2024	05.07.2025
гиперболический избыток скорости при подлете к Юпитеру (км/с)	6.4754	8.1067	7.6406
требуемый импульс скорости при торможении в окрестности Юпитера (км/с)	0.3497	0.5472	0.04863
суммарное время полета (сут)	1704.5	1672.97	2127.5
суммарный импульс скорости (км/с)	9.5719	13.6214	7.2049
Число вычислений минимизируемого суммарного импульса скорости	220231	7469	76805

Из результатов, помещенных в таблицу следует, что ни один из гибридных методов не получил решения близкого к оптимальному решению. Использование метода, информация по которому помещена в третий столбец таблицы (SA + Interior points), получил суммарный импульс скорости, превышающий оптимальный суммарный импульс более чем в 2.5 раза.

Из рассмотренных трех гибридных методов лучшее значение суммарного импульса скорости получено при использовании метода PSO + SQP. Но и при этом суммарный импульс скорости оказался больше минимального в 1.35 раза. Этот результат хуже любых решений, полученных в ходе первых двух тестирований, результаты по которым

приведены в таблицах 4.1 и 4.2. Использование гибридных методов не позволило правильно найти область оптимальных дат старта (смещение более чем на три месяца), область оптимальной величины гиперболического избытка скорости при старте оптимальной даты ГМ (в двух вариантах он был завышен почти в два раза, в третьем варианте занижен более чем на 1 км/с).

Приведенный анализ позволяет утверждать, что метод SMA-ES находил наилучшие характеристики рассматриваемого маршрута полёта КА с ЭРДУ к Юпитеру независимо от выбираемого первого приближения характеристик маршрута. Проведенные тесты использования гибридных стохастических методов показали их неспособность конкурировать в эффективности при оптимизации сложных маршрутов межпланетного перелета с методом SMA-ES. Основной вывод из исследования, проведенного в настоящем разделе: метод SMA-ES можно рекомендовать для оптимизации сложных схем межпланетных перелетов для транспортных систем с химическими ракетными двигателями, схем, анализируемых с использованием импульсной аппроксимации активных участков траектории полета.

В следующем разделе представлены результаты, полученные с помощью этого алгоритма для четырех схем (маршрутов) полета к Юпитеру.

4.5 АНАЛИЗ СЛОЖНЫХ СХЕМ ПОЛЕТА К ЮПИТЕРУ С ГРАВИТАЦИОННЫМИ МАНЕВРАМИ У ЗЕМЛИ, ВЕНЕРЫ И МАРСА ДЛЯ КА С ХИМИЧЕСКИМИ РАКЕТНЫМИ ДВИГАТЕЛЯМИ

В данном разделе проанализированы сложные схемы полета к Юпитеру для ближайших окон запуска с использованием гравитационных маневров у Земли, Венеры и Марса и дополнительных импульсов скорости на гелиоцентрических участках траектории. Предполагается, что КА находится на низкой околоземной орбите, старт с нее и выход на гиперболическую траекторию отлета от Земли обеспечивает химический разгонный блок, который затем отделяется от КА. Предполагается, что КА оснащен собственной химической двигательной установкой. Она может обеспечивать импульсные приращения скорости на всей траектории полета. В частности, она может обеспечивать маневры вдали от каких-либо небесных тел, активные гравитационные маневры и, наконец, торможение КА в окрестности планеты назначения – Юпитера.

Тормозной импульс скорости в окрестности планеты назначения рассчитывается из условия перевода КА на параболическую гелиоцентрическую орбиту с гиперболы пролета Юпитера. Ее радиус перигелия равен радиусу орбиты спутника Юпитера Европы (671100 км). С точки зрения величины тормозного импульса скорости выгодно давать

тормозной импульс на минимально возможной высоте относительно Юпитера. Так, при гиперболическом избытке скорости подлета к Юпитеру 6 км/с уменьшение радиуса перигелия орбиты, равного радиусу орбиты Европы, до радиуса спутника Юпитера Ио (421800 км) позволило бы уменьшить требуемый импульс скорости с 905.2 м/с до 723.7 м/с. Из-за проблем с радиацией при приближении КА к Юпитеру мы посчитали более реальной проводить оценку энергетики, полагая, что внутрь орбиты Европы КА не попадает.

Задача нахождения минимальной требуемой характеристической скорости для исследуемой схемы полета формулируется как задача безусловной минимизации функции большого числа переменных. Суммарный импульс скорости (требуемая характеристическая скорость), обеспечивающий отлет КА от Земли, и все активные маневры и в окрестности планеты назначения рассматриваются как минимизируемый функционал задачи. Дата старта, время перелета от планеты к планете, моменты времени осуществления импульсов скорости в глубоком космосе и компоненты векторов гиперболических избытков скорости отлета от планет рассматриваются выбираемыми параметрами оптимизируемой схемы полета.

Оптимизированы четыре схемы (маршрута) полета к Юпитеру[49]:

- Земля – Земля – Юпитер;
- Земля – Марс – Земля – Юпитер;
- Земля – Венера – Земля – Марс – Земля – Юпитер и
- Земля – Венера – Земля – Земля – Юпитер.

Ниже представим основные характеристики оптимальных траекторий для этих маршрутов перелета при датах старта от Земли, принадлежащих диапазону 2021...2030 годов.

4.5.1 Анализ маршрута Земля – Земля – Юпитер

Для рассматриваемого маршрута «временная завязка» всей траектории зависит только от характеристик гелиоцентрических траекторий Земли и Юпитера. Относительное положение Земли и Юпитера повторяется через синодический период Юпитера (399 дней). Для того, чтобы представить, как сильно изменяются характеристики оптимального перелета по рассматриваемому маршруту как функции эпохи старта, рассмотрим две последовательные эпохи старта.

Минимизация суммарного импульса скорости для рассматриваемого маршрута для двух эпох старта в 2021 и в 2022 годах привела к решениям, представленным следующими

характеристиками (первой указывается значение характеристики для эпохи старта в 2021 году, второй указывается величина характеристики для эпохи старта в 2022 году):

- Оптимальная дата старта оказалась (29.08.2021, 30.09.2022).
- При старте КА с базовой околоземной орбиты импульс скорости оказался большим (4.380, 4.365 км/с) и обеспечил большую величину гиперболического избытка скорости при старте от Земли (5.173, 5.137 км/с). Вектор гиперболического избытка скорости почти коллинеарен к гелиоцентрической скорости Земли. Поэтому первый сегмент гелиоцентрической траектории КА был эллиптическим с радиусом перигелия, близким к расстоянию Земли от Солнца.
- В районе афелия гелиоцентрического перелета (через 363, 369 суток полета) маршевый двигатель КА обеспечил импульс скорости (616, 734 м/с), изменивший и величину, и направление скорости КА.
- Этот импульс скорости позволил КА через (678, 676 суток) полета (1.856, /1.851 года) встретиться с Землей для того, чтобы осуществить у неё гравитационный маневр. Гиперболический избыток скорости при подлете КА к Земле оказался равен (9.419, 9.996 км/с). Он практически в два раза больше гиперболического избытка скорости при старте от Земли (менее 5.2 км/с), что прежде всего является эффектом от сообщенного КА импульса скорости на гелиоцентрическом перелете Земля – Земля.
- Гравитационный маневр (у Земли) оказался пассивным. Он проводится с минимальной высотой пролетной гиперболы, взятой за 400 км.
- На участке гелиоцентрического перелета Земля – Юпитер импульс скорости оказался почти нулевым (несколько метров в секунду, которыми можно пренебречь). Продолжительность полета на этом участке 815, 1045 суток.
- КА подлетает к Юпитеру (17.03.2026, 17.06.2027) с относительно небольшим гиперболическим избытком скорости (5.569, 5.468 км/с). Из-за этого для перехода на орбиту его спутника требуется небольшой импульс скорости в окрестности Юпитера. Продолжительность полета по всему маршруту составляет 1661, 1721 суток (4.55, 4.71 года).

Очень важно то обстоятельство, что гравитационный маневр оказался пассивным. Приятным является и то, что импульс скорости на гелиоцентрическом участке (Земля – Юпитер) оказался практически нулевым. Поэтому для рассматриваемой схемы полета суммарный импульс скорости равен сумме импульса скорости при старте с низкой околоземной орбиты, импульса скорости на гелиоцентрическом участке Земля - Земля и импульса скорости при торможении в окрестности Юпитера.

На рисунке 4.7 показана проекция на плоскость эклиптики для траектории перелета КА по маршруту Земля – Земля – Юпитер с датой старта в 2021 году. В центре рисунка с нулевыми координатами расположено Солнце. Тонкими линиями изображены орбиты Земли и Юпитера. На жирной линии, обозначающей траекторию КА, выделены характерные точки: точка старта, точки выполнения гравитационных маневров, точка подлета КА к Юпитеру. Точки, в которых КА получает импульсы скорости на гелиоцентрических участках траектории, обозначены DSM (deep space maneuver). На рисунке 4.7 таких точек две (по числу гелиоцентрических участков). Для гелиоцентрического участка Земля – Юпитер импульс скорости практически нулевой, но на рисунке показано положение точки приложения этого практически нулевого импульса скорости.

На рисунке 4.8 показана проекция на плоскость эклиптики для траектории перелета КА по маршруту Земля – Земля – Юпитер с датой старта в 2022 году. Обозначения используются те же, что и введенные выше.

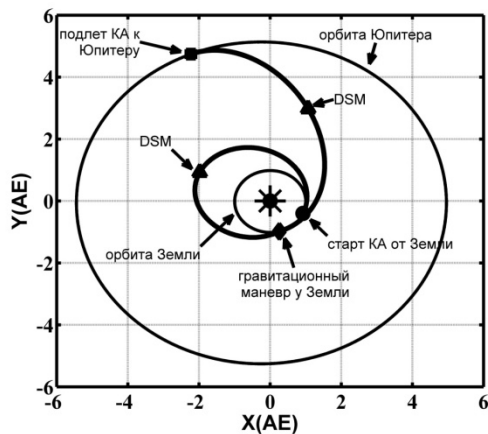


Рисунок 4.7 - Проекция на плоскость эклиптики траектории перелета Земля - Земля - Юпитер (эпоха запуска 2021 год)

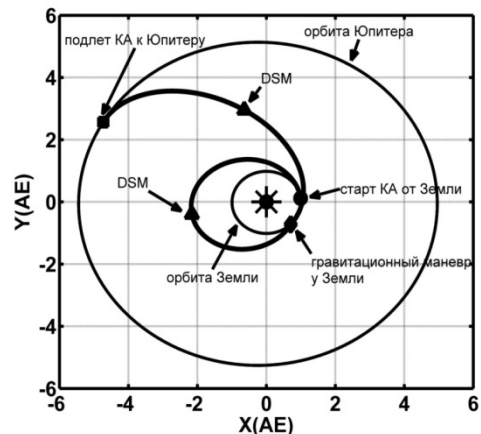


Рисунок 4.8 - Проекция на плоскость эклиптики траектории перелета Земля - Земля - Юпитер (эпоха запуска 2022 год)

В таблице 4.5 представлены основные характеристики траектории перелета по анализируемому маршруту для двух рассмотренных дат старта.

Таблица 4.5 - Основные характеристики траектории Земля - Земля - Юпитер (эпохи старта 2021 и 2021 годов)

дата старта	29.08.2021	30.09.2022
гиперболический избыток скорости при старте от Земли	5172.83м/с	5136.85 м/с
требуемый импульс скорости с базовой околоземной орбиты	4380.29м/с	4365.04м/с
дата выполнения импульса скорости в глубоком космосе	27.08.2022	04.10.2023
импульс скорости в глубоком космосе	616.19м/с	734.29м/с
дата ГМ у Земли	08.07.2023	06.08.2024
гиперболический избыток скорости при гравитационном маневре у Земли	9419.28м/с	9996.55м/с

высота перигея гиперболы пролета	400 км	400 км
дата подлёта КА к Юпитеру	17.03.2026	17.06.2027
гиперболический избыток скорости при подлете к Юпитеру	5568.75 м/с	5467.85 м/с
требуемый импульс скорости при торможении в окрестности Юпитера	782.18 м/с	754.61 м/с
суммарный импульс скорости	5778.66 м/с	5853.94 м/с
суммарное время полета	1660.86 сут.	1721.22 сут.

Из анализа видно, что эпоха запуска 2021 года немного благоприятнее эпохи запуска 2022 года. Суммарный импульс скорости для эпохи 2021 года меньше почти на 76 м/с.

Усложним маршрут, введя в него гравитационный маневр у Марса.

4.5.2 Анализ маршрута Земля - Марс - Земля - Юпитер

Из анализа маршрута Земля – Земля – Юпитер предыдущего раздела становится ясно, что, если есть возможность реализовать гравитационный маневр у Марса на гелиоцентрическом участке Земля - Земля, то может появиться возможность хотя бы уменьшить импульс скорости на гелиоцентрическом перелете Земля – Земля. Отсюда вытекает вероятность уменьшения суммарного импульса скорости рассматриваемого перелета к Юпитеру. Усложнение маршрута за счет пролета Марса приводит к преодолению сложностей временной увязки траектории КА с ещё одной планетой (Марсом). Подходящее положение Марса для реализации такого маршрута удалось найти для эпохи старта в 2026 году.

Оптимизация рассматриваемого маршрута Земля - Марс – Земля – Юпитер для эпохи старта в 2026 году привела к следующему решению:

- Гравитационные маневры и у Земли, и у Марса оказались пассивными. Импульсы скоростей на двух гелиоцентрических участках (Земля - Марс, Земля - Юпитер) из трех имеющихся на маршруте оказались равны нулю. В итоге суммарный импульс скорости оказался равен сумме импульса скорости при старте с базовой околоземной орбиты, импульса скорости на гелиоцентрическом перелете Марс - Земля и импульса скорости при торможении в окрестности Юпитера.
- При старте КА с базовой околоземной орбиты импульс скорости оказался довольно большим (почти 4.606 км/с). Он обеспечил большую величину гиперболического избытка скорости при старте от Земли (5.683 км/с).
- Вектор гиперболического избытка скорости обеспечил перелет к Марсу без импульса скорости на гелиоцентрическом перелете Земля – Марс. Время перелета на этом участке составило 139.00 суток.

- Гиперболический избыток скорости при подлете к Марсу оказался равным 10.586 км/с. Гравитационный маневр у Марса оказался пассивным. Радиус перицентра пролетной гиперболы больше минимального и равен 8780.73 км.
- На гелиоцентрическом перелета Марс – Земля на 474.35 сутки полета химический двигатель КА обеспечивает небольшой импульс скорости 22.53 м/с.
- Этот импульс скорости обеспечивает перелет в окрестность Земли для того, чтобы осуществить у неё гравитационный маневр. Время перелета на участке Марс – Земля равно 623.9 суткам. КА встречается с Землёй для ГМ на 762.9 сутки полета (2.089 года). Интересно то, что это время немного больше времени перелета Земля – Земля для рассмотренного выше маршрута Земля – Земля – Юпитер.
- Гиперболический избыток скорости КА относительно Земли при гравитационном маневре у неё оказался равен 8.915 км/с. Он существенно больше гиперболического избытка скорости при старте от Земли (5.79 км/с), что прежде всего является эффектом от марсианского ГМ. Высота перигея пролетной гиперболы равна минимальной высоте 400 км.
- Вектор гиперболического избытка скорости после ГМ у Земли обеспечил пассивный перелет КА в окрестность Юпитера. На траектории гелиоцентрического перелета Земля – Юпитер не требуется импульс скорости. Время перелета по этому участку составляет 982.3 суток.
- КА подлетает к Юпитеру с гиперболическим избытком скорости 5.699 км/с. Для перехода КА на орбиту спутника Юпитера с подлетной гиперболы требуется тормозной импульс скорости 818.44 м/с. Продолжительность полета по всему маршруту составляет 1745.19 суток (4.778 года).

Суммарный импульс скорости оказался равен 5.4469 км/с. Для рассматриваемого варианта маршрута он равен сумме импульса скорости при старте с базовой околоземной орбиты, импульса скорости на гелиоцентрическом перелете Марс - Земля и импульса скорости при торможении при выходе на параболическую орбиту у Юпитера.

На рисунке 4.9 показана проекция на плоскость эклиптики полученной траектории перелета по маршруту Земля – Марс – Земля – Юпитер. Обозначения использованы те же, что на рисунках 4.1 и 4.2.

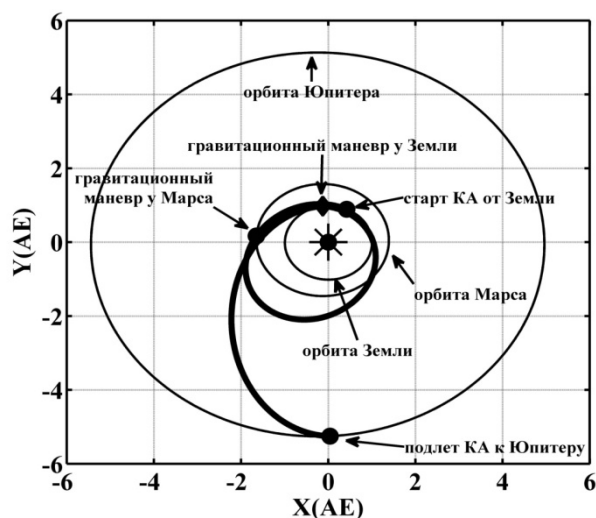


Рисунок 4.9 - Проекция на плоскость эклиптики траектории перелета по маршруту Земля - Марс - Земля - Юпитер

В таблице 4.6 представлены основные характеристики траектории перелета КА к Юпитеру при использовании маршрута Земля - Марс - Земля - Юпитер.

Таблица 4.6 - Основные характеристики траектории Земля - Марс - Земля - Юпитер (дата старта – ноябрь 2026)

дата старта	27.11.2026
гиперболический избыток скорости при старте от Земли	5683.33 м/с
требуемый импульс скорости с базовой околоземной орбиты	4605.92 м/с
дата ГМ у Марса	15.04.2027
гиперболический избыток скорости у Марса	10586.02 м/с
радиус перицентра гиперболы пролета Марса	8780.73 км
дата импульса скорости на гелиоцентрическом перелете Марс - Земля	15.03.2028
импульс скорости на гелиоцентрическом перелете Марс - Земля	22.53 м/с
дата ГМ у Земли	28.12.2028
гиперболический избыток скорости при гравитационном маневре у Земли	8914.81 м/с
высота перигея гиперболы пролета Земли	400 км
дата подлёта к Юпитеру	07.09.2031
гиперболический избыток скорости при подлете к Юпитеру	5699.00 м/с
требуемый тормозной импульс скорости в окрестности Юпитера	818.44 м/с
суммарный импульс скорости	5446.89 м/с
суммарное время полета	1745.19 сут.

Из таблицы видно, что введение в маршрут перелета ГМ у Марса дает возможность уменьшить требуемый суммарный импульс скорости примерно на 400 м/с. Это уменьшение связано с тем, что гравитационный маневр у Марса привёл к существенному уменьшению импульса скорости на гелиоцентрическом перелете Земля – Земля (с 616...734 м/с до 22.5 м/с).

Интересно и то, что одновременно с этим требуемый импульс скорости при старте с базовой околоземной орбиты увеличился с 4365...4380 м/с до 4606 м/с. Он обеспечивает гиперболический избыток скорости 5683.33 м/с при старте от Земли. Увеличился и

гиперболический избыток скорости при подлете к Юпитеру, за счет чего возрастает величина тормозного импульса в окрестности Юпитера.

Усложним схему перелета, включив в него гравитационный маневр у Венеры. Венера – более мощное небесное тело по сравнению с Марсом. Поэтому предполагается, что за счет ГМ у Венеры удастся снизить требования по энергетике для рассматриваемого перелета к Юпитеру. При выборе маршрута не является определяющим тот факт, что орбита Венеры является внутренней орбитой по отношению к орбите Земли, а рассматривается перелет к орбите Юпитера.

4.5.3 Анализ маршрута Земля – Венера – Земля - Марс - Земля - Юпитер

Анализ данных в двух предыдущих разделах показал, что для рассмотренных маршрутов величина гиперболического избытка скорости при старте от Земли велика (5135...5805 м/с). Стремление уменьшить требуемую энергетiku отлета от Земли сделало целесообразным дополнительный гравитационный маневр у Венеры, хотя и усложнило схему перелета.

Удачной оказалась схема перелета по маршруту Земля - Венера - Земля - Марс - Земля - Юпитер. Для такого маршрута удалось выбрать такие даты старта, выполнения гравитационных маневров и прилета к Юпитеру, что все гравитационные маневры оказались пассивными, и нет импульсов скоростей на всех гелиоцентрических перелетах выбранного маршрута. В итоге суммарный импульс скорости для рассмотренного маршрута равен сумме импульса скорости при старте с базовой околоземной орбиты и тормозного импульса скорости в окрестности Юпитера.

Оптимальная дата старта для рассмотренного сложного маршрута оказалась 28 мая 2023 года. Для этой даты оптимизация маршрута Земля - Венера - Земля - Марс - Земля - Юпитер привела к следующему решению:

- Все четыре гравитационных маневра оказались пассивными.
- Импульсы скоростей на всех пяти гелиоцентрических участках перелета (Земля – Венера, Венера – Земля, Земля - Марс, Марс - Земля, Земля - Юпитер) оказались равны нулю.
- При старте КА с базовой околоземной орбиты импульс скорости оказался довольно малым (3.694 км/с), что соответствует практически минимальному импульсу при прямом полете к Венере. Он обеспечил минимальную величину гиперболического избытка скорости при старте от Земли при полете к Венере (3.245 км/с).

- Вектор гиперболического избытка скорости обеспечил перелет к Венере на гелиоцентрическом перелете Земля – Венера без импульса скорости. Время перелета на этом участке составило 146.5 суток.
- Гиперболический избыток скорости при подлете к Венере равен 5.595 км/с. Гравитационный маневр у Венеры оказался пассивным. Радиус перицентра пролетной гиперболы больше минимального и равен 15037.7 км.
- Вектор гиперболического избытка скорости при отлете от Венеры обеспечил перелет в окрестность Земли (для осуществления ГМ) без импульса скорости на гелиоцентрическом перелете Венера – Земля. Время перелета на этом участке – 315.8 суток. КА встречается с Землёй для ГМ на 462.3 сутки полета (1.27 года). Интересно то, что это время существенно меньше (более чем на год) времени перелета Земля – Земля (2.3 года) для рассмотренного ранее маршрута Земля – Земля – Юпитер. Следовательно, использование ГМ у Венеры сократило время перелета на этом участке маршрута.
- Гиперболический избыток скорости при подлете к Земле для первого ГМ у неё равен 8.738 км/с. Гравитационный маневр у Земли оказался пассивным. Радиус перицентра пролетной гиперболы больше минимального и равен 8290.2 км.
- Вектор гиперболического избытка скорости при отлете от Земли после первого ГМ обеспечил перелет в окрестность Марса (для осуществления ГМ) без импульса скорости на гелиоцентрическом перелете Земля – Марс. Время перелета на этом участке – 161.5 суток. КА встречается с Марсом для ГМ на 623.8 сутки полета (1.71 года). Интересно то, что это время существенно больше (на 479 суток) времени перелета Земля – Марс (144 суток) для рассмотренного ранее маршрута Земля – Марс – Земля – Юпитер. Следовательно, использование сложной схемы перелета с 4 гравитационными маневрами увеличивает время реализации всего маршрута.
- Гиперболический избыток скорости при подлете к Марсу равен 10.119 км/с. Гравитационный маневр у Марса оказался пассивным. Радиус перицентра пролетной гиперболы – 4420.88 км.
- Вектор гиперболического избытка скорости при отлете от Марса обеспечил перелет в окрестность Земли (для осуществления второго ГМ) без импульса скорости на гелиоцентрическом перелете Марс – Земля. Время перелета на этом участке составило 654 суток. КА встречается с Землёй для второго ГМ на 1277 сутки полета (3.5 года).
- Гиперболический избыток скорости КА относительно Земли при втором гравитационном маневре у неё оказался равен 11.647 км/с. Он существенно больше гиперболического избытка скорости при старте от Земли (3.245 км/с) и при первом

гравитационном маневре у Земли (8.738 км/с), что прежде всего является эффектом от цепочки рассматриваемых гравитационных маневров. Второй гравитационный маневр у Земли является пассивным. Радиус перигея пролетной гиперболы больше минимального и равен 10073.7 км.

- Вектор гиперболического избытка скорости после ГМ у Земли обеспечил пассивный перелет КА в окрестность Юпитера. На траектории гелиоцентрического перелета Земля – Юпитер импульсов скорости не требуется. Время перелета по этому участку составляет 1060.7 суток (2.9 года).

- КА подлетает к Юпитеру с гиперболическим избытком скорости 5.581 км/с. Для перехода КА на орбиту спутника Юпитера с подлетной гиперболы требуется тормозной импульс скорости 785.55 м/с. Продолжительность полета по всему маршруту составляет 2338.6 суток (6.4 года).

Суммарный импульс скорости оказался 4.4799 км/с. Для рассматриваемого варианта маршрута он равен сумме импульса скорости при старте с базовой околоземной орбиты и импульса скорости при торможении при выходе на параболическую орбиту у Юпитера.

На рисунке 4.10 показана проекция на плоскость эклиптики для траектории перелета по маршруту Земля – Венера – Земля – Марс – Земля – Юпитер. Обозначения остались те же, что и на предыдущих рисунках.

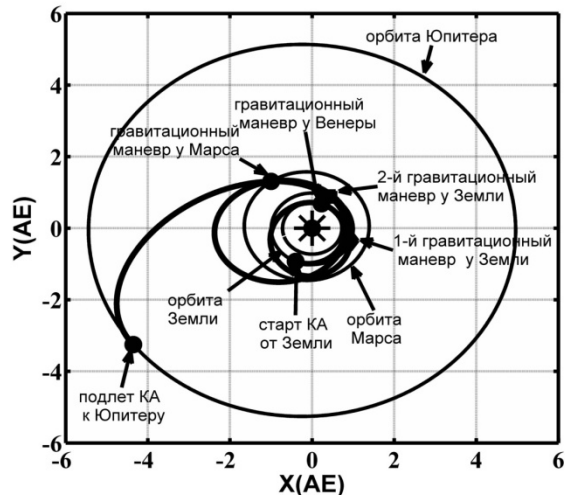


Рисунок 4.10 - Проекция на плоскость эклиптики траектории перелета Земля - Венера - Земля - Марс - Земля - Юпитер

В таблице 4.7 представлены основные характеристики траектории перелета КА к Юпитеру при использовании маршрута Земля - Венера - Земля - Марс - Земля - Юпитер.

Таблица 4.7 - Основные характеристики траектории Земля - Венера - Земля - Марс - Земля - Юпитер (дата старта май 2023)

дата старта	28.05.2023
модуль вектора гиперболического избытка скорости при старте от Земли	3245.72 м/с
требуемый импульс скорости с базовой околоземной орбиты	3694.35 м/с
дата ГМ у Венеры	22.10.2023
гиперболический избыток скорости у Венеры	5595.38 м/с
дата первого ГМ у Земли	02.09.2024
гиперболический избыток скорости у Земли при первом гравитационном маневре у неё	8738.12 м/с
дата ГМ у Марса	10.02.2025
гиперболический избыток скорости у Марса	10119 м/с
дата второго ГМ у Земли	26.11.2026
гиперболический избыток скорости при втором гравитационном маневре у Земли	11647.23 м/с
дата подлёта к Юпитеру	22.10.2029
гиперболический избыток скорости при подлете к Юпитеру	5581.6 м/с
требуемый импульс скорости при торможении в окрестности Юпитера	785.55 м/с
суммарный импульс скорости	4479.9 м/с
суммарное время полета	2339 сут.

Из таблицы видно, что на анализируемом маршруте полета при старте с базовой околоземной орбиты для достижения космическим аппаратом окрестности Юпитера нужно обеспечить импульс скорости 3694.78 м/с. Включение маршевого двигателя КА требуется только в окрестности Юпитера.

Среди недостатков анализируемого маршрута можно отметить следующие два: 1) большое время выполнения маршрута – 6.4 года (в ранее рассмотренных маршрутах оно было равно 4.3...4.55 года); 2) использование большего числа разных планет, что делает практически невозможной аналогичную схему реализации маршрута для других рассматриваемых эпох старта.

Приведем анализ маршрута, который не использует гравитационный маневр у Марса, уменьшив на единицу количество гравитационных маневров. Таким интересным маршрутом является маршрут с тремя гравитационными маневрами: Земля - Венера - Земля - Земля - Юпитер.

4.5.4 Анализ маршрута Земля – Венера – Земля - Земля - Юпитер

На рассмотренном временном интервале дат старта удалось найти два варианта использования рассматриваемого маршрута. Первый вариант – со стартом в феврале 2025 года, второй вариант – со стартом в ноябре 2029 года.

В обоих случаях все гравитационные маневры оказались пассивными. В первом варианте реализации маршрута Земля – Венера – Земля – Земля – Юпитер на гелиоцентрических участках Земля – Земля и Земля – Юпитер импульсы скорости оказались нулевыми. На двух других гелиоцентрических участках (Земля – Венера и

Венера – Земля) импульсы скорости ненулевые, но относительно небольшие (203.6 м/с и 307.3 м/с).

Для второго варианта даты старта (ноябрь 2029 год) импульсы скорости на трех из четырех гелиоцентрических участков перелета (Земля – Венера, Венера – Земля, Земля – Юпитер) оказались нулевыми. Только на гелиоцентрическом участке Земля – Земля было необходимо обеспечить маленький импульс скорости величиной 17 м/с.

В первом варианте рассматриваемого маршрута суммарный импульс скорости равен сумме четырех импульсов скорости:

- импульса скорости при старте с базовой околоземной орбиты,
- импульсов скорости на гелиоцентрических участках перелета Земля – Венера и Венера – Земля
- тормозного импульса скорости в окрестности Юпитера.

В втором варианте рассматриваемого маршрута суммарный импульс скорости равен сумме трех импульсов скорости:

- импульса скорости при старте с базовой околоземной орбиты,
- импульса скорости на гелиоцентрическом участке перелета Земля – Земля
- тормозного импульса скорости в окрестности Юпитера.

Характеристики обоих вариантов рассматриваемого маршрута приведены в таблице 4.8.

Таблица 4.8 - Основные характеристики траектории Земля – Венера – Земля – Земля – Юпитер для двух вариантов дат старта

	1-ый вариант	2-ой вариант
дата старта	01.02.2025	15.11.2029
гиперболический избыток скорости при старте от Земли	3620.45 м/с	3478.56 м/с
требуемый импульс скорости с базовой околоземной орбиты	3805.85 м/с	3762.33 м/с
дата выполнения импульса скорости на гелиоцентрическом перелете Земля - Венера	21.05.2025	Нет импульса
величина импульса скорости на гелиоцентрическом перелете Земля - Венера	203.62 м/с	0 м/с
дата ГМ у Венеры	25.07.2025	04.04.2030
гиперболический избыток скорости у Венеры	6259.15 м/с	5411.93 м/с
дата выполнения импульса скорости на гелиоцентрическом перелете Венера - Земля	03.02.2026	Нет импульса
величина импульса скорости на гелиоцентрическом перелете Венера - Земля	307.26 м/с	0 м/с
дата первого ГМ у Земли	01.01.2027	15.02.2031
гиперболический избыток скорости у Земли при первом гравитационном маневре у неё	10598.93 м/с	9558.74 м/с
дата выполнения импульса скорости на гелиоцентрическом перелете Земля - Земля	Нет импульса	14.12.2031

величина импульса скорости на гелиоцентрическом перелете Земля - Земля	0 м/с	16.85 м/с
дата второго ГМ у Земли	03.12.2028	22.05.2033
гиперболический избыток скорости при втором гравитационном маневре у Земли	10609.31 м/с	9489.25 м/с
дата подлёта к Юпитеру	05.01.2032	08.11.2035
гиперболический избыток скорости при подлете к Юпитеру	5905.05 м/с	5933.21 м/с
требуемый импульс скорости при торможении в окрестности Юпитера	877.39 м/с	885.60 м/с
суммарный импульс скорости	5194.12 м/с	4664.78 м/с
суммарное время полета	2529.28 сут.	2184.14 сут.

При сравнении этих вариантов видно большое преимущество второго варианта.

Для него суммарный импульс скорости существенно меньше, чем для первого варианта (на 534 м/с), как и время реализации маршрута (на 345 суток – почти на год).

Опишем представленные в таблице варианты рассматриваемого маршрута. Первое значение каждой из характеристик будет соответствовать первому варианту даты старта, второе значение – второму варианту.

- При старте КА с базовой околоземной орбиты импульс скорости оказался относительно малым (3.805, 3.762 км/с). Он обеспечил при старте от Земли величину гиперболического избытка скорости 3.620, 3.479 км/с.
- На второй половине траектории гелиоцентрического перелета Земля – Венера для первого варианта даты старта маршевый двигатель КА должен обеспечить импульс скорости 203.6 м/с. Этот импульс обеспечивает подлет КА к Венере для ГМ у неё. КА подлетает к Венере на 174 сутки полета. Для второго варианта даты старта импульса скорости на перелете Земля – Венера нет. В этом случае КА подлетает к Венере на 140 сутки полета.
- Гиперболический избыток скорости при подлете к Венере оказался довольно большим (6.259, 5.412 км/с). Пассивный гравитационный маневр у Венеры проводится на минимальной высоте пролетной гиперболы.
- Для первого варианта даты старта вектор гиперболического избытка скорости при отлете от Венеры обеспечил перелет в окрестность Земли (для первого ГМ у неё) с импульсом скорости на восходящей ветви эллиптической орбиты при подлете к афелию этой орбиты. Величина этого импульса скорости оказалась 307.26 м/с. Время гелиоцентрического перелета Венера – Земля составляет 525 суток. Для второго варианта даты старта импульса скорости на гелиоцентрическом участке Венера – Земля нет. В этом случае время перелета Венера – Земля оказывается равным 317 суткам.

- КА встречается с Землёй для первого ГМ у неё на 699, 457 сутки полета (1.94, 1.25 года). Гиперболический избыток скорости при подлете к Земле для первого ГМ у неё оказался равным 10.599 и 9.559 км/с. Первый гравитационный маневр у Земли оказался пассивным. Он проводится на минимальной высоте пролетной гиперболы.
- Для первого варианта даты старта вектор гиперболического избытка скорости при отлете от Земли после первого ГМ обеспечил гелиоцентрический перелет Земля – Земля (для второго ГМ у неё) без импульса скорости на гелиоцентрическом перелете. Для второго варианта даты старта на гелиоцентрическом перелете Земля – Земля требуется маленький импульс скорости (16.85 м/с). Он сообщается КА 14 декабря 2031 года. Время перелета на этом участке Земля – Земля составило 702 и 827 суток. КА встречается с Землей для второго ГМ у неё на 1401 и 1284 сутки полета (3.84, 3.52 года).
- Гиперболический избыток скорости при подлете к Земле для второго ГМ у неё оказался равным 10.609 и 9.489 км/с. Второй гравитационный маневр у Земли оказался пассивным. Он проводится на минимальной высоте пролетной гиперболы.
- Вектор гиперболического избытка скорости при отлете от Земли после второго ГМ обеспечил перелет в окрестность Юпитера без импульса скорости на гелиоцентрическом перелете Земля – Юпитер. Время перелета на этом участке составило 1128 и 827 суток.
- КА подлетает к Юпитеру с гиперболическим избытком скорости равным 5.905 и 5.933 км/с. Для перехода КА на орбиту спутника Юпитера с подлетной гиперболы требуется тормозной импульс скорости равный 290.9 и 293.7 м/с. Продолжительность полета по всему маршруту составляет 2529 и 2184 суток (6.92, 5.98 года).

Суммарный импульс скорости для первого варианта даты старта оказался довольно большим – 4.608 км/с. Он на 653 м/с больше суммарного импульса скорости для ранее описанного маршрута (Земля – Венера – Земля – Марс – Земля – Юпитер) с четырьмя гравитационными маневрами (3.955 км/с). Для второго варианта даты старта суммарный импульс скорости небольшой – 4.074 км/с. Он очень близок к варианту маршрута с четырьмя гравитационными маневрами, описанному ранее. Его преимущество в достаточно малом суммарном времени полета (меньше 6 лет). Для маршрута с четырьмя гравитационными маневрами полное время полета составляет 6.4 года.

На рисунке 4.11 показана проекция на плоскость эклиптики траектории перелета по маршруту Земля – Венера – Земля – Земля – Юпитер для даты старта в 2025 году (левый рисунок) и в 2029 году (правый рисунок).

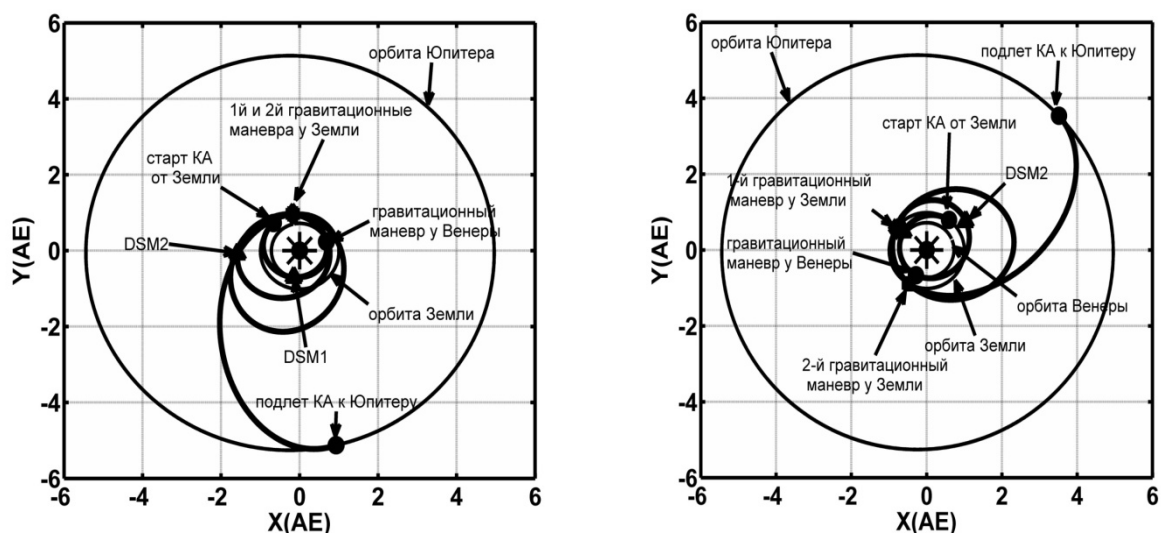


Рисунок 4.11 – Проекция на плоскость эклиптики траектории перелета КА по маршруту Земля – Венера – Земля – Земля – Юпитер. левая часть рисунка - для даты старта 1 февраля 2025 года. правая часть рисунка - для даты старта 15 ноября 2029 года

4.5.5 Сравнительный анализ рассмотренных вариантов маршрутов к Юпитеру

В таблице 4.9 размещены важнейшие характеристики вариантов маршрутов, проанализированных в данном разделе.

Таблица 4.9 - Основные характеристики рассмотренных маршрутов полета к Юпитеру

Номер маршрута	Маршрут	Дата старта	Суммарный импульс скорости	Время перелета к Юпитеру
1	Земля - Земля - Юпитер	29.08.2021	5778.66 м/с	4.547 года
2	Земля - Земля - Юпитер	30.09.2022	5853.94 м/с	4.712 года
3	Земля - Марс - Земля - Юпитер	27.11.2026	5446.89 м/с	4.778 года
4	Земля - Венера - Земля - Марс - Земля - Юпитер	28.05.2023	4479.90 м/с	6.404 года
5	Земля - Венера - Земля - Земля - Юпитер	01.02.2025	5194.12 м/с	6.925 года
6	Земля - Венера - Земля - Земля - Юпитер	15.11.2029	4664.78 м/с	5.980 года

В таблице помещены суммарный импульс скорости (4-ый столбец) и полное время полета к Юпитеру (5 столбец) для всех вариантов рассмотренных маршрутов. Варианты пронумерованы так, чтобы номер варианта можно было использовать как ссылку на маршрут. Если даты старта разные, то номера маршрута тоже разные.

Из таблицы видно, что с энергетической точки зрения предпочтительны варианты маршрута с номерами 4 и 6. В варианте номер 4 используется четыре гравитационных маневра у трех различных планет. Суммарный импульс скорости при этом меньше 4.5

км/с. В 6-ом варианте маршрута используются три гравитационных маневра у двух планет. Суммарный импульс скорости немного больше 4.66 км/с. Определенным недостатком этих вариантов является большое время перелета к Юпитеру: немного больше 6.4 лет в 4-ом варианте и почти 6 лет в 6-ом варианте маршрута.

Варианты с одним гравитационным маневром у Земли требуют большей энергии, чем варианты со сложными схемами перелета. Суммарный импульс скорости в них примерно равен 5.78...5.85 км/с. Их преимуществом является небольшое время перелета (порядка 4.6 года) и малая ограниченность даты старта. Окна запуска отстоят друг от друга на синодический период Юпитера. Это очень серьезное преимущество схем перелета с гравитационными маневрами только у Земли.

4.5.6 Проектно-баллистический анализ рассмотренных вариантов маршрутов к Юпитеру

Рассмотрим транспортную космическую систему, базирующуюся на ракетеносителе «Ангара А5», химическом разгонном блоке (ХРБ) «КВТК» и химической двигательной установке самого КА. Из материалов государственного космического научно-производственного центра «ГКНПЦ им. М.В. Хруничева» [213] следует, что космическая транспортная система на базе РН «Ангара А5» при старте с космодрома «Плесецк» может вывести на базовую низкую околоземную орбиту КА общей массой 23530 кг. Основные характеристики ХРБ «КВТК» приняты такими: конечная масса 3330 кг; максимальный запас рабочего топлива 19600 кг, удельный импульс 470 с. ХРБ «КВТК» должен обеспечивать старт КА с базовой околоземной орбиты и выведение КА на отлетную от Земли гиперболу. Удельный импульс жидкостной ракетной двигательной установки самого КА считается равным 310 секундам и обеспечивает импульс скорости на гелиоцентрических участках траектории перелета и в окрестности планеты назначения (Юпитера).

В таблице 4.10 представлены массовые характеристики КА для всех вариантов маршрутов с использованием нумерации маршрутов из таблицы 3.8.

Таблица 4.10 - Массовые характеристики КА для рассмотренных маршрутов полета к Юпитеру

номер маршрута	1	2	3	4	5	6
требуемая масса топлива ХРБ «КВТК» для обеспечения гиперболического избытка скорости при отлете от Земли (кг)	14433.2	14403.0	14867.8	12973.4	13225.8	13128.0
масса КА после отделения ХРБ	5766.8	5797.0	5332.2	7226.6	6974.2	7072.0

«КВТК» (кг)						
требуемая масса топлива для импульсов скорости на гелиоцентрических участках траектории (кг)	1058.0	1243.9	39.4	0	1078.8	39.1
масса КА при подлете к Юпитеру (кг)	4708.8	4553.0	5292.9	7226.6	5895.4	7032.9
требуемая масса топлива для торможения в окрестности Юпитера (кг)	1068.2	1000.8	1249.2	1645.6	1478.0	1777.3
конечная масса КА (кг)	3640.6	3552.2	4043.6	5581.0	4417.5	5255.6

Из таблицы видно, что максимальная масса КА, доставляемая в окрестность Юпитера получается при использовании маршрутов номер 4 и 6. При использовании 4-ого маршрута (Земля – Венера – Земля – Марс – Земля – Юпитер) на орбиту около Юпитера можно вывести КА массой 5581.0 кг. При использовании 6-ого маршрута на орбиту около Юпитера можно вывести КА массой 5255.6 кг. К сожалению, как отмечено выше, время выполнения миссии этих маршрутов довольно велико. Другим недостатком является ограничения по возможным датам старта. Например, использовать маршрут Земля – Венера – Земля – Марс – Земля – Юпитер в рассмотренном диапазоне дат старта от 2020 до 2030 года можно только для даты старта в 2023 году.

4.6 АНАЛИЗ СЛОЖНЫХ СХЕМ ПОЛЕТА К САТУРНУ С ГРАВИТАЦИОННЫМИ МАНЕВРАМИ У ЗЕМЛИ, ВЕНЕРЫ И ЮПИТЕРА ДЛЯ КА С ХИМИЧЕСКИМИ РАКЕТНЫМИ ДВИГАТЕЛЯМИ

В данном разделе проанализированы сложные схемы полета к Сатурну для ближайших окон запуска с использованием гравитационных маневров у Земли, Венеры и Юпитера и дополнительных импульсов скорости на гелиоцентрических участках траектории [34]. Предполагается, что КА находится на низкой околоземной орбите, старт с нее и выход на гиперболическую траекторию отлета от Земли обеспечивает химический разгонный блок, который затем отделяется от КА. Предполагается, что КА оснащен собственной химической двигательной установкой. Она может обеспечивать импульсные приращения скорости на всей траектории полета. В частности, она может обеспечивать маневры вдали от каких-либо небесных тел, активные гравитационные маневры и, наконец, торможение КА в окрестности планеты назначения – Сатурна.

Тормозной импульс скорости в окрестности планеты назначения рассчитывается из условия перевода КА на параболическую орбиту с гиперболы пролета Сатурна. Ее радиус перицентра выбран равным 59232 км.

Задача нахождения минимальной требуемой характеристической скорости для исследуемой схемы полета формулируется как задача безусловной минимизации функции большого числа переменных. Суммарный импульс скорости (требуемая характеристическая скорость), обеспечивающий отлет КА от Земли, и все активные маневры и в окрестности планеты назначения рассматриваются как минимизируемый функционал задачи. Дата старта, время перелета от планеты к планете, моменты времени осуществления импульсов скорости в глубоком космосе и компоненты векторов гиперболических избытков скорости отлета от планет рассматриваются выбираемыми параметрами оптимизируемой схемы полета.

Оптимизированы три схемы (маршрута) полета к Сатурну:

- Земля – Юпитер – Сатурн;
- Земля – Земля – Юпитер – Сатурн и
- Земля – Венера – Венера – Земля – Юпитер – Сатурн.

Ниже представим основные характеристики оптимальных траекторий для этих маршрутов перелета.

4.6.1 Анализ маршрута Земля – Юпитер – Сатурн

Минимизация суммарного импульса скорости для рассматриваемого маршрута для даты старта 2034 году привела к решениям, представленным следующими характеристиками:

- При старте КА с базовой околоземной орбиты импульс скорости оказался большим (6.375 км/с) и обеспечил большую величину гиперболического избытка скорости при старте от Земли (8.902 км/с).
- Продолжительность полета на участке Земля - Юпитер равна 1064 дней и КА подлетает к Юпитеру с гиперболическим избытком скорости 5.862 км/сек.
- Гравитационный маневр у Юпитера оказался пассивным.
- Продолжительность полета на участке Юпитер - Сатурн равна 3749 дней.
- КА подлетает к Сатурну с относительно небольшим гиперболическим избытком скорости (3.434 км/с). Из-за этого для перехода на параболическую орбиту требуется небольшой импульс скорости в окрестности Сатурна.
- Продолжительность полета по всему маршруту составляет 4814 дней (13.18 года).

Очень важное обстоятельство - гравитационный маневр оказался пассивным. Приятным является и то, что импульсы скорости на гелиоцентрических участках (Земля – Юпитер и Юпитер – Сатурн) оказались нулевыми. Поэтому для рассматриваемой схемы полета суммарный импульс скорости равен сумме импульса скорости при старте с низкой околоземной орбиты и импульса скорости при торможении в окрестности Сатурна.

На рисунке 4.12 показана траектория перелета КА по маршруту Земля – Юпитер – Сатурн с датой старта в 2034 году. В центре рисунка с нулевыми координатами расположено Солнце. Тонкими линиями изображены орбиты Земли, Юпитера и Сатурна. На жирной линии, обозначающей траекторию КА, выделены характерные точки: точка старта, точки выполнения гравитационных маневров, точка подлета КА к Сатурну.

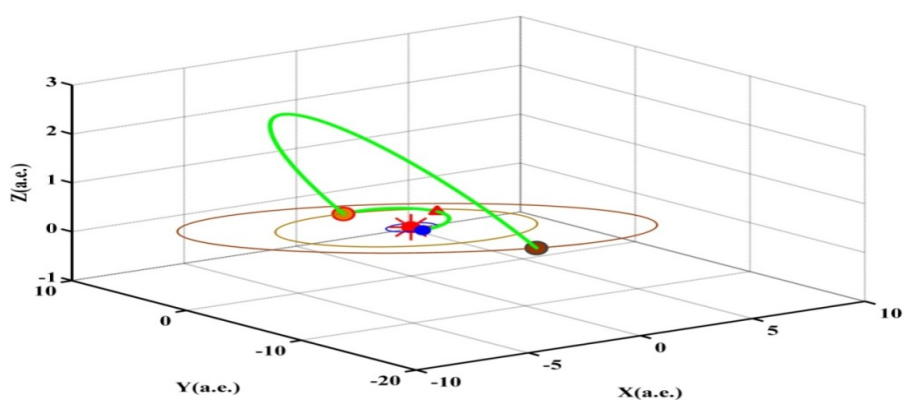


Рисунок 4.12 - Траектория перелета Земля - Юпитер - Сатурн (эпоха запуска 2034 год)

В таблице 4.11 представлены основные характеристики траектории перелета по анализируемому маршруту для двух рассмотренных дат старта.

Таблица 4.11 - Основные характеристики траектории Земля - Юпитер - Сатурна (эпохи старта 2034 года)

дата старта	22.06.2034
гиперболический избыток скорости при старте от Земли	8902.4м/с
требуемый импульс скорости с базовой околоземной орбиты	6375.1м/с
Дата выполнения дополнительного импульса скорости	05.04.2035
Величина импульса скорости	21.5 м/с
Время перелета Земля-Юпитер	1064дней
дата ГМ у Юпитера	21.05.2037
гиперболический избыток скорости при гравитационном маневре у Юпитера	5862.6м/с
дата подлёта КА к Сатурну	14.07.2047
Время перелета Юпитер-Сатурн	3750
гиперболический избыток скорости при подлете к Сатурну	3434.6 м/с
требуемый импульс скорости при торможении в окрестности Сатурна	164.4 м/с
суммарный импульс скорости	6561.1 м/с
суммарное время полета	4814 дней

4.6.2 Анализ маршрута Земля – Земля – Юпитер – Сатурн

Оптимизация рассматриваемого маршрута Земля – Земля – Юпитер – Сатурн для эпохи старта в 2032 году привела к следующему решению:

- Гравитационные маневры у Земли, и у Юпитера оказались пассивными. Импульсы скоростей на двух гелиоцентрических участках (Земля - Юпитер, Юпитер - Сатурн) из трех имеющихся на маршруте оказались равны нулю. В итоге суммарный импульс скорости оказался равен сумме импульса скорости при старте с базовой околоземной орбиты, импульса скорости на гелиоцентрическом перелете Земля - Земля и импульса скорости при торможении в окрестности Сатурна.

- При старте КА с базовой околоземной орбиты импульс скорости оказался довольно большим (4.374 км/с). Он обеспечил большую величину гиперболического избытка скорости при старте от Земли (5.196 км/с).

- Время перелета на гелиоцентрическом перелете Земля – Земля составило 678.5 суток. На этом участке перелета на 368.4 сутки полета химический двигатель КА обеспечивает импульс скорости 600 м/с. Этот импульс скорости обеспечивает перелет в окрестность Земли для того, чтобы осуществить у неё гравитационный маневр.

- Гиперболический избыток скорости при подлете к Земле оказался равным 9.334 км/с. Гравитационный маневр у Земли оказался пассивным. Радиус перицентра пролетной гиперболы больше минимального и равен 6778 км.

- Вектор гиперболического избытка скорости после ГМ у Земли обеспечил пассивный перелет КА в окрестность Юпитера. На траектории гелиоцентрического перелета Земля – Юпитер не требуется импульс скорости. Время перелета по этому участку составляет 958.8 суток.

- КА подлетает к Юпитеру с гиперболическим избытком скорости 5.767 км/с. Гравитационный маневр у Юпитера оказался пассивным. Радиус перицентра пролетной гиперболы больше минимального и равен 257105.34 км.

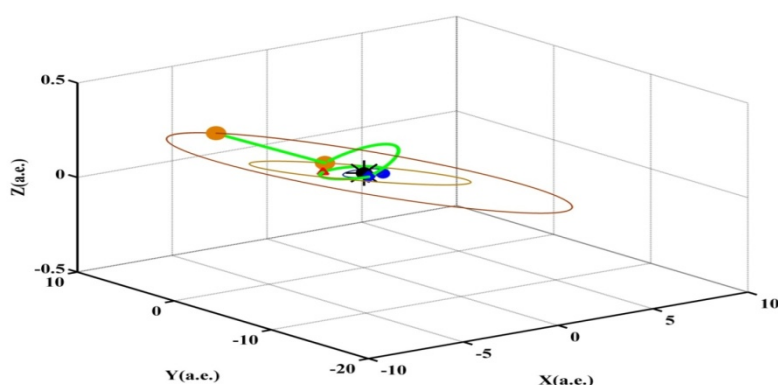
- Вектор гиперболического избытка скорости после ГМ у Юпитера обеспечил пассивный перелет КА в окрестность Сатурна. На траектории гелиоцентрического перелета Юпитер – Сатурн не требуется импульс скорости. Время перелета по этому участку составляет 1426.2 суток.

- КА подлетает к Сатурну с гиперболическим избытком скорости 8.067 км/с. Для перехода КА на параболическую орбиту с гиперболы требуется тормозной импульс

скорости 897.9 м/с. Продолжительность полета по всему маршруту составляет 3063.49 суток (8.387 года).

Суммарный импульс скорости оказался равен 5.8718 км/с. Для рассматриваемого варианта маршрута он равен сумме импульса скорости при старте с базовой околоземной орбиты, импульса скорости на гелиоцентрическом перелете Земля - Земля и импульса скорости при торможении при выходе на параболическую орбиту у Сатурна.

На рисунке 4.13 показана траектория перелета по маршруту Земля – Земля – Юпитер – Сатурн.



(в) в пространстве

Рисунок 4.13 - Траектория перелета по маршруту Земля – Земля – Юпитер – Сатурн. В таблице 4.12 представлены основные характеристики траектории перелета КА к Сатурну при использовании маршрута Земля – Земля – Юпитер – Сатурн.

Таблица 4.12 - Основные характеристики траектории Земля – Земля – Юпитер – Сатурн

дата старта	28.07.2032
гиперболический избыток скорости при старте от Земли	5195.78 м/с
требуемый импульс скорости с базовой околоземной орбиты	4373.76м/с
Дата выполнение дополнительного импульса	29.07.2033
импульс скорости на гелиоцентрическом перелете Земля - Земля	600м/сек
Время перелета Земля-Земля	678.5 сут
дата ГМ у Земли	06.06.2034
гиперболический избыток скорости у Земли	9334.44 м/с
радиус перицентра гиперболы пролета Земли	6778 км
Время перелета Земля-Юпитер	958.9сут
дата ГМ у Юпитера	02.01.2037
гиперболический избыток скорости у Юпитера	5767.02 м/с
радиус перицентра гиперболы пролета Юпитера	257105.34
Время перелета Юпитер-Сатурн	1426.2
Дата подлета к Сатурну	16.12.2040
гиперболический избыток скорости при подлете к Сатурну	8067.26
требуемый тормозной импульс скорости в окрестности Сатурна	897.95 м/с
суммарный импульс скорости	5871.78 м/с
суммарное время полета	3063.49 сут.

4.6.3 Анализ маршрута Земля – Венера – Венера – Земля – Юпитер – Сатурн (дата старта-2018г)

Оптимизация рассматриваемого маршрута Земля – Венера – Венера – Земля – Юпитер – Сатурн для эпохи старта в 2018 году привела к следующему решению:

- Гравитационные маневры у Венеры, Земли, и у Юпитера оказались пассивными. Импульсы скоростей на четырех гелиоцентрических участках (Земля – Венера, Венера – Земля, Земля – Юпитер, Юпитер – Сатурн) из пяти имеющихся на маршруте оказались равны нулю. В итоге суммарный импульс скорости оказался равен сумме импульса скорости при старте с базовой околоземной орбиты, импульса скорости на гелиоцентрическом перелете Венера – Венера и импульса скорости при торможении в окрестности Сатурна.

- При старте КА с базовой околоземной орбиты импульс скорости оказался 3.850 км/с). Он обеспечил величину гиперболического избытка скорости при старте от Земли (3.749 км/с).

- Время перелета на гелиоцентрическом перелете Земля – Венера составило 156.3 суток. Гиперболический избыток скорости при подлете к Венере оказался равным 6.257 км/с. Первый гравитационный маневр у Венеры оказался пассивным.

- Время перелета на гелиоцентрическом перелете Венера – Венера составило 406.7 суток. На участке перелета химический двигатель КА обеспечивает импульс скорости 600 м/с. Этот импульс скорости обеспечивает перелет в окрестность Венеры для того, чтобы осуществить у неё второй гравитационный маневр. Второй гравитационный маневр у Венеры оказался пассивным. Гиперболический избыток скорости при втором подлете к Венере оказался равным 12.458 км/с.

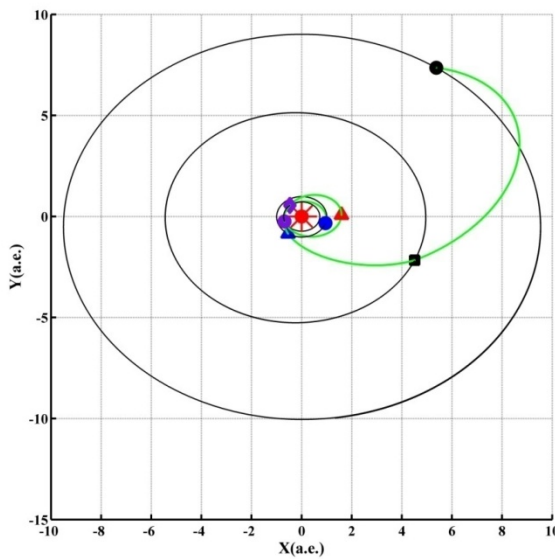
- Вектор гиперболического избытка скорости после второго ГМ у Венеры обеспечил пассивный перелет КА в окрестность Земли. Время перелета на гелиоцентрическом перелете Венера – Земля составило 59.9 суток. Гравитационный маневр у Земли оказался пассивным. Гиперболический избыток скорости при подлете к Земле оказался равным 17.908 км/с.

- Вектор гиперболического избытка скорости после ГМ у Земли обеспечил пассивный перелет КА в окрестность Юпитера. Время перелета на гелиоцентрическом перелете Земля – Юпитера составило 541.7 суток. Гравитационный маневр у Юпитера оказался пассивным. Гиперболический избыток скорости при подлете к Юпитеру оказался равным 9.895 км/с.

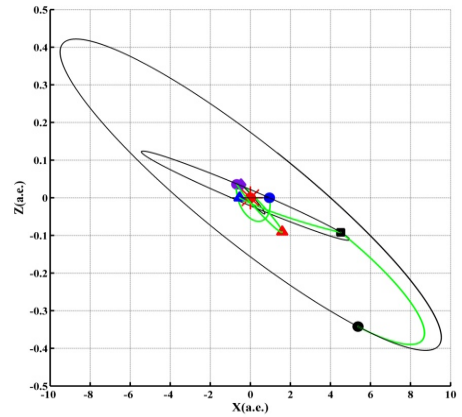
- Вектор гиперболического избытка скорости после ГМ у Юпитера обеспечил пассивный перелет КА в окрестность Сатурна. Время перелета на гелиоцентрическом перелете Земля – Юпитера составило 3000 дней. КА подлетает к Сатурну с гиперболическим избытком скорости 4.882 км/с. Для перехода КА на параболическую орбиту с гиперболы требуется тормозной импульс скорости 331.4 м/с. Продолжительность полета по всему маршруту составляет 4164.5 суток (11.394 года).

Суммарный импульс скорости оказался равен 5.173 км/с.

На рисунке 4.14 показана траектория перелета по маршруту Земля – Венера – Венера – Земля – Юпитер – Сатурн для даты старта в 2018ом году.



(а) проекция на плоскость эклиптики



(б) проекция на плоскость XZ

Рисунок 4.14 - Траектория перелета по маршруту Земля – Земля – Юпитер – Сатурн.

В таблице 4.13 представлены основные характеристики траектории перелета КА к Сатурну при использовании маршрута Земля – Земля – Юпитер – Сатурн.

Таблица 4.13 - Основные характеристики траектории Земля – Венера – Венера – Земля – Юпитер – Сатурн

дата старта	04.09.2018
гиперболический избыток скорости при старте от Земли	3748.5 м/с
требуемый импульс скорости с базовой околоземной орбиты	3850.2м/с
Время перелета Земля-Венера	156.3сут
гиперболический избыток скорости при первом гравитационном маневре у Венеры	6.257м/сек
Дата выполнения первого ГМ у Венеры	07.02.2019
Время перелета Венера-Венера	406.7сут
Дата выполнения дополнительного импульса	05.04.2035
импульс скорости на гелиоцентрическом перелете Венера - Венера	600м/с
Дата выполнения второго ГМ у Венеры	02.03.2020
гиперболический избыток скорости при втором гравитационном маневре у Венеры	12458.3м/сек

Время перелета Венера-Земля	59.91 сут
Дата выполнения ГМ у Земли	19.05.2020
гиперболический избыток скорости при гравитационном маневре у Земли	17908.4 м/с
Время перелета Земля-Юпитер	541.6 сут
дата выполнения ГМ у Юпитера	11.11.2021
гиперболический избыток скорости при гравитационном маневре у Юпитера	9895.4 м/с
Время перелета Юпитер-Сатурн	3000.0 сут
Дата подлета КА к Сатурну	28.01.2030
гиперболический избыток скорости при подлете к Сатурну	4881.7
требуемый тормозной импульс скорости в окрестности Сатурна	331.4 м/с
суммарный импульс скорости	5172.7 м/с
суммарное время полета	4164.5 суток (11.394 года)

4.6.4 Анализ маршрута Земля – Венера – Венера – Земля – Юпитер – Сатурн (дата старта-2039г)

Оптимизация рассматриваемого маршрута Земля – Венера – Венера – Земля – Юпитер – Сатурн для эпохи старта в 2032 году привела к следующему решению:

- Гравитационные маневры у Венеры, Земли, и у Юпитера оказались пассивными. Импульсы скоростей на четырех гелиоцентрических участках (Земля – Венера, Венера – Земля, Земля – Юпитер, Юпитер – Сатурн) из пяти имеющихся на маршруте оказались равны нулю. В итоге суммарный импульс скорости оказался равен сумме импульса скорости при старте с базовой околоземной орбиты, импульса скорости на гелиоцентрическом перелете Венера – Венера и импульса скорости при торможении в окрестности Сатурна.

- При старте КА с базовой околоземной орбиты импульс скорости оказался 4.646 км/с). Он обеспечил величину гиперболического избытка скорости при старте от Земли (4.169 км/с).

- Время перелета на гелиоцентрическом перелете Земля – Венера составило 215.2 суток. Гиперболический избыток скорости при подлете к Венере оказался равным 6.284 км/с. Первый гравитационный маневр у Венеры оказался пассивным.

- Время перелета на гелиоцентрическом перелете Венера – Венера составило 399.9 суток. На участке перелета химический двигатель КА обеспечивает импульс скорости 1.433 м/с. Этот импульс скорости обеспечивает перелет в окрестность Венеры для того, чтобы осуществить у неё второй гравитационный маневр. Второй гравитационный маневр у Венеры оказался пассивным. Гиперболический избыток скорости при втором подлете к Венере оказался равным 14.483 км/с.

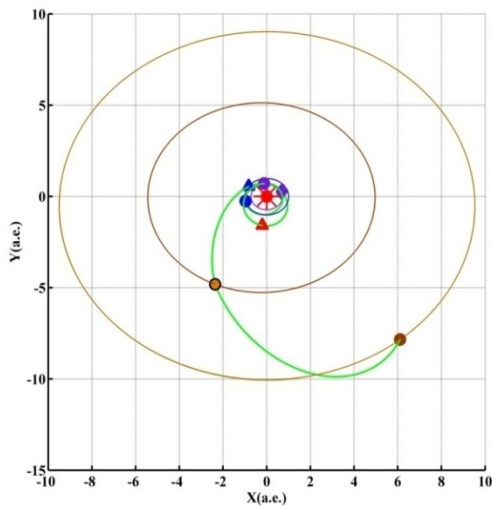
- Вектор гиперболического избытка скорости после второго ГМ у Венеры обеспечил пассивный перелет КА в окрестность Земли. Время перелета на гелиоцентрическом перелете Венера – Земля составило 66.74 суток. Гравитационный маневр у Земли оказался пассивным. Гиперболический избыток скорости при подлете к Земле оказался равным 17.863 км/с.

- Вектор гиперболического избытка скорости после ГМ у Земли обеспечил пассивный перелет КА в окрестность Юпитера. Время перелета на гелиоцентрическом перелете Земля – Юпитера составило 549.8 суток. Гравитационный маневр у Юпитера оказался пассивным. Гиперболический избыток скорости при подлете к Юпитеру оказался равным 10.744 км/с.

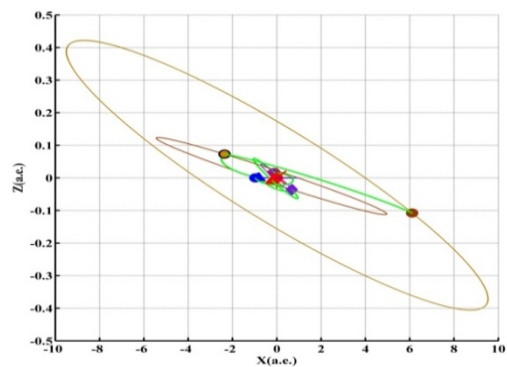
- Вектор гиперболического избытка скорости после ГМ у Юпитера обеспечил пассивный перелет КА в окрестность Сатурна. Время перелета на гелиоцентрическом перелете Земля – Юпитера составило 3000 дней. КА подлетает к Сатурну с гиперболическим избытком скорости 4.169 км/с. Для перехода КА на параболическую орбиту с гиперболы требуется тормозной импульс скорости 321.3 м/с. Продолжительность полета по всему маршруту составляет 4231.5 суток (11.585 года).

Суммарный импульс скорости оказался равен 5.923 км/с.

На рисунке 4.15 показана траектория перелета по маршруту Земля – Венера – Венера – Земля – Юпитер – Сатурн для даты старта в 2039ом году.



(а) проекция на плоскость эклиптики



(б) проекция на плоскость XZ

Рисунок 4.15 - Траектория перелета по маршруту Земля – Венера – Венера – Земля – Юпитер – Сатурн.

В таблице 4.14 представлены основные характеристики траектории перелета КА к Сатурну при использовании маршрута Земля – Венера – Венера – Земля – Юпитер – Сатурн.

Таблица 4.14 - Основные характеристики траектории Земля – Венера – Венера – Земля – Юпитер – Сатурн

дата старта	06.04.2039
гиперболический избыток скорости при старте от Земли	4619.5 м/с
требуемый импульс скорости с базовой околоземной орбиты	4806.6 м/с
Время перелета Земля-Венера	215.2 сут
гиперболический избыток скорости при первом гравитационном маневре у Венеры	6283.6 м/сек
Дата выполнения первого ГМ у Венеры	07.11.2039
Время перелета Венера-Венера	399.9 сут
Дата выполнения дополнительного импульса	27.05.2040
импульс скорости на гелиоцентрическом перелете Венера - Венера	1432.6м/сек
Дата выполнения второго ГМ у Венеры	11.12.2040
гиперболический избыток скорости при втором гравитационном маневре у Венеры	14483.3 м/сек
Время перелета Венера-Земля	66.73 сут
Дата выполнения ГМ у Земли	15.02.2041
гиперболический избыток скорости при гравитационном маневре у Земли	17862.5 м/с
Время перелета Земля-Юпитер	549.8 сут
дата выполнения ГМ у Юпитера	19.08.2042
гиперболический избыток скорости при гравитационном маневре у Юпитера	10744.3 м/с
Время перелета Юпитер-Сатурн	3000.0 сут
Дата подлета КА к Сатурну	05.11.2050
гиперболический избыток скорости при подлете к Сатурну	4806.6м/сек
требуемый тормозной импульс скорости в окрестности Сатурна	321.3 м/с
суммарный импульс скорости	5923.5 м/с
суммарное время полета	4231.5 суток (11.585 года)

4.7 АНАЛИЗ СЛОЖНЫХ СХЕМ ПОЛЕТА К ПЛУТОНУ С ГРАВИТАЦИОННЫМИ МАНЕВРАМИ У ЗЕМЛИ, ВЕНЕРЫ, ЮПИТЕРА И САТУРНА ДЛЯ КА С ХИМИЧЕСКИМИ РАКЕТНЫМИ ДВИГАТЕЛЯМИ

В данном разделе проанализирована сложная схема полета к Плутону для ближайших окон запуска с использованием гравитационных маневров у Земли, Венеры, Юпитера и Сатурна и дополнительных импульсов скорости на гелиоцентрических участках траектории. Предполагается, что КА находится на низкой околоземной орбите, старт с нее и выход на гиперболическую траекторию отлета от Земли обеспечивает химический разгонный блок, который затем отделяется от КА. Предполагается, что КА оснащен собственной химической двигательной установкой. Она может обеспечивать импульсные приращения скорости на всей траектории полета. В частности, она может обеспечивать маневры вдали от каких-либо небесных тел, активные гравитационные манеры и, наконец, торможение КА в окрестности планеты назначения – Плутона.

Тормозной импульс скорости в окрестности Плутона рассчитывается из условия перевода КА на параболическую орбиту с гиперболы пролета Плутона. Высоты перигея гиперболы подлета к Плутону считается равной 1000 км.

Оптимизирована следующая схема (маршрут) полета к Плутону: Земля – Венера – Венера – Земля – Юпитер – Сатурн – Плутон. Ниже представим основные характеристики оптимальной траектории для этой схемы перелета.

Оптимизация рассматриваемого маршрута Земля – Венера – Венера – Земля – Юпитер – Сатурн – Плутон для эпохи старта в 2032 году привела к следующему решению:

- Гравитационные маневры у Венеры, Земли, Юпитера, и у Сатурна оказались пассивными. Импульсы скоростей на пяти гелиоцентрических участках (Земля – Венера, Венера – Земля, Земля – Юпитер, Юпитер – Сатурн, Сатурн – Плутон) из шести имеющихся на маршруте оказались равны нулю. В итоге суммарный импульс скорости оказался равен сумме импульса скорости при старте с базовой околоземной орбиты, импульса скорости на гелиоцентрическом перелете Венера – Венера и импульса скорости при торможении в окрестности Плутона.

- При старте КА с базовой околоземной орбиты импульс скорости оказался 4.147 км/с). Он обеспечил величину гиперболического избытка скорости при старте от Земли (4.587 км/с).

- Время перелета на гелиоцентрическом перелете Земля – Венера составило 214.2 суток. Гиперболический избыток скорости при подлете к Венере оказался равным 6.2262 км/с. Первый гравитационный маневр у Венеры оказался пассивным.

- Время перелета на гелиоцентрическом перелете Венера – Венера составило 400.2 суток. На участке перелета химический двигатель КА обеспечивает импульс скорости 1.474 м/с. Этот импульс скорости обеспечивает перелет в окрестность Венеры для того, чтобы осуществить у неё второй гравитационный маневр. Вторым гравитационным маневром у Венеры оказался пассивным. Гиперболический избыток скорости при втором подлете к Венере оказался равным 14.508 км/с.

- Вектор гиперболического избытка скорости после второго ГМ у Венеры обеспечил пассивный перелет КА в окрестность Земли. Время перелета на гелиоцентрическом перелете Венера – Земля составило 65.5 суток. Гравитационный маневр у Земли оказался пассивным. Гиперболический избыток скорости при подлете к Земле оказался равным 18.253 км/с.

- Вектор гиперболического избытка скорости после ГМ у Земли обеспечил пассивный перелет КА в окрестность Юпитера. Время перелета на гелиоцентрическом

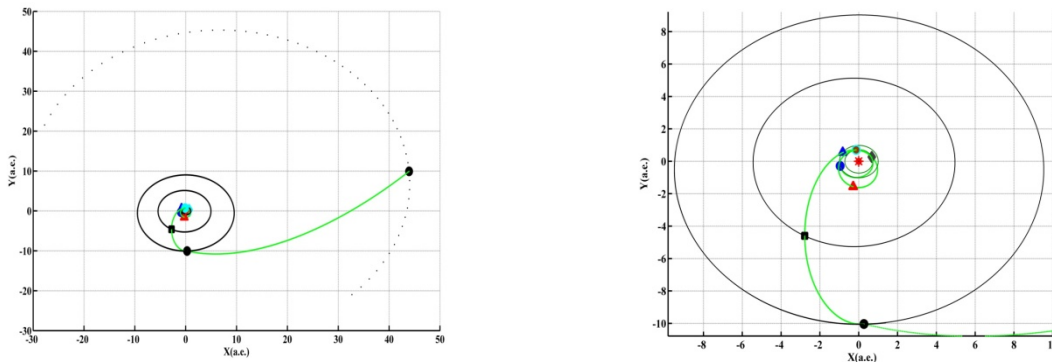
перелете Земля – Юпитера составило 485.5 суток. Гравитационный маневр у Юпитера оказался пассивным. Гиперболический избыток скорости при подлете к Юпитеру оказался равным 12.857 км/с.

- Вектор гиперболического избытка скорости после ГМ у Юпитера обеспечил пассивный перелет КА в окрестность Сатурна. Время перелета на гелиоцентрическом перелете Земля – Юпитера составило 1862.6 суток. Гравитационный маневр у Сатурна оказался пассивным. Гиперболический избыток скорости при подлете к Сатурна оказался равным 5.548 км/с.

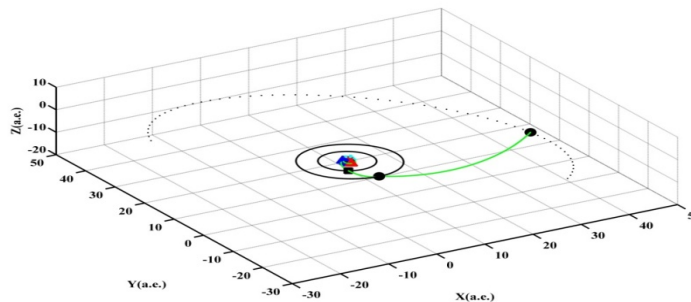
- Вектор гиперболического избытка скорости после ГМ у Сатурна обеспечил пассивный перелет КА в окрестность Плутона. Время перелета на гелиоцентрическом перелете Сатурн – Плутон составило 11999.6 суток. КА подлетает к Плутону с гиперболическим избытком скорости 3.918 км/с. Для перехода КА на параболическую орбиту с гиперболы требуется тормозной импульс скорости 3.0973 м/с. Продолжительность полета по всему маршруту составляет 15027.6суток (41.143 года).

Суммарный импульс скорости оказался равен 8.7209 км/с.

На рисунке 4.16 показана траектория перелета по маршруту Земля –Венера – Венера – Земля – Юпитер – Сатурн – Плутон для даты старта в 2039ом году.



(а) проекция на плоскость эклиптики (траектория до Юпитера)



(б) в пространстве

Рисунок 4.16 - Траектория перелета по маршруту Земля – Земля – Юпитер – Сатурн – Плутон.

В таблице 4.15 представлены основные характеристики траектории перелета КА к Сатурну при использовании маршрута Земля – Венера – Венера – Земля – Юпитер – Сатурн – Плутон.

Таблица 4.15 - Основные характеристики траектории Земля – Венера – Венера – Земля – Юпитер – Сатурн – Плутон

дата старта	07.04.2039
гиперболический избыток скорости при старте от Земли	4586.6 м/с
требуемый импульс скорости с базовой околоземной орбиты	4146.6 м/с
Время перелета Земля-Венера	214.2 сут
гиперболический избыток скорости при первом гравитационном маневре у Венеры	6262.3 м/сек
Дата выполнения первого ГМ у Венеры	08.11.2039
Время перелета Венера-Венера	400.2 сут
Дата выполнения дополнительного импульса	14.05.2040
импульс скорости на гелиоцентрическом перелете Венера - Венера	1473.8м/сек
Дата выполнения второго ГМ у Венеры	12.12.2040
гиперболический избыток скорости при втором гравитационном маневре у Венеры	14507.9 м/сек
Время перелета Венера-Земля	65.51 сут
Дата выполнения ГМ у Земли	15.02.2041
гиперболический избыток скорости при гравитационном маневре у Земли	18253.2 м/с
Время перелета Земля-Юпитер	458.5 сут
дата выполнения ГМ у Юпитера	16.06.2042
гиперболический избыток скорости при гравитационном маневре у Юпитера	12857.5 м/с
Время перелета Юпитер-Сатурн	1862.6 сут
Дата подлета КА к Сатурну	22.07.2047
гиперболический избыток скорости при гравитационном маневре у Сатурна	5548.5м/с
Время перелета Сатурн - Плутон	11999.6сут
гиперболический избыток скорости при подлете к Плутону	3917.8м/сек
требуемый тормозной импульс скорости в окрестности Плутона	3097.4 м/с
суммарный импульс скорости	8720.9м/с
суммарное время полета	15027.6сут (41.143 года)

4.8 АНАЛИЗ СХЕМЫ ПОЛЕТА К АСТЕРОИДУ TV135 С ГРАВИТАЦИОННЫМИ МАНЕВРАМИ У ЗЕМЛИ ДЛЯ КА С ХИМИЧЕСКИМИ РАКЕТНЫМИ ДВИГАТЕЛЯМИ

В данном разделе проанализирована сложная схема полета к астероиду TV135 для ближайших окон запуска с использованием гравитационных маневров у Земли и дополнительных импульсов скорости на гелиоцентрических участках траектории. Предполагается, что КА находится на низкой околоземной орбите, старт с нее и выход на гиперболическую траекторию отлета от Земли обеспечивает химический разгонный блок, который затем отделяется от КА. Предполагается, что КА оснащен собственной

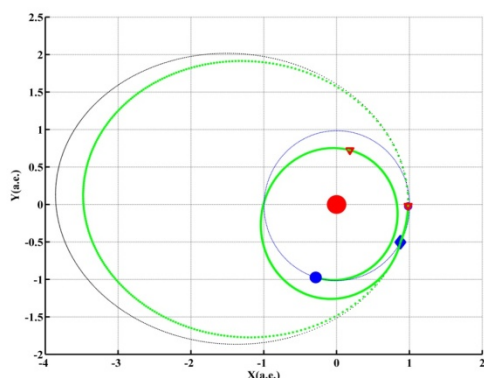
химической двигательной установкой. Она может обеспечивать импульсные приращения скорости на всей траектории полета. В частности, она может обеспечивать маневры вдали от каких-либо небесных тел, активные гравитационные маневры и, наконец, торможение КА в окрестности планеты назначения – астероида.

Тормозной импульс скорости в окрестности планеты назначения рассчитывается из условия перевода КА на параболическую орбиту с гиперболы пролета астероида. Он считается равным гиперболическому избытку скорости при подлете к астероиду.

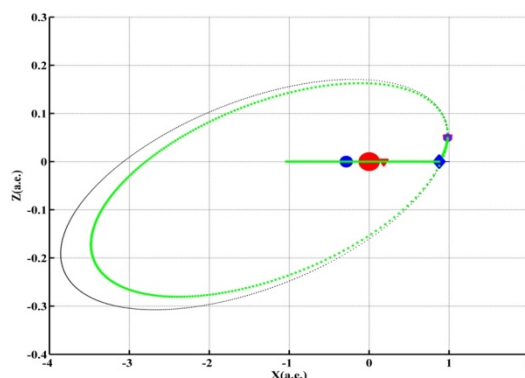
Оптимизирована схема Земля – Земля – астероид TV135 и ниже представлены основные характеристики оптимальных траекторий для этого маршрута. старта от Земли. Для рассматриваемого маршрута «временная завязка» всей траектории зависит только от характеристик гелиоцентрических траекторий Земли и астероида. Относительное положение Земли и астероида повторяется через синодический его период. Минимизация суммарного импульса скорости для рассматриваемого маршрута для даты старта в 2020 год привела к решениям, представленным следующими характеристиками

- При старте КА с базовой околоземной орбиты импульс скорости оказался 3.4282 км/с и обеспечил величину гиперболического избытка скорости при старте от Земли 2.119 км/с.
- В районе перигелия гелиоцентрического перелета 153.2 суток полета маршевый двигатель КА обеспечил импульс скорости 1.690 км/с, изменивший и величину, и направление скорости КА.
- Этот импульс скорости позволил КА через 445.2 суток полета встретиться с Землей для того, чтобы осуществить у неё гравитационный маневр. Гиперболический избыток скорости при подлете КА к Земле оказался равен 7.384 км/с. Гравитационный маневр у Земли оказался пассивным.
- Через 24.57 суток полета после ГМ маршевый двигатель КА обеспечил импульс скорости 1.959 км/с, изменивший и величину, и направление скорости КА.
- Этот импульс скорости позволил КА через 1690.4 суток полета встретиться с астероидом TV135. КА подлетает к астероиду с относительно небольшим гиперболическим избытком скорости 0.423 км/с. Для рассматриваемой схемы полета суммарный импульс скорости равен сумме импульса скорости при старте с низкой околоземной орбиты, импульса скорости на гелиоцентрических участках (Земля - Земля, Земля - астероид) и импульса скорости при торможении в окрестности астероида (считается равным гиперболическому избытку скорости при подлете к астероиду).

На рисунке 4.17 показана траектория перелета КА по маршруту Земля – Земля – астероид с датой старта в 2020 году.



(а) Проекция на плоскость эклиптики траектории перелета



(б) Проекция на плоскость XZ траектории перелета

Рисунок 4.17 - Траектория Земля - Земля - астероид (эпоха запуска 2020 год)

В таблице 4.16 представлены основные характеристики траектории перелета по анализируемому маршруту.

Таблица 4.15 - Основные характеристики траектории Земля - Земля - астероид (эпохи старта 2020)

дата старта	04.06.2020
гиперболический избыток скорости при старте от Земли	2119.5м/с
требуемый импульс скорости с базовой околоземной орбиты	3428.2м/с
дата выполнения первого импульса скорости в глубоком космосе	04.11.2020
Первый импульс скорости в глубоком космосе	1689.9м/с
дата ГМ у Земли	23.08.2021
гиперболический избыток скорости при гравитационном маневре у Земли	7383.7м/с
высота перигея гиперболы пролета	400 км
дата выполнения второго импульса скорости в глубоком космосе	17.09.2021
второй импульс скорости в глубоком космосе	1959.7м/с
дата подлёта КА к астероиду TV135	19.01.2025
гиперболический избыток скорости при подлете к астероиду	423.5 м/с
суммарный импульс скорости	7499.3 м/с
суммарное время полета	1690.4 сут.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ ПО ГЛАВЕ

В данной главе использованы разработанные и описанные алгоритмы анализа и оптимизации сложных схем межпланетного полета для проектирования маршрутов межпланетного полета КА к Юпитеру, Сатурну, Плутону и астероиду TV135 с использованием гравитационных маневров у Венеры, Земли, Марса Юпитера, Сатурна и дополнительных импульсов скорости на гелиоцентрических участках перелета. Благодаря постановке, предполагающей, в частности, использование активных гравитационных маневров, задачу удалось свести к задаче безусловной минимизации функции

(суммарного импульса скорости) от характеристик рассматриваемого маршрута. Используется метод глобальной оптимизации, основанный на эволюционной стратегии с адаптацией матрицы ковариаций для решения сформулированной задачи сквозной оптимизации. Проанализировано несколько маршрутов при проектировании межпланетной миссии к Юпитеру, Сатурну, Плутону и астероиду. Выбрана наилучшая схема из проанализированных маршрутов полета к Юпитеру для ближайших окон запуска и представлены основные характеристики траектории для этой схемы.

Можно заметить, что, если в качестве критерия оптимизации использовать массовый критерий (например, массу КА, доставляемого на конечную орбиту, вместо суммарного импульса скорости), то результат оптимизации может быть несколько отличным от полученного в главе. Методически такая постановка задачи не вызывает каких-либо дополнительных трудностей при решении, но при этом нужно ввести массовую модель КА и зафиксировать характеристики рабочей орбиты в окрестности планеты значения.

5 КВАЗИОПТИМИЗАЦИЯ ТРАЕКТОРИИ СЛОЖНЫХ МЕЖПЛАНЕТНЫХ ПОЛЕТОВ КА С МАЛОЙ ТЯГОЙ ПРИ ПОМОЩИ МЕТОДА ЭВОЛЮЦИОННОЙ СТРАТЕГИИ С АДАПТАЦИЕЙ КОВАРИАЦИОННОЙ МАТРИЦЫ

В данной главе рассматривается задача оптимизации траектории межпланетных перелетов КА с использованием гравитационных маневров и малой тягой к планете значения или на рабочую гелиоцентрическую орбиту. Предполагается использование пассивных гравитационных маневров, при которых движении КА в грависфере планеты не предусматривает включения маршевого двигателя КА. Задача оптимизации траектории перелета КА анализируется с помощью ПМП, при этом задача оптимального управления движением КА сводится к многоточечной краевой задаче. Критерием оптимизации является конечная масса КА (она максимизируется), а в случае фиксированной величины гиперболического избытка скорости при старте от Земли – требуемый запас массы рабочего тела электроракетной двигательной установки (он минимизируется).

Определяются оптимальные программы по углам тангажа и рыскания на активных участках траектории (программа оптимального управления вектором тяги), оптимальные программы включения-выключения двигателя на траектории гелиоцентрического перелета и протяженность активных и пассивных участках и их количества.

Предполагается, что РН выводит орбитальный блок в составе ХРБ и КА на низкую околоземную орбиту. Химический разгонный блок обеспечивает старт КА с этой орбиты и выход на гиперболическую траекторию отлета от Земли, после чего ХРБ отделяется от КА. На всех гелиоцентрических участках траектории ЭРДУ используется как маршевая двигательная установка КА.

5.1 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ АНАЛИЗА ТРАЕКТОРИИ ПЕРЕЛЕТА КА С ЭРДУ

Для описания движения КА с ЭРДУ от планеты к планете используется та же математическая модель, что и в разделе 1.6.2. На траектории перелета КА с ЭРДУ осуществляются пассивные гравитационные маневры у промежуточных планет. Предполагается, что при гравитационном маневре в сфере действия промежуточной планеты движение КА осуществляется с выключенной ЭРДУ [35]. В рамках метода грависфер нулевой протяженности осуществляется пассивный гравитационный маневр с мгновенным изменением вектора гелиоцентрической скорости КА. Это изменение эквивалентно развороту вектора гиперболического избытка скорости на некоторый угол, ограниченный сверху минимально допустимой высотой пролета планеты .

Угол между векторами подлетного V_{∞}^- и отлетного V_{∞}^+ гиперболического избытка

скорости при гравитационном маневре определяется соотношением:

$$\beta = 2 \arcsin\left[\left(1 + \frac{r_{\pi} V_{\infty}^2}{\mu_{pl}}\right)^{-1}\right]; \quad (5.1)$$

В нем используется величина гиперболического избытка скорости $V_{\infty} = |\mathbf{V}_{\infty}^{-}| = |\mathbf{V}_{\infty}^{+}|$, радиус перицентра пролетной планетоцентрической орбиты r_{π} и гравитационный параметр планеты μ_{pl} . Поскольку радиус пролета планеты ограничен некоторым минимально допустимым значением $r_{\pi\min}$, то угол поворота вектора гиперболического избытка скорости не может быть больше некоторого β_{\max} :

$$\beta_{\max} = 2 \arcsin\left[\left(1 + \frac{r_{\pi\min} V_{\infty}^2}{\mu_{pl}}\right)^{-1}\right]. \quad (5.2)$$

На положение плоскости пролётной гиперболы ограничений не вводится. При этом вектор гиперболического избытка скорости после ГМ принадлежит прямому круговому конусу, ось которого есть гиперболический избыток скорости при подлете к планете, угол полураствора конуса равен β_{\max} . Параметрами ГМ можно рассматривать следующие два параметра: угол β ($\beta \leq \beta_{\max}$) и угол γ , определяющий положение плоскости пролетной гиперболы (угол поворота плоскости пролетной гиперболы относительно подлетного гиперболического избытка скорости).

В данном разделе угол γ вводится как угол между следующими двумя векторами: 1) вектором, принадлежащим основной плоскости (плоскости эклиптики) и перпендикулярным вектору подлетного гиперболического избытка скорости и 2) проекцией вектора выходного гиперболического избытка скорости на картинную плоскость (плоскость перпендикулярную вектору входного гиперболического избытка скорости). Целесообразнее вместо угла β в качестве выбираемого параметра использовать множитель ζ_{β} ($\beta = \zeta_{\beta} \beta_{\max}$), где $0 \leq \zeta_{\beta} \leq 1$. На угол γ никаких ограничений не накладывается.

На рисунке 5.1 $\mathbf{V}_{\infty}^{-}, \mathbf{V}_{\infty}^{+}$ - векторы гиперболического избытка скорости при подлете к планете и при отлете от нее. Эти векторы относятся к плоскости ГМ. Плоскость В I-C-m перпендикулярна вектору \mathbf{V}_{∞}^{-} . Орт $\mathbf{1}$ относится к В плоскости, так и к эклиптической плоскости ху. Орт \mathbf{m} относится к картинной плоскости и к плоскости ГМ. Получаются следующие вписанные углы: угол β (угол между векторами \mathbf{V}_{∞}^{-} и \mathbf{V}_{∞}^{+}), угол γ (угол между векторами $\mathbf{1}$ и \mathbf{m}).

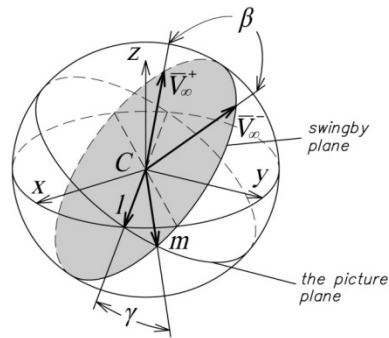


Рисунок 5.1. Схема ГМ

Вектор гиперболического избытка скорости после ГМ можно подсчитать по известным компонентам подлетного вектора гиперболического избытка скорости. Это можно сделать в произвольной, например, эллиптической системе координат по следующему соотношению:

$$\mathbf{V}_{\infty}^{+} = \begin{pmatrix} V_{\infty x}^{-} & \frac{-V_{\infty y}^{-} V_{\infty}^{-}}{V_{\infty xy}^{-}} & \frac{-V_{\infty x}^{-} V_{\infty z}^{-}}{V_{\infty xy}^{-}} \\ V_{\infty y}^{-} & \frac{V_{\infty x}^{-} V_{\infty}^{-}}{V_{\infty xy}^{-}} & \frac{-V_{\infty y}^{-} V_{\infty z}^{-}}{V_{\infty xy}^{-}} \\ V_{\infty z}^{-} & 0 & V_{\infty xy}^{-} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\beta) \\ \sin(\beta) \cos(\gamma) \\ \sin(\beta) \sin(\gamma) \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

где $V_{\infty x}^{-}$, $V_{\infty y}^{-}$, $V_{\infty z}^{-}$ - компоненты вектора гиперболического избытка при подлете к планете;

$V_{\infty} = V_{\infty}^{-} = V_{\infty}^{+} = \sqrt{V_{\infty x}^{-2} + V_{\infty y}^{-2} + V_{\infty z}^{-2}}$ - величина вектора гиперболического избытка скорости при подлете к планете;

$V_{\infty xy}^{-} = \sqrt{V_{\infty x}^{-2} + V_{\infty y}^{-2}}$ - величина проекции вектора гиперболического избытка скорости при подлете к планете на плоскость x-y системы координат, в которой рассматриваются проекции вектора скорости КА;

β - угол поворота асимптоты гиперболы пролета при гравитационном маневре (он находится в диапазоне $0 \leq \beta \leq \beta_{max}$);

γ - угол, который определяет положение плоскости гиперболы пролета (он рассматривается в диапазоне $0 \leq \gamma < 2\pi$).

5.2 ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ТРАЕКТОРИИ КА С ЭРДУ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ГРАВИТАЦИОННЫХ МАНЕВРОВ У ПРОМЕЖУТОЧНЫХ ПЛАНЕТ

Задача оптимизации траектории перелета КА с ЭРДУ с использованием гравитационных маневров у промежуточных планет формулируется с помощью ПМП

Понтрягина (раздел 1.6.2). Критерием оптимальности рассматривается масса КА, доставляемая в окрестность планеты назначения.

Вектор начальных условий для анализа гелиоцентрической траектории полета имеет вид:

$$\mathbf{X}(t_0) = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_E(t_0) \\ \mathbf{V}_E(t_0) + V_{\infty 0}^+ \frac{\lambda_{v_0}}{\lambda_{v_0}} \\ m_0 \end{bmatrix}$$

где, $\mathbf{r}_E(t_0)$ и $\mathbf{V}_E(t_0)$ – радиус-вектор и вектор скорости Земли в момент старта КА;

$V_{\infty 0}^+$ – гиперболический избыток скорости при старте;

$\frac{\lambda_{v_0}}{\lambda_{v_0}}$ – орт базис-вектора в начальный момент времени;

m_0 – масса КА после отделения ХРБ.

На рисунке 5.2 представлена схема изменения базис-вектора при гравитационном маневре с минимальной высотой пролета планеты [73, 107]. Базис-вектор рассматривается в виде суммы двух компонент: коллинеарной компоненты $\lambda_{V'}^{\parallel}$ (она направлена вдоль вектора гиперболического избытка скорости) и перпендикулярной компоненты $\lambda_{V'}^{\perp}$ (она перпендикулярна вектору гиперболического избытка скорости). Условия оптимальности ГМ дают соотношения, связывающие компоненты базис-вектора до и после ГМ. Оказывается, что перпендикулярная компонента базис-вектора не меняет свою величину и всегда направлена в сторону гравитационного центра: $\lambda_{V'-}^{\perp} = \lambda_{V'+}^{\perp}$.

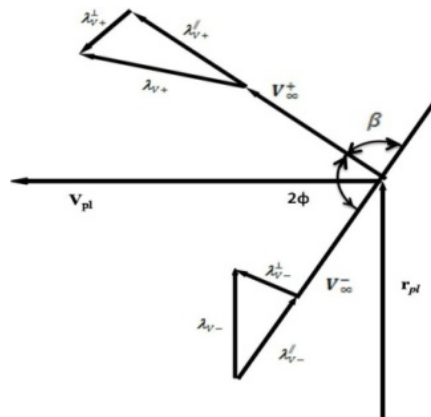


Рисунок 5.2. Схема изменения базис-вектора при гравитационном маневре с минимальной высотой пролета

Величина коллинеарной компоненты базис-вектора при гравитационном маневре изменяется. Справедливо следующее равенство:

$$\lambda_{V'+}^{\parallel} = \lambda_{V'-}^{\parallel} + 2A\lambda_{V'-}^{\perp}$$

$$\text{где } A = \frac{2}{\operatorname{tg} \varphi} \frac{V_{\infty-}^2}{V_p^2 + V_{\infty-}^2}, \operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi}}{\cos \varphi}, \cos \varphi = \frac{V_p^2}{V_p^2 + V_{\infty-}^2} \text{ и } V_p^2 = \frac{\mu_{pl}}{r_{p\min}}.$$

Так как при гравитационном маневре масса КА не меняется, то сопряженная переменная к массе тоже не меняется. Краевые условия для анализируемой проблемы включают условия в точках гравитационных маневров и в конечной точке траектории перелета. Краевыми условиями в точках гравитационных маневров рассматриваются следующие условия [45, 73, 107, 108]:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_{pli} - \mathbf{r}_{SCi} \\ V_{\infty i}^- - V_{\infty i}^+ \\ \beta_{\max i} - \beta_i \\ \boldsymbol{\lambda}_{V_{i-}}^T [\mathbf{V}_{\infty i}^- \times \mathbf{V}_{\infty i}^+] \\ \boldsymbol{\lambda}_{V_{i+}}^T [\mathbf{V}_{\infty i}^- \times \mathbf{V}_{\infty i}^+] \\ \lambda_{V_{i-}}^\perp - \lambda_{V_{i+}}^\perp \\ \lambda_{V_{i+}}^{\parallel} - \lambda_{V_{i-}}^{\parallel} - 2A\lambda_{V_{i-}}^\perp \\ \boldsymbol{\lambda}_{r_{i-}}^T \mathbf{V}_{\infty i}^- - \boldsymbol{\lambda}_{r_{i+}}^T \mathbf{V}_{\infty i}^+ \end{bmatrix} = 0 \quad (5.4)$$

В уравнении (5.4) индекс i соответствует номеру ГМ ($i=1,2,\dots,n$). Векторное произведение векторов обозначено квадратными скобками и крестом. Коллинеарные компоненты подлетного ($\lambda_{V_{i-}}^{\parallel}$ с индексом «-») и отлетного ($\lambda_{V_{i+}}^{\parallel}$ с индексом «+») базис-векторов, перпендикулярные компоненты базис-вектора $\lambda_{V_{i-}}^\perp$, $\lambda_{V_{i+}}^\perp$ можно найти так:

$$\lambda_{V_{i\pm}}^\perp = \boldsymbol{\lambda}_{V_{i\pm}}^T \mathbf{e}_\pm^\perp, \lambda_{V_{i\pm}}^{\parallel} = \boldsymbol{\lambda}_{V_{i\pm}}^T \mathbf{e}_\pm^{\parallel}.$$

$$\text{где } \mathbf{e}_\pm^{\parallel} = \frac{\mathbf{V}_{\infty i}^\pm}{|\mathbf{V}_{\infty i}^\pm|}, \mathbf{e}^b = \frac{\mathbf{V}_{\infty i}^- \times \mathbf{V}_{\infty i}^+}{|\mathbf{V}_{\infty i}^- \times \mathbf{V}_{\infty i}^+|}, \mathbf{e}_\pm^\perp = \frac{\mathbf{e}^b \times \mathbf{V}_{\infty i}^\pm}{|\mathbf{e}^b \times \mathbf{V}_{\infty i}^\pm|}.$$

10n скалярных равенств, входящих в (5.4), следует рассматривать как 10n краевых условий в точках гравитационных маневров у промежуточных планет.

При подлете к планете назначения необходимо удовлетворить условиям нулевой стыковки КА с планетой назначения. Масса КА при подлете к планете назначения (конечная масса) максимизируется. Из условий оптимальности следует, что сопряженная переменная к массе в конечной точке не должна быть отрицательной. Учитывая однородность сопряженной системы, примем её равной единице [174]. При этом краевые условия в конечной точке траектории можно представить в виде:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_{SC}(t_f) - \mathbf{r}_{pl}(t_f) \\ \mathbf{V}_{SC}(t_f) - \mathbf{V}_{pl}(t_f) \\ \lambda_m(t_f) - 1 \end{bmatrix} = 0 \quad (5.5)$$

где $\mathbf{r}_{sc}(t_f)$ – радиус-вектор КА в момент подлета КА к планете назначения;

$\mathbf{r}_{pl}(t_f)$ – радиус-вектор планеты назначения;

$\mathbf{V}_{sc}(t_f)$ – вектор гелиоцентрической скорости КА;

$\mathbf{V}_{pl}(t_f)$ – вектор скорости планеты назначения в этот же момент времени.

Таким образом, полный набор краевых условий рассматриваемой задачи есть совокупность векторных равенств (5.4) и (5.5). Они содержат $10n+7$ скалярных условий типа равенства. Неизвестными выбираемыми параметрами краевой задачи можно рассматривать следующие $10n+7$ параметров: сопряженные переменные в начальной точке гелиоцентрического перелета $\lambda_{ro}, \lambda_{vo}, \lambda_{mo}$, даты выполнения гравитационных маневров, сопряженные переменные и векторы гиперболического избытка скорости после ГМ $t_{gri}, \lambda_{ri}, \lambda_{vi}, \mathbf{V}_{\infty i}^+$ ($i=1, 2, \dots, n$).

Следует отметить сложность и трудоемкость поиска решения сформулированной многоточечной краевой задачи. Это обусловлено следующими обстоятельствами:

- 1) высокая размерность краевой задачи (её порядок равен $10n+7$);
- 2) разнородность выбираемых параметров $10n+7$;
- 3) существование большого числа локальных решений (многоэкстремальность).

Перечисленные трудности заставляют отказаться от решения сформулированной проблемы сквозной оптимизации. В настоящей главе предлагается пренебречь некоторыми из сформулированных условий оптимальности, в связи, с чем получаемое решение правильнее назвать квазиоптимальным. Из перечисленных условий оптимальности решено отказаться от [35]:

1. условий оптимальности дат гравитационных маневров (эти даты можно получить из решения вспомогательной задачи.
2. условий связи компонент базис-вектора при гравитационном маневре.

Базис-вектор после ГМ будет рассматриваться как независимый выбираемый параметр для анализа и оптимизации следующего гелиоцентрического перелета.

Кроме дат гравитационных маневров будут фиксироваться векторы гиперболического избытка скоростей после каждого ГМ, которые тоже будут получены в ходе решения вспомогательной задачи.

5.3 ФОРМУЛИРОВКА ВСПОМОГАТЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ И ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЕЁ ДЛЯ ОПТИМИЗАЦИИ ТРАЕКТОРИИ ПЕРЕЛЕТА КА С ЭРДУ

Для решения сформулированной проблемы предлагается ввести вспомогательную задачу [35]. Объясним существование вспомогательной задачи на примере оптимизации траектории перелета от Земли к Юпитеру с двумя гравитационными маневрами у Земли. Вспомогательная задача рассматривается как задача оптимизации импульсного перелета по маршруту Земля – Земля – Юпитер. То есть рассматривается перелет от Земли к Юпитеру с одним гравитационным маневром у Земли. Можно интерпретировать эту задачу, как задачу перелета к Юпитеру, в которой не анализируется участок гелиоцентрической траектории с момента старта КА от Земли до первого ГМ и исследуется только заключительная часть маршрута: Земля (первый гравитационный маневр) – Земля (второй гравитационный маневр) – Юпитер. При этом рассматривается возможность использования на перелете дополнительных импульсов скорости на гелиоцентрических участках перелета (импульсы в “глубоком космосе” – deep space maneuver) и импульса скорости при втором гравитационном маневре у Земли.

На рисунке 5.3 показана схема полета, которая рассматривается во вспомогательной задаче. На этой схеме T_1, T_2, T_f – даты первого и второго гравитационных маневров и дата подлета КА к Юпитеру; t_{dsm1}, t_{dsm2} – даты импульсов скорости в “глубоком космосе”.

В верхней строке рисунка показаны векторы гиперболических избытков скорости при отлете от Земли после гравитационных маневров $V_{\infty 1}^+, V_{\infty 2}^+$, которые являются выбираемыми характеристиками вспомогательной задачи, как и перечисленные выше даты. $\Delta V_{dsm1}, \Delta V_{ds}$ – векторы импульсов скорости в глубоком космосе.

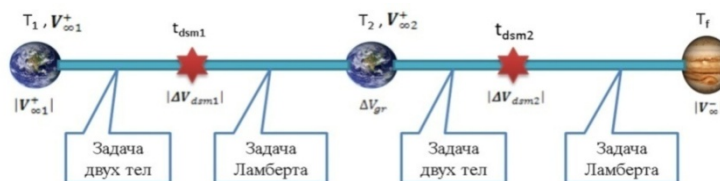


Рисунок 5.3 - Иллюстрация к формулировке вспомогательной задачи оптимизации траектории перелета Земля – Земля – Юпитер.

Критерием оптимальности рассматривается сумма следующих величин:

- 1) гиперболического избытка скорости при отлете от Земли (после первого ГМ);
- 2) гиперболического избытка скорости при подлете к Юпитеру;
- 3) импульсов скорости в глубоком космосе;
- 4) импульса скорости при гравитационном маневре у Земли.

$$f(\mathbf{x}) = \left| \mathbf{V}_{\infty 1}^+ \right| + \left| \Delta \mathbf{V}_{dsm1} \right| + \Delta V_{gr} + \left| \Delta \mathbf{V}_{dsm2} \right| + \left| \mathbf{V}_{\infty}^- \right|$$

Выбираемыми характеристиками x рассматриваются:

1. дата подлета к Юпитеру;
2. время перелета между планетами на рассматриваемом маршруте;
3. даты осуществления импульсов скорости в глубоком космосе;
4. компоненты обоих векторов гиперболических избытков скорости отлета от Земли

$$V_{\infty 1}^+, V_{\infty 2}^+.$$

В дальнейшем используются только те решения вспомогательной задачи, в которых импульс скорости при втором гравитационном маневре у Земли практически равен нулю.

Рассматриваемая задача сводится к задаче безусловной минимизации, и ее единственной сложностью является существование множества локальных экстремумов. В предыдущей главе подробно представлена методика для нахождения вероятного наилучшего локального экстремума. В таблице 5.1 приведены основные характеристики самой лучшей по выбранному критерию траектории перелета Земля – Земля – Юпитер, полученные при решении вспомогательной задачи.

Таблица 5.1 - Основные характеристики траектории перелета Земля – Земля – Юпитер для вспомогательной задачи

Дата старта		21.07.2020
Модуль вектора гиперболического избытка скорости при старте от Земли	м/с	5159.318
Вектор гиперболического избытка скорости при старте от Земли	м/с	4520.31 2487.02 3.56
Дата выполнения первого дополнительного импульса		18.08.2021
Модуль вектора первого дополнительного импульса	м/с	564.98
Вектор первого дополнительного импульса	м/с	443.05 350.59 1.20
Время перелета Земля – Земля	сутки	680.197
Дата подлета к Земле для ГМ		03.06.2022
Модуль вектора гиперболического избытка скорости после ГМ у Земли	м/с	9068.14
Вектор гиперболического избытка скорости после ГМ у Земли	м/с	9037.79 -420.45 610.54
Дата выполнения второго дополнительного импульса		28.06.2024
Модуль вектора второго дополнительного импульса	м/с	895.65
Вектор второго дополнительного импульса	м/с	-0.803.29 358.55 -168.39
Время перелета Земля – Юпитер	сутки	996.24
Дата подлета к Юпитеру		24.02.2025
Вектора гиперболического избытка скорости при подлете	м/с	4789.30

к Юпитеру		-1.065.59 -0.561.54
Модуль вектора гиперболического избытка скорости при подлете к Юпитеру	м/с	4938.44
Суммарное время перелета	сутки	1678.54

На рисунке 5.4 представлена полученная траектория перелета Земля – Земля – Юпитер в пространстве.

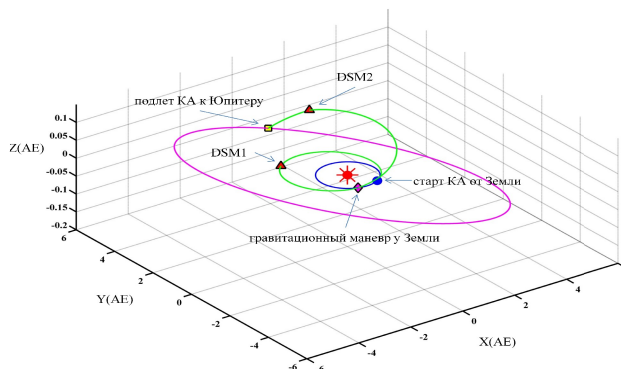


Рисунок 5.4 - Траектория перелета Земля – Земля – Юпитер

Из полученного решения вспомогательной задачи используются даты обоих гравитационных маневров и векторы гиперболических избытков скорости после гравитационных маневров. Отдельно проводится оптимизация каждого из трех гелиоцентрических участков рассматриваемого маршрута Земля – Земля – Земля – Юпитер. Формулировки задач оптимизации траектории для разных участков несколько отличаются.

Для первого участка величина гиперболического избытка скорости при старте от Земли оптимизируется перебором, а время перелета до первого ГМ было выбрано равным 1 год. Оптимизируются направление гиперболического избытка скорости и закон управления движением на первом гелиоцентрическом перелете Земля – Земля. При этом условия подлета к Земле для первого ГМ выбираются так, чтобы за счет ГМ можно было обеспечить такой вектор гиперболического избытка скорости при отлете от Земли, какой был найден во вспомогательной задаче. Для обоих участков гелиоцентрической траектории Земля – Земля в конце траектории рассматриваются следующие краевые условия:

1. положение КА совпадает с положением Земли;
2. модуль вектора гиперболического избытка скорости при подлете к Земле равен модулю вектора гиперболического избытка скорости после пролета Земли;
3. базис-вектор при подлете к Земле принадлежит плоскости гиперболы пролета;

4. угол между асимптотами гиперболы равен максимально допустимому углу между асимптотами гиперболы.

При выборе гелиоцентрической траектории Земля – Юпитер обеспечивается нулевая стыковка. При этом время перелета перебирается.

Исходными данными для оптимизации рассматриваемых схем перелёта являются:

- Масса орбитального блока в составе ХРБ КВТК и КА на базовой околоземной орбите – 24235 кг;
- Высота базовой околоземной круговой орбиты - 180 км;
- Конечная масса ХРБ КВТК – 3330 кг;
- Удельный импульс двигательной установки ХРБ КВТК – 470 с;
- Удельный импульс маршевой ЭРДУ - 4650с;
- Тяга маршевой ЭРДУ КА - 3.508701 Н (такая тяга обеспечивается входной электрической мощностью 100 кВт при КПД ЭРДУ 0.8);
- Минимальная высота пролёта Земли при гравитационном маневре 400 км.

Таблица 5.2 – Массовые характеристики траектории перелета Земля – Земля – Земля – Юпитер с ЭРДУ

Гиперболический избыток скорости при отлете от Земли (м/с)	800	900	1000	1100	1200
Масса КА в начале гелиоцентрической траектории (кг)	8617,36	8597,44	8575,26	8550,81	8524,11
Требуемая масса топлива на первом участке Земля - Земля (кг)	533,65	506,27	480,67	456,62	433,9
Требуемая масса топлива на втором участке Земля - Земля (кг)	92	92,09	92,13	92,13	91,38
Требуемая масса топлива на участке Земля - Юпитер (кг)	880,12	880,94	881,31	881,27	880,91
Доставляемая масса КА в окрестность Юпитера (кг)	7111,55	7118,14	7121,14	7120,09	7117,91

В таблице 5.2 приведены полученные массовые характеристики траектории перелета Земля – Земля – Земля – Юпитер КА с ЭРДУ. Из таблицы 5.2 видно, что оптимальное значение гиперболического избытка скорости приблизительно равно 1 км/с. Максимальная масса КА при подлете к Юпитеру – 7121 кг.

Полученная квазиоптимальная траектория показана на рисунке 4.5. Дата старта – 22-го июля 2019 г. (положение Земли в этот момент показано синим кружком). На первом гелиоцентрическом участке траектории Земля – Земля есть 4 активных участка (они

показаны красным), разделенных тремя пассивными участками. КА встречается с Землей для первого ГМ 22-го июля 2020 года. На гелиоцентрическом перелете между гравитационными маневрами у Земли существует только один активный участок, расположенный примерно в середине этого перелета. 3-го июня 2022 года КА снова встречается с Землей для второго ГМ (на рисунке 5.5 положение Земли в этот момент времени обозначено, синим треугольником). После второго ГМ у Земли КА перелетает к Юпитеру. На гелиоцентрическом участке Земля – Юпитер существует только один активный участок в конце траектории перелета, который обеспечивает нулевую стыковку с Юпитером. КА встречается с Юпитером 5-го июля 2025 года (на рисунке 5.5 положение Юпитера в этот момент времени обозначено фиолетовым кружком). Масса КА в этот момент равна 7121 кг. Суммарное время выполнения всего маршрута полета к Юпитеру составляет 2175 суток (5.95 года).

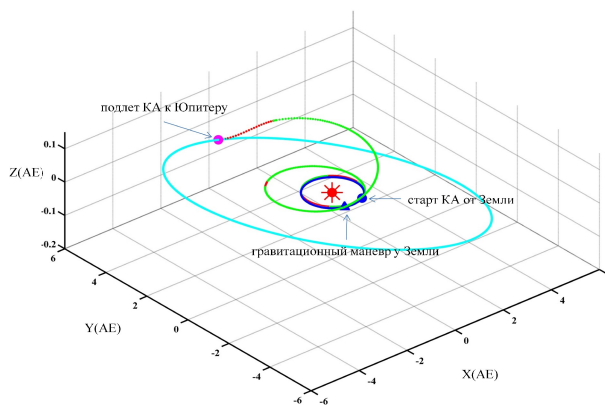


Рисунок 5.5. Гелиоцентрическая траектория Земля – Земля – Земля – Юпитер.

В данном разделе предлагается подход, с помощью которого можно избежать сложности решения четырехточечной краевой задачи при оптимизации траектории перелета КА с ЭРДУ к Юпитеру с использованием двух гравитационных маневров у Земли. В основе этого подхода лежит решение вспомогательной задачи импульсного перелета, отказ от сквозной оптимизации и от выполнения некоторых условий оптимальности, в связи, с чем полученное решение названо квазиоптимальным.

Близость этого решения к оптимальному подтверждается тем, что КА с очень большой массой (7121 кг) можно доставить в окрестность Юпитера по траектории с двумя гравитационными маневрами у Земли путем использования транспортной космической системы на базе ракеты-носителя «Ангара А5», ХРБ КВТК и ЭРДУ с входной электрической мощностью 50 кВт. Полное время реализации маршрута составляет 5.95 года.

5.4 КВАЗИОПТИМАЛЬНАЯ ТРАЕКТОРИЯ КА С ЭРДУ ПО МАРШРУТУ ЗЕМЛЯ – ЗЕМЛЯ – ВЕНЕРА – ЗЕМЛЯ – ЗЕМЛЯ – ЮПИТЕР

В проектах для исследования Юпитера рассматриваются различные маршруты полета КА к Юпитеру. Одним из часто исследуемых является маршрут с тремя гравитационными маневрами “VEEGA” (Venus – Earth – Earth Gravity Assists). По-видимому, такой маршрут будет использован для миссии Европейского Космического Агентства (ESA) [140]. Использование одного или двух гравитационных маневров у Земли при полете к Юпитеру исследовано в [35,42-46]. В России в рамках проекта «Лаплас-П» рассматривается ряд схем реализации доставки КА в окрестность Юпитера. В нескольких работах исследована и уже упомянутая схема полета с маршрутом “VEEGA”. Эта схема анализируется в статье коллектива авторов из НПО им. Лавочкина и Института Космических Исследований РАН[18]. В рамках описанной в этой статье схемы на всех 4 гелиоцентрических участках траектории не предполагается работа какой-либо маршевой двигательной установки. Характеристики схемы (дата старта, даты всех трех гравитационных маневров и их параметры, дата подлета КА к Юпитеру, вектор гиперболического избытка скорости при старте от Земли) выбраны такими, что КА достигает окрестности Юпитера без использования включения маршевой двигательной установки.

В настоящем разделе при использовании той же транспортной системы (на базе ракеты-носителя Протон-М) проанализирована возможность уменьшить требуемый при старте от Земли гиперболический избыток скорости за счет добавления ещё одного ГМ у Земли. Добавляемый гравитационный маневр у Земли является первым гравитационным маневром для рассматриваемого маршрута (Земля – Земля – Венера – Земля – Земля – Юпитер). На траектории первого гелиоцентрического перелета Земля – Земля предполагается работа электроракетной двигательной установки. Именно она обеспечивает подлет к Земле с относительно большим гиперболическим избытком скорости. При этом траектория перелета после первого ГМ у Земли считалась очень близкой к траектории КА, названного в статье [18] космическим аппаратом № 1. То есть дата первого ГМ у Земли была выбрана практически равной (с точностью до одних суток) дате старта, приведенной в [18]. Первый гравитационный маневр у Земли обеспечивает почти такой же вектор гиперболического избытка скорости (его величина уменьшена всего на 9 м/с), который обеспечивается при старте от Земли в работе [18]. Все характеристики последующей траектории с небольшой «погрешностью» совпадают. Возможно, эти погрешности связаны с небольшим отличием характеристик

используемого «планетария» или точности используемых алгоритмов оптимизации траектории.

Рассматривается следующая схема маршрута.

РН выводит КА на базовую околоземную орбиту, после чего химический разгонный блок обеспечивает отлет КА от Земли с небольшой выбираемой величиной гиперболического избытка скорости (1.3 км/с) и отделяется от КА. Затем СЭРДУ обеспечивает гелиоцентрический перелет Земля – Земля с целью осуществления первого ГМ у Земли. Величина гиперболического избытка скорости при первом гравитационном маневре у Земли составляет около 3.46 км/с.

На всем дальнейшем маршруте с несколькими гравитационными маневрами у Венеры и Земли работа маршевой двигательной установки не требуется. Всего выполняется 4 гравитационных маневра (у Земли, у Венеры и затем ещё два последовательных гравитационных маневра у Земли). За счет третьего ГМ КА переходит на гелиоцентрическую орбиту, резонансную с орбитой Земли. Третий и последний (четвертый) гравитационные маневры выполняются с большой величиной гиперболического избытка скорости (более 10 км/с). Характеристики гравитационных маневров обеспечивают доставку КА в окрестность Юпитера с небольшим гиперболическим избытком скорости при подлете к нему (около 5.9 км/с).

Движение КА в окрестности Юпитера не анализируется во избежание неточностей массовой модели КА и его химической двигательной установки, используемой для торможения в окрестности Юпитера. Критерием оптимизации рассматривается масса КА, доставляемого в окрестность Юпитера.

Разработанный подход к анализу сформулированной задачи предполагает два этапа исследования. На первом этапе анализируется заключительная часть траектории – траектория после первого ГМ у Земли. Она оптимизируется независимо от начального участка траектории перелета (траектории Земля – Земля до первого гравитационного манера у неё). В результате определяются оптимальная дата первого ГМ и вектор гиперболического избытка скорости после него. На втором этапе исследования оптимизируется участок траектории до первого ГМ у Земли. При этом перечисленные выше характеристики первого этапа предполагаются известными. На этом этапе находятся оптимальные: дата старта от Земли, вектор гиперболического избытка скорости при старте от Земли, программа работы ЭРДУ (программа включения-выключения двигателя, программы по углам тангажа и рыскания КА) на гелиоцентрическом перелете

Земля – Земля. Критерием оптимизации рассматривается максимизируемая масса КА в момент подлета КА к Земле для первого ГМ у неё.

На первом этапе рассматривается задача оптимизации перелета по маршруту Земля – Венера – Земля – Земля – Юпитер как задача оптимизации импульсного перелета. Она формулируется так, что её решение можно будет рассматривать в качестве оптимального для заключительной части всего рассматриваемого маршрута: Земля (первый гравитационный маневр) – Венера – Земля – Земля – Юпитер.

В таблице 5.3 приведены основные характеристики, полученные при решении задачи первого этапа исследования и относящиеся к траектории Земля – Венера – Земля – Земля – Юпитер, оптимальной по выбранному критерию. На этой траектории все гравитационные маневры оказались пассивными, а величины импульсов скорости на гелиоцентрических перелетах практически нулевыми.

Таблица 5.3 - Основные характеристики траектории перелета Земля – Венера – Земля – Земля – Юпитер

Дата старта		07.09.2026
Вектор гиперболического избытка скорости при отлете от Земли после первого ГМ	м/с	-593.983 -3324.805 - 750.933
Модуль вектора гиперболического избытка скорости при отлете от Земли	м/с	3459.576
Время перелета Земля – Венера	сут	170. 996
Дата ГМ у Венеры		25.02.2027
Модуль вектора гиперболического избытка скорости при гравитационном маневре у Венеры	м/с	7108.320
Радиус перицентра гиперболы пролета Венеры	км	18222.912
Вектор гиперболического избытка после ГМ у Венеры	м/с	333.019 -7015.935 1092.691
Время перелета Венера – Земля	сут	309. 664
Дата второго ГМ у Земли		01.01.2028
Модуль вектора гиперболического избытка скорости у Земли при втором гравитационном маневре у неё	м/с	10290. 988
Радиус перигея гиперболы пролета Земли	км	7151.431
Вектор гиперболического избытка после второго ГМ у Земли	м/с	-2342.949 -8241.380 5700.411
Время перелета Земля – Земля	сут	730.513
Дата третьего ГМ у Земли		31.12.2029
Модуль вектора гиперболического избытка скорости у Земли при третьем гравитационном маневре у неё	м/с	10304. 738
Радиус перигея гиперболы пролета при третьем гравитационном маневре у Земли	км	7797.469
Вектор гиперболического избытка после третьего ГМ у Земли	м/с	-6902.911 -7604.650 840.680

Время перелета Земля – Юпитер	сут	1025
Дата подлёта к Юпитеру		21.10.2032
Вектор гиперболического избытка при подлете к Юпитеру	м/с	-4851.639 -3376.677 129.497
Модуль вектора гиперболического избытка скорости при подлете к Юпитеру	м/с	5912.454
Суммарное время полета по маршруту	сут	2235.818

На рисунке 5.10 представлена полученная траектория перелета Земля – Венера – Земля – Земля – Юпитер в пространстве. На рисунке показаны характерные точки траектории. Начальная точка этой траектории обозначена как старт КА от Земли.

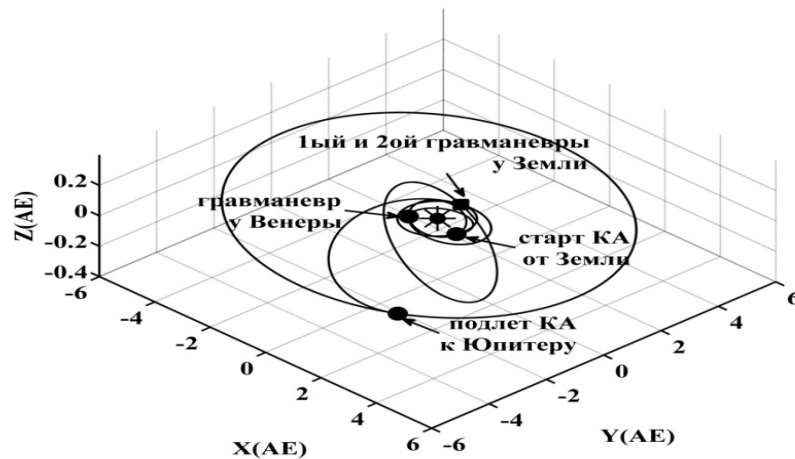


Рисунок 5.10 Траектория перелета Земля – Венера – Земля – Земля – Юпитер

Все гравитационные маневры удалось сделать пассивными. Траектория перелета Земля – Земля (между гравитационными маневрами у Земли) оказывается резонансной орбитой с орбитой Земли. Перелет на этом гелиоцентрическом участке занимает два года.

На втором этапе рассматривается оптимизация траектории первого гелиоцентрического перелета Земля – Земля для КА с ЭРДУ. Оптимизируются программа включения-выключения ЭРДУ и программа по углам тангажа и рыскания. Задача оптимизации рассматриваемой траектории перелета КА с ЭРДУ формулируется с помощью ПМП Понтрягина. Гамильтониан задачи оптимального управления, уравнения для сопряженных переменных и условия оптимальности выбираемых программ полета, определяемые из максимума гамильтониана, приведены в [35].

В момент подлета КА к Земле должны выполняться следующие краевые условия (включая и условия трансверсальности):

- Радиус-вектор КА, известный из решения задачи на первом этапе исследования, должен быть равен радиус-вектору Земли в момент ГМ у Земли;

- величина гиперболического избытка скорости при подлете к Земле должна быть равна известной величине гиперболического избытка скорости после пролета Земли;
- угол между вектором гиперболического избытка скорости при подлете к Земле и при отлете от Земли не должен быть больше максимального угла поворота асимптоты гиперболы при гравитационном маневре;
- если угол между векторами гиперболических избытков скорости при подлете к Земле и при отлете от Земли равен максимальному углу поворота асимптоты гиперболы, то вектор, сопряженный к вектору скорости, должен находиться в плоскости пролетной гиперболы. Это условие обычно записывается как равенство нулю смешанного произведения трех векторов: векторов подлетного и отлетного гиперболических избытков скорости и вектора, сопряженного к вектору скорости [35];
- если угол между векторами гиперболических избытков скорости при подлете к Земле и при отлете от Земли меньше максимального угла поворота асимптоты гиперболы, то вектор, сопряженный к вектору скорости, должен быть коллинеарен вектору гиперболического избытка скорости при подлете к Земле [35]
- Сопряженная переменная к массе КА в конце в момент подлета КА к Земле равна единице.

Краевая задача ПМП (её порядок равен 7) была решена для следующих характеристик транспортной системы.

- Зависимость массы КА после отделения химического разгонного блока от величины гиперболического избытка скорости при старте от Земли получена на основе анализа материалов сайта ГКНПЦ им. Хруничева для транспортной системы Протон-М и Бриз-М.

- Удельный импульс маршевой ЭРДУ 4500 с, её тяга 0.6 Н (4 параллельно работающих двигателей типа RIT22) [215].

- Минимальная высота пролёта Земли при гравитационном маневре 400 км.

Получены следующие проектно-баллистические характеристики траектории перелета Земля – Земля для КА с ЭРДУ:

Дата старта от Земли – 07.09.2025;

Время перелета Земля – Земля – 365.25 суток (1 год);

Гиперболический избыток скорости при старте от Земли – 1300 м/с;

Масса КА в начале гелиоцентрического перелета – 6137.19 кг;

Требуемая масса топлива (ксенона) – 391.68 кг;

Масса КА при подлете к Земле у неё – 5745.51 кг;

Минимальная высота ГМ у Земли – 400 км.

Полученная оптимальная траектория гелиоцентрического перелета Земля – Земля показана на рисунке 5.11.

Точка старта КА от Земли и точка, в которой выполняется гравитационный маневр у Земли (они отмечена кружочком), практически совпадают, так как время перелета равно одному году. На траектории перелета есть два активных участка, разделенных пассивным участком. Активные участки траектории выделены жирной линией.

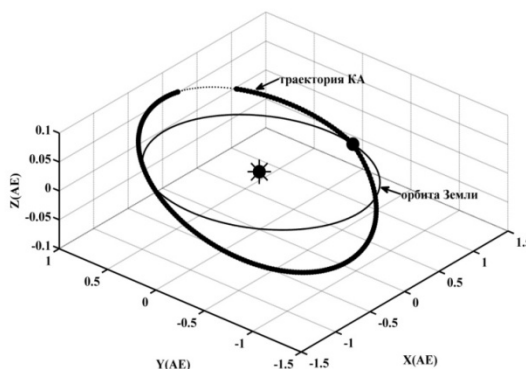


Рисунок 5.11 Траектория перелета Земля – Земля КА с ЭРДУ

Для анализа возможного выигрыша в массе КА, доставляемого в окрестность Юпитера за счет введения дополнительного ГМ у Земли и использования ЭРДУ, проводится сравнение со схемой перелета, приведенной в статье [18]. Минусы предложенной в настоящем разделе схемы очевидны: время достижения окрестности Юпитера увеличивается на 1 год, требуется использование ЭРДУ (правда, только на начальном годовом участке перелета).

К плюсам анализируемой схемы следует отнести возможное увеличение массы КА, доставляемой к Юпитеру. При сравнении пренебрежем массой топлива, требуемой для коррекции траектории перелета (считаем, что для рассматриваемых вариантов схем перелета эти массы равны). Тогда в варианте использования схемы, анализируемой в [18], масса КА, доставляемого в окрестность Юпитера, может быть оценена как масса КА после отделения химического разгонного блока, обеспечившего гиперболический избыток скорости при старте от Земли величиной 3459.6 м/с – эта масса равна 5018 кг. В варианте схемы перелета, анализируемой в данном разделе, для корректной оценки массы КА в окрестности Юпитера из приведенной массы 5745.5 кг следует вычесть массу энергодвигательной установки, включающей массу энергетической установки (предполагается, что это солнечная установка), массу ЭРДУ и массу пустых баков из-под истратенного топлива. Если взять удельную массу системы хранения топлива равной 0.1, тогда масса этой системы будет равна 40 кг. На рисунке 5.12 представлена зависимость

увеличения массы КА, доставляемого в окрестность Юпитера, как функции удельной массы энергодвигательной установки при использовании схемы перелета, анализируемой в настоящей работе. Удельная масса варьируется в диапазоне от 15 до 35 кг/кВт входной электрической мощности используемой ЭРДУ.

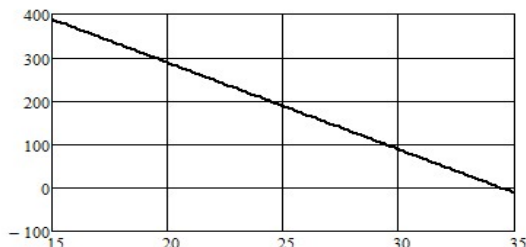


Рисунок 5.12 Выигрыш в массе КА, доставляемого в окрестность Юпитера, [кг] как функция удельной массы энергодвигательной установки [кг/кВт]

Из представленной зависимости видно, что для существенного увеличения массы, при котором целесообразно идти на усложнение схемы полета, необходимо добиться такого совершенства энергодвигательной установки, чтобы её удельная масса была, по крайней мере, меньше 20 кг/кВт.

5.5 КВАЗИОПТИМАЛЬНАЯ ТРАЕКТОРИЯ ВЫВЕДЕНИЯ КА НА СИСТЕМУ ГЕЛИОЦЕНТРИЧЕСКИХ ОРБИТ

В настоящее время разрабатывается несколько проектов исследования Солнца с гелиоцентрических орбит с низким перигелием. Среди них проект НАСА "Solar Probe Plus" [214], проект Европейского космического агентства "Solar Orbiter" и Российский проект "Интергелио-Зонд". Схемы анализируемых в этих проектах траекторий выведения включают последовательность гравитационных маневров у Земли и Венеры.

Анализу возможных систем рабочих орбит для исследования Солнца посвящены работы [158,159,161,162]. Во многих из них исследована проблема выведения КА на систему рабочих орбит для различных транспортных космических систем. Так, в [47, 48, 158] анализируется возможность использования стационарных плазменных двигателей для реализации гелиоцентрического перелета Земля – Земля. В [39, 41] предложена схема прямого выведения (без использования гравитационных маневров) с использованием электроракетной двигательной установки на базе RIT-22 на рабочую гелиоцентрическую орбиту с радиусом перигелия 70 радиусов Солнца и наклоном к плоскости эклиптики 30 градусов. В [33] анализируется возможность использования химических ракетных двигателей, обеспечивающих условия для гравитационных маневров при выведении на рабочие орбиты. В [159] поставлена задача сквозной оптимизации траектории выведения КА на систему рабочих гелиоцентрических орбит и предлагается способ оптимизации отдельных участков траектории выведения. В ряде публикаций [158,159,162], одним из

требований к рабочим орбитам рассматривается ограничение снизу величины радиуса перигелия орбиты значением 60 радиусов Солнца.

В данном разделе анализируется возможность использования для исследования Солнца системы гелиоцентрических рабочих орбит со следующими свойствами:

- все рабочие орбиты системы имеют достаточно малый радиус перигелия (менее 70 радиусов Солнца);
- небольшое наклонение к плоскости эклиптики первой рабочей орбиты, которое увеличивается при переходе на следующую рабочую орбиту. Наклонение к плоскости эклиптики последней рабочей орбиты немного больше 30 градусов;
- выведение КА на первую рабочую орбиту и перевод КА с одной орбиты на другую осуществляется последовательностью гравитационных маневров у Венеры;
- все рабочие орбиты (кроме последней) являются резонансными с орбитой Венеры.

Выведение КА на опорную орбиту производится РН «Союз 2.1Б» с космодрома Байконур. В качестве опорной орбиты используется круговая орбита высотой 200 км с наклонением 51.6° . Масса КА после выведения на эту орбиту составляет 8200 кг [216]. Химический разгонный блок "Фрегат" обеспечивает старт КА с опорной орбиты и уход из окрестности Земли с некоторой величиной гиперболического избытка скорости. Удельный импульс ХРБ принят равным 333.2 с [5]. Из этого же источника были взяты: масса рабочего топлива блока (5250 кг) и его конечная масса ХРБ 930 кг.

Максимальный гиперболический избыток скорости, который может обеспечить рассматриваемая величина рабочего топлива, составляет только 1.59 км/с. Заметим, что транспортная система, рассматриваемая в проекте "Solar Probe Plus" и базирующаяся на Atlas-V 551 с разгонным блоком STAR-48BV, обеспечивает уход из окрестности Земли с гиперболическими избытками 10.68...12.57 км/с [214]. При этом в проекте "Solar Probe Plus" гиперболический избыток скорости отлета от Земли при старте от неё обеспечивает выход на гелиоцентрическую орбиту с малой величиной радиуса перигелия (до 0.2 АЕ - 43 RS), и такая орбита может быть с успехом использована для исследования Солнца. КА с гиперболическим избытком 1.59 км/с может позволить выйти на орбиту с радиусом перигелия не менее 0.81 а.е., но такая орбита даже не достигает орбиты Венеры, и ее сложно использовать для исследования Солнца. Для выведения на рабочие орбиты используется ЭРДУ на основе солнечной энергетики и двух параллельно работающих высокочастотных двигателей типа RIT22.

Характеристики ЭРДУ приняты следующими [215]: удельный импульс 4500 с; тяга одного двигателя 150 мН, общая тяга двигательной установки 300 мН. Потребляемая электрическая мощность и тяга работающей ЭРДУ принимается постоянной, не зависящей от гелиоцентрического расстояния.

5.5.1 Траектория Земля – Земля – Венера для выведения КА на первую рабочую орбиту

Анализируемая схема полета КА включает в себя следующие участки:

- 1) выведение КА на околоземную орбиту с помощью РН «Союз-2.1Б»;
- 2) выведение КА на отлетную от Земли траекторию с помощью ХРБ «Фрегат» с последующим его отделением;
- 3) участок перелета по гелиоцентрической траектории Земля – Земля с использованием маршевой ЭРДУ;
- 4) пассивный гравитационный маневр у Земли;
- 5) участок гелиоцентрического перелета Земля – Венера (на нем не предполагается работа маршевых двигательных установок);
- 6) последовательность пассивных гравитационных маневров у Венеры с выведением КА на последовательность гелиоцентрических рабочих орбит, на которых не предполагается включение маршевых двигательных установок.

Предполагается, что на этих участках траектории производится коррекция траектории для обеспечения условий ГМ у Венеры. В качестве корректирующей установки используется химическая двигательная установка КА.

Таким образом, на гелиоцентрической траектории КА используются гравитационные маневры у Земли и Венеры. Минимальная высота пролета Земли и Венеры при проведении гравитационных маневров принята равной 400 км. Координаты и компоненты вектора скорости планет определяются с использованием эфемеридного программного обеспечения JPL DE405[207]. Анализ траектории межпланетного перелета проводится в рамках модели точечных сфер действия.

В анализируемой схеме полета величина гиперболического избытка скорости при подлете к Венере определяет возможность проведения эффективных гравитационных маневров у Венеры, т.к. обеспечивает достижение большого наклона рабочих орбит и необходимых значений радиусов перигелия и афелия. Принципиально то, что чем больше эта величина, тем шире возможности по выбору характеристик рабочих орбит. Было проанализировано несколько значений гиперболического избытка скорости при подлете к

Венере, из которых выбрано и представлено здесь одно – 18.5 км/с. Выбор такого значения связан, прежде всего, с тем, что наклонение последней рабочей орбиты должно быть больше 30 градусов, и оно гарантированно обеспечивается при гиперболическом избытке 18.5 км/с.

Нахождение траектории выведения на первую рабочую орбиту проводилось в следующей оптимизационной постановке. Критерием оптимальности рассматривалась масса КА при подлете к Земле для ГМ у неё. Выбираемыми (оптимизируемыми) характеристиками были выбраны:

- 1) величина и направление вектора гиперболического избытка скорости при старте от Земли;
- 2) дата старта;
- 3) закон включения – выключения ЭРДУ на траектории гелиоцентрического перелета;
- 4) программа ориентации вектора тяги ЭРДУ (программа по углу тангажа и рыскания) на активных участках траектории гелиоцентрического перелета.

Дата выполнения ГМ у Земли, как и время гелиоцентрического перелета Земля – Венера, были предварительно выбраны из условия заданного значения гиперболического избытка скорости подлета к Венере (18.5 км/с) при малой величине гиперболического избытка скорости во время ГМ у Земли.

Для решения оптимизационной проблемы использовался подход ПМП с полным набором необходимых условий оптимизации. Уравнения оптимального движения приведены в разделе 1.6.2. Условия оптимальности даты старта использовались из [158]. Условия оптимальности величины гиперболического избытка скорости при старте от Земли приведены в [158].

Полученные в результате оптимизации характеристики схемы полета и траектории выведения на первую рабочую орбиту приведены в Таблице 5.4. Выбранная дата старта – 10 октября 2018 года. Величина вектора гиперболического избытка скорости при отлете от Земли – 600 м/с. Масса КА после отделения ХРБ "Фрегат" – 2109.9 кг. Время гелиоцентрического перелета Земля – Земля составляет 550 суток. Величина гиперболического избытка скорости при подлете к Земле для ГМ – 9802.62 м/с. На гелиоцентрической траектории перелета Земля – Земля тратится 275.65 кг ксенона. Масса КА при подлете к Земле для ГМ у нее равна 1834.27 кг. Время гелиоцентрического перелета Земля – Венера равно 46,927 суток. Гиперболический избыток скорости при подлете к Венере – 18.5 км/с.

Таблица 5.4 – Характеристики траектории полета Земля – Земля – Венера

Дата старта	10.10.2018
Модуль вектора гиперболического избытка скорости при отлете от Земли (м/с)	600
Масса КА после отделения ХРБ (кг)	2109,9
Время перелета на участке Земля – Земля (сутки)	550
Требуемая масса топлива на участке Земля – Земля (кг)	275.65
Масса КА при подлете к Земле для ГМ у нее (кг)	1834.27
Дата осуществления ГМ у Земли	12.04.2020
Вектор гиперболического избытка скорости после ГМ у Земли в геоцентрической эклиптической системе координат (м/с)	[648.67; 9772.91; 401.03]
Величина гиперболического избытка скорости при гравитационном маневре у Земли (м/с)	9802.62
Время перелета Земля – Венера (сутки)	46,927
Дата первого подлета к Венере	28.05.2020
Вектор гиперболического избытка скорости при первом подлете к Венере в планетоцентрической эклиптической системе координат (м/с)	[2215.16; 18233.37; 2210.77]
Модуль вектора гиперболического избытка скорости при подлете к Венере (км/с)	18.5

Траектория гелиоцентрического перелета Земля – Земля – Венера показана на рисунке 5.13. На активных участках траектории перелета стрелочками изображены направления тяги ЭРДУ. Пассивные участки траектории обозначены точками и тонкими линиями. На рисунке 5.14 показана проекция гелиоцентрической траектории КА Земля – Земля – Венера на плоскость XZ гелиоцентрической эклиптической системы координат. Видно, что траектория перелета Земля – Земля практически принадлежит плоскости эклиптики.

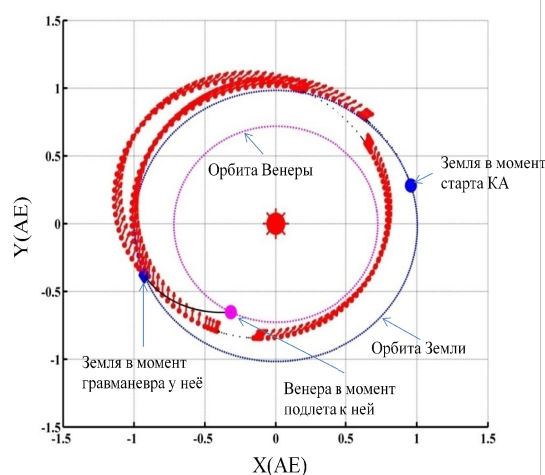


Рисунок 5.13 – Проекция на плоскость эклиптики X-Y траектории гелиоцентрического перелета Земля – Земля – Венера

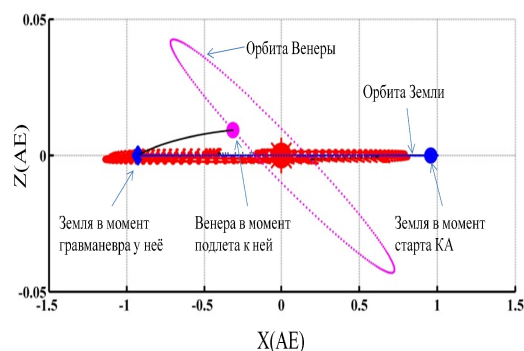


Рисунок 5.14 – Проекция на плоскость XZ гелиоцентрической эклиптической системы координат траектории гелиоцентрического перелета Земля – Земля – Венера

Результатом представленного анализа являются условия при подлете КА к Венере для первого ГМ у неё (дата и вектор гиперболического избытка скорости).

5.5.2 Траектория Земля – Земля – Венера – Земля – Венера для выведения КА на первую рабочую орбиту

В настоящем разделе рассмотрим возможность усложнения схемы перелета для увеличения массы КА, выводимого на рабочие гелиоцентрические орбиты. Анализируемая схема может использоваться и для увеличения величины гиперболического избытка скорости при подлете к Венере с последующими гравитационными маневрами у неё. Благодаря увеличению величины гиперболического избытка скорости при гравитационном маневре у Венеры появляется возможность после серии гравитационных маневров у Венеры выйти на гелиоцентрическую орбиту с большим наклоном к плоскости эклиптики и создать более благоприятные условия для наблюдения приполярных областей Солнца.

Анализируемая схема полета КА включает в себя следующие участки:

- 1) выведение КА на околоземную орбиту с помощью РН «Союз-2.1Б»;
- 2) выведение КА на отлетную от Земли траекторию с помощью ХРБ «Фрегат» с последующим его отделением;
- 3) участок перелета по гелиоцентрической траектории Земля – Земля с использованием маршевой ЭРДУ;
- 4) пассивный гравитационный маневр у Земли;
- 5) участок гелиоцентрического перелета Земля – Венера
- 6) пассивный гравитационный маневр у Венеры;
- 7) участок гелиоцентрического перелета Венера – Земля;
- 8) пассивный гравитационный маневр у Земли;
- 9) участок гелиоцентрического перелета Земля – Венера;
- 10) последовательность пассивных гравитационных маневров у Венеры с выведением КА на последовательность гелиоцентрических рабочих орбит.

Даты выполнения первого и второго гравитационных маневров у Земли, как и время гелиоцентрического перелета, Земля – Венера – Земля – Венера, были предварительно выбраны из условия заданного значения гиперболического избытка скорости подлета к Венере (18.5 км/с) при малой величине гиперболического избытка скорости при первом гравитационном маневре у Земли. Для этого отдельно оптимизирована схема Земля – Венера – Земля – Венера с заданным значением гиперболического избытка скорости при подлете к Венере (18.5 км/с).

Оптимизация траектории перелета КА с ЭРДУ для первого гелиоцентрического участка проводилась так же, как в предыдущем разделе.

Полученные в результате оптимизации характеристики схемы перелета Земля – Земля – Венера – Земля – Венера приведены в Таблице 5.5.

Выбранная дата старта – 5 октября 2020 года. Величина вектора гиперболического избытка скорости при отлете от Земли – 600 м/с. Масса КА после отделения ХРБ "Фрегат" – 2109.9 кг. Время гелиоцентрического перелета Земля – Земля составляет 475 суток. Величина гиперболического избытка скорости при подлете к Земле для ГМ – 4852.1 м/с. На гелиоцентрической траектории перелета Земля – Земля тратится 120.62 кг ксенона. Масса КА при подлете к Земле для ГМ у Земли равна 1985.58 кг.

Таблица 5.5 – Характеристики траектории полета Земля – Земля – Венера – Земля – Венера

Дата старта	5.10.2020
Модуль вектора гиперболического избытка скорости при отлете от Земли (м/с)	600
Масса КА после отделения ХРБ (кг)	2109.91
Время перелета на участке Земля – Земля (сутки)	475
Требуемая масса топлива на участке Земля – Земля (кг)	120.62
Масса КА при подлете к Земле для ГМ у нее (кг)	1989.29
Дата осуществления первого ГМ у Земли	23.01.2022
Вектор гиперболического избытка скорости после первого ГМ у Земли (м/с)	[4095.32; 2408.29; 985.54]
Величина гиперболического избытка скорости при первом гравитационном маневре у Земли (м/с)	4852.09
Время перелета Земля – Венера (сутки)	166.11
Дата первого подлета к Венере	08.07.2022
Вектор гиперболического избытка скорости после первого ГМ у Венеры (м/с)	[4765.70; 8903.35; 724.01]
Величина гиперболического избытка скорости при первом гравитационном маневре у Венеры (м/с)	10124.5
Время перелета Венера – Земля (сутки)	323.92
Дата осуществления второго ГМ у Земли	28.05.2023
Вектор гиперболического избытка скорости после второго ГМ у Земли (м/с)	[-2569.11; 12.074.51; -938.81]
Величина гиперболического избытка скорости при втором гравитационном маневре у Земли (м/с)	12380.45
Время перелета Земля – Венера (сутки)	277.57
Дата осуществления второго ГМ у Венеры	29.02.2024
Вектор гиперболического избытка скорости при втором подлете к Венере в планетоцентрической эклиптической системе координат (м/с)	[-7264.45; 16968.24; 1247.61]
Модуль вектора гиперболического избытка скорости при втором подлете к Венере (км/с)	18.5

Траектория гелиоцентрического перелета Земля – Земля – Венера – Земля – Венера показана на рисунке 5.15. Активные участки траектории перелета отмечены жирными линиями. Пассивные участки траектории обозначены тонкими линиями. На рисунке 5.16

показана проекция гелиоцентрической траектории КА Земля – Земля – Венера – Земля – Венера на плоскость XZ гелиоцентрической эллиптической системы координат.

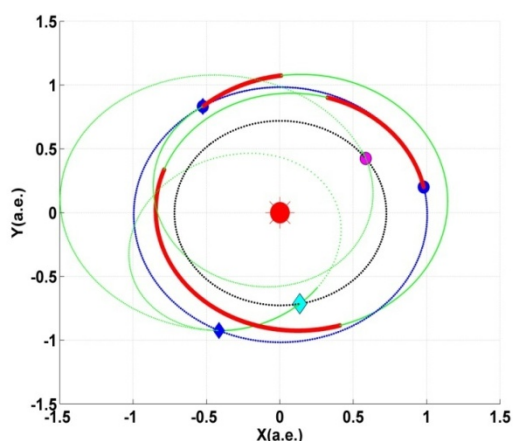


Рисунок 5.15 – Проекция на плоскость эклиптики XY траектории гелиоцентрического перелета Земля – Земля – Венера – Земля – Венера

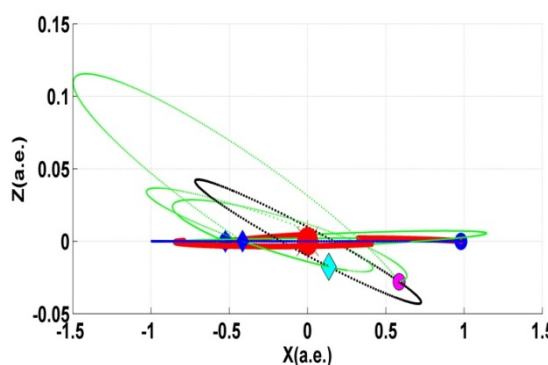


Рисунок 5.16 – Проекция на плоскость XZ гелиоцентрической эллиптической системы координат траектории гелиоцентрического перелета Земля – Земля – Венера – Земля – Венера

Из таблицы 5.5 и рисунка 5.15 видно, что движение КА на гелиоцентрических участках Земля – Венера (1), Венера – Земля и Земля – Венера (2) получилось пассивным.

Если мы хотим увеличить гиперболический избыток скорости при втором подлете к Венере (сделать его больше 18.5 км/с), то при предварительной оптимизации не удастся обеспечить пассивное движение КА на гелиоцентрическом участке Венера – Земля. На этом участке необходимо обеспечить дополнительный импульс скорости. Движение КА на гелиоцентрических участках Земля – Венера (1), Земля – Венера (2) осталось пассивным. В таблице 5.6 представлены результаты предварительной оптимизации траектории перелета КА для варианта, в котором величина гиперболического избытка скорости при втором подлете к Венере задана равной 20 км/с. Можно заметить, что чем больше это значение, тем больше возможность реализации системы рабочих орбит, в которой наклонение последней рабочей орбиты наибольшее.

Таблица 5.6 – Характеристики траектории полета Земля – Венера – Земля – Венера

Дата осуществления первого ГМ у Земли	05.02.2022
Вектор гиперболического избытка скорости после первого ГМ у Земли (м/с)	[3640.7; 3571.8; 560.9]
Величина гиперболического избытка скорости при первом гравитационном маневре у Земли (м/с)	5131.0
Время перелета Земля – Венера (сутки)	164.44
Дата первого подлета к Венере	19.07.2022
Вектор гиперболического избытка скорости после первого ГМ у Венеры (м/с)	[2397.2; 10718.1; 359.2]
Величина гиперболического избытка скорости при первом гравитационном маневре у Венеры (м/с)	10988.8
Время перелета Венера – Земля (сутки)	322.1

Дата осуществления DSM	12/01/2023
Модуль DSM (м/с)	348.0
Дата осуществления второго ГМ у Земли	06.06.2023
Вектор гиперболического избытка скорости после второго ГМ у Земли (м/с)	[-4999.1; 12507.1; -1219.1]
Величина гиперболического избытка скорости при втором гравитационном маневре у Земли (м/с)	13524.2
Время перелета Земля – Венера (сутки)	271.5
Дата осуществления второго ГМ у Венеры	04.03.2024
Вектор гиперболического избытка скорости при втором подлете к Венере в планетоцентрической эллиптической системе координат (м/с)	[-10376.9; 17073.2; 909.2]
Модуль вектора гиперболического избытка скорости при втором подлете к Венере (км/с)	20

Траектория гелиоцентрического перелета Земля – Венера – Земля – Венера показана на рисунке 5.17. Красный треугольник на участке Венера – Земля показывает место дополнительного импульса скорости в глубоком космосе.

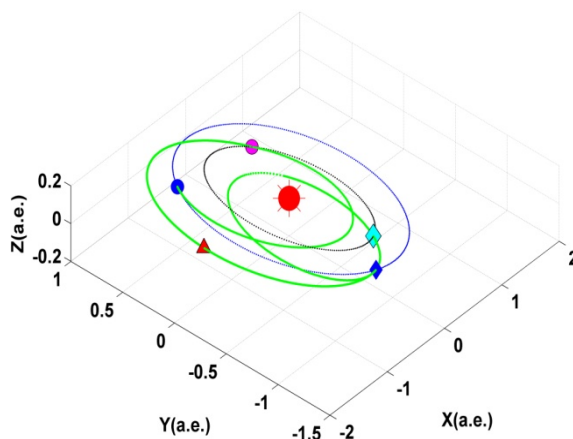


Рисунок 5.17 –Траектория гелиоцентрического перелета Земля – Венера – Земля – Венера

После предварительного анализа рассматривается следующая схема полета КА:

- 1) выведение КА на околоземную орбиту с помощью РН «Союз-2.1Б»;
- 2) выведение КА на отлетную от Земли траекторию с помощью ХРБ «Фрегат» с последующим его отделением;
- 3) участок перелета по гелиоцентрической траектории Земля – Земля с использованием маршевой ЭРДУ;
- 4) пассивные гравитационные маневры у Земли;
- 5) участок гелиоцентрического перелета Земля – Венера
- 6) пассивные гравитационные маневры у Венеры;
- 7) участок на гелиоцентрической траектории Венера – Земля с использованием маршевой ЭРДУ;

- 8) пассивные гравитационные маневры у Земли;
- 9) участок гелиоцентрического перелета Земля – Венера;
- 10) последовательность пассивных гравитационных маневров у Венеры с выводением КА на последовательность гелиоцентрических рабочих орбит.

Даты выполнения гравитационных маневров у Земли и Венеры, векторы гиперболического избытка скорости после гравитационных маневров были зафиксированы из решения предварительной задачи оптимизации. Оптимизация траектории перелета КА с ЭРДУ для первого гелиоцентрического участка Земля – Земля проводилась так же, как в предыдущем разделе. При оптимизации траектории гелиоцентрического участка Венера – Земля КА с ЭРДУ выбираются программы – оптимального включения/выключения ЭРДУ и ориентации вектором тяги ЭРДУ.

Выбранная дата старта – 18 октября 2020 года. Величина вектора гиперболического избытка скорости при отлете от Земли – 600 м/с. Масса КА после отделения ХРБ "Фрегат" – 2109.9 кг. Время гелиоцентрического перелета Земля – Земля составляет 475 суток. Величина гиперболического избытка скорости при подлете к Земле для ГМ – 5131 м/с. На гелиоцентрической траектории перелета Земля – Земля тратится 116.05 кг ксенона. Масса КА при подлете к Земле для ГМ у нее равна 1993.87 кг. На рисунке 5.18 показана траектория гелиоцентрического перелета Земля – Земля КА с ЭРДУ.

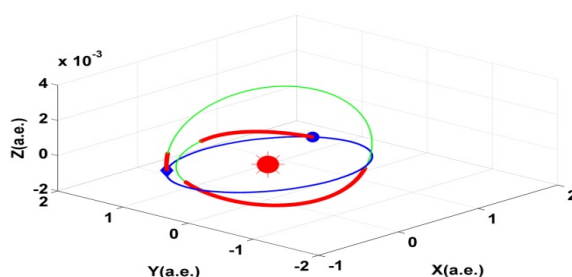


Рисунок 5.18 Траектория гелиоцентрического перелета Земля – Земля КА с ЭРДУ

Вектор гиперболического избытка скорости после первого ГМ у Земли обеспечивает пассивный участок полета к Венере. КА попадет в окрестность Венеры через 164.44 сутки с гиперболическим избытком скорости 10988.8 м/с. Вектор гиперболического избытка скорости после первого ГМ зафиксирован из решения предварительного анализа и равен [2397.2; 10718.1; 359.2] м/с. Также зафиксировано время перелета Венера – Земля. На этом участке вместо дополнительного импульса скорости реализуется движение КА с ЭРДУ. ЭРДУ должна обеспечить выбранный вектор гиперболического избытка скорости после второго пассивного ГМ у Земли. На гелиоцентрической траектории перелета Венера – Земля тратится 15.80 кг ксенона. Масса

КА при подлете к Земле для ГМ у Земли равна 1978.07 кг. На рисунке 5.19 показана траектория перелета Венера – Земля с ЭРДУ.

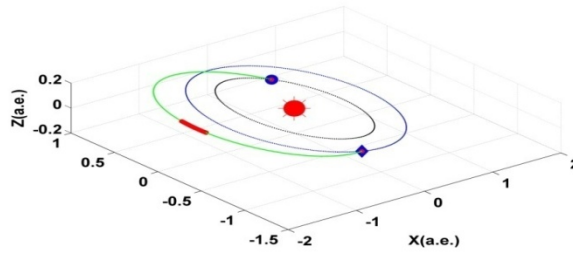


Рисунок 5.19 - Траектория перелета Венера – Земля с ЭРДУ

Вектор гиперболического избытка скорости после второго ГМ у Земли обеспечивает пассивный участок полета к Венере. КА попадет в окрестность Венеры через 271.5 сутки с гиперболическим избытком скорости 20 км/с. Вектор гиперболического избытка скорости при втором подлете к Венере равен $[-10376.89; 17073.18; 909.18]$ м/с.

На рисунке 5.20 показана проекция гелиоцентрической траектории КА Земля – Земля – Венера – Земля – Венера на плоскость X-Y гелиоцентрической эклиптической системы координат. На рисунке 4.21 показана проекция на плоскость XZ, а на рисунке 4.22 – гелиоцентрическая траектория в пространстве. На этих рисунках активные участки траектории перелета показаны жирными линиями, а пассивные – тонкими линиями.

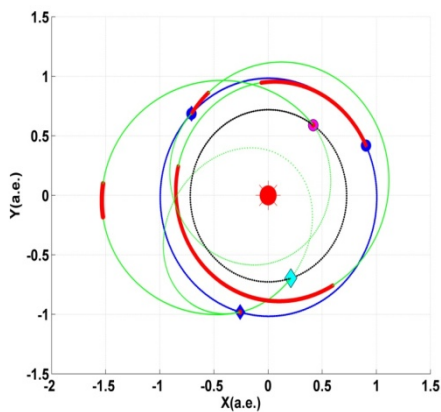


Рисунок 5.20 – Проекция на плоскость эклиптики X-Y траектории гелиоцентрического перелета Земля – Земля – Венера – Земля – Венера

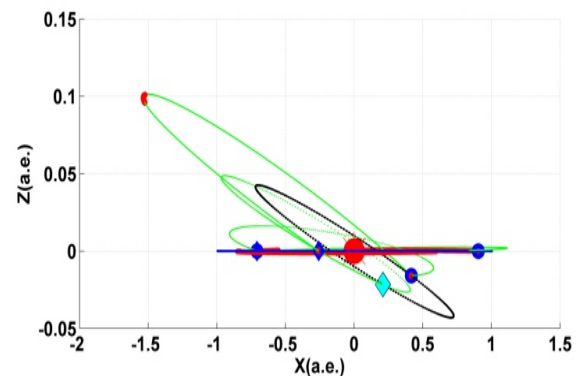


Рисунок 5.21 – Проекция на плоскость эклиптики XZ траектории гелиоцентрического перелета Земля – Земля – Венера – Земля – Венера

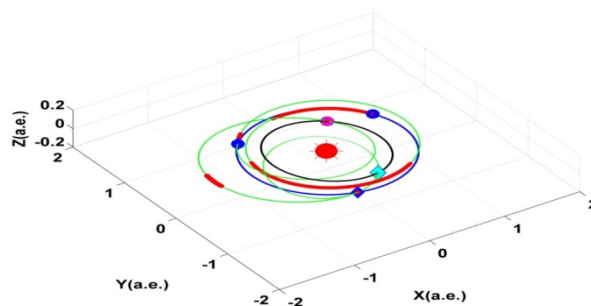


Рисунок 5.20 – Траектория гелиоцентрического перелета Земля – Земля – Венера – Земля – Венера в пространстве

При рассмотрении проблемы выведения КА на предложенные системы рабочих орбит выявлена возможность выведения КА с использованием транспортной системы на базе ракеты-носителя "Союз-2", химического разгонного блока «Фрегат» и солнечной электроракетной установки с двумя параллельно работающими двигателями типа RIT22.

Использование такой транспортной системы позволяет вывести на систему рабочих орбит КА с большой массой: КА массой более 1830 кг по схеме Земля – Земля – Венера и КА массой более 1985 кг по схеме Земля – Земля – Венера – Земля – Венера. При этом требуемая масса ксенона для ЭРДУ – около 275.65кг и 120.62 кг соответственно.

Рассмотрена возможность увеличения модуля вектора гиперболического избытка скорости при подлете к Венере (перед формулированием системы рабочих орбит) с использованием ЭРДУ на гелиоцентрическом участке Венера – Земля. При увеличении модуля вектора гиперболического избытка скорости при подлете к Венере до 20км/с надо тратить дополнительно 15.80 кг ксенона на гелиоцентрическом участке траектории Венера – Земля.

Предложенные в работе системы рабочих орбит и схемы выведения КА на эти орбиты могут рассматриваться как интересные альтернативы для разрабатываемых проектов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ ПО ГЛАВЕ

Сформулирована задача оптимизации траектории межпланетных перелетов КА с использованием пассивных гравитационных маневров и малой тягой к планете назначения или на рабочую гелиоцентрическую орбиту. Задача оптимального управления движением КА с ЭРДУ сводится к многоточечной краевой задаче и решается с помощью ПМП. Для преодоления основной сложности решения многоточечной краевой задачи предложен подход, в основе которого лежит использование решения вспомогательной задачи импульсного перелета. Поскольку мы пренебрегаем некоторыми из сформулированных условий оптимальности, получаемое решение правильнее назвать квазиоптимальным.

Представлены численные результаты оптимизации и основные характеристики траектории для перелета КА с ЭРДУ к Юпитеру при использовании космической транспортной системы Ангара-А5 и КВТК по маршрутам:

- 1) Земля – Земля – Земля – Юпитер;
- 2) Земля – Земля – Венера – Земля – Земля – Юпитер.

Представлены численные результаты оптимизации и основные характеристики траектории перелета КА с ЭРДУ при использовании космической транспортной системы Союз и Фрегат на систему гелиоцентрических орбит для исследования Солнца по маршрутам:

- 1) Земля – Земля – Венера;
- 2) Земля – Земля – Венера – Земля – Венера.

Предложенные системы рабочих орбит и схемы выведения на эти системы могут рассматриваться как интересные альтернативы разрабатываемым проектам по исследованию Солнца.

6 ОПТИМИЗАЦИЯ МЕЖПЛАНЕТНЫХ ТРАЕКТОРИЙ КА С МАЛОЙ ТЯГОЙ И ГРАВИТАЦИОННЫМИ МАНЕВРАМИ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ МЕТОДА ЭВОЛЮЦИОННОЙ СТРАТЕГИИ С АДАПТАЦИЕЙ КОВАРИАЦИОННОЙ МАТРИЦЫ

В данной главе описывается метод оптимизации межпланетных траекторий КА с малой тягой и гравитационными маневрами при использовании полного набора условий оптимальности ПМП с использованием СМА-ES. Выбор рациональных маршрутов (последовательности гравитационных маневров) предлагается проводить с использованием решения вспомогательной задачи. При оптимизации траекторий КА с ЭРДУ анализируется выбранная последовательность гравитационных маневров.

В работе исследуется следующая схема межпланетного перелета.

Химический разгонный блок обеспечивает отлет КА от Земли с оптимизируемой величиной гиперболического избытка скорости, а затем отделяется от КА.

ЭРДУ обеспечивает использование выбранных последовательностей пассивных (без подачи энергии) гравитационных маневров (причем эта последовательность может включать в себя несколько гравитационных маневров у одной и той же планеты) и доставку КА в окрестность планеты назначения с нулевым гиперболическим избытком скорости относительно этой планеты.

Рассматриваемую задачу оптимального управления можно свести к многоточечной краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием формализма ПМП. Трудности решения многоточечной краевой задачи могут быть преодолены с помощью подхода, связанного с введением вспомогательной задачи. Решение вспомогательной задачи дает возможность проанализировать несколько локальных экстремумов, выбрать рациональный маршрут перелета и получить оценки (начальные приближения) основных характеристик маршрута. Эти начальные приближения используются для сквозной оптимизации траектории перелета КА, выполняемой на последнем этапе исследования.

6.1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Предполагается, что транспортная система, обеспечивающая межпланетный перелет, имеет следующие заданные характеристики.

Известна зависимость массы КА m_o после отделения химического разгонного блока, обеспечивающего выход КА из окрестности Земли при старте КА, от величины гиперболического избытка скорости отлета от Земли V_∞ :

$$m_o = m_o(V_\infty).$$

Известны характеристики ЭРДУ, обеспечивающей гелиоцентрические характеристики траектории перелета: тяга двигателя T , удельный импульс двигателя W_{EP} . Эти характеристики рассматриваются постоянными и независимыми от условий полета (например, удаления КА от Солнца).

Выбираемыми оптимизируемыми характеристиками анализируемой миссии рассматриваются следующие параметры.

1. Маршрут миссии, предполагающий выбор последовательности гравитационных маневров.
2. Характерные даты миссии, в том числе дата старта, даты проведения гравитационных маневров, дата подлета к планете назначения.
3. Величина и направление вектора гиперболического избытка скорости при старте от Земли.
4. Программа включения-выключения ЭРДУ на гелиоцентрических траекториях перелета.
5. Программы по ориентации вектора тяги ЭРДУ на активных участках гелиоцентрических траекторий перелета (программы по тангажу и рысканию).
6. Параметры всех используемых на перелете гравитационных маневров.

Общий подход к исследованию траектории межпланетного перелета базируется на методе грависфер нулевой протяженности. При этом вся гелиоцентрическая траектория рассматриваемого перелета состоит из последовательности дуг гелиоцентрических орбит, соединяющих две планеты. Гравитационные маневры обеспечивают переход КА с одной дуги на другую, обеспечивая полет КА к следующей планете, около которой выполняется следующий гравитационный маневр. Если число используемых на траектории гравитационных маневров составляет n , то вся траектория гелиоцентрического перелета включает $(n+1)$ отдельных гелиоцентрических перелетов.

Положение и скорость планет в момент ГМ (как и в любой другой момент времени) определяется с использованием эфемерид JPL (используется модель DE-405).

На всех $(n+1)$ гелиоцентрических перелетах ЭРДУ может использоваться как маршевая двигательная установка КА. Она обеспечивает подлет КА к очередной планете для ГМ у неё, обеспечивает определенные условия подлета для выполнения ГМ.

Гравитационный маневр рассматривается пассивным.

6.2 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ АНАЛИЗА ТРАЕКТОРИИ ПЕРЕЛЕТА КА С ЭРДУ

Математическая модель, описывающая движение гелиоцентрического перелета (планета - планета) КА с ЭРДУ и модель ГМ используются как в разделе 5.1. Задача оптимизации траектории перелета формулируется с помощью ПМП.

6.3 ЭТАПЫ ПРЕДЛАГАЕМОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ ОПТИМИЗАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ

Предлагаемый метод решения рассматриваемой оптимизационной задачи подразделяется на три этапа.

1) Решение некоторой вспомогательной задачи. В ней анализируется и выбирается маршрут перелета к планете назначения, реализуемый последовательностью гравитационных маневров и импульсов скорости на гелиоцентрических участках перелета. Критерием оптимальности вспомогательной задачи рассматривается суммарный импульс скорости на всем маршруте перелета. Из решений вспомогательной задачи выбираются только те, на которых величина импульсов скорости относительно невелика, с тем, чтобы работа ЭРДУ могла обеспечить приращение скорости.

2) Выбранный маршрут из вспомогательной задачи и некоторые его характеристики (даты гравитационных маневров, вектора гиперболических избытков скорости после гравитационных маневров) на втором этапе исследования не варьируются и считаются равными характеристикам, полученным при решении вспомогательной задачи. При характеристиках, полученных во вспомогательной задаче, решается задача оптимального перелета КА с ЭРДУ.

3) На третьем – заключительном – этапе исследования полученное на втором этапе решение используется как начальное приближение для решения сформулированной выше задачи сквозной оптимизации.

6.3.1 Первый этап. Вспомогательная задача. Оптимизация маршрута импульсного перелета с цепочкой гравитационных маневров

Рассматривается вспомогательная задача оптимизации импульсного перелета по маршруту Земля – планета (1-ый гравитационный маневр) -... планета (n-ый гравитационный маневр) – планета назначения. На каждой гелиоцентрической траектории перелета (планета - планета) рассматривается возможность использования на перелете дополнительных импульсов скорости (deep space maneuver). Предполагается, что гравитационные маневры могут быть активными.

На рисунке 6.1 показана схема полета, которая рассматривается во вспомогательной задаче. Она соответствует задаче с двумя гравитационными маневрами. На ней: T_0 T_1 , T_2 , T_f – дата старта, даты первого и второго гравитационных маневров и дата

подлета КА к планете назначения; $t_{dsm0}, t_{dsm1}, t_{dsm2}$ – даты импульсов скорости на гелиоцентрических участках перелета.

В верхней строке рисунка показаны векторы гиперболических избытков скорости при отлете от Земли после старта $V_{\infty 0}$ и после гравитационных маневров $V_{\infty 1}^+, V_{\infty 2}^+$, которые, как и перечисленные выше даты, являются выбираемыми характеристиками вспомогательной задачи. $\Delta V_{dsm0}, \Delta V_{dsm1}, \Delta V_{dsm2}$ – векторы импульсов скорости на гелиоцентрических участках перелета.

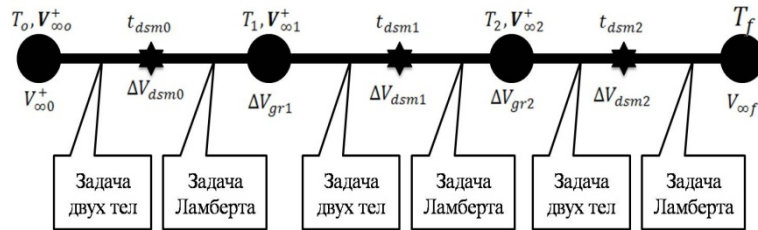


Рисунок 6.1 - Иллюстрация к формулировке вспомогательной задачи оптимизации траектории межпланетного перелета с двумя гравитационными маневрами

Для обеспечения независимости от характеристик химических двигателей, реализующих импульсы скорости, критерием оптимальности для вспомогательной задачи рассматривается сумма следующих величин: а) гиперболического избытка скорости при старте от Земли $V_{\infty 0}$; б) импульсов скорости в глубоком космосе $\Delta V_{dsm0}, \Delta V_{dsm1}, \Delta V_{dsm2}, \dots, \Delta V_{dsmn}$; в) импульсов скорости при гравитационных маневрах $\Delta V_{gr1}, \Delta V_{gr2}, \dots, \Delta V_{grn}$; г) гиперболического избытка скорости при подлете к планете назначения $V_{\infty f}$:

$$\Delta V_{\Sigma}(\mathbf{Y}) = V_{\infty 0} + \sum_{i=0}^n \Delta V_{dsm i} + \sum_{i=1}^n \Delta V_{gr i} + V_{\infty f}$$

Выбираемыми характеристиками \mathbf{Y} схемы реализации маршрута рассматриваются $5n+6$ характеристик:

- дата старта и дата подлета к планете назначения;
- даты гравитационных маневров (n характеристик);
- даты осуществления импульсов скорости на гелиоцентрических участках перелета ($n+1$ характеристик);
- компоненты вектора гиперболического избытка скорости при старте от Земли $V_{\infty 0}$ и векторов гиперболических избытков скорости после гравитационных маневров $V_{\infty 1}^+, V_{\infty 2}^+, \dots, V_{\infty n}^+$ ($3n+3$ скалярных характеристик).

Для дальнейшего исследования будут использоваться только те решения вспомогательной задачи, в которых

- импульс скорости при гравитационных маневрах практически равен нулю (т.е. используются пассивные гравитационные маневры);

- импульсы скорости на гелиоцентрических участках траектории относительно невелики и те приращения скорости, которые они обеспечивают, можно реализовать с использованием ЭРДУ, работающей на временном интервале, величина которого меньше времени гелиоцентрического перелета.

Предложенная постановка вспомогательной задачи сводится к задаче безусловного минимума функции в пространстве $5n+6$ выбираемых характеристик анализируемого маршрута. Результатом решения вспомогательной задачи является группа нескольких лучших по критерию оптимизации маршрутов с их характеристиками.

Подробное описание формулировки и решения задачи проведено в главе 4.

6.3.2 Второй этап. Оптимизация перелета КА с ЭРДУ по выбранному из решения вспомогательной задачи маршруту с характерными датами, полученными при решении вспомогательной задачи

На этом этапе можно пренебречь некоторыми из сформулированных условий оптимальности. Из перечисленных условий оптимальности исключаются следующие условия:

- Условия оптимальности даты гравитационных маневров
- Условия связи компонент базис-вектора при гравитационном маневре. Базис вектор после ГМ рассматривается как независимый выбираемый параметр для анализа и оптимизации следующего гелиоцентрического перелета.

При этом фиксируются вектора гиперболического избытка скорости после каждого ГМ (они тоже берутся из решения вспомогательной задачи).

На этом этапе полученные решения вспомогательной задачи рассматривались как начальные приближения для траектории перелета КА с ЭРДУ. Выбираемыми характеристиками на этом этапе исследования являются:

- вектор гиперболического избытка скорости при старте от Земли;
- закон включения - выключения ЭРДУ на всех гелиоцентрических участках перелета;
- программы по углам тангажа и рыскания на активных участках перелета;
- параметры всех n гравитационных маневров на маршруте межпланетного перелета.

Данная задача сводится к оптимизации каждой из гелиоцентрической траекторий «планета – планета», входящих в общую траекторию перелета КА с ЭРДУ.

Используются такие же, как в разделе (1.6.2), уравнения движения КА с ЭРДУ. Задача оптимизации перелета между планетами формулируется следующим образом. Известны даты перелета: T_{i-1} и T_i , следовательно, начальное и конечное положение КА на траектории перелета тоже известны (они совпадают с соответствующим положением планет). Начальный вектор гелиоцентрической скорости известен и равен сумме вектора гелиоцентрической скорости планеты и вектора гиперболического избытка скорости, который был найден на первом этапе исследования: $\mathbf{V}(T_{i-1}) = \mathbf{V}_{pl(i-1)}(T_{i-1}) + \mathbf{V}_{\infty(i-1)}^+$. Неизвестными параметрами краевой задачи граничного значения являются сопряженные переменные $(\lambda_{ri0}, \lambda_{Vi0}, \lambda_{mi0})$ в начальной точке (в момент времени T_{i-1}).

В качестве граничных условий рассматриваются следующие:

- Радиус-вектор КА, равный радиус-вектору i -ой планеты $\mathbf{r}(T_i) = \mathbf{r}_{pl i}(T_i)$
- величина гиперболического избытка скорости при подлете к i -ой планете, который равен известной величине гиперболического избытка скорости во время i -ого ГМ $|\mathbf{V}_{\infty i}^-| = |\mathbf{V}_{\infty i}^+|$ (это известно из решения предварительной задачи),
- угол между вектором гиперболического избытка скорости при подлете к i -ой планете и вектором гиперболического избытка скорости после ГМ, который не больше максимального угла поворота гиперболической асимптоты во время ГМ,
- базис вектор при подлете к i -ой планете принадлежит плоскости гиперболы пролета.
- сопряженная переменная к массе в конечной точке траектории равна единице.

Таким образом, оптимизация данной траектории сводится к решению двухточечной краевой задачи 7-ого порядка.

Она подобна задаче, решенной для первого участка гелиоцентрической траектории анализируемой траектории перелета. Различие состоит в том, что при рассмотрении первого участка дата старта, величина и направление вектора гиперболического избытка скорости при старте КА от Земли добавляются к списку неизвестных параметров в задаче граничной величины. При этом к двухточечной краевой задаче добавляются соответствующие два условия трансверсальности.

В качестве конечных условий в процессе анализа последнего гелиоцентрического участка траектории рассматривается нулевая стыковка с планетой назначения. В этом случае мы должны отобрать 7 неизвестных параметров задачи (сопряженные переменные в начальной точке рассматриваемого перелета $\lambda_{rn0}, \lambda_{Vn0}, \lambda_{mn0}$), которые должны

удовлетворять 7 скалярным условиям. Соответственно, мы решаем двухточечную краевую задачу 7-ого порядка.

6.3.3 Третий этап. Сквозная оптимизация траектории перелета КА с ЭРДУ по выбранному маршруту с оптимизацией характерных дат маршрута

На этом этапе происходит уточнение траекторий межпланетного перелета, полученных на втором этапе, с учетом возможности оптимизации характерных дат маршрута, векторов гиперболических избытков скорости после гравитационных маневров. При этом используется полный набор условий оптимальности межпланетного перелета.

6.4 АНАЛИЗ МЕЖПЛАНЕТНОГО ПЕРЕЛЕТА К ЮПИТЕРУ

Раздел посвящен описанию полученных решений при оптимизации перелета к Юпитеру для космической транспортной системы с использованием ЭРДУ. Анализируемая транспортная система включает в себя следующих исходных данных.

- РН типа Ангара-А5. Масса КА, выведенного на базовую околоземную орбиту высотой 180 км 24235 кг;
- химический разгонный блок типа «КВТК» с удельным импульсом 470 с. Конечная масса разгонного блока – 3330 кг ;
- удельный импульс маршевой ЭРДУ на базе ионных двигателей типа RIT-22 – 4650 с. Тяга маршевой ЭРДУ 3.508701 Н (такая тяга обеспечивается входной электрической мощностью 100 кВт при КПД ЭРДУ 0.8);
- минимальная высота перицентра пролетных гипербол при гравитационных маневрах принята равной 400 км.

6.5 РЕШЕНИЕ ВСПОМОГАТЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

При решении вспомогательной задачи удалось получить характеристики для следующих четырех маршрутов:

1. Земля – Земля – Юпитер;
2. Земля – Земля - Земля – Юпитер;
3. Земля – Венера – Земля – Земля – Юпитер;
4. Земля – Венера – Марс – Венера – Земля – Юпитер.

Важнейшие характеристики рассмотренных маршрутов помещены в таблицу 6.1.

Таблица 6.1. Характеристики рассмотренных четырех маршрутов. Решение вспомогательной задачи

Номер маршрута	1	2	3	4
Дата старта	03.06.2019	29.05.2019	27.03.2020	24.10.2021
Полное время	3.27	5.82	6.21	3.94

полета				
Критерий оптимизации	14.370	9.279	8.738	10.240

Наиболее интересным представляется второй маршрут. На нем получатся относительно малый критерий оптимизации. Время реализации маршрута невелико. Очень важно то обстоятельство, что на маршруте используется только гравитационные маневры у Земли, что позволяет использовать маршрут через каждый синодический период Юпитера (оптимальные даты старта повторяются каждые 13 месяцев).

С точки зрения времени перелета интересны 1-ый и 4-ый варианты. Однако реализация 1-ого варианта перелета требует высокого значения критерия оптимизации – он равен 14,37 км/ч. Недостатками 4-ого варианта перелета являются: сложность траектории перелета (большое количество гравитационных маневров) и использование гравитационных маневров у трех различных планет. Последнее обстоятельство не позволяет использовать этот вариант перелета для других эпох запуска.

Основные характеристики второго маршрута приведены в таблице 6.2.

Таблица 6.2 - Основные характеристики второго маршрута, полученные из решения вспомогательной задачи

Дата старта		29.05.2019
Модуль вектора гиперболического избытка скорости при отлете от Земли	м/с	1420.137
Вектор гиперболического избытка скорости при отлете от Земли	м/с	$\begin{bmatrix} 894.552 \\ -1103 \\ -1.57 \end{bmatrix}$
Дата выполнения первого дополнительного импульса скорости		21.10.2019
Модуль вектора первого дополнительного импульса скорости	м/с	1472.98
Вектор первого дополнительного импульса скорости	м/с	$\begin{pmatrix} 443.05 \\ 350.59 \\ 1.20 \end{pmatrix}$
Время первого перелета Земля – Земля	сутки	430.596
Дата подлета к Земле для осуществления первого ГМ		02.08.2020
Величина вектора гиперболического избытка скорости при первом гравитационном маневре	м/с	5337.758
Вектор гиперболического избытка скорости после первого ГМ	м/с	$\begin{bmatrix} 4804.81 \\ 2324.95 \\ -7.96 \end{bmatrix}$
Дата выполнения второго дополнительного импульса скорости		28.06.2021
Величина вектора второго импульса скорости в глубоком космосе	м/с	549.29

Вектор второго импульса скорости в глубоком космосе	м/с	$\begin{bmatrix} 499.06 \\ 229.44 \\ -3.91 \end{bmatrix}$
Время второго перелета Земля – Земля	сутки	672.32
Дата подлета к Земле для второго ГМ		05.06.2022
Модуль вектора гиперболического избытка скорости после ГМ	м/с	9100.55
Вектор гиперболического избытка скорости после второго ГМ	м/с	$\begin{bmatrix} 9068.33 \\ -155.97 \\ 749.04 \end{bmatrix}$
Дата выполнения третьего дополнительного импульса скорости		24.09.2024
Модуль вектора третьего дополнительного импульса скорости	м/с	965.86
Вектор третьего дополнительного импульса скорости	м/с	$\begin{bmatrix} -898.07 \\ 332.97 \\ -124.41 \end{bmatrix}$
Время перелета Земля – Юпитер	сутки	1024.11
Дата подлета к Юпитеру		25.03.2025
Вектор гиперболического избытка скорости при подлете к Юпитеру	м/с	$\begin{bmatrix} 4694.9 \\ -1173.15 \\ -552.81 \end{bmatrix}$
Модуль вектора гиперболического избытка скорости при подлете к Юпитеру	м/с	4870.73
Общая продолжительность полета	сутки	2127

На рисунке 6.2 представлена полученная во вспомогательной задаче траектория перелета Земля - Земля – Земля – Юпитер в пространстве.

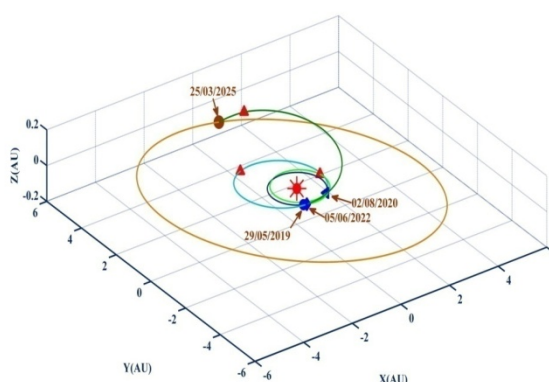


Рисунок 6.2 - Траектория импульсного перелета Земля - Земля – Земля – Юпитер (2-ый маршрут)

В таблице 6.3 приведены результаты сквозной оптимизации межпланетного перелета КА с ЭРДУ для маршрутов, полученных на этапе решения вспомогательной задачи (маршруты 1, 2 и 3), а также двух модифицированных маршрутов 3-м и 4-м. Последние маршруты отличаются от маршрутов 3 и 4 добавлением участка перелета Земля-Земля, как первого дополнительного участка перелета.

Таблица 6.3 - Масса КА, доставляемого к Юпитеру, для различных маршрутов перелета:

Схема маршрута	Номер маршрута	Масса КА, доставляемая к Юпитеру (кг)
Земля – Земля – Юпитер	1	6611
Земля – Земля – Земля – Юпитер	2	7157
Земля – Венера – Земля – Земля – Юпитер	3	7098
Земля – Земля – Венера – Земля – Земля – Юпитер	3м	7300
Земля – Земля – Венера – Марс – Венера – Земля – Юпитер	4м	7101

Результаты, помещенные в последнюю таблицу, показывают, что, как и во вспомогательной задаче, наиболее предпочтительным по многим показателям является второй маршрут. Более подробно его характеристики представлены в таблице.

Таблица 6.4 - Основные характеристики второго маршрута, полученные в задаче сквозной оптимизацией по сравнению с решением вспомогательной задачи

Характеристики	Значения
Дата старта от Земли	29.05.2019
Гиперболический избыток скорости при старте от Земли (м/с)	800.0
Масса КА в начале гелиоцентрической траектории (кг)	8617.3
Требуемая масса топлива для гелиоцентрической траектории «Земля – Земля» (кг)	363.2
Дата подлета к Земле для осуществления ГМ	18.07.2020
Гиперболический избыток скорости после первого ГМ (м/с)	5137.5
Требуемая масса топлива для гелиоцентрической траектории «Земля – Земля» (2) (кг)	123.4
Дата подлета к Земле для второго ГМ	31.05.2022
Гиперболический избыток скорости после второго ГМ у Земли (м/с)	9338.9
Требуемая масса топлива для гелиоцентрической траектории «Земля – Юпитер» (кг)	974.0
Дата подлета к Юпитеру	21.03.2025
Масса КА при подлете к Юпитеру (кг)	7156.7
Полное время перелета (сутки)	2123,0

Функция переключения двигателя при реализации второго маршрута показана на рисунке 6.3. Видно, что она положительна на небольших по протяженности четырех интервалах в середине траектории перелета и на значительном интервале в конце перелета. На траектории перелета есть 6 активных и 5 пассивных участков траектории. Первые четыре активных участка очень непродолжительны. При подлете КА к Юпитеру для уравнивания скорости КА и скорости Юпитера двигатель работает продолжительное время.

Обратите внимание, что выполнение условий оптимальности для даты подлета к Юпитеру привело к значительному увеличению времени полета. Именно поэтому дата

подхода к Юпитеру не изменилась и была принята равной дате, полученной из решения предварительной задачи оптимизации.

Отметим, что при решении предварительной задачи для рассматриваемого полета импульсы скорости на гелиоцентрических участках были довольно большими (например, импульс скорости был равен 1,42 км / с на первом гелиоцентрическом участке Земля - Земля. В случае КА с ЭРДУ только последняя активная часть полета имела большую продолжительность (146 дней). Другие активные части были значительно короче (на первом участке Земля - Земля общее время работы двигателя составляет 54.6 дня, а на втором участке Земля - Земля - 18.5 дней). Использование ЭРДУ обеспечивает высокую эффективность транспортной системы. Этот факт объясняет возможность не значительно ограничивать значение импульсов скорости при решении предварительной задачи.

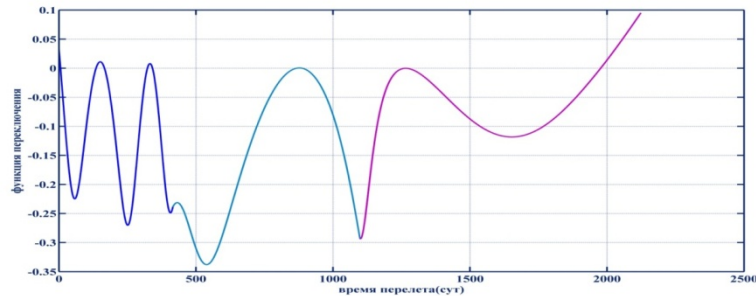


Рисунок 6.3 – Функция переключения двигателя на траектории перелета по второму маршруту

На рисунке 6.4 показан угол тангажа как функция времени полета для второго маршрута полета. На первой активной дуге (ее продолжительность почти равна 6 дням и находится в начале полета) угол тангажа составляет около 25 градусов. ЭРДУ обеспечивает увеличение скорости и гелиоцентрического расстояния КА одновременно. Угол тангажа изменяется почти линейно в узком диапазоне (он близок к 180 градусов) на второй активной дуге. ЭРДУ активно уменьшает скорости КА. Угол тангажа близок к нулю на третьей активной дуге траектории. В то же время КА увеличивает скорость до первого ГМ, чтобы увеличить гиперболический избыток скорости. Угол тангажа немного меньше 180 град на четвертой активной дуге. ЭРДУ уменьшает скорость КА. Угол тангажа близок к нулю на последней активной дуге в момент прибытия в Юпитер. ЭРДУ увеличивает скорость КА до гелиоцентрической скорости Юпитера.

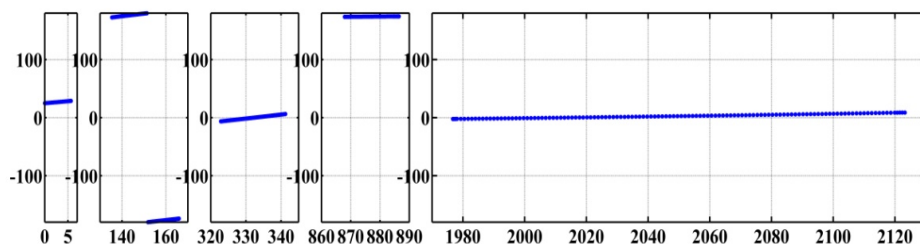


Рисунок 6.4 Угол тангажа как функция времени полета

На рисунке 6.5 показан угол рыскания как функция времени перелета для второй траектории перелета. Угол рыскания очень близок к нулю на первых трех активных дугах данной траектории. Здесь траектория КА практически лежит в плоскости эклиптики. Изменение положения плоскости траектории обеспечивается путем осуществления второго ГМ и за счет углов рыскания на двух последних активных дугах траектории. На четвертой активной дуге угол отклонения достигает -5° . На последней активной дуге траектории угол рыскания меняется в диапазоне от 1.5° до 11° .

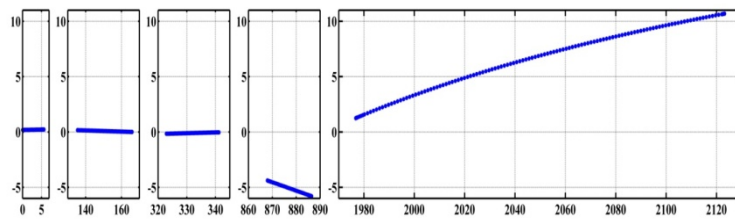


Рисунок 6.5 - Угол рыскания как функция времени перелета

На рисунке 6.6 представлена оптимальная траектории полета КА с ЭРДУ для второго маршрута. Активные участки траектории выделены толстыми линиями. Показаны также гравитационные маневры, точки старта от Земли и прилёта к Юпитеру также выделены.

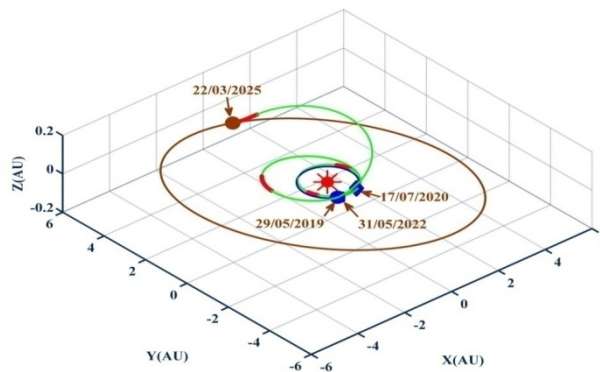


Рисунок 6.6 - Траектория перелета КА с ЭРДУ к Юпитеру с использованием второго маршрута

Оба гравитационных маневра у Земли осуществляются почти в одной и той же точке (почти точно через два года). Первый гравитационный маневр у Земли переводит КА на почти резонансную с Землей орбиту (период движения по этой орбите почти точно в два раза больше периода орбиты Земли). На этой траектории перелета (между гравитационными маневрами у Земли) есть один активный участок, расположенный примерно в середине этого перелета в афелии оскулирующей орбиты. Он обеспечивает большой гиперболический избыток скорости при втором гравитационном маневре у Земли.

Благодаря большому гиперболическому избытку скорости у Земли при втором гравитационном маневре после него КА получает большую гелиоцентрическую скорость, которой достаточно для достижения окрестности Юпитера. Последний активный участок при подлете к Юпитеру, как уже отмечалось, обеспечивает нулевую стыковку с Юпитером. Если бы рассматривался пролет Юпитера, то этого активного участка, по-видимому, не было бы.

КА попадает в окрестность Юпитера 2 марта 2025 года. Масса КА в этот момент 7157 кг. Суммарное время выполнения всего маршрута полета к Юпитеру 2123 суток (5.81 года).

Кратко приведем результаты оптимизации маршрутов, которые в приведенной выше таблице 3.6 названы маршрутами 1, 3, 3-м и 4-м. На рисунке 6.7 показана траектория перелета к Юпитеру с использованием первого маршрута (Земля – Земля – Юпитер). На рисунке 6.7 показана функция переключения ЭРДУ вдоль траектории перелета по первому маршруту. На нем синяя линия относится к участку траектории до ГМ у Юпитера, красная линия соответствует функции переключения после ГМ. На всей траектории есть 5 активных участков. Они разделены четырьмя пассивными участками.

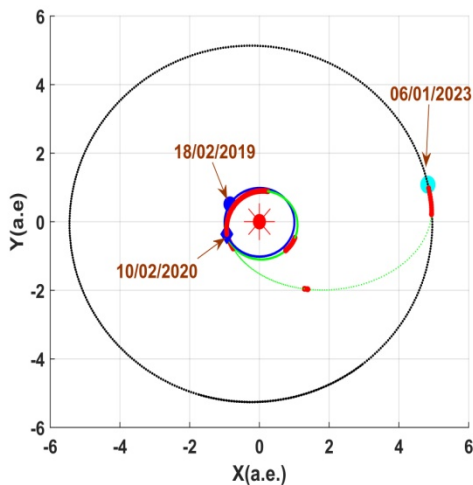


Рисунок 6.7 - Траектория перелета КА с ЭРДУ по маршруту 1 (Земля - Земля – Юпитер)

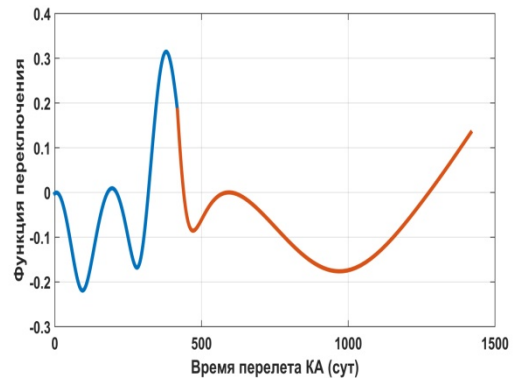


Рисунок 6.8 – Функция переключения ЭРДУ вдоль маршрута 1 (Земля - Земля – Юпитер)

На рисунке 6.9 показана траектория перелета к Юпитеру с использованием третьего маршрута (Земля–Венера–Земля–Земля–Юпитер). Активные участки траектории выделены красным, даты характерных точек траектории показаны.

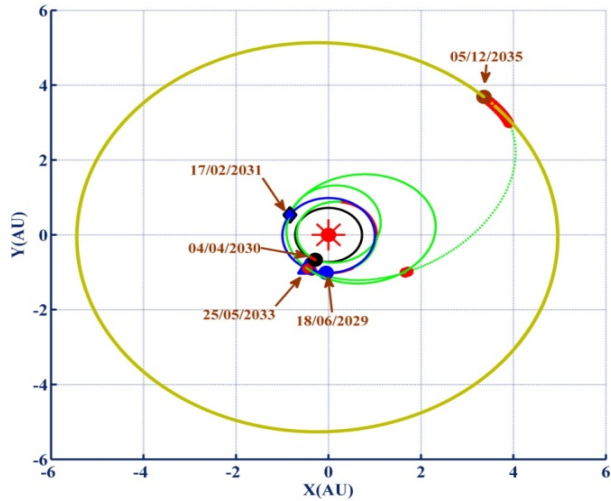


Рисунок 6.9 - Траектория перелета КА с ЭРДУ по маршруту 3 (Земля–Венера–Земля–Земля–Юпитер)

На рисунке 6.10 показана траектория перелета к Юпитеру с использованием маршрута 3-м (Земля–Земля–Венера–Земля–Земля–Юпитер).

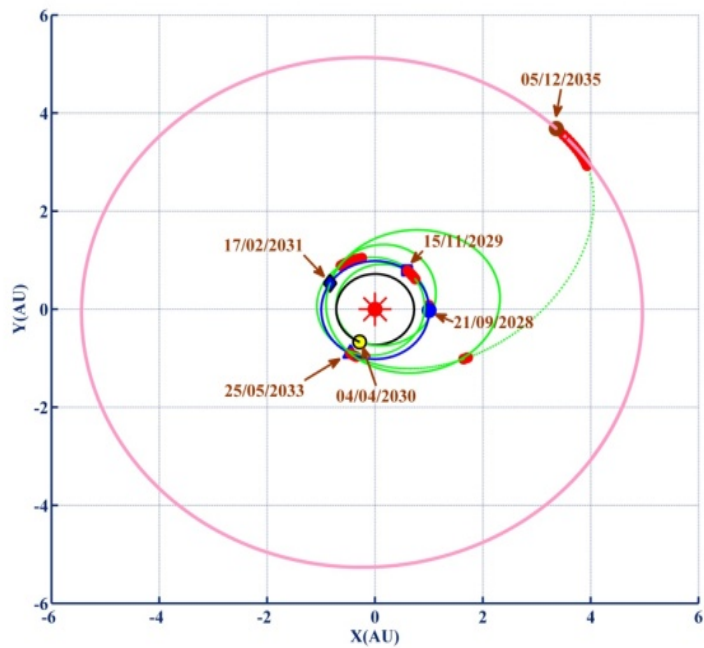


Рисунок 6.10 - Траектория перелета КА с ЭРДУ по маршруту 3-м (Земля–Земля–Венера–Земля–Земля–Юпитер)

На рисунке 6.11 показана траектория перелета к Юпитеру с использованием маршрута 4-м (Земля–Земля–Венера–Марс–Венера–Земля–Юпитер). Активные участки траектории выделены красным, даты характерных точек траектории показаны.

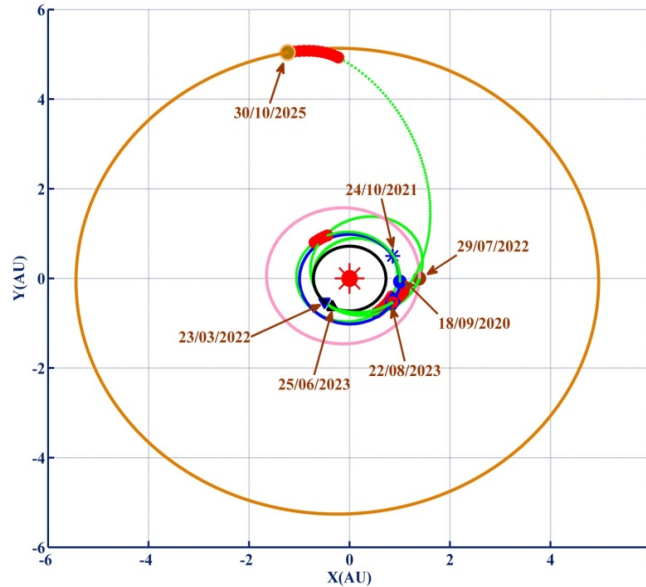


Рисунок 6.11 - Траектория перелета КА с ЭРДУ по маршруту 4-м (Земля - Земля - Венера - Марс - Венера - Земля - Юпитер)

ЗАКЛЮЧЕНИЕ ПО ГЛАВЕ

В данной главе развивается метод, позволяющий избежать трудностей решения задачи оптимизации траектории межпланетного перелета для КА с ЭРДУ с использованием серии гравитационных маневров. Из-за сложности поставленной задачи и проблемы сходимости при оптимизации траектории очень непросто найти рациональную последовательность гравитационных маневров при решении сквозной задачи оптимизации для сложных траекторий перелета КА с ЭРДУ.

Предлагается проводить два предварительных этапа исследования. На первом этапе производится выбор рациональной траектории перелета с оценкой её характеристик (то есть анализируется предварительная задача). На втором этапе производится поиск начального приближения оптимизируемых характеристик (траектории) перелета (неизвестных параметров многоточечной краевой задачи сквозной оптимизации для сложной траектории межпланетного перелета КА с ЭРДУ). Предварительная задача формулируется таким образом, что ее решение является решением (задачи) безусловного минимума функции нескольких параметров. В анализируемой задаче на втором этапе используются характеристики, полученные на предыдущем этапе и сформулированные так, что каждый гелиоцентрический участок перелета КА с ЭРДУ для выбранной (общей) траектории перелета оптимизируется отдельно. На этом этапе используется ПМП. При этом решаются двухточечные краевые задачи 7-ого и 9-ого порядков. Благодаря

выбранным характеристикам траектории перелета на первом этапе исследования отсутствуют сложности в решении этих краевых задач. На третьем этапе исследования используются оптимальные характеристика траектории межпланетного перелета, являющиеся результатом второго этапа исследования. На последнем этапе также используется принцип максимум и решается многоточечная краевая задача. Трудностей со сходимостью при итерационных процессах можно избежать путем хороших начальных приближений, которые получены на втором этапе исследования.

Представлены результаты анализа характеристик траектории полета к Юпитеру для КА. Показано, что при использовании транспортной космической системы на базе ракеты-носителя «Ангара А5», химического разгонного блока «КВТК» и ЭРДУ с входной электрической мощностью 100 кВт при использовании двух гравитационных маневров у Земли в окрестность Юпитера можно доставить КА массой 7157 кг (время реализации маршрута 5.81 года).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен не прямой метод, совмещающий использование необходимых условий оптимальности и эволюционной стратегии с адаптацией ковариационной матрицы (СМА-ES). Такая методология позволяет обойти трудности нахождения хорошего первого приближения при решении краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, к которой сводится задача оптимального управления КА с ЭРДУ.

Для проектно-баллистического анализа транспортных космических систем разработан алгоритм использования метода эволюционной стратегии с адаптацией ковариационной матрицы (СМА-ES). Проведен сравнительный анализ его эффективности по сравнению с другими методами решения краевой задачи ПМП, которая рассматривается как задача минимизации суммы квадратов невязок краевых условий.

Показано, что метод СМА-ES обеспечивает получение оптимальной траектории межпланетного перелета для всех рассмотренных задач (и с идеально-регулируемой, и с нерегулируемой ЭРДУ) при всех рассмотренных начальных приближениях для неизвестного вектора параметров краевой задачи.

В более простой задаче оптимизации перелета КА с идеально-регулируемой ЭРДУ хорошая сходимость обеспечивается в ряде случаев методом Левенберга – Марквардта, трудоемкость которого (число вычислений минимизируемой суммы квадратов невязок) была существенно меньше, чем при использовании СМА-ES. Однако рекомендовать этот метод трудно даже для оптимизации траектории перелета КА с идеально-регулируемой ЭРДУ, потому что в случаях неудачного набора начальных приближений для неизвестных параметров краевой задачи этот метод не обеспечивает сходимость к оптимальному решению.

Преимущества метода СМА-ES еще более очевидны для решения более сложной задачи оптимизации перелета КА с нерегулируемой ЭРДУ. Только этот метод обеспечил получение оптимальной траектории межпланетного перелета для всех рассмотренных вариантов начального приближения неизвестных параметров краевой задачи.

Метод Левенберга – Марквардта эффективен в том случае, когда начальное приближение для неизвестных параметров краевой задачи берется из решения задачи оптимизации перелета КА с идеально-регулируемой ЭРДУ. При этом метод обеспечивает быструю сходимость, а число вычислений минимизируемой суммы квадратов невязок краевой задачи существенно меньше, чем при использовании метода СМА-ES. Такой результат показывает обоснованность использования многими исследователями [В.Г.

Петухов и другие] оптимизацию перелетов КА с идеально-регулируемым двигателем как предварительную вспомогательную задачу для оптимизации перелетов КА с нерегулируемой ЭРДУ.

Проведенное тестирование показало, что универсальным эффективным методом решения краевой задачи ПМП при оптимизации межпланетных перелетов КА с ЭРДУ можно считать метод эволюционной стратегии с адаптацией ковариационной матрицы.

Для оптимизации траектории многовиткового перелета КА между некомпланарными орбитами предложен подход, основанный на методе эволюционной стратегии с адаптацией ковариационной матрицы.

Предложенный метод позволяет эффективно решать не только задачи оптимального управления по минимуму времени выведения (задачи быстрогодействия), но и задача оптимального управления по минимуму характеристической скорости при фиксированном времени выведения.

Проведен анализ свойств оптимальных траекторий и типов законов оптимального управления движением КА на траекториях межорбитальных многовитковых перелетов. Сравнение результатов, полученных с использованием разработанного метода, с результатами, опубликованными другими авторами, подтвердило достоверность получаемого оптимума и эффективность предлагаемого метода.

Проанализирована типовая транспортная операция выведения КА на ГСО с низкой околоземной орбиты высотой 200 км и наклоном 51.6° . Для этого проведен анализ оптимальных характеристик траекторий перелета для диапазона удельных импульсов 600-900 с и диапазона начальных реактивных ускорений $2.5 \dots 12.5 \text{ мм/с}^2$. Основным результатом является представление характеристической скорости как функции удельного импульса двигателя и начального реактивного ускорения.

Разработаны математические модели, алгоритмы и программные средства для оптимизации траектории многовитковых перелетов КА с низкой околоземной орбиты на высокие рабочие орбиты, в частности на геостационарную орбиту.

Предложен подход к оптимизации траекторий КА с ЭРДУ, идея которого состоит в том, чтобы свести задачу оптимизации (в том числе краевую задачу ПМП) к задаче безусловного минимума добавочной функции, состоящей из суммы квадратов разностей краевой задачи ПМП и оптимизированного критерия, взятого с весовым коэффициентом. Весовой коэффициент используется в качестве параметра продолжения. Его начальная большая величина должна привести к области неизвестных параметров краевой задачи, в которой критерий оптимальности близок к глобальному минимуму, а конечная величина

равна нулю. Это обеспечивает точное удовлетворение необходимым условиям ПМП и, как следствие, точное решение краевой задачи. Процесс максимизации предлагается выполнить при помощи разработанного метода, основанного на эволюционной стратегии с адаптацией ковариационной матрицы.

В рамках разработанного подхода произведен численный анализ трех задач – оптимизации перелета КА с ЭРДУ к Марсу, Юпитеру и на рабочую гелиоцентрическую орбиту с целью исследования Солнца.

Решены сотни краевых задач для анализа совместной оптимизации траектории полета КА с ЭРДУ к Марсу и его основных проектных параметров. Это позволило получить рекомендации по рациональным диапазонам тяги и удельного импульса ЭРДУ для рассмотренных космических миссий.

При анализе прямого перелета КА с ЭРДУ к Юпитеру обнаружены новые типы экстремалей с различным количеством полных оборотов вокруг Солнца. Свойства этих экстремалей вполне могут считаться типичными.

Для выбора оптимальных даты старта и величины гиперболического избытка скорости для межпланетного перелета КА с ЭРДУ сформулирована краевая задача с условиями трансверсальности ПМП.

Проанализирована задача оптимизации траектории прямого выведения КА с ЭРДУ на рабочую гелиоцентрическую орбиту, позволяющую исследовать полярные области Солнца. Получены необходимые условия оптимальности для перелета на такую орбиту, выполнение которых обеспечивается решением краевой задачи.

Разработаны и описаны алгоритмы анализа и оптимизации сложных схем межпланетного полета для проектирования маршрутов межпланетного полета КА к небесным телам Солнечной системы (Юпитеру, Сатурну, Плутону, астероиду TV135) с использованием гравитационных маневров у промежуточных планет (Венеры, Земли, Марса, Юпитера, Сатурна) и дополнительных импульсов скорости на гелиоцентрических участках перелета. Постановка задачи предполагала использование активных гравитационных маневров, за счет чего ее удалось свести к задаче безусловной минимизации функции (суммарного импульса скорости) от характеристик рассматриваемого маршрута.

Для решения сформулированной задачи сквозной оптимизации протестированы различные методы локальной и глобальной оптимизации. Наиболее эффективным из них оказался метод эволюционной стратегии с адаптацией ковариационной матрицы. С его помощью оптимизирован и проанализирован ряд маршрутов КА к Юпитеру, Сатурну,

Плутону и астероиду TV135. Из них выбрана наилучшая схема полета к Юпитеру для ближайших окон запуска и представлены основные характеристики траектории для этой схемы.

Сформулирована задача оптимизации траектории межпланетных перелетов КА с ЭРДУ к планете назначения или на рабочую гелиоцентрическую орбиту с использованием пассивных гравитационных маневров. Она сводится к многоточечной краевой задаче и решается с помощью ПМП. Для преодоления основной сложности решения предложен подход на основе использования решения вспомогательной задачи импульсного перелета. Полученное решение является квазиоптимальным из-за пренебрежения некоторыми из сформулированных условий оптимальности.

Представлены численные результаты оптимизации и основные характеристики траектории для перелета КА с ЭРДУ к Юпитеру при использовании космической транспортной системы Ангара-A5 и КВТК по маршрутам:

- Земля – Земля – Земля – Юпитер;
- Земля – Земля – Венера – Земля – Земля – Юпитер.

Представлены численные результаты квазиоптимизации и основные характеристики траектории перелета КА с ЭРДУ при использовании космической транспортной системы Союз и Фрегат на систему гелиоцентрических орбит для исследования Солнца по маршрутам:

- Земля – Земля – Венера;
- Земля – Земля – Венера – Земля – Венера.

Предложенные системы рабочих орбит со схемами выведения на них КА могут рассматриваться как альтернативы разрабатываемым проектам по исследованию Солнца.

Из-за сложности поставленной задачи и проблемы сходимости при оптимизации траектории очень непросто найти рациональную последовательность гравитационных маневров при решении сквозной задачи оптимизации для сложных траекторий перелета КА с ЭРДУ. Для преодоления этой трудности разработан метод решения задачи оптимизации траектории межпланетного перелета для КА с ЭРДУ с использованием серии гравитационных маневров. Использование этого метода предполагает проведение двух предварительных этапов исследования.

На первом этапе анализируется предварительная задача, в результате чего производится выбор рациональной траектории перелета с оценкой её характеристик. Предварительная задача формулируется как задача безусловного минимума функции нескольких параметров.

На втором этапе производится поиск начального приближения оптимизируемых характеристик (траектории) перелета (неизвестных параметров многоточечной краевой задачи сквозной оптимизации для сложной траектории межпланетного перелета КА с ЭРДУ). В анализируемой задаче используются характеристики, полученные на предыдущем этапе и сформулированные так, что каждый гелиоцентрический участок перелета КА с ЭРДУ для выбранной (общей) траектории перелета оптимизируется отдельно. На этом этапе используется ПМП. При этом решаются двухточечные краевые задачи 7-ого и 9-ого порядков. Благодаря выбранным характеристикам траектории перелета на первом этапе исследования отсутствуют сложности в решении этих краевых задач.

На третьем этапе исследования решается многоточечная краевая задача сквозной оптимизации ПМП и используются оптимальные характеристики траектории межпланетного перелета, полученные на втором этапе исследования. Трудностей со сходимостью при итерационных процессах можно избежать за счет использования хороших начальных приближений, полученных на втором этапе исследования.

С использованием предложенного метода проанализированы перелеты КА с ЭРДУ к Юпитеру с использованием нескольких гравитационных маневров у промежуточных планет.

Перечисленные решенные задачи показали, что разработанный в настоящей работе методический подход обеспечивает эффективное решение задач оптимального проектирования траекторий космических аппаратов (как и для орбитальных перелетов, так и для межпланетных перелетов). Этот подход может быть использован при разработке программных продуктов, обеспечивающих решение широкого круга задач для анализа перспективных космических транспортных средств.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акимов В.Н., Архангельский Н.И., Коротеев А.С., Кузьмин Е.П. Солнечная энергодвигательная установка с электронагревным тепловым аккумулятором и дожиганием рабочего тела. // Полет. 1999, № 2. С. 20-28.
2. Аксенов Е.П. Специальные функции в небесной механике. М.: Наука, 1986.
3. Аксенов Е.П. Теория движения искусственных спутников Земли. М.: Наука, 1977.
4. Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979, 432 с.
5. Асюшкин В.А, Викуленков В.П., Ишин С.В. Итоги создания и начальных этапов эксплуатации межорбитальных космических буксиров типа "Фрегат". Вестник НПО имени С.А. Лавочкина № 1, 2014.
6. Аттетков А. В., Галкин С. В., Методы оптимизации. Издательство «МГТУ им. Н. Э. Баумана», 2003.
7. Афанасьев А. П., Дикусар В. В., Милютин А. А., Чуканов С. А. Необходимое условие в оптимальном управлении. М.: Наука, 1990. 320 с.
8. Ахметшин Р.З., Белоглазов С.С., Белоусова Н.С. и др. Оптимизация перелетов к астероидам и кометам космических аппаратов с комбинированием большой и малой тяги. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша № 144, М., 1985.
9. Ахметшин Р.З., Егоров В.А. Полеты к астероидам и кометам с кусочно-постоянной малой тягой. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша № 94, М., 1997.
10. Белецкий В.В., Егоров В.А. Межпланетные полеты с двигателями постоянной мощности. Космич. исслед., т. 2, № 3, 1964.
11. Беллман Р. Динамическое программирование. М.: ИЛ, 1960, 400 с.
12. Блисс Г. А. Лекции по вариационному исчислению. М.: ИЛ, 1950, 348 с.
13. Болтянский В. Г., Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1969, 408 с.
14. Бордовицына Т.В. Современные численные методы в задачах небесной механики. М.: Наука, 1984.
15. Боровик И. Н., Козлов А. А. Математическая модель оценки массовых характеристик кислородно-водородного безгенераторного жидкостно-ракетного двигателя по его основным проектным параметрам. Труды МАИ, № 32, 2008.
16. Брайсон А., Хо Ю Ши. Прикладная теория оптимального управления. Оптимизация, оценка и управление. М.: Мир, 1972.

17. Гавурин М.К. Нелинейные функциональные уравнения и непрерывные аналоги итеративных методов. Известия вузов. Математика. 1958. № 5, с. 18-31.
18. Голубев Ю.Ф., Тучин А.Г., Грушевский А.В. и др. Основные методы синтеза траекторий для сценариев космических миссий с гравитационными маневрами в системе Юпитера и посадкой на один из его спутников // Вестник НПО имени С.А. Лавочкина. 2015. № 4. С. 97-103.
19. Гришин С.Д., Захаров Ю.А., Оделевский В.К.. Проектирование космических аппаратов с двигателями малой тяги. М.: Машиностроение, 1990.
20. Гродзовский Г.Л., Иванов Ю.Н., Токарев В.В. Механика космического полета. Проблемы оптимизации. М., Наука, 1975.
21. Давиденко Д.Ф. Об одном новом методе численного решения систем нелинейных уравнений. ДАН СССР. 1953, т. 88, № 4, с. 601-602.
22. Дикусар В. В., Милютин А. А. Качественные и численные методы в принципе максимума. М.: Наука, 1989, 144 с.
23. Дубошин Г.Н. (ред.). Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. М.: Наука, 1976.
24. Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. М.: Наука, 1975.
25. Ельников Р. В. Проектирование межпланетных траекторий космических аппаратов с электроракетными двигательными установками при использовании лунного гравитационного маневра. Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук по специальности 05.07.09 «Динамика, баллистика и управление движением летательных аппаратов», М., МАИ, 2012. с.119
26. Жулин С. С., Метод продолжения решения по параметру и его приложение к задачам оптимального управления. Вычислительные методы и программирование, том.8, 2007.
27. Захаров Ю.А. Проектирование межорбитальных космических аппаратов. Выбор траекторий и проектных параметров. М.: Машиностроение, 1984.
28. Иванюхин А. В. Методы проектирования траекторий КА с электроракетными двигателями на основе анализа области существования решений и исследования задачи о минимальной тяге. Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук по специальности 05.07.09 «Динамика, баллистика и управление движением летательных аппаратов», М., МАИ, 2015. с.101
29. Ирвинг Д. Полеты с малой тягой в гравитационных полях при переменной скорости истечения. В сб.: Космическая техника. Под ред. Г. Сейферта. М.: Наука, 1964.

30. Ишков С. А. Расчет оптимальных межорбитальных перелетов с малой тягой между круговой и эллиптической орбитами. Космические исследования, 1997. Т.36. Вып.2. стр. 1-10.
31. Ишков С.А., Салмин В.В. Оптимизация траекторий и параметров межорбитальных транспортных аппаратов с двигателем малой тяги. Космические исследования, 1989. Т.26. Вып.1. стр.15-22.
32. Константинов М.С., Каменков Е.Ф., Перелыгин Б.П. и др. Механика космического полета. Учебник для студентов высших технических учебных заведений. Москва. «Машиностроение». 1989.С. 408.
33. Константинов М.С., Мин Тейн. Анализ одной схемы полета космического аппарата для исследования Солнца. Электронный журнал «Труды МАИ», №71, 2013г.
34. Константинов М.С., Мин Тейн. Анализ сложных схем полета к Сатурну с использованием гравитационных маневров и импульсов скорости в глубоком космосе. Электронный журнал «Труды МАИ», №52, 2012г.
35. Константинов М.С., Мин Тейн. Квазиоптимальные траектории полёта к Юпитеру с последовательностью гравитационных маневров у Земли. Вестник «НПО имени С.А. Лавочкина». № 4, 2015г. С 70-76.
36. Константинов М.С., Мин Тейн. Метод оптимизации траектории перелета выведения КА с электроракетной двигательной установкой на ГСО// Вестник МАИ: 2009. – т.16, № 5, С.282-290.
37. Константинов М.С., Мин Тейн. Оптимизация прямых полётов к Юпитеру с ядерной электроракетной двигательной установкой. Вестник МАИ: 2013. – т.20, № 5, С.32-41.
38. Константинов М.С., Мин Тейн. Оптимизация траектории выведения КА на геостационарную орбиту для транспортной системы с удельным импульсом двигателя 600-900 с. Электронный журнал «Труды МАИ», № 4, 2017г.
39. Константинов М.С., Мин Тейн. Оптимизация траектории выведения космического аппарата на рабочую гелиоцентрическую орбиту. Электронный журнал «Труды МАИ», №67, 2013г.
40. Константинов М.С., Мин Тейн. Оптимизация траектории выведения космического аппарата на систему гелиоцентрических орбит. Космические исследования 2017, том 55, №3, с.226-235.
41. Константинов М.С., Мин Тейн. Рациональные характеристики солнечной энергетической установки космического аппарата с ЭРДУ при прямом выведении на

гелиоцентрическую орбиту для исследования Солнца. Известия Академии Наук "Энергетика", (принята к печати).

42. Константинов М.С., Нгуен Диен Нгок. Оптимизация траектории к Юпитеру с учетом возможного временного выключения двигателя // Электронный журнал «Труды МАИ». 2015. Выпуск 79.С. 25

43. Константинов М.С., Нгуен Диен Нгок. Оптимизация траектории КА с ЭРДУ к Юпитеру с гравитационным маневром в рамках задачи трех тел//Электронный журнал «Труды МАИ». 2014. Выпуск 72. С. 24.

44. Константинов М.С., Орлов А.А. Оптимизация траектории к Юпитеру космического аппарата с малой тягой с использованием двух гравитационных манёвров у Земли //Журнал «Вестник МАИ». 2014.Т. 21.№ 1.С58-69.

45. Константинов М.С., Орлов А.А. Оптимизация траектории перелёта космического аппарата с малой тягой для исследования Юпитера с использованием гравитационного манёвра у Земли. // Вестник ФГУП «НПО им. С.А.Лавочкина». т. 21, №5, 2013, стр. 42-46.

46. Константинов М.С., Орлов А.А., Мин Тейн. Анализ влияния мощности солнечной энергетической установки на характеристики перелета космического аппарата с солнечной ЭРДУ к Юпитеру. Известия Академии Наук "Энергетика", № 3, 2017. С 97-113.

47. Константинов М.С., Петухов В.Г., Лёб Х.В.. Применение высокочастотного ионного двигателя RIT-22 в проекте «Интергелио-Зонд» // Электронный журнал «Труды МАИ». 2012. Выпуск 60. С. 10

48. Константинов М.С., Петухов В.Г., Мин Тейн. Анализ влияния мощности солнечной энергетической установки на характеристики проекта "Интергелио-Зонд" при использовании электроракетных двигателей. Известия Академии Наук "Энергетика", № 2, 2016. С 102-117.

49. Константинов М.С., Петухов В.Г., Мин Тейн. Оптимизация траекторий гелиоцентрических перелетов. Издательство МАИ. 2015г. 259с.

50. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1974, 832 с.

51. Коротеев А.С. Концепция солнечной энергодвигательной установки с электронагревным тепловым аккумулятором и дожиганием рабочего тела. // Вестник Московского авиационного института. 2000, том 7, №1. - С. 60-67.

52. Кудрин О.И. Солнечные высокотемпературные космические энергодвигательные установки. - М.: Машиностроение, 1987. - 247 с.

53. Лебедев В. Н. Расчет движения КА с малой тягой. Математические методы в динамике КА. - М.: Вычислительный центр АН СССР, 1968. Вып.5. 108с.
54. Милютин А. А. Принцип максимума в общей задаче оптимального управления. М.: Физматлит, 2001, 302 с.
55. Милютин А. А., Дмитрук А. В., Осмоловский Н. П. Принцип максимума в оптимальном управлении. М.: Издательство центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2004, 168 с.
56. Мин Тейн. Оптимизация схем выведение космического аппарата на высокие рабочие орбиты. Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук по специальности 05.07.09 «Динамика, баллистика и управление движением летательных аппаратов», М., МАИ, 2010. с.135
57. Нгуен Диен Нгок. Проектирование траекторий КА межпланетных перелетов КА с Электроракетной двигательной установкой с учетом внештатного выключения двигателя. Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук по специальности 05.07.09 «Динамика, баллистика и управление движением летательных аппаратов», М., МАИ, 2015, с. 122
58. Николичев И. А. Оптимизация многовиткового межорбитального перелета космического аппарата с электроракетной двигательной установкой с учетом действия возмущения. Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук по специальности 05.07.09 «Динамика, баллистика и управление движением летательных аппаратов», М., МАИ, 2017. с.184.
59. Николичев И. А. Оптимизация многовитковых межорбитальных перелетов с двигателем малой тяги. Вестник МАИ. 2016, т.20, №5, с. 66-76.
60. Николичев И. А. Применение аппарата дуальных чисел при решении задач оптимизации межорбитального перелета. Вестник МАИ. 2016, т.23, №1, с. 151-162.
61. Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. М.: Мир, 1975.
62. Пантелеев А. В. Метаэвристические алгоритмы поиска условного экстремума. Москва: МАИ, 2009.- 160 с.
63. Партола И.С. Развитие средств математического моделирования двигательных установок ракет космического назначения. Электронный журнал «Труды МАИ». № 46 2011.

64. Пегачкова Е.А. Оптимальный вывод спутника на геостационарную орбиту с учётом неэффективных затрат топлива при включении и выключении двигателя Электронный журнал «Труды МАИ». № 47 2011.
65. Петухов В.Г. Вычисление траекторий перелета в системе Земля-Луна с использованием метода продолжения по параметру. 11-я международная научная конференция «Системный анализ, управление и навигация». Москва, МАИ, 2006, с. 65-67.
66. Петухов В.Г. Использование методов продолжения по параметру для оптимизации траекторий космических аппаратов с малой тягой. Тезисы докладов XXXII Научных Чтений, посвященных разработке творческого наследия К.Э. Циолковского. М., ИИЕТ РАН, 1997.
67. Петухов В.Г. Метод продолжения для оптимизации межпланетных траекторий с малой тягой. Космические исследования, т. 50, № 3, 2012, с. 258 – 270.
68. Петухов В.Г. Оптимальные многовитковые траектории выведения космического аппарата с малой тягой на высокую эллиптическую орбиту. Космические исследования, том 47, № 3, 2009, с. 271-279.
69. Петухов В.Г. Оптимизация межпланетных траекторий космических аппаратов с идеально-регулируемым двигателем методом продолжения. Космические исследования, том 46, № 3, 2008, с. 224-237.
70. Петухов В.Г. Оптимизация многовитковых перелетов между некомпланарными эллиптическими орбитами. Космические исследования, т. 42, № 3, 2004, с. 260-279.
71. Петухов В.Г. Оптимизация траекторий и эволюция движения космических аппаратов с двигательными установками малой тяги. Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук по специальности 05.07.09 «Динамика, баллистика и управление движением летательных аппаратов», М., МАИ, 1996, с. 132
72. Петухов В.Г. Оптимизация траекторий космических аппаратов с малой тягой. Семинар ИКИ РАН по динамике и управлению, Москва, ИКИ РАН, 2000 (URL: <http://arc.iki.rssi.ru/seminar/200006/OLTTR2.ppt>).
73. Петухов В.Г. Оптимизация траекторий космических аппаратов с электроракетными двигательными установками методом продолжения. Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук по специальности 05.07.09 «Динамика, баллистика и управление движением летательных аппаратов», М., МАИ, 2013. с. 221.
74. Петухов В.Г., Попов Г.А., Леб Х.В. Гелиоцентрические траектории космического аппарата с ионными двигателями для исследования Солнца // «Труды МАИ», № 42, 2011, 22 стр.

75. Платов И.В., Симонов А.В., Константинов М.С. Выбор рационального варианта построения комбинированной двигательной установки и схемы полёта космического аппарата «Интергелио-Зонд», // Вестник ФГУП «НПО им. С.А. Лавочкина». т. 22, № 4 2015, стр. 31-36.
76. Платонов И.В., Симонов А.В., Константинов М.С. Особенности разработки комбинированной двигательной установки и схемы полёта космического аппарата «Интергелио-Зонд», // Вестник СибГАУ им. М.Ф. Решетнева». т. 16 №1. 2015, с. 198-206
77. Платонов И.В., Симонов А.В., Константинов М.С. Особенности разработки комбинированной двигательной установки и схемы полёта космического аппарата «Интергелио-Зонд», // Вестник СибГАУ им. М.Ф. Решетнева». т. 16 №1. 2015, с. 198-206
78. Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983
79. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкредидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976.
80. Рыжов С.Ю. Проблемы оптимизации многовитковых траекторий перелетов космического аппарата с реактивным двигателем ограниченной тяги. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.02.01 «Теоретическая механика», М., МГУ, 2007, 97 с.
81. Рыжов С.Ю., Григорьев И.С.. К проблеме решения задач оптимизации многовитковых траекторий межорбитальных перелетов КА. Космические исследования, том 44, № 3, с. 272-280, 2006.
82. Салмин В.В. Оптимизация космических перелетов с малой тягой. М.: Машиностроение, 1987.
83. Салмин В.В., Лазарев Ю. Н., Методы оптимального управления и численные методы в задачах технических систем. Издательство «СГАУ САМАРА», 2007.
84. Салмин В.В., Старинова О.Л., Волоцуев В. В. и др. Оптимизация околоземных и межпланетных миссий космических аппаратов с электрореактивными двигательными установками // Труды МАИ. 2012. №№60.
85. Суханов А.А. Астродинамика. ИКИ РАН, Серия «Механика, управление, информатика», 2010, 103 с.
86. Суханов А.А., Прадо А.Ф.Б. де А. Межорбитальные перелеты с малой тягой в произвольном поле сил. Космические исследования, т. 51, № 2, 2013, с. 159-170.
87. Улыбышев Ю.П. Обзор методов оптимизации траекторий космических аппаратов с использованием дискретных множеств псевдоимпульсов. Космическая техника и технологии. №4(15), 2016

88. Федотов Г.Г. Методические основы проектно-баллистического анализа межпланетных КА с ЭРД. Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук по специальности 05.07.09 «Динамика, баллистика и управление движением летательных аппаратов», М., МАИ, 179 с, 2002А.
89. Федотов Г.Г. Оптимизация перелетов между орбитами искусственных спутников двух планет при использовании комбинации большой и малой тяги. Космические исследования, том 40, № 6, 2002В.
90. Финогенов С.Л., Коломенцев А.И., Кудрин О.И. Использование различных окислителей для дожигания водорода, нагреваемого в ракетном двигателе за счет солнечной энергии. // Вестник СибГАУ. 2015, том 16, №3. - С. 680-689.
91. Финогенов С.Л., Коломенцев А.И. Выбор параметров солнечного теплового ракетного двигателя при ограничении на время полета. // Вестник Московского авиационного института. 2016. Том 23, № 3. - С. 58-68.
92. Финогенов С.Л., Коломенцев А.И. О выборе схемы и параметров солнечного теплового ракетного двигателя. // Вестник Московского авиационного института. 2017. Том 24, № 1. - С. 63-74.
93. Финогенов С.Л., Коломенцев А.И., Кудрин О.И. Космические двигатели, использующие солнечную и химическую энергию. – М.: Изд-во МАИ, 2016. – 100 с.
94. Формалев В. Ф., Ревизников Д. Л., Численные Методы. Под редакцией А. И. Кибзуна. «Физматлит», 2006.
95. Шалашилин В. И., Кузнецов Е.Б. Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация. М.: Эдиториал УРСС, 1999.
96. Эльясберг П.Е. Введение в теорию полета искусственных спутников Земли. М: Наука, 1965. 540с.
97. Allgower E., Georg K.: Numerical continuation method. An introduction. Springer-Verlag, 1990.
98. Avduevsky V.S., Akim E.L... Konstantinov M.S. Space vehicle of new generation for solar system study. Paper IAF-98-Q.2.06, Melbourne, Australia, September 28-October 2, 1998.
99. Battin Richard H., An Introduction to Mathematics and Methods of Astrodynamics, Revised Edition. AIAA Education Series, 1999.
100. Bernard Bonnard, Jean-Baptiste Caillaud, Romain Dujol, Averaging and optimal control of elliptic Keplerian orbits with low propulsion. Science Direct, Systems & Control Letters 55, p 755 – 760, 2006.

101. Beyer H. G., Deb K. On self-adaptive features in real-parameter evolutionary algorithms. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 5(3):250–270, 2001.
102. Beyer HG. *The Theory of Evolution Strategies*. Springer, Berlin, 2001, 381 pp.
103. Brouke R. A. and Cefola P. J. “On the Equinoctial Orbital Elements”, *Celestial Mechanics*, Vol. 5, pp. 303-310, 1972.
104. Caillau J. B., Gergaud J. and Noailles J., (TfMin): short reference manual. Technical report Technical Report RT/APO/01/3, CNES, France.
105. Caillau J.B., Gerguad J., Noailles J., 3D Geosynchronous Transfer of a Satellite: Continuation on the Thrust, *journal of optimization theory and applications*. Vol.118, No:3, pp.541-565, September 2003.
106. Casalino L., Colasurdo G. *Indirect Methods for the Optimization of Spacecraft Trajectories // Modeling and Optimization in Space Engineering*, Springer Science+Business Media New York, 2013, pp. 141-158.
107. Casalino L., Colasurdo G., Pastrone D. Optimization of ΔV Earth-Gravity-Assist Trajectories. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 21, No. 6, November–December 1998, pp. 991-995.
108. Casalino L., Colasurdo G., Pastrone D. Optimization Procedure for Preliminary Design of Opposition-Class Mars Missions. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 21, No. 1, January–February 1998, c.134-140.
109. Cassalino L., Colasurdo G. and Matteo Rosa Sentinella. Indirect Optimization Method for Low-Thrust Interplanetary Trajectories. the 30th international Electric Propulsion Conference, Florence, Italy September 17-20, 2007.
110. Cassalino L., Colasurdo G. Optimization of Variable-Specific-Impulse Interplanetary Trajectories. *Journal of guidance, control, and dynamics*. Vol.27, No.4, July-August 2004.
111. Chobotov V.A. *Orbital Mechanics*, Third Edition. AIAA Education series, 2002.
112. Christodoulos A. Floudas. *Deterministic Global Optimization Theory, Methods and Applications*. Springer Science+Business Media Dordrecht 2000.741 p.
113. D'Amario, L.A., Byrnes, D.V., and Stanford, R.H.,. A New Method for Optimizing Multiple-Flyby Trajectories. *Journal of Guidance and Control*, Vol. 4, No. 6, November–December 1981, pp.591-596
114. D'Amario, L.A., Byrnes, D.V., Sackett, L.L., and Stanford, R.H., Optimization of Multiple Flyby Trajectories, AAS Paper 79-162, AAS/AIAA Astrodynamics Conference, Provincetown, Mass., June 1979.

115. Eagle D. Lambert's Problem. MATLAB functions and scripts for solving the geocentric and heliocentric Lambert problem. 19 Dec 2012 (Updated 10 Jul 2014)
http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/39530-lambert-s-problem?s_tid=srchtitle
116. Edelbaum T. N., Sackett Lester L., Optimal low-thrust geocentric transfer. AIAA 10th electric propulsion conference, 1973.
117. Edelbaum T. N., Sackett Lester L., Solar electric geocentric transfer with altitude constraints: analysis. Final technical report of NASA contract NAS 3-18886, 1975.
118. Edelbaum, T.N. Optimum power-limited orbit transfer in strong gravity fields./ AIAA J. 1965. V. 3. № 5, pp. 921–925.
119. Fain M.K., Starinova O.L. Low thrust gravity-assisted maneuvers for the spacecraft moving in the Earth-Moon system // Proceedings of 8th International Conference on Recent Advances in Space Technologies, RAST 2017, 2017. Pp. 427-431
120. Fain M.K., Starinova O.L., Gorbunova I.V. и др. Simulation of Low Thrust Spacecraft Guided Motion for a Number of Missions in the Solar System // Procedia Engineering, 2017. Vol. 185. Pp. 275-282
121. Fedotov G.G., Konstantinov M.S., Petukhov V.G., Popov G.A. Electric propulsion mission to the main belt asteroid: optimal parameters of the ion engine. Paper IAF-97-S.3.03, Turin, Italy, October 1997.
122. Gao D.Y., Serali H. D. Advances in applied mathematics and global optimization. Springer, 2009. 541 p.
123. Geffroy Sophie, Epenoy Richard, Optimal low thrust transfers with constraints – generalization of averaging techniques. Acta Astronautica Vol. 41, No.3, p 133-149, 1997.
124. Gergaud J. and Martinon P., Using switching detection and variational equations for shooting method. ENSEEIHT-IRIT, UMR CNRS 5505. John Wiley & Sons, Ltd, 2006.
125. Gorbunova I., Starinova O. Analytical control laws of the heliocentric motion of the solar sail spacecraft // AIP Conference Proceedings, 2014. Vol. 1637. Pp. 358-367
126. Haberkorn T., Gergaud J. and Martinon P., Low Thrust Minimum-fuel orbital transfer: an homotopic approach. Technical report «Contract No 02/CNES/0257/00-DPI 500» CNES, France.
127. Haberkorn T., Gergaud J. and Noailles J., MfMax(v0 & v1): Method explanation manual. Technical report RT/APO/04/03 (January 2004).
128. Hairer E. Solving ordinary differential equation I, Nonstiff problem. Second revised edition. Springer. 2008.

129. Hansen N, Kern S. Evaluating the CMA evolution strategy on multimodal test functions. In Xin Yao et al., editors, *Parallel Problem Solving from Nature - PPSN VIII*, pages 282–291. Springer, 2004.
130. Hansen N, Müller SD, Koumoutsakos P. Reducing the time complexity of the derandomized evolution strategy with covariance matrix adaptation (CMA-ES). *Evolutionary Computation*, 11(1):1–18, 2003.
131. Hansen N, Ostermeier A. Completely derandomized self-adaptation in evolution strategies. *Evolutionary Computation*, 9(2):159–195, 2001.
132. Hansen N, Ostermeier A. Convergence properties of evolution strategies with the derandomized covariance matrix adaptation: The $(\mu/\mu_I, \lambda)$ -CMA-ES. In *Proceedings of the 5th European Congress on Intelligent Techniques and Soft Computing*, pages 650–654, 1997.
133. Hansen N. Invariance, self-adaptation and correlated mutations in evolution strategies. In Schoenauer M, Deb K, Rudolph G, Yao X, Lutton E, Merelo JJ, Schwefel HP, editors, *Parallel Problem Solving from Nature - PPSN VI*, pages 355–364. Springer, 2000.
134. Irving, J.H. Low Thrust Flight: Variable Exhaust Velocity in Gravitational Fields. *Space Techn.*, 10(4), 1959.
135. Izzo D. and T. Vinko. Global Optimisation Heuristics and Test Problems for Preliminary Spacecraft Trajectory Design. ACT TECHNICAL REPORT, ACT-TNT-MAD-GOHTPPSTD - SEPTEMBER 2008
136. Izzo Dario. Revisiting Lambert’s Problem. Article in *CELESTIAL MECHANICS AND DYNAMICAL ASTRONOMY*, MARCH 2014. Impact Factor: 2.08 DOI: 10.1007/s10569-014-9587-y. Source: arXiv. <http://www.researchgate.net/publication/260716341> (assessed 14.06.2016)
137. Izzo Dario. Revisiting Lambert’s Problem. Article in *CELESTIAL MECHANICS AND DYNAMICAL ASTRONOMY*, MARCH 2014. Impact Factor: 2.08 DOI: 10.1007/s10569-014-9587-y. Source: arXiv. <http://www.researchgate.net/publication/260716341>
138. Jaan Kiusalaas. *Numerical Methods in Engineering with MATLAB*, Published in the United States of America by Cambridge University Press, New York, 2005.
139. John T. Betts. Survey of numerical methods for trajectory optimization. *Journal of guidance, control and dynamics*. Vol.21, No.2, March-April 1998.
140. JUICE. Jupiter Ice Moons Explorer. Exploring the emergence of habitable worlds around gas giants. Definition Study Report. European Space Agency. September 2014. C. 126.

141. Kechichian Jean A., "Equinoctial Orbit Elements: Application to Optimal Transfer Problems", AIAA 90-2976, AIAA/AAS Astrodynamics Conference, Portland, OR, 20-22 August 1990.
142. Kechichian Jean A., Minimum fuel time fixed rendezvous using constant low thrust. *Advances in astronautical science*, vol.82, ISSN 00653438, 1995.
143. Kechichian Jean A., Optimal low thrust rendezvous using equinoctial orbital elements. *Acta Astronautica* Vol. 38, No. 1, pp. 1-14, 1996.
144. Kluever C.A. Geostationary Orbit Transfers using Solar Electric Propulsion with Specific Impulse Modulation. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 41(3), p. 461-466, May-June 2004.
145. Konstantinov M., Fedotov G. Estimation of an opportunity of Mercury mission with use of solar electric propulsion. Paper IAF-97-V.2.09, Turin, Italy, October, 1997.
146. Konstantinov M., Kim V., Scortecci F. Investigation of a Fully Integrated Solar Stationary Plasma Propulsion System for Geostationary Orbit Insertion, IEPC-97-157, Cleveland, Ohio, USA, 1997.
147. Konstantinov M., Petuhkov V., Fedotov G. Electric propulsion mission to Mercury. Second European Spacecraft Propulsion Conference, 27-29 May, 1997 pp 48-50, (ESA SP-398, Aug.1997).
148. Konstantinov M.S. Analysis of trajectories of the insertion into geostationary orbit of a SC with the chemical and electric propulsion with using of Moon's swingby. Proceeding of 54-th International Astronautical Congress. September 29 – October 3, 2003, Bremen, Germany, Paper IAC-03-A.1.06. 2003
149. Konstantinov M.S. Optimization method of low thrust transfer from elliptical orbit into noncoplanar circular orbit. 17-th International Symposium on Space Flight Dynamics. 16-20 June 2003. Moscow, Russia. Proceedings. Volume 1. Keldysh Institute of Applied Mathematics, Space Information Analytical Systems. 2003, pp 314-324.
150. Konstantinov M.S. Optimization of low thrust transfer between noncoplanar elliptic orbits. Paper IAF-97-A.6.06, Turin, Italy, October 1997.
151. Konstantinov M.S., Fedotov G.G. Optimization of Low Thrust Transfer Between Noncomplanar Elliptic Orbits. IAF-97-A.6.06, 1997.
152. Konstantinov M.S., Fedotov G.G. Popov G.A. Transport capabilities of a spacecraft with the chemical and electric propulsion at the insert of satellites into geostationary orbit. Paper IAF-99-V.2.06, Amsterdam, The Netherlands, October 4-8, 1999.

153. Konstantinov M.S., Fedotov G.G. Transport opportunities of Mercury of mission with use of launcher “SOYUS” and solar electric propulsion. Paper IAF-98-V.2.09, Melbourne, Australia, September 28-October 2, 1998.
154. Konstantinov M.S., Fedotov G.G., Petukhov V.G., Popov G.A. Electric Propulsion Mission to GEO Using Soyuz/Fregat Launch Vehicle, Proceeding of 52-nd International Astronautical Congress. October 1-5, 2001, Toulouse, France. Paper IAF-01-V.3.02, 2001
155. Konstantinov M.S., Orlov A.A. Optimization of low thrust trajectory to the Jupiter flight with two gravity assists near the Earth. Vestnik MAI, vol.21 # 1, 2014. P.58-69.
156. Konstantinov M.S., Orlov A.A. Trajectory optimization of low-thrust spacecraft for Jupiter research using Earth gravity assist maneuver. Vestnik NPO IM. S.A. Lavochkina, 5[21], 2013, p 42-46. <http://vestnik.laspace.ru/archives/05-2013/> (assessed 14.06.2016)
157. Konstantinov M.S., Petukhov V.G. Methodical Aspects of Optimization of Complex Interplanetary Trajectories (Global Trajectory Optimization). IAC-06-C1.4.03, 2006.
158. Konstantinov M.S., Petukhov V.G. One Version of a Space Transport System for Research of the Sun. The 62-nd International Astronautical Congress, Paper IAC-11.C4.6.10, Cape Town, South Africa, 2011.
159. Konstantinov M.S., Petukhov V.G., Loeb H.W.. Application of RIT-22 Thruster for InterhelioProbe Mission. Электронный журнал «Труды МАИ». Выпуск № 60, 2012, 10 стр.
160. Konstantinov M.S., Petukhov V.G., Thein Min. Analysis of the flight paths to Jupiter using the sequence of gravitational maneuvers. IAC paper, IAC-15-A3.IP.4. Jerusalem, Israel, 2015.
161. Konstantinov M.S., Petukhov V.G., Thein Min. Optimization of spacecraft insertion into the system of heliocentric orbits for Sun exploration. IAC paper, IAC-14-C1.9.4. 65th IAC, Toronto, Canada, 2014.
162. Konstantinov M.S., Petukhov V.G., Thein Min. The one mission for Sun exploration. IAC paper, IAC-12-A3, 5, 5. 63th IAC, Naples, Italy, 2012.
163. Konstantinov M.S., Popov G.A., Fedotov G.G. Estimation of possibility of using of stationary plasma thrusters M100...M200 for insert into working earth orbits. Paper IAF-98-S.4.06, Melbourne, Australia, September 28-October 2, 1998.
164. Konstantinov M.S., Thein Min. Low thrust trajectory optimization using covariance matrix adaptation evolution strategy. The Advances in the Astronautical Sciences Series. vol.161 (2018). p. .
165. Konstantinov M.S., Thein Min. Method of interplanetary trajectory optimization for the spacecraft with low thrust and swing-bys. Acta Atronautica. №.136 (2017) p. 297-311.

166. Konstantinov M.S., Thein Min. Optimization of the trajectory of the spacecraft insertion into the system of heliocentric orbits. *Cosmic research*. Vol.55. issue 3, 2017. p. 214-223.
167. Konstantinov M.S., Thein Min. Preliminary optimization of the complicated interplanetary flight path of the spacecraft with electric propulsion. *Procedia Engineering*. Vol.185, 2017, p. 246-253.
168. Konstantinov, M.S., Petukhov, V.G. Easy engineering technique of optimal electric propulsion trajectory estimation (2006) AIAA 57th International Astronautical Congress, IAC 2006, 9, pp. 6277-6287.
169. Kurochkin D.V., Starinova O.L. Features of optimization of interplanetary flights with low-thrust engines // *RAST 2013 - Proceedings of 6th International Conference on Recent Advances in Space Technologies*, 2013. Pp. 251-254
170. Kuznetsov V. (ed.). *INTERHELIOPROBE Project. Workshop Proceedings*. Tarusa, May, 11-13 2011, 192 p.
171. Kuznetsov V.. *The Russian InterhelioProbe Mission // Fourth Solar Orbiter Workshop*, Telluride, Colorado, USA, March 27-31, 2011. 20 p.
172. Lozano J. A., Larranaga P. and others. *Towards a new evolutionary computation. Advances in the estimation of distribution algorithms*. Springer. 2006. 306 p.
173. Madsen K., Nielsen H.B., Tingleff O. *Methods for non-linear least square problems*, 2nd Edition, April 2004.
174. Marec J.P. *Optimal space trajectories*. Elsevier scientific publishing company, 1979. p.329.
175. Matogawa Yasunori, *Optimum low thrust transfer to geosynchronous orbit*. *Acta Astronautica* Vol. 10, No. 7, pp. 467-478, 1963.
176. Mauro Pontani, Bruce Conway. *Optimal low thrust orbital maneuvers via indirect swarming method*. *Journal of optimization theory application*. No. 162 2014. p. 272-292.
177. Medvedev A., Khatulev V., Yuriev V., Petukhov V., Konstantinov M.S. *Combined flight profile to insert telecommunication satellite into geostationary orbit using "Rockot" light-weight class launch vehicle*. Paper IAF-00-V.2.09, Rio-de-Janeiro, Brasilia, October 2-6, 2000.
178. Obukhov V.A., Popov G.A., Kim V.P, Konstantinov M.S., Fedotov G.G *Electric Propulsion for the Phobos-Soil Mission*. Paper IAF-00-S.4.05, Rio-de-Janeiro, Brasilia, October 2-6, 2000.
179. Olympio J.T. *Optimisation and Optimal Control Methods for Planet Sequence Design of Low-Thrust Interplanetary Transfer Problems with Gravity-Assists*. PhD Thesis, l'Ecole des Mines de Paris, 169 p., 2008.

180. Petropoulos A.E. A Review of Some Exact Solutions to the Planar Equations of Motion of a Thrusting Spacecraft. In 2nd International Symposium Low-Thrust Trajectories, Toulouse, France, 2002.
181. Petropoulos A.E. A Shape-Based Approach to Automated, Low-Thrust Gravity-Assist Trajectory Design. PhD thesis, Purdue University, 2001.
182. Petropoulos A.E., Longuski J.M. Automated Design of Low-Thrust Gravity-Assist Trajectories, AIAA-2000-4033, 10 p.
183. Petropoulos A.E., Longuski J.M., Bonfiglio E.P. Trajectories to Jupiter via Gravity Assists from Venus, Earth, and Mars. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 37(6), 2000.
184. Petropoulos A.E., Longuski J.M.. A Shape-Based Algorithm for the Automated Design of Low Thrust, Gravity Assist Trajectories. In AAS/AIAA Astrodynamics Specialists Conference, 2001.
185. Petropoulos Anastassios E., James M. Longuski, and Eugene P. Bonfiglio. Trajectories to Jupiter via Gravity Assists from Venus, Earth, and Mars. *Journal of Spacecraft and Rockets*. Vol. 37, No. 6, November–December. 2000, pp. 776-783
186. Petropoulos Anastassios E., Theresa D. Kowalkowski, Matthew A. Vavrina, Daniel W. Parcher, Paul A. Finlayson, Gregory J. Whiffen, Jon A. Sims 1-st ACT global trajectory optimization competition: Results found at Jet Propulsion Laboratory. *Acta Astronautica*, Volume 61, Issue 9, November 2007, pp. 806-815
187. Petukhov V.G, Thein Min, Ivanyuhin A.V.. Joint optimization of main design parameters of electric propulsion system and spacecraft trajectory. The 6th international conference on astrodynamics tools and techniques, Darmstadt, Germany, 2016.
188. Petukhov V.G, Woo Sang Wook. Joint optimization of the trajectory and the main parameters of an electric propulsion system. *Procedia engineering*. (2017) №.185, pp 312 – 318.
189. Petukhov V.G. Homotopic Approach to Low-Thrust Trajectory Optimization: Numerical Technique and Tools. 4th International Conference on Astrodynamics Tools and Techniques, 3-6 May 2010, ESA/ESAC, Madrid, Spain. *ESA Proceedings WPP-308*, 8 pp.
190. Petukhov V.G. Optimization of interplanetary trajectories for spacecraft with ideally regulated engines using the continuation method (2008) *Cosmic Research*, 46 (3), pp. 219-232.
191. Petukhov V.G., Ivanyukhin, A.V., The thrust minimization problem and its applications (2015) *Cosmic Research*, 53 (4), pp. 300-310.
192. Petukhov V.G.. Continuation method for low thrust trajectory optimization (in Russian). Dissertation for Doctor of technical science degree, Moscow Aviation Institute, 2013.

193. Petukhov V.G.. Joint Optimization of the Low-Thrust Trajectory and the Main Design Parameters of Electric Propulsion System. IAC-15,C1,1,5. Jerusalem, Israel, 2015.
194. Petukhov V.G.. Method of continuation for optimization of interplanetary low-thrust trajectories. (2012) *Cosmic Research*, 50 (3), pp. 249-261.
195. Petukhov, V.G. Minimum-thrust problem and its application to trajectory optimization with thrust switchings (2013) *Proceedings of the International Astronautical Congress, IAC*, 7, pp. 5206-5214.
196. Petukhov, V.G. Optimal multi-orbit trajectories for inserting a low-thrust spacecraft to a high elliptic orbit (2009) *Cosmic Research*, 47 (3), pp. 243-250.
197. Petukhov, V.G. Optimization of interplanetary trajectories for spacecraft with ideally regulated engines using the continuation method (2008) *Cosmic Research*, 46 (3), pp. 219-232.
198. Petukhov, V.G. Optimization of multi-orbit transfers between noncoplanar elliptic orbits (2004) *Cosmic Research*, 42 (3), pp. 250-268.
199. Petukhov, V.G. Quasioptimal control with feedback for multi-orbit low-thrust transfer between noncoplanar elliptic and circular orbits (2011) *Cosmic Research*, 49 (2), pp. 121-130.
200. Pinter J. D. *Global optimization (Scientific and Engineering case studies)*. Springer 2006. 558 p.
201. Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G, Gamkrelidze V.G., Mishchenko E. F. *The mathematical theories of optimal processes*. Moscow, Science, 1976.
202. Popov, G.A., Kulkov, V.M., Petukhov, V.G. Analysis for possibility to use space platform with electric propulsion system in combination with the launch vehicle for air launch (2014) *29th Congress of the International Council of the Aeronautical Sciences, ICAS 2014*.
203. Ruth Misener, Christodoulos A. Floudas: ANTIGONE: Algorithms for continuous / Integer Global Optimization of Nonlinear Equations. *J. Global Optimization* 59(2-3): 503-526 (2014)
204. Salmin V.V., Starinova O.L., Ishkov S. A. *Solution methods for variational problems of low thrust space flight mechanics*. Hanover: European Academy of Natural Science Press, 2014. 196 c.
205. Salmin V.V., Starinova O.L., Volosuev V.V. и др. Optimization methods of near-Earth and interplanetary flights with low thrust // *AIP Conference Proceedings*, 2017. Vol. 1798.
206. Sean Luke. *Essential of Metaheuristics*. Second Edition. Online Version 2.0. 2013. 253 p.
207. Standish, E.M., Newhall, X X, Williams, J.G. and Folkner, W.F. *JPL Planetary and Lunar Ephemerides, DE403/LE403*, JPL IOM 314.10-127, 1995.
208. Stefan Schaffler. *Global Optimization. A stochastic approach*. Springer. 2012. 145 p.

209. Tadashi S. A Study of Variable Thrust, Variable Specific Impulse Trajectories for Solar System Exploration. PhD thesis, Georgia Institute of Technology, December 2004.
210. Ulybyshev yu. P. Optimization of low-thrust orbit transfers with constraints. Cosmic Research September 2012, Volume 50, Issue 5, pp 376–390
211. V. Kim, G.A. Popov, V.A. Obuchov, Konstantinov M.S., Fedotov G.G. Electric propulsion modules for “YAMAL” and “ASTRO” spacecraft orbital transfer. Space Technology, 2001, Vol. 20, No. 1, pp. 41-48
212. Vasile M. and P De Pascale. “Preliminary Design of Multiple Gravity Assist Trajectories,” Journal of Spacecraft and Rockets, Vol. 43, № 4, July-August 2006, pp. 794–805
213. Weise Thomas. Global Optimization Algorithms - Theory and Application. 2008. 842 p.
<http://www.it-weise.de/projects/book.pdf>
214. http://solarprobe.gsfc.nasa.gov/spp_mission.htm
215. <http://cs.astrium.eads.net/sp/spacecraft-propulsion/ion-propulsion/index.html>
216. http://samspace.ru/products/launch_vehicles/rn_soyuz_2/
217. <http://www.khrunichev.ru/main.php?id=44>. Официальный сайт Федерального государственного унитарного предприятия «Государственный космический научно-производственный центр имени М.В.Хруничева»
218. <https://www.lri.fr/~hansen/cmaapplications.pdf>
219. <https://www.lri.fr/~hansen/cmatutorial110628.pdf>
220. <https://www.mathworks.com/>

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ И ОБОЗНАЧЕНИЙ

ПМП	– принцип максимум Л. С. Понтрягина
ГСО	– геостационарная орбита;
ДУ	– двигательная установка;
КА	– космический аппарат;
РБ	– разгонный блок;
РН	– ракета-носитель;
ЭРДУ	– электроракетная двигательная установка;
ГМ	– гравитационный маневр;
ω	– аргумент перицентра;
μ	– гравитационный параметр притягивающего центра,
Ω	– долгота восходящего узла;
ν	– истинная аномалия; неопределенный множитель Лагранжа;
τ	– параметр продолжения;
σ	– среднеквадратическое отклонение;
β	– угол поворота вектора асимптотической скорости при гравитационном маневре;
ψ	– угол рысканья;
ψ, ψ_s	– функция переключения;
ϑ	– угол тангажа;
δ	– функция включения двигателя ($\delta=1$ или 0),
η_{EPS}	– к.п.д. ЭРДУ;
μ_{pl}	– гравитационный параметр планеты;
$\gamma_{ЭДУ}$	– удельная масса энергодвигательной установки;
a	– большая полуось;
$a = T/m$	– величина реактивного ускорения;
a_{τ}, a_r, a_n	– трансверсальная, радиальная и бинормальная проекции реактивного ускорения;
$a_{то}$	– относительная масса системы хранения рабочего тела;
СМА-ES	– Covariance Matrix Adaptation- Evolution Strategy (Эволюционная стратегия с адаптацией ковариационной матрицы)
\mathbf{E}	– единичная матрица;
\mathbf{e}, \mathbf{e}_p	– единичный вектор, направленный вдоль вектора тяги;
e	– эксцентриситет;

E – эксцентрисическая аномалия;
 \mathbf{f} – вектор невязок краевой задачи;
 $g_0 = 9.80665 \text{ м/с}^2$ – стандартное ускорение свободного падения;
 H – гамильтониан;
 h, e_x, e_y, i_x, i_y, F – равноденственные элементы;
 i – наклонение;
 $I_{\text{уд}}$ – удельный импульс тяги;
 J – функционал задачи оптимального управления;
 m – масса КА,
 M – средняя аномалия;
 $m_{\text{рт}}$ – масса рабочего тела;
 n – среднее движение;
 T – величина реактивной тяги,
 p – фокальный параметр;
 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_h, \lambda_{e_x}, \lambda_{e_y}, \lambda_{i_x}, \lambda_{i_y})^T$ – сопряженный вектор;
 $\lambda_m, \boldsymbol{\lambda}_r, \boldsymbol{\lambda}_v$ – сопряженные переменные к m, \mathbf{r} и \mathbf{V} соответственно;
 \mathbf{r} – вектор положения КА;
 r – удаление КА от притягивающего центра,
 \mathbf{r}_p – вектор положения удаленного небесного тела;
 r_p – радиус перицентра пролетной планетоцентрической орбиты;
 t – время;
 T – длительность перелета;
 V – величина орбитальной скорости КА;
 \mathbf{V}_∞ – вектор гиперболического избытка скорости;
 V^* – масштаб скорости;
 $V_{\text{хар}}$ – характеристическая скорость;
 w – скорость истечения ЭРДУ
 \mathbf{X} – вектор, определяющий оскулирующую орбиту КА;
 \mathbf{z} – вектор неизвестных параметров краевой задачи;
 μ_p – гравитационная постоянная удаленного небесного тела;

Индексы:

∞ – асимптотический (относящийся к границе сферы действия);
 «+» – отлетный;

«-» – подлетный;

0 – относящийся к начальному моменту времени;

a, α – относящийся к апоцентру;

f, k – относящийся к конечному моменту времени;

max – максимальный;

min – минимальный;

p, π – относящийся к перицентру;

pl – относящийся к планете;

КА – относящийся к КА;